Representaciones semióticas de objetos matemáticos y articulación de sentidos en situaciones de tratamiento. El caso de los profesores de matemáticas

Gladys Mejía Osorio

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, 2021

Representaciones semióticas de objetos matemáticos y articulación de sentidos en situaciones de tratamiento. El caso de los profesores de matemáticas

Gladys Mejía Osorio

Director de tesis: Ph. D. Pedro Javier Rojas Garzón

Doctorado Interinstitucional en Educación
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, 2021

Dedicatoria

A mis padres, por su amor incondicional
A mis hermanos por su apoyo

Agradecimientos

A Dr. Pedro Javier Rojas por su orientación y sus aportes
A Dr. Vicenç Font, Dr. Bruno D´Amore, Dr. Rodolfo Vergel
por sus enseñanzas y valiosos aportes
A Luis Alexander y Fredy Alejandro
Compañeros del doctorado por su amistad y aportes críticos
A mis amigos que siempre me han brindado su amistad
A los profesores que hicieron parte de este estudio
por su colaboración
A todos, ellos infinitas gracias sin su
colaboración y apoyo no fuese sido realidad este trabajo.

Tabla de contenido

Índice de Figuras

Índice de tablas

FICHA GENERAL DEL PROYECTO

<table>
<tr><td>Título:</td><td colspan="4">Representaciones semióticas de objetos matemáticos y articulación de sentidos en situaciones de tratamiento. El caso de los profesores de matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Investigador Doctorando:</td><td>Gladys Mejía Osorio</td><td>Código:</td><td colspan="2">20162601019</td></tr>
<tr><td>Correo electrónico:</td><td>gladys6m@hotmail.com</td><td>Teléfono:</td><td colspan="2">3177083867</td></tr>
<tr><td>Dirección de Correspondencia:</td><td colspan="4">KR 2B # 90B-66 Sur</td></tr>
<tr><td>Director de la Tesis:</td><td colspan="4">Pedro Javier Rojas Garzón</td></tr>
<tr><td>Correo electrónico:</td><td>pjrojasgarzon@gmail.com</td><td>Teléfono:</td><td colspan="2">3016957212</td></tr>
<tr><td>Línea de Investigación:</td><td colspan="4">Línea de investigación: Influencia de las transformaciones semióticas en las construcciones cognitivas.</td></tr>
<tr><td>Proyecto Académico:</td><td colspan="4">DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN</td></tr>
<tr><td>SNIES: 130173700001100111500</td><td colspan="4">DIRECCIÓN: Cl. 13 #3175, Bogotá</td></tr>
<tr><td>Facultad:</td><td colspan="4">CIENCIAS Y EDUCACIÓN</td></tr>
<tr><td>Universidad:</td><td colspan="4">UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS</td></tr>
<tr><td>Lugar de Ejecución del proyecto:</td><td colspan="4">Bogotá, D.C. (Colombia)</td></tr>
<tr><td>Nombre del Contacto:</td><td>Doctorado Interinstitucional en Educación DIE</td><td>Correo electrónico:</td><td colspan="2">die@udistrital.edu.co</td></tr>
<tr><td>Teléfono:</td><td>3238400
Ext: 6330/6334</td><td>Ciudad:</td><td colspan="2">Bogotá</td></tr>
<tr><td>Departamento:</td><td>Bogotá</td><td>Duración del proyecto (en meses):</td><td colspan="2">36</td></tr>
<tr><td>Palabras Claves:</td><td colspan="4">Transformaciones semióticas, tratamiento, articulación de sentidos, enfoque ontosemiótico, función semiótica.</td></tr>
<tr><td>Observaciones (Otros datos que considere importantes):</td><td colspan="4">El proceso de recolección de información se realizó de manera virtual en el que participaron 64 profesores (32 de primaria-32 de secundaria) en 8 regiones de Colombia.</td></tr>
</table>

Resumen ejecutivo

En las últimas décadas en la comunidad académica de Educación Matemática existe un creciente interés por abordar fenómenos asociados a la Semiótica en tanto, se reconoce que los signos son parte constitutiva del pensamiento. Cassirer (1964, como se citó en Godino, Batanero, Roa 2000) afirma que «el signo no es una mera envoltura eventual del pensamiento, sino su órgano esencial y necesario» (p.1). En el caso particular de las matemáticas el pensamiento que construyen los sujetos de los objetos matemáticos es reflejado por medio de las distintas representaciones, siendo la única vía para acceder al conocimiento matemático, puesto que los objetos matemáticos no son accesibles directamente por los sentidos sino vía los sistemas semióticos (Duval, 2004). Esto demanda que los sujetos se apropien de representaciones semióticas que les permita designar y trabajar sobre los objetos matemáticos en una diversidad de registros semióticos tanto al interior del mismo registro de representación semiótica como aquellas que se producen entre registros diferenciados, procesos cognitivos conocidos como *tratamientos* y *conversiones* (Duval, 1993).

Respecto a las conversiones y tratamientos D´Amore (2006), Santi (2011) y Rojas (2012) muestran evidencias que las dificultades en la comprensión de las matemáticas se asocian con las transformaciones de tratamiento y no solo son relacionados con las transformaciones de conversión como lo manifiesta (Duval, 2004). Este autor afirma que dicho proceso es una de las operaciones cognitivas fundamentales para que los sujetos accedan a una verdadera comprensión y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en gran parte son asociadas a dicho proceso cognitivo. La presente investigación centra la atención en la transformación cognitiva de tratamiento orientada: por un lado, a documentar el fenómeno relacionado con las dificultades que encuentran algunos profesores para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento; y por el otro, establecer similitudes y diferencias de estas dificultades con las que encuentran los estudiantes al solucionar tareas matemáticas que requieren realizar tratamientos reportadas en la literatura. Se realiza un estudio de caso colectivo con 11 profesores de matemáticas [5 de primaria y 6 de secundaria], seleccionados fruto de las soluciones realizadas por 64 profesores [32 de primaria y 32 de secundaria], quienes no realizan una articulación semiótica mínimo en tres tareas, es decir, aquellos profesores que desde el punto de vista sintáctico admiten la equivalencia entre las expresiones o representaciones, pero desde el aspecto semántico estas expresiones o representaciones son asociadas con objetos o situaciones matemáticas diferentes, impidiendo así, relacionar entre si los sentidos asignados a éstas. Se describe y analiza los procesos de asignación de sentidos de 11 profesores de matemáticas en relación a cuatro tareas específicas, que indaga por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas que requiere la realización de transformaciones de tratamiento, así como su necesaria articulación. Se asume un enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, desde dos perspectivas teóricas: la

teoría de transformaciones semióticas propuestos por Raymond Duval (1993, 2017) que permitió describir, consolidar y ubicar el problema de investigación en el campo de investigación de las transformaciones; y la teoría del enfoque ontosemiótico propuesta por, Juan D. Godino y sus colaboradores (1994, 2019) en tanto, brinda herramientas para analizar y explicar las soluciones dadas por los profesores que ponen en evidencia los significados personales otorgados a las representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento.

El presente estudio aportó elementos que posibilitaron identificar las dificultades que los profesores de matemáticas encuentran para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento: se contrasto las dificultades que los profesores de matemáticas encuentran con las dificultades encontradas por los estudiantes, aspectos que permiten concluir que tanto profesores como estudiantes realizan de manera adecuada los tratamientos requeridos que les permiten admitir la equivalencia entre las expresiones desde el plano sintáctico, pero dotar sentido y significado las expresiones relacionadas en las tareas impide para que éstos realicen el mismo reconocimiento.

Introducción

Uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es posibilitar que los estudiantes desarrollen la competencia de expresar y representar ideas matemáticas, así como poder transformarlas, formular y sustentar distintos puntos de vista que requieren del dominio de diversos recursos y registros, tanto en lenguaje natural como matemático. Esto demanda que los profesores comprendan las nociones matemáticas que han de enseñar, con un nivel de reflexión y una amplitud de análisis que les posibilite orientar adecuadamente actividades específicas que potencien la apropiación y el desarrollo de competencias matemáticas por parte de sus estudiantes, lo cual requiere que los profesores adquieran un conocimiento didáctico, disciplinar y pedagógico. Duval (2004) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilitan una manipulación sobre estos, aspecto que exige que tanto profesores como estudiantes reconozcan un mismo objeto matemático en diferentes representaciones, obtenidas mediante transformaciones semióticas. Si bien en el campo de la didáctica de las matemáticas se reportan diversas investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático, aún son escasos los estudios que documentan el conocimiento didáctico, disciplinar y pedagógico de los profesores de matemáticas, en virtud de ello, el presente estudio centra la atención en el conocimiento disciplinar de los profesores, específicamente indaga por los sentidos asignados por un grupo de profesores de matemáticas a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y las dificultades que estos encuentran para relacionar los sentidos entre sí, que son otorgados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, fenómeno que se conoce como *no articulación de sentidos* o *no articulación semiótica* (Rojas, 2012).

Lo anterior exige que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sea fundamental que los sujetos tengan la capacidad de transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que Duval (1993) denomina *tratamientos* y *conversiones*, respectivamente; reconociendo a su vez que la conversión es una de las operaciones cognitivas fundamentales para el acceso del sujeto a una verdadera comprensión en matemáticas, y centra la mirada en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en dicho proceso. Duval (1993,2017) afirma que usualmente los problemas cognitivos son relacionados con la *conversión*, específicamente este autor destaca la complejidad semiótica que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de diferentes representaciones [conversión]. Por su parte, D´Amore (2009) manifiesta que en matemáticas las transformaciones de *tratamiento* entre distintas representaciones semióticas no sólo resultan fundamentales, sino que podrían ser fuente de dificultades en la comprensión de objetos matemáticos por parte de los sujetos, y pueden ser un problema relevante en la construcción de un determinado objeto matemático.

La presente investigación está orientada, por un lado, a mostrar evidencias de las dificultades que encuentran los profesores para realizar una articulación semiótica o de sentidos, entendida como la capacidad que tienen los sujetos para relacionar los sentidos entre sí que son asignados a expresiones o representaciones obtenidas mediante tratamiento y, por otro lado, establecer similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los estudiantes y los profesores al resolver este tipo de tareas. Se realiza una descripción y un análisis del proceso de asignación de sentidos de 11 profesores que tiene a su cargo la asignatura de matemáticas quienes conforman un estudio de caso colectivo, fruto de las producciones realizadas por 64 profesores, en relación a cuatro situaciones específicas que indagan por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas y a su vez requieren de la realización de transformaciones de tratamiento. El trabajo se posiciona en un enfoque de investigación cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, puesto que brinda elementos sólidos para examinar situaciones y fenómenos educativos permitiendo así, una comprensión profunda de las dificultades que encuentran los profesores para relacionar entre sí los sentidos otorgados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento (Goetz y Lecompte, 1988). Se considera que el estudio es *descriptivo*, puesto que, se describió los rasgos fundamentales en el proceso de significación de representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento por parte de los profesores de matemáticas; *interpretativo,* en tanto, se comprendió y profundizó en la construcción de significados, por parte de los profesores de matemáticas en situaciones que requieren transformaciones de tratamiento; se realizó *un estudio de caso colectivo*, que permitió comprender los significados personales otorgados por un grupo de 11 profesores distribuidos en dos grupos, 5 profesores de educación básica primaria y 6 de educación básica secundaria y media vocacional. El trabajo se sitúa en un contexto semiótico puesto que, estudia de manera general la relación **semiosis-noesis** en la construcción de conocimiento matemático por parte de los profesores de matemáticas, que incluye aspectos sobre la actividad matemática, la comunicación sobre objetos matemáticos emergentes y la construcción cognitiva de estos.

En el capítulo 1, los lectores encontrarán con una contextualización y delimitación del problema de la no *articulación semiótica*, entendida en términos de funciones semióticas como el proceso interrumpido de encadenamiento semiótico en el que a una misma **expresión/antecedente** se le asignan dos **contenidos/consecuente** diferentes que no se logran relacionar entre sí, de manera análoga se asume la *articulación semiótica* como el proceso de encadenamiento semiótico en el que a una misma expresión/antecedente se le asignen dos contenidos/consecuente diferentes que se relacionan entre sí (Rojas, 2012). Se enfatiza en la pertinencia del trabajo, presentando argumentos que llevan a considerar su importancia y los aportes que entrega al campo de la educación matemática. Se reconoce las transformaciones de tratamiento como generadora de algunas dificultades en la comprensión de un objeto matemático.

En el capítulo 2, se presentan los trabajos previos que soportan el problema de investigación; en el capítulo 3, se consideran los aspectos teóricos tomados que aportan referentes teóricos al desarrollo de esta propuesta; el capítulo 4, describe el enfoque metodológico utilizado que sirvió de insumo para la consolidación del estudio de caso colectivo; en el capítulo 5 presentamos el método seguido para recolectar la información fruto de las soluciones realizadas por los 64 profesores frente al trabajo de las tareas propuestas, clasificados en dos grupos [primaria-secundaria], así como, el criterio que se empleó para seleccionar el grupo de profesores que conformaron el estudio de caso colectivo [no articulación semiótica mínimo en tres tares]; el capítulo 6, se presentan las configuraciones y las relaciones que los profesores establecieron por medio de las funciones semióticas, que emergen en el proceso de significación.

Finalmente en el capítulo 7, presentamos la discusión y conclusiones que se obtuvo del trabajo realizado, concluyendo que las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas quienes admiten la *equivalencia sintáctica* entre dos expresiones pero dotar sentido y significado dichas expresiones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes [equivalencia semántica].

.

CAPÍTULO 1
EL PROBLEMA DE LA NO ARTICULACIÓN SEMIÓTICA

En este capítulo se presenta una contextualización y la delimitación del problema de investigación; además se plantea la pregunta de investigación orientada a mostrar evidencias frente a las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para **articular sentidos** asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante transformaciones de tratamiento, así como, establecer similitudes y diferencias en relación a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, aspectos que orientan el rumbo de la presente investigación.

1.1. Contextualización y Planteamiento del Problema

Diferentes estudios en Didáctica de la Matemática dan cuenta de la importancia que tienen las representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Duval, 1993; D'Amore, Font y Godino, 2007, entre otros). En particular, Duval (1993, 2017) sostiene que las representaciones semióticas son fundamentales en matemáticas y la única vía como los sujetos pueden acceder al conocimiento matemático, debido a que los objetos trabajados en matemáticas no pueden ser percibidos directamente por los sujetos, característica que exige una distinción entre representación y objeto. Al respecto, este autor advierte la necesidad de no confundir la(s) representación(es) de un objeto matemático con el objeto en sí mismo y que genera una confusión inevitable al ser imposible un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica fenómeno que describe una *paradoja cognitiva* del pensamiento, que se robustece si no se diferencia la actividad matemática con la actividad conceptual y al considerar las representaciones semióticas como secundarias; Duval (2016) se pregunta cómo puede el objeto representado distinguirse de la representación semiótica utilizada cuando no hay acceso al objeto matemático independiente de las representaciones semióticas, (p. 76). Al respecto D'Amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi (2015) plantean que la paradoja cognitiva de Duval implícitamente brinda elementos de cómo debe ser considerada las matemáticas y qué actividades podrían contribuir para que los sujetos comprendan un determinado objeto, puesto que, la única opción que tienen los profesores es proponer a sus estudiantes tareas enmarcadas en representaciones semióticas, siendo la única vía para que los estudiantes construyan cognitivamente el objeto matemático, en tanto, el estudiante entra concretamente en contacto con representaciones y no con el objeto propiamente dicho, los sujetos deberán aprender a referenciarlas y manipularlas.

Por otro lado, Duval expresa que esta característica que tienen los objetos matemáticos hace que el aprendizaje sólo pueda ser conceptual que sólo a través de representaciones semióticas es posible una actividad sobre estos. Las representaciones semióticas y la posibilidad de transformarlas, permite una comprensión de dichos objetos como se ha mencionado anteriormente. Por su parte Font, Godino y D'Amore (2005) recalcan que hablar de representaciones equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc. Los autores sostienen que estas nociones constituyen el núcleo central, no sólo de las matemáticas, sino también de la epistemología, la psicología y en general de las disciplinas que centran la atención en la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo. Por su parte, Duval (2017) plantea que en el análisis del conocimiento no solo se debe considerar la naturaleza de objetos estudiados, sino también la forma en que los objetos se presentan y de cómo pueden acceder a estos, aspecto que hace que se encuentre en el corazón de lo que llama «*comprensión en matemáticas*».

En correspondencia a la comprensión de un objeto matemático, Duval (1996, 2017) expresa que no solo basta con *«disponer»* de diferentes registros semióticos, sino reconocer la posibilidad de transformar una representación en otra, tanto al interior de un registro semiótico como entre registros diferentes. Aspecto que requiere un dominio de una variedad de representaciones en diversos sistemas de representación, más específicamente en diversos registros semióticos. Este autor considera que el uso de más de un registro de representación semiótica es característico del pensamiento humano, la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo [histórico] de progreso del conocimiento. Característica que pone de relieve la relación estrecha que existe entre la *noesis* y la *semiosis*.1 Duval señala la célebre frase «*sin **semiosis** no hay **noesis***» sino que la *semiosis* se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la *noética*.

En relación a las representaciones Duval (1996, 2017) alude que un sistema semiótico es un registro de representación semiótica, si permite tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: formación, tratamiento y conversión. Frente a la *formación* el autor alude que esta hace referencia a la selección de una marca o conjunto de marcas que permite expresar o evocar un objeto que debe cumplir con unas reglas de conformidad. Estas reglas permiten identificar una representación como un elemento de un sistema semiótico determinado; hacen referencia a la determinación y combinación de unidades elementales para obtener unidades de nivel superior bajo las condiciones del sistema. Duval (1996, 2017) expresa que cuando la transformación de la representación se efectúa dentro del mismo registro donde se ha formado constituye lo que se denomina *tratamiento* de una representación. Por ejemplo, se realiza un tratamiento cuando se aplica una serie de procedimientos y leyes sin cambiar de registro semiótico. El autor manifiesta

[1] Desde los planteamientos de Duval (1995) la ***noesis*** son actos cognitivos, como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia; la ***semiosis***, por su parte, es cualquier forma de actividad, conducta o proceso que involucre signos, esto es, la aprehensión o la producción de una representación semiótica [proceso asociado con la interpretación de signos]. Si bien podría asumirse que la noesis es independiente de la semiosis, para este autor no existe noesis sin semiosis.

que se habla de *conversión* cuando se tiene una transformación de una representación dada en un registro, en otra representación en un registro diferente, que conserva parte del significado de la representación inicial, pero al mismo tiempo permite hacer otras miradas del objeto matemático y conocer otros elementos de éste. Esta condición hace que la conversión sea una transformación externa al registro de partida. Por ejemplo, al tener una ecuación de una función se construye una gráfica a partir de ésta que permite detallar el comportamiento de la función.

Duval plantea que el reconocimiento de un objeto matemático desde diversas representaciones en registros semióticos diferentes [conversión], es una de las actividades cognitivas más complejas para lograr una comprensión adecuada del objeto matemático. Al respecto, D´Amore (2009) alude la importancia de realizar una precisión importante a la teoría propuesta por Duval quien otorga un lugar central a la *conversión* respecto a las demás funciones, y en particular respecto al *tratamiento* considerada por muchos matemáticos y educadores matemáticos decisiva desde el punto de vista matemático. D´Amore (2006b) expresa que este tipo de transformación también puede generar dificultades en la comprensión de un objeto matemático, y reporta la experiencia que ha tenido con algunos estudiantes al solucionar este tipo de tareas que permite concluir que en matemáticas las transformaciones de tratamiento podrían ser causa de dificultades en la aprehensión de objetos matemáticos por parte de los aprendices, e inicia las primeras investigaciones formales en torno a los tratamientos específicamente en mostrar evidencias de cómo los sujetos atribuyen significados diversos a dos escrituras de un mismo objeto matemático; en busca de indicios que permitiera corroborar esta tesis, realiza un estudio con algunos estudiantes de quinto de primaria y profesores en ejercicio en Italia, dentro de los hallazgos encontrados logró identificar que una misma persona que realiza correctamente transformaciones semióticas de tratamiento pasando de una representación semiótica a otra representación de un objeto matemático, conservando el mismo registro semiótico, atribuye significados diversos a las dos escrituras, hecho que evidencia que el significado asignado intuitivamente al objeto O cambia, en la mente de un estudiante, lo que D´Amore (2006b) ha denominado como ***cambio de sentido*** y Rojas (2012) como ***no articulación semiótica*.** Fenómeno que se presenta independiente de la formación académica de los sujetos quienes encuentran algunas dificultades al abordar situaciones que requieren la aplicación de tratamientos que impiden la comprensión de objetos matemáticos, D´Amore (2006b) planteó la necesidad de investigaciones que por un lado centren la atención en dicho proceso, y, por otro lado, permita profundizar y clarificar el fenómeno, desde una óptica antropológica o, mejor aún, pragmática. En virtud de ello, Santi (2011) realizó un estudio con estudiantes Italianos, en el que aporta evidencias de las dificultades que encuentran éstos en la comprensión de la tangente a una curva a la hora de resolver tareas que requieren la realización de tratamientos; por su parte, Rojas (2012) realizó un estudio con estudiantes en Colombia en relación con algunos objetos matemáticos como expresiones algebraicas, probabilidad y geometría analítica, en el que evidenció que los estudiantes admiten la equivalencia sintáctica entre expresiones, aplican correctamente los procedimientos y reglas respectivas [tratamientos], pero dotar de sentido y significado las expresiones, impiden que reconozcan la equivalencia semántica de las expresiones.

En correspondencia con D´Amore (2006b) se busca corroborar que las trasformaciones semióticas de tratamiento limitan a los sujetos a tener una comprensión adecuada de un objeto matemático, que deben ser ampliadas para otros contextos matemáticos y otro tipo de población, como el caso de los profesores de matemáticas, que muestran evidencia que no sólo la conversión se vincula con problemas en la comprensión de objetos matemáticos, sino que las transformaciones de tratamiento también generan en muchas ocasiones dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, las cuales no dependen del nivel de la formación matemática de las personas, puesto que independiente de su formación académica de los sujetos este fenómeno persiste (D´Amore, 2006b). El presente trabajo centra la atención en los profesores de matemáticas, específicamente en el conocimiento disciplinar de éstos, la selección de la población se debió a tres aspectos; el primero de ellos se relaciona con el dominio disciplinar que se espera tengan los profesores con el fin que brinda herramientas sólidas a sus estudiantes para que desarrollen la competencia de expresar y representar ideas matemáticas, así como poder transformarlas, formular y sustentar puntos de vista que requieren el dominio de distintos recursos y registros tanto en lenguaje natural como matemático; segundo, si bien en el campo de la didáctica de las matemáticas se reportan diversas investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático del estudiante para profesor, aún son escasos los estudios que documentan el conocimiento didáctico, disciplinar y pedagógico de los profesores de matemáticas en ejercicio y, tercero, como afirma D´Amore (2006b) faltan estudios que profundicen en los cambios de sentidos o la ***no articulación semiótica*** entendida como la capacidad que tienen los sujetos para relacionar los sentidos2 entre sí, asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento Rojas (2012) tanto en otros contextos matemáticos de los ya reportados, como en diferentes poblaciones de estudio, por ejemplo, los profesores de matemáticas.

Frente a la formación de los profesores Pontón (2015) manifiesta que en Colombia**:**

> Estamos en un momento coyuntural de muchas debilidades en la propuesta de política de Estado, frente a la formación del pensamiento matemático, a pesar que investigadores y conocedores del área han participado en la elaboración de diferentes documentos, como los lineamientos curriculares y los estándares básicos de calidad, aún nos encontramos ante una educación débil. (Foro: Transición colegio-universidad. Problemática del rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas).

Así mismo, Pontón señala que existen profesores en ejercicio que, a pesar de contar, con títulos de licenciatura o ingeniería, la educación matemática sigue siendo débil, situación que se refleja en muchos casos en la formación matemática de los estudiantes. Lo anterior resalta la

[2] En correspondencia con los planteamientos de Rojas (2012) se asume que el sentido no depende propiamente del objeto matemático, sino de la atribución que realiza un sujeto en una situación específica, es decir, el sentido atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que se aborde, por tanto, se considera que éste es flexible, dinámico y en movimiento.

importancia de indagar por el conocimiento matemático de los profesores y las concepciones que éstos han construido frente a los objetos matemáticos, así como, identificar las posibles dificultades que pueden encontrar al abordar tareas matemáticas, específicamente aquellas que se enmarcan en situaciones de tratamiento.

En virtud de lo anterior en el presente trabajo nos hemos centrado en el conocimiento disciplinar del profesor de matemáticas, específicamente en documentar las dificultades que encuentran estos para relacionar dos sentidos entre sí, asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento lo que se ha denominado como *no articulación semiótica* (Rojas 2012). En busca de indicios que ponga en evidencia este fenómeno y que dichas dificultades persisten independiente del tipo de formación académica. En la investigación se proponen dos situaciones con profesores de matemáticas en ejercicio [Expresiones algebraicas y probabilidad] que permitieron evidenciar, la complejidad asociada a la transformación semiótica de tratamiento, relacionada con el cambio de sentido asignado a un objeto matemático D´Amore (2006b) o con la articulación de sentidos asignados a un objeto matemático (Rojas, 2012). Las situaciones fueron trabajadas con 16 profesores de matemáticas de la ciudad de Bogotá, quienes en su mayoría contaban con formación matemática y cursaban una Maestría en Educación. Los resultados que se presentan a continuación corresponden a la tarea sobre interpretación de expresiones algebraicas, que fue trabajada con estudiantes por Rojas (2012) la cual hace referencia a:

[Tarea – Interpretación de las expresiones]. En lo que sigue, asuma que n representa un número entero cualquiera.

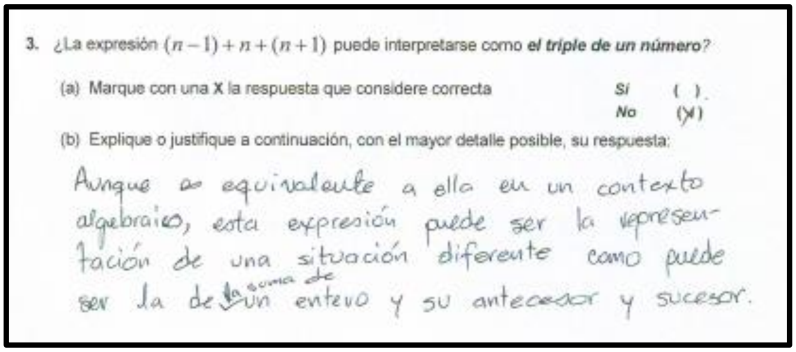
1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión $3n$.
2. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$
3. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$y la expresión $3n$?
4. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como ***el triple de un número****?*

Tomada de D´Amore (2006b) y Rojas (2012)

Ante el ítem que indaga por el sentido que otorgan los profesores a las expresiones $3n$, y $(n-1)+n+(n+1)$ algunos manifiestan que corresponde al triple de un número y otros que indica un coeficiente explícito que es *3* el cual se puede operar con cualquier número y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es asociada con la suma de tres números consecutivos. Al preguntar por la relación que existe entre ambas, se encontró que algunos profesores reconocen una relación de equivalencia entre las expresiones, algunos aluden que: *«ya que son números consecutivos pues al observar el número n [posición central] podemos agregar una unidad al anterior y sustraer una al siguiente para no afectar la expresión y se obtienen* $(n+n+n)$*, es decir, tres números iguales a* n*»*. Otros manifiestan que: *«al resolver la expresión al lado izquierdo se puede llegar a 3n, sumando términos semejantes»*. Ante el ítem que indaga si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede representar el *triple de un número*, pese a que todos *«demostraron»* o *«corroboran»* la equivalencia entre las expresiones, para 8 profesores este hecho no fue suficiente, en tanto algunos argumentaron que en la expresión $3n$ se tienen tres números iguales y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ relaciona tres números diferentes, otros manifiestan que al operar el resultado y simplificar la expresión a $3n$ sí podría ser interpretada como el *triple de un número,* en un leguaje natural no podría ser interpretada de esta manera, puesto que, se tiene la suma de tres números consecutivos o la suma de un número más el anterior, más el siguiente, tal y como se evidencia en la solución dada por un profesor:

Figura 1

Interpretación de Expresiones. ¿La Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ *Significa el Triple de un Número?*



3. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como ***el triple de un número***?

(a) Marque con una X la respuesta que considere correcta Sí ( ) No (X)

(b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Aunque ~~es~~ equivalente a ella en un contexto algebraico, esta expresión puede ser la representación de una situación diferente como puede ser la de la suma de un entero y su antecesor y sucesor.

Fuente: Resultados preliminares año 2016. Solución dada por un profesor

Los anteriores resultados muestran que los profesores reconocen la equivalencia entre las dos expresiones desde su aspecto sintáctico, pero dotar de sentido y significado dichas expresiones, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede representar el triple de un número puesto que, son situaciones diferentes, [la expresion $3n$ relaciona tres números iguales y $(n-1)+n+(n+1)$ tres números diferentes]. Lo señalado anteriormente permite concluir que desde el punto de vista sintáctico los profesores aceptan la equivalencia entre las expresiones, pero desde el plano semántico no se admite dicha equivalencia, tal y como se evidencia en las soluciones referenciadas, en el cual, algunos profesores manifiestan que: *«al comparar la notación con el lenguaje natural, la expresión* $(n-1)+n+(n+1)$ *no se le ocurre a la mente humana como el triple de un número»*. Otros aluden que *«la expresión* $(n-1)+n+(n+1)$ *no significa el triple de un número, puesto que, utiliza paréntesis y cada una hace referencia a una operación diferente»*. Argumentos que podrían deberse a que los profesores ven en la expresión $3n$ una multiplicación y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como una suma de tres números, específicamente una suma de tres números consecutivos; situación que deja en evidencia este hecho: para algunos profesores el realizar y aplicar correctamente una serie de reglas procedimientos no garantiza que se reconozca la equivalencia desde su aspecto semántico. Por ejemplo, los profesores logran demostrar la igualdad de las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ pero no admiten que la suma se puede expresar como una multiplicación.

Otro caso similar al expuesto anteriormente se presenta en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad, la cual hace referencia a:

(Tarea – Calculo de la probabilidad). En lo que sigue, siempre se hará referencia a un dado tradicional de seis caras.

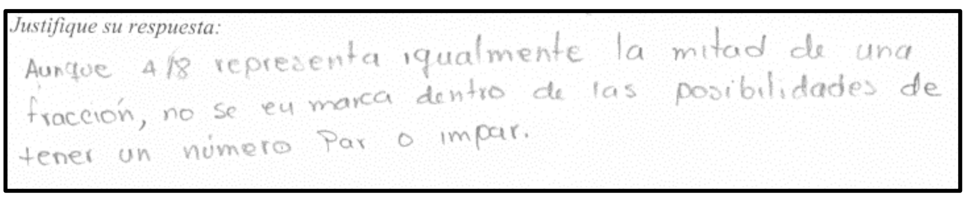
1. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
   (a) La probabilidad es:
   (b) Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad:
2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?
   (a) Marque con una X su respuesta **Sí ( ) No ( )**
   (b) En caso afirmativo muestre cuál(es) sería(n) esa(s) manera(s). En caso negativo explique por qué no existiría otra manera de expresar dicha probabilidad.
3. ¿Puede afirmarse que la fracción $4/8$ es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
   (a) Marque con una X la respuesta que considera correcta **Sí ( ) No ( )**
   (b) Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Tomada de D´Amore (2006b) y Rojas (2012)

Los resultados obtenidos muestran que los profesores establecen correctamente la probabilidad, para ello recurren a expresiones matemáticas como $3/6$, $1/2$, 50% o 0.5. Reconocen que las fracciones $3/6$ y $1/2$ son equivalentes a la fracción $4/8$, pero no admiten que esta última fracción pueda representar la probabilidad pedida, en tanto argumentan que el dado no tiene 8 caras sino seis. Tal y como se evidencia en la solución dada por un profesor

Figura 2

Cálculo de la Probabilidad- Puede Afirmarse que la Fracción $4/8$ es la Probabilidad que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par


Justifique su respuesta:
Aunque 4/8 representa igualmente la mitad de una fracción, no se enmarca dentro de las posibilidades de tener un número Par o impar.

Fuente: Resultados preliminares año 2016. Solución dada por un profesor

Esto permite concluir que las dificultades también se encuentran presente entre profesores de matemáticas o en sujetos que se supone cuentan con cierto dominio de las matemáticas escolares, en tanto, existe una dificultad para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. En esta dirección, este trabajo pretende mostrar evidencias que las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas al abordar situaciones de tratamiento son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas y que son reportadas en investigaciones realizadas por D´Amore (2006b), Santi (2011) y Rojas (2012). En relación con este fenómeno, Rojas (2012) plantea que en indagaciones similares a las que fueron reportadas en su trabajo, en un contexto informal, con estudiantes universitarios que cursaban carreras relacionadas con la formación de profesores de matemáticas y con profesores de matemáticas en ejercicio, en diferentes ciudades como Bogotá, Valledupar y

Pasto [Colombia], así como en la ciudad de Guatemala [Guatemala], se encontró algunas similitudes con el trabajo realizado por estudiantes de educación secundaria frente a las tareas propuestas, pero que aún falta trabajos rigurosos en torno a este fenómeno de los *cambios de sentidos* o *no articulación semiótica*. Por su parte, Rico (1998) también manifiesta que los profesores en formación y los profesores en ejercicios cometen errores al enfrentarse a tareas matemáticas, y muchas de ellas similares o debidas a las mismas causas que cometen los estudiantes.

1.2. Delimitación del Problema de Investigación

Uno de los objetivos que se pretende con el desarrollo de este trabajo radica en documentar y mostrar evidencias de las posibles dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y la similitud con las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tares. Como punto de partida se toman los reportes en las investigaciones realizadas por D´Amore (2006b) y Rojas (2012) quienes muestran evidencias que las transformaciones de tratamiento pueden ser fuente de algunas dificultades en la comprensión de objetos matemáticos y que los problemas en la comprensión de objetos matemáticos también son relacionados con la transformación de tratamiento. Por otra parte, a partir de la revisión realizada en la literatura existente sobre este fenómeno, no sólo se evidencia el reducido número de investigaciones sobre dificultades que encuentran los estudiantes al resolver situaciones matemáticas asociadas a transformaciones de tratamiento, sino la ausencia de estudios que documenten este fenómeno con profesores de matemáticas, tal y como lo sostiene D´Amore y Fandiño (2007) quienes explicitan que faltan investigaciones que, por un lado, exploren otros dominios matemáticos, como el estadístico, el geométrico etc., y por otro, se trabaje con otra población, como es el caso de los profesores. El presente estudio es orientado por la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué dificultades encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante transformaciones semióticas de tratamiento de un objeto matemático y qué similitudes hay con las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas?

La anterior pregunta se desgloso a través de tres interrogantes que encamina el presente estudio: en un primer momento, se identificaron las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, resultados que corroboraron los planteamientos de D´Amore y Fandiño (2007) quienes sostienen que los tratamientos matemáticos es lo que le otorga sentido a las representaciones semióticas que luego de ser aplicados las representaciones de un mismo objeto matemático son vistas diferentes, puesto que pierden su forma inicial, por ejemplo la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, algunos profesores la reconocen como una *«circunferencia»*, *«una* *parábola»*, *«una ecuación de segundo grado»*, etc., que luego de aplicar los tratamientos respectivos se obtiene la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, que deja de tener su forma inicial, en tanto las variables x e y, dejan de estar al cuadrado o esta última ecuación tiene más restricciones en su dominio; en un segundo momento se analizó algunos elementos del por qué emerge este fenómeno de la no articulación semiótica en los profesores que permitió evidenciar que una vez de ser aplicado los tratamientos matemáticos existe una imposibilidad de relacionar el aspecto sintáctico con el semántico, en tanto, desde la visión sintáctica las representaciones son equivalentes, pero desde su aspecto semántico son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes, resultados que muestra la imposibilidad de articular estos dos significados parciales sintáctico y semántico. En un tercer momento, se analizaron aquellos elementos característicos en las soluciones realizadas por los profesores para ser comparados con las soluciones dadas por los estudiantes que son reportadas en la literatura. Cuestiones que encontraron repuestas en las soluciones realizadas por los profesores, que a su vez posibilitaron proponer y verificar algunas hipótesis frente al posible origen del fenómeno de la no articulación semiótica, así como encontrar evidencias que sustentaron la siguiente tesis de investigación: las dificultades que encuentran algunos profesores de matemáticas para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento al abordar tareas específicas son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas, quienes reconocen la equivalencia sintáctica de las expresiones pero dotar de sentido y significado dichas expresiones no admiten la equivalencia semántica en tanto, son asociados con objetos matemáticos o situaciones diferentes.

CAPÍTULO 2
TRABAJOS PREVIOS RELACIONADOS CON EL TEMA DE ESTUDIO

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica de algunos reportes de investigación, incluyendo investigaciones doctorales, que se encuentran en correspondencia con los intereses investigativos trazados en el presente estudio, organizados desde cuatro temáticas. En primer lugar, se relacionan los trabajos que centran la atención en las transformaciones semióticas de tratamiento, específicamente aquellos estudios que documentan la complejidad de dicho proceso cognitivo en la comprensión de objetos matemáticos. En segundo lugar, se muestran algunos estudios dirigidos hacia la comprensión de la equivalencia entre expresiones o representaciones, específicamente en cómo se ha abordado este constructo al interior de la enseñanza de las matemáticas. En tercer lugar, se presentan algunos trabajos sobre las interpretaciones y concepciones que tienen los profesores frente al saber matemático, así como algunos resultados de investigaciones que muestran evidencias que las dificultades que encuentran los estudiantes persisten en personas que cuentan con una formación matemática e incluso en profesores de matemáticas. Por último, se presentan algunas investigaciones que hacen uso de elementos de análisis propuestos desde el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS), particularmente aquellos estudios que utilizan las nociones de configuraciones cognitivas/epistémicas y la función semiótica en el análisis de práctica matemática. Se considera pertinente hacer una revisión de la literatura existente sobre estos cuatro aspectos, en tanto, posibilitan actualizar y robustecer los constructos teóricos y metodológicos empleados en el presente estudio.

2.1. Trabajos Relacionados con la Articulación de Sentidos Asignados a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento

En relación a los estudios de las trasformaciones semióticas se revisaron alrededor de 123 investigaciones, los resultados obtenidos permiten concluir que la mayoría de trabajos realizados en este campo se centran en la transformación semiótica de *conversión*, permitiendo, clasificarlos en tres grupos de estudio: 1) identificación de representaciones semióticas movilizadas por los estudiantes, 2) identificación de algunas dificultades que genera la conversión en la comprensión de objetos matemáticos, y 3) identificación de representaciones semióticas presentes en los objetos matemáticos. En la revisión se encontró que muy pocas investigaciones centran la atención al estudio de la transformación semiótica de *tratamiento*. los trabajos desarrollados en esta dirección se centran en documentar la importancia de los tratamientos figúrales en la comprensión de objetos geométricos y dos estudios están orientados a reportar las posibles dificultades que encuentran los estudiantes para articular representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. Los resultados muestran que algunos estudiantes aplican ciertos algoritmos y reglas que les permiten expresar de forma diferente la representación inicialmente dada obtenida mediante tratamiento matemático [equivalencia sintáctica] pero, desde su aspecto semántico, dotar de sentido y significado las expresiones o representaciones éstas son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Hallazgos que soportan la tesis que los tratamientos también son objeto de dificultades en la comprensión de las matemáticas (D'Amore, 2006b).

Los estudios que se relacionan a continuación muestran evidencias que permiten confirmar el fenómeno de los cambios de sentidos o la no articulación semiótica documentado inicialmente por D'Amore y posteriormente por Santi (2011) y Rojas (2012) quienes reportan las dificultades que pueden encontrar algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a dos expresiones reconocidas sintácticamente equivalentes, en tanto logran aplicar las transformaciones requeridas para obtener una de ellas a partir de la otra, pero no admiten que éstas son semánticamente equivalentes. Por su parte, Santi (2011) reconoce que es necesario centrarse en la actividad reflexiva mediada por signos, puesto que, en matemáticas los signos se han convertido en la forma refinada de racionalidad que hoy se conoce, tal y como se evidencia cuando alude que: *«la actividad matemática y el aprendizaje de matemáticas son, intrínsecamente, una actividad semiótica»* (p.306). Así mismo, este autor plantea que:

> […] para comprender cómo se utilizan los signos, debemos tener en cuenta, dentro de un enfoque cultural y social, la actividad reflexiva mediada que subyace a la coordinación de registros semióticos. La cuestión del significado y cambios de significado se desplaza desde el objeto que los signos representan a la práctica que ellos logran y median. Se pasó de la cuestión de coordinación de los sistemas semióticos a la cuestión de la integración de sistemas de la práctica de la cual emerge significado. (Santi, 2011, p. 306, como se citó en Rojas 2012)

A partir de dos experimentos de enseñanza Santi (2011) muestra evidencias sobre las dificultades que encuentran algunos estudiantes para atribuir sentido a las representaciones semióticas del objeto matemático *«tangente»* y la *«generalización de secuencias»* obtenidas mediante tratamiento y cómo estos sentidos pueden ser analizados bajo los procesos de objetivación y las relaciones que éstos establecen mediante funciones semióticas. El primer experimento de enseñanza se llevó a cabo en una escuela de Bolonia [Italia] con 12 estudiantes de 19 años de edad, quienes cursaban último año de sus estudios de secundaria. En relación con las tareas propuestas se indagó por el trazo de la tangente en un punto genérico A, dada una circunferencia, cómo determinaron la tangente, si la tangente es única en un punto A, se les pidió trazar la tangente a una serie de curvas en un punto genérico A, trazar la tangente a una curva en el punto (0,0), y justificar cada una de las respuestas. Se encontró que los estudiantes realizan una conversión del registro algebraico al cartesiano algebraico y viceversa, calculan la primera derivada de la función, trabajan varios ejercicios que requieren conversiones y tratamientos entre los registros algebraicos y cartesianos, que permite evidenciar una red de transformaciones semióticas [tratamientos - conversiones] entre diferentes sistemas semióticos; aunque algunos estudiantes son capaces de coordinar registros semióticos se evidencia que tienen un significado fragmentado de la tangente. Este autor pone de manifiesto que la dificultad en la construcción de un significado unitario de este objeto no solo se debe a la falta de transformaciones semióticas, sino a la realización de prácticas que permitan a los sujetos el uso de diferentes medios semióticos que sinteticen un concepto en un significado cultural unitario.

Con relación al análisis semiótico cultural se encontró que los estudiantes se esfuerzan en dar sentido al objeto matemático *«tangente»,* por medio de diferentes medios semióticos, en el caso particular de la circunferencia, la definición de la tangente permite una continuidad entre el uso de medios semióticos de objetivación ligados a los gestos y artefactos, así como el uso de medios semióticos más abstractos de objetivación como el registro gráfico y el lenguaje específico de geometría euclidiana. Frente a los términos línea recta, perpendicular y rayo, relacionados en la definición de la tangente, el autor encontró que estos corresponden a actos perceptivos y kinestésicos, por ejemplo, en el uso de artefactos como la regla que, combinado con el gráfico, refuerza el significado. Santi (2011) encontró que el concepto de tangente a una circunferencia está fuertemente ligado a la percepción visual del punto de contacto entre la línea recta y el gráfico. En este contexto, el concepto de la tangente es objetivado por algunos estudiantes a un nivel de generalidad denominado por Radford (2004) *generalización contextual*, puesto que emergen diversas maneras de expresión, como gestos, movimientos, o palabras.

Para justificar la unicidad de la tangente los estudiantes usaron la derivada, aunque no aportan explicación de cómo llegan a esta conclusión. Algunos estudiantes manifiestan que la tangente a una curva en relación al origen *«son todas las líneas rectas que pasan por (0,0) con una pendiente más pequeña que la línea recta»*. Este tipo de respuesta deja ver que la experiencia kinestésica se convierte en un medio de objetivación al darle sentido a la tangente en el punto singular. En una entrevista realizada a una estudiante declara que ella imaginó la línea recta *«oscilante»* alrededor del punto singular sin tocar una de las medias líneas del gráfico. Al respecto Santi señala que algunos estudiantes reconocen el punto singular, escriben la expresión simbólica de la función, pero no justifican el cómo calcular la derivada de la función en el punto (0,0). Estos argumentos muestran que el significado no puede vincularse solo a la estructura de sistemas semióticos que reflejan la estructura de una realidad matemática ideal. Por otro lado, Santi (2011) encontró que algunos estudiantes experimentan una ruptura cognitiva que los obliga a ir más allá de la experiencia espacio-tiempo para acceder a un significado más general del concepto, en el que la actividad reflexiva, es mediada por valores simbólicos y medios de objetivación. Los resultaros indican que, aunque algunos estudiantes realizan un esfuerzo para lograr niveles más altos de generalidad [los estratos de generalidad considerados por Radford (2010) son tres: [factual, contextual y simbólico] del concepto de tangente, encuentra dificultades para coordinar los significados emergentes fruto de las actividades que experimentan durante su formación matemática con una fuerte resistencia de ir más allá de los significados perceptuales.

Por otra parte, Santi (2011) alude que algunos estudiantes se enfrentan a tres *«juegos lingüísticos»* diferentes que están detrás del sistema de prácticas y configuraciones de objetos que manejan: El primero, de la geometría euclidiana con su conjunto de reglas que permite actividades asociadas con configuraciones de objetos. En este contexto, el concepto de tangente [como entidad primaria] se define como la línea recta perpendicular al rayo en un punto de la circunferencia; el segundo, de geometría analítica con su conjunto de reglas que permite realizar actividades asociadas con configuraciones de objetos. En este contexto, el concepto de tangente a una cónica [como una entidad primaria] se define como la línea recta cuya ecuación en un sistema con la ecuación de la curva da una solución única al sistema; y tercero, el de análisis matemático con su conjunto de reglas que permite actividades específicas asociadas con configuraciones de objetos. En este contexto, el concepto de tangente [como un objeto primario] se define como el paso de la línea recta a través del punto tangente del gráfico de la función cuya pendiente es la derivada de la función en el punto tangente.

Santi (2011) manifiesta que una las dificultades para asignarle sentido al concepto de tangente se liga con el trabajo por separado de cada uno de los juegos del lenguaje, y concluye que los medios de objetivación proporcionan herramientas efectivas para comprender la naturaleza de la actividad matemática, para comprender cómo los signos median la actividad y reconocer rupturas cognitivas que los estudiantes deben enfrentar en su proceso de aprendizaje, por ejemplo, cuando tienen que desentrañar el significado de un objeto matemático, al respecto alude que «el significado no puede ser identificado sólo con la relación entre una representación semiótica y su objeto de referencia» (p. 306), destaca que para dar cuenta de la complejidad de las matemáticas como un esfuerzo cultural e individual no es suficiente «reducir el aprendizaje y el pensamiento matemático a una coordinación de muchas representaciones con una denotación común» (p. 306). Por ejemplo, en el caso particular de la tangente muestra cómo las dificultades en la comprensión de este objeto matemático no se relacionan con el proceso cognitivo de la conversión, como afirma Duval (1993, 2017) en tanto los estudiantes encuentran dificultades también en tratamientos tal y como se muestra en los resultados reportados. Finalmente, Santi (2011) concluye que el experimento relacionado con el objeto matemático *«tangente»* mostro evidencias de cómo el significado matemático es fuertemente incorporado a través de representaciones figurativas y el uso de artefactos, que posibilita que los estudiantes pasen a otros niveles de generalidad, sin recurrir a medios más efectivos de objetivación.

El segundo experimento de enseñanza que se desarrolló en este trabajo, se llevó a cabo en una escuela primaria de Bolonia, en el que abordaron la generalización de secuencias, reportada inicialmente por Radford (2000, 2002, 2003, 2005, como se citó en Santi, 2011) con la diferencia que los estudiantes trabajaron varias representaciones figurativas de la misma secuencia con el fin de indagar los diferentes significados otorgados a distintas representaciones de un mismo objeto matemático. El profesor titular contaba con formación en Educación Matemática y los estudiantes estaban familiarizados con situaciones didácticas y entornos de aprendizaje cooperativo. La clase se dividió en 6 grupos de trabajo con 3 o 4 miembros que fueron grabadas. El experimento se desarrolló en tres sesiones organizadas de la siguiente manera: introducción de la actividad, lección y explicación por parte del profesor, trabajo en pequeños grupos y finalmente una discusión orientada por el profesor sobre la actividad realizada. Se pidió a los estudiantes encontrar la cantidad de elementos en la quinta, sexta y dos figuras numéricas posteriores, así como establecer una regla que permitiera encontrar la cantidad de puntos en cualquier posición de la secuencia. Frente a los resultados obtenidos algunos estudiantes lograron establecer la regla que permite establecer la cantidad de puntos en una determinada posición [generalización de la secuencia de números impares $2n + 1$], así como, reconocer el mismo objeto matemático mediante diferentes representaciones.

Santi (2011) encontró que los estudiantes llevan a cabo conversiones y tratamientos que involucran el registro figural, el registro lenguaje natural y el registro aritmético e intentan emplear un lenguaje algebraico para representar el término general de la secuencia. La interacción y el uso sincrónico de gestos, lenguaje, objetos y la representación figurativa de la secuencia, fueron elementos claves del nodo semiótico, que posibilito a los estudiantes objetivar el significado dentro de su experiencia. Así mismo, el cambio de representación permitió que los estudiantes ampliaran la actividad reflexiva que experimentaron con las representaciones anteriores. El análisis realizado desde una perspectiva ontosemiótica, muestra que los estudiantes establecen una serie de relaciones por medio de una red de funciones semióticas enmarcadas en un juego de lenguaje dentro de los números naturales que relacionan procedimientos, definiciones, proposiciones, argumentos y la situación problemática. Al establecer un criterio para determinar cualquier término de la secuencia, [término general]. Desde un enfoque cultural el experimento confirma los resultados obtenidos por Radford (2000, 2003, 2005, como se citó en Santi, 2011) quien muestra el papel que tienen algunos medios semióticos de objetivación en la generalización de procesos y la conquista del pensamiento algebraico temprano, como son los gestos, ritmo y lenguaje natural. Durante la experiencia los estudiantes se familiarizaron con una generalización fáctica y contextual. Los hallazgos reportados en los dos experimentos de enseñanza posibilito que el autor identificara algunas dificultades que encuentran los estudiantes para atribuir sentido a las diferentes representaciones de un objeto matemático común, dichas dificultades se relacionan con el tipo de procesos de objetivación y con las funciones semióticas capaces de establecer.

Por su parte, Rojas (2012) realizó un estudio orientado a documentar el fenómeno relacionado con las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un objeto matemático obtenidas mediante tratamiento. Este autor realiza una descripción y un análisis de los procesos de asignación de sentidos de 9 estudiantes, 6 de grado 9º y 3 de grado 11º, en tres instituciones de la ciudad de Bogotá de estratos socioeconómicos diferentes3. Los estudiantes desarrollaron el trabajo en pequeños grupos a partir de tres tareas específicas [relacionadas con probabilidad simple, expresiones algebraicas y geometría analítica], que buscaban indagar las dificultades que encuentran los estudiantes para relacionar los sentidos asignados a un mismo objeto matemático.

El autor muestra que varios estudiantes encuentran dificultades para articular diversos sentidos asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático, algunos reconocen la equivalencia sintáctica entre dos o más expresiones dadas, a partir de una de las expresiones, por medio de la aplicación de las transformaciones de tratamiento requeridas, pero no siempre consiguen articular los sentidos asignados a dichas expresiones e incluso pueden cambiar el sentido inicialmente asignado a éstas. El autor concentra en cuatro grupos algunas dificultades que encuentran los estudiantes, los cuales se describen a continuación:

***(1) Reconocimiento icónico de las expresiones*:** los estudiantes que se encuentran en este grupo asignan sentido a las expresiones basados en un reconocimiento icónico de las mismas. El autor reporta que, por ejemplo, para los estudiantes juega un papel fundamental la *«ecuación básica»* de una circunferencia en la que las variables están elevadas al cuadrado o, en el caso de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es asociada casi inmediatamente con la suma de tres números consecutivos y la expresión $3n$ con el triple de un número.

Con relación a la ecuación $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{xy}-1=0$, algunos estudiantes reconocen la expresión como una *«circunferencia»*, y otros como una *«parábola»,4* luego de realizar las transformaciones de tratamiento requeridas admiten la equivalencia de ecuación con la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, [equivalencia sintáctica], pero no hacen el mismo reconocimiento de esta última ecuación en relación a la primera ecuación, es decir, no reconocen en ella una *«circunferencia»* o una *«parábola»* por cuanto *«ven»* en la ecuación que las variables no se encuentran elevadas al cuadrado. Frente a la igualdad de las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, algunos estudiantes logran reconocer la igualdad entre ambas expresiones por medio de valores específicos de $3n$ o la operación de términos semejantes y la aplicación de propiedades, pero no logran articular los sentidos asignados a cada expresión, asociando las expresiones con objetos matemáticos o situaciones diferentes, por ejemplo, interpretan la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como una suma de tres números consecutivos, pero no como 3 veces un número n. Por otro lado, algunos

---

[3] En Colombia el estrato socioeconómico permite conocer cierta información sobre capacidad económica de los sujetos. Existen 6 estratos para inmuebles residenciales: bajo-bajo [estrato 1], bajo [estrato 2], medio-bajo [estrato 3], medio [estrato 4], medio-alto [estrato 5] y alto [estrato 6]. Los estratos 1, 2, 3 albergan a los usuarios con menores recursos, los estratos 5 y 6 albergan a las personas con mayores recursos Tomado: https://www.dane.gov.co/index.php/69-espanol/geoestadistica/estratificacion/468-estratificacion-socioeconomica.

[4] Si bien la ecuación dada no corresponde a una circunferencia ni a una parábola, para el fenómeno aquí reportado, este hecho no es relevante; en tanto, se busca aquellos estudiantes que las expresiones [ecuaciones] son equivalente sintácticamente [desde su forma], no reconocen la equivalencia semántica [desde su significado].

estudiantes admiten que al resolver la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ da como resultado la expresión *3n*, pero la primera expresión no es el triple de un número, en tanto relaciona tres números diferentes, en cambio $3n$, el triple de n, los términos son semejantes o iguales. Es decir, cada una de estas expresiones incorpora procedimientos que las diferencian.

(2) Anclaje a situaciones dadas: los resultados obtenidos dejan en evidencia una cierta tendencia a realizar interpretaciones ligadas con la situación propuesta, es decir, se observa un cierto *«anclaje»* a la situación dada en la tarea, por ejemplo, en el caso propuesto de encontrar la probabilidad que *«al lanzar un dado se obtenga un número par».* Algunos estudiantes no aceptan la fracción $4/8$, como la probabilidad pedida, puesto que esta fracción no es *«representativa del dado»* [objeto físico tradicional de 6 lados], otros enfatizan que la fracción $4/8$, esta *«mal planteada»* puesto que el dado no tiene 8 caras sino 6; y muy pocos estudiantes aceptan que las fracciones $4/8$ y $3/6$, son equivalentes, en tanto ambas expresiones representan la mitad de los casos favorables.

***(3) Interacción y cambios en la interpretación*:** la investigación mostró hallazgos sobre la importancia de contar con espacios de interacción, puesto que constituyen una oportunidad para conocer argumentos de otras personas, sus dudas y formas de organizar sus ideas, que usualmente afianzan o modifican las interpretaciones inicialmente realizadas. Es importante precisar que las opciones de interacción y en particular las funciones semióticas explicitadas por unos no necesariamente son reconocidas o asumidas inicialmente por otros, pero luego del trabajo en grupo y de las entrevistas grupales modifican las funciones establecidas o ratifican las planteadas inicialmente.

(4) Dificultades con el lenguaje matemático: en el trabajo realizado por los estudiantes, se evidencia algunas dificultades que encuentran varios de ellos en relación con las interpretaciones de las expresiones dadas y con la realización de tratamientos de dichas expresiones, particularmente en el contexto algebraico. Una de las dificultades encontradas por el autor, tiene que ver con la generalización a partir de algunos casos particulares.

Los resultados mostrados y los hallazgos reportados en la anterior investigación permiten confirmar que no sólo el paso de una representación a otra cambiando de registro semiótico [transformación semiótica de conversión] genera dificultades en la comprensión de objetos matemáticos, sino que en algunos casos la transformación semiótica de tratamiento, también puede ser objeto de incomprensiones por parte de los estudiantes (D'Amore, 2006b). Algunos estudiantes encuentran dificultades para articular sentidos asociados a expresiones reconocidas por ellos como sintácticamente equivalentes, en tanto, logran realizar las transformaciones requeridas para obtener una de ellas a partir de la otra [tratamientos], pero semánticamente no es admitida la equivalencia entre estas.

2.2. Trabajos Relacionados con la Equivalencia Entre Representaciones Semióticas de un Objeto Matemático

En este trabajo se asume que en toda transformación semiótica de tratamiento subyace la noción de *equivalencia*. En pro de ello se hace una revisión de la literatura existente sobre dicha noción en matemáticas, la cual se ha realizado básicamente en dos tópicos: conjuntos numéricos y álgebra. En el contexto numérico la equivalencia aparece en los primeros años escolares con el desarrollo del concepto de número, la ampliación del sistema numérico decimal y las relaciones que existe entre los distintos tipos de números; en esta dirección, la equivalencia aparece como necesaria para relacionar distintas representaciones de los números, reconocer relaciones entre sus operaciones y resolver cierto tipo de problemas. Por ejemplo, una visión relacional del signo igual posibilita que los estudiantes tengan una comprensión de algunos objetos matemáticos, como en el caso del trabajo con ecuaciones algebraicas, que es indispensable tener una visión del signo igual como una relación entre dos cantidades, o en la resolución de una ecuación que conserva la relación de equivalencia (Behr, Erlwanger, Nichols, 1980; Kieran, 1981; Falkner, Levi y Carpenter, 1999; Rittle-Johnson y Alibalu, 1999, como se citó en Asquith, Stephens, Knuth y Coartada, 2007). Respecto a las ecuaciones algunos estudios señalan que en ocasiones los estudiantes carecen de una comprensión relacional del signo igual, en tanto, muchos de ellos lo consideran como el significado de la respuesta o el resultado. (Kieran, 1992; Knuth, 2005; Knuth, 2006, como se citó en Asquith et al.,2007).

Frente a la manera de abordar la equivalencia en el contexto algebraico, usualmente se han estudiado las relaciones entre diferentes tipos de expresiones, aplicando reglas de transformación de dichas expresiones [perspectiva sintáctica] o bien mediante la compresión del empleo de métodos numéricos [perspectiva semántica]. Las investigaciones realizadas en el área de la didáctica del álgebra han puesto de manifiesto que un factor importante al reflexionar sobre la noción de equivalencia entre expresiones algebraicas, es el tipo de expresión matemática con la que se trabaja, es decir, saber si se trabaja con una ecuación, un polinomio, una función polinomial o racional, etc.; porque para decidir la equivalencia entre dos expresiones hay que tener en cuenta su naturaleza y las restricciones que cada una presenta (Solares y Kieran, 2013).En el contexto algebraico las aproximaciones en el estudio de la equivalencia han sido desde dos enfoques: (i) las que enfatizan en la perspectiva sintáctica (Kieran y Saldanha, 2005; Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013, Solares y Kieran, 2013) y (ii) las que enfatizan en la articulación de las perspectivas sintáctica y semántica (Chalé-Can, Font y Acuña, 2017, Mejías 2019). Desde su aspecto sintáctico, la equivalencia tiene que ver con las relaciones y reglas inherentes al álgebra, en tanto los aspectos procedimentales y las reglas de transformación de expresiones algebraicas se usan para probar la equivalencia entre diversas expresiones. Chalé-Can et al., (2017) alude que, desde un acercamiento semántico, se hace énfasis en la interpretación del contexto para establecer si dos expresiones son o no equivalentes, por ejemplo, la justificación de la evaluación numérica. Los autores manifiestan que, desde el punto de vista sintáctico, se dice que dos expresiones f y g son equivalentes «cuando estas expresiones tienen una reescritura algebraica común» que es obtenida por medio de la aplicación de propiedades algebraicas y transformaciones [mediante el uso de propiedades: conmutativa, asociativa y distributiva, así como identidades notables, entre otras] (p. 3). Desde el punto de vista semántico, dos expresiones f y g son equivalentes si la igualdad $f(x) = g(x)$ se cumple para cualquier valor x en el dominio común de éstas, lo cual es conocido como la aproximación numérica a la equivalencia (Kieran et al., 2013).

Ahora bien, diversos autores señalan que la perspectiva sintáctica asocia una perspectiva semántica que no se puede obviar, y que no coincide exactamente con la caracterización anterior sobre la perspectiva semántica. Según Booth (1989, como se citó en Radford, 2004) la habilidad para manipular símbolos algebraicos requiere, entre otros aspectos, de la aplicación de propiedades estructurales de las operaciones y también de otras relaciones matemáticas (p.1). También argumenta que estas propiedades estructurales constituyen los aspectos semánticos del álgebra, puesto que, para manipular los símbolos mediante estas propiedades, el sujeto debe entenderlas, por ejemplo, si se encuentra con una expresión como $a + b = b + a,$ debe comprender que la propiedad da cuenta de la conmutatividad de la adición y que ésta es aplicable a cualquier par de números en el conjunto de referencia.

Entre los estudios que han articulado el aspecto sintáctico y semántico se encuentra la investigación realizada por Chalé-Can (2018) quien indagó el papel que juegan los aspectos sintácticos y semánticos en la equivalencia de expresiones algebraicas en secuencias visuales por medio de un estudio de caso. El autor concluye que para la enseñanza del concepto de equivalencia algebraica se hace fundamental relacionar aspectos sintácticos y semánticos, que deben ser desarrollados por el profesor de matemáticas en el aula y ser relacionados entre sí para una mejor comprensión de este concepto. El autor describe la complejidad de la noción de equivalencia en términos de dos significados parciales, que han sido denominados como sintáctico y semántico; asociados con sistemas de prácticas y configuraciones de objetos matemáticos primarios, así como con los procesos activados en ellos (Chalé-Can et al., 2017). A partir del análisis de una tarea relacionada con los números enteros positivos, aportan una reflexión sobre la dialéctica entre las aproximaciones semántica y sintáctica a la noción de equivalencia. Estos autores parten del supuesto que la equivalencia es una noción compleja, y que los dos significados parciales [sintáctico y semántico] deben ser articulados; en cuanto a la perspectiva semántica son necesarios dos tipos de registros: el simbólico y el requerido para dar significado a estos [en su caso el registro gráfico de las figuras]. Por otra parte, es preciso realizar un proceso de significación que dé sentido a los símbolos y que permita una generalización que posibilite enunciar una proposición que es el punto de partida para el tratamiento simbólico posterior. Chalé-Can et al., (2017) afirman que el papel relevante que tiene el registro de representación propio del contexto y los procesos de significación y generalización marca la diferencia con respecto a la perspectiva sintáctica. En la aproximación sintáctica, las expresiones algebraicas aparecen de manera explícita y son sobre las cuales el estudiante trabajará para mostrar la equivalencia; en cambio, en la aproximación semántica, las expresiones algebraicas no aparecen de manera explícita, sino que emergen del proceso de solución que se proponen en la tarea.

En relación con el problema de la articulación entre la perspectiva semántica y sintáctica, según estos autores, hay que considerar tres posibilidades de relación entre ellas que deben ser realizadas por los estudiantes: *i*) solo reconocen la equivalencia semántica, *ii*) solo reconocen la equivalencia sintáctica o *iii*) son capaces de articular los dos tipos de equivalencia. De hecho, la literatura muestra situaciones en las que se dan algunas de estas posibilidades, por ejemplo, en Rojas (2012, 2014) se reportan algunas respuestas dadas por estudiantes a tareas en contextos probabilísticos, algebraicos y de geometría analítica, que dejan en evidencia el reconocimiento por parte de estos de la equivalencia desde el aspecto sintáctico, pero no desde el semántico.

Por su parte, Mejías (2019) realizó un estudio sobre los conocimientos relacionados en la enseñanza del álgebra de 121 profesores en ejercicio de educación primaria, cuyo objetivo era evaluar específicamente los conocimientos didácticos y matemáticos que poseían los profesores en ejercicio de educación general básica en Chile respecto al álgebra temprana. Las tareas propuestas, en su mayoría, se enmarcaban en la equivalencia de expresiones algebraicas; por ejemplo, la tarea en la que debían inferir si la afirmación *«sumo tres números consecutivos. Si divido el resultado por tres, obtengo siempre el segundo número»*, realizada por un estudiante, era o no válida. El autor, encontró que entre las producciones que indican que la conjetura es válida para todos los números enteros se hallan respuestas en las que prima la perspectiva semántica, como es el caso del profesor que toma m como el primer número, $m+1$ como el segundo y $m+2$ como el tercero, para obtener la expresión $(m+(m+1)+(m+2))/3$ y comprobar si se obtenía $m+1$, verificó tomando algunos valores específicos *de* m [concretamente con los números 1, 2 y 3] y evaluó en cada caso la expresión correspondiente a la suma de tres números consecutivos; por ejemplo, para $m=1$ obtuvo: $1+1(1+1)+(1+2)=1+2+3=6/3=2$, que permitió al profesor verificar la validez de la conjetura. Entre las respuestas que se consideran parcialmente correctas, el autor reportó que algunos profesores recurren a la autoconsciencia de no saber aplicar las propiedades requeridas para dicha comprobación [perspectiva sintáctica] realizan afirmaciones como la siguiente: *«sí, teóricamente no tengo idea porqué, pero si pruebo con los números da»* [ausencia de perspectiva semántica].

Por otra parte, entre las respuestas consideradas correctas se observan algunas en las que prima la perspectiva sintáctica, como es el caso del profesor que verificó la validez de la conjetura de la siguiente manera: partió de la expresión construida por él: $(x+x+1+x+2)/3$ e hizo las transformaciones respectivas que le permitió llegar a $x+2$, asi: $(x+x+1+x+2)/3=(3x+3)/3=x+1$. Los resultados muestran que para el estudio y desarrollo de la noción de equivalencia es necesario elementos sintácticos y semánticos que deben ser conectados y desarrollados a la par para promover una mejor comprensión de ésta (Solares y Kieran, 2013; Kieran et al., 2013; Chalé-Can et al., 2017). La experiencia previa de los estudiantes con las transformaciones algebraicas, relacionadas con procesos reiterativos de factorización, expansión, agrupación y simplificación de términos, permite desarrollar una noción espontánea de equivalencia, no siempre consciente, que implica la vinculación de expresiones por medio de estas transformaciones [perspectiva sintáctica]. Así, se sugiere la necesidad de una transición desde una noción de equivalencia, hacia una concepción de la equivalencia que esté más asociada con el aspecto semántico Kieran et al., (2013) además del reconocimiento explícito de las propiedades aplicadas para realizar las transformaciones requeridas. De manera análoga a la investigación realizada sobre la equivalencia de expresiones algebraicas este trabajo parte del supuesto que, para el estudio y desarrollo de la noción de equivalencia que subyace en toda transformación de tratamiento entre las expresiones o representaciones que se relacionan en las tareas propuestas, es necesario tener en cuenta elementos sintácticos y semánticos; así como su necesaria articulación, en tanto el tipo de representación inmersa en las tareas que se proponen, el ***aspecto sintáctico*** posibilita corroborar si una expresión o representación es equivalente o no a otra y el ***aspecto semántico*** permite establecer en qué sentido se habla de la igualdad, de manera semejante al trabajo de Chalé-Can et al., (2017) se caracterizará la perspectiva semántica y sintáctica en términos de prácticas, configuraciones de objetos y procesos.

2.3. Trabajos Relacionados con las Interpretaciones y Concepciones de los Profesores de Matemáticas en Torno a Algunos Objetos Matemáticos

En los últimos años un número significativo de investigaciones en Educación Matemática han dirigido la mirada a conocer y profundizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, estudios que han permitido identificar algunos aspectos que se interponen en la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Los resultados obtenidos han reconocido tres tipos de obstáculos que interfieren en la construcción de objetos matemáticos por parte de los estudiantes; los *obstáculos ontogenéticos*, que se originan en el alumno; los *obstáculos didácticos* que tienen su origen en la enseñanza y las elecciones metodológicas del profesor; y los *epistemológicos* que se relacionan con los hechos intrínsecos propios de las matemáticas. En este apartado se relaciona algunos resultados de investigaciones que estudian los *obstáculos didácticos*, específicamente aquellos que están centrados en documentar las concepciones de los profesores frente a las matemáticas y algunos estudios que muestran evidencias que las dificultades que encuentran los estudiantes persisten en personas que cuentan con una formación matemática e incluso en profesores de matemáticas, aspectos que pueden influir positiva o negativamente en la formación matemática de sus estudiantes, en tanto, los profesores tienen el compromiso de actuar sobre el conocimiento para transformarlo en un conocimiento que se enseñará de manera adecuada a los estudiantes, proceso conocido como *«transposición didáctica»* (Chevallard, 1985). Por su parte, la asociación de profesores de matemáticas (NCTM, 2000) manifiesta que: 1) la eficacia del profesor exige saber matemáticas, tener en cuenta que los estudiantes son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas; 2) una enseñanza eficaz requiere un entorno de aprendizaje que apoye y estimule el desarrollo de los estudiantes; y 3) una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar (p. 18). Así mismo, la asociación (NCTM, 2003) establece que «la enseñanza eficaz de las matemáticas requiere reconocer lo que los estudiantes saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que aprendan bien» (p.17). Lo mencionado anteriormente deja en evidencia que los profesores requieren de un saber matemático sólido que permita una transposición didáctica de un conocimiento que requiere ser enseñado que de antemano se sabe que presenta muchas limitaciones y obstáculos en los profesores en ejercicio y por ende en los estudiantes.

Algunos autores coinciden que los procesos de enseñanza- aprendizaje de la matemática están influenciados por las concepciones de los profesores sobre la naturaleza del conocimiento científico, de su evolución (Brickhouse, 1990; Hashweb, 1996, como se citó en D´Amore, Radford y Bagni, 2017) y de los cambios de convicciones ocurridos luego de la maduración alcanzada con reflexiones personales o, mejor, por ocasiones de fuerte confrontación teórica (D’Amore y Fandiño, 2004; Bagni, 2006, como se citó en D`Amore et al., 2017). Por su parte, Fandiño (2006) manifiesta que todo aquello que aprenden los estudiantes depende de los profesores, si el conocimiento para ser enseñado no coincide con el conocimiento institucionalmente establecido, el profesor no estará en capacidad de realizar una transposición didáctica adecuada y así terminará enseñando lo que él sabe, como él lo sabe, y arrastrar en la enseñanza errores que no puede dominar y eliminar.

Fandiño (2006) sostiene que una característica esencial frente al conocimiento profesional de los profesores de matemáticas es la «*solidez que tiene un concepto matemático*», en tanto, los conceptos en matemáticas son la base para la adquisición de aprendizajes futuros por parte de los estudiantes, por ejemplo, explicita que el área de figuras planas conducirá en un futuro al estudio de integrales; por ello, no se trata de enseñar a los estudiantes unas cuantas formulas aprendidas de memoria, confundiendo la idea de superficie con la de área (Fandiño, 2006). La noción de *infinito* de los números naturales no debe ser confundida con su *infinitud*, puesto que a menudo se piensa en un segmento, como algo limitado, con una cantidad finita de puntos que depende de la longitud del segmento en sí y que sólo la línea recta contiene puntos infinitos. La idea inicial de infinidad de números naturales junto con relaciones de orden apropiadas debe conducir a la densidad de números racionales y luego a la continuidad de los números reales. Por otra parte, se evidencia que la mayoría de los estudiantes no construyen la idea de densidad en los racionales (Q) y una pequeña parte de estos reconocen la continuidad en los reales (R), muchos lo confunden o, al menos, no los distinguen (D’Amore y Arrigo, 1999). A partir del número natural secuencialmente se debe llegar a la construcción de números en diversos conjuntos numéricos, así, el recuento de números naturales uno por uno, dos por dos, o de acuerdo con ciertas reglas, deben conducir al estudio de sucesiones como $1/2$, $1/3$, $1/4$,... que posteriormente debe conllevar al estudio de límites. Ejemplos que muestran la necesidad que el profesor de matemáticas tenga unos conocimientos sólidos frente al saber matemático, puesto que la ausencia de estos, en algunos casos puede influir de forma negativa o positiva en la formación matemática de sus estudiantes. Tal y como lo manifiesta Yang (2014) quien alude que en diversos estudios se ha demostrado que la calidad de los profesores influye significativamente en el rendimiento de sus estudiantes.

Otro aspecto fundamental en la formación del profesor de matemáticas es la comprensión de un lenguaje matemático, si bien en educación primaria no es indispensable que los estudiantes, al menos en sus primeros años de escolaridad, adquieran y desarrollen un lenguaje refinado, dado que por su edad y por su experiencia previa aún no cuentan con elementos básicos para comprenderlo, los profesores sí deben reconocer el potencial que tiene el lenguaje natural que traen los estudiantes que posteriormente contribuirá al desarrollo y consolidación de algunos conceptos matemáticos en años posteriores. Por ejemplo, en ocasiones se confunde el término infinito con ilimitado, o, que una *«esquina»* es *«interna»* a un polígono, los ángulos que allí se forman deben ser limitados, es decir la porción de área que contiene el polígono. Fandiño (2006) muestra algunas evidencias de estudiantes y profesores que no admiten que un punto P exterior a un polígono ABCD pertenece al ángulo ABC, de dicho polígono. La autora alude que los profesores de primaria deben pensar el uso de expresiones como en el caso del punto y la *«forma de los puntos»*, en tanto es un objeto geométrico de dimensión cero, por lo cual no puede tener forma, etc. Por otro lado, Fandiño (2006), expresa que en innumerables ocasiones ha tenido la oportunidad de discutir con algunos profesores de diferentes países sobre sus propias creencias y cómo estas influyen en la actividad en el aula, permitiendo concluir que los aspectos mencionados interfirieren en una adecuada transposición didáctica de un concepto matemático. Así mismo, Fandiño (2011) muestra que algunas dificultades que encuentran los estudiantes son similares a las de sus profesores; por ejemplo, al indagar si dado un polígono inicial de perímetro P y área A, y se aumenta P qué sucede con A. La respuesta espontánea típica dada por estudiantes y profesores en ejercicio es que, al aumentar P, aumentará también A, lo cual no es en general válido, como se evidencia si se considera un cuadrado de lado $4cm$ y un rectángulo de lados $7cm$ y $2cm$; es claro que en el primer caso el perímetro es de $16\ cm$ y el área es de $16\ cm^2$, mientras en el segundo el perímetro es de $18\ cm$ y su área es de $14\ cm^2$.

Por su parte, Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, (2006) argumentan que los profesores requieren una intensa preparación que permitan abordar con éxito los objetivos educativos correspondientes. Estos autores realizan un estudio sobre los errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos, por medio de algunos ejemplos muestran que, tanto estudiante de primaria, secundaria, universitarios como profesores en ejercicio, encuentran diversas dificultades cuando abordan algunas situaciones de estadística, por ejemplo, toman un grupo de 154 estudiantes de primer curso de psicología, mostrándoles dos conjuntos diferentes de bloques A y B. Las longitudes de los bloques en el conjunto A son 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm., y las longitudes de los bloques en el conjunto B, son 10, 10, 10, 60, 60 y 60 cm. Al preguntar a los estudiantes cuál de los dos conjuntos presentan mayor variabilidad, el 50 % pensó que el conjunto A, es más variable, el 36% que es más variable el conjunto B, y el 14% que los dos conjuntos presentan igual variabilidad. Loosen y Cols (1985, como se citó en Batanero et al., 2006) interpretan estas respuestas como prueba que el concepto intuitivo de variabilidad se equipara al de «no semejanza», es decir, cuánto varían unos valores respecto a otros, más que cuánto varían los valores respecto a un punto fijo. En este sentido el conjunto A, ciertamente debe ser considerado más variable que el B, aunque la desviación típica es mayor en el conjunto B. Lo anteriormente refuerza el hecho que las dificultades y errores no solo pueden ser encontrados por estudiantes en sus primeros años de escolaridad, sino que estas persisten en cualquier nivel académico, incluyendo en algunas personas que cuenta con una formación matemática especifica.

Por su parte, D´Amore y Fandiño (2007) muestran evidencias que tanto estudiantes como profesores asignan un sentido inicialmente a un objeto matemático, que luego de aplicar las leyes y procedimientos respectivos obtienen otra expresión, pero no siempre asignan el mismo sentido o asignan un sentido diferente al dado inicialmente, por ejemplo, cuando se propone la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, que es interpretado por algunos como «*una circunferencia*». Al aplicar los respectivos procedimientos «*transformaciones*» conduce a $x + y = \frac{1}{x+y}$, que es interpretado usualmente como «*una suma que tiene el mismo valor de su recíproco*». Al preguntar nuevamente si esta última ecuación corresponde o no a una circunferencia, algunos estudiantes y profesores responden que no, puesto que una circunferencia debe tener las variables deben estar al cuadrado $(\mathrm{x}^2 + y^2)$. Los autores aluden que al parecer la transformación es lo que da sentido, si se realizara el proceso inverso se volvería a la «*circunferencia*», en este caso parece ser que los significados se atribuyen a las representaciones específicas, sin relacionarse entre sí.

Otro ejemplo, es la expresión $(n - 1) + n + (n + 1)$ que en lenguaje natural puede ser interpretada como la suma de tres números naturales consecutivos, que después de realizar los procedimientos respectivos «*tratamientos*» se obtiene la expresión $3n$, la cual se interpreta como «*el triple de un número natural*». Al preguntar si $3n$, puede ser interpretada como la «*suma de tres números naturales consecutivos*», tanto estudiantes como profesores manifiestan que no, puesto que en la expresión debe aparecer el símbolo más. Otro ejemplo similar corresponde a la suma de los primeros 100 números positivos naturales: 1 + 2 + ... + 99 + 100; al realizar la respectiva transformación se obtiene 101 × 50; aunque muchos personas reconocen esta expresión como la solución del problema, algunos argumentan que no corresponde a la representación del objeto inicial; la presencia del signo de multiplicación obliga a los estudiantes buscar sentido en objetos matemáticos que aparezcan el término «*multiplicación*» o términos similares. Ahora, al preguntar si 101 × 50 corresponde o no a la suma de los primeros 100 números naturales positivos; algunos manifiestan que no, en tanto la operación indica una multiplicación. Otro ejemplo, es que muchos estudiantes y profesores reconocen que la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado puede ser expresada mediante la expresión $3/6$, $1/2$ o el 50% pero no admiten que $4/8$ sea una expresión que podría representar la probabilidad del evento pedido, aunque pueden establecer la equivalencia de las fracciones desde el punto de vista matemático entre $3/6$ con $1/2$ y $4/8$, pero esta última no es una expresión significativa de la situación planteada. D´Amore y Fandiño (2007) aluden que algunos significados son asociados culturalmente, por ejemplo, la expresión $3n$ es el triple de algo; 101 × 50 es un producto, no una suma. Los signos usados en las representaciones, directamente relacionados con la experiencia de los sujetos, juegan un papel importante en la asignación de significados, en este caso el lenguaje aritmético suele ser la experiencia más significativa. Estos son algunos ejemplos que muestran la existencia del cambio constante de significado luego de realizar las transformaciones semióticas de tratamiento, que en algunos casos se reconoce la equivalencia sintáctica entre las expresiones, pero desde su aspecto semántico no se admite dicha igualdad.

2.4. Trabajos en Relación al Análisis Didáctico: Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS)

Para el análisis de los datos de investigación se utilizó algunos elementos del análisis ontosemiótico propuesto por el EOS, como la noción de práctica matemática, las configuraciones **cognitivas /epistémicas** y las relaciones que los profesores establecen por medio de las funciones semióticas [descritas en el capítulo 6 del presente documento]. En virtud de ello, en este apartado se presentan algunos resultados de investigaciones que hacen uso de estos elementos en los análisis de los datos de investigación. Dicha revisión de literatura, por un lado, robustece la utilidad de los elementos propuestos por el EOS, y, por otro lado, muestra la utilidad de dichos elementos en el análisis de la práctica matemática. En este apartado se presenta una síntesis de algunas investigaciones que han optado por el uso de herramientas de análisis del EOS como metodología de investigación apropiada para el análisis de las relaciones que emergen en el aula de clases y las comprensiones de los estudiantes sobre un objeto matemático, específicamente estudios que muestran cómo se ha empleado la noción de función semiótica para identificar las comprensiones de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes a partir de las relaciones que estos establecen en las producciones escritas y orales.

Montiel y Wilhelmi (2017) realizan un estudio en el que hacen uso de las funciones semióticas con la finalidad de usar categorías para identificar tanto el aprendizaje matemático como los conflictos de significado sobre el contenido matemático. Los autores en el contexto de dos cursos universitarios que integran matemáticas y música utilizan las funciones semióticas, en el análisis de la práctica educativa a partir de las producciones escritas y orales de los estudiantes. Los investigadores describen las competencias matemáticas previstas a través de la enseñanza interdisciplinaria, sin tratar las metas musicales. El curso contó con la participación de estudiantes de música y matemática de licenciatura y de postgrado que permitió constatar la adquisición del significado institucional otorgado por los dos grupos de estudiantes. Para contrastar las soluciones dadas, los autores recurren al uso de herramientas diversas de evaluación formativa [exámenes, trabajos escritos y presentaciones orales], que posibilitó realizar un seguimiento individualizado y necesario dada la heterogeneidad de los estudiantes para identificar las diferentes relaciones que establecen por medio de las funciones semióticas. Los resultados muestran que *la función semiótica representativa* facilitó que los estudiantes sustituyeran las expresiones musicales por isometrías en la elaboración de melodías. *La función semiótica instrumental* puso en evidencia los conflictos semióticos vinculados a la percepción sonora y su interpretación matemática. La *función semiótica estructural* permitió asociar globalmente los conocimientos de los estudiantes, por ejemplo, la conexión de la estructura matemática [puntos en el plano cartesiano o permutaciones y sus propiedades atribuidas] con la estructura musical [plano musical o pentagrama, sus propiedades y melodías asociadas].

Por su parte, Contreras, Molina, Godino, Rodríguez y Arteaga (2017) documentan la importancia de tener un conocimiento profundo en la interpretación de gráficos estadísticos, los autores aluden que los gráficos estadísticos y su interpretación son un elemento importante para la cultura o alfabetización estadística, además de ser un resumen que permite interpretar y evaluar críticamente la información estadística de forma visual. El estudio describe algunos de los sesgos más recurrentes en los diagramas de barras que aparecen en los medios de comunicación, analizan e identifican las relaciones que establecen los estudiantes por medio de las funciones semióticas. Los autores reportan que, frente a los gráficos empleados por los medios de comunicación, en su mayoría los estudiantes utilizan terminología que en ocasiones contienen elementos estadísticos ambiguos o erróneos, realizan convenciones que pueden conllevar a una mala interpretación del gráfico (Gal, 2002, como se citó en Contreras et al., 2017). Por otro lado, Batanero (2004, como se citó en Contreras et al., 2017) indica que la cultura estadística no es solamente conocimiento disciplinar sino la incorporación de otros elementos, como la parte emocional, valores, actitudes, etc., y, el contexto, elementos que juegan un papel fundamental para los ciudadanos que interpreta y construyen los gráficos estadísticos desde la objetividad. Aspecto que requiere que los ciudadanos sean estadísticamente cultos con herramientas que les permita enfrentarse a la información gráfica presentados por los medios de comunicación. Los autores resaltan que la aplicación de la noción de «*función semiótica crítica*» posibilitó la identificación de procesos claves en la interpretación que los lectores realizan en la comprensión de la información proporcionada, así como tomar conciencia del trasfondo social y político de la misma. Los elementos semióticos que subyacen en los conocimientos implicados en la construcción o interpretación de los gráficos estadísticos ayudan a reconocer los objetos ostensivos y no ostensivos que se ponen en correspondencia, entre las diversas categorías de objetos, las prácticas implicadas y su intencionalidad. Los autores también manifiestan que los sujetos requieren de un conocimiento profundo de su problemática educativa puesto que un gráfico sesgado o mal construido provoca que la información no llegue de forma correcta al ciudadano que debe interpretar los datos estadísticos.

Distéfano, Aznar y Pochulu (2016) realizan un trabajo con 90 estudiantes universitarios de primer año de diversos programas académicos, dirigido a analizar las prácticas matemáticas y funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de ciertos símbolos matemáticos por parte de dichos estudiantes. Los autores seleccionaron algunos símbolos que no tuvieran uso fuera del ámbito de la Matemática, que no fueran de uso frecuente en la escuela secundaria, pero sí en las primeras asignaturas de Matemática en las que se tomaría la muestra. Los símbolos seleccionados son: $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$ y $\exists$. En la investigación se determinó y definió funciones semióticas que abarcan los aspectos nominal, sintáctico y semántico de los símbolos matemáticos como herramientas para el análisis. Por un lado, estas funciones permitieron refinar el diseño del instrumento utilizado en la investigación, y definir las variables dicotómicas para el registro de datos cuantitativos; y por el otro, permitieron describir la complejidad de significaciones presentes en las prácticas matemáticas en las que intervienen los símbolos estudiados para un posterior análisis cualitativo. Las tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas posibilitaron el establecimiento y la evaluación de las funciones semióticas que puso en evidencia las conexiones entre los objetos primarios implícitos en las configuraciones cognitivas activadas por los estudiantes. El uso de las funciones semióticas para el análisis de las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes permitió un análisis detallado y un reconocimiento de la complejidad cognitiva implícita en el significado.

Las investigaciones relacionadas anteriormente muestran cómo la función semiótica ha sido utilizada en diversos estudios con el fin de analizar los significados y comprensiones por parte de los estudiantes como producto de las prácticas realizadas. Dichos resultados muestran que el uso de la función semiótica permite comprender las relaciones que los sujetos establecen y que son evidenciados en sus producciones, que ponen en evidencia los significados éstos otorgan a los objetos matemáticos. En conclusión, la función semiótica ofrece una especie de «*radiografía*» de los significados que los estudiantes y profesores otorgan a los diferentes objetos matemáticos.

CAPÍTULO 3
CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Las producciones realizadas por el grupo de profesores de matemáticas que conforman el estudio de caso colectivo reportadas en la presente investigación son analizadas desde dos perspectivas teóricas. Por una parte, el enfoque cognitivo propuesto por Raymond Duval (1993, 2017) basado en los registros de representación semiótica empleado para ubicar el fenómeno de estudio en el campo de investigación de las transformaciones semióticas haciendo uso de denominaciones que permiten describir y consolidar el problema de investigación. Por otra parte, el enfoque ontosemiótico propuesto por el grupo de Juan D. Godino (2003, 2019) que brinda herramientas para analizar y explicar las soluciones de los profesores, en tanto, exponen los significados personales otorgados a las representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. Si bien, algunos autores ubican la primera teoría en un enfoque cognitivo del aprendizaje de las matemáticas obvian el hecho que los sujetos dialogan, consensuan y regulan los modos de expresión que son condicionados por los sistemas de prácticas compartidas (D'Amore y Godino, 2007). Por otra parte, dicha postura deja de lado, que el estudio de la cultura equivale al estudio de fenómenos semióticos y viceversa (Eco, 2000). Se tiene la convicción que el uso de algunos elementos propuestos por estas teorías posibilita un estudio del signo de manera holística, que para efectos de análisis se considera bajo tres aspectos: primero, en relación con otros signos **[sintaxis];** segundo, en relación con los objetos a los que se refieren **[semántica];** y, por último, en relación con sus intérpretes **[pragmática].** A continuación, se realiza una presentación sobre dos elementos de tipo general de la perspectiva teórica asumida en esta investigación: pragmática y semiótica; posteriormente se presenta una descripción de cada uno de los enfoques mencionados, enfatizando en nociones y conceptos que serán asumidos en el desarrollo del presente estudio.

3.1. Perspectiva Teórica

En este apartado se muestran algunas ideas básicas que son asumidas como marco teórico general en el desarrollo de esta investigación, se enfatiza en el signo considerado como mediador en el proceso comunicativo y la relación entre la acción humana y el lenguaje, que se constituyen en las bases epistemológicas del presente trabajo. En los últimos años el signo ha cobrado gran interés al interior de la comunidad matemática, en tanto posibilita evidenciar las formas de pensamiento del ser humano que son materializados gracias a éste. Radford (2006) considera que los signos junto a los artefactos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, funcionamiento y recepción que son enmarcadas dentro de la semiótica. Frente al estudio de los signos, existen tres grandes ramas que brindan una mirada holística de éste: ***la sintaxis*** que permite conocer las relaciones formales entre los signos; ***la semántica*** que enfatiza en las relaciones entre el signo y el objeto referido; y ***la pragmática*** que se encarga en comprender el sentido del discurso en función del contexto en el que se enuncia, en tanto, ofrece un panorama amplio de las relaciones que establecen los individuos en un contexto cultural mediado por el signo. Una herramienta fundamental para que los seres humanos describan el mundo que lo rodea es el *lenguaje*, que crea a su vez la necesidad de construir culturalmente significados, esto implica que, los sujetos interpreten y comprendan los signos, que posibiliten la construcción de argumentos coherentes, con una terminología adecuada y con unas reglas comunes de los signos matemáticos. Para una comprensión en matemáticas los sujetos se deben apropiar de los signos que conforman el lenguaje matemático, así como conocer el sentido y el funcionamiento de estos dependiendo del contexto en el que se originan.

D´Amore (2013) manifiesta que uno de los objetivos en la enseñanza de las matemáticas radica en que los ciudadanos aprovechen el lenguaje propio de las matemáticas, que les permita interpretar todos los fenómenos de la naturaleza y las disciplinas que el ser humano está en capacidad de crear. El lenguaje matemático se convierte en un elemento fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, de ahí surge la necesidad de conocer su idioma, que hacen de este un lenguaje único, que los sujetos deben acceder para alcanzar una comprensión de objetos matemáticos; en palabras de Ribes e Iñesta (2007) «es prácticamente imposible dar cuenta del aprendizaje humano sin la mediación y participación del lenguaje» (p. 12). Dada la importancia del lenguaje en la comprensión de las matemáticas se hace necesario describir de manera general los tres aspectos que lo conforman como son: la composición de símbolos, las representaciones semióticas que denotan un objeto matemático y las referencias de un objeto matemático.

Frente a la composición de símbolos, los signos matemáticos adquieren valor al interior de una expresión matemática que fuera de esta, pierde su sentido, por ejemplo, el símbolo «x» que en matemáticas, puede representar lo indeterminado «definición de polinomio»; la incógnita «ecuación polinómica»; o la variable, en una «función polinómica», que al ser extraída de cualquiera de las anteriores expresiones matemáticas; el símbolo «x» pierde su valor en matemáticas y puede ser interpretada como una letra del alfabeto, en tanto, el sentido depende del contexto en el que emerge. Lo anterior permite concluir que los símbolos matemáticos hacen parte de un sistema cerrado que dentro de éste los símbolos adquieren sentido, en tanto los significados dependen del contexto, que a su vez brinda varias maneras de representar o simbolizar la misma información. El segundo aspecto, hace referencia a las diversas representaciones que existen para expresar la misma información, por ejemplo, en la escritura fraccionaria un medio se puede expresar como $1/2$, y todas las fracciones equivalentes a ésta; en escritura decimal, un medio se expresa como 0,5; y en escritura exponencial como 5.10^{-1} [cinco por diez a la menos uno], etc. (D´Amore, 2006). El tercer aspecto, corresponde a las diferentes referencias de un concepto matemático, un objeto matemático puede ser definido relacionando distintos conceptos. Por ejemplo, Font (2002) propone el concepto de mediatriz de un segmento, definida como «la perpendicular que pasa por el punto medio» o «lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos», en este caso, el concepto matemático «mediatriz» es relacionado con conceptos diferentes, por un lado, con una recta perpendicular y punto medio de un segmento; y, por otro lado, con conceptos de lugar geométrico y puntos equidistantes.

Los aspectos señalados muestran que sin la existencia de los signos sería imposible hablar de un lenguaje matemático, puesto que, los signos describen el contexto de los sujetos que emergen de las prácticas matemáticas que son compartidas por los individuos, originando objetos institucionales, que condicionan los modos de pensar y actuar de los miembros de una determinada institución, que a su vez, moviliza unos *conocimientos subjetivos*, y unos *conocimientos institucionales*, que le otorga a dicho conocimiento subjetivo un cierto grado de objetividad (D'Amore y Godino, 2007). Este trabajo asume una teoría pragmática del signo, en tanto, se considera que las expresiones lingüísticas tienen significados diversos, que dependen del contexto en el que se usan y que resulta imposible cualquier observación científica objetiva y una generalización, puesto que, el único análisis posible es personal o subjetivo, que depende de las circunstancias que se originan en el momento (D'Amore y Godino, 2007).

3.2. Pragmática

La presente investigación se ubica en un enfoque filosófico pragmático, en tanto, se reconoce que la experiencia humana juega un papel fundamental en la constitución e interpretación de los signos. Los objetos matemáticos son considerados símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas que caracterizan a la práctica humana y que son modificados continuamente en el tiempo, en relación a los intereses y necesidades de los sujetos (D'Amore y Godino, 2007). Dentro de un enfoque pragmático los objetos matemáticos son asumidos como:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja [grafismos, formulismos, cálculos, etc.], es decir, registro de lo escrito. (Chevallard 1991, citado por D'Amore y Godino 2007, p.8)

D'Amore y Godino (2007) sostienen que los significados atribuidos a los objetos matemáticos no sólo dependen de los problemas que se presentan al interior de la matemática sino de las prácticas humanas, de ahí la importancia de conocer y analizar los diversos usos que determinan los significados que otorgan los sujetos a estos objetos matemáticos. Wittgenstein (1976) alude que el significado de una palabra depende de su función en un *juego de lenguaje* que determina el modo de *uso* y el fin para el cual se ha empleado. Para este autor la palabra no tiene un significado por sí sola, puesto que, puede ser contextualmente significativa. Rojas (2012) manifiesta que el concebir las ciencias como actividad humana, posibilita diferentes maneras de interpretar los fenómenos del mundo, sin que existan maneras predilectas de hacerlo. Por su parte, Nubiola (2004) alude que los problemas y las cosas tienen distintas facetas, distintas caras, que originan diversas maneras de pensar alrededor de estas. El concebir la ciencia como una actividad humana deja de lado, la concepción que las ciencias son una disciplina rígida con una verdad única, tal y como lo sostiene Putnam al afirmar que:

> ―no hay algo así como una versión privilegiada del hombre y del mundo que es la que la Ciencia nos ofrece, sino que las ciencias son actividades humanas cooperativas y comunicativas mediante las que los seres humanos progresamos realmente, aunque no sin titubeos ni errores, en nuestra comprensión del mundo y de nosotros mismos. (Putnam 1992, como se citó en Nubiola, 2004, p.2)

El concebir las ciencias como una actividad humana no implica una renuncia a la verdad, sino que brindan otros caminos para llegar a esta y validarla, en tanto, los sujetos tienen la tarea de descubrirla, forjarla, contrastar y someter esas percepciones empíricas a discusión con otros. Por otro lado, el conocimiento es considerado como una actividad humana, llevada a cabo por seres humanos y sujeto a ser corregido y mejorado con una imposibilidad de una verdad única. Rorty (1982) considera que en perspectiva pragmática lo «verdadero» es asumido como aquello «que puedes defender frente a cualquiera que se presente», y la «racionalidad» como el «respeto por las opiniones de quienes están alrededor»; en palabras de Nubiola (2004) la verdad *¡será, en todo caso, la verdad para ti, pero no creerás tú en unas verdades absolutas*!, esto permite concluir que no existe una verdad única, que no es refutable como históricamente se ha considerado al interior de las ciencias exactas y que en cuestiones éticas han sido consideradas relativas. Lo anterior no implica que la verdad sea cuestión de lo creen unos u otros, sino que ésta dista de aquello de lo que nosotros o una mente cualquiera pueda pensar; en consecuencia, con Peirce (1960) la «verdad» será la opinión a la que finalmente llegan los investigadores, que no es fruto del consenso entre los sujetos, sino que el consenso será el fruto de la verdad. En este enfoque la objetividad de la verdad está marcada por el carácter público del pensamiento, solidario, social, y razonable de la realidad que no debe ser del agrado o desagrado de las personas, es decir, la verdad es algo relativo que está en relación con las crecencias, tal y como alude Rorty al sostener que:

> Sin duda, la verdad es una noción absoluta, en el sentido siguiente: «verdadero para mí, pero no para ti» y «verdadero en mi cultura, pero no en la tuya», son locuciones extrañas, incongruentes. Lo mismo que «verdadero entonces, pero no ahora». Así como a menudo decimos «bueno para este propósito, pero no para ese otro» y «correcto en esta situación, pero no en aquella» relativizar la verdad a propósitos o situaciones parece absurdamente paradójico. Por su parte, «justificado para mí, pero no para ti» o «justificado en mi cultura, pero no en la tuya» suena perfectamente lógico. (Rorty 2000, como se citó en Darós 2001, p.10)

Nubiola (2004) alude que el pensamiento y el lenguaje se interrelacionan, en tanto, el lenguaje otorga sentido a la objetividad de la verdad. Interpretando los planteamientos de Rorty (1982) las ideas no son meras entidades que orientan las acciones de los sujetos, sino que éstas adquieren utilidad y eficacia según las necesidades o requerimientos de un sujeto o sociedad, esto hace que no exista una «verdad objetiva» sino que esta sea fruto de acuerdos socialmente establecidos y consensuados en tanto:

> ―no hay un camino único, un acceso privilegiado a la verdad. La razón de cada uno es camino de la verdad, pero las razones de los demás sugieren y apuntan otros caminos que enriquecen y amplían nuestra comprensión. Por el contrario, la posición relativista que afirma que no hay verdad, sino sólo

> diálogo, que sólo hay diversidad de perspectivas radicalmente inconmensurables, no sólo se autorrefuta en su propia formulación, sino que en último término sacrifica la noción de humanidad al negar la capacidad de perfeccionamiento real y de progreso humano. (Nubiola, 2004, p.17)

Frente a la objetividad de la verdad, Vásquez (2005) considera que el asumir una filosofía crítica implica la idea de una racionalidad histórica, que es capaz de definir el carácter de lo que es moral o inmoralmente en relación a la cultura, en el que no existe una «realidad objetiva» sino diferentes discursos cargados de objetividad que va depender de los consensos a los que llegan las personas, en este sentido, no existe una objetividad de los hechos, la verdad es lo más comunicable, liberadora, y aquello que los seres humanos establecen unos a otros para forjar relaciones significativas entre estos (Nubiola, 2004). Así mismo, los seres humanos son relativos a las circunstancias históricas, que depende de un acuerdo transitorio sobre qué actitudes son normales y qué prácticas son justas o injustas, razonables e irracionables, dicha racionalidad no debe ser entendida como aquella fuerza que pueden tener los sujetos, sino en el sentido de racionalidad más débil descrita por Rorty (1982) como la construcción de tramas de creencias de la manera más coherente, confiable y estructurada posible y la mente humana como la creencias y deseos que continuamente se teje a sí misma para ser adaptadas a nuevas situaciones acompañado de creencias justificadas, que su construcción depende entre las personas y las proposiciones que expresan lo que las personas creen. A esas creencias justificadas se les llama *conocimiento.*

Rorty (1996) alude que los sujetos llevan consigo una serie de palabras que les permiten justificar sus acciones, creencias y vida, las palabras ofrecen una visión holística de las vidas de los sujetos puesto que brindan una radiografía completa [pasado-presente-futuro] de cada individuo, al conjunto de palabras se les denomina *léxico último* (Rorty, 1996). Por léxico último se considera un «conjunto de palabras que [los seres humanos] emplean para justificar sus acciones, sus creencias y sus vidas» (Rorty, 1996, p.91). En conclusión, las palabras reflejan los pensamientos de los sujetos y son estas mismas las que tienen la potestad de juzgar lo correcto o lo incorrecto en relación a la utilidad de las cosas, tal y como lo sostiene Vásquez (2005) al manifestar que nada sirve como crítica de una persona salvo otra persona o como crítica de una cultura salvo otra cultura, en tanto las personas y las culturas tienen un léxico encarnado. Para Vásquez las dudas que surjan sobre sí mismos o de la cultura van a tener respuesta mediante la ampliación de las relaciones que establecen las personas con la cultura. Vera (2000) considera que las palabras están en el lugar de los objetos; por lo tanto, entender el significado de una palabra es conocer el objeto que representa, dada la diversidad no se puede hablar de un lenguaje unitario, puesto que, éste se compone de un sin número de usos, con la existencia de distintos tipos de lenguaje que reflejan diferentes formas de vida, en tanto, lo primario en el lenguaje no es la significación sino el uso, que subyace bajo la conceptualización de la definición ostensiva del lenguaje, es la idea que el significado de una palabra es el objeto del cual la palabra es un representante, es decir, que las palabras no son meras representaciones de objetos sino que reflejan el actuar de los sujetos.

Por otro lado, Richard Rorty considera que es imprescindible volver a replantear la influencia de Wittgenstein, en tanto, asume que la realidad es descrita por medio de lenguajes que se desarrolla a la par con la realidad que le otorga sentido, hecho que hace que las descripciones de mundo y la verdad no sean consideradas independientes del ser humano. Vera (2000) sostiene que el lenguaje es una praxis lingüística vital de los hombres, que sin este sería imposible un entendimiento posible, siendo el núcleo central de la comunicación lingüística, la cual no debe ser considera como la mera transmisión de una información, sino el entendimiento dentro de un actuar común. Wittgenstein (1999) rechaza la idea que el aprendizaje del lenguaje radica en dar nombres a los objetos, manifiesta que el acto de nombrar o de etiquetar una cosa determina el uso posterior de la palabra mediante el consenso a las que llegan las personas. En correspondencia con este autor hay tantos lenguajes como juegos de lenguaje, y un lenguaje especifico será uno de los posibles juegos de lenguaje5. Rorty (1991) considera que el lenguaje es contingente, puede suceder o no, puede ser de un modo o de otro, la realidad se va configurando en y a través de los lenguajes, es decir, el lenguaje es pragmático, útil, el resultado de negociaciones verbales o conceptuales y su utilidad se da por determinaciones de tiempo y lugar. Al respecto Ferrater (1966) afirma:

> La «justificación» o «legitimación» de un juego de lenguaje se basa en su integración con actividades vitales y con la realidad. La unidad de los juegos de lenguaje es el aire de familia: los juegos forman una familia que no se reduce a una significación única. (p. 18)

Por otro lado, la existencia de lenguajes como tantas actividades que realizan los sujetos al interior de una comunidad hace que estos no sean privados, como lo señala Wittgenstein (1999) puesto que desde un inicio es elemento fundamental de la praxis vital común a todos los seres humanos, en virtud de ello, un lenguaje privado presupone el lenguaje común y público. Estos aspectos antes mencionados hacen que el lenguaje sea considerado una construcción social que dejan de lado la discusión sobre los rasgos propios de la razón y la racionalidad. Como se ha mostrado en los párrafos anteriores, la pragmática no solo remite a las palabras en sí, sino que estas reflejan pensamientos y sentimientos de los sujetos, en que, el papel de los enunciados se encuentra determinado por aspectos sociopolíticos relativos a los rasgos formalizados al interior de la cultura. En palabras de Darós (2001) se debe abonar la idea de «naturaleza humana» como algo estable que sirve para medir e instaurar el valor de los actos común a todos los sujetos, puesto que, desde un enfoque pragmático el ser humano es un «animal flexible» circunscrito por un tiempo, lugar histórico y racionalidad. Al respecto Leontiev (1969) alude que el hombre desde que nace viene dotado de una herencia genética, que va perfeccionando a lo largo de la vida, pero dicho desarrollo y perfeccionamiento no sería posible, sin la colaboración de los demás. En cada etapa de desarrollo, el ser humano va adquiriendo y desarrollando habilidades y capacidades que lo van dotando de

[5] Concepto filosófico desarrollado por Ludwig Wittgenstein para este autor el lenguaje consiste en mil juegos, el uso diario de las palabras genera todo y cualquier sentido en el mundo. Cualquier significado y sentido de las cosas es relativo siempre. Concibe la filosofía como una terapia del espíritu, claridad de pensamientos para alcanzar una paz en el pensar que desemboque en una serena convivencia en soledad.

herramientas para comprender el contexto que lo rodea. Leontiev (1969) afirma que «el hombre es, fundamentalmente, un ser social, que todo cuanto en él es [humano] proviene de su vida en la sociedad, en el seno de la cultura creada por la humanidad». El autor muestra que no solo basta la herencia biológica del hombre, sino de esa interacción con el otro para su desarrollo intelectual, tal como lo expresa Nubiola (2004) quien retoma la metáfora del barrizal fundamentalista recordada por Susan Haack sobre los marineros borrachos:

> Un marinero borracho es incapaz de nada, pero dos marineros borrachos, apoyándose el uno en el otro y cantando al unísono, aunque sea desafinadamente, son capaces, de ordinario tras largos rodeos y trompicones, de encontrar su barco fondeado en el puerto. el «*todo lo sabemos entre todos*» que el poeta Pedro Salinas pone en boca del campesino español. (p.21)

Lo anterior muestra una relación de correspondencia entre los marineros borrachos y los sujetos como seres sociales, quienes, sin importar las similitudes y las diferencias, traen consigo el sentimiento de la solidaridad con la idea de «uno de nosotros». Como se ha advertido anteriormente se asume la relación de los seres humanos con el mundo desde la práctica humana. Lo anterior toma vigencia en el desarrollo de este estudio, en tanto, los profesores de matemáticas otorgan sentidos a expresiones matemáticas, mediante frases o proposiciones matemáticas a partir de un discurso matemático que han adquirido en su formación académica o producto de su experiencia como profesores, se busca que los profesores asignen sentido a signos particulares «matemáticos», es decir, deben «hacer hablar» a dichos signos (Rojas, 2012). Se espera que los profesores otorguen una diversidad de significados personales en relación a las experiencias particulares. En consecuencia, con la perspectiva pragmática no se habla de un significado único, se concibe al mundo como un sistema de signos organizados de tal manera que los valores de unos signos inciden y determinan los valores de otros, haciendo circular un bagaje de sentidos con el que se mueven los intereses, dinámicas y acciones de todos los individuos participantes en las cotidianidades de la cultura, (Pérez, 2007). Lo anterior no implica que se deje de lado los diferentes consensos a los cuales la comunidad matemática han establecido [institucionalización de un objeto matemático]. Se tiene la convicción que asumir un enfoque pragmático permite identificar las posibles dificultades que pueden encontrar algunos profesores para relacionar o reconocer que un mismo objeto matemático puede ser relacionado a través de diversos conceptos que parten de interpretaciones diferenciadas de las palabras, de los signos y de las representaciones empleados, que van explicitando los sentidos asignados y construyendo consensualmente significados requeridos para abordar la tarea.

3.3. Semiótica

Existen diversas formas que emplean los seres vivos para comunicarse entre sí, por ejemplo: el lenguaje visual, táctil, sonoro, gestual, etc., que requieren del uso de signos dotados de algún significado para ser comprendidos. El estudio de signos y los sistemas de signos se ha aplicado tanto en signos artificiales como naturales, por ejemplo, los signos que se utilizan en la comunicación animal o en el mismo lenguaje humano, tal y como lo muestra Geoffey, Thomas, Pratt y Ochs (2000) quienes retoman un ejemplo de la danza de las abejas descrito por Von Frisch cuando indican a sus compañeras la posición de una fuente de polen y néctar.

> La verdadera estructura de los mensajes en la danza─secuencia de movimientos – es un problema de *sintaxis.* El contenido referencial de la danza─señalar la dirección, la distancia y demás pormenores de la fuente alimenticia─es un problema de *semántica.* La forma en que funciona la danza como un aspecto de la conducta de las abejas─una forma de atraerlas a una fuente de alimento─es un asunto de la *pragmática.* (p.10)

El ejemplo anterior ilustra que los estudios semióticos, tanto en la comunicación humana como en la que no lo es, intervienen los tres aspectos semántico, sintáctico y pragmático como parte constitutiva de la semiótica, por tal motivo en la última década ha surgido un creciente interés por comprender los procesos comunicativos que emergen al interior de la cultura. Entre los orígenes de la semiótica se identifican dos tradiciones científicas hacia finales del siglo XIX. La primera corresponde a los estudios de Charles Sanders Peirce6 quien parte del concepto del signo como elemento primario de todo sistema semiótico. La segunda se basa en las tesis de Ferdinand de Saussure quien toma como fundamento la antinomia entre la lengua y el habla [el texto], aunque este autor no empleó el término «semiótica» sino semiología que, si bien algunos autores los consideran equivalentes, no lo son (Rojas, 2012). Por un lado, la semiótica asume una intención comunicativa, que requiere de sistemas de signos socialmente compartidos y, por otro lado, la semiología se preocupa por comprender las estructuras semióticas.

Peirce abre el camino para el estudio de las relaciones entre la producción de sentido, la construcción de la realidad y el funcionamiento de la sociedad. Por su parte, De Saussure, propone una teoría estructural que concibe la lengua como interpretante de todo sistema semiológico. Pese a la diferencia entre las dos perspectivas existe algo en común en ambas: *el signo* considerado por muchos investigadores la base «átomo» de los estudios semióticos (Lotman, 1998). La semiótica brinda elementos para comprender los procesos comunicativos en cualquier área del conocimiento y en cualquier sociedad, puesto que, sin el estudio de los signos sería imposible tener una comprensión de muchos fenómenos, tal y como lo manifiesta Peirce al escribir una de sus famosas cartas a Lady Welby:

> Nunca me ha sido posible emprender un estudio sea cual fuera su ámbito: las matemáticas, la moral, la metafísica, la óptica, la química, la anatomía comparada, la astronomía, los hombres y las mujeres, el whist, la psicología, la fonética, la economía, la historia de las ciencias, el vino, la meteorología, sin concebirlos como un estudio semiótico. (Peirce 1974, como se citó en Peña, Lozano y Abril, 1978, p.1)

Peirce (1955, como se citó en Eco, 1986) considera que la semiótica es «la doctrina de la naturaleza esencial y de las variedades fundamentales de semiosis posibles»; y la semiosis como «una acción, una influencia, la cual es, o involucra, una cooperación de tres aspectos, tales como

[6] Charles Sanders Peirce (1839-1914), fue un filósofo lógico y científico estadounidense. Considerado el fundador del pragmatismo y el padre de la semiótica moderna o teoría de los signos, junto a Ferdinand de Saussure.

un signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no es de ninguna manera resoluble en acciones entre pares» (p.20). En el siglo XX se fortaleció los estudios semióticos como una disciplina que se encarga de los procesos de comunicación, siendo el medio por el cual, los seres humanos organizan las diferentes actividades sociales al interior de la cultura, aspecto que hace de la semiótica una perspectiva amplia, asociada a sistemas de comunicación «naturales» la cultura juega un papel fundamental, en tanto, todo proceso cultural es considerado semiótico por naturaleza (Pérez, 2007). Por su parte, Eco (1968, 1969) argumenta que la semiótica estudia todos los fenómenos culturales como procesos de comunicación que requiere de la comprensión de los signos, en tanto considera que:

> En la cultura cada entidad puede convertirse en fenómeno semiótico. Las leyes de la comunicación son las leyes de la cultura. La cultura puede ser enteramente estudiada bajo un punto de vista semiótico. La semiótica es una disciplina que puede y debe ocuparse de toda la cultura. (Eco, 1989, p.33)

Para este autor existe un lazo de interdependencia entre *semiótica, cultura y comunicación,* considera que toda cultura se ha de estudiar como un fenómeno de comunicación o «la cultura 'es' comunicación» (Eco, 2000). El autor plantea tres hipótesis en relación a la cultura y al acto comunicativo; la primera hace referencia a «la cultura por entero debe estudiarse como fenómeno semiótico»*;* la segunda «todos los aspectos de la cultura pueden estudiarse como contenidos de una actividad semiótica»*;* y la tercera «la cultura es sólo comunicación y la cultura no es otra cosa que un sistema de significaciones estructuradas» (p.33). Por otra parte, los estudios semióticos ofrecen herramientas sólidas para la compresión de diferentes sistemas de signos que permiten la comunicación entre individuos, sus modos de producción, de funcionamiento y de recepción. Al respecto Lotman considera que:

> La semiótica de la cultura no consiste sólo en el hecho de que la cultura funciona como un sistema de signos. Es necesario subrayar que ya la relación con el signo y la signicidad representa una de las características fundamentales de la cultura. (Lotman 1998, como se citó en Pérez 2008, p.1)

Por su parte, Radford (2006) resalta los estudios propuestos por Vygotsky (2001) quien otorga un papel fundamental a la sociedad y la interacción de los sujetos en el proceso de significación. Vygotsky (1934, 2001, como se citó en Rojas 2012) considera que «el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su internalización». En palabras de Bruner (2006) la cultura moldea la vida y la mente humana otorgando significado a las acciones, esto significa, que no puede ser desligado los signos, los sistemas semióticos y el acto comunicativo de la cultura. En el campo matemático los estudios semióticos juegan un papel fundamental en la actividad matemática, puesto que, no solo permite conocer y analizar los signos y su uso, sino que brinda una mirada holística de esta disciplina desde su visión epistemológica y antropológica. Frente a la importancia de la semiótica en el campo matemático Radford (2006) alude que esta abarca todos los aspectos de la construcción de los signos por los sujetos, posibilita una lectura e interpretación de éstos por medio de múltiples contextos, en tanto, se considera el signo como acto comunicativo que presume de los aspectos individuales y sociales. En esta dirección, se pone de relieve la importancia de la interacción social en la consolidación del pensamiento humano, donde los sistemas de signos están ligados a una intención comunicativa. En el caso particular de matemáticas D'Amore y Godino (2007) manifiestan que los signos y su uso comprenden tres componentes que son parte constitutiva en la comprensión de estos: El primero, hace referencia al conjunto de signos (S); el segundo, el conjunto de reglas de producción de signos (R); y tercero, las relaciones entre los signos y sus significados (M). Los tres aspectos mencionados muestran que la manera de concebir la semiótica no puede ser desligados de la perspectiva filosófica «pragmática». Siguiendo los planteamientos de Ernest (1991) los objetos matemáticos son símbolos de unidades culturales que emergen y dependen de los sistemas de las prácticas humanas, que son modificadas continuamente en el tiempo, según las necesidades, tal y como lo sostiene cuando afirma que:

> Los sistemas semióticos implican signos, reglas de uso y producción de signos, y los significados subyacentes. Todos estos elementos dependen de prácticas sociales, y los seres humanos como seres esencialmente usuarios de signos y productores de significados nunca se pueden eliminar de la escena, incluso aunque para algunos fines ponemos en primer plano los signos y las reglas y relegamos a las personas y a los significados. (p.72)

El autor también alude que los sistemas semióticos no deben ser concebidos meros sistemas de representación semiótica y la actividad matemática no debe ser vista como la manipulación de símbolos, sino como las actividades que realizan los sujetos al interior de sus comunidades que son dotados de toda «presencia humana» y que dependen de las personas que los usan y los dotan de un significado. Aspectos que cobran importancia en el desarrollo de la siguiente propuesta de investigación, en tanto, nos planteamos, por un lado, describir los sentidos que otorgan los profesores a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y, por otro lado, identificar las dificultades que los profesores de matemáticas encuentran para relacionar dos significados entre sí, asignados a un mismo objeto matemático. Las concepciones culturales y la experiencia juegan un papel fundamental en las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. El análisis de los resultados del presente estudio es analizado desde una semiótica cultural y un enfoque pragmático del signo, dicho análisis, posibilitó identificar las dificultades que encuentran los profesores para articular las representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, así mismo, mostrar evidencias que estas dificultades son similares a las que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas. Resultados que corroboran que llevar a cabo un análisis semiótico permite conocer los modos en que los profesores producen y asignan sentido a los objetos matemáticos que se relacionan en cada tarea, y poner en evidencia las dificultades que encontraron los profesores para relacionar dos sentidos asignados a un mismo objeto matemático [no articulación semiótica].

3.4. Perspectivas Semióticas

A continuación, se muestra la perspectiva semiótica que se ha elegido en este proyecto de investigación para interpretar las producciones e interpretaciones de los distintos signos que se relacionan en cada tarea. Existen diferentes perspectivas semióticas que conciben de manera diferente los modos de producción y significación de los signos, cada una con sus contribuciones y sus limitaciones: la perspectiva de De Saussure [estructural análisis de sistemas semióticos]*;* perspectiva de Peirce [clasificación de los diversos tipos de representación]; perspectiva Vygotskiana [como respuesta al problema del estudio del pensamiento y de su desarrollo] y la perspectiva de Frege [el proceso semiótico que produce nuevos conocimientos]. Este trabajo adopta el signo desde la perspectiva semiótica de Peirce (1960) la cual concibe que los signos son empleados por los sujetos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos en un proceso denominado semiosis. A continuación, se amplían aspectos que son relevantes en el marco de esta perspectiva semiótica.

3.4.1. Relación Tríadica del Signo: Perspectiva Peirceana

Peirce es considerado pionero en los estudios pragmáticos, particularmente con su concepto de signo como «indicaciones o índices» como manifiesta Duval (2017) quien considera que el modelo de Peirce se fundamenta en un enfoque pragmático del conocimiento. Uno de los objetivos centrales en la perspectiva Peirceana es identificar cómo los signos son utilizados por el individuo para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. Peirce considera que las ideas, siendo mentales, sólo pueden estar en la mente de los individuos, no en el mundo físico, situación que propaga el problema del dualismo entre mente y materia. Los signos, en cambio se pueden encontrar en todas partes, tal y como lo define Peirce (1960)7 cuando alude:

> (…) cualquier cosa que por una parte está determinada por un Objeto y por otra parte determina una idea en la mente de una persona; estas determinaciones son tales que la última, a la que denomino el Interpretante del Signo, se ve determinada de manera mediata por el Objeto del Signo. Un Signo, por consiguiente, tiene una relación tríadica con su Objeto y con su Interpretante (…). (p. 276)

Como se ha señalado, un aspecto importante para Peirce es la cuestión lógico-pragmática del signo, en tanto, para este autor lo que tiene sentido es poder establecer aquello que los signos hacen. Peirce (1960) alude que los signos representan objetos [interpretantes]. Siendo estos, los tres términos básicos de su teoría: signo, objeto, e interpretante. Por ejemplo, las palabras que emite el ser humano son signos, o cualquier letrero de la calle, un semáforo en rojo, un mapa, etc. El signo es primero, el objeto segundo, y el interpretante tercero, Peirce habla del signo como un medio que vincula o media entre un objeto y un interpretante. Los tres elementos son imprescindibles, Peirce considera que algo no funciona como signo sino hasta ser tomado o

[7] Peirce, C.S. (1906). Pragmatism in retrospect: A last formulation (Sáenz-Ludlow, trad.). Nueva York: Dover Publications. (Obra publicada en Philosophical writings of Peirce 1955).

interpretado como un signo de ese objeto. Según Duval (2017) esta tricotomía [Representamen, o signo en sí mismo, Objeto e Interpretante] no es una clasificación sino una yuxtaposición, puesto que, emergen dos criterios simultáneos: existe similitud entre el contenido de una representación dada y el objeto representado o relación causal entre la ocurrencia de un fenómeno y su causa; dos criterios que se usan simultáneamente para distinguir e interpretar la diversidad de representaciones. Para Peirce lo importante no son signos individuales, sino la relación que se puede establecer entre estos en un proceso de semiosis. En la cadena de semiosis interesa mencionar que el signo evoluciona y perfecciona la concepción del objeto, esto permite, concluir que el proceso de semiosis brinda diferentes miradas de un mismo objeto, en este caso del objeto matemático.

Peirce distingue tres etapas en la formación del conocimiento: «el primario [primogenitura], secundario [alteridad] y terciario [terceridad]», el objeto mismo. Desde su pensamiento lógico Peirce alude que el significado se encuentra en el pensamiento, el significado es entendido como aquel conjunto de implicaciones prácticas que el objeto posee para el individuo, para este autor los fundamentos de un pensamiento pragmático son los signos y su determinación definidos por el empleo de un enunciado concreto por parte del hablante en una situación comunicativa, como su interpretación por parte del destinatario. En este sentido, la significación se dirige a la actividad que realizan los seres humanos, en tanto no solo se estudian los signos en relación con el significado y con las reglas que se utilizan, sino que, se tiene en cuenta el uso que se hace de este y cómo los hablantes lo utilizan en su interacción con otros hablantes.

3.5. Teoría de los Registros Semióticos de Representación

En la última década han cobrado importancia los estudios semióticos desde diferentes disciplinas, en tanto, posibilitan abordar semióticamente los actos comunicativos. En Colombia, las diferentes políticas educativas como Lineamientos para el Área de Matemáticas (1998) y los Estándares (2006) aluden que unos de los objetivos de la educación matemática es lograr que los estudiantes desarrollen la competencia de expresar y representar ideas matemáticas, así como, poder transformarlas, formular y sustentar diversos puntos de vista que requieren el dominio de distintos recursos y registros, tanto en lenguaje natural como matemático. A su vez, esto demanda que los profesores comprendan las nociones matemáticas que han de enseñar, con un nivel de reflexión y una amplitud de análisis que posibiliten la apropiación y el desarrollo de competencias matemáticas por parte de sus estudiantes. Aspecto que no sería posible sin la apropiación de sistemas semióticos de representación específicos en estudiantes y profesores, conllevando a los educadores matemáticos pensar, reflexionar e identificar los diferentes problemas a los que se enfrentan los sujetos al aprender matemáticas, puesto que, a diferencia de la mayoría de disciplinas, los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y posibilitan una manipulación sobre estos (Duval, 2004). Al respecto D'Amore et al., (2015) manifiestan que, en 1993, Raymond Duval evidencia el siguiente hecho: «el estudiante puede confundir el objeto matemático O, que está tratando de construir cognitivamente, con una determinada representación semiótica R(O) de dicho objeto. Explicaba que esta confusión se debía a una especie de paradoja inevitable: sólo quien ha construido el objeto O, puede reconocer R(O) como representación de O y no como objeto en sí» (p.1), fenómeno que comúnmente se conoce como paradoja cognitiva y que da origen a diversos cuestionamientos en torno al aprendizaje matemático, por ejemplo, cómo reconocer el mismo objeto en diferentes representaciones, o cómo crear correspondencia entre representaciones, entre otros. Duval (2017) manifiesta que existen diferentes problemas a los que se enfrentan los sujetos al aprender matemáticas, por ejemplo, pueden estar relacionados con la solución de un problema, el razonamiento, visualización geométrica, visualización gráfica, incapacidad para transferir y aplicar el conocimiento adquirido a nuevas situaciones de la realidad, etc., recalca que para entender el origen que subyace a este tipo dificultades es necesario observar, identificar y analizar aquello que los estudiantes hacen y explican, los que tienen éxito o los que no, frente a las tareas y problemas que se les proponen. Así mismo, este autor considera que estas problemáticas, por un lado, están relacionados con el estado epistemológico particular del conocimiento matemático y, por otro, con la organización pedagógica de las actividades matemáticas. Debido a que las actividades que se desarrollan en el aprendizaje matemático son diferentes a las empleadas en el aprendizaje de otras disciplinas científicas, este punto diferenciador, requiere que dichas actividades sean reflexionadas semióticamente

Por otro lado, Duval (2017) manifiesta que en matemáticas el aprendizaje de un objeto de conocimiento se basa en la toma de conciencia de dichos objetos por medio de diferentes representaciones de un mismo objeto sin confundir las representaciones con el objeto en sí. Al respecto Duval (1999, 2004) alude que los diferentes tipos de representaciones semióticas empleadas en matemáticas, refieren a los objetos matemáticos y no a conceptos, pues estos son considerados representaciones mentales. En el ámbito matemático es de vital importancia reconocer las representaciones semióticas y las múltiples posibilidades de dichas representaciones, en tanto, comunicar las ideas matemáticas requiere de diversos registros de representación y la posibilidad de escoger el tipo de representación que va depender de la intención y el objetivo de la idea a comunicar.

Duval (1995, 2017) sugiere que toda comprensión matemática requiere de una apropiación individual de sistemas semióticos de representación específicos. En el caso particular de las matemáticas para tener una apropiación de los sistemas semióticos de representación no solo requiere del uso del lenguaje natural, sino del uso de diversos sistemas de representación para los objetos matemáticos, por ejemplo, del lenguaje figural, del lenguaje algebraico, de los gráficos cartesianos, de las representaciones tabulares, entre otros sistemas semióticos de representación. Duval (1999, 2004) considera que estos están constituidos por tres elementos:

- El objeto representado
- El contenido de la representación, que refiere, a todo aquello que una representación presenta del objeto

- La forma de la representación, es decir, el tipo de registro semiótico.

Por tanto, el tipo de representación no puede ser desligado del sistema que lo produce, al respecto Duval (2004) sostiene que «una representación no puede ser comprendida independientemente del sistema que permitió producirla» (p. 43). Para este autor un registro semiótico se compone de sistemas de reglas combinados de signos que posibilita «efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación» (p. 44), es decir, cualquier sistema semiótico debe posibilitar transformar una representación en otra representación, vale la pena realizar esta aclaración puesto que, si bien todo registro es un sistema de representación, lo contrario no se cumple. Duval (2017) alude que los registros son considerados como «*sistemas semióticos*» siempre y cuando proporcionen los medios para crear nuevos conocimientos por medio de los tres procesos cognitivos [formación, conversión, tratamiento]. En relación con la diferencia entre sistema semiótico y registro, Rojas (2012) toma dos ejemplos; el primero, las señales de tránsito, las cuales constituyen un sistema semiótico de representación pero no son un registro semiótico, puesto que, no posibilita transformar representaciones [no posibilita «*expansión discursiva*»] y, un segundo ejemplo, relacionado con el lenguaje de las flores, usado en la época victoriana para enviar mensajes cifrados [rosas rojas: pasión, amarillas: amistad, girasol: respeto, significados que actualmente se conservan en ciertos contextos]; en contraste el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, entre otros, son sistemas semióticos de representación y son registros semióticos, en tanto, posibilitan transformaciones a su interior [expansión discursiva].

Duval (2017) plantea que un *sistema semiótico* debe cumplir dos condiciones para ser un *registro*: primero, deberá ser capaz de producir representaciones que permitan tener acceso perceptual o instrumentalmente a objetos inaccesibles, para explorar todo lo que es posible; y segundo, abrir un campo de operaciones específicas que permiten transformar las representaciones producidas en nuevas representaciones, siendo condiciones necesarias involucradas en el acto de pensar o «*noesis*», término utilizado por Aristóteles y Husserl; y emplea el término «*semiosis*» para designar el sinergismo en la activación de al menos dos registros en la producción y transformación de representaciones semióticos, con lo cual se puede decir que no hay *noesis* sin *semiosis.*

Por otro lado, Duval (2004) alude que el término *registro* posibilita «designar la perspectiva que consiste en analizar los conocimientos desde la óptica de la adquisición no de los objetos sino de los sistemas productores de representaciones que permiten al sujeto alcanzar tales objetos» (p. 64). Y destaca tres actividades cognitivas de representación que movilizan implícita o explícitamente la actividad matemática:

- ***Formación:*** elección de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- ***Tratamiento:*** es la transformación de una representación en el registro mismo donde ha sido formado. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

- ***Conversión:*** es una transformación de una representación a otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.

Estas transformaciones semióticas de representación que son posibles de realizar junto con las operaciones de producción son características para que un sistema semiótico sea considerado como un registro. La actividad cognitiva no sólo requiere del uso de diferentes sistemas semióticos de representación, diferenciando entre el objeto y su representación, sino el reconocer el mismo objeto matemático por medio de diferentes sistemas semióticos que muestran una parte del objeto y una articulación de estos. Duval (1993, 2017) resalta dos tipos de transformaciones entre representaciones semióticas: tratamientos y conversiones, que han sido definidas en párrafos anteriores. Por ejemplo, D´Amore (2006b) propone la situación «calcular la probabilidad del siguiente evento: lanzar un dado y obtener un número par» al analizar las representaciones semióticas que emergen en esta actividad, se pueden encontrar por lo menos, las siguientes trasformaciones asociadas al mismo evento aleatorio:

- Registro semiótico lengua natural, probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado.
- Registro semiótico lenguaje de las fracciones: $\frac{3}{6}, \frac{50}{100}, \frac{1}{2}$
- Registro semiótico lenguaje del porcentaje: 50%.

Por otro lado, el autor manifiesta que en éstas se pueden identificar las siguientes transformaciones semióticas:

- ***Conversión****:* entre la representación semiótica expresada en el registro lenguaje natural y $\frac{3}{6}$
- ***Tratamiento:*** entre, $\frac{3}{6}, \frac{50}{100}$, y $\frac{1}{2}$
- ***Conversión:*** entre $\frac{50}{100}, \frac{1}{2}$ y 50%. (p. 10).

Frente a los procesos cognitivos de tratamiento y conversión propuestos, Duval (2004) plantea que el problema central en el aprendizaje en matemáticas está asociado a la transformación de conversión, puesto que, exige el reconocer representaciones diferentes [producidas desde registros diferentes], como representaciones de un mismo objeto y deja de lado, que probablemente los sujetos pueden encontrar dificultades en la solución de algunas tareas que requieren la transformación de una representación en el mismo registro semiótico «*tratamiento*» actividad cognitiva esencial en la actividad matemática y que son reportadas en esta investigación. Finalmente, Duval (2017) expresa que el análisis del conocimiento matemático no solo debe abarcar la naturaleza de objetos estudiados, sino también, la forma en que los objetos se presenta y cómo los sujetos pueden acceder a ellos. Este autor manifiesta que para tener una comprensión en matemáticas se debe distinguir el objeto de sus diversas representaciones, en tanto, en la actividad matemática la noción de objeto es más importante que la de concepto, puesto que «no se trabaja sobre conceptos; se trabaja sobre los objetos [números, funciones, etc.] que tienen propiedades» (p. 20). Por su parte, Rojas (2012) plantea que en la actividad matemática toma valor la dupla [signo- objeto] o [representación semiótica, objeto] o, más adecuado, la dupla [representaciones semióticas del objeto, objeto]. Como se señaló en el inicio de este capítulo, en el marco de esta propuesta, que aquí se reporta, el enfoque de Duval (1995/1999, 1999/2004, 2017) se empleó para identificar el campo de estudio y ubicar el problema de investigación, puesto que posibilita describir el fenómeno a estudiar en relación a las trasformaciones semióticas.

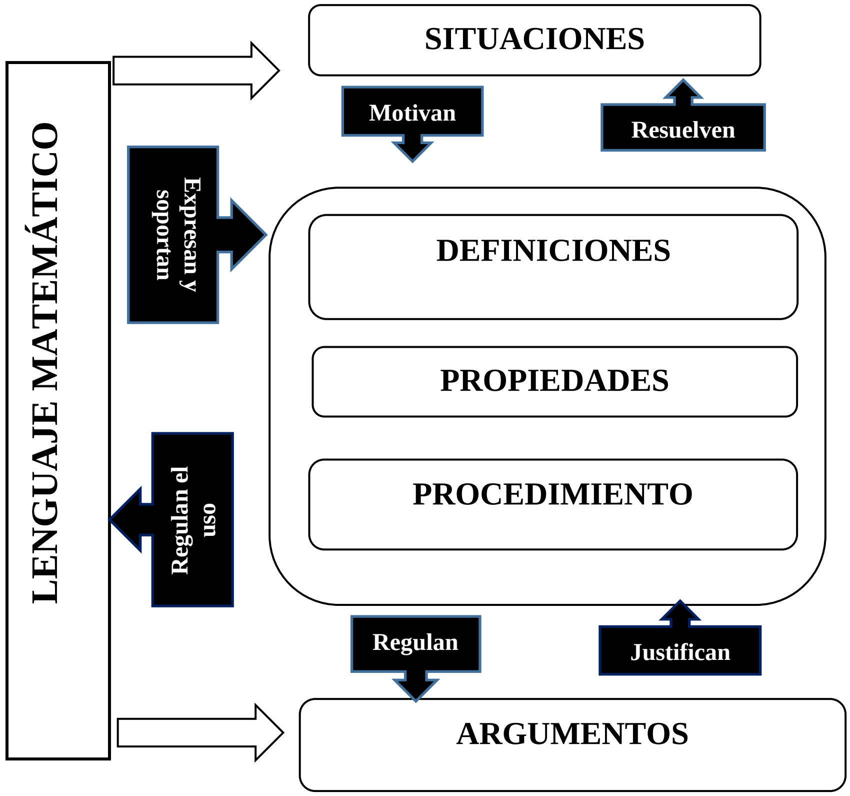
3.6. El enfoque Ontosemiótico

El análisis de las producciones de los profesores que se reportan en esta investigación se realizó desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), marco teórico, que tiene como objetivo comunicar, entender, describir e investigar, de forma holística, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas bajo un modelo epistemológico sobre las matemáticas basado en presupuestos antropológicos/socioculturales. Para el caso puntual de este proyecto de investigación este enfoque brindó herramientas útiles en el análisis de los significados personales que los profesores otorgaron a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, que a su vez, posibitó identificar las relaciones que éstos establecieron por medio de las funciones semióticas.

En el EOS se considera objeto matemático a todo aquello que es indicado, señalado o nombrado cuando se hace, se comunica o se aprende matemáticas (Godino, 2002). La práctica matemática es asumida como toda actuación o expresión [verbal, gráfica, etc.] realizada por una persona [o compartida en el seno de una institución] para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar o generalizar la solución a estos problemas (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012). En la práctica matemática se activa una configuración de objetos primarios que describen seis tipos de objetos primarios Font, Godino y Gallardo (2013): (1) el lenguaje [términos, expresiones, gráficos, etc.]; (2) los conceptos [mediante definiciones o descripciones]; (3) las proposiciones [enunciados sobre conceptos]; (4) los procedimientos [algoritmos, operaciones, técnicas, etc.]; (5) las situaciones [problemas, tareas, ejercicios, etc.]; y (6) los argumentos [validan las proposiciones y procedimientos]. Tal y como se muestra en la figura 3:

Figura 3

Configuración de objetos primarios



Fuente: Godino, Batanero y Font (2009, p. 7)

El anterior esquema, ilustra las interrelaciones entre los objetos primarios, los conceptos, proposiciones y procedimientos describen lo que se denominan las *«ideas»* del triángulo epistemológico8, que, a su vez, se relacionan con los símbolos del lenguaje [significantes]. Las situaciones y argumentos pueden ser entendidos como los contextos o los objetos de referencia. Los seis objetos primarios, y los derivados de ellos, también son descritos en función de los *procesos* importantes en la actividad matemática. Esta interrelación entre los objetos primarios permite profundizar en la naturaleza de los objetos de una manera dinámica y pragmática, así como, establecer vínculos entre ellos y sus atributos complementarios. Las relaciones entre los seis objetos primarios determinan las configuraciones, definidas por Godino, Batanero y Font (2008) como:

> – las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, que son activadas por los sujetos, que a su vez son herramientas

[8] Triángulo alumno – maestro– saber, entendido como modelo sistémico de la *«didáctica fundamental»*

teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. (p.8)

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales Godino (2002): personal – institucional; ostensivo – no ostensivo; expresión – contenido; extensivo – intensivo [ejemplar - tipo]; y unitario – sistémico. En este proyecto, el análisis se centró en la faceta *expresión-contenido*, categoría que permitió identificar las relaciones que establecen los profesores de matemáticas. Por otro lado, desde el EOS se distinguen dos tipos de prácticas matemáticas; en primer lugar, los sistemas de *prácticas personales* que hacen referencia a los significados que desarrolla los sujetos como resultado de su interacción social, los lenguajes y el diseño didáctico al que están expuestos mientras se encuentra en el proceso de aprendizaje; y, en segundo lugar, las *prácticas institucionales*, que se consideran compartidas por una institución, o colectivo de personas, que tienen características particulares. Para cada uno de estos dos sistemas de prácticas, se definen tipologías con el objetivo de aclarar las relaciones en el proceso de enseñar y aprender matemáticas. En relación a los sistemas de *prácticas personales*, se definen las prácticas *logradas* como aquellas manifestadas de forma progresiva por los individuos. Este modelo posibilita inferir que algunas prácticas declaradas pueden *no* ser parte de las pruebas de evaluación propuestas y que algunos sujetos son capaces de lograr exitosamente prácticas que, tal vez, no fueron formalmente declaradas en un principio. Las prácticas institucionales no necesariamente se dan por consenso entre las personas o por establecidas únicamente dentro de una comunidad, sino como resultado de interrelaciones, con retroalimentación o resultado no planificados de interacciones entre las partes del sistema.

Para Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos *«significados»*. Aunque no es suficiente declarar que los estudiantes se *apropien* de los significados colectivos y que estos aportarán a las definiciones colectivas. En el EOS se destaca cómo se interrelacionan, a lo largo del tiempo, los significados personales e institucionales en función de las relaciones dialécticas entre la enseñanza y el aprendizaje, dando paso a el carácter dinámico de los significados. Por otro lado, se describe y analiza las relaciones entre los procesos de enseñar y aprender matemáticas, así como, el describir los roles entre los sujetos [profesores y estudiantes] con los objetos matemáticos como un sistema integrado vinculado a una o más situaciones-problemas, mediante las configuraciones cognitiva/epistémica. En el caso particular del presente estudio, el uso de las nociones de prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas/cognitivas y funciones semióticas brindaron elementos pertinentes para identificar los significados personales otorgados a los objetos matemáticos enmarcados en las tareas propuestas permitiendo identificar y describir las relaciones que los profesores establecieron y que dejan en evidencia la no articulación de sentidos asignados a representaciones que son obtenidas mediante tratamiento.

3.6.1. Sentido, Significado y Referencia

En tanto la presente propuesta de investigación se pregunta por los diferentes sentidos que los profesores de matemáticas asignan a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y las dificultades que éstos encuentran para relacionar los sentidos entre sí, que ha sido denominado como «articulación de sentidos» o «articulación semiótica», se hace necesario realizar una revisión de la literatura que centra su interés en el sentido y los significados que los sujetos asignan a los objetos, específicamente aquellos estudios que muestran como estos constructos teóricos han sido interpretados por diferentes autores en relación a las posturas filosóficas. Por su parte, Bruner (1991, como se citó en Godino1995) alude que el significado es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos dependiendo del contexto y su cultura. Para este autor los sujetos establecen significados empleando sistemas ya establecidos y «profundamente arraigados en el lenguaje y la cultura» (Bruner 1990, 2006, p. 30). Además, sostiene que la vida y la mente humana son moldeadas por la cultura, puesto que en los procesos de interacción con otros y con el medio los seres humanos «crean un sentido de lo canónico y cotidiano que se constituye en telón de fondo sobre el qué poder interpretar y narrar el significado de lo inusual». (p. 81)

Bruner (1998) plantea que el origen de los significados se da en dos vías opuestas pero que finalmente se entrecruzan producto de la negociación entre sujetos. Por un lado, se encuentra la vía de origen biológico y, por otro lado, la vía de origen cultural: desde su origen biológico los seres humanos nacen dotados con capacidades necesarias que le permiten una apropiación del lenguaje, desde su nacimiento los sujetos comprenden algunos significados mediante «representaciones proto-lingüísticas» que les posibilita una mejor interacción con el medio; desde su origen cultural, los sujetos hacen parte de un sistema de signos que brinda la cultura y que permite a los seres humanos construir otros significados, producto de la negociación y el consenso entre estos inmersos en la cultura (Bruner, 1998). En correspondencia con este autor la apropiación del lenguaje se produce cuando existe una evolución en los significados y para ello se requiere que el aspecto biológico y cultural se entrelacen. En conclusión, Bruner manifiesta que el lenguaje posibilita que los sujetos comprendan y construyan significados pertinentes para participar en la cultura.

En un enfoque cultural se ubica los trabajos de Vygotsky (1931, 2000) quien manifiesta que el desarrollo del ser humano parte de la adhesión del hombre a la cultura que posibilita que estos interioricen una serie de instrumentos que permiten una internalización del mundo externo, permitiendo una autorregulación de su comportamiento. Para Vygotsky el origen de los significados se evidencia en las relaciones que los sujeto establecen a partir de los signos que son fundamentales en la comprensión de los significados, en tanto, estos emergen en la cultura con el fin de ser interiorizados por el hombre y que a su vez posibilita que los sujetos entre en contacto con el mundo e influir en ellos y luego en sí mismo (Vygotsky, 1960, como se citó en Wertsch, 1988). A lo que Vygotsky ha denominado como el paso de la significación interpsicológica a la intrapsicológica, en tanto, se reconoce que en un inicio «el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan solo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo» (Vygotsky 1931, 2000, p. 146). Así mismo, lo anterior deja en evidencia que además de transformar la conducta de los individuos, los signos son un mediador entre la cultura y el hombre. Frente a los significados Vygotsky (1987) alude que estos están dirigidos por el sentido, plantea que «la regla que rige el lenguaje interiorizado es el predominio del sentido sobre el significado, de la oración sobre la palabra y del contexto sobre la oración» (p. 189). El autor considera que:

> En el lenguaje hablado, como regla, vamos del elemento más estable y permanente de sentido, de su zona más constante, es decir el significado de la palabra, a las zonas más fluctuantes, a su sentido en general. En cambio, en el habla interna este predominio del sentido por encima del significado […] ocurre en una forma absoluta (Vygotsky1987, como se citó en Wertsch, 1988, p. 137).

Para Pavlov9 las palabras son lo que diferencia al hombre de los animales en tanto, las palabras son sistema de señales que permite expresar la realidad, que luego de ser interiorizado actúa en la conducta de los sujetos (Wertsch, 1988). Así mismo para Vygotsky el sentido de una palabra es:

> […] el agregado de todos los hechos psicológicos emergentes de nuestra conciencia a causa de la palabra […]. Por tanto, el sentido de una palabra siempre resulta ser una formación dinámica, en curso, compleja, que tiene diferentes zonas de estabilidad. El significado es […] la zona más estable, unificada y precisa. Como sabemos, una palabra cambia su sentido en varios contextos. Contrariamente, su significado es ese punto fijo, invariable, que se mantiene estable durante todos los cambios de sentido en varios contextos (Vygotsky1987, como se citó en Wertsch, 1988, p. 136).

Vygotsky asume el concepto de sentido a partir de los trabajos del psicólogo Paulhan, quien se centró en el uso del lenguaje y la relación entre el significado y el sentido que se otorgan a las palabras. Con base a la definición de sentido dada por Paulhan, Vygotsky (1987) escribe:

> Paulhan afirma que el sentido de la palabra es complejo, fluido y está en cambio permanente. De alguna manera él es único para cada conciencia y para una conciencia individual en circunstancias diferentes. En ese aspecto, el sentido de la palabra es inagotable. La palabra adquiere sentido en una frase. La frase en si misma adquiere sentido, sin embargo, en el contexto del párrafo, el párrafo en el contexto del libro, y el libro en el contexto de los trabajos escogidos del autor. Finalmente, el sentido de la palabra es determinado por todo lo que en la conciencia está relacionado con aquello que se expresa en la palabra. (p. 276*)*

En relación con esta manera de interpretar el sentido se puede concluir que este sufre un proceso de transformación al mismo tiempo que el sujeto se transforma como un ser activo que inmerso en la cultura construye los significados y que el medio por el cual logra esta transformación es el lenguaje, Vygotsky (1987) argumenta que:

---

[9] Iván Petrovich Pávlov (1849-1936). Fisiólogo ruso conocido por sus experimentos con perros, que dio origen al conductismo, una importante corriente de la Psicología.

> El sentido de una palabra es el agregado de todos los elementos psicológicos que aparecen en nuestra conciencia como resultado de la palabra. El sentido es una formación dinámica, fluida y compleja que tiene varias zonas que varían en su estabilidad. El significado es apenas una de esas zonas del sentido que la palabra adquiere en el contexto del habla. Él es el más estable, unificado y preciso de esas zonas. (p. 276)

Por su parte, Wittgenstein (1953, 1976) alude que el significado de una palabra depende de su función que ha denominado como un *juego de lenguaje*, que determina un uso y un objetivo el cual se ha empleado. La palabra necesita ser contextualmente significante ya que, por sí, sola carecería de significado. Lo anterior deja en evidencia que los sentidos y significados no existen fuera de la cultura, en palabras de Hernández (2003, como se citó en Arcila, Mendoza, Mendoza Ramos, Jaramillo, Cañón, 2010) «la mente humana no debe ser considerada como un instrumento en el que se depositan los significados, sino como principal creadora de ellos y esta creación no puede desligarse de la cultura a la cual se encuentra inmerso el sujeto» (p.2). Es decir que, no es posible comprender los significados fuera del contexto cultural en el que se construyen.

En el ámbito de la actividad matemática, D´Amore (2006b) sostiene que el sentido se deriva de una práctica compartida. Así mismo, este autor alude que «mientras el matemático puede no interrogarse sobre el sentido de los objetos matemáticos que usa o sobre el sentido que tiene el conocimiento matemático, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones» (p. 2-3). Al respecto Radford (2004) manifiesta que:

> Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un artículo técnico en matemáticas la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del saber matemático. (…) Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología. (como se citó en D´Amore 2006b, p. 3)

El autor sugiere que en una aproximación antropológica al pensamiento matemático es imposible ignorar el empleo que los sujetos hacen de las diversas clases de signos y artefactos. Radford (2004) manifiesta que:

> Una aproximación antropológica no puede evitar tomar en cuenta el hecho de que el empleo que hacemos de las diversas clases de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está subsumido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. (...) Lo que es relevante en este contexto es que el uso de signos y artefactos alteran la manera en que los objetos conceptuales nos son dados a través de nuestros sentidos (…) Resumiendo, desde el punto de vista de una epistemología antropológica, la manera en que me parece que puede resolverse el misterio de los objetos matemáticos es considerando dichos objetos como patrones [patterns] fijados de actividad humana; incrustados en el dominio continuamente sujeto a cambio de la práctica social reflexiva mediatizada. (como se citó en D´Amore 2006b, p. 3)

Argumentos que muestran que la construcción de los significados no existe fuera de la cultura de los sujetos, que, a su vez, evidencian las compresiones que estos tienen de dichos objetos. Por su parte Godino (1994) alude que un análisis del significado desde un punto de vista didáctico puede contribuir a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en educación matemática, puesto que, permite determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como, la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción dentro del aula de matemáticas.

En el campo matemático uno de los pioneros en abordar temas relacionados con el sentido y la referencia de un signo, fue Frege (1985)10 quien manifiesta que el signo se encuentra ligado al sentido, que contiene dicho signo, determinado por el contexto. En sus estudios introdujo la distinción entre la significación de una expresión y su referencia. Su interés radicó en el lenguaje matemático, específicamente en la naturaleza y el sentido de la matemática como de su lenguaje. Por ejemplo, expone el caso de la igualdad, palabra que es usada en el sentido de identidad *«a = b», «a es lo mismo que b»* o *«a y b coinciden»*. El autor se pregunta si la igualdad es una relación, si es una relación entre objetos, o, si bien es una relación entre nombres o signos de objetos. Considera que una de las razones que parece hablar en favor de ello, es el hecho de considerar la relación a =*a* y *a* = *b*, enunciados de diferente valor cognoscitivo en donde: *a* = *a* vale *a*, a priori, esto es que, independientemente de toda experiencia [tautológica], y juicios sintéticos a posteriori, depende de un dato dado proveniente de la experiencia sensorial. Según Frege (1985) si en la igualdad se quiere ver una relación entre aquello a lo que los nombres «*a*» y «*b*» se refieren, no parecería que *a*=*b* puede ser distinto de *a*=*a*, siempre que *a*=*b* fuera cierto. En este caso, se expresa, una relación de una cosa consigo misma, y además una relación tal, que se da en cada cosa respecto de sí misma, pero que ninguna cosa tiene respecto de cualquier otra.

Para Frege (1985) los signos o nombres «*a*» y «*b*» refieren a lo mismo, y por lo tanto en la igualdad se trataría precisamente de estos signos, se afirmaría una relación entre ellos. Esta relación existiría entre los nombres o signos únicamente en la medida en que éstos denominan o designan algo. Con ello, el enunciado *a*=*b* no se referiría entonces ya a la cosa misma, sino tan sólo a nuestro modo de designación. El autor expresa que la relación entre el signo, su sentido y su referencia es tal, que al signo le corresponde un determinado sentido y a éste, a su vez, una determinada referencia, mientras que a una referencia [a un objeto], no le corresponde solamente un signo. Es decir, el mismo sentido puede expresarse en diferentes lenguas, e incluso en la misma lengua, de diversas maneras. Frege (1985) considera un conjunto perfecto de signos, a cada expresión debería corresponderle un sentido determinado, pero las lenguas naturales a menudo no cumplen este requisito, y hay que darse por satisfecho si, sólo en un mismo contexto, tiene la misma palabra siempre el mismo sentido. Vergel (2014) afirma que «los signos no se limitan únicamente a su función representativa, la elección de ellos no es neutra o independiente y dicha elección orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación». (p. 2). Lo señalado anteriormente otorga una relevancia al contexto, el cual un signo puede significar cosas diferentes

[10] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), matemático y lógico alemán.

dependiendo de éste, por ejemplo, al pensar en la expresión $4x$, ésta puede tomar diferentes sentidos dependiendo de su uso definido por el contexto, de este modo, en un contexto de magnitudes la expresión puede representar un segmento de longitud x reiterado cuatro veces, en un contexto de áreas puede representar un rectángulo de medidas de lados 4 y x, en un contexto de funciones dicha expresión representa una función lineal, en un contexto algebraico puede representar un monomio [constante 4 y variable x] y en un contexto aritmético [números naturales] la expresión $4x$ puede expresar todos los múltiplos de cuatro. Por tanto, la expresión $4x$ toma significados distintos que dependen del contexto en la que se presenta, en tanto, una misma expresión significa cosas diferentes dependiendo su uso. Por otro lado, en un mismo contexto una expresión puede ser definida de diferentes maneras, por ejemplo, el concepto «función» puede ser conceptualizada como «la correspondencia o relación f de los elementos de un conjunto A con los elementos de un conjunto B» o como «una magnitud que está en función de otra cuando el valor de la primera depende del valor de la segunda». Definiciones que relacionan conceptos diferentes, la primera emplea el término de correspondencia y en la segunda el concepto de dependencia.

Por otro lado, Godino (2002) considera que los significados indican los aprendizajes logrados por parte de los estudiantes, en esta dirección D´Amore (2006a) alude que el conocimiento matemático es el producto de los individuos, al interior de la sociedad a la cual pertenecen, en el que, los individuos emplean estrategias que posibilita la adaptación del individuo a la sociedad, este autor considera:

> – el aprendizaje matemático de un objeto O por parte de un individuo I al interior de la sociedad S no es otra cosa que la adhesión de I a las prácticas que los otros miembros de S desarrollan en torno al objeto dado O. (D´Amore, 2006a, p. 9)

Así mismo el autor recalca la existencia de dos tipologías en relación a los objetos matemáticos, por un lado, los objetos de la matemática y por otro, los objetos lingüísticos que expresan y denotan los objetos matemáticos. D´Amore considera que la adhesión de los sujetos a las prácticas realizadas emerge a través del intercambio lingüístico, en tanto, el lenguaje es un medio por excelencia entre las prácticas y pensamiento. Este autor puntualiza que los objetos no son creados por el lenguaje, sino que estos son creados junto al lenguaje mediante el cual son expresados. Las prácticas son adoptadas y explicitadas por los seres humanos, pero el *«puente comunicativo»* es producido y realizado por los lenguajes compartidos. Así, si se acepta que los procesos de enseñanza y de aprendizaje están mediados por la comunicación, el lenguaje adquiere una importancia fundamental (D´Amore 2006a).

Por su parte, Ernest (1991) considera que los objetos matemáticos como símbolos de unidades culturales emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. Desde el enfoque ontosemiótico EOS este sistema de usos son concebidos como las *«prácticas matemáticas»*. Godino y Batanero (1994); D'Amore (2005) aluden que la matemática es el producto de la acción recíproca, relacional, de individuos, al interior de una sociedad a la cual ellos pertenecen, tales individuos, quieran o no, ponen estrategias de pertenencia a dicha sociedad.

Por otro lado, desde el enfoque ontosemiótico la comprensión personal de un objeto matemático es considerada como la *«apropiación»* del significado de dicho objeto; es pertinente señalar que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino como un sistema eco-dependiente, la comprensión de un objeto por un sujeto, en unas coordenadas espacio-temporales dadas, implicará la adquisición de los diversos elementos que componen los significados institucionales correspondientes. Esta teoría de la comprensión tiene dos ejes: uno descriptivo, que expresa los aspectos o componentes de los objetos a comprender; y otro procesual que indica las fases o niveles necesarios para lograr un alto grado de acuerdo entre el significado institucional pretendido y el personal adquirido. Desde el EOS se reconoce tres tipos de significados; el primero, refiere a un *significado personal global* cuando se hace referencia a la totalidad del sistema de prácticas personales que un sujeto es capaz de manifestar de forma potencial relativo a un objeto matemático; el segundo, un *significado personal declarado* que refiere a las prácticas que son expresadas como son las pruebas de evaluación; y finalmente se habla de un *significado personal logrado* que hace referencia a las prácticas manifestadas que son conforme a los criterios establecidos institucionalmente. Estos tres significados personales interactúan y son parte constitutiva de lo que se conoce desde el EOS como significado institucional. Así mismo, los tres significados personales están combinados e interactúan entre sí, producto de la formación previa de cada individuo, de las expectativas, el contexto social, tecnológico, cultural y circunstancial en el que surge.

En los apartados anteriores se mostró algunos elementos de cómo ha sido concebido el signo y el significado, elemento que permiten hablar de una construcción del significado y de conocimiento matemático. En correspondencia con el enfoque pragmático que ha sido asumido en este trabajo se concibe que las expresiones lingüísticas tienen significados diversos, que depende del contexto en el que se usan, en tanto las prácticas que se realizan en ciertas instituciones determina la emergencia de los objetos matemáticos y por ende los significados están relacionados con los problemas y las practicas matemáticas que se realizan; en consecuencia con el EOS no se puede reducir el significado del objeto a su definición matemática. Los anteriores elementos permiten tomar una postura frente al sentido de los objetos matemáticos y en correspondencia con Rojas (2012) se considera el *sentido* de forma dinámica, que depende del tiempo y el contexto en que se desarrollen, el sentido va depender de cada sujeto en particular y por ello, no se considera un único sentido ni tampoco que el sentido es estable. En el caso particular de este trabajo un sujeto puede asignar diferentes sentidos a un objeto matemático, por ejemplo, la expresión $3n$, puede significar «los múltiplos de tres», «un número multiplicado tres veces», «la tabla de multiplicar del tres» o «tres segmentos de longitud n» etc., sentidos que dependen de la experiencia que han tenido cada sujeto con dicha expresión. En el aprendizaje de las matemáticas se espera que los sujetos tengan diferentes interpretaciones de las representaciones que existen de un objeto matemático, ya sea por conversión o por el tratamiento de estas representaciones, así como lograr articular dos o más sentidos que puedan ser otorgados a las representaciones de un mismo objeto matemático.

3.6.2. La Noción de Función de Función Semiótica

La noción de función semiótica juega un papel importante en el análisis de las producciones realizadas por los profesores en tanto, posibilitan identificar los diferentes significados que asignan a los objetos matemáticos, así como, las relaciones que estos establecen. Por tanto, resulta necesario realizar un recorrido histórico que permita evidenciar cómo este constructo teórico ha sido empleado y contextualizado desde diferentes posturas teóricas. Piaget (1973) sostiene que una de las características de los seres humanos ha sido la capacidad que tienen las personas de abstraer o de evocar las representaciones que designan los objetos, permitiendo, recordar situaciones, objetos, animales o acciones, sin que estos, se encuentren presentes en el momento ni sean directamente percibidos por los sentidos. Este autor introduce el término de función simbólica concebida como la capacidad que tienen los sujetos para representar ciertos aspectos de su experiencia pasada y presente, así como la posibilidad de anticipar futuras acciones en relación a ellas. Al respecto considera que:

> La función simbólica es el lenguaje que, de otra parte, es un sistema de signos sociales por oposición a signos individuales. Pero al mismo tiempo que existe ese lenguaje, hay otras manifestaciones de la función simbólica. Como el juego simbólico el cual representa una cosa por medio de un objeto o de un gesto. El simbolismo podría ser la expresión gestual, por ejemplo, en la imitación diferida. Otra forma será el comienzo de la imagen mental o la imitación interiorizada. Existe, por tanto, un conjunto de simbolizantes que aparecen en este nivel y que hacen posible el pensamiento. (Piaget, 1973, p. 4. como se citó en De Barros y Hernández, 2016)

En relación al conjunto de conductas que implica la evocación representativa de un objeto o acontecimiento ausente, supone la construcción o el empleo de significantes como la imitación el juego simbólico, el dibujo, el modelado, la construcción y el lenguaje, que son considerados la forma más compleja y abstracta de representación. Para Hjemslev (1943) el signo está compuesto de significante y significado, una cadena de signos tiene dos planos: el plano de *la expresión* que corresponde a la parte perceptible del lenguaje; y el plano del *contenido*, que corresponde a la parte inteligible, conceptual del lenguaje. Este autor establece que un signo es una relación constante de dependencia entre una expresión y el contenido. Hjemslev (1943) manifiesta que la relación que existe entre expresión y contenido es tan sólida que es imposible que un contenido exista sin expresión o que una expresión exista sin un contenido, en tanto la expresión siempre opera en función de un contenido y viceversa. Por su parte Eco (1976) considera que el signo es una expresión concreta, una fuerza social y no instrumentos que reflejan la fuerza social. Este autor considera que, el signo está constituido siempre por uno o más elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con los elementos de un plano del contenido de la expresión. En esta dirección, una función semiótica se realiza cuando la expresión y contenido entran en correlación mutua. Para estos autores, juega un papel importante el lenguaje el cual está compuesto por dos elementos a saber, el plano de una expresión que es perceptible a nuestros ojos y el plano del contenido que refleja el pensamiento de los sujetos que no es perceptible a nuestros ojos. Otra coincidencia entre los tres autores es la presencia del signo como reflejo del pensamiento, que da origen a un significante y un significado.

Por otra parte, el EOS describe la comprensión de objetos matemáticos por medio de las funciones semióticas que establecen los individuos, en ella, el objeto [significante] tiene diversos significados en función del sistema de prácticas [personales o institucionales] que este realiza ante cierta clase de situaciones-problemas. Para Godino (2003) la función semiótica se puede entender como una interpretación del signo Peirceano, el cual está formado por la triada: *Representamen*, o signo en sí mismo, *objeto* e *interpretante*. Con base en dicha relación tríadica del signo, cobra sentido preguntarse cuál es el signo, el objeto y el interpretante en una función semiótica. Desde el EOS se diferencia los tres elementos que intervienen en una función semiótica: por un lado, la *expresión* [objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo]*;* por otra parte, el *contenido* [objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor]; y finalmente se tiene una referencia al *criterio o regla de correspondencia*, es decir, el código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido. Con base a lo anterior, la función semiótica es entendida como una correspondencia entre un objeto antecedente [expresión - significante] y un consecuente [contenido - significado] establecidos por un sujeto [persona o institución] según un criterio o regla de correspondencia. Por otro lado, desde esta perspectiva, el interpretante será la regla de correspondencia entre el *representamen* y el *objeto*, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo [significados personales o institucionales].

Godino (2003) considera que en toda entidad o cosa a la cual nos referimos, participa en un proceso de semiosis. Así mismo, Godino, Batanero y Font (2007) expresan que cada función semiótica lleva consigo un acto de semiosis por un agente interpretante [criterio o regla que establecen los sujetos] que a su vez constituye un conocimiento. Por su parte, Godino (2003) expresa que los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. Como se mencionó en párrafos anteriores desde el EOS se asume que hablar de conocimiento equivale hablar de una función semiótica establecida por un sujeto y que intervienen en un proceso de semiosis, que implica la existencia de una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre los diversos tipos de objetos. Godino y Batanero (1994) reconocen que los significados otorgados por una persona posibilitan una serie de funciones semióticas mediante un criterio o regla de correspondencia. Según el criterio o regla de correspondencia las funciones semióticas se clasifican en diferentes tipos, que se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

Tipo de Funciones Semióticas

Tipo de función semiótica	Contenido
Lingüística	Término, expresión, gráfico, entre otros elementos lingüísticos.
Situacional	Situación problema.
Conceptual	Concepto, definición.
Proposicional	Propiedad o atributo del objeto.
Actuativa	Acción u operación, algoritmo o procedimiento.
Argumentativa	Argumentación, etc.

Fuente: Tomado en Pochulu (2012)

En una función semiótica, el contenido puede ser un objeto primario, es decir, un término, expresión o gráfico, entre otros elementos lingüísticos: una situación problema; un concepto o definición; una propiedad o atributo del objeto; una acción u operación; un algoritmo o procedimiento; o una argumentación, etc., elementos que son considerados en el enfoque ontosemiótico como el contenido de la función semiótica. En el marco de este proyecto la función semiótica es considerada en términos de esa relación de dependencia entre una expresión y un contenido que los sujetos establecen en una determinada tarea que relacionan un *expresion/antecedente*, *contenido/consecuente* bajo un criterio o regla de correspondencia.

3.6.3. Articulación y No Articulación Semiótica

En este trabajo nos hemos planteado mostrar evidencias de las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar sentidos entre sí, asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento de un mismo objeto matemático. En virtud de ello, por un lado, se asumió el sentido como algo dinámico, que depende del tiempo y el contexto en que se desarrollen, propios de cada sujeto en particular y por ello, no se considera único y estable (Rojas, 2012). Por otro lado, en correspondencia con el enfoque ontosemiótico en este trabajo se asume que el significado de un objeto matemático [institucional/personal] es el sistema de prácticas [institucionales/personales] asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado (Godino y Batanero, 1994). En consecuencia, con los planteamientos de Rojas (2012) en términos de una función semiótica, el sentido de dicho objeto es el contenido que tiene al objeto primario como antecedente/expresión de la función semiótica.

Tabla 2

Sentido Asignado a un Objeto Matemático Primario

Antecedente /Expresión	Consecuente/Contenido
Objeto primario	Sentido del Objeto primario

Fuente: Rojas (2012, p.51)

Rojas (2012) manifiesta que un mismo objeto primario puede tener diferentes sentidos. Por ejemplo, en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad: *«obtener un número par al lanzar un dado»*, los resolutores pueden calcular la probabilidad del evento aleatorio recurriendo a diferentes sentidos [expresiones matemáticas], como se muestra a continuación:

Tabla 3

Diferentes Sentidos de un Objeto, que Institucionalmente se Espera sean Asignados por los Aprendices en el Cálculo de la Probabilidad.

¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?			
Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Antecedente/ Expresión**	**Consecuente/ Contenido**
$\frac{3}{6}$	Casos favorables sobre casos posibles.	$\frac{1}{2}$	La mitad de casos favorables
Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	**Antecedente/ Expresión**	Consecuente/ Contenido
50%	$\frac{50}{100}$, la mitad de casos favorables	0.5	El cociente entre dos números a y b.

La tabla muestra las diferentes expresiones matemáticas que representan la probabilidad pedida. Siguiendo los planteamientos de Rojas (2012) se produce una ***articulación de sentidos*** o ***articulación semiótica*** cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo *objeto matemático primario*, es decir, cuando uno de los sentidos [consecuente/ contenido] del objeto primario se convierte en antecedente/expresión de una nueva función semiótica que tiene como *consecuente/contenido* a otro sentido de dicho objeto. Por ejemplo, el siguiente caso muestra la relación de dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático.

Tabla 4

Ejemplo de la Articulación de Sentidos por Medio de una Función Semiótica que Relaciona Dos Sentidos Diferentes

Antecedente/ Expresión		Consecuente/ Contenido	
Antecedente/ Expresión	**Consecuente/ Contenido**	$1/2$, la mitad de casos favorables. [Atributo de la probabilidad pedida]	**Sentido 2**
$\frac{3}{6}$	Casos favorables sobre casos posibles	**Sentido 1**	

Fuente. Adaptado de Rojas (2012)

Como se evidencia en el anterior ejemplo, se relaciona dos sentidos diferentes *«casos favorables sobre casos posibles»* y *«la mitad de casos favorables»* que corresponden al *consecuente/contenido* de la nueva función semiótica. Ambos casos corresponden a los sentidos que le pueden asignar a la expresión $3/6$. En este ejemplo, se tiene un objeto matemático primario, que le son asignados dos sentidos diferentes. La unión de funciones semióticas se puede reducir a una sola función semiótica que pone en relación [articulación semiótica] los dos sentidos; tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

Tabla 5

Unión de Funciones semióticas que Relaciona Dos Sentidos Diferentes a un Mismo Objeto Matemático Primario

Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
Casos favorables sobre casos posibles	La mitad de casos favorables [Atributo de la probabilidad]

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

En palabras de Rojas (2012) la articulación es el resultado de la concatenación de dos funciones semióticas, es decir, se origina una articulación de sentidos, cuando se establece una nueva función semiótica en la que una de las dos funciones semióticas anteriores juega el papel de *antecedente/expresión*. En el ejemplo del cálculo de la probabilidad el aprendiz puede recurrir a cualquier expresión matemática que exprese la mitad de los casos [equivalencia de fracciones]. Esta manera de expresar la probabilidad puede generar una combinación de funciones semióticas que se puede simplificar en una sola función semiótica dejando en evidencia una articulación de sentidos. Tal y como se muestra a continuación:

Tabla 6

Ejemplo de una Función semiótica, Como Articulación de Sentidos. Cálculo de la Probabilidad

Antecedente/Expresión	Consecuente/Contenido
$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=0.5=50\%$	Casos favorables sobre casos posibles. La mitad de casos favorables [Atributo del evento aleatorio relacionado en la tarea]

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

Por otro lado, Rojas (2012) alude que en la articulación semiótica el *consecuente/contenido* de una función que se consideraban en un inicio no era relacionadas ahora son consideradas como equivalentes. En esta dirección de funciones semióticas el tratamiento puede ser caracterizado como una función semiótica puesto que, dos objetos primarios son considerados como equivalentes, en tanto, ambos son representaciones de un mismo objeto matemático. Por ejemplo, mediante transformaciones semióticas en el registro lenguaje algebraico, se tiene la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ que al aplicar los procedimientos y reglas se transforma en la expresión $3n,$ es decir, $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n,$ son sintácticamente equivalentes, originando la función semiótica.

Tabla 7

Transformación Tipo Tratamiento. Equivalencia de Expresiones Algebraicas

Antecedente/ Expresión	Consecuente/Contenido
$(n-1)+n+(n+1)$	$3n$

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

Una vez establecida la equivalencia sintáctica de las expresiones [un objeto primario con dos representaciones], una de ellas es obtenida a partir de otra como resultado de un proceso de tratamiento, se puede asociar el mismo sentido [el mismo consecuente/contenido]:

Tabla 8

Asignación del Mismo Sentido a Objetos Matemáticos Primarios. Equivalencia de Expresiones Algebraicas

Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$(n-1)+n+(n+1)$	Triple de un número

Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$3n$	Triple de un número

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

En este caso, al asignar el mismo *consecuente/contenido* a dos objetos primarios, origina una articulación de sentidos, en tanto, los objetos tienen el mismo sentido. Igualmente se habla de una ***no articulación semiótica*** cuando el sentido asignado a una representación semiótica no se articula con el sentido asignado posteriormente a otra representación semiótica obtenida por tratamiento, y las representaciones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes. El caso de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no es asumida como el triple de un número, sin embargo, después de un proceso de tratamiento, se obtiene la expresión $3n$ y se reconoce que si corresponde al triple de un número. Finalmente, al realizar una síntesis de la situación se tiene:

Tabla 9

Sentidos Asignados a las Dos Expresiones Inicialmente.

Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$(n-1)+n+(n+1)$	No es el triple de un número

Antecedente/ Expresión	Consecuente/ Contenido
$3n$	Triple de un número

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

Al aplicar el respectivo proceso de tratamiento a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se tiene la expresión $3n$:

Tabla 10

Equivalencia Sintáctica de las Expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ *y* $3n$

Antecedente/Expresión	Consecuente/Contenido
$(n-1)+n+(n+1)$	$3n$

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

Finalmente, se tiene la función semiótica.

Tabla 11

Articulación de sentidos. Equivalencia Sintáctica y Semántica de las Expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ *y* $3n$

<table>
<tr><th colspan="2">Antecedente/ Expresión</th><th>Consecuente/Contenido</th></tr>
<tr><th>Antecedente/ Expresión</th><th>Consecuente/ Contenido</th><td rowspan="2">Triple de un número</td></tr>
<tr><td>$(n-1)+n+(n+1)$</td><td>$3n$</td></tr>
</table>

Fuente: Adaptado de Rojas (2012)

En correspondencia con Rojas (2012) se dice que no hay articulación de sentidos asignados a representaciones de objetos matemáticos cuando los sujetos no establecen adecuadamente la relación entre el *antecedente/expresión* y *consecuente/contenido* de una función semiótica. Por otro lado, el proceso de *semiosis* permite evidenciar la articulación y no articulación de sentidos asignados a una representación semiótica obtenida mediante tratamiento, puesto que, los sujetos pueden representar el mismo objeto matemático de formas diferentes, por ejemplo: «7 + 9», «4 × 4», «32/2», «√256», «42"», entre otras expresiones que representan el número16, y que puede ser expresado mediante una suma, una multiplicación, una fracción o una raíz, etc.

3.7. Vínculo Entre las Conexiones Matemáticas y la Articulación Semiótica

Es importante aclarar que las conexiones matemáticas es un constructo teórico más global que la articulación de sentidos o la articulación semiótica debido que, las conexiones matemáticas no solo implican relaciones al interior del campo matemático sino relaciones entre las matemáticas y otras disciplinas. Aclarado dicho aspecto, asumimos que hablar de conexiones matemáticas al interior de las matemáticas equivale hablar de articulación semiótica, puesto que, encontramos que ambos constructos coinciden en varios aspectos. Las conexiones contribuyen a la comprensión de las matemáticas, en tanto, bridan elementos necesarios para que los sujetos formen una visión de la matemática como un campo integrado y no como una colección de partes separadas (García-García y Dolores-Flores, 2017). Por otra parte, estos autores expresan que las conexiones matemáticas pueden ser útiles para construir la generalización de ciertos tópicos matemáticos que requiere que sean desarrolladas en los estudiantes, puesto que, «cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver las conexiones matemáticas en la rica interacción entre temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras materias» (National Council of Mathematic, NCTM, 2000, p.64). Pese a no existir consenso en la literatura frente al término de conexiones matemáticas varios estudios apuntan a caracterizar dicho constructo teórico, que permite concluir que realizar conexiones tanto al interior de la matemática como con otras disciplinas es una meta en la educación matemática, puesto que, posibilita una mejor comprensión de las matemáticas. Frente a las distintas posturas de las conexiones matemáticas, Brown (1993) considera que una «conexión es una relación o asociación causal o lógica, una interdependencia» (p. 481). Por su parte, Godino, Batanero y Font, (2003); Latas y Moreira (2013) manifiestan que las conexiones matemáticas posibilitan establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos, De Gamboa y Figueiras (2014) expresan que las conexiones matemáticas son «redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones» (p. 340). Por su parte, Businskas (2008) alude que las conexiones matemáticas son de dos tipos: por un lado, las que enfatizan en las relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática, que son independientes de los estudiantes; por otro lado, las que enfatizan en las relaciones, mediante los procesos del pensamiento que posibilitan una construcción de la matemática.

Lo anterior permite concluir que tanto la articulación semiótica como las conexiones buscan que los estudiantes construyan una mirada holística de las matemáticas a partir de diversas relaciones, desde diferentes perspectivas. Respecto a lo anterior encontramos que las conexiones matemáticas no son excluyentes con la articulación de sentidos, puesto que, comparten pretensiones similares; en la articulación semiótica se busca que los estudiantes estén en capacidad de relacionar diferentes sentidos entre sí, asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático. Con el fin de mostrar evidencias entre las similitudes y diferencias entre las conexiones y la articulación semiótica se parte de los estudios adelantados por Rodríguez, Rodríguez-Vásquez y Font (2020) quienes retoman los modelos teóricos de autores como Businkas (2008), García-García y Dolores-Flores (2018). En Rodríguez et al., (2020) consideran nueve categorías de conexiones que pueden ser de diversas tipologías, como las siguientes:

1) ***Conexiones orientadas a la instrucción***: refiere a la comprensión de un concepto C, a partir de dos o más conceptos previos A y B, requeridos para ser comprendidos por un sujeto. Este tipo de conexiones se manifiestan por dos vías a) asociación de un nuevo tema con conocimientos previos, y b) los conceptos y procedimientos matemáticos conectados entre sí, que son considerados prerrequisitos o habilidades que los estudiantes deben dominar antes del desarrollo de un nuevo concepto (Businskas, 2008; García-García, 2018; Mhlolo, 2012, como se citó en Rodríguez et al., 2020)

2) ***Representaciones diferentes:*** refiere a representaciones alternas o equivalentes. Se considera A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas diferentes [verbal- algebraica, algebraica-geométrica etc.]. Por ejemplo, en el caso particular de $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, son representaciones equivalentes en el registro algebraico.

3) ***Procedimiento:*** en esta tipología se considera que A es un procedimiento usado cuando se trabaja con un objeto B. Por ejemplo, al asignar casos particulares a las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, permite obtener los mismos resultados y verificar que ambas expresiones son equivalentes u operar términos semejantes.

4) ***Implicación*****:** un concepto A lleva a otro concepto B mediante una relación lógica (A→B) (Businskas, 2008, como se citó en Rodríguez et al., 2020). Por ejemplo, si las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, son equivalentes desde lo **sintáctico**, desde su aspecto **semántico** también lo son y pueden ser interpretadas como el *triple de un número.* Tal y como se evidencia en el siguiente esquema.

Figura 4

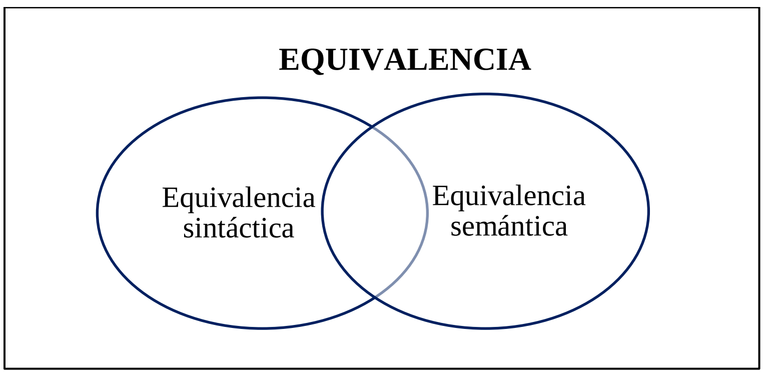
Implicación de la Equivalencia de Expresiones.

EQUIVALENCIA
Aspecto sintáctico →Aspecto semántico

5) ***Parte-todo:*** en las tareas propuestas para establecer una equivalencia [todo] requiere de la articulación de los aspectos sintáctico y semántico [Partes]. También se pueden considerar los siguientes aspectos. Por un lado, la ***generalización*** de la forma A es una generalización de B y B es un caso particular de A (Businskas, 2008, García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, la expresión $3n$ es una generalización de $(n-1)+n+(n+1)$ y permite concluir que ambas expresiones son iguales. Por otro lado, la conexión de ***inclusión*** refiere a relación jerárquica entre dos conceptos A es incluido en B [se dice que A es un componente de B]; B incluye A, [B contiene A]. Por ejemplo, un elemento de un conjunto, o un punto es parte de una recta o una recta se compone de una infinidad de puntos.

Figura 5

Parte-todo de la Equivalencia de Expresiones



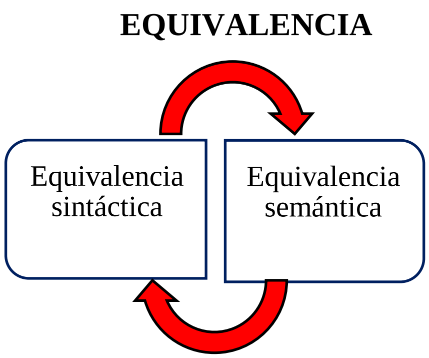
6) ***Significado:*** hace referencia cuando el estudiante atribuye un sentido a un concepto matemático, es decir, lo que significa para él. Incluye aquellos en los que los estudiantes asignan una definición que ha construido para estos conceptos. En esta conexión no se describen las propiedades y cualidades de los conceptos matemáticos (García-García y Dolores-Flores, 2020). Por ejemplo, algunos profesores asocian $3n$ con la multiplicación de un número desconocido por 3. Frente a las tareas propuestas en este estudio se ubican todos los sentidos que los profesores asignan a un significado personal a las expresiones: $3n$,$(n-1)+n+(n+1)$, $1/2$, $3/6$, $4/8$, $x^2+y^2+2xy-1=0$, y, $x+\ y\ \frac{1}{x+y}$, relacionadas en las tareas propuestas.

7) ***Característica:*** se identifica cuando el sujeto manifiesta algunas cualidades de los conceptos matemáticos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que los hace diferentes o similares a otros (García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, la interpretación que algunos realizan a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ que es relacionada con una sucesión de tres números enteros consecutivos o la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par, la fracción $3/6$ indica los tres casos favorables sobre los seis casos posibles.

8) ***Reversibilidad:*** cuando un sujeto parte de un concepto A para llegar a un concepto B y viceversa (García-García y Dolores-Flores, 2019, 2020). Por ejemplo, cuando se reconoce la relación bidireccional entre la equivalencia de expresiones, en tanto si se reconoce la equivalencia sintáctica también son equivalentes desde su aspecto semántico y viceversa.

Figura 6

Reversibilidad en la Equivalencia de Expresiones



9) ***Metafórica:*** en correspondencia con los planteamientos Rodríguez et al., (2020) se entiende esta conexión como la proyección de características, propiedades, etc., pertenecientes a un dominio conocido para estructurar otro dominio menos conocido [Abstracto]. Los autores expresan que cuando el profesor o el estudiante utilizan expresiones verbales o escritas como «podemos recorrerlo [movernos] sin levantar el lápiz del papel» que sugieren implícitamente la metáfora conceptual «el gráfico es un camino» (Rodríguez et al., 2020).

García-García y Dolores-Flores (2018) aluden que las conexiones matemáticas descritas anteriormente «surgen cuando los aprendices resuelven tareas específicas y pueden ser identificadas en las producciones escritas o en los argumentos orales o que desarrollen» (p. 229). En conclusión, García-García y Dolores-Flores (2018) asumen una conexión matemática como «un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real» que emergen en la solución de una tarea matemática (p. 229). En términos de funciones semióticas estas pueden ser consideradas como una conexión matemática y por ende como articulación de sentidos, en tanto, en el marco del EOS una función semiótica es considerada como una «relación entre un antecedente [expresión, sentido] y un consecuente [contenido, significado] establecida por un sujeto [persona-institución] según un determinado criterio o código de correspondencia» (Font, 2007, p.105). Por su parte, Rodríguez et al., (2020) aluden que las funciones semióticas y las nociones de conexiones matemáticas son términos equivalentes en tanto, las conexiones matemáticas son casos particulares de un tipo de funciones semióticas. Bajo el EOS se visualiza una conexión matemática «como la punta de un iceberg de un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y funciones semióticas que los relacionan, lo que permite un análisis exhaustivo que detalla la estructura y función de la conexión» (Rodríguez et al., 2020, p. 1). Esto permite concluir que la teoría de las conexiones matemáticas con la articulación de sentidos son constructos teóricos equivalentes al interior de las matemáticas, en este trabajo se asume que una articulación de sentidos se origina cuando un sujeto establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario, esto es, cuando uno de los sentidos [contenido] del objeto primario se convierte en expresión de una nueva función semiótica que tiene como contenido a otro sentido de dicho objeto (Rojas, 2012, p. 52).

3.8. Las Dificultades en la Comprensión de Objetos Matemáticos

En este estudio nos planteamos documentar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar dos sentidos entre sí [articulación semiótica] a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento de un mismo objeto matemático y contrastarlas con las reportadas en la literatura frente a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas. Partiendo de dicho interés se hace fundamental realizar una revisión de la literatura que documenta dicho constructo. D´Amore (2017) alude que la matemática posee un lenguaje específico, especializado, que requiere que los sujetos se apropian de este que difiere del lenguaje común, por tanto, puede constituirse en una fuente de obstáculos. Autores como Brousseau (1983), Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Rico (1998), Artigue (1995) y Sierpinska (1994) entre otros, han estudiado aquellos aspectos que se interponen en la adquisición del conocimiento. Bachelard (1938, 2004) considera que el error es un conocimiento deficiente e incompleto pero una posibilidad para el avance científico, y una realidad, permanente en la adquisición del conocimiento y comprender su origen ha sido un tema central para la educación matemática. Los factores que se interponen en la adquisición del conocimiento han sido nombrados en distintas teorías como obstáculos, errores, dificultad o desde el EOS conflictos semióticos. Independiente del nombre designado para ello, los investigadores en educación matemática coinciden que el aprendizaje de esta disciplina genera muchas dificultades en su comprensión y que son de naturaleza distintas, que pueden recaer en los estudiantes, los profesores, el conocimiento, el medio, etc. Existe una diversidad de aproximaciones teóricas sobre estas causas que, por un lado, impiden una comprensión de los objetos matemáticos y, por otro, abre la posibilidad que el conocimiento científico avance, al respecto Bachelard (1938, 2004) sostiene que «cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos...,». (p. 15)

Bachelard (1938, 2004) alude que los obstáculos son dificultades psicológicas que no permiten una apropiación del conocimiento, este autor los clasifica en diez grupos que muestran algunas características en relación a la adquisición del conocimiento:

- ***Experiencia primera,*** se forma en los primeros años de la vida intelectual, se caracteriza por recibir informaciones percibidas que antes se hallaba desarmado e ignoraba los fenómenos de su entorno, dado esta característica no puede ser sometido a alguna crítica, por lo tanto, estas experiencias primarias pasan a convertirse en verdades primarias frente a las que es imposible crear nuevos conocimientos que vayan en contra de las mismas.
- ***Obstáculo realista,*** Bachelard (1938, 2004) considera que este reside en tomar la noción de sustancia como una realidad, la cual no se discute y que tiene relación directa con la naturaleza de la sustancia misma, dado que carece de explicación alguna se toma como causa fundamental o como una síntesis general del fenómeno natural al que se le asigna. Por ejemplo, los alquimistas que creían que en el oro era concentrado de todas las bondades y propiedades características del sol puesto que, al desconocerse su génesis, se lo toman como una causa universal. En este caso el oro siendo una sustancia real, misteriosa, deja de, ser un problema científico para convertirse en el origen de una realidad.
- ***Verbal,*** en este reside los hábitos verbales manipulados cotidianamente y según Bachelard se convierten en obstáculos más efectivos al aumentar su capacidad explicativa. Según este autor al tomar un término que claro y trasparente al entendimiento del ser humano éste pasa a ser tratado como un axioma al que no es necesario explicar, deja de ser una palabra y pasa a ser una categoría empírica para los sujetos.
- ***Conocimiento unitario y pragmático*** se caracteriza por estar presente en la comunidad precientífica puesto que, el concepto de unidad permite simplificar el estudio de cualquier realidad, así como, explicar el todo y las partes que conforman un conjunto, la unificación explica toda la realidad. El concepto de unidad toma fuerza con el de utilidad pues posibilita una mayor explicación de los fenómenos.
- ***Sustancialista*** que consiste en la unión de la sustancia y sus cualidades, según Bachelard (1938, 2004) un sustancialismo de lo oculto es una realidad encerrada, cubierta por la sustancia la que se convierte en un problema, puesto que, se debe abrir la sustancia para exponer su contenido, para este autor el sustancialismo de la realidad capta una intuición directa dando lugar a una explicación simple y sencilla.
- ***Realista*** en el que el intelecto queda deslumbrado con la presencia de lo real, hasta el término de considerar que este no debe ser estudiado ni enseñado, lo real se compone de imágenes que llevan las marcas de las impresiones personales del sujeto que investiga, así la argumentación de un realista es más fuerte en tanto, se cree poseer la realidad absoluta del fenómeno.
- ***Animista,*** para Bachelard (1938, 2004) el sujeto da una mayor valoración al concepto que conlleve a la vida y contenga vida o que se relacione con esta, la vida es un eje fundamental y muchas culturas otorga un gran valor a la sangre, en gran parte de las civilizaciones era identificada como el líquido que daba la vida sin el cual la vida no era posible y, que al dejarse escapar se alejaba también la vida. Según Bachelard todo lo que posee vida tiene un carácter superior frente a lo que no la tiene.

- ***Mito de la digestión,*** que corresponde a cualquier fenómeno relacionado con la digestión o la cocción [se considera al estómago como una gran caldera]. Los alquimistas consideran el proceso de la digestión como un pequeño incendio, ellos otorgaron mayor importancia a los procesos en que se necesitará del fuego para obtener un producto o una reacción, los alquimistas consideraban que la digestión lleva inmersa la idea de fuego y de vida, ya que es por el proceso de asimilación de alimentos [digestión] que la vida se mantiene. Este obstáculo se ve reforzado por el obstáculo animista, haciendo aún más complejo obtener el conocimiento objetivo.
- ***Libido,*** el cual se interpreta desde el punto de vista de la voluntad de poder o la voluntad de dominio hacia otros, que no puede dejar de reflejar en sus experimentos o en sus intentos de dar explicación coherente ante un fenómeno nuevo. Otro aspecto de este obstáculo es la constante referencia a pensamientos sexuales que se hacen presentes en todo espíritu científico en formación al enfrentarse a una situación nueva, según Bachelard (1938, 2004) se manifiesta plenamente en las reacciones químicas, aunque se encuentran presentes en todas las disciplinas del saber.
- ***Conocimiento cuantitativo,*** se considera todo conocimiento cuantitativo como libre de errores, pasando de lo cuantitativo a lo objetivo, todo lo que se pueda contar, tiene una mayor validez frente a lo que no permita este proceso, lo que no se puede contar o que no tenga gran influencia sobre la cuantificación final, se puede despreciar permitiendo el error típico que sucede cuando no se tiene en cuenta las escalas de los problemas llevando los mismos juicios y raciocinios experimentales de lo muy grande a lo muy pequeño.

Los anteriores obstáculos se constituyen en elementos que dificultan el paso de un espíritu precientífico a un espíritu científico. Bachelard (1938, 2004) considera que estas nociones son propias del pensamiento científico contemporáneo, así como, la época medieval, pone de manifiesto que los obstáculos están presentes en los sujetos que han pretendido hacer ciencia a lo largo de todos los tiempos; la superación sistemática de estos permite evolucionar de un estado precientífico en el que la materia prima del conocimiento es la realidad circundante a uno en el que la misma noción de realidad posibilita hacer ciencia.

Por su parte, Guy Brousseau (1986) fue el pionero en realizar estudios sobre los *«obstáculos»* al interior de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para este autor los obstáculos en la apropiación del conocimiento pueden tener varios orígenes, que en muchas ocasiones tiende a substituirse por la de error de enseñanza, una insuficiencia del sujeto o dificultad frente al conocimiento. Así mismo, manifiesta que el error no es solamente la causa de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar que algunas teorías creen, en ocasiones es el efecto de un conocimiento anterior, con intereses particulares, sin éxito, que en la actualidad se revela falso, o inadaptado. Este autor sostiene que, los errores no son erráticos e imprevisibles, tanto para el profesor como para el estudiante el error debe ser considerado constitutivo del sentido que le es otorgado al conocimiento adquirido. Brousseau (1986) manifiesta que se puede distinguir, tres tipos de obstáculos que dependen de su origen, los ontogénicos, los didácticos y los epistemológicos. Para este autor los obstáculos de origen ontogénico son aquellos que se presentan por las limitaciones [neurofisiológicas entre otras] del sujeto en su desarrollo. Es decir, son aquellos obstáculos que tienen que ver con todo lo relacionado con las limitaciones del sujeto en algún momento de su desarrollo. Los obstáculos didácticos son aquellos que se adquieren o aparecen por la manera de enseñar o por la selección de un tema o una axiomática en particular. A la vez los obstáculos didácticos pueden ser socioculturales pues en estos influyen todo el contexto social. Finalmente, los obstáculos epistemológicos, son aquellos el cual el sujeto no puede por su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Este tipo de obstáculos es propio de un concepto en particular para ser aprendido. Por ejemplo, la dificultad del álgebra, los números relativos, etc., han sido algunos de los problemas históricos en cuanto a su desarrollo conceptual. Brousseau (1986) expresa que los obstáculos son manifestados por medio de los errores y estos no son cuestiones de azar, sino que, son errores que aparecen en repetidas ocasiones, son reconocibles, se sabe que van a aparecer y que persisten. Los errores que se manifiestan en una misma persona están ligados a la manera de aprender o una concepción característica, un conocimiento anterior que tiene que ver con todo un dominio de acción.

Rico (1998) desarrolla estudios en torno a la concepción de error, el autor alude que en sus inicios el error fue considerado descalificativo y negativo para el aprendizaje y que posteriormente fue una apuesta que permitía conocer la fuente de explicaciones sobre el aprendizaje de los individuos. Este autor señala una serie de paradojas que han hecho del error una posibilidad para robustecer la ciencia, pues siendo el error un conocimiento incompleto, los errores se convierten en una posibilidad para el avance científico. Rico (1998) expresa que, «en el camino hacia el conocimiento verdadero, se puede concluir que en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones» (p. 75). El autor también manifiesta que los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de las matemáticas y constituyen un elemento estable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, el error es parte constitutiva de la adquisición del conocimiento. El modo de conocer y el acceso al conocimiento están conformado por las organizaciones insuficientes o deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas.

Por su parte Socas (1997) considera que el error no debe entenderse únicamente como un resultado de la falta de un conocimiento o una distracción, sino que debe ser considerado como evidencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, aun cuando sus orígenes puedan ser diferentes. Este autor alude que analizar los errores en el proceso de aprendizaje, por un lado, provee de una valiosa información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado, constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación con el fin de mejorar los resultados. En el estudio de los errores, se deben considerar varios aspectos como son las dificultades encontradas por los alumnos, reconocer las variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como, las posibles interacciones entre estas variables, que están estrechamente relacionadas con aquellas dificultades que encuentran los sujetos. Así mismo, este autor manifiesta que las dificultades en el aprendizaje de la matemática se deben a diferentes factores que se entretejen entre sí y que en algunas ocasiones tienen su origen a una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la matemática, que se presenta en su simbolismo y en los procesos de pensamiento, como el desarrollo cognitivo de los alumnos, o las actitudes afectivas y emocionales. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se materializan en el aula en forma de obstáculo y se exteriorizan en los estudiantes en forma de errores. Rico (1998) menciona que los errores son parte constitutiva en el camino hacia el conocimiento verdadero, en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos emerge de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones.

Por otro lado, desde el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática sugerido por Godino y Batanero (1994) se alude que un objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas es la adquisición progresiva de los significados personales a los significados institucionales por parte de los sujetos, establecidos por la comunidad matemática y es tarea del profesor reflexionar los aspectos que impiden la comprensión de los objetos matemáticos, es decir, los profesores deben identificar los errores o los obstáculos que impiden que sus estudiantes lleguen a una negociación de los significados personales e institucionales por medio de diferentes herramientas. En términos de conflictos en la comprensión de las matemáticas, Godino, Batanero y Font (2006) definen el conflicto semiótico como «cualquier disparidad, discordancia o desajuste entre los significados o contenidos atribuidos a una misma expresión por dos sujetos [personas o instituciones] en interacción comunicativa que provocan dificultades y limitaciones durante la actividad matemática» (p.14). En este sentido, el conflicto semiótico es concebido como la discordancia existente entre el significado de un objeto matemático atribuido por una persona y el significado aceptado por la comunidad matemática. Desde EOS si la disparidad se produce entre significados institucionales se llaman *conflictos semióticos de tipo epistémico*, y si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de una misma persona se conocen *como conflictos semióticos de tipo cognitivo*, es decir, estos se presenta cuando el sujeto construye una representación de un objeto matemático que se cree estable, pero en un cierto punto de su historia cognitiva, recibe informaciones del objeto no contemplados en la representación que tenía, entonces se debe adaptar el antiguo significado a uno nuevo incorporando los nuevos aspectos del significado. Según Godino (2002) si la disparidad se produce entre las prácticas [discursivas y operativas] de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa [por ejemplo alumno-alumno o alumno-profesor] se habla de *conflictos semióticos interaccionales*.

Por otra parte, el conflicto semiótico depende del contexto social, tecnológico, cultural y circunstancial en el que surge, es decir, que la disparidad entre los significados depende del medio y las herramientas que proporciona la cultura, en este sentido, el significado de un objeto matemático depende de la institución educativa donde tiene vida y de los sujetos donde la historia, las vivencias, las costumbres y experiencias hacen que existan múltiples significados personales. Por otra parte, el conflicto semiótico se encuentra presente en la comprensión de los objetos matemáticos que se debe en algunas ocasiones a la precisión, concisión, coherencia y universalidad del lenguaje matemático concebido como un sistema de signos, así como, a la interacción docente-alumno-significado institucional de referencia que se construye y configura un lenguaje lógico-matemático como instrumento de significación y comunicación entre los sujetos involucrados. En este orden de ideas luchar en contra del conflicto semiótico implica una organización de los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos que entran en juego.

En los párrafos anteriores se muestra que independiente del nombre que asignen a los factores que impide la comprensión de los objetos matemáticos, estos están ligados a los factores sociales. En esta propuesta de investigación se asume que las dificultades que encuentran los sujetos en la comprensión de un objeto matemático son relacionadas con elementos derivadas de las prácticas sociales realizadas por los profesores. El detectar, las dificultades que los profesores encuentran para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, posibilitaron identificar las posibles causas que hacen que los profesores asocien un mismo objeto matemático con situaciones diferentes.

3.9. Aspectos Importantes Frente a la Interpretación de Gráficos Estadísticos

En tanto que en esta propuesta de investigación se propone una tarea enmarcada en lo que hemos considerado como equivalencia contextual de gráficos estadísticos, entendida como la capacidad de los sujetos para identificar la misma información mediante diferentes representaciones. Situación que fue propuesta por dos motivos, por un lado, no resulta fácil definir el tratamiento en un dominio diferente al numérico o algebraico, y, por otro lado, nos preguntamos si las dificultades que encuentran los profesores para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y que han sido reportadas en la literatura se mantienen en otros dominios matemáticos. Por ello resulta fundamental revisar de manera general los estudios que se centran en la interpretación de gráficos estadísticos. Por su parte Batanero, Arteaga y Ruíz (2010) consideran que los gráficos estadísticos son objetos semióticos complejos que intervienen diversas interpretaciones, tanto de la persona que realiza su construcción como de las personas que lo interpretan, los autores resaltan tres aspectos; 1) la complejidad semiótica; 2) el nivel de lectura que realizan los sujetos; y 3) los elementos que se deben contemplar para construir un gráfico. En relación a la comprensión de un gráfico estadístico Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) plantean que estos requieren la identificación de variables representadas y escalas, la percepción de la correspondencia entre los niveles de cada dimensión visual que permiten obtener conclusiones sobre los niveles de cada variable y de las relaciones de la realidad representada. Por otro lado, Curcio (1987) manifiesta que la comprensión gráfica es la capacidad de dotar de significado a los gráficos creados por uno mismo o por otros. Este autor resalta tres elementos en la comprensión de un gráfico estadístico como son: 1) las *palabras o expresiones* que proporcionan los aspectos en relación a la información para comprender el gráfico y su contexto [título, etiquetas en ejes y escalas]; 2) el *contenido matemático* que comprende el gráfico, por ejemplo, los conjuntos numéricos utilizados [enteros, racionales, etc.], el concepto de área en un gráfico de sectores y su correspondencia con los porcentajes, los sistemas de coordenadas cartesianas en un diagrama de dispersión, proporcionalidad [en la mayoría de los gráficos], etc.; y 3) los *convenios específicos* que refiere a los elementos propios de cada tipo de gráfico, por ejemplo, en un gráfico circular la amplitud con el área o la correspondencia de proporción entre la frecuencia y la información dada en un gráfico de barras. Con relación a la comprensión de los gráficos estadísticos los sujetos pueden ser ubicados por niveles teniendo como referente su interpretación, como lo proponen Friel, Curcio y Bright (2001, como se citó en Batanero et al., 2010. p. 5):

- El Nivel 1 [**Leer los datos**]: hace referencia a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico, por ejemplo, la correspondencia de la frecuencia con un valor en un gráfico barras que realizan los sujetos.
- Nivel 2 [**Leer dentro de los datos**]: corresponde a la lectura de algo que no está explícitamente o visible dentro del gráfico y requiere que se apliquen procedimientos matemáticos [comparaciones, adiciones, etc.]
- Nivel 3 [**Leer más allá de los datos**]*:* se relaciona con la identificación de la información que no está representada en el gráfico y no se puede deducir con operaciones o comparaciones.
- Nivel 4 [**Leer detrás de los datos**]: hace referencia a inferir la forma en que se recogieron los datos, o la interpretación que otras personas hacen del mismo, así como cuestionar la calidad de los datos y la forma de recolección, es decir, realizar inferencias del contexto y poner en juego elementos matemáticos.

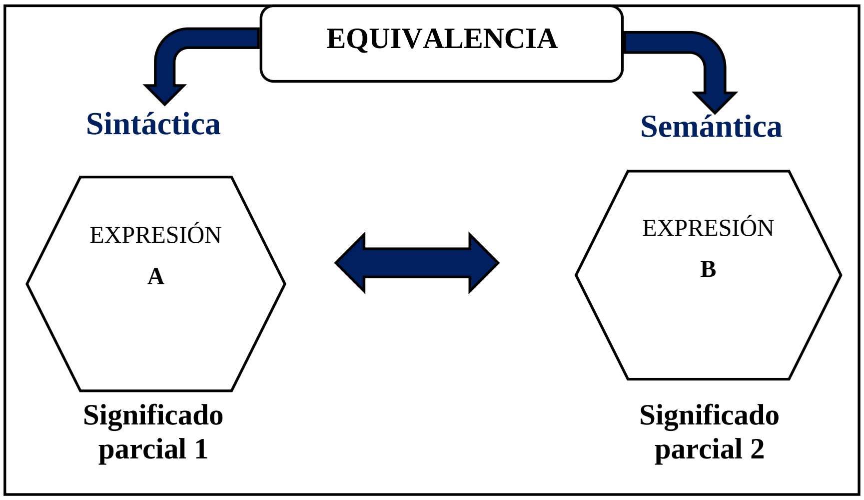
Por otra parte, no solo es importante que los sujetos se ubiquen en cualquiera de los cuatro niveles, sino que estos identifiquen la misma información en otras representaciones gráficas, es decir, establezcan una equivalencia contextual entre los gráficos estadísticos.

3.10. Equivalencia Subyacente en la Transformación de Tratamiento

En este trabajo se ha asumido que en toda transformación de tratamiento subyace la noción de equivalencia, puesto que, la aplicación de procedimientos y reglas posibilita obtener otra expresión en el mismo registro semiótico [tratamiento]. En correspondencia con el modelo teórico del EOS, se considera que en la comprensión de la noción de equivalencia existen dos fuentes de significados parciales: **sintáctico – semántico,** así como su necesaria articulación. Ahora bien, para comprobar la equivalencia se debe tener dos expresiones f y g, en el cual g, en algunos casos puede ser obtenida de la aplicación de reglas algebraicas sobre f. En otros casos se hace necesario recurrir a la equivalencia semántica para obtener la otra expresión, esto hace que los sujetos empleen otros recursos que le permita asegurar la equivalencia sin necesidad de utilizar reglas de transformación, desde el aspecto semántico. Tal y como se muestra en la figura 7.

Figura 7

Equivalencia de Objetos Matemáticos subyacente en la transformación de tipo tratamiento



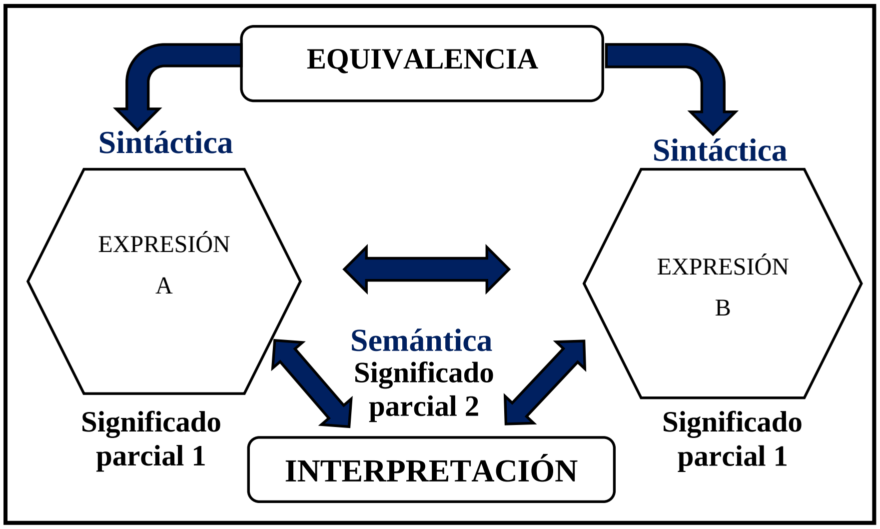
Fuente: Adaptado de Chalé-Can, Font y Acuña (2017)

Desde su aspecto sintáctico se puede decir que dos expresiones son equivalentes si es posible, aplicar una serie de reglas, procedimientos o realizar alguna valoración numérica que permita o bien transformarla en otra u obtener el mismo resultado, es decir, cuando estas expresiones tienen una reescritura algebraica común, la cual puede ser obtenida, por medio de la aplicación de propiedades algebraicas conocidas [conmutativa, asociativa, distributiva, identidades notables, etc.] En su aspecto semántico, se dice que las expresiones A y B son equivalentes, cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales, que permiten concluir que estos dos significados son el mismo.

En conclusión, para hablar de equivalencia [sintáctica y semántica] se necesita dos expresiones (A y B), en algunos casos, para la solución de un problema sólo se cuenta con una expresión A, y el resolutor debe encontrar otra expresión B, que sea equivalente; la segunda expresión puede ser obtenida de la aplicación de reglas y procedimientos. Por otra parte, tener un contexto significativo permite: i) encontrar una segunda expresión equivalente [sintáctico] ii) asegurar la equivalencia sin necesidad de utilizar reglas de transformación desde su aspecto semántico, esto permite comprender por qué las dos expresiones son equivalentes, más allá de la aplicación de reglas de transformación, es decir, articular las dos perspectivas **semántica** y **sintáctica.** Lo anterior se puede traducir en: un sujeto puede realizar una interpretación de la situación [dada en lenguaje natural] y aplicar una serie de procedimientos y reglas que le posibilita establecer que ambas interpretaciones coinciden, el resolutor debe hacer una interpretación [semántica], aplicar una serie de reglas y procedimientos que le permitirá obtener una nueva expresión B. Tal y como se muestra en la figura 8.

Figura 8

Equivalencia de Objetos Matemáticos. Articulación de los significados parciales semántico y sintáctico



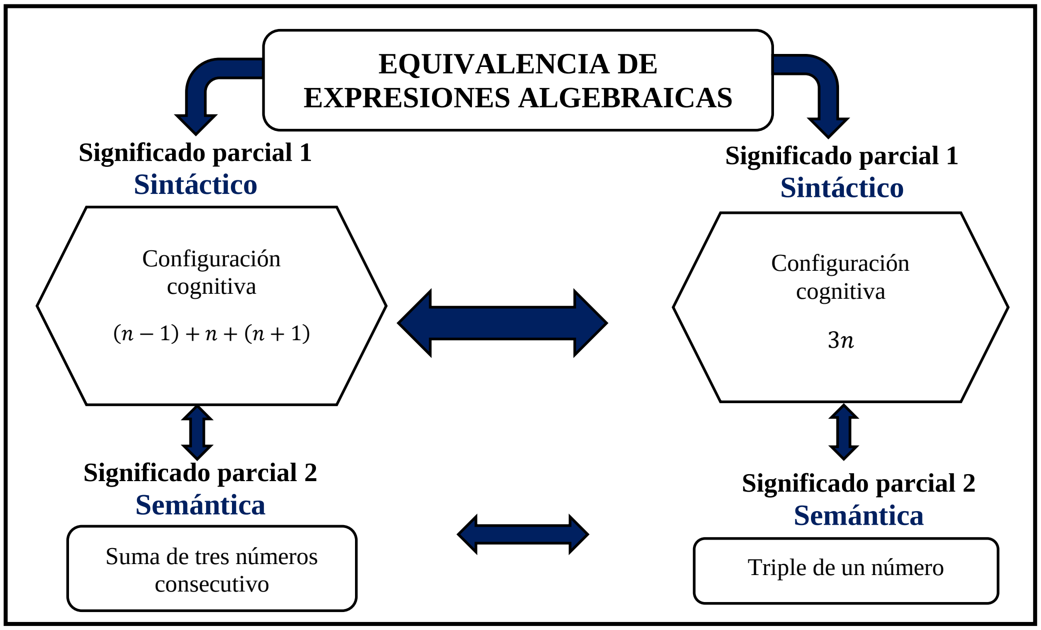
Fuente: Adaptado de Chalé-Can, Font y Acuña (2017)

El diagrama anterior muestra que dada una situación en lenguaje verbal [semántico] el sujeto realiza una interpretación que le permite aplicar una expresión [sintáctico] aplicando una serie de reglas y procedimientos, y establecer que las dos expresiones A y B, son equivalentes. Se puede considerar un segundo caso en el que el enunciado se da [mediante una expresión simbólica, icónica, etc.] la cual debe ser interpretada por el sujeto resolutor que establece una expresión A, en relación al contexto de la situación y a la comprensión que éste realiza. Posteriormente el sujeto realiza cierta manipulación que le permite estableciendo una segunda expresión, ya sea simbólica o icónica, que debe ser reconocida equivalente a la primera. Para establecer la equivalencia entre ambas expresiones e independientemente del dominio matemático en el que se enmarca la situación problema, el sujeto debe articular la interpretación que realiza de la expresión [sintáctica-semántica] para establecer la coincidencia y poder determinar la equivalencia entre dos o más expresiones. En relación a la equivalencia implícita en la transformación semiótica de tratamiento a continuación se describe algunos aspectos que los sujetos deben tener en cuenta para establecer la igualdad entre las expresiones o representaciones frente a las tareas propuestas.

3.10.1. Interpretación de Expresiones Algebraicas. En la situación se aplica $(n-1)+n+(n+1)$ las reglas de transformaciones respectivas permiten obtener la expresión $3n$, y concluir que las dos expresiones son equivalentes. Desde el aspecto semántico, se dice que dos expresiones son equivalentes cuando se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales y en el que, además, se puede decir que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ corresponde al *triple de un número*.

Figura 9

Equivalencia de Expresiones Algebraicas Subyacente en la transformación de Tratamiento

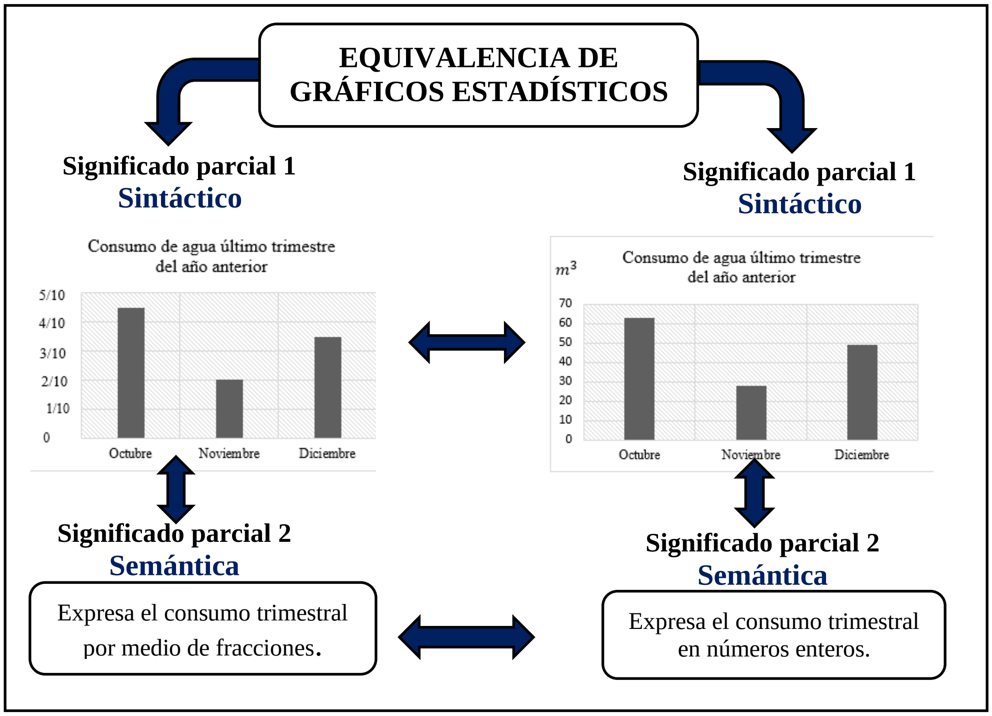


En el esquema anterior se muestra que al aplicar los respectivos procedimientos a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se obtiene $3n$, siendo el primer paso para demostrar que ambas expresiones son equivalentes.

***3.10.2. Interpretación de Gráficos Estadísticos*.** Si bien, Font, Godino y D'Amore (2007) aluden que dos o más gráficos estadísticos no son equivalentes, en tanto, en su construcción se relacionan conceptos matemáticos diferentes, y la actividad semiótica que se pone en juego es más o menos compleja. Teniendo en cuenta dicho aspecto, en el presente estudio, cuando hablamos de equivalencia nos referimos al aspecto contextual de gráficos estadísticos, esto es, la capacidad que tienen los sujetos para identificar la misma información presentada por medio de diferentes representaciones, en este caso, gráficos estadísticos diferentes. Se tiene la convicción, que no solo es fundamental que los sujetos interpreten adecuadamente un gráfico, sino que identifiquen la misma información en otras representaciones gráficas a lo que hemos denominado *equivalencia contextual de gráficos estadísticos*. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al., (2017) se reconoce la complejidad de la equivalencia contextual de gráficos, de manera análoga a la equivalencia de expresiones algebraicas, que requiere la articulación de los aspectos **sintáctico** y **semántico.** Tal y como se muestra en la figura 10.

Figura 10

Equivalencia Contextual de Gráficos Estadísticos



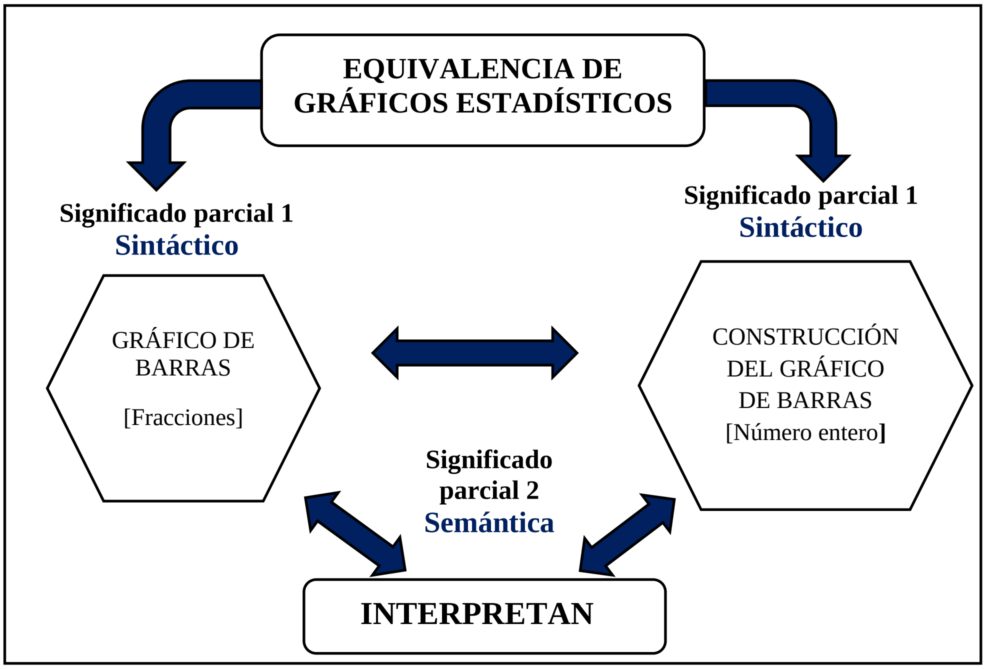
Se considera que, desde el punto de vista sintáctico, dos gráficos A y B, que provienen del mismo conjunto de datos son equivalentes contextualmente, cuando es posible transformar un gráfico en otro, mediante dos pasos: primero, obtener información a partir de la interpretación de un gráfico; y segundo, construir un nuevo gráfico a partir de la información obtenida. Desde el punto de vista semántico, se dice que dos gráficos A y B, son equivalentes cuando la información que se obtiene en la interpretación de cada de uno de ellos representan la misma información, en este caso, son contextualmente equivalentes, es decir, los gráficos adquieren significados en un contexto, en el cual se reconoce que representan la misma situación. Para el caso particular de este trabajo se ha elegido el gráfico de barras, uno con ejes fraccionarios y otro con ejes en números enteros. Para establecer la equivalencia contextual entre los dos gráficos estadísticos los sujetos tienen dos vías.

1. Realizar una interpretación [semántica] de la situación [expresada en lenguaje natural] y del gráfico de barras, para corroborar que ambas interpretaciones coinciden. Después, dado que los valores obtenidos en la interpretación del gráfico de barras permiten establecer los valores correspondientes a cada valor [$9/20$ corresponde a 63m^3, $7/20$ a 49m^3y $4/20$ a 28m^3] y construir un gráfico de barras B, que coincidirá con el dado en el problema, permitiendo concluir que los dos gráficos representan la misma información [semántica y sintácticamente]. Por lo tanto, las tres representaciones [lenguaje natural, gráfica de barras

«fracciones» y gráfica de barras «números enteros»] son equivalentes contextualmente. Tal y como se relaciona en la figura 11.

Figura 11

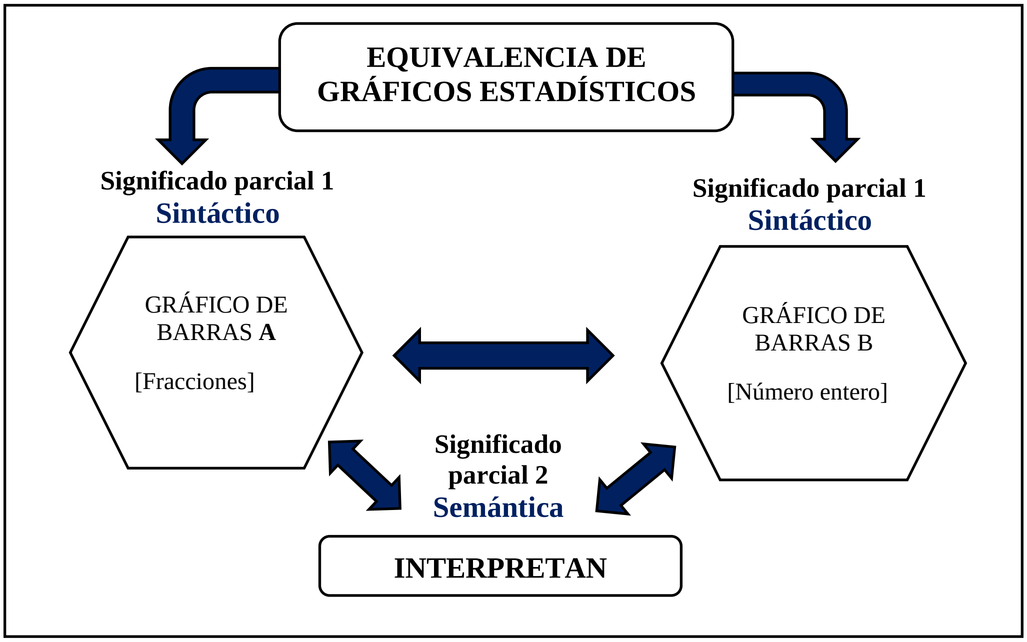
Equivalencia de Gráficos Estadísticos. Interpretación del Enunciado, el Gráfico de Barras A y el Gráfico de Barras B



2. Realizar una interpretación [semántica] de la situación [expresada en lenguaje natural] y el gráfico de barras, remitirse a la situación dada inicialmente y establecer que la información coincide con el gráfico de barras B, por tanto, dado que la información suministrada en los dos gráficos es la misma, se puede establecer su equivalencia contextual [Semántica y sintáctica]. Tal y como se relaciona en la figura 12.

Figura 12

Equivalencia de gráficos estadísticos. Interpretación del enunciado, y el gráfico de barras A y gráfico de barras B

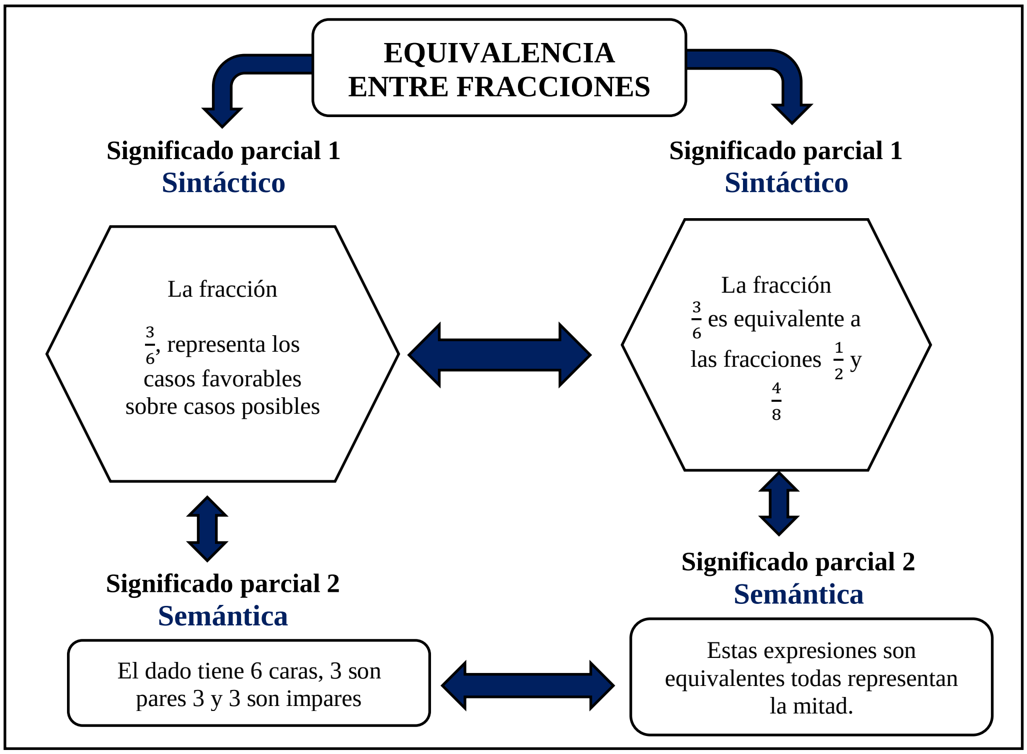


En general, para hablar de equivalencia contextual de gráficos estadísticos se necesitan dos gráficos (A y B) y, para la solución de algunos problemas, es necesario encontrar un gráfico equivalente a otro, es decir, sólo se tiene el gráfico A, y el problema se resuelve encontrando un gráfico equivalente B. En algunos casos, el segundo gráfico puede ser obtenido de la aplicación de reglas de construcción, pero en otros no es posible o fácil. Cuando se presenta esta dificultad, se considera que se puede recurrir a dar significado a la información del primer gráfico A, mediante un contexto, visto como las diferentes referencias que la formulación de un problema evoca en el sujeto. Por otro lado, en correspondencia con los niveles que propone Curcio (1987) los profesores deben identificar los siguientes elementos en la comprensión de un gráfico estadístico, el primero hace referencia a las palabras *o expresiones***,** segundo, c*ontenido matemático*, y tercero los convenios *específicos*: que son los elementos propios de cada tipo de gráfico, por ejemplo, en un gráfico de barras, la correspondencia de proporción entre la frecuencia y la información dada en un gráfico de barras. Elementos que serán necesarios para que los profesores establezcan la equivalencia contextual entre los gráficos dados.

3.10.3. Cálculo de la Probabilidad. En esta tarea se pide calcular la probabilidad que existe al lanzar un dado y obtener un número par. Usualmente el profesor emplea la definición de la probabilidad simple de Laplace que hace referencia a: en el caso que todos los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables, Laplace define la probabilidad de un suceso A, como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso en el experimento y el número de resultados posibles de dicho experimento. Aspecto que le permite modelar el evento aleatorio mediante una expresión matemática, tal y como se muestra en la figura 13.

Figura 13

Equivalencia entre Fracciones

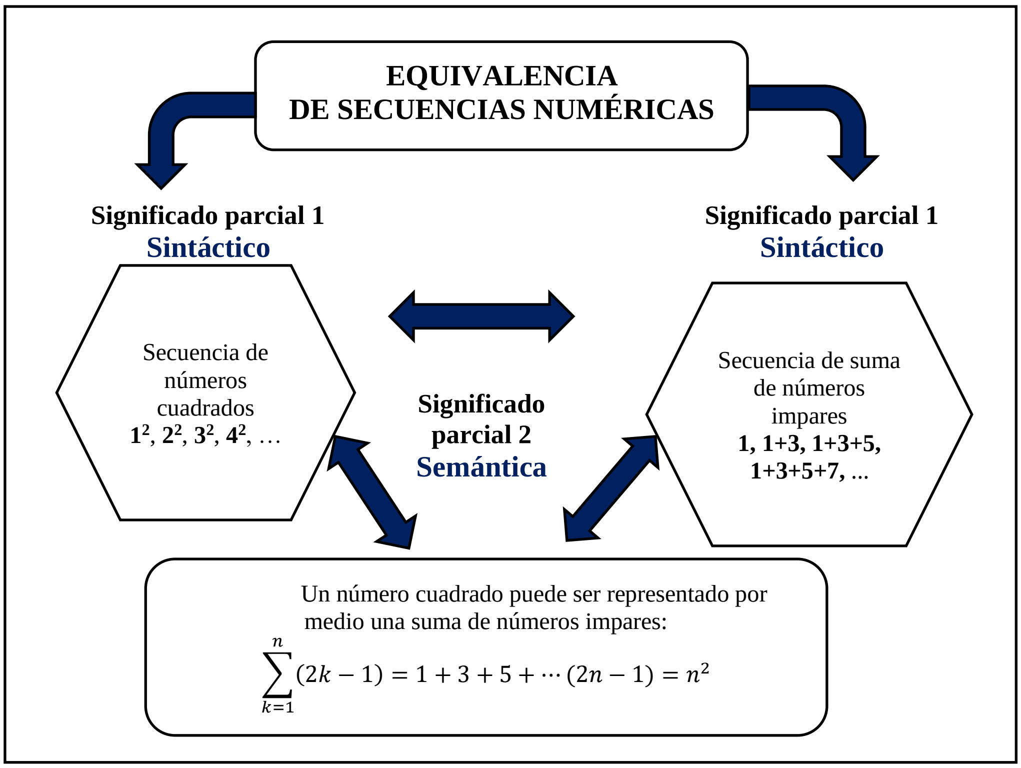


Los profesores expresan la probabilidad por medio de la fracción $3/6$, establecen una correspondencia entre los casos favorables sobre casos posibles que corresponde a la definición clásica de la probabilidad. Admite que la expresión $1/2$ es una manera de representar la probabilidad pedida, en tanto, es una expresión que representa las dos opciones existentes [pares-impares]. Aunque cualquier fracción equivalente a $1/2$ representa la probabilidad pedida, para muchos profesores la fracción $4/8$, no es una expresión representativa del dado, en tanto, el dado no tiene 8 caras.

3.10.4. Secuencia de Números Cuadrados. En esta tarea se presenta la secuencia de números cuadrados definida por: **12**, **22**, **32**, **42**, … Al descomponer los resultados en cada posición 1, 4, 9, 16, … se obtiene una secuencia de números definida por la *«suma de números impares»:* **1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7,** equivalente a la secuencia de números cuadrados. Corroborar desde lo numérico la *«igualdad entre los resultados»* es el primer paso para admitir desde lo sintáctico la equivalencia entre ambas secuencias, el aspecto semántico, brinda argumentos matemáticos que soportan que los términos en cada posición de la secuencia de números cuadrados pueden ser expresados, por medio, de la suma de números impares correspondientes a la cantidad de dígitos que se especifican en cada posición [equivalencia semántica]. Tal y como se muestra en la figura 14.

Figura 14

Sobre la equivalencia entre Secuencias Numéricas



Pese que algunos resolutores admiten la equivalencia sintáctica entre ambas secuencias, dotar de sentido y significado las representaciones hace que algunos profesores argumenten que en la primera secuencia se relaciona una multiplicación y la otra con una suma.

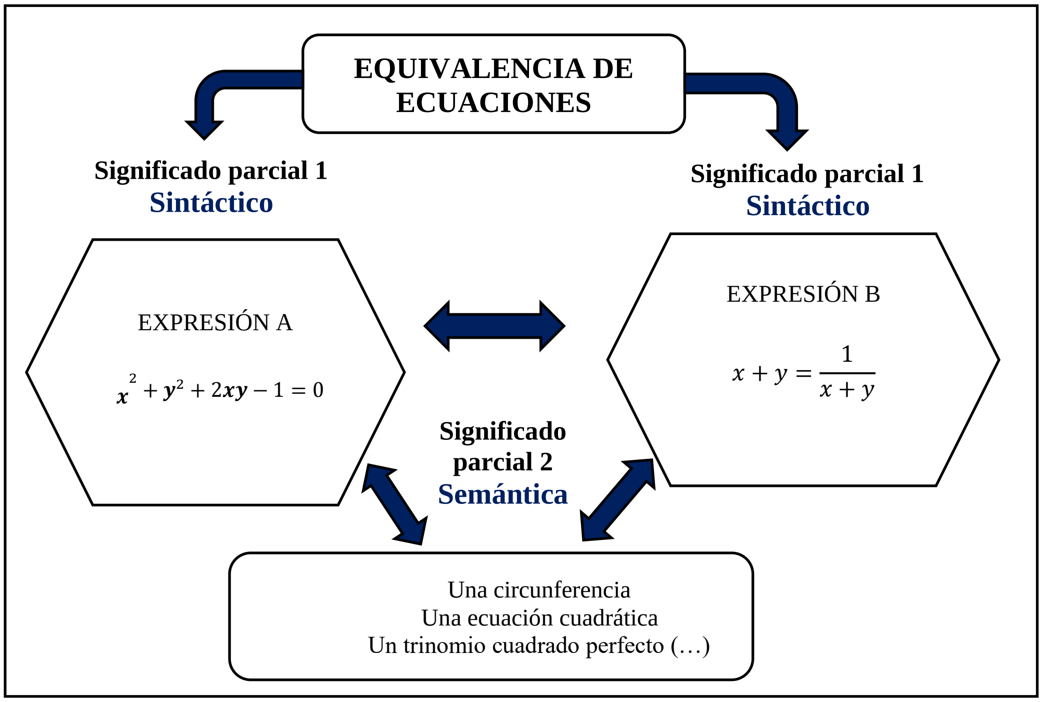
3.10.5. Interpretación de Ecuaciones. En la tarea propuesta la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$[11], representa la expresión A, por medio de la aplicación de reglas y procedimientos [tratamientos] se obtiene la expresión B, $x+y=\frac{1}{x+y}$, o viceversa. Las transformaciones permiten corroborar la equivalencia entre ambas ecuaciones. Desde su aspecto **semántico** al ser dos expresiones equivalentes se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales iguales, en tanto, la ecuación $x+y=$

[11] Para efectos de los intereses investigativos no resulta relevante si la ecuación es interpretada como una circunferencia, una ecuación cuadrática, un polinomio, etc., es decir si el significado personal asignado dista del significado institucional establecido.

$\frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una circunferencia, una ecuación cuadrática, un trinomio cuadrado perfecto. Tal y como se muestra en la siguiente figura.

Figura 15

Equivalencia de Ecuaciones



Fuente: Adaptado de Chalé-Can, Font y Acuña (2017)

Un impedimento para que se establezca la equivalencia entre las dos expresiones A y B, radica en la interpretación que realizan los sujetos a la segunda expresión B; en tanto, admiten la equivalencia entre las dos expresiones mediante tratamiento [desde lo sintáctico] pero no admiten que éstas representen el mismo objeto matemático [desde lo semántico], pues la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, deja de tener sus variables o presenta más restricciones en su dominio.

CAPÍTULO 4
CONSOLIDACIÓN DEL ESTUDIO DE CASO COLECTIVO

Este capítulo se describen aspectos relacionados con la metodología empleada en el desarrollo de esta investigación y con el método implementado en la consolidación de un estudio de caso colectivo, con el objetivo de realizar un análisis en contexto real relacionado con el fenómeno de la no articulación semiótica de representaciones, entendida como la dificultad que encuentran los sujetos para relacionar el sentido asignado a una representación semiótica de un objeto con el sentido asignado a otra representación semiótica del mismo objeto obtenida mediante tratamiento, es decir, la dificultad que encuentra para relacionar dos sentidos entre sí, estudio que se posiciona en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo, puesto que, brinda elementos suficientes para comprender el fenómeno descrito, proporcionando la mayor información posible, tanto de la situación en que es desarrollada la experiencia como de los métodos en la recolección de datos y el análisis de los mismos (Goetz y Lecompte, 1988). La metodología cualitativa contribuyó a capitalizar el proceso de fiabilidad de la información, puesto que, proporciono información pertinente en relación con: las tareas matemáticas [situaciones de tratamiento]; la selección de la población [profesores de matemáticas de primaria y secundaria], y las entrevistas semiestructuradas basadas en tareas (Goldin, 2000). Se considera que estos métodos de recolectar información, así como de analizarlos, ofrecieron una mayor validez para dar cuenta de la pregunta y los objetivos de investigación trazados en el presente trabajo. A continuación, se presentan algunas ideas centrales en relación al método empleado en la recolección de la información.

4.1. Aspectos Generales de la Investigación

En la presente investigación se ha optado por indagar sobre el conocimiento disciplinar de los profesores de matemáticas en ejercicio, debido a tres aspectos. En primer lugar, si bien en el campo de la didáctica de las matemáticas se reportan diversas investigaciones sobre el conocimiento didáctico-matemático del estudiante para profesor, aún son escasos los estudios que documentan el conocimiento didáctico, disciplinar y pedagógico de los profesores en ejercicio. En segundo lugar, desde las políticas educativas como las planteadas en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares básicos para el área de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006) se explicita que los profesores de matemáticas deben propiciar que sus estudiantes desarrollen las competencias necesarias para expresar y representar ideas matemáticas, así como poder transformarlas, formular y sustentar puntos de vista; aspecto que exige que los profesores dominen distintos recursos y registros en lenguaje natural y matemático, que posibilite una comprensión de las nociones matemáticas, con un nivel de reflexión y una amplitud de análisis para que sus estudiantes se apropien y desarrollen competencias matemáticas. Un tercer aspecto hace referencia a la naturaleza de las matemáticas, frente a esto Duval (2004) plantea que los objetos matemáticos no son perceptibles directamente por los sujetos sino vía las representaciones semióticas que permiten denotarlos y a su vez posibilita una manipulación sobre estos, característica que exige que tanto profesores como estudiantes reconozcan un mismo objeto matemático en diferentes representaciones, obtenidas mediante transformaciones semióticas de conversión y tratamiento.

En relación con las temáticas abordadas en los cinco cuestionarios diseñados y seleccionados en este estudio, se considera que los objetos matemáticos relacionados son cercanos a los profesores desde los primeros años de escolaridad los estudiantes, tal y como se especifica en los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) que a su vez plantean orientaciones para el diseño y desarrollo de propuestas de enseñanza. Por ejemplo, en relación con la enseñanza de la probabilidad, se propone que en los primeros años de básica primaria12 y al finalizar el segundo año de secundaria los estudiantes estén en la capacidad de realizar conjeturas sobre el resultado de un experimento aleatorio, haciendo uso de proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. Frente al trabajo inicial con sistemas algebraicos y analíticos se propone desde la básica primaria y los primeros años de secundaria que los estudiantes puedan representar situaciones de variación mediante expresiones verbales generalizadas, con el fin que en los grados superiores de educación secundaria, los estudiantes estén en la capacidad de trabajar explícitamente con el lenguaje algebraico [expresiones algebraicas, ecuaciones y equivalencia de expresiones] e identifiquen relaciones entre propiedades de gráficas, propiedades de expresiones algebraicas, modelación con funciones polinómicas, racionales y exponenciales, familias de funciones y sistemas de ecuaciones. El trabajo con cónicas se realiza en grado décimo de educación media.

Frente al componente estadístico se espera que los estudiantes construyan e interpreten diferentes gráficos estadísticos con el fin de comparar las representaciones gráficas realizadas por sí mismo o por otros, infieran información y tomen decisiones con argumentos sólidos. Como se ha señalado anteriormente, independiente de la formación de los profesores de matemáticas y el

[12] En Colombia el sistema educativo lo conforman: la educación inicial, la educación preescolar, la educación básica [primaria cinco grados y secundaria cuatro grados], la educación media [dos grados y culmina con el título de bachiller], y la educación superior. Los tres niveles de educación formal son: Preescolar, educación básica primaria y básica secundaria, y educación media. La educación formal se organiza en tres niveles, a) El preescolar, que comprenderá mínimo un grado obligatorio, b) La educación básica, con una duración de nueve grados que se desarrollará en dos ciclos: La educación básica primaria de cinco grados y la educación básica secundaria de cuatro grados, c) La educación media con una duración de dos grados.

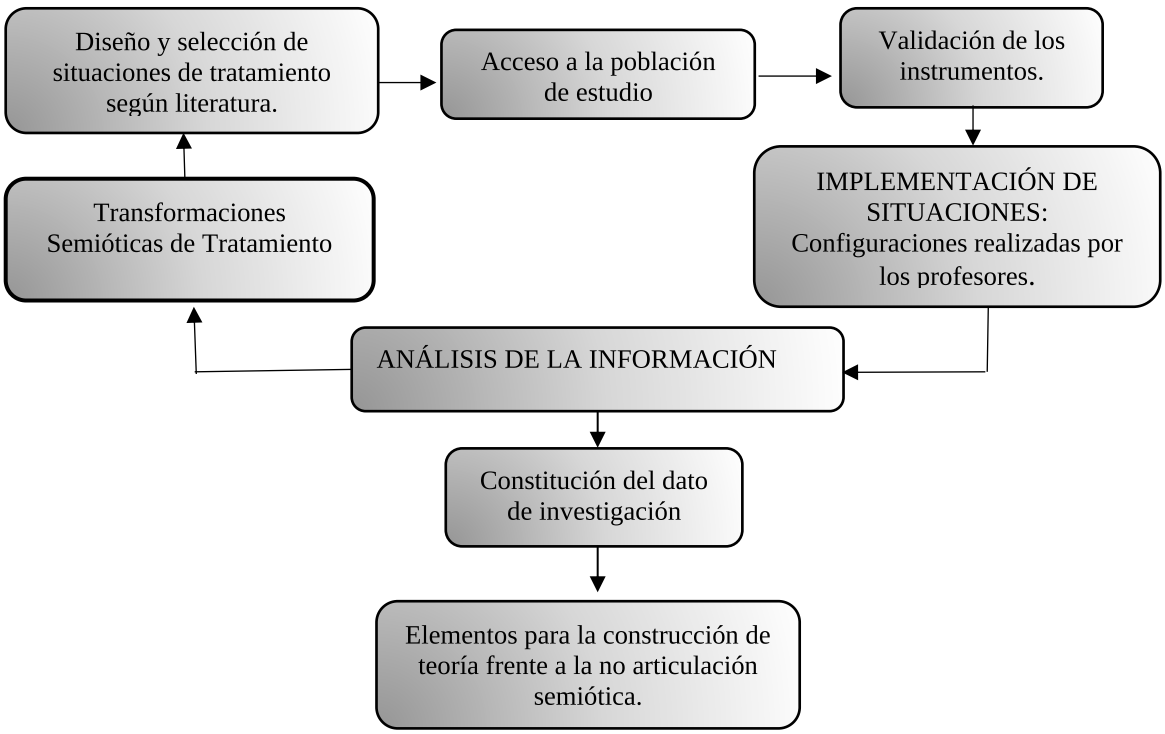
nivel educativo en que se desempeñan [educación básica primaria o secundaria], en los primeros años de escolaridad éstos tienen alguna relación con las temáticas que enmarcan las tareas propuestas del presente estudio, específicamente aquellas que fueron aplicadas a los grupos de profesores, por tanto, se consideran pertinentes dichas situaciones para poner en evidencia las dificultades que encuentran los profesores al resolver situaciones de tratamiento que requieren de una articulación semiótica.

4.2. Consideraciones Sobre el Diseño de la Investigación

Como lo plantean Rodríguez, Gil y García (1996) los enfoques de investigación cualitativos estudian la realidad en su contexto natural, puesto que, permite interpretar el fenómeno de estudio de acuerdo con los significados que tienen la población de estudio. Al respecto, Denzin y Lincoln (1994) afirman que la investigación cualitativa es multimetodica, naturalista e interpretativa, que brinda elementos para dar sentido e interpretar el fenómeno de estudio en términos del significado que las personas le otorguen, Creswell (1998) considera que los estudios cualitativos son un proceso interpretativo que se basa en distintas tradiciones metodológicas como la biografía, la fenomenología, la teoría fundamentada en los datos, la etnografía y el estudio de casos, entre otras. En virtud de ello, la presente investigación se desarrolla bajo un enfoque de investigación cualitativa, puesto que, brinda elementos para trascender al sujeto social [profesores de matemáticas] en tanto, posibilita identificar y explicar las similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los profesores con las dificultades que encuentran los estudiantes al articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, que son reportadas en la literatura (D´Amore, 2006b; Santi, 2011 y Rojas, 2012). El siguiente esquema resume el ciclo metodológico que permitió guiar el proceso de investigación. La ruta contribuyó a documentar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas de expresiones en contextos matemáticos obtenidas mediante tratamiento.

Figura 16

Fases del Ciclo Metodológico Diseño e Implementación de las Tareas.



El esquema anterior muestra el ciclo metodológico que se desarrolló en el proceso investigativo, a partir de tareas que incluyen transformaciones semióticas de tratamiento en tópicos específicos como numérico, estadístico, algebraico, probabilístico y geometría analítica (Duval, 1993, 2017) [tareas que son explicadas en el apartado de la propuesta de intervención que se describe en este capítulo]. Dado los intereses investigativos se decidió tomar algunas tareas que fueron trabajadas en las investigaciones realizadas por D´Amore (2006b) y Rojas (2012), en tanto brindan herramientas para identificar las similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los profesores y los estudiantes para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. A continuación, se relaciona algunos aspectos generales de los estudios de casos.

4.3. Aspectos Generales del Estudio de Caso

Los estudios de caso, como lo plantea Yin (1994) son investigaciones empíricas que permiten estudiar un fenómeno dentro del contexto de la vida real, fundamentalmente cuando estos no son claramente evidentes, aspecto que lo posiciona en un método útil para el análisis de problemas prácticos, situaciones o acontecimientos que surgen en la cotidianidad, puesto que ofrece una rica descripción del objeto de estudio; especialmente cuando se pretende indagar un problema que presenta múltiples variables estrechamente vinculadas al contexto en el que se desarrolla (Cebreiro y Fernández, 2004).

En esta investigación se ha optado por el desarrollo de un estudio de caso, en tanto, posibilita identificar y analizar los sentidos que asignan un grupo de profesores a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, así como identificar las dificultades que encuentran para articular los sentidos asignados a estas representaciones. Stake (1994) plantea tres tipos de estudios que dependen de la finalidad que se trace en este [intrínseco, instrumental y colectivo]. En el estudio de caso *intrínseco* su interés radica en conocer a profundidad un caso particular, las especificidades propias, esto hace que este tipo de casos tengan un valor en sí mismos y ofrezcan una mejor comprensión del caso concreto a estudiar. No se hace una elección del caso porque éste sea representativo de otros casos, o porque ilustre un determinado problema o rasgo, sino porque el caso en sí mismo es de interés para la investigación. El caso *instrumental* indaga una cuestión particular, se pretende generalizar un fenómeno, es decir, a partir de un conjunto de situaciones específicas, se examina un caso específico para profundizar en un tema o afinar una teoría. El autor expresa que el objetivo de este tipo de caso es comprender otra cosa, por ello la elección del caso es un instrumento para conseguir algo diferente a la comprensión de la persona. Finalmente, *el caso colectivo* que se realiza cuando el interés de la investigación se centra en un fenómeno, población o condición general, seleccionando varios casos que se han de estudiar intensivamente. Esta distinción entre los tres tipos de estudios de casos no se debe a su utilidad para asignar un estudio a esas tres categorías, sino que, los métodos que se emplean en cada uno son diferentes y dependen del interés del mismo que hace que el estudio sea intrínseco, instrumental o colectivo.

Teniendo en cuenta los objetivos del presente trabajo se desarrolló un *estudio de caso colectivo*, con un grupo de 11 profesores en el que se analizaron los sentidos que éstos asignan a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, además de identificar las dificultades que encuentran para articular los sentidos asignados a dichas representaciones. Este fenómeno de *no articulación semiótica* tiene múltiples variables, como es la formación matemática de los profesores que incide en el lenguaje matemático utilizado, los signos empleados y los significados que otorgan a estos, las representaciones movilizadas y las que moviliza en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los significados personales otorgados a los diferentes objetos matemáticos, la visión epistemológica y ontológica de las matemáticas, etc. Por medio del estudio de caso colectivo se pretende analizar las dificultades que encuentran los profesores para articular sentidos, lo que ha sido denominado por Rojas (2012) «articulación de sentidos» o «articulación semiótica». Dado el interés en el desarrollo de esta investigación, a continuación, se presenta las fases que se han considerado en la ejecución del estudio caso colectivo.

4.3.1. Desarrollo del Estudio de Caso Colectivo. En el desarrollo del estudio de caso colectivo se consideraron tres fases:

Figura 17

Fases del Ciclo Metodológico del Estudio de Caso Colectivo

Fase pre-activa → En esta fase se definieron los aspectos epistemológicos adoptados en el presente trabajo, la población de estudio y concreción del grupo de estudio del caso colectivo.

Fase interactiva → En esta fase se obtuvo la información pertinente para dar respuesta a la pregunta y alcanzar los objetivos trazados en la investigación por medio de 5 tareas que fueron resueltas inicialmente por un grupo de 64 profesores [4 tareas para los profesores de primaria y 4 tareas para el grupo de profesores de secundaria] así como el desarrollo de algunas entrevistas semi estructuradas basada en tareas.

Fase pos-activa → En esta fase se analizó la información y constituyó el dato de investigación en relación al problema de la *no articulación semiótica*, haciendo uso de algunos elementos de análisis del enfoque onto semiótico.

4.3.2. Fase Pre-activa

En esta fase se definió los aspectos epistemológicos que fueron adoptados en el presente trabajo, y se conformó una población inicial de 64 profesores de matemáticas en ejercicio, 32 profesores de primaria y 32 profesores de secundaria. Para conformar el estudio de caso colectivo se eligieron aquellos profesores que en mínimo tres tareas de las cuatro propuestas reconocían desde el aspecto sintáctico la igualdad de las expresiones [equivalencia sintáctica] pero que dotar de sentido y significado las expresiones o representaciones obtenidas mediante tratamiento son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes [no equivalencia semántica] es decir, no relacionaron los sentidos sintáctico y semántico entre sí, lo que se conoce como no articulación semiótica.

Con relación a los aspectos epistemológicos, el trabajo se posiciona en el enfoque semiótico-cognitivo propuesto por Duval (1993) que ha permitido consolidar una postura frente a los fundamentos epistemológicos de la investigación y la concepción del conocimiento, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Duval (2017) plantea que el estado epistemológico del conocimiento matemático es particular frente a otros dominios del conocimiento científico. Para este autor no se puede hablar de una epistemología del conocimiento científico en tanto, la formación de conceptos en química, geología, botánica o paleontología son distintos, las formas de acceder a estos conocimientos, los objetos y los tipos de prueba no son iguales que en matemáticas, puesto que, en matemáticas los sujetos no pueden acceder directamente a los objetos sino vía representaciones que a su vez permiten un trabajo sobre estos, aspecto que invita que matemáticas se realice un trabajo diferente y se difiera en la forma de validar la verdad en relación a otras disciplinas científicas. En términos de Duval (2004) la actividad matemática:

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación. Estos sistemas constituyen registros de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas. (p.24)

Una exigencia en la comprensión de un objeto matemático es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones obtenidas mediante los procesos cognitivos de tratamientos y conversiones, siendo este el único medio de acceder y tener un acercamiento a los objetos matemáticos.

4.3.2.1. Población de Estudio.

Inicialmente se tenía planeado recoger la información de manera presencial en diferentes instituciones de la ciudad de Bogotá, el no contar con presencialidad en las escuelas y colegios en Colombia fruto de la emergencia sanitaria generada por el COVID-19 surgieron dos preguntas: la primera, cómo recolectar la información dado que a causa de la emergencia de la COVID-19 no había presencialidad en las escuelas y colegios en Colombia, la segunda, cómo lograr un dominio por parte de la investigadora frente a las tareas propuestas, de tal manera, que en la estrategia implementada el significado personal no se viera *«contaminado»* con el significado institucional. Para dar respuesta a estos dos interrogantes se llevó a cabo la siguiente dinámica.

1. Contacto con los profesores vía e-mail o telefónica.
2. Acuerdo de sesión virtual por Zoom la hora y el día es sujeta a la disponibilidad del profesor, dicha sesión duro entre 40-50 minutos.
3. En cada sesión solo participaba la investigadora y el profesor.
4. El día de la sesión virtual se compartió las tareas en una presentación en PowerPoint. Una pregunta por diapositiva, el control de la presentación estaba a cargo de la investigadora.
5. Cada profesor escribía sólo la respuesta a la tarea e indicaba cuando pasar a la siguiente diapositiva.
6. Luego de abordadas las tareas el profesor enviaba las fotos de las producciones al WhatsApp de la investigadora.
7. Se decidió que si el profesor se demoraba en el envío de las producciones o eran enviadas al día siguiente éstas no eran tenidas en cuenta.

8. Al día siguiente o el mismo día se realizó una breve charla de reflexión (15 – 20) minutos. 20 que participaron en la entrevista semi estructurada.

   Frente a las entrevistas desarrolladas estuvieron dirigidas por la autora del presente proyecto de investigación. Una vez se tenía la aceptación del profesor para participar en el estudio, se acordaba una sesión virtual por la plataforma Zoom, la hora y el día estuvieron sujetas a la disponibilidad del profesor. Las sesiones tuvieron una duración entre 40 a 50 minutos. En la sesión se compartió una presentación realizada en PowerPoint. Dependiendo el grupo [primaria - secundaria] en la primera diapositiva se indagó por la información académica del profesor, nombre, formación universitaria, colegio en el que laboraba y nivel en el cual se desempeña, posteriormente, en cada diapositiva se presenta una pregunta que hacía parte de los instrumentos que se tenían proyectados en el trabajo presencial con cada uno de los grupos. Tal y como se presenta a continuación:

Figura 18

Diapositivas Elaboradas Para el Grupo de Profesores de Secundaria.

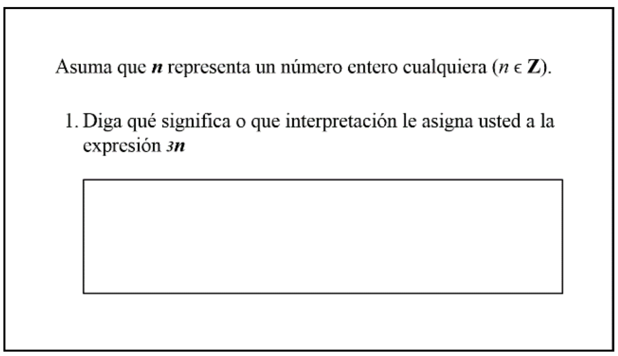
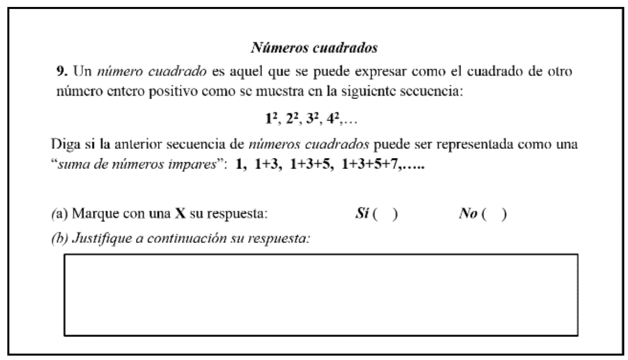


Figura 19

Diapositivas Elaboradas Para el Grupo de Profesores de Primaria



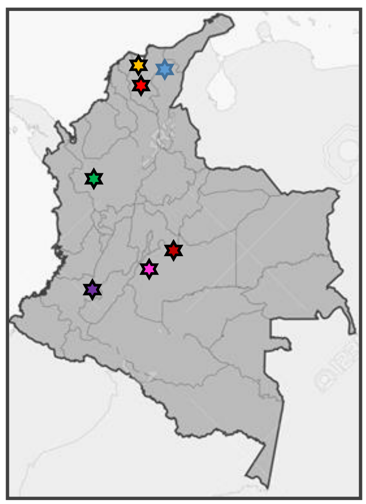
Cada profesor tenía su micrófono y cámara encendidos. Para que el profesor no fuese interrumpido, la investigadora tenía su micrófono apagado y solo era encendido para resolver las dudas e inquietudes. El profesor le indicaba a la investigadora cuándo podía pasar a la siguiente diapositiva, esta dinámica se mantuvo hasta finalizar el proceso [11 preguntas para los profesores de secundaria y 9 preguntas para los profesores de primaria]. Una vez terminada la sesión, al instante, el profesor enviaba sus producciones al WhatsApp de la investigadora. Si el profesor demoraba en enviar las soluciones [una hora] o eran enviadas al día siguiente, no fueron tenidas en cuenta para conformar la población final del presente trabajo. En el mismo día o máximo 2 días después, según la disponibilidad de tiempo de cada participante se acordó un pequeño tiempo para una entrevista semi estructurada basada en tareas que tuvo una duración entre 15 y 25 minutos, a 20 profesores en el que se profundizó en algunos ítems específicos.

Consolidada la estrategia virtual se contó con la participación de los 64 profesores que fueron seleccionados de manera intencional mediante criterios establecidos con antelación como el vínculo de profesores conocidos por la investigadora de este trabajo quienes a su vez tenían vínculos con otros profesores que orientaran la asignatura de matemáticas en cualquier institución del país13 y que laboraran en educación básica primaria (1° a 5°), básica secundaria (6° a 9°) o media vocacional (10° y 11°) y que ofrecieran posibilidades de colaboración y aceptación para participar en este estudio. Dada esta red se logró tener una participación de 32 profesores de primaria y 32 profesores de secundaria que laboran en diversas ciudades del país, se tenía la posibilidad de ampliar esta población, pero se proyectó trabajar con dicho número de tal manera de conformar un grupo homogéneo de profesores [mitad de primaria y mitad de secundaria]. El proceso de recolección de la información inició a finales del mes de abril del 2020 y finalizó a mediados del mes julio del 2020. El grupo de profesores de secundaria contó con la participación de 6 profesores de Barranquilla, 1 de Magdalena, 3 de la Guajira, 1 de Medellín, 1 de Huila, 6 de Cundinamarca, 14 de Bogotá. El grupo de profesores de primaria contó con la participación de 1 profesora de Medellín, 3 de Barranquilla, 3 de Cundinamarca y 23 de Bogotá, para un total de 64 profesores ubicados en 8 regiones del país.

Figura 20

Mapa de Colombia que Relaciona la Población de Estudio.

- (9) profesores de Barranquilla.
- (1) Magdalena.
- (1) Huila.
- (2) Medellín.
- (3) Guajira.
- (9) Cundinamarca
- (39) Bogotá.



Posteriormente a la conformación del grupo de estudio se procedió a conocer aspectos fundamentales del contexto social de los participantes como las normas y políticas que estipulan los criterios para ejercer la profesión docente en Colombia, los conocimientos que desde los lineamientos para el área de matemáticas se estipulan para los profesores y estudiantes en

[13] En Colombia la Educación es un servicio público que puede ser prestado por el Estado [Instituciones del sector oficial, usualmente se les denomina públicas]. El servicio que ofrece el Estado es gratuito para todos los niños, niñas y jóvenes en edad escolar [entre los 5 a 7 años y los 16 a 17 años de edad, en promedio].

matemáticas y la formación académica de los profesores que hacen parte de este trabajo investigativo.

4.3.2.2. Formación Académica de la Población de Estudio.

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas en Colombia, a los profesores se les ha confiado el desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes; sin embargo, en el caso de los profesores de secundaria los decretos y normas de Estado, estipulan que esta misión la pueden desarrollar no sólo quienes son egresados de programas de formación de profesores en el área de matemáticas, sino cualquier profesional que posea un título universitario, siempre que en su plan de estudios se encuentre el componente matemático en su formación, como es el caso de los egresados de las ingenierías, contaduría, etc. En relación con la educación primaria, los profesores pueden ser bachilleres superiores, normalistas14 o contar con un título profesional o una licenciatura15 que tenga cualquier énfasis, tal y como se estipula en la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), es decir que, en algunos casos, los profesores de matemáticas en primaria no cuentan con una formación en educación matemática y, además, muchos de ellos no solo están a cargo de la asignatura de matemáticas sino de todas o varias asignaturas. Tal y como se indica en el Decreto 1278 del 2002 que especifica:

> Son profesionales de la educación las personas que poseen título profesional de licenciado en educación expedido por una institución de educación superior; los profesionales con título diferente, legalmente habilitados para ejercer la función docente de acuerdo con lo dispuesto en este decreto; y los normalistas superiores.

Aclarado este aspecto, el grupo de profesores de primaria estuvo conformada por 8 Licenciadas en educación básica primaria; 1 licenciada en lenguas Modernas; 1 Licenciada en Ciencias de la Educación; 1 Normalista Superior; 1 licenciada en educación para la infancia con énfasis en Integración al aula Regular; 1 licenciada en biología; 1 licenciada en educación para la infancia con énfasis en Integración al ambiente escolar; 1 licenciada en primaria; 3 licenciadas en preescolar; 1 licenciada en educación básica y primaria con énfasis a la comunidad 6 licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas 7 licenciados en matemáticas. En este grupo 6 contaba con estudios de especialización; 1 se encontraba cursando sus estudios de especialización; 2 con estudios de maestrías en curso; 23 con maestrías culminadas.5 se encontraban vinculadas al sector privado y 27 al sector público.

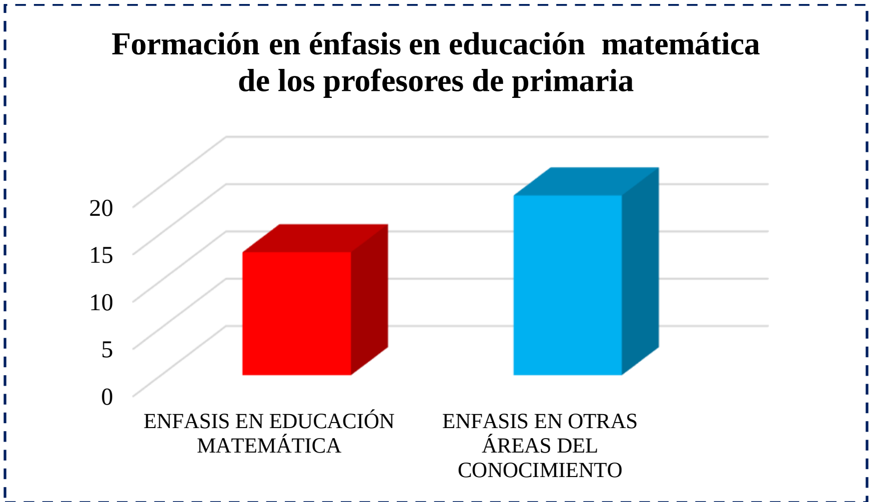
---

[14] En Colombia los bachilleres pedagógicos son aquellos egresados de instituciones educativas denominadas *«escuelas normales»*, en las cuales completan su formación con énfasis en pedagogía, mientras que los normalistas superiores son aquellos egresados de escuelas normales que cursan 2 años adicionales en los que enfatizan su formación en pedagogía y desarrollan prácticas docentes con niños de preescolar y primaria.

[15] En el caso de Colombia, el título de licenciado@ refiere al grado académico que se alcanza luego de completar estudios de educación superior, entre 4 y 5 años de duración en un programa de formación de profesores [en educación infantil, primaria, o en áreas específicas del conocimiento].

Figura 21

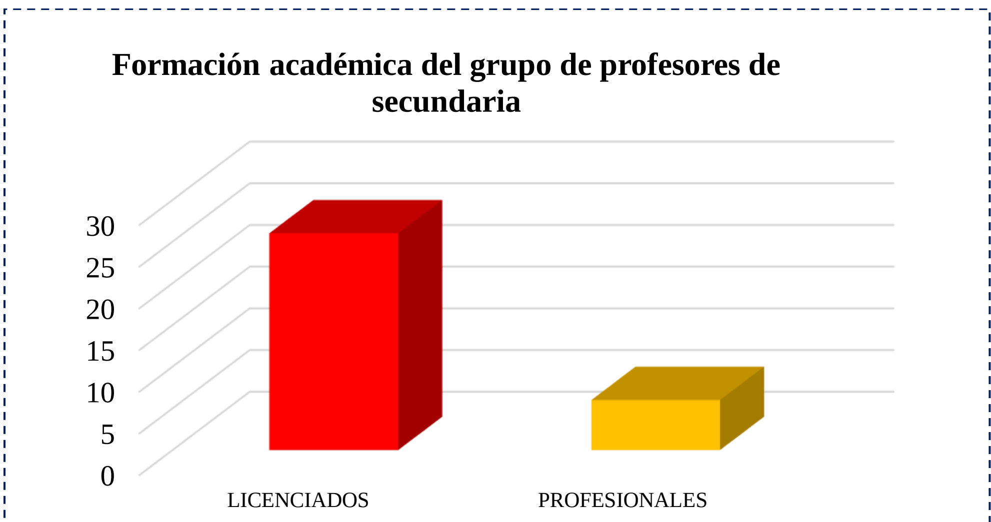
Formación en Educación Matemática de los Profesores de Primaria



Frente al grupo de secundaria se contó con la participación 1 Administrador de empresas; 1 Ingeniero industrial;1 Ingeniero mecánico; 1 Ingeniero del Medio Ambiente; 1 Ingeniera de sistemas; 1 Contador Público; 19 licenciados en matemáticas y 4 licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas; 1 licenciada en física; 1 licenciado en física y Matemáticas; 1 licenciado en Matemáticas y tecnologías de la información. Para un total de 26 licenciados y 6 profesionales. Tal y como se resume en la siguiente gráfica.

Figura 22

Formación Académica del Grupo de Profesores de Secundaria



Del grupo anterior, 13 profesores se desempeñaban en educación básica secundaria 4 en educación media vocacional; 11 educación básica secundaria y media; 1 educación media y universitaria; 2 educación básica y universitaria; 1 profesor en educación primaria; básica secundaria y media vocacional16. En este grupo 1 profesor contaba con especialización; 9 con estudios de maestría en curso; 22 con estudios de maestrías. Así como, 28 profesores son vinculados al sector oficial y 4 al sector privado.

4.3.3. Fase Interactiva

Los datos de la presente investigación fueron consolidados por medio de dos fuentes; la primera de ellas hace referencia a las cuatro tareas abordadas por los profesores según el grupo [primaria y secundaria] y la segunda fuente hace referencia a las entrevistas semi estructuradas basadas en tareas que se realizaron a 20 profesores, 11 corresponde al grupo que conforman el estudio de caso colectivo y 9 a profesores que no relacionaron la fracción $4/8$ con el evento aleatorio enmarcado en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad, aspecto que llamo la atención de la investigadora, y que fue profundizado en algunas entrevistas realizadas a este grupo de profesores. En correspondencia, con Goldin (2000) en la entrevista basadas en tareas, como mínimo se cuenta con la participación de un sujeto y un entrevistador quienes interactúan en relación con una o más tareas. Denzin y Lincoln (2005) consideran que una entrevista «es una conversación, es el arte de realizar preguntas y escuchar respuestas» (p. 643). Fuentes que contribuyen a tener una mayor validez en la información, en tanto, brinda mayores detalles que complementan la información obtenida mediante las producciones escritas, con cierto control por parte del investigador y libertad en las respuestas por parte del informante. En este estudio las entrevistas basadas en tareas permitieron profundizar en la manera como los profesores dieron solución a las tareas propuestas, identificar los tratamientos matemáticos realizados, reconocer y analizar las dificultades que estos encuentran al realizar una articulación semiótica y algunas preguntas emergentes que surgieron de los argumentos dados.

4.3.3.1. Recolección de Información.

En virtud de disponer varios instrumentos en la recolección de la información que brindara una triangulación con mayor solidez de los resultados obtenidos, producto del trabajo realizado frente al desarrollo de las tareas [instrumentos] y los videos correspondientes a las entrevistas semi estructuradas realizadas. La recolección de datos se realizó en dos momentos; primero, las producciones relacionadas con las soluciones a cada tarea [cuestionario], segundo, las transcripciones de las grabaciones en video de entrevistas semiestructuradas basadas en tareas

[16] El Ministerio de Educacional Nacional en el (Artículo 11 Ley 115 de 1994) definió tres Niveles de la educación básica y media que hacen parte de la *educación formal como: Preescolar* que comprende mínimo

realizadas a 20 profesores. Las entrevistas [basada en tareas], estuvo orientada por las respuestas soluciones realizadas en cada situación.

Respecto a las entrevistas, fueron grabadas en videos y posteriormente se realizó una transcripción. Estas se llevaron a cabo el mismo día, al siguiente día o en máximo de dos días, dependiendo de la disponibilidad de tiempo de los participantes; estas se desarrollaron de manera individual todas las entrevistas iniciaran con un agradeciendo a los participantes por estar presentes, especificación del nombre y el tipo de cargo [profesor de primaria o secundaria], se compartió con cada profesor(a) las fotos de las producciones realizadas en cada tarea.

4.3.3.2. Consolidación y Constitución de los Datos de Investigación.

Como se mencionó anteriormente, los datos fueron obtenidos básicamente de dos fuentes: una, los escritos relacionados con el desarrollo de tareas [cuestionarios] resueltos por 64 profesores clasificados en dos grupos [primaria-secundaria] y, otra, las transcripciones de las grabaciones en video de entrevistas realizadas a algunos profesores seleccionados mediante criterios prestablecidos. Para la consolidación de los datos de investigación se seleccionó aquellos profesores que mínimo en 3 tareas no realizaban una articulación semiótica, esto es, la posibilidad que tienen las personas de reconocer que la interpretación asignada a una de las expresiones puede ser asignada a otra expresión sintácticamente equivalente a ésta, así como, la verificación que los profesores realizaran un reconocimiento de la equivalencia sintáctica entre las expresiones trabajadas, que demostraran un dominio de las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de ellas a partir de otra. Bajo este criterio de selección el grupo de educación básica primaria estuvo conformada por 5 profesores [nivel en el que se desempeña y número correspondiente]: primaria-3, primaria-4, primaria-9, primaria-31, primaria-32 que, en este estudio de caso serán denominados primaria-A, B, C, D, E, respectivamente. En relación con los profesores de secundaria el grupo se conformó por 6 profesores: secundaria-1, secundaria-12, secundaria-13, secundaria-22, secundaria-26, y secundaria-31 que fueron denominados secundaria-A. B, C, D, E y F respectivamente, y se evidenció que 5 profesores no articulan el aspecto semántico con el sintáctico en la tarea sobre interpretación de expresiones, 5 en la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos, 5 en el cálculo de la probabilidad y 3 profesores en la tarea de interpretación de ecuaciones.

La segunda fuente en la recolección de los datos de investigación fueron las transcripciones de 20 entrevistas desarrolladas. Se contó con una participación de 11 profesores quienes conformaron el grupo de caso colectivo [no relacionaban los dos significados parciales entre sí, en mínimo 3 tareas]. Así mismo, se desarrollaron 9 entrevistas a profesores quienes en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad admitían la fracción $4/8$ la equivalencia de las expresiones $1/2$, $3/6$, y $4/8$ desde lo sintáctico y desde lo semántico, pero la expresión $4/8$ no era relacionada con el evento aleatorio enmarcado en la tarea.

Para el desarrollo de las entrevistas se diseñó un guion que contenía una serie de preguntas asociadas a la tarea que dejó en evidencia la *no articulación semiótica*; cada entrevista se realizó «*en positivo*», en tanto no se cuestionó la respuesta dada o la selección realizada, sino que se indagó los motivos que llevaron al profesor a tomar dicha decisión; por ejemplo, quienes no identificaron la equivalencia entre expresiones algebraicas [tarea 1], se indagó aquellos elementos que le permitió identificar que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no podía ser interpretada como *el triple de un número*; en la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [tarea 2], se indagó aquellos aspectos que permitieron la elección del gráfico A o B o ninguno de los diagramas; en relación al cálculo de la probabilidad [tarea 3], se indagó por aquellos elementos que posibilito establecer que la fracción $4/8$ no podía representar la probabilidad «lanzar un dado y obtener un número par», y para la tarea sobre interpretación de ecuaciones [tarea 4], se indagó los elementos que permitieron establecer que la interpretación asignada a la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ no coincidía con la interpretación realizada a la expresión $\mathrm{x}^2+y^2+2xy-1=0$; éstas fueron algunas de las preguntas formuladas. Finalmente, se le preguntó al profesor cómo se sintió con el trabajo realizado, así como la opinión sobre el dominio matemático con mayor y menor complejidad que enmarca cada una de las tareas propuestas.

4.3.4. Fase Pos-activa

La información se obtuvo de las producciones de 64 profesores en ejercicio a 32 de primaria y 32 de secundaria] que constituyeron la población inicial de este estudio, en el capítulo 5 se relacionan las producciones de los 64 profesores a cada una de las tareas propuestas, se realiza un análisis general y se resaltan aquellos profesores que no relacionan los dos sentidos asignados entre sí o no logran articular el sentido sintáctico con el semántico para cada una de las situaciones, que permitió identificar aquellos profesores que no realizaban una articulación semiótica mínimo en tres tareas. Con base a dicha información se consolidó el grupo participante en el estudio de caso colectivo que contó con la participación de 11 profesores [5 de primaria y 6 de secundaria]. En el capítulo 6 se presentan las configuraciones semióticas activadas por el grupo de 11 profesores que reflejan los seis objetos primarios propuestos por el EOS [lenguaje, situaciones problemas, conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos o acciones y argumentos] y que son relacionados por medio de las funciones semióticas.

Las tareas son enmarcadas en la transformación cognitiva de tratamiento que fueron insumo para identificar y caracterizar las coincidencias entre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento y las dificultades que encuentran algunos estudiantes al resolver este tipo de tareas, resultados que han sido documentados en la literatura D´Amore (2006b), Santi (2011) y Rojas (2014). Se muestra la efectividad de usar varias estrategias para estudiar el mismo fenómeno [no articulación semiótica], como desarrollar un estudio de un caso colectivo, que permita identificar la manera en que éstos abordan las situaciones y los sentidos que asignan a las representaciones semióticas obtenidas, los sistemas de representación a los que recurren, la realización de una entrevista semiestructurada que posibilitaron profundizar en la solución dada inicialmente a la tarea.

Frente al análisis para constituir los datos de investigación se empleó algunos elementos que brinda el enfoque ontosemiótico, como el sistema de prácticas puestos en juego por los profesores para abordar las situaciones propuestas y que son el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013). En los sistemas de prácticas matemáticas [acciones realizadas por un sujeto para resolver un problema], participaron y emergieron distintos tipos de objetos primarios matemáticos, los cuales según su naturaleza y función fueron clasificados en las siguientes categorías: – **Lenguajes** [términos, expresiones, notaciones, gráficos] en sus diversos registros [escrito, oral, gestual, etc.]; – **Situaciones-problemas** [aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios]; – **Conceptos-definición**, introducidos mediante definiciones o descripciones [recta, punto, número, media, función]; – **Proposiciones** [enunciados sobre conceptos]; – **Procedimientos** [algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo]. – **Argumentos** [enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo]. En el EOS se considera que todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones onto semióticas de prácticas, objetos y procesos. En esta dirección la noción de práctica matemática se convirtió en un elemento importante en el desarrollo de esta propuesta, así como la función semiótica, en tanto, permitieron identificar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para relacionar entre sí, o realizar una articulación a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento.

4.4. Diseño y Selección de Instrumentos

Como se mencionó anteriormente la información recolectada surge de la aplicación de cinco tareas específicas enmarcadas en la transformación de tratamiento en busca de identificar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, así como, establecer similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas. En tanto se quiso corroborar si lo reportado en la literatura frente a las dificultades que encuentran los estudiantes se mantienen en otros dominios matemáticos y conceptualizar la noción de tratamiento matemático [transformación de una representación en el registro mismo donde ha sido formado] en dominios diferentes al numérico y algebraico como, se incluyó una tarea en un contexto diferente a los abordados por Rojas (2012) [probabilístico, algebraico, y de geometría analítica]. Para tal fin, se propuso una tarea en contexto estadístico, específicamente en el análisis de gráficos estadísticos, cuyo proceso de validación inició en el primer semestre del año 2018 con la identificación del tópico a trabajar [interpretación de gráficos estadísticos] y que para dar solución a la tarea los profesores tratamientos (Duval, 1993, 2017). Teniendo en cuenta estos criterios se diseñó la siguiente tarea con una situación en dicho contexto:

Consumo de agua

Durante el último semestre del año 2019 una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró el siguiente consumo mensual: en octubre 60 m^3, en noviembre 40 m^3 y diciembre 38 m^3.

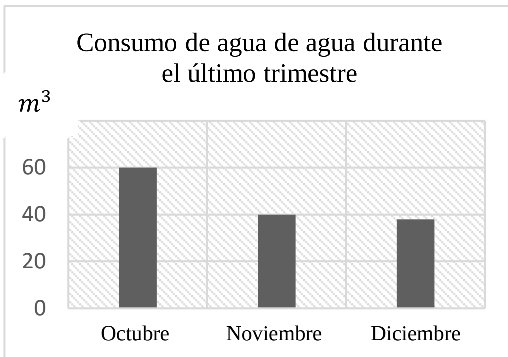


Gráfico A

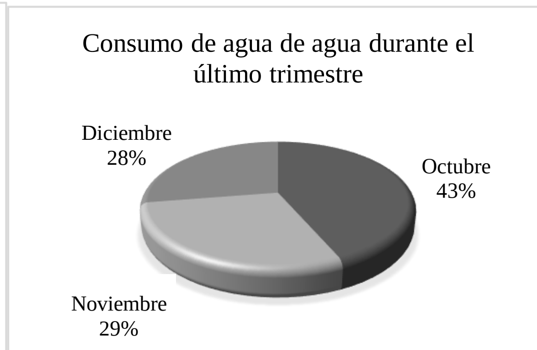


Gráfico B

El gráfico que representa la información del consumo de agua en el último trimestre es: [Marque con una x la opción u opciones correctas]

- El gráfico A *Sí ( ) No ( )*
- El gráfico B *Sí ( ) No ( )*
- Los gráficos A y B *Sí ( ) No ( )*
- Ninguno de los dos
  Justifique la respuesta

Con la tarea se buscó que los profesores reconocieran lo que hemos denominado en este trabajo como *equivalencia contextual de gráficos estadísticos,* asumida como, la capacidad que tienen los sujetos para identificar la misma información en gráficos diferentes. La tarea fue propuesta a 32 profesores. Los resultados obtenidos permitieron concluir que la tarea propuesta, si bien presentaba la información [consumo de agua] en un gráfico de barras y un gráfico de sectores, no se enmarcaba en una transformación de tratamiento como se pensaba en un inicio, puesto que, los diagramas empleados relacionan conceptos diferentes, en correspondencia con los planteamientos de Font, Godino y D'Amore (2007) quienes consideran que dos o más gráficos estadísticos no pueden ser equivalentes, en tanto, en su construcción se relacionan conceptos matemáticos diferentes; considerando este aspecto, aunque en la tarea se enfatiza sobre la interpretación de gráficos estadísticos, categoría que supuestamente maneja el mismo registro, implica que los profesores relacionaran conceptos matemáticos diferentes en su interpretación, por ejemplo, en el gráfico de sectores los profesores debían calcular e interpretar porcentajes, establecer correspondencia con el número entero dado y en el gráfico de barras requiere que los profesores conozcan la frecuencia relativa, frecuencia acumulada, así como, aspectos de proporcionalidad, etc. Con base a estas características la situación se enmarca en una tarea de transformación de conversión. Aspecto que distaba de las pretensiones del presente trabajo, los resultados obtenidos contribuyen a la enseñanza de las matemáticas, específicamente en la didáctica de la estadística, puesto que, los hallazgos encontrados brindan algunos elementos que deben ser considerados, en tanto, permiten identificar y mostrar evidencias de posibles causas por las cuales un número considerable de profesores no identifican la equivalencia contextual entre los dos gráficos y el lenguaje natural [transformación de conversión]. Resultados que fueron publicados17 en una revista de educación matemática.

Teniendo en cuenta que la tarea inicialmente propuesta se alejaba del interés investigativo se continuó trabajando en una tarea que cumplieran las pretensiones del presente trabajo. Para ello, se pensó en una tarea que siguiera estando enmarcada en el dominio estadístico que aparte de manejar el mismo registro semiótico no relacionara conceptos diferentes ni realizara conversiones. En virtud de ello, se mantuvo el mismo contexto «*consumo de agua*» e «*interpretación de gráficos estadísticos*». Se planteo una tarea que cumpliera con los anteriores criterios para tal fin, se decidió trabajar con un solo gráfico [de barras] uno con números fraccionarios y otro con números enteros, reconociendo la no existencia de tratamientos «puros», pues en la mayoría de los casos se requiere usar el lenguaje natural como registro auxiliar para explicar y, posiblemente, comprender y ejecutar los tratamientos requeridos. La tarea se presenta a continuación:

Consumo de agua

Durante el último trimestre del año 2018 una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m^3 de consumo de agua. De este consumo trimestral $\frac{9}{20}$ correspondió al mes de octubre, $\frac{4}{20}$ correspondió al mes de noviembre y $\frac{7}{20}$ correspondió al mes de diciembre.

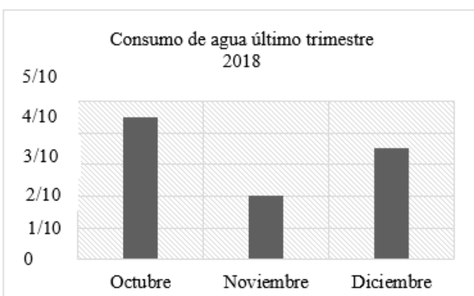


Gráfico A

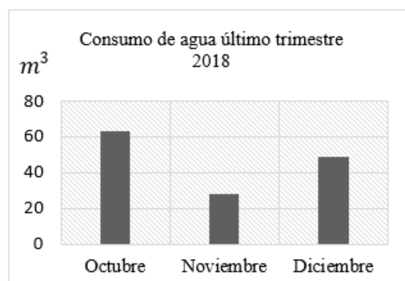


Gráfico B

El gráfico que representa la información del consumo de agua en el último trimestre es: [Marque con una x la opción u opciones correctas]

( ) El gráfico A
( ) El gráfico B
( ) Los gráficos A y B
( ) Ninguno de los dos gráficos.

[17] Mejía, G y Rojas, P. (2020). Interpretaciones y Equivalencia de Gráficos Estadísticos. Un estudio con profesores de matemáticas. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16* (60), 155-176.

La tarea fue piloteada en el segundo semestre del 2019, con 8 profesores que tenían a su cargo la asignatura de matemáticas en diferentes niveles de secundaria, los resultados obtenidos permitieron precisar la consigna «*el gráfico que representa la información del consumo de agua en el último trimestre es*», así como, la relación de un año específico que anteriormente estaba asociado a un intervalo de tiempo próximo. Incorporadas estas modificaciones se procedió a realizar un cuarto pilotaje con 8 profesores, en el que se centró la mirada en la efectividad de los ajustes realizados, arrojando la tarea final que se explica en el apartado sobre diseño y selección de los cuestionarios que se relacionan en el presente capítulo.

La misma dinámica se implementó con las otras situaciones que fueron abordadas por los profesores: secuencia de números cuadrados, cálculo de la probabilidad, interpretación de la ecuación e interpretación de expresiones algebraicas, situaciones que habían sido trabajadas por D´Amore (2006) y Rojas (2012). Las tareas fueron propuestas a 16 profesores en el segundo semestre del 2018. En el caso de la tarea sobre la secuencia de números cuadrados el interés no recayó en establecer la cantidad de puntos en una determinada posición o que se llegara a una posible generalización de la secuencia por parte de los profesores, sino en que ellos identificaran la equivalencia que subyace en la transformación de tratamiento, específicamente entre la secuencia de números cuadrados [potencias] y la secuencia de la suma de números impares.

Frente a la tarea que indaga por las interpretaciones de las expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ que fue trabajada por D´Amore (2006b) y Rojas (2012) con números enteros ($n \in$ Z), para el caso particular del presente estudio fue modificada, puesto que, en el caso de Colombia algunos profesores de primaria no cuentan con una formación en educación matemática, en relación a los números enteros como sistema numérico; con base a ello, se optó por trabajar la misma tarea con el grupo de profesores de primaria, pero con números naturales ($n \in$ N). Al realizar estas modificaciones y al trabajar la situación con 7 profesores, los resultados obtenidos permitieron tomar decisiones que demarcaron el rumbo de la presente investigación, por un lado, se definió ejecutar un estudio de caso con una población de mínimo 50 profesores, divididos en dos grupos [primaria y secundaria] con la particularidad de tener a cargo la asignatura de matemáticas en diferentes niveles educativos. Por otro lado, dada la diversidad en la formación académica de los profesores de primaria, se optó trabajar con 4 tareas específicas para los dos grupos, 3 comunes y 1 específica de acuerdo al nivel académico; en particular, la tarea sobre la interpretación de la expresión de la ecuación $\mathrm{x}^2+y^2+2xy-1=0$, fue aplicada al grupo de profesores de secundaria y la tarea de secuencias de números cuadrados fue aplicada sólo al grupo de primaria.

Con base a los resultados en los diferentes pilotajes realizados a las tareas y las características en la formación matemática en los dos grupos de profesores, se tomó la decisión de proponer en total 5 tareas diferentes, divididas en dos grupos, con el fin de contar con producción de los profesores en 4 contextos diferentes; con el grupo de primaria se trabajó 4 tareas [cálculo de probabilidad, interpretación de expresiones algebraicas, interpretación de gráficos estadísticos y secuencia de números cuadrados].Con el grupo de profesores de secundaria se trabajó 4 tareas [interpretación de expresiones algebraicas, interpretación de gráficos estadísticos e interpretación de ecuaciones]. Como se mencionó en el primer capítulo, se pretende indagar sobre las posibles dificultades que encuentran los profesores para articular los sentidos asignados a objetos matemáticos y contrastar dichas dificultades con las que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas y que han sido reportadas en la literatura, para alcanzar dicho objetivo se tomaron algunos cuestionarios que fueron trabajados por estudiantes de educación básica y media, documentados y Rojas (2012) y D´Amore (2006b).

4.4.1. Interpretación de Expresiones Algebraicas. Esta situación es basada en la experiencia reportada por D'Amore (2006b) y Rojas (2012) propuesta a los dos grupos de profesores, dada el conocimiento matemático de los dos grupos de profesores [primaria -secundaria]. Con relación a la cercanía de los profesores de primaria con el conjunto numérico de los naturales, y para el grupo de secundaria se abordó la misma tarea en el conjunto numérico de los enteros. Se presentó la tarea mediante el siguiente cuestionario, compuesto de cuatro ítems:

Interpretación de expresiones algebraicas

Asuma que n representa un número natural cualquiera / n representa un número natural cualquiera

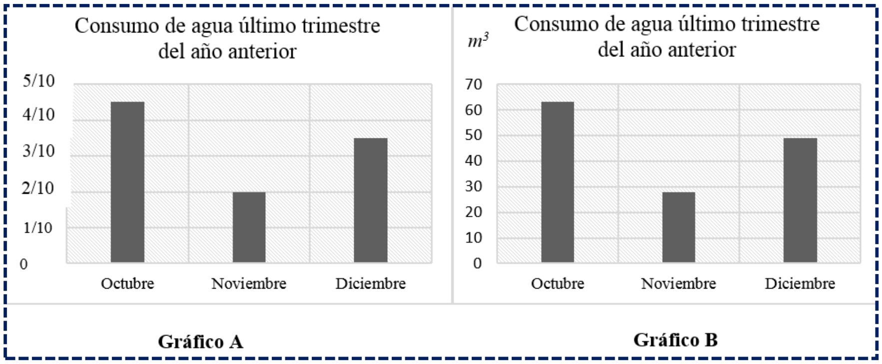
1. Diga qué significa o qué interpretación le asigna usted a la expresión $3n$
2. Diga qué significa o qué interpretación le asigna usted a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$
3. (a) ¿Qué relación hay entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la expresión $3n$?
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.
4. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como ***el triple de un número****?*
   (a) Marque con una X su respuesta:
   ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta

La tarea contenía 4 ítems. Los dos primeros ítems indagan por la interpretación o significado asociado por los profesores a dos representaciones [expresiones algebraicas] de un mismo objeto, la tercera pregunta buscó indagar si reconocen o no la equivalencia sintáctica entre las dos representaciones dadas, es decir, si los profesores aplican los tratamientos necesarios para obtener una representación a partir de la otra, por ejemplo, dada la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ obtener $3n$, en el cuarto ítem se indaga si los profesores asocian $(n-1)+n+(n+1)$ con $3n$ [equivalencia semántica].

4.4.2. Interpretación de Gráficos Estadísticos. Esta tarea fue abordada por los 64 profesores que conforman la población de estudio; presentada mediante el siguiente cuestionario.

Consumo de agua

En el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m^3 de consumo de agua. De este consumo $\frac{9}{20}$ correspondió al mes de octubre, $\frac{4}{20}$ correspondió al mes de noviembre y $\frac{7}{20}$ correspondió al mes de diciembre.



a) Marque con una equis (**X**) la opción o las opciones correctas:

( ) El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Ninguno de los dos gráficos representan la información del consumo de agua en el último trimestre.

(b) Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Los profesores debían marcar con una X la opción que consideraban correcta y justificar la elección sobre el (o los) gráfico(s) que representaba el consumo de agua en el último trimestre de la vivienda. Se considera que la tarea permite establecer lo que se ha denominado equivalencia contextual entre gráficos, definida como la capacidad que tienen los sujetos para identificar la misma información en estos. En correspondencia con la teoría de transformaciones semióticas propuesto por Duval (2002) se asume que del lenguaje natural [enunciado de la tarea] a los gráficos de barras A y B, se tiene una transformación semiótica de conversión y del grafico de barras A al B, se tiene una transformación semiótica de tratamiento. Así mismo, esta tarea permitió identificar las interpretaciones que otorgan los profesores a diagramas estadísticos y posibles dificultades que encuentran éstos para establecer la equivalencia entre la información suministrada en cada representación.

4.4.3. Cálculo de la Probabilidad. Se aplicó a los dos grupos de profesores, basada en la experiencia reportada por D'Amore (2006b) y Rojas (2012) se pide calcular la probabilidad de un evento aleatorio presentada mediante el siguiente cuestionario:

Cálculo de probabilidad

1. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
   (a) La probabilidad es:
   (b) Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad:
2. ¿La anterior probabilidad se podría representar con la expresión $1/2$?
   (a) Marque con una equis (X) su respuesta
   Sí ( ) No ( )
   (b) Justifique a continuación.
3. ¿La probabilidad se podría representar con la expresión $4/8$?
   (a) Marque con una equis (X) su respuesta
   Sí ( ) No ( )
   (b) Justifique a continuación.

En el primer ítem de la tarea corresponde a una pregunta abierta en relación al cálculo de la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par; en el segundo ítem, la pregunta es cerrada, se indaga si la probabilidad pedida se puede expresar por medio de la fracción $1/2$; el tercer ítem corresponde a una pregunta cerrada que indaga si la probabilidad se puede expresar mediante la fracción $4/8$. Frente al reconocimiento de la igualdad de las fracciones en el segundo, se indaga por la equivalencia sintáctica entre las fracciones $1/2$, $3/6$. y $4/8$; en el tercer ítem no solo se indaga por el reconocimiento de la equivalencia sintáctica entre las fracciones, sino la equivalencia semántica entre dicha expresiones.

4.4.4. Secuencia de Números Cuadrados. Se aplicó al grupo de 32 profesores de primaria, adaptada en la experiencia reportada por D'Amore (2006b) se presentó la tarea mediante el siguiente cuestionario:

Secuencia de números cuadrados

Un *número cuadrado* es aquel que se puede expresar como el cuadrado de otro número entero positivo como se muestra en la siguiente secuencia:

$$\mathbf{1^2, 2^2, 3^2, 4^2}, \ldots$$

Diga si la anterior secuencia de *números cuadrados* puede ser representada como una "*suma de números impares*": **1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, …**

(a) Marque con una **X** su respuesta:

Sí ( ) ***No*** ( )

(b) Justifique a continuación su respuesta

Con la aplicación de la tarea se buscó indagar si los profesores admitían que una potencia puede ser expresada por medio de una suma.

4.4.5. Interpretación de Ecuaciones. Se aplicó al grupo de 32 profesores de secundaria basada en la experiencia reportada por D'Amore (2006b) y Rojas (2012) con estudiantes, se presentó la tarea mediante el siguiente cuestionario:

Interpretación de ecuaciones

En lo que sigue, asuma que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$$

2. ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$?
   (a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta:
   ***Sí* ( )** ***No* ( )**
   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple.
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente (ítem 1), y luego respóndala.

   ¿La ecuación $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$, es ______________________________ ?

   (a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta:

   ***Sí* ( )** ***No* ( )**

   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

En la tarea se indaga por la interpretación otorga a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$, si esta ecuación es equivalente a $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$, y si esta última coincide con la interpretación realizada inicialmente a la ecuación $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{xy} - 1 = 0$.

CAPÍTULO 5
LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y LA SOLUCIÓN A TAREAS DE TRATAMIENTO

En este capítulo se realiza un análisis general de las producciones realizadas por 64 profesores de matemáticas organizados en dos grupos, 32 de primaria y 32 de secundaria. Se presentan algunos argumentos extraídos de las soluciones realizadas a las tareas propuestas, se organizan las respuestas en rejillas que sintetizan y dejan en evidencia los diferentes razonamientos y explicaciones dadas por los profesores resaltando los sentidos asignados a las representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento, seguidamente se muestra una serie de gráficas y diagramas que abrevian los rasgos sobresalientes en la solución de cada tarea.

5.1. Grupo de Profesores de Primaria. Con el grupo de profesores de primaria se trabajaron cuatro tareas: i) interpretación de expresiones algebraicas, ii) interpretación de gráficos estadísticos, iii) cálculo de la probabilidad y iv) secuencia de números cuadrados. A continuación, se presenta las producciones realizadas por los profesores a cada tarea.

5.1.1. Tarea 1: Interpretación de Expresiones Algebraicas. En esta tarea el profesor debía asumir que n representaba un número natural cualquiera, en el primer ítem se indaga por las diferentes interpretaciones o significados que hace a la expresión $3n$. Del grupo de los 32 profesores que abordaron la tarea: 3 profesores manifiestan no saber la interpretación de la expresión; 2 resaltan que ésta puede ser interpretada como los múltiplos de tres; 7 como tres veces cualquier número; 4 aluden que es el triple de un número y 16 profesores que significa el producto o la multiplicación de tres por cualquier número. Las producciones de los profesores muestran que la expresión $3n$ es relacionada con términos como triple, 3 veces un número, múltiplos, multiplicación o producto; interpretaciones que corroboran los planteamientos de Font (2002) quien plantea que un concepto matemático tiene diferentes referencias y un objeto matemático puede ser definido de diversas formas que relaciona nociones diferentes.

El segundo ítem indaga por el significado o la interpretación que hacen los profesores a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$; 2 profesores no realizan una interpretación de ésta; 5 expresan que es un número cualquiera al que se le resta uno y se le suma uno [correspondencia entre el lenguaje simbólico con el lenguaje natural]; 4 la relacionan con la propiedad asociativa o distributiva de la suma; 3 con la suma de tres números consecutivos; 4 manifiestan que es una operación matemática o combinada que involucra resta y suma; 1 profesor explicita que es una expresión que relaciona el antecesor y el sucesor de un número; 5 que significa el triple de un número; 2 argumentan que ésta ópera términos semejantes; 3 no realizan una interpretación explicita [realizan los cálculos respectivos dando un valor numérico a la letra n]; y 2 profesores la relacionan con una secuencia o una ecuación. Los resultados muestran que la expresión $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ es relacionada con referencias como: operación combinada, triple de un número, secuencia, ecuación, operación matemática, etc.

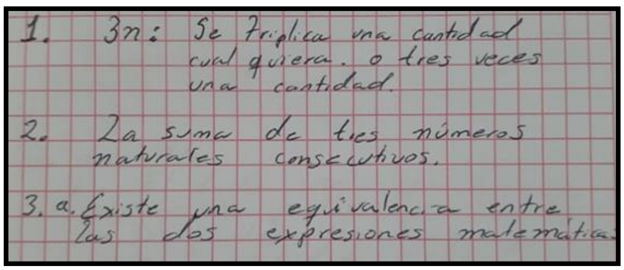
El tercer ítem indaga por el reconocimiento de la equivalencia a las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, se pide a los profesores que expliciten la relación entre ambas, frente a ello: 13 profesores expresan que es una igualdad y que en ambos casos se obtiene el mismo resultado; 4 manifiestan que existe una equivalencia entre las dos expresiones matemáticas; 6 exponen que en las dos existe una variable que toma un valor numérico o que en ambas expresiones la n es común; 3 no admiten la equivalencia sintáctica, puesto que, aluden que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ indica sumar tres números consecutivos [diferentes] y en la expresión $3n$ el triple de un número que corresponde al mismo número; 2 profesores otorgan un valor especifico a n, como 5 y 3, que permite obtener el mismo resultado en ambos casos; y 4 expresan que en ambas existen operaciones básicas [suma, resta, multiplicación] que deben ser resueltas y llegar al mismo resultado.

Finalmente, se indaga si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el *triple de un número*. En este ítem no se tienen en cuenta las producciones de 7 profesores que no realizan la interpretación de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ o $3n$, o no expresan la relación entre ambas. En total se presentan los argumentos dados por 25 profesores: 15 escriben que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ si puede ser interpretada como el triple de un número, debido a que, en ambas expresiones se obtienen el mismo resultado, las producciones realizadas muestran que el cálculo y la verificación numérica es un elemento importante para que algunos profesores cambiaran la percepción inicial y aceptaran la equivalencia entre ambas escrituras, tal y como se manifiesta en el siguiente argumento «*inicialmente pensé que no tendrían relación, pero decidí probar mi suposición y vi que si hay una clara relación y si podría interpretarse como el triple de un número. Pensé en las operaciones de suma y multiplicación por separado y por eso no podría reconocer una relación*»; 10 profesores aluden que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, no puede ser interpretada como el triple de un número dado que las dos expresiones modelan situaciones diferentes.

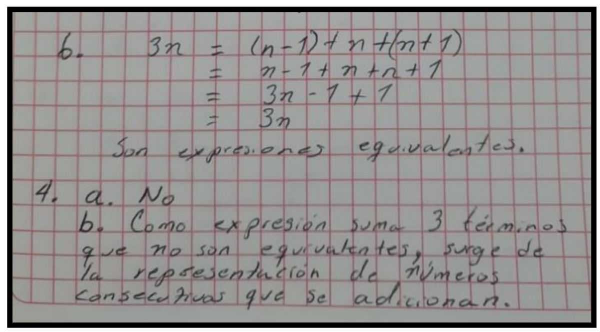
En relación con la articulación de las perspectivas **semántica** y **sintáctica**, 3 profesores no aceptan la equivalencia entre ambas expresiones y 25 profesores aceptan la igualdad sintácticamente entre ambas, algunos realizan un tratamiento numérico que les posibilita reconocer la equivalencia. Pese a que algunos profesores reconocen la igualdad entre ambas expresiones desde el aspecto **sintáctico** que, a su vez les permite corroborar la equivalencia, para 10 de los profesores este hecho no fue suficiente en tanto no admiten que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el *triple de un número* debido a que, algunos profesores asocian con objetos matemáticos o situaciones diferentes las expresiones; 15 profesores aceptan la equivalencia desde el aspecto **semántico** y **sintáctico**. La siguiente producción realizada por una profesora muestra que pese a reconocer la equivalencia entre las expresiones desde el aspecto **sintáctico;** el aspecto **semántico,** impide que se admita que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y ésta sea interpretada como *el triple de un número*, en tanto, representa situaciones diferentes. Tal y como se evidencia en la siguiente solución realizada por la profesora de primaria-C.

Figura 23

Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas- Producción de la Profesora Primaria-9



1. 3n: Se triplica una cantidad cual quiera. o tres veces una cantidad.
2. La suma de tres números naturales consecutivos.
3. a. Existe una equivalencia entre las dos expresiones matemática.



6. $3n = (n-1)+n+(n+1)$
$= n-1+n+n+1$
$= 3n-1+1$
$= 3n$
Son expresiones equivalentes.
4. a. No
b. Como expresión suma 3 términos que no son equivalentes, surge de la representación de números consecutivos que se adicionan.

La siguiente tabla muestra una síntesis de las producciones realizadas por el grupo de 32 profesores de primaria. Se emplea *«primaria-#»* seguido de un número que remplaza el nombre del profesor, la misma notación se usa en las cuatro tareas para referir la misma persona. En la rejilla se resaltan en gris 7 profesores que no dan una interpretación a algunas de las dos expresiones o no establecen la relación entre ambas. En color verde se resaltan 10 producciones que corresponden a los profesores que no realizan una articulación semiótica, esto es que no relacionan entre sí dos sentidos asignados a las expresiones o no relacionan el significado parcial s**intáctico** con el s**emántico**, fenómeno que hace que cada expresión sea relacionada con objetos matemáticos o situaciones diferentes.

Tabla 12

Tarea 1. Interpretación de las Expresiones Algebraicas. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Primaria

Docente/Ítem	1.Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $3n$	2. Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué Relación Hay Entre la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la Expresión $3n$?	4. ¿La Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ ¿Puede Interpretarse Como el Triple de un Número?
Primaria- 1	Multiplicar a 3 por un número desconocido.	Multiplicar a tres	Una igualdad	Sí, en ambas situaciones dan el mismo resultado.
Primaria- 2	Triple de un número. $n = 5$	Da un valor $n = 5$	Comprueba la igualdad.	Sí, en ambas situaciones dan el mismo resultado.
Primaria- 3	Cualquier número natural tres veces.	A un número cualquiera se le resta 1 luego se hace lo mismo con la suma y luego se suma todo.	Son expresiones que se agrupan y llegan al mismo resultado.	No, ya que n puede ser cualquier número natural y no necesariamente indica el triple.
Primaria- 4	El triple de un número	La suma tres números consecutivos.	Tienen en común n.	No, porque $n+1) \neq n \neq (n-1)$
Primaria- 5	Tres se multiplica por n. 3 veces n.	Una suma donde se aplica la distribución de n.	Establecer la misma ecuación y despejar la igualdad.	Sí, puede representarse como el triple de un número.
Primaria- 6	3 veces el número n.	Operación matemática que involucra resta y suma.	Se obtiene el mismo resultado	Sí, el 1 que se resta al inicio de la operación se suma al final.
Primaria- 7	Producto entre 3 y otro natural.	La suma de tres números consecutivos.	En una expresión se suman tres números consecutivos y en el otro se busca el triple de un número.	Sí, puede representarse como el triple de un número ya que da el mismo resultado.
Primaria- 8	Seria 3 veces algo (...)	Realiza las operaciones con $n = 2$	Realiza las operaciones con $n = 6$	Sí, $n = 6$ equivale al triple ya que la expresión es una igualdad.
Primaria- 9	Se triplica una cantidad cualquiera.	La suma de tres números consecutivos.	Existe una equivalencia entre dos expresiones matemáticas.	No, como expresión sumo 3 términos que no son equivalentes, [consecutivos].
Primaria- 10	Significa que un número natural cualquiera es multiplicado por 3. Tres es una constante	Una ecuación que reemplaza términos.	n es un número natural que puede ser reemplazado en las dos expresiones.	No, considero el triple de un número se relaciona con una multiplicación y en la otra se adiciona.
Primaria- 11	n multiplicado por 3.	Una suma.	Ninguna relación $3n$ es una multiplicación y la segunda una suma.	No, en la primera se multiplica y en la segunda se suma.
Primaria- 12	Significa una multiplicación donde 3 es un número natural.	Polinomio donde se aplica la propiedad asociativa.	Toman la misma letra como variable.	Sí, al hacer los cálculos se puede interpretar como el triple de un número.
Primaria- 13	Significa el triple de cualquier número natural.	Triple de un número.	Al reemplazar n por cualquier número natural en la expresión dada.	Sí, en ambas expresiones se obtiene el triple de un número.
Primaria- 14	Un número natural cualquiera se multiplica por 3.	Primero le resta 1, luego le suma el número y luego el siguiente de ese número.	Al realizar la ecuación es una relación de igualdad.	No, el triple se interpreta como tres veces el mismo número y en este caso no se suma el mismo número.
Primaria- 15	El número 3 multiplicado por otro número natural.	Hace referencia a la propiedad asociativa de la suma y resta.	n es el mismo número en ambas expresiones	Sí, al desarrollar la operación se obtiene el mismo resultado.
Primaria- 16	Todos los múltiplos del número 3.	Triple de un número.	Son equivalentes.	Sí, realiza las operaciones indicadas.
Primaria- 17	Multiplicar el número natural por 3.	Es una expresión algebraica en la que se reduce los términos semejantes.	Son equivalentes.	Sí, realiza las operaciones indicadas.

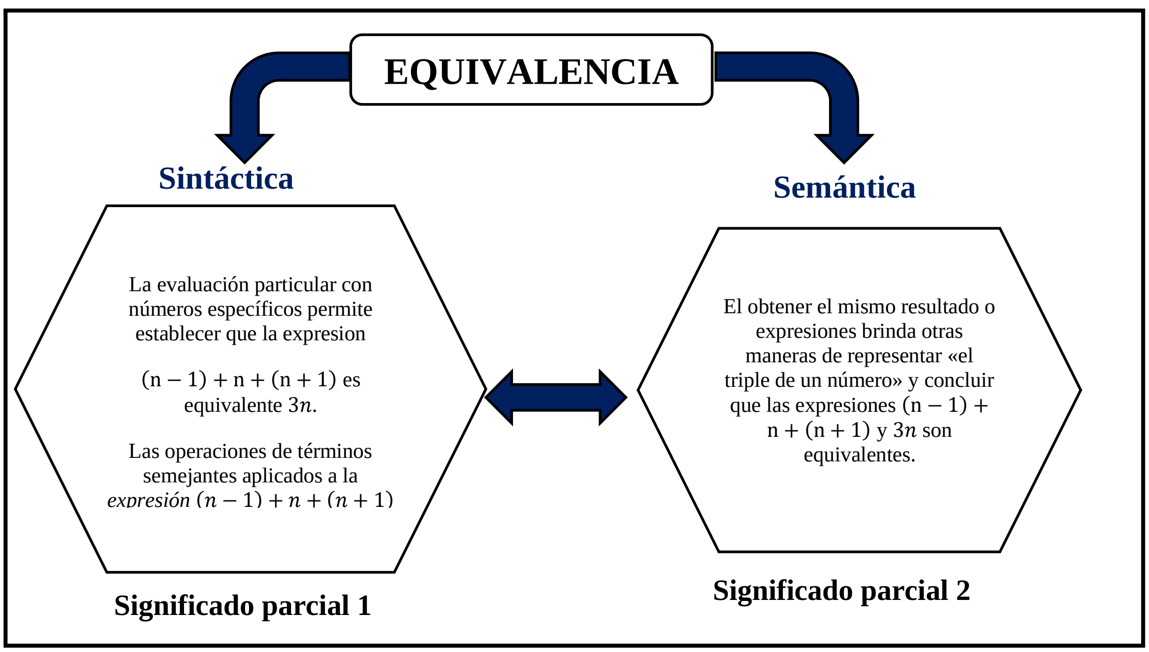
Docente/Ítem	1.Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $3n$	2. Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué Relación Hay Entre la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la Expresión $3n$?	4. ¿La Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ ¿Puede Interpretarse Como el Triple de un Número?
Primaria- 18	3 veces un número cualquiera o 3 veces un número dado.	Secuencia numérica.	Ninguna son expresiones matemáticas diferentes.	Sí, son operaciones diferentes donde se obtiene el mismo resultado.
Primaria- 19	No sabe, no responde	Operaciones matemáticas. Realiza las operaciones con $n=2$.	Podemos multiplicar el valor dado por las cantidades que tenemos.	Sí, porque se obtiene el mismo resultado.
Primaria- 20	Tres veces el número natural indicado.	Una de las propiedades aditivas como la conmutativa.	En ambos casos hay operaciones por realizar.	Sí, al realizar las operaciones indicadas se obtiene el mismo resultado.
Primaria- 21	No sabe, no responde	Un ejercicio en el cual se aplica paréntesis.	Operaciones aditivas que al simplificar se obtiene el mismo resultado.	No, en la segunda expresión se tiene una operación aditiva.
Primaria- 22	Multiplicación ya que en matemáticas el número que acompaña una letra la multiplica.	Tres veces un número.	Se relaciona porque $3n$ es resultado en la segunda operación.	No, el triple de un número es el resultado de sumar tres veces el mismo número.
Primaria- 23	3 veces un número natural.	Múltiplos de 3.	Agrupación de términos semejantes.	Sí, al agrupar términos semejantes.
Primaria- 24	Múltiplos de 3.	Un número disminuido en 1, más ese #, más el mismo # aumentado en 1.	Es una igualdad.	Sí, al desarrollar la operación se obtiene $3n$.
Primaria- 25	Triple de un número (...)	Operaciones combinadas de naturales, donde n representa un natural cualquiera.	Según los procedimientos anteriores representan el mismo número. La misma función	Sí, se puede interpretar como el triple de un número siempre y cuando n sea una variable.
Primaria- 26	El número 3 veces	El número menos 1, un número más la suma del número más 1.	$n=3$ Realiza la operación.	No, sabe no responde.
Primaria- 27	3 veces el número.	Establece una unidad menor y una unidad mayor a n dado y crea entre ellos una suma de cantidades.	$3n$ es el resultado de resolver la ecuación.	No, porque n puede ser cualquier número.
Primaria- 28	Triple de un número (...).	Se establece una unidad que se le retas uno y se le suma uno.	En ambos existe una variable que toma un valor numérico en una hay una adición del mismo número y la otra la suma de números diferentes.	No, cuando se trata del triple de un número se refiere al mismo número.
Primaria- 29	No sabe, no responde.	No sabe, no responde.	Que la expresión $3n$ esta inmensa en la ecuación dada.	No, según la representación dada en $3n$ tengo el mismo número.
Primaria- 30	Tres veces n	El número antecesor y sucesor de n se están adicionando n.	En una se suman tres números consecutivos mientras $3n$ es la abreviación del número.	No, porque al decir el triple de un número se habla de un mismo número.
Primaria- 31	Tres veces el número n. Lineal	Realiza los cálculos $n=1,\ n=2$.	Son equivalentes	No, desde mi perspectiva se están sumando el antecesor, sucesor y el número.
Primaria- 32	Tres veces el número (...).	Darle un valor n a cada operación.	En una los números son diferentes y otra el triple de un número.	No, en la segunda expresión la n toma diferentes valores.

Para el caso particular de esta tarea, las repuestas de 7 profesores se consideran erróneas en tanto, no realizan la interpretación de algunas de las expresiones o no reconocen la equivalencia desde su aspecto sintáctico. Con base en el objetivo de investigación se tiene una población de 10 profesores que no relacionan los dos sentidos asignados entre sí, o no logran articular el significado parcial **sintáctico** con el **semántico**. Los resultados muestran que la evaluación con un número particular y las operaciones de términos semejantes, permite que algunos profesores relacionen entre sí los sentidos asignados a las expresiones [articulación semiótica] y establecer la equivalencia [sintáctica-semántica]. Por otra parte, las producciones de los profesores posibilitan identificar una serie de prácticas matemáticas desde el aspecto **sintáctico** y **semántico** que deben ser articulados entre sí, con el fin de tener una noción de la equivalencia más sólida.

1. **Equivalencia sintáctica**: la evaluación particular con un número especifico o la operación de términos semejantes permite establecer que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son iguales.
2. **Equivalencia semántica**: permite evidenciar que existen diferentes maneras de representar un mismo número como el caso de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ en que se puede obtener $3n$ y ser interpretada como el «*triple de un número*». Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al., (2017) se reconoce que la complejidad de la equivalencia expresiones algebraicas requiere del aspecto **sintáctico** y **semántico,** así como su necesaria articulación, por otro lado, se describe desde el EOS estos significados parciales en términos de prácticas. Tal y como se muestra en la siguiente figura:

Figura 24

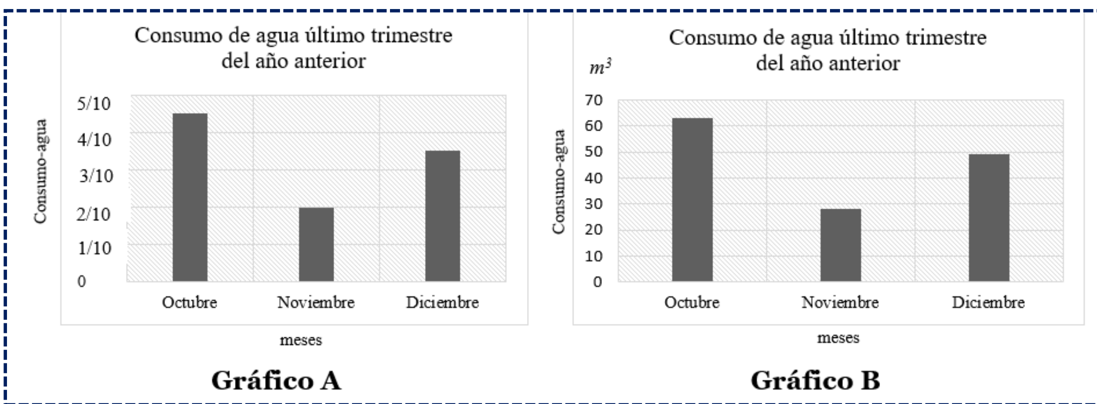
Articulación de los Dos Significados Parciales Sintáctico y Semántico Implícita en la Equivalencia entre las Expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ *y* $3n$



Fuente. Adaptado de Chalé-Can et al. (2017)

En la figura anterior el *significado parcial 1,* refiere al aspecto **sintáctico** y el *significado parcial 2,* describe al aspecto **semántico** asumidos como los significados personales o los *«sentidos»* asignados por los profesores a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento. En consecuencia, con los planteamientos realizados por Font y Ramos (2005, como se citó en Rojas, 2012) en este trabajo se asume que el «sentido» es asociado más a lo contextual e incluso a lo volátil. Cada contexto ayuda a generar sentido, aunque no todos los sentidos posibles. Los resultados muestran que la evaluación particular con un número específico o la operación de términos semejantes fue el primer paso para establecer una *equivalencia sintáctica*. Para algunos profesores, pese a reconocer que se obtiene el mismo resultado en ambas expresiones [sintáctica], desde el aspecto **semántico** no es admitida la equivalencia entre las expresiones, tal y como se mostró en las producciones realizadas por los profesores frente a la tarea, en tanto, las expresiones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Los resultados dejan en evidencia que para admitir la equivalencia desde los aspectos **sintáctico** y s**emántico** se requiere la articulación de estos dos significados parciales [sintáctico/semántico] que posibilita relacionar los sentidos asignados entre sí de un mismo objeto matemático.

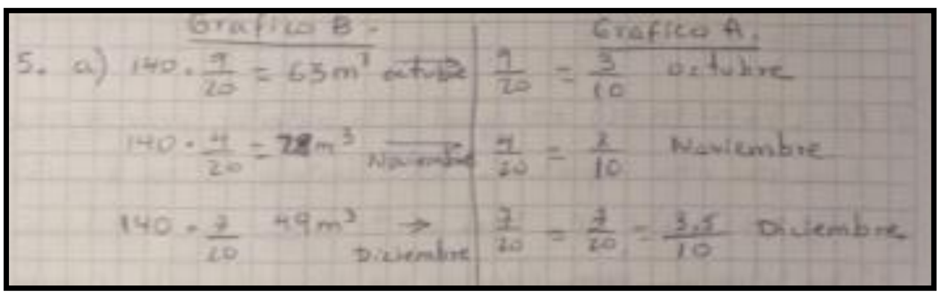
5.1.2. Tarea 2. Interpretación de Gráficos Estadísticos. Se presenta el consumo de agua que registra una vivienda ubicada en el sur de Bogotá en el último trimestre del año anterior, se explicita que de este consumo $9/20$ corresponde al mes de octubre, $4/20$ al mes de noviembre y $7/20$ al mes de diciembre. Se presenta la información por medio de los gráficos de barras A y B, tal y como se muestra a continuación.

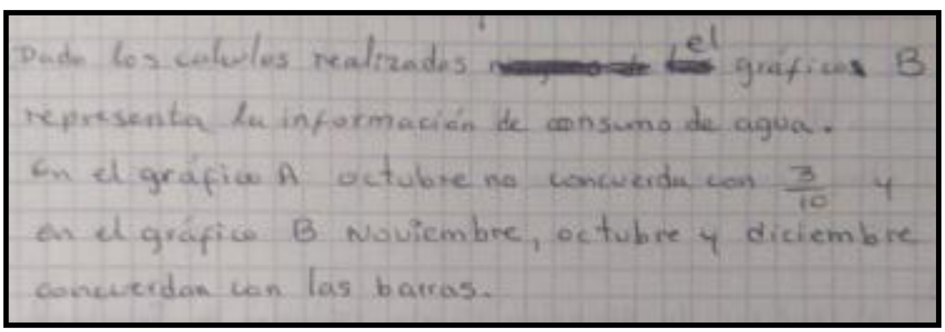


Con base en la definición de tratamiento, en el que se mantiene el mismo registro semiótico, se presentó la información en un solo registro semiótico [gráfico de barras], en el gráfico de barras A, se emplean en uno de sus ejes números fraccionarios y en el B, números enteros. Los profesores debían decidir y justificar si: a) el gráfico A representa la información, b) gráfico B, c) los gráficos A y B, o d) ninguno de los dos gráficos representa el consumo de agua en el último trimestre de la vivienda. Con relación a las respuestas dadas por los 32 profesores: 18 reconocen que los gráficos A y B, representan la información suministrada en el enunciado de la tarea, algunos realizan los cálculos que les permite establecer el número entero dado en el gráfico B, con la fracción relacionada en el enunciado, simplifican las fracciones dadas en el gráfico A, para corroborar que las fracciones coinciden con las dadas en el enunciado; 3 profesores aluden que ninguno de los dos gráficos representan la información, en tanto, las fracciones en el gráfico A, al no estar simplificadas no coinciden con los valores dados en el enunciado de la tarea y no establecen los valores [número entero] que corresponde a la fracción de consumo presentado en el grafico B; 4 profesores expresan que el gráfico A, representa la información suministrada en el enunciado, puesto que, al simplificar por dos las fracciones del gráfico A, los resultados coinciden con las fracciones relacionadas en el enunciado; 8 profesores eligen el gráfico B, establecen el número entero que corresponde a las fracciones de consumo de cada mes en metros cúbicos (m^3). Se evidencia que algunos profesores realizan los respectivos cálculos matemáticos que les permiten aceptar la equivalencia contextual entre los gráficos y el enunciado de la tarea, pero gran parte de los profesores se inclinan por el gráfico B, en tanto, explicita la magnitud de medida (m^3) y permite visualizar la variabilidad del consumo mes a mes. Tal y como se evidencia en la siguiente solución.

Figura 25

Tarea Interpretación de Gráficos Estadísticos- Producción del Profesor Primaria-14





La tabla 13 muestra una síntesis de las producciones realizadas por los profesores de primaria frente a la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos y equivalencia contextual de gráficos estadísticos, se resaltan en amarillo aquellos profesores que eligen uno o ninguno de los dos gráficos.

Tabla 13

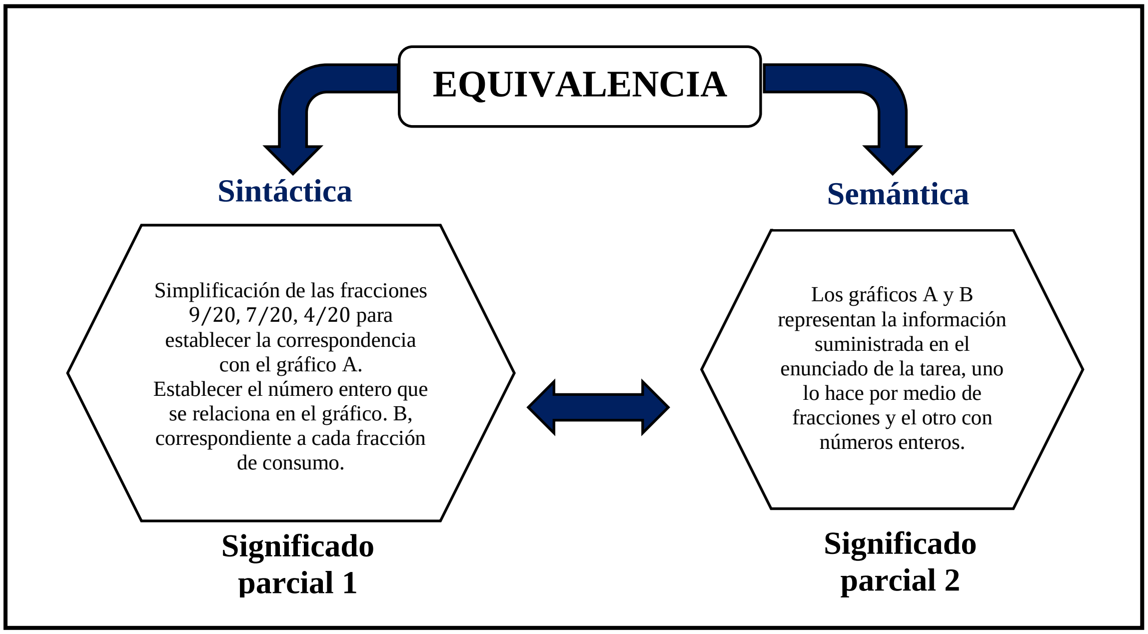
Tarea 2. Interpretación de Gráficos Estadísticos. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Primaria

Docente	Gráfico que Representa la Información Suministrada.	Docente	Gráfico que Representa la Información Suministrada
Primaria-1	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-17**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-2	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-18**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-3	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-19**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-4	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-20**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
Primaria-5	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-21**	El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-6	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-22**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-7	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-23**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-8	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-24**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-9	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-25**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-10	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-26**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-11	El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-27**	Ninguno de los dos gráficos representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-12	El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-28**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-13	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-29**	Ninguno de los dos gráficos representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-14	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-30**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Primaria-15	El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Primaria-31**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
Primaria-16	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Primaria-32**	Ninguno de los dos gráficos representa la información del consumo de agua en el último trimestre

Para esta tarea se tiene una población de 15 profesores quienes eligen el gráfico A, gráfico B o ninguno de los dos gráficos. Frente a lo que hemos denominado equivalencia contextual de gráficos estadísticos, asumida como la capacidad que tienen los profesores en reconocer la misma información presentada en diferentes representaciones, se evidencia que el tratamiento numérico, como la simplificación de las fracciones $9/20$, $7/20$, $4/20$, y el establecer el número entero correspondiente a cada fracción que se relaciona en el enunciado [equivalencia sintáctica] fue el primer paso para establecer que el gráfico A y B, representa la información presentada en el enunciado de la tarea y concluir que contextualmente los dos diagramas presentan la misma información [equivalencia semántica]. Tal y como se evidencia en la figura 26.

Figura 26

Articulación de los Dos Significados Parciales Sintáctico y Semántico Implícita en la Equivalencia Entre Gráficos Estadísticos



Fuente. Adaptado de Chalé-Can et al. (2017)

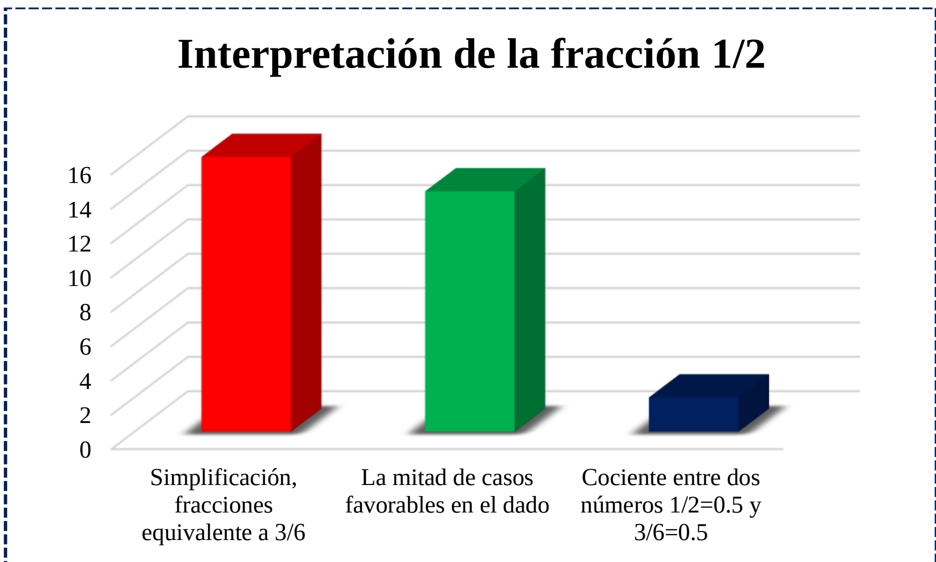
Con relación del componente **sintáctico,** la simplificación de fracciones y el cálculo del número entero correspondiente a la fracción de consumo en cada mes, permiten concluir que desde el significado parcial 2 [semántico] los gráficos brindan la misma información y con ello establecer la equivalencia contextual entre las tres representaciones.

5.1.3. Tarea 3. Cálculo de la Probabilidad. Se pide calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par. Ante la situación propuesta, 13 profesores manifiestan que la probabilidad es 3, en tanto el dado tiene 6 caras y 3 números pares (2, 4, 6); 6 profesores aluden que la probabilidad es del 50% debido que, el dado tiene 6 opciones y los números pares e impares pueden tener la misma probabilidad; 3 expresan que la probabilidad es de $1/2$ puesto que, se tienen 6 opciones en total, con dos posibilidades [la mitad de pares y la mitad de impares]; 1 profesor manifiesta que la probabilidad es $3/6$ casos favorables sobre casos posibles. Aunque en este ítem no se solicita que se exprese la probabilidad por medio de más de una representación, 13 profesores representan la probabilidad empleando diferentes notaciones: 3 la representan mediante las expresiones $3/6 = 1/2$ puesto que, el dado tiene 6 casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6) y sólo 3 son favorables (2, 4, 6); 1 profesor manifiesta que la probabilidad es de $3/6 = 50\%$ ya que, el dado tiene 6 caras de las cuales 3 corresponden a números pares, es decir, la mitad de caras; 1 profesor la expresa como $1/2 = 0.5$, manifiesta que se sabe que la probabilidad de ocurrencia de un suceso es 1, y 3 profesores emplean cuatro representaciones $3/6 = 1/2 = 50\% = 0.5$, enuncian la definición de Laplace de probabilidad [número de eventos favorables sobre el total de posibilidades]. Algunos profesores recurren a la representación icónica del dado [dibujo], otros escriben el espacio muestral *«los números pares que hay en un dado son 2, 4, 6 y hay 6 números 1, 2, 3, 4, 5 y 6»*.

El segundo ítem indaga si la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción $1/2$, de los 32 profesores se tiene: 16 manifiestan que sí, debido a que, al simplificar $3/6$ se obtiene $1/2$; otros argumentan que hay 3 casos favorables de 6 posibilidades y por la definición de probabilidad se escribe la fracción 3/6, que al simplificar se obtiene $1/2$; 14 expresan que si puede ser representada mediante $1/2$, ya que, tiene la misma probabilidad de obtener un número par e impar, [mitad de posibilidades]; 2 profesores manifiestan que sí, debido a que al dividir los números pares con el total de casos, [tres sobre seis], conociendo que la ocurrencia de un suceso debe ser menor que 1, se obtiene el mismo resultado. Con relación a los anteriores argumentos las interpretaciones dadas por los profesores a la expresión $1/2$ pueden ser clasificadas en tres grupos: 2 profesores la interpretan como el cociente entre dos números; 16 relación entre un número determinado de partes, y todas las partes congruentes en que ha sido dividida la unidad. $3/6 = 1/2$, equivalencia [simplificación]; 14 como la mitad de casos favorables. Tal como se visualiza en el siguiente gráfico:

Figura 27

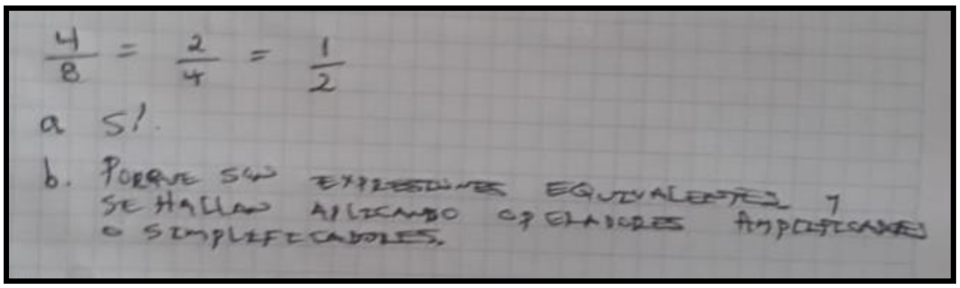
Interpretación de los Profesores de Primaria a la Fracción $1/2$



El tercer ítem indaga si la probabilidad puede ser expresada mediante la fracción $4/8$, frente a este ítem: 17 profesores expresan que la probabilidad no puede ser representada por medio de la fracción $4/8$, pese que, en los resultados obtenidos dejan en evidencia un reconocimiento de la equivalencia entre las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$, aspecto que no fue suficiente para aceptar la expresión válida para representar el evento aleatorio, algunos profesores argumentan que: «*aunque es equivalente a* $4/8$, *la probabilidad contempla un dado de 6 caras… por lo tanto solo hay 3 opciones de 6 en total. No hay 8 caras ni 4 números pares.8*», «*4/8 no representa la situación del dado»; «no, desde el inicio se habló de un dado normal de 6 caras como número racional* $4/8$, *simplificando es* $1/2$ *pero el concepto de lo que es la probabilidad la cantidad posible de opciones son 6*», etc. Por otro lado, 8 profesores aceptan la equivalencia de las expresiones $4/8$ y $1/2$, pero en los argumentos no se evidencia relación alguna de la fracción $4/8$, con el evento aleatorio. Algunos simplifican $4/8$, obteniendo $1/2$, otros multiplican la fracción $1/2$ por $4/4$, realizan los respectivos cálculos que les permite corroborar que $4/8$, es equivalente a $3/6$ y $1/2$. Tal y como se muestra en la figura 28 que corresponde a la solución dada por el profesor de primaria – 12.

Figura 28

Tarea Cálculo de la Probabilidad- Producción del Profesor Primaria-12



Estas soluciones muestran que algunos profesores no relacionan la fracción $4/8$, con el evento aleatorio enmarcado en la tarea, aspecto que llamo la atención de la investigadora, y que fue profundizado en algunas entrevistas realizadas con este grupo de profesores. Para constatar este hecho se entrevistó a los 5 profesores que realizaron los cálculos necesarios y admitieron la expresión como representativa del dado, pero que no justificaron ni relacionaron esta fracción con el evento aleatorio enmarcado en la tarea. En las entrevistas desarrolladas se profundizo en el cómo se visualiza la fracción $4/8$, en la situación del lanzamiento del dado que se relaciona en la tarea. A continuación, se presenta la transcripción de una entrevista que corresponde del minuto $8{:}18$ al $12{:}15$, realizada al profesor de primaria-12. La entrevista es presentada en cuatro columnas, la primera hace referencia al intervalo de tiempo [minutos y segundos] transcurridos, en la segunda columna los interlocutores [profesor -investigadora], la tercera hace referencia al número del dialogo, con el fin de hacer uso de esta notación en el análisis de la entrevista y en la cuarta aparecen los argumentos dados por el profesor y las preguntas realizadas por la investigadora. Cada entrevista se realizó por la aplicación de Zoom y se compartieron las diapositivas con las soluciones dadas por el profesor.

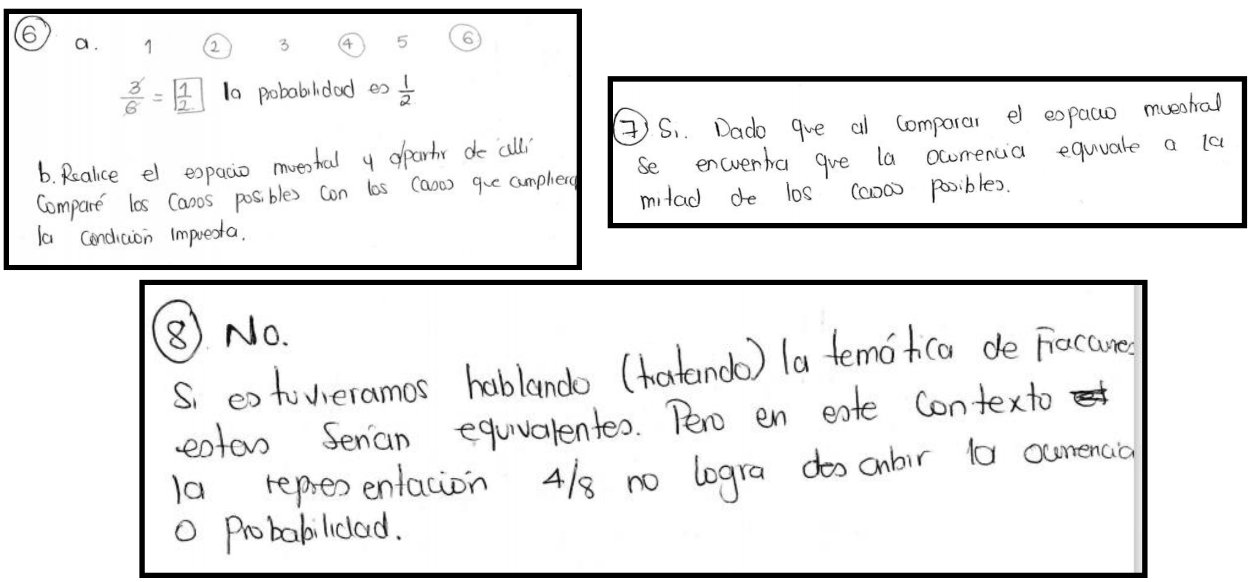
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[8{:}18 - 9{:}28]$	Investigadora	1	Hablemos un poco de la tarea sobre el lanzamiento de dados [la entrevistadora compartió la pantalla con las producciones del profesor, señalando la diapositiva correspondiente a la tarea]. Se pedía calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtuviera un número par, así como, explicar su procedimiento. Frente a esta tarea el profesor calculo la probabilidad mediante la expresion $1/2 = 0.5$. Al indagar si la probabilidad se podía representar por medio de la fracción $4/8$, escribió que sí, argumentado que al simplificar la $4\,/\,8 = 2/4 = 1/2$. Pero cómo se interpreta la fracción $4/8$, dentro del evento aleatorio relacionado en la tarea.
$[9{:}28 - 10{:}09]$	Primaria-12	2	Bueno, yo escribí que son fracciones equivalentes, las cuales se establecen aplicando operadores que permitan amplificar o simplificar fracciones, por ejemplo, en la fracción $4\,/\,8$, le saqué mitad tanto del numerador como del denominador.
$[10{:}09 - 11{:}12]$	Investigadora	3	Sí, luego de verificar que las fracciones son equivalentes, cómo relacionaría la fracción $4\,/\,8$, con el evento aleatorio. O si deseamos enseñar el tema de probabilidad a un grupo de estudiantes y se les plantea esta misma situación, cómo le explicamos a los estudiantes que $4\,/\,8$ también representa la probabilidad.
$[11{:}12 - 12{:}15]$	Primaria-12	4	Bueno, no pensé en la situación de los dados creo que para los estudiantes no sería fácil utilizar otras fracciones equivalentes, por ejemplo, como la fracción $4\,/\,8$, porque no relaciona los casos favorables sobre los casos posibles, las fracciones que se empleen deben describir el evento aleatorio, entonces para enseñar que una fracción es equivalente a otra emplearía una recta numérica y no con probabilidades u otra situación, pero no tomaría esta situación.

Tanto en la solución realizada inicialmente por el profesor de primaria-12 como en la entrevista, se identifica un reconocimiento del procedimiento para establecer que las fracciones son equivalentes tal y como se resalta en el fragmento 2, el profesor admite la equivalencia desde su aspecto **sintáctico** y **semántico**, pero dotar de sentido y significado la fracción $4/8$, no logra relacionarla con el evento aleatorio propuesto en la tarea, tal como alude en el fragmento 4, en tanto, manifiesta que la fracción debe describir las características del evento aleatorio, en este caso del dado. Esto deja en evidencia que el aspecto **sintáctico** posibilito al profesor admitir la fracción $4/8$, como una fracción válida para representar la probabilidad pedida, con la consciencia de no saber cómo visualizar la expresión con el evento aleatorio relacionado. Los argumentos dados por los 8 profesores muestran que éstos aceptan la equivalencia desde el punto de vista **sintáctico**, debido que, las transformaciones [simplificación y amplificación de expresiones], posibilitó desarrollar una noción espontánea de equivalencia, que no es consciente, que conduce a una vinculación de expresiones por medio de transformaciones desde una perspectiva **sintáctica**, pero no permite relacionar dichas expresiones desde el aspecto **semántic**o con el evento aleatorio, como el caso particular de la tarea propuesta en que no se relaciona la fracción. Resultados que permiten corroborar que, para el estudio y desarrollo de la noción de equivalencia, es necesario tener en cuenta elementos **sintácticos** y **semánticos** de las expresiones, que deben ser conectados y desarrollados conjuntamente para promover una mejor comprensión de dicha noción (Solares y Kieran, 2013; Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013; Chalé-Can et al., 2017).

Por otro lado, entre los resultados obtenidos, 1 profesor no reconoce la equivalencia entre la fracción $3/6$ y $4/8$; finalmente, 6 profesores manifiestan que el evento aleatorio puede ser expresado por medio de la fracción $4/8$, en tanto, la fracción sigue representando la mitad de los casos favorables, es de decir, el 50% de la probabilidad; argumentos que dejan en evidencia que este grupo reducido de profesores relacionan $1/2$ y $4/8$ con el evento, este grupo de profesores muestran la relación de los sentidos asignados a las fracciones entre sí, o la articulación entre el aspecto **sintáctico** y **semántico.** En la siguiente producción realizada por la profesora de primaria-25, se evidencia el cálculo de la probabilidad y una aceptación que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, a su vez, reconoce que la fracción es equivalente a $4/8$, pero esta última no puede representar la probabilidad pedida.

Figura 29

Tarea Cálculo de la Probabilidad -Producción la Profesora Primaria-25


6 a. 1 2 3 4 5 6

$\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$ la probabilidad es $\frac{1}{2}$

b. Realice el espacio muestral y apartir de allí Comparé los casos posibles con los casos que cumplierá la condición impuesta.

7 Si. Dado que al comparar el espacio muestral se encuentra que la ocurrencia equivale a la mitad de los casos posibles.

8 No.
Si estuvieramos hablando (tratando) la temática de Fracciones ~~es~~ estos serían equivalentes. Pero en este contexto la representación 4/8 no logra describir la ocurrencia o probabilidad.

La Tabla 14 muestra una síntesis de las producciones realizadas por los profesores de primaria frente a la tarea del cálculo de probabilidad, se resaltan en azul aquellos profesores que no relacionan los sentidos asignados a las fracciones entre sí, o no realizan una articulación semiótica.

Tabla 14

Tarea 3. Cálculo de la Probabilidad. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Primaria

Docente/Ítem	¿Cuál es la Probabilidad de que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par?	¿La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión ½?	¿Esta Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $4/8$?
Primaria- 1	6 caras y 3 números pares $3/6$	Sí, ya que al simplificar $3/6$ por 3 me da $1/2$	No, se puede expresar con $4/8$ ya que no es equivalente a $3/6$
Primaria- 2	La probabilidad es de 3 de 6. Seis caras, 3 números pares y 3 números impares.	Sí, la mitad $1/2$, se simplifica $3/6$.	Sí, $1/2$ es equivalente a $4/8$. [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 3	La probabilidad es de 50%, son 6 opciones, los números impares pueden tener las mismas posibilidades.	Sí, ya que un dado tiene dos probabilidades.	No, ya que hablamos de seis caras del dado con dos probabilidades.
Primaria- 4	$1/2$, el dado tiene 6 caras representados en los puntos que hay en cada cara y la mitad son impares.	Sí, porque los números pares e impares representa dos opciones en el dado. Y 1/2 es equivalente a 3/6.	No, aunque es equivalente a $4/8$ la probabilidad contempla un dado de 6 caras… por lo tanto solo hay 3 opciones de 6 en total. No hay 8 caras ni 4 números pares.
Primaria- 5	La probabilidad es del 50%, si los dados tienen 6 caras del 1 al 6; y 3 caras son pares.	Sí, se podría representar con 1/2 porque es la mitad de posibilidad de obtener un número par.	Sí, porque sigue representando la mitad. $1/2$ es equivalente a $4/8$.
Primaria- 6	La probabilidad es$3/6 = 50\%$El dado tiene 6 caras, 3 corresponden a números pares, es decir, la mitad de caras.	Sí, los números pares corresponden a la mitad de los números representados en las caras del dado.	No, aunque la expresión $4/8\ y\ 1/2$ son equivalentes sería difícil dividir el dado en 8 partes.
Primaria- 7	$1/2$ la cantidad de números pares, sobre la cantidad de opciones $3/6 = 1/2$.	Sí, debido a que se realiza una simplificación de la fracción o entendiendo que la mitad de números son pares.	No, como número racional $4/8$ simplificando es $1/2$ pero el concepto de lo que es la probabilidad la cantidad posible de opciones son 6.
Primaria- 8	La probabilidad es de 3 teniendo en cuenta que son la misma cantidad de caras pares que impares.	Sí, ya que siempre que lance el dado tendré la misma probabilidad de que salga un # par, es decir tengo la mitad de posibilidades.	Sí, ya que corresponde al tiple de $1/2$ es la misma expresión al simplificar $4/8 = 2/4 = 1/2$ [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 9	$1/2$ el dado cuenta con 6 caras números de puntos del 1 al 6 en los cuales son 3 pares es decir la mitad de posibilidades sobre el total.	Sí, 3 números pares de 6 posibles números $3/6 = 1/2$ es una equivalencia.	No, aunque la probabilidad es equivalente no está en correspondencia al evento planteado.
Primaria- 10	La probabilidad es 3 teniendo presente las caras y señalando los números pares que se encuentra de 1 al 6, solo existen 3 números que son 2, 4,6.	Sí, ya que la expresión $1/2$ se comprende como la mitad, en este caso la mitad de seis que son 6 que son las caras del dado.	Sí, la expresión $4/8$ se puede leer después de sacar la mitad de cada una de las expresiones hasta con $1/2$ es decir que es la misma expresión al simplificar $4/8 = 1/2$.
Primaria- 11	3 de 6	Sí, dividiendo las seis entre los # pares que hay.	Sí, porque hay una mitad de seis. Porque es una fracción equivalente.
Primaria- 12	$1/2 = 0.5$, sabiendo que la probabilidad de ocurrencia de un suceso es 1, entonces en el espacio muestral tenemos 6 caras de las cuales 3 son probables.	Sí, sabiendo que la probabilidad de ocurrencia de un suceso es 1.	Sí, porque son expresiones equivalentes se halla aplicando la simplificación y amplificación de fracciones. $4/8 = 2/4 = 1/2$ [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 13	3/6=1/2=0.5=50%. Casos posibles sobre casos posibles. 3 números de cantidad de pares en el dado y 6 cantidades de números en el dado.	Sí, 1/2 es una fracción equivalente a 3/6 y 1/2 ambas expresiones son la mitad de una cantidad determinada.	No, aunque 4/8 es una fracción equivalente a 3/6. (…) Considero que la expresión 4/8 no representa la probabilidad del lanzamiento de un dado, porque ya no tendría relación con los casos favorables y casos posibles

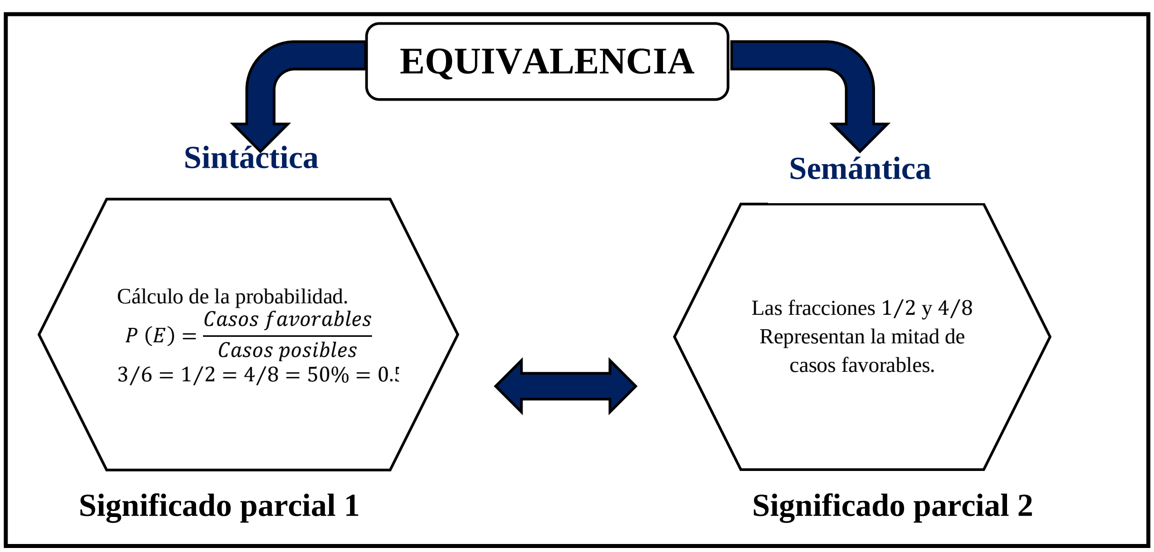
Docente/Ítem	¿Cuál es la Probabilidad de que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par?	¿La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión ½?	¿Esta Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $4/8$?
Primaria- 14	Es de $1/2$ hay 6 casos posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6) y solo 3 favorables (2, 4, 6). Luego la probabilidad es 3/6=1/2	Sí, el dado hay 3 casos favorables de 6 posibilidades por definición de probabilidad escribo la fracción 3/6 y la simplifico.	No, 4/8 no representa la situación de los dados. Aunque la fracción es equivalente $4/8 = 1/2$
Primaria- 15	3 veces puede salir un par. Recordando cada parte del dado, reconociendo cuantos lados pares hay.	Sí, porque la expresión 1/2 representa en el dado la cantidad de # pares e impares que tiene el dado.	Sí, porque la expresión 4/8 representa una fracción equivalente a 1/2. [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 16	La probabilidad es del 50% o $3/6$., conociendo que la cantidad de números que tiene un dado es 6, la probabilidad es 3 de 6. Finalmente, hago la conversión a porcentajes.	Sí, dado que $1/2$ es una fracción equivalente a $3/6$.	Sí, la expresión $4/8$ al momento de convertirla en porcentaje daría 50% lo que diría que sí puedo expresarla de esta manera.
Primaria- 17	$3/6 = 1/2 = 50\% = 0.5$ La probabilidad se define como casos posibles sobre total de casos.	Sí, la probabilidad se define como casos posibles sobre total de casos, de esta forma, se puede simplificar. Es una fracción equivalente.	No, aunque es una fracción equivalente no tiene sentido.
Primaria- 18	La probabilidad es el 50% son 6 números, 3 son pares y 3 son impares. Todos tienen igual probabilidad.	Sí, los números pares tienen la mitad de probabilidad.	Si, $4/8$ la misma cantidad de probabilidad.
Primaria- 19	3 la probabilidad es que el espacio puede estar entre 2, 4, 6. Resultados posibles 1, 2, 3, 4, 5, 6.	Sí, porque los resultados son equiprobables $3/6 = 1/2$. Porque $3/6 + 3/6 = 3/6$	Sí, es igual ya que al sumar la cuarta de cuatro es igual a 1. $4/8 = 1/2$ [Equivalencia sintáctica])
Primaria- 20	La probabilidad es 3 porque el dado hay 3 números pares.	Sí, porque existe la misma probabilidad de que caiga tanto números pares como impares.	No, porque el dado solo tiene 6 opciones en total.
Primaria- 21	Sería un 50% de probabilidad se tiene 6 números «3 pares y 3 impares». $3/6$	Sí, al simplificar quedaría $3/6 = 1/2$	No, solo tenemos 6 caras en el dado.
Primaria- 22	3 es la probabilidad porque el dado hay 3 números impares y 3 pares.	3 es la probabilidad porque el dado hay 3 números impares y 3 pares.	No, porque partimos que la máxima probabilidad es 6 entonces como máximo lo podríamos expresar como $3/6$.
Primaria- 23	$1/2$ Porque son 3 opciones validas de 6 posibilidades.	Sí, se simplifica el fraccionario $3/6 = 1/2$	Sí, porque $1/2$ es equivalente a $4/8$ equivalente a $3/6$ [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 24	$3/6 = 1/2$ Casos favorables sobre casos posibles.	Sí, son fracciones equivalentes al simplificar $3/6 = 1/2$.	Sí, porque al multiplicar el numerador y denominador por 4 da 4/8 [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 25	$3/6 = 1/2$ La probabilidad es $1/2$. Realice el espacio muestral y a partir de allí compare los casos posibles con los casos que cumple la condición.	Sí, dado que al comparar el espacio muestral se encuentra que la ocurrencia equivale a la mitad de los casos posibles.	No, si se habla de la temática de fracciones equivalente. Pero en este contexto la representación $4/8$ no logra describir la ocurrencia o probabilidad.
Primaria- 26	3 de 6 son 6 caras en total.	Sí, porque equivale a la mitad de posibilidades.	Sí, es una fracción equivalente. [Equivalencia sintáctica]
Primaria- 27	Al lanzar un dado la posibilidad de obtener un número par es porque son 6 lados, se supone que hay 3 lados pares y 3 lados impares.	No, porque el dado no tiene dos caras sino 6.	No, porque el dado tiene 6 caras.
Primaria- 28	Existe 50% de probabilidad de obtener un número par. (…)	Sí, se puede representar como $1/2$ cuando se obtiene la probabilidad $3/6$ al simplificar la expresión se obtiene $1/2$.	No, al simplificar la expresión se obtiene como resultado $1/2$ la fracción $4/8$ no se puede obtener en el contexto de la pregunta del dado. (…)
Primaria- 29	[1, 2, 3, 4, 5, 6] caras del dado 3 posibilidades.	Sí, porque corresponde a $1/2$ de los datos (3 de 6)	No, porque las caras del dado son 6 no 8 y los números pares son 3 y no 4.

Docente/Ítem	¿Cuál es la Probabilidad de que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par?	¿La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión ½?	¿Esta Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $4/8$?
Primaria- 30	La probabilidad de obtener un número par $3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$ La probabilidad es el cociente de casos favorables entre el número de casos posibles.	Sí, porque es una fracción equivalente $3/6 = 1/2$	Sí, porque es una fracción equivalente a $3/6$ y esos números siempre corresponde al 50% de probabilidad.
Primaria- 31	La probabilidad es $3/6$. Dibuja el dado.	Sí, considerando que es un dado tradicional de 6 caras, entonces se tiene 6 opciones de 1 al 6 y de esos hay 3 pares. $3/6 = 1/2$	No, como estamos hablando de la probabilidad de que al lanzar un dado este tiene 6 caras, si colocamos $4/8$ no tendríamos un cubo que cumpliera esa condición.
Primaria- 32	La probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par es 3 al caer el dado se puede obtener 2, 4, 6.	Sí, pienso que se puede representar con la expresión $1/2$ porque podría asumir el lanzamiento como el todo.	No, se puede representar con la expresión $4/8$ porque esta estaría indicando que un lanzamiento tendría ocho posibilidades y 4 opciones.

Frente a los resultados obtenidos todos los profesores calculan la probabilidad pedida, 2 de ellos, no reconocen que este evento puede ser expresado mediante la fracción $1/2$ y $4/8$, en tanto, el dado tiene 6 caras y no 2 u 8 respectivamente, o no establecen la equivalencia entre $3/6$ y $4/8$. La aplicación de leyes y procedimientos permiten que 16 profesores reconozcan la equivalencia de las fracciones desde el aspecto **sintáctico** pero que al dotar de sentido y significado la expresión [semántico] les impide aceptar la equivalencia entre las expresiones. No se consideran los 8 profesores que aceptan que la fracción $4/8$ es equivalente, desde lo **sintáctico** y **semántico**, a $3/6$ y $1/2$, en tanto, no relacionan la fracción con el evento aleatorio que enmarca la tarea. En el siguiente diagrama se relaciona los dos significados parciales [sintáctico/semántico] que permiten que el profesor reconozca que las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes y que estas son representativas de la probabilidad pedida.

Figura 30

Articulación de los Dos Significados Parciales Sintáctico y Semántico Implícita en la Equivalencia de Fracciones.



Fuente. Adaptado de Chalé-Can et al., (2017)

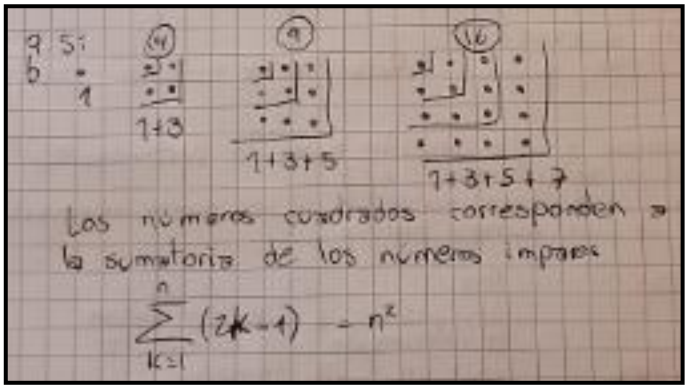
5.1.4. Tarea 4. Secuencia de Números Cuadrados. En la tarea se presenta la secuencia 12, 22, 32, 42, (…) que corresponde a la secuencia de números cuadrados, y una pequeña definición*: «número que se puede expresar como el cuadrado de otro número entero positivo»*. El profesor debía decidir y justificar sí la secuencia de números cuadrados, se puede expresar, mediante la secuencia «*suma de números impares*» 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ¿(…)? De los 32 profesores; 31 de ellos consideran que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de números impares, algunos manifiestan que: *«sí, se puede representar como una suma de números impares ya que al solucionar las potencias, da el mismo resultado que en la suma de números impares*»; «*si, ya que la suma de los números en cada posición da el mismo resultado que al resolver las potencias»; «si, realizando la suma se puede comprobar una relación a simple vista»; «si, al comprobar los cuadrados se evidencia que la suma de los números impares corresponde a su cuadrado,…»; «si, siguiendo el ejemplo y haciendo el ejercicio con otros números da el resultado, aunque nunca lo había analizado desde esa posibilidad, generalmente cuando hablamos de números al cuadrado lo asimilamos al multiplicar el número dado por sí mismo»*. La mayoría de los profesores realizan los cálculos, tanto en la secuencia de números cuadrados como en la secuencia de números impares, que permite corroborar que en cada posición se obtiene el mismo resultado, otros profesores verifican los cálculos para las posiciones 6, 7 y 9, lugares que no se explicitan en el enunciado de la tarea. Estos resultados permiten corroborar los hallazgos reportados por Mejías (2019) quien realizó un estudio con profesores en ejercicio de primaria, encontrando que cuando los profesores debían argumentar la validez de una conjetura realizada por un estudiante: *«sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número»*. Las respuestas que son ubicadas por el autor como parcialmente incorrectas, algunos profesores indican que la conjetura es válida, sin realizar una justificación de esta, por ejemplo: «*sí, teóricamente no tengo idea por qué, pero si pruebo con los números da*». Este hallazgo coincide con los resultados obtenidos en el presente estudio, dado que 26 profesores manifiestan explícitamente que la secuencia de números cuadrados, puede ser expresada mediante la suma de números impares, en tanto, establecen una correspondencia entre los resultados obtenidos en la secuencia de números cuadrados con la secuencia de la suma de números impares. Así mismo, 5 profesores manifiestan que la secuencia de números cuadrados puede ser expresada por medio de la suma de números impares pues además de obtener los mismos resultados realizan una justificación matemáticamente de las secuencias que les permite verificar la equivalencia entre ambas representaciones. Algunos profesores explicitan la fórmula de los números primos:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+5+\cdots(2n-1) = n^2$$

Además de realizar la demostración de la sumatoria de números impares; 2 profesores realizan la secuencia figural que permite corroborar el número impar que corresponde a cada posición, tal y como se evidencia en la siguiente producción.

Figura 31

Tarea Secuencia de Números Cuadrados- Producción la Profesora Primaria-17

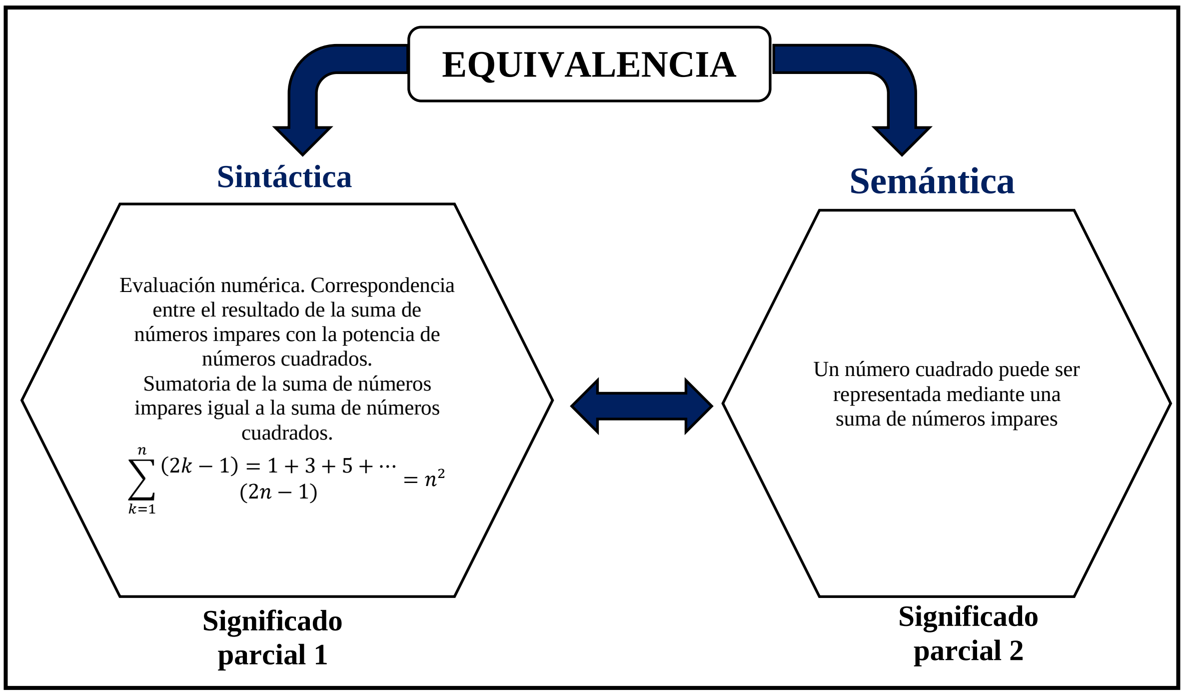


Entre las soluciones realizadas por los profesores 2; estos no realizan ninguna justificación matemática dentro de sus respuestas pero dentro de sus argumentos no se fija únicamente en la igualdad de los resultados, tal y como se muestra en el siguiente argumento: *«sí, pienso que, si se puede representar como una suma de números impares ya que se puede representar un número de diferentes maneras»; «si, porque la secuencia de suma de números impares muestra de forma extensa la misma expresión que se muestra de forma abreviada que se presenta en la secuencia de números cuadrados»*. Por otro lado, 1 profesora manifiesta que la secuencia de números cuadrados no puede ser expresada mediante la secuencia de números impares puesto que: «… *al elevar al cuadrado se representa el número dos veces, ejemplo: 12, 22, 32, …y la suma se tienen números diferentes*». Los resultados permiten corroborar los planteamientos realizados por Chalé-Can et al., (2017) quienes consideran que la mayoría de los sujetos realizan una evaluación numérica, que les permite tener un acercamiento **sintáctico** de la equivalencia posibilitando un desarrollo primitivo e ingenuo de esta noción, hecho que permite una vinculación de expresiones desde el aspecto **semántico,** por medio de diferentes transformaciones como factorización, expansión, agrupación, simplificación de términos y en el caso particular de las producciones de ésta tarea la evaluación numérica. Si bien, el tratamiento numérico permite que los profesores admitan y tengan un acercamiento a la equivalencia, no posibilita una justificación de la igualdad entre las secuencias. Aspecto que muestra la importancia de articular los elementos **sintácticos** y **semánticos** en la equivalencia de las representaciones dadas, en tanto, brinda una mejor comprensión de dicha noción (Solares y Kieran, 2013; Kieran, Boileau, Tanguay y Drijvers, 2013).

Por otro lado, la aceptación de la equivalencia no resulta convincente cuando se tiene un solo aspecto, demostrando que esta noción requiere articular el aspecto **sintáctico** con el **semántico.** Sackur, Drouhard, Maurel, y Pécal (1997) sostienen que, para una mejor comprensión de la equivalencia entre dos expresiones, desde el ámbito sintáctico, se requiere reconocer e interpretar que, al ser reemplazado un mismo valor numérico, se obtiene el mismo valor, pero para ello, se deben realizar las transformaciones algebraicas requeridas que permiten obtener una representación diferente del mismo objeto matemático, y desde lo **semántico** conocer las reglas de funcionamiento. Tal y como se muestra en el siguiente esquema, que relaciona los dos significados parciales [sintáctico/semántico].

Figura 32

Articulación de los Dos Significados Parciales Sintáctico y Semántico Implícita en la Equivalencia de Secuencias



Fuente: Adaptado de Chalé-Can et al. (2017)

En el anterior diagrama se muestra que el aspecto **sintáctico** posibilita que los profesores reconozcan la equivalencia entre las dos secuencias, y el aspecto **semántico** permite justificar dicha equivalencia. Respecto a los resultados obtenidos, se evidencia que 31 profesores de los 32 desde lo numérico reconocen que la secuencia de números cuadrados puede ser expresada por medio de la secuencia de números impares, el aspecto **sintáctico** posibilita establecer la equivalencia entre ambas secuencias, en su mayoría los profesores no son conscientes del por qué la secuencia de números cuadrados puede ser representada mediante la secuencia de números impares, es decir, justificar la igualdad entre ambas. Los resultados muestran que las respuestas dadas por el grupo de profesores distan del objetivo que se busca en la presente investigación, en tanto, se considera que las producciones de los profesores evidencian un reconocimiento de la igualdad entre las dos representaciones desde lo **sintáctico** y desde lo **semántico** sin la conciencia por parte de algunos profesores del porque es posible una reescritura de las secuencias.

En busca de sintetizar las producciones de los profesores frente a las situaciones propuestas en la tabla 15, se presenta un resumen de las soluciones realizadas en las cuatro tareas. Se resalta en naranja aquellos profesores que en una tarea no articulan el aspecto **sintáctico** con el **semántico** o no relacionan entre sí los sentidos asignados a las dos representaciones, en verde en dos tareas, en azul en tres tareas y en blanco aquellos profesores que realizan una articulación semiótica en todas las tareas. En relación a la primera tarea se resaltan los profesores que reconocen que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctica] pero argumentan que las expresiones representan situaciones diferentes [equivalencia semántica]. Respecto a la equivalencia contextual de gráficos estadísticos se selecciona aquellos profesores que eligen uno o ninguno de los dos gráficos estadísticos como aquel diagrama que representa la información suministrada en el enunciado. Frente a la tarea sobre el cálculo de la probabilidad se identifican los profesores que calculan la probabilidad de manera correcta y reconocen que las fracciones $3/6$ y $1/2$ son equivalentes [sintácticamente] pero no admiten que la fracción 4/8, puede representar la probabilidad debido que, el dado tiene seis caras y no ocho [no equivalencia semántica].

Tabla 15

Resumen de las Cuatro Tareas. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Primaria

Docente/Tareas	Triple de un Número	Equivalencia de Gráficos Estadísticos: Consumo de Agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando Dados	Números Cuadrados
Primaria- 1	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	No establece la equivalencia de $4/8$ ya que no es equivalente a $3/6$.	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 2	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 3	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada mediante la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 4	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 5	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último	Reconoce que la probabilidad pedida puede	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada

Docente/Tareas	Triple de un Número	Equivalencia de Gráficos Estadísticos: Consumo de Agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando Dados	Números Cuadrados
	puede ser interpretada como el triple de un número.	trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 6	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 7	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 8	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 9	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 *[sintáctico]* pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 *[semántico]*.	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 10	Reconoce que las expresiones $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico).	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 11	Reconoce que las expresiones $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico A como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 12	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico A como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 13	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 14	Reconoce que las expresiones	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del	Calcula la probabilidad establece la equivalencia	Admite que la secuencia de números cuadrados

Docente/Tareas	Triple de un Número	Equivalencia de Gráficos Estadísticos: Consumo de Agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando Dados	Números Cuadrados
	$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 15	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico A como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 16	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 17	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 18	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 19	No realiza una interpretación a la expresión $3n$.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 20	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 21	No realiza una interpretación a la expresión $3n$.	Elije el gráfico A como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 22	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.

Docente/Tareas	Triple de un Número	Equivalencia de Gráficos Estadísticos: Consumo de Agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando Dados	Números Cuadrados
			que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	
Primaria- 23	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 24	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada a través de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 25	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico*]*	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 26	No sabe si a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ Puede ser expresada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada a través de las fracciones 1/2 y 4/8.	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada mediante la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 27	Reconoce que las expresiones $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Ninguno de los dos gráficos representa el consumo de agua en el último trimestre de una vivienda ubicada en el sur de Bogotá	No admite que la probabilidad pedida se puede expresar con las fracciones $1/2$ y $4/8$	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 28	No realiza una interpretación a la expresión $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada a través de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 29	No realiza una interpretación a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$	Ninguno de los dos gráficos representa el consumo de agua en el último trimestre de una vivienda ubicada en el sur de Bogotá	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Se multiplica dos veces el mismo número *«no dado que al elevar al cuadrado se representa el numero dos veces". Ejemplo: 12, 22, 32,…»*
Primaria- 30	Reconoce que las expresiones $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante las fracciones 1/2 y 4/8	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.
Primaria- 31	Reconoce que las expresiones $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ y 3n son equivalentes	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada mediante la secuencia de

Docente/Tareas	Triple de un Número	Equivalencia de Gráficos Estadísticos: Consumo de Agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando Dados	Números Cuadrados
	[sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	sumas de números impares.
Primaria- 32	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Ninguno de los dos gráficos representa el consumo de agua en el último trimestre de una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Admite que la secuencia de números cuadrados puede ser representada por medio de la secuencia de sumas de números impares.

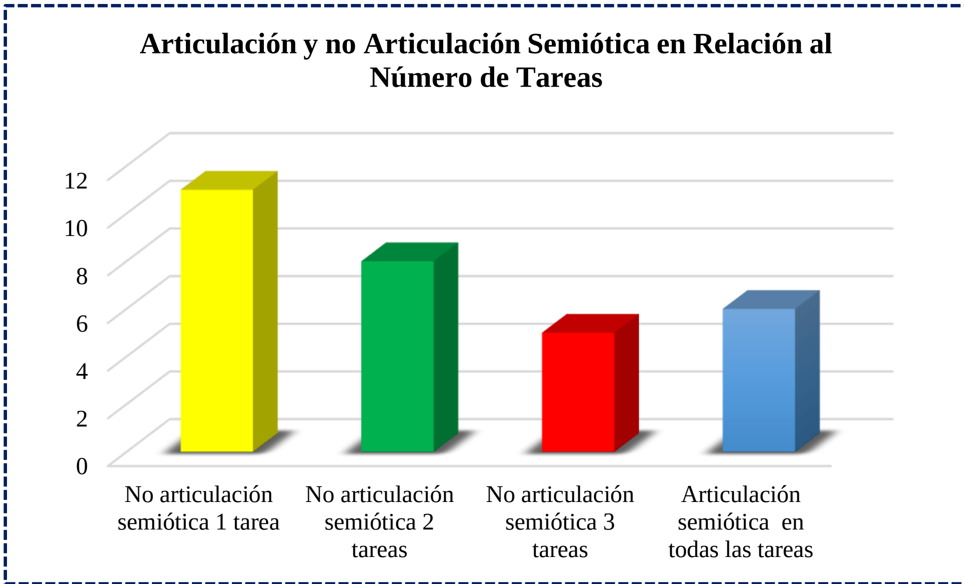
Nota.

No articulación semiótica en una tarea.
No articulación semiótica en dos tareas.
No sabe o realiza procesos incorrectos.
No articulación semiótica en tres
Articulación semiótica en las cuatro

En la rejilla anterior se resaltan en color gris; 5 profesores que no dan una interpretación a una de las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ o $3n$; 2 profesores que, aunque calculan correctamente la probabilidad pedida no establecen la equivalencia de $4/8$ con $3/6$ o argumentan que la probabilidad no se puede expresar con las fracciones $1/2$ y $4/8$, en tanto, no son fracciones que coinciden con la cantidad de caras que tiene el dado. Se resaltan en color naranja las soluciones dadas por 11 profesores que no articulan los dos significados parciales [semántico/sintáctico] en una tarea; 8 de ellos en dos tareas; 5 en tres tareas y 6 profesores que articulan el aspecto **semántico** y **sintáctico** o realizan una articulación semiótica. En la siguiente gráfica se sintetiza la articulación y no articulación semiótica por parte de los profesores frente a las primeras tres tareas que serán analizadas en capítulo VI.

Figura 33

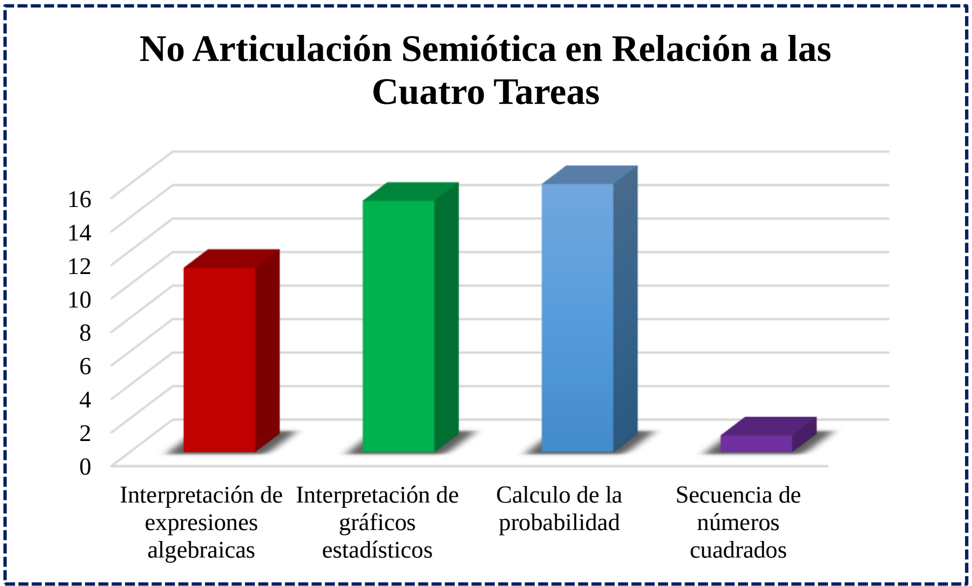
Cantidad de Profesores que Articulan y No Articulan el Aspecto Sintáctico con el Semántico en Relación a las Tareas Propuestas



A continuación, se relacionan la cantidad de profesores que no articulan el aspecto **sintáctico** con el **semántico** en las tareas propuestas; interpretación de expresiones: 12, interpretación de gráficos estadísticos: 14, cálculo de la probabilidad: 15, y la secuencia de números cuadrados: 1. No se tiene en cuenta las respuestas que son consideradas erróneas.

Figura 34

Cantidad de Profesores que No Articulan el Aspecto Sintáctico con el Semántico Respecto a las Tareas Propuestas



Como criterio de selección para conformar los profesores que hacen parte del estudio de caso colectivo se eligió aquellos profesores que en mínimo tres tareas no relacionan el aspecto **sintáctico** con el **semántico** [no articulación semiótica]. Basados en este criterio de selección, en el caso de los profesores de primaria, se cuenta con 5 profesores que hacen parte del estudio de caso colectivo: primaria-3, primaria-4, primaria-9, primaria-31 y primaria-32.

5.2. Grupo de Profesores de Secundaria. Con el grupo de profesores de secundaria se implementó cuatro tareas: 1° interpretación de expresiones algebraicas, 2° interpretación de gráficos estadísticos, 3° cálculo de la probabilidad y 4° interpretación de ecuaciones. A continuación, se presentan las producciones de los profesores a cada una de las tareas.

5.2.1. Tarea 1. Interpretación de Expresiones Algebraicas. Al igual que con el grupo de primaria, en el primer ítem el profesor debía asumir que ***Z*** representa un número entero cualquiera, se indaga por las diferentes interpretaciones o significados que le asignan a la expresión $3n$**.** De los 32 profesores que abordaron la tarea; 15 relacionan la expresión con el triple de un número; 10 como 3 multiplicado por cualquier entero o el producto de un número cualquiera por tres; 1 profesor la interpreta como una suma de tres veces el número; y 6 escriben más de una interpretación: «*el triple de un número o tres veces el número, aunque lo he usado para representar los múltiplos de tres*»; «*es una relación entre los números y los múltiplos de 3, es una expresión algebraica, es una función biyectiva, es una sucesión*»; «*una expresión algebraica que generaliza tres veces un número o el triple de un número»; «triple de un número entero-sucesión numérica», «tres veces un número entero- el triple de un número entero- tres multiplicado por un entero-los múltiplos de 3- una sucesión de números de 3 en 3*». En los resultados obtenidos se evidencia que la expresión $3n$ es relacionada con diferentes referencias como multiplicación, el triple de un número, suma reiterada, una función biyectiva, una sucesión numérica, los múltiplos de 3 y una expresión algebraica.

En el segundo ítem se indaga por el significado o la interpretación que hacen los profesores a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$; 13 manifiestan que ésta corresponde a la «*suma de un número con su antecesor y su sucesor*»; 4 la interpretan como la «*suma de cualquier número menos uno más uno» [correspondencia entre el lenguaje simbólico con el lenguaje natural];* 1 profesor como la «*serie de tres números consecutivos*»; un «*la resta del número anterior más el número, más el número consecutivo*»; 1 profesor manifiesta que «*es la misma expresión del ítem anterior del triple de un número*»; 1 profesor con «*una suma y resta de una expresión algebraica*»; 1 dice que significa la «*suma de números enteros o mejor operaciones de suma y resta de números*»; 1 profesor con «*una operación con polinomios aritméticos»;* 3 manifiestan que «*representa una sucesión de tres enteros consecutivos cualesquiera*»; 1 profesor «*polinomio factorizable*», 1 profesor «*agrupación de términos semejantes*». y 5 profesores dieron más de una interpretación: «*una sucesión, es una expresión que indica la suma de tres números consecutivos, es una sucesión, una expresión algébrica*»; «*la suma de un número cualquiera con su antecesor y su sucesor que* *sería otra forma de representar tres números consecutivos*»; «*tres números enteros consecutivos, el antecesor y el siguiente del número*»; «*una secuencia, agrupación de términos*»; y «*antecesor más el número más el sucesor o se podría ver como una secuencia*». La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada con diferentes referencias: suma de número con su antecesor y su sucesor [anterior, siguiente], suma de cualquier número menos uno más uno, serie, la resta del número anterior más el número, más el número consecutivo a este, triple de un número; polinomios aritméticos, y un polinomio factorizable.

El tercer ítem indaga por la relación que existe entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$; 31 profesores expresan que existe una relación de igualdad o una equivalencia entre ambas expresiones. Los argumentos de los 31 profesores se pueden clasificar así: 9 manifiestan que existe una igualdad, ya que al agrupar términos semejantes se obtiene el mismo resultado; 1 profesor expresa que se puede ver una identidad para cualquier $n \epsilon$ Z; 21 argumentan que al resolver la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se obtiene el mismo resultado que en $3n$, algunos profesores dan un valor numérico especifico a n, y 1 profesor no admite la *equivalencia sintáctica***,** puesto que considera que $(n-1)+n+(n+1)$ hace referencia a la suma de tres números diferentes y la expresión $3n$, a la suma de un número de tres veces. En relación a los resultados se tiene que 31 de los 32 profesores reconocen la equivalencia entre las dos expresiones, aplican las reglas respectivas que les permite verificar la igualdad de las expresiones desde el punto de vista **sintáctico.**

En el cuarto ítem se indaga por el reconocimiento de la equivalencia desde el aspecto **semántico,** para tal fin se indaga si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como *el triple de un número*. En este ítem 10 profesores no aceptan dicha equivalencia desde el punto de vista **semántico.** Algunos manifiestan que $(n-1)+n+(n+1)$ hace referencia a la suma de tres números diferentes y la expresión $3n$, a la suma de un número igual. Otros exteriorizan que $(n-1)+n+(n+1)$ relaciona una suma y $3n$, una multiplicación. En la tabla 16 se presenta el resumen de las producciones de cada uno de los profesores de secundaria.

Tabla 16

Tarea 1. Interpretación de Expresiones. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Secundaria

Docente/Ítem	1.Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $3n$	2. Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué Relación Hay Entre la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la Expresión $3n$?	4. ¿La Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ ¿Puede Interpretarse Como el Triple de un Número?
Secundaria-118	3 veces n	Una sucesión de tres números.	Las dos representan la misma cantidad	No, las expresiones son equivalentes, pero representa situaciones equivalentes.
Secundaria-2	Triple de un número	Tres números consecutivos.	Se trabaja la misma variable que matemáticamente representa el mismo número.	Sí, porque la constante del número son inverso aditivo y quedaría solo la suma de tres veces la variable.
Secundaria-3	Triple de un número	La suma de tres números consecutivos.	Equivalencia. Realiza operativamente los cálculos.	Sí, entendiendo que el triple de un número se puede expresar como la adición.
Secundaria-4	3 multiplicado por cualquier número	Cualquier número menos uno sumado con el mismo número entero más la suma del número más uno.	Al simplificar la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se obtiene $3n$.	Sí, al realizar las operaciones indicadas se obtiene 3n.
Secundaria-5	Triple de un número	Serie de tres números consecutivos.	Se obtiene el mismo resultado	Sí, Realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-6	Triple de un número	La resta del número anterior más el número consecutivo.	Se obtiene el mismo resultado	Sí, dado que n es cualquier número. Realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-7	3 veces el número	La suma de tres números consecutivos.	Son expresiones equivalentes. Realiza los cálculos	No, como el triple de un número sino como su equivalente.
Secundaria-8	El triple de un número	Es la misma expresión del triple de un número. (Opera los términos)	Se obtiene el mismo resultado	Sí, porque siempre vamos a multiplicar el número por 3.
Secundaria-9	3 veces el número	Tres números consecutivos partir de un número intermedio dado.	Simplificando se obtiene el mismo resultado.	Sí, al simplificar la expresión.
Secundaria-10	Da valor a $n=7$	Da valor a $n=4$	Es despejar la misma incógnita $n=4$	Sí, n es cualquier número. Realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-11	Producto de cualquier número	Suma de tres números enteros. (...)	La misma expresión presentada de diferentes maneras	Sí, al utilizar cualquier número el resultado es $3n$
Secundaria-12	Múltiplos de tres. (…)19	Suma de tres números enteros consecutivos. (...)	En ambas son expresiones algebraicas	No, porque visualmente no son iguales, pero numéricamente sí.
Secundaria-13	Un entero cualquier número multiplicado por tres.	Suma de tres números consecutivos. (...)	Una identidad. Realiza los cálculos.	No, porque una es la suma de tres números consecutivos y la otra es el triple de número.
Secundaria-14	Tres veces un número.	Suma de tres números. La suma de un número más el anterior más el siguiente.	Expresiones equivalentes. Realiza los cálculos.	No, a priori se pueda dar dicha interpretación al realizar los cálculos.
Secundaria-15	El triple de un número	La suma de su antecesor, el número y su siguiente.	Expresiones iguales. Realiza los cálculos	No, las interpretaciones son diferentes, aunque son expresiones equivalentes.

---

[18] Al igual que en el grupo de profesores de primaria con el grupo de secundaria se emplea la palabra *«secundaria»* seguido de un número que remplaza el nombre del profesor, la misma notación se emplea en las cuatro tareas que refiere la misma persona.

[19] Los paréntesis con puntos suspensivos (…) significa que el profesor asigno más de una interpretación o que su justificación continua.

Docente/Ítem	1.Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $3n$	2. Diga Qué Significa o que Interpretación le Asigna Usted a la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué Relación Hay Entre la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la Expresión $3n$?	4. ¿La Expresión $(n-1)+n+(n+1)$ ¿Puede Interpretarse Como el Triple de un Número?
Secundaria-16	Tres veces un número.	El número sucesor y antecesor a n.	Son las mismos. Realiza los cálculos.	Sí, realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-17	Tres veces un número. (…)	El antecesor a n más n más el siguiente a n.	Igualdad. Realiza los cálculos.	Sí, realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-18	Tres veces un número	La suma de tres números consecutivos.	Es igual. Realiza los cálculos.	Sí, realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-19	Un entero cualquier número multiplicado por tres.	La suma de tres números consecutivos. (…)	Matemáticamente representan la misma expresión. Realiza los cálculos.	Sí, al simplificar la expresión.
Secundaria-20	Tres veces un número	Suma de tres números consecutivos. (…)	Representan lo mismo. Realiza los cálculos.	Sí, al realizar las operaciones indicadas se obtiene el mismo resultado.
Secundaria-21	Triple de un número. (…)	La suma de su antecesor, el número y su siguiente.	Son expresiones equivalentes. Realiza los cálculos	No, porque las expresiones representan contextos diferentes.
Secundaria-22	Tres veces un número. (…)	Tres números consecutivos. (...)	Realiza los cálculos. Ambas expresiones representan los múltiplos de tres.	Sí, la suma tres números es múltiplo de tres.
Secundaria-23	Multiplicar 3 por un número entero cualquiera.	Una sucesión, una agrupación de términos.	Agrupación de términos semejantes. Demuestra sintácticamente que son iguales.	Sí, al realizar las operaciones indicadas se obtiene 3n.
Secundaria-24	Triple de un número.	n es mayor y menor a n además pertenece al conjunto Z.	Es la misma expresión. Realiza los cálculos.	Sí, son escrituras diferentes, pero se obtiene los mismos resultados
Secundaria-25	n se multiplica por 3	Polinomios aritméticos.	El resultado es el mismo. Por ejemplo, para n=1	Sí, porque al sumar o restar el mismo número se obtiene el mismo resultado.
Secundaria-26	Producto de cualquier número	Agrupación de términos semejantes	Tienen en común un elemento la n.	No, en una expresión si adiciona o se sustrae valores por tanto no puede ser interpretada como el triple de un número.
Secundaria-27	Triple de un número.	La suma de un número y su antecesor y su sucesor.	La una es la suma de tres números diferentes y la segunda es un mismo número	No, el triple de un número seria 3n.
Secundaria-28	Un número aumentado en tres.	Una generalización para establecer valores de orden (antecesor y siguiente)	La parte operativa da el mismo resultado.	No, al realizar la traducción de lenguaje común a una expresión algebraica no es correcto la expresión 3n.
Secundaria-29	Se multiplica por tres. (...)	Antecesor más el número más el sucesor. (…)	Realiza los cálculos. Ambas expresiones representan los múltiplos de tres.	Sí, al realizar las operaciones indicadas se obtiene 3n.
Secundaria-30	Triple de un número. (…)	Una sucesión.	Dan el mismo resultado	Sí, realiza las operaciones indicadas.
Secundaria-31	Producto entre una variable y una constante	Polinomio factorizable.	3n es el resultado al resolver $(n-1)+n+(n+1)$	No, al no estar factorizado de manera explícita no se interpreta como $3n$.
Secundaria-32	El triple de un número	La suma de tres números consecutivos, donde uno es el antecesor y el otro sucesor. (…)	Al reemplazar dan los mismos resultados.	Sí, al verificar se obtiene el mismo resultado.

En azul se señalan 11 profesores que, desde el punto de vista **sintáctico**, aceptan la equivalencia sintáctica entre ambas expresiones. Pero dotar de sentido y significado las expresiones impide aceptar la igualdad entre estas [equivalencia semántica].

5.2.2. Tarea 2. Interpretación de Gráficos Estadísticos. Al igual que con el grupo de primaria en esta tarea se presenta el consumo de agua que registra una vivienda en el último trimestre del año anterior. Entre las producciones de los 32 profesores: 17 de ellos eligen la opción (c) que hace referencia a que los gráficos A y B, representan la misma información, 1 profesor manifiesta que el gráfico A, representa la información suministrada y 13 expresan que el gráfico B, representa la información suministrada en el enunciado. Los profesores que reconocen que los dos gráficos representan la misma información suministrada expresan que: «*los gráficos A y B representan la misma información, algunos expresan que los dos gráficos no son excluyentes, puesto que el gráfico A representa la cantidad relativa al consumo en su relación parte todo y el gráfico B representa la cantidad absoluta*», otros argumentan que los dos gráficos representan la misma información «*porque se están relacionando las variables puestas en juego, meses Vs consumo, la diferencia tiene que ver con tomar el 140 m3 como el total de consumo durante los tres meses. [gráfico B] …»* Otros profesores resaltan que *«los dos gráficos muestran el consumo. El gráfico A lo relacionan frente a una fracción simplificada y el gráfico B frente al consumo directo»*. El profesor que admite solo el gráfico A, establece una correspondencia entre los datos del enunciado de la situación y los valores simplificados en el gráfico A, en relación al tamaño de cada una de las barras. 14 profesores admiten que el gráfico B, representa la información suministrada en el enunciado de la situación, en su mayoría realizan los cálculos respetivos como $140 * 4/20 = 7 * 4 = 28m^3; \frac{140*9}{20} = 7 * 9 = 63m^3\ y\ 140 * 7/20 = 49\ m^3$, algunos expresan que «*el gráfico B es el que representa mejor la información, porque es el que dice exactamente los m3 consumidos mes a mes, en cambio el gráfico A solo muestra las fracciones del consumo y se desconoce el total del consumo*», otros expresan que «*el gráfico A no es tan preciso en la información ya que en el título por lo menos debería decir el total del consumo, tampoco tiene la referencia del total ni las unidades de medida del volumen* ». En la tabla 17 se muestra el resumen de las producciones de cada uno de los profesores de secundaria frente a la tarea de interpretación y equivalencia contextual de gráficos estadísticos.

Tabla 17

Tarea 2. Interpretación de Gráficos Estadísticos Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Secundaria

Docente	Gráfico que Representa la Información Suministrada.	Docente	Gráfico que Representa la Información Suministrada
Secundaria-1	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-17**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-2	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-18**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-3	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-19**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-4	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-20**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.
Secundaria-5	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-21**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-6	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-22**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-7	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-23**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-8	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-24**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-9	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-25**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-10	El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre**.**	**Secundaria-26**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
Secundaria-11	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-27**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
Secundaria-12	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-28**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-13	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-29**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-14	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.	**Secundaria-30**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre
Secundaria-15	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-31**	El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
Secundaria-16	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre	**Secundaria-32**	Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre

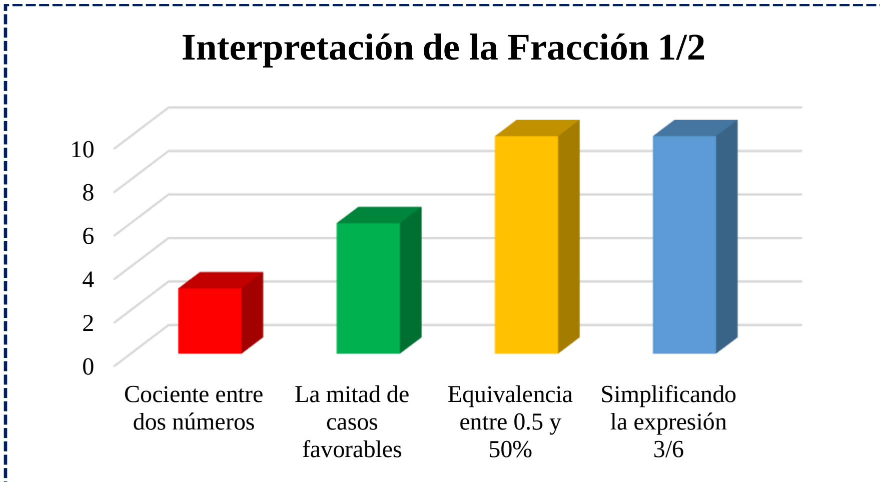
En verde se resaltan 14 profesores que eligen solo un gráfico (A o B) o ninguno de los dos gráficos. En relación a la articulación del aspecto **sintáctico** con el **semántico,** los profesores realizan los respectivos cálculos matemáticos que les permite aceptar la equivalencia entre los dos gráficos [equivalencia sintáctica], pero gran parte de los profesores se inclinan por el gráfico B, puesto que, éste explicita la magnitud de medida (m^3) y permite visualizar el consumo mes a mes con un número entero [equivalencia semántica].

5.2.3. Tarea 3. Cálculo de la Probabilidad. Se pide calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par. Ante la situación propuesta 3 profesores expresan la probabilidad por medio de la expresión 50%, manifiestan que, el dado tiene tres números pares y tres números impares; un profesor expresa que la probabilidad es de 0.5, puesto que, la probabilidad debe ser menor que 1 y mayor que 0; 2 escriben la fracción $3/6$, porque el dado tiene seis caras, donde tres son pares y tres impares; 2 profesores escriben la expresión $1/2$, puesto que la mitad de caras del dado son pares y la otra mitad son impares; y 2 profesores calculan erróneamente la probabilidad pedida. Aunque, no se indagó por otras maneras de representar la probabilidad pedida aparte de la dada inicialmente: 22 profesores escriben más de una representación para expresar la probabilidad pedida, por ejemplo: 3 lo hacen mediante la fracción $3/6 = 0.5$, los profesores manifiestan que al dividir la fracción [número de aciertos sobre el número total] se obtiene 0.5; 6 profesores escriben $3/6 = 1/2$, evento de casos posibles sobre el total de posibilidades; 7 escriben $3/6 = 1/2 = 50\% = 0.5$, igualmente argumentan que el número de eventos favorables sobre el total de posibilidades; 2 escriben $3/6 = 0.5 = 50\%$, los profesores hacen uso de la fórmula de número de casos favorables sobre el número de casos posibles, 2 escriben $3/6 = 1/2 = 0.5$ y relacionan estas expresiones con la definición de la probabilidad [casos favorables sobre casos posibles]. Así mismo, algunos profesores realizan la representación icónica del dado [dibujo], otros escriben el espacio muestral *«los números pares que hay en un dado son 2, 4, 6 y el total de casos es 6 hay 6 números 1, 2, 3, 4, 5 y 6».*

En relación al segundo ítem que indaga si la anterior probabilidad se puede representar mediante la fracción $1/2$: 6 profesores manifiestan que sí, puesto que es equivalente a 0.5; 3 argumentan que sí, porque la probabilidad es un número que se obtiene del cociente entre dos números; 6 docentes expresan que sí, al considerar que del total de posibilidades la mitad son aceptables; 4 expresaron que la expresión $1/2$ es equivalente a 0.5 y a 50%; 4 profesores resaltan que sí, en tanto, al simplificar la fracción 3/6 el resultado es $1/2$ que es una fracción equivalente a 3/6. Además, cumple con el concepto de probabilidad *«la mitad son pares y la mitad son impares»*; 6 expresan que sí se puede representar mediante la fracción $1/2$ puesto que, al simplificar la fracción 3/6. 1 profesor no acepta que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de $1/2$, expresa que «*a pesar de tener la misma probabilidad ½ y 3/6 son expresiones de diferentes situaciones. El denominador debe expresar o representar todo el espacio muestral todas las opciones, mientras que en el caso dado se debe dejar claro que el dado tiene 6 caras. La expresión* $1/2$ *no deja claro este hecho. Igualmente pasa con las opciones favorables en el dado hay 3 opciones de números y eso se debe dejar claro al momento de calcular la probabilidad*». Teniendo en cuenta los argumentos dados por los profesores se pueden ubicar en 4 grandes grupos según la interpretación de la fracción $1/2$: 3 profesores como cociente entre dos números; 10 simplificación de 3/6; 6 la mitad de casos favorables y 10 equivalencia entre 0.5, 3/6, y 50%. Tal como se visualiza en el siguiente gráfico.

Figura 35

Interpretación de los Profesores de Secundaria a la Fracción 1/2



Frente al tercer ítem que indaga sí la probabilidad puede ser expresada mediante la fracción $4/8$. En relación a los 30 profesores que calculan de manera correcta la probabilidad: 17 expresan que la probabilidad no puede ser representada por medio de la fracción $4/8$, algunos manifiestan que: «*aunque representa el mismo número no representa la misma situación, en este caso, el dado tiene 6 posibilidades y no 8*». Otros argumentan que, aunque la fracción hace referencia a la mitad de las posibilidades no corresponde a las condiciones del contexto de la situación original [dado de 6 caras]. Algunos resaltan que «*si se expresa como 4/8, no es el de la probabilidad que se pidió inicialmente, ya que se estaría diciendo que hay 4 casos favorables de 8 posibles y eso es falso*»; «*no se puede representar ya que no existe una relación entre la cantidad tomada y el total»; «si son fracciones es equivalente aunque el evento cambiaria*»; 8 profesores aceptaron la equivalencia de las expresiones, algunos expresan que al simplificar $4/8$, se obtiene $1/2$ y es ésta una fracción equivalente, otros aluden que al multiplicar la fracción $1/2$ por $4/4$ se obtiene $4/8$, en estas producciones se evidencia que los profesores realizan los respectivos cálculos que les permitía comprobar que $4/8$, es equivalente a $3/6$ y $1/2$, pero sin justificar el procedimiento. Situación que fue profundizada en 4 entrevistas desarrolladas a estos profesores, en el que se indago, el cómo se relaciona la fracción $4/8$, con el evento aleatorio enmarcado en la tarea, al respecto unos profesores expresan que: «*sería lanzando ocho veces y cuatro serían los favorables*»; otros «*que tocaría cambiar la situación otro evento aleatorio y la nueva situación se ajustara a la expresión de 4/8*»; otros profesores manifiestan que «*no habían reflexionado en ello y que no sabrían cómo relacionar la fracción 4/8 con la situación del dado*». Tal y como se evidencia en la siguiente transcripción de la entrevista realizada a la profesora de secundaria-23 correspondiente al minuto $[3{:}08 - 7{:}07]$.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[7:08 - 8:28]$	Investigadora	1	Hablemos un poco sobre la tarea sobre lanzamiento de dados [la entrevistadora compartió la pantalla con las producciones del profesor. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea]. Se pidió calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par. Se indagaba si la probabilidad podida ser representada con las fracciones $1/2$ y $4/8$. La profesora halla la probabilidad mediante la expresión $3/6$, escribió que la probabilidad si podría ser representada por medio de $1/2$ y $4/8$ puesto que son fracciones equivalentes a $3/6$. Pero me gustaría que me comentara cómo se refleja la fracción $4/8$ dentro del evento aleatorio relacionado en la tarea.
$[8:28 - 8:29]$	Secundaria-23	2	Si (…). [Indicando que, si con la cabeza y guardo silencio unos segundos, guardo silencio unos segundos]
$[8:29 - 9:43]$	Investigadora	3	La profesora demostró que son fracciones equivalentes, multiplico $1/2$ con $4/4$, obteniendo como resultado $4/8$. Pero, teniendo presente el evento aleatorio que se enmarca en la tarea, que lectura se hace de la fracción $4/8$, o si deseamos enseñar la probabilidad a un grupo de estudiantes y les planteamos la misma tarea, cómo explicarles que la fracción 4/8, también es una expresión que permite representar la probabilidad pedida.
$[9:43 - 10:32]$	Secundaria-23	4	O.K. [ya entiendo] pues son fracciones equivalentes pues al multiplicar $1/2$ con $4/4$ da como resultado $4/8$. Pero no pensé en la situación del dado, es más no sé si enseñaría la probabilidad con los dados. No tuve en cuenta el contexto de la situación. Y al explicar que la fracción 4/8 podría representar la probabilidad, tendría que realizar la operación. [Tomo unas hojas y realizó nuevamente los cálculos]. Les manifestaría a mis estudiantes que en ese caso se debe realizar las operaciones para ver las fracciones equivalentes.
$[10:32 - 11:02]$	Investigadora	5	Es decir, que realizando las operaciones respectivas puedo mostrar a los estudiantes que son fracciones equivalentes. Pero en el contexto de la situación del dado no.
$[11:02 - 12:07]$	Secundaria-23	6	Si, simplemente dije que sí, pero no pensé que si $1/2$ y $4/8$ lo podría representar con el dado. (…).no tuve en cuenta la situación (…) no, no hay, no sabría cómo explicarle a un estudiante, ahí si me mato con la pregunta.

Los fragmentos 4 y 6 reflejan que la profesora admite la equivalencia entre las fracciones desde el aspecto **sintáctico**, reconoce que $4/8$, es equivalente a $1/2$ y $3/6$ pero no relaciona la fracción de $4/8$, con el evento aleatorio, es decir, desde el punto de vista **semántico** dotar de sentido y significado la expresión en relación al evento aleatorio, le es imposible visualizar o realizar una lectura de la fracción en la probabilidad pedida. Por otra parte, 5 profesores manifiestan que la probabilidad puede ser representada por medio de la fracción 4/8, puesto que la fracción sigue representando la mitad de los casos favorables, en los argumentos se muestra una articulación explicita entre el aspecto **sintáctico** con el **semántico**. En la tabla 18 se presenta un resumen las producciones de cada uno de los profesores de secundaria frente al cálculo de probabilidad.

Tabla 18

Tarea 3. Cálculo de la Probabilidad. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 profesores de Secundaria

Docente/Ítem	¿Cuál es la Probabilidad de que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par?	¿La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión ½?	¿La probabilidad se Podría Representar con la Expresión 4/8
Secundaria-1	$3/6 = 1/2 = 50\%$. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, la probabilidad es un número que se obtiene del cociente entre dos números	No, representa el mismo número, pero no la misma situación en este caso el dado tiene 6 caras.
Secundaria-2	$1/2$. Mitad de números pares y mitad de números pares.	Sí, se representa de forma 3/6 y se simplifica.	No, sería una expresión equivalente. El dado tiene 6 caras.
Secundaria-3	0,5 $= 3/6$.3 números sobre 6 opciones.	Sí, considerando que del total de posibilidades (6) la mitad son aceptables.	No, aunque en términos probabilísticos se siga interpretando que se hace referencia a la mitad de probabilidades. No corresponde a las condiciones del contexto original.
Secundaria-4	$3/6 = 1/2$. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, al simplificar 3/6 se obtiene 1/2.	No, si se expresa como $4/8$ no es la probabilidad que se pidió inicialmente, se estaría diciendo que hay 4 casos favorables de 8 posibles y esto sería falso.
Secundaria-5	$3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$ Eventos favorables # 3 sobre total de posibilidades # 6.	Sí, al simplificar 3/6 se obtiene 1/2.	No, cumple con la definición de probabilidad # de elementos del evento sobre # del espacio muestral, aunque las fracciones son equivalentes.
Secundaria-6	$3/6 = 1/2$. Casos posibles sobre casos totales.	Sí, dado que la probabilidad anterior es 3 de 6. La mitad de las posibilidades que se necesita.	No, aunque sea expresiones equivalentes no representa la situación, ya que se habla de un dado de seis lados, en ese caso la expresión muestra un total de 8 casos totales y no sería pertinente.
Secundaria-7	$3/6 = 1/2$. Casos favorables sobre casos posibles.	Sí, 1/2 es equivalente a 0.5	No, teniendo en cuenta que se parte de un dado de seis caras en la que tres son números pares. En el plano matemático son fracciones equivalentes.
Secundaria-8	$3/6 = 0.5$Lo divido en el número de éxitos con el número total.	Sí P(par)= $3/6 = 1/2$	Si, P(par)=3/6=1/2…1/2 x 4/4=4/8. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-9	$3/6 = 1/2 = 0.5$ 50% Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, aplicando la fórmula de probabilidad y simplificando. 3/6=1/2	No, aunque son fracciones equivalentes dependen de la situación problema.
Secundaria-10	50/50. Si se lanza el dado y se saca la media y el rango. Calculo incorrecto de la probabilidad.	Sí, se toma la unidad o la docena siempre se acerca a 1/2 o sea a 6. Calculo incorrecto de la probabilidad.	Si, hay que reducir $4/8 = 1/2$
Secundaria-11	Es el 50% sabiendo que hay 3 números pares y 3 números impares.	Sí, porque la expresión 1/2 representa una posible parte "que es la probabilidad" entre el total de partes que son.	Sí, es posible teniendo en cuenta que se multiplica el todo y las partes posibles por 4. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-12	$3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$ Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, las expresiones 1/2=0.5 y 50% son equivalentes.	No, desde un punto de vista matemático. Si, porque 3/6=1/2=4/8, pero desde un punto conceptual, no es conveniente.
Secundaria-13	$3/6 = 1/2$. Casos posibles sobre casos totales.	Sí, al simplificar son fracciones equivalentes.	No, aunque 4/8=3/6=1/2 son equivalentes en su forma de presentar la probabilidad no se ajusta a la situación puesto que el dado tiene 6 caras.
Secundaria-14	3/6. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, se puede representar con 1/2 ya que 3/6 y 1/2 son dos números racionales equivalentes.	Sí, el racional 4/8 es equivalente a 1/2 [(1/2). (4/4)] aunque siempre se busca expresar por número racional irreducible.
Secundaria-15	3/6=1/2=0.5. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, 1/2 es una representación de 0.5.	No, dicho número no está asociado al contexto del problema.

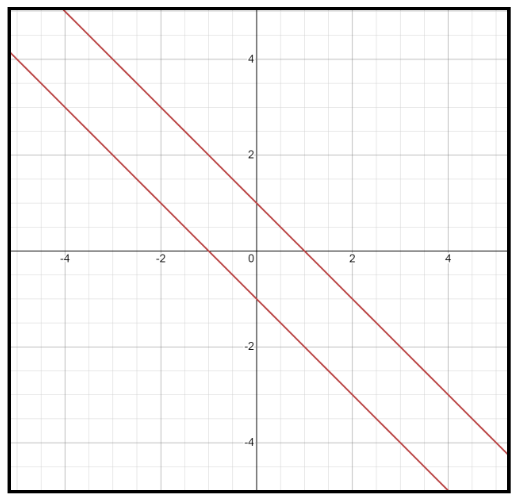
Docente/Ítem	¿Cuál es la Probabilidad de que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par?	¿La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión ½?	¿La probabilidad se Podría Representar con la Expresión 4/8
Secundaria-16	$3/6 = 1/2$. Casos favorables sobre casos posibles	Sí, P(A)=3/6=1/2	No, son fracciones equivalentes, aunque el experimento aleatorio cambia.
Secundaria-17	3/6=0.5=50%. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, 3/6=1/2	Sí, 1/2x4/4=4/8=0.5=50%
Secundaria-18	3/6=1/2=0.5=50%. Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, al simplificar 3/6 queda ½	Sí, 4/8 es otra forma de representar 3/6 o 1/2, todas dan el mismo resultado.
Secundaria-19	$3/6 = 1/2$. Casos posibles sobre casos totales.	Sí, lo que representa que, de 6 resultados tenemos que la mitad, cumple con las condiciones, es decir, puede representarse P(A)=3/6=1/2=50%	No, se tiene que a pesar que las expresiones matemáticas 3/6, 4/8, simplificadas pertenecen a la familia racional ½, no representa la misma situación estadística.
Secundaria-20	$3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$ Eventos favorables sobre total de posibilidades.	Sí, ya que 3/6 es lo mismo que 1/2, son fracciones equivalentes dan 0.5 que corresponde a la misma representación decimal de la fracción 1/2.	Sí, pero matemáticamente como número, más no para el evento como tal. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-21	3/6=0.5. El dado tiene 6 caras el total sobre 3 caras pares.	No, tienen la misma probabilidad 1/2 y 3/6 pero son expresiones de diferentes situaciones el denominador debe expresar el total. (…).	No, a pesar de ser fracciones equivalentes en el contexto de la fracción como probabilidad no están representando la misma situación.
Secundaria-22	$1/2$. Números por cara del dado. Tres pares y tres impares. Probabilidad la mitad.	Sí, como tres números de las caras de los dados son pares, la probabilidad es de 3/6 y por tanto es igual a 1/2	No, porque no corresponde al mismo evento de los dados, así matemáticamente 4/8=1/2.
Secundaria-23	$3/6$ Son seis caras de las cuales 3 son pares y las otras tres impares.	Sí Se simplifica el fraccionario $3/6 = 1/2$	Sí, se multiplica por 4 el fraccionario $1/2\ x\ 4/4 = 4/8$. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-24	$3/6 = 1/2 = 0.5$. Primero identifique el total de posibilidades y luego el total de casos favorables.	Sí, inicialmente recordemos que un dado tiene 6 caras y se coloca los posibles casos $3/6 = 1/2$.	Sí, porque $4/8$. al simplificarla da como resultado $1/2$. y esa es la probabilidad $3/6 = 1/2$. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-25	$1/6 = 0.16$. Casos favorables sobre casos posibles.	No, los posibles casos son 6 que corresponde a las caras del dado.	No, aunque se simplifique las caras del dado son 6.
Secundaria-26	$3/6 = 0.5$. Se divide los casos favorables sobre los casos positivos en este caso son 2, 4, 6.	Sí, al simplificar la expresión $3/6$. se obtiene $1/2$ que es igual a 0.5.	No, aunque también es una expresión equivalente no da cuenta de la probabilidad de ocurrencia de los números.
Secundaria-27	$3/6$, hay 6 posibles resultados con 3 posibilidades de obtener un número par	Sí, al simplificar el término el resultado formal es $1/2$.	Sí, al simplificar sigue el mismo resultado 4/8=1/2. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-28	La probabilidad de ocurrencia del evento es 3 de 6 que equivale al 50%	Sí, es posible trabajar con expresiones simplificadas y que no altera la operación.	No, debido a que el conjunto de la muestra es 6 y el total que relaciona es 8, además sus posibles opciones son 3 y no 4.
Secundaria-29	$3/6 = 1/2$, Aplique el concepto básico de probabilidad calculando el número de casos favorables entre el número de casos posibles.	Sí, la probabilidad de ocurrencia se puede representar como $1/2$ o con decimal 0.5.	No, puede representar ya que, no existe una relación entre la cantidad tomada y el total.
Secundaria-30	$3/6 = 0.5 = 50\%$. Aplique el concepto básico de probabilidad calculando el número de casos favorables entre el número de casos posibles.	Sí, ya que corresponde exactamente a la mitad del 100% de la probabilidad es decir el 50%.	Sí, ya que al simplificarla esta también corresponde a $1/2$.
Secundaria-31	0.5. Dividir el número de opciones del número par por el número de posibilidades del evento.	Sí, al tener 3 opciones sobre 6 posibilidades se simplifica para representar $1/2$.	Sí, al ser equivalente a la fracción $4/8$. [Equivalencia sintáctica]
Secundaria-32	50%. La mitad de las caras del dado son pares.	Sí, 1/2 es una representación de 0.5 o al 50%.	Sí, 4/8 es equivalente a ½ [Equivalencia sintáctica]

En la anterior rejilla se resaltan en color gris 3 profesores que calculan erróneamente la probabilidad o no aceptan que la probabilidad puede ser expresada mediante las fracciones $1/2$ y $4/8$. En verde se resaltan 17 profesores que aceptan que la fracción $1/2$ puede representar la probabilidad pedida y admiten que $4/8$, es una fracción equivalente a $1/2$, pero esta expresión no puede expresar dicha probabilidad, en tanto, el dado no tiene ocho caras, se evidencia un cierto anclaje al objeto físico, que conduce a los profesores a no relacionar los sentidos entre sí, asignados a cada fracción. Para efectos del interés investigativo se consideran las 17 producciones de los profesores que aceptan la equivalencia entre las fracciones $1/2$ y $4/8$, pero no logran relacionar los sentidos asignados a éstas entre sí.

5.2.4. Tarea 4. Interpretación de Ecuaciones. La tarea presenta la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, que corresponde a una «cónica degenerada» [dos rectas paralelas] tal y como se muestra en la figura 36. Para efectos del análisis no resulta relevante la ecuación es interpretada como una circunferencia, una ecuación cuadrática o un polinomio, etc., puesto que, se busca identificar los profesores que admiten que las expresiones $x + y = \frac{1}{x+y}$,y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, son equivalentes desde el aspecto sintáctico, pero los sentidos asignados a las expresiones son asociados con objetos matemáticos o situaciones diferentes, impidiendo que relacionen los dos sentidos entre sí. Aclarado dicho aspecto, en el primer ítem se pide que se explicite el significado o la interpretación asignado a la ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$. Frente a esta pregunta: 4 profesores la interpretan como un caso de factorización, específicamente un trinomio cuadrado perfecto o la diferencia de cuadrados; 11 la relacionan con una ecuación de segundo grado o una ecuación cuadrática; 5 profesores la asocian con una cónica concretamente con una circunferencia; 1 profesor la relaciona con una curva; 5 explicitan que es el cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno o el cuadrado de la suma de dos números reales; 3 profesores, que la ecuación muestra la relación entre dos variables o polinomio de dos variable o una expresión algebraica; 1 profesor alude que representa una figura de dos puntos (x, y) tales que $(x + y) = 1$; 1 profesor que la ecuación es una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1; 1 que la representación gráfica son dos paralelas; y 1 profesor no responde esta tarea. La referencia $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es relacionada con diferentes conceptos como una sección cónica, específicamente una circunferencia, un

Figura 36

Gráfica de la ecuación $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$

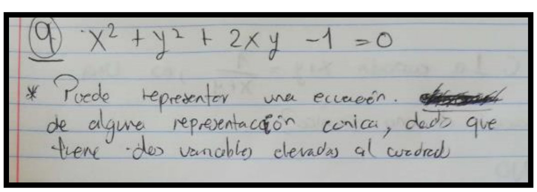


caso de factorización, una función de segundo grado, una ecuación cuadrática, etc., ligados a la percepción icónica de la expresión en relación a la forma de las variables.

Frente al segundo ítem que indaga si las expresiones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, son equivalentes. 26 profesores efectúan la demostración paso a paso, que les permite verificar que ambas ecuaciones son iguales, y 6 no realizan de manera correcta los procedimientos correspondientes o no realizan la comprobación de ésta, impidiendo demostrar, desde lo **sintáctico,** la equivalencia entre ambas expresiones. En relación al tercer ítem que pregunta si la ecuación $x + y = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$, corresponde a la interpretación realizada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, se evidenció que 17 profesores manifiestan que continua siendo la misma ecuación factorizada, algunos argumentan que «*sí, continua siendo un caso de factorización, un trinomio cuadrado perfecto o la diferencia de cuadrados, una ecuación de segundo grado o una ecuación cuadrática, una cónica específicamente como una circunferencia o el cuadrado de dos números reales con el doble de su producto*», y 15 profesores expresan que «*la ecuación no corresponde a la interpretación dada inicialmente*»*;* otros *«que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es una igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas con $x + y \neq 0$»;* otros expresan que *«estructuralmente no es igual pero al resolver la transposición se va completando un cuadrado»;* y otros que *«no, es una ecuación cuadrática, la ecuación no modela la misma situación. Algebraicamente son equivalentes»* y otros manifiestan que *«es una igualdad entre un número y su inverso»*. En la siguiente figura que corresponde a la solución dada por el profesor de secundaria-6, deja en evidencia el reconocimiento de la equivalencia entre ambas ecuaciones, pero los sentidos asignados a las expresiones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, no son relacionados entre sí, en tanto son relacionados con objetos matemáticos diferentes.

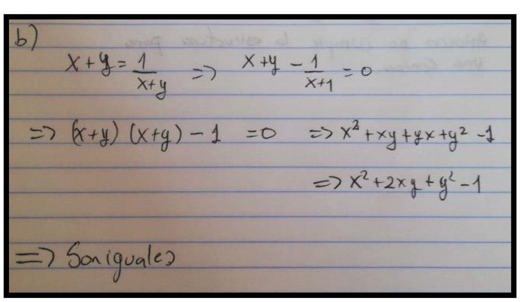
Figura 37

Tarea Interpretación de Ecuaciones -Producción del Profesor Secundaria-6



9) $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

* Puede representar una ecuación ~~[illegible]~~ de alguna representación cónica, dado que tiene dos variables elevadas al cuadrado

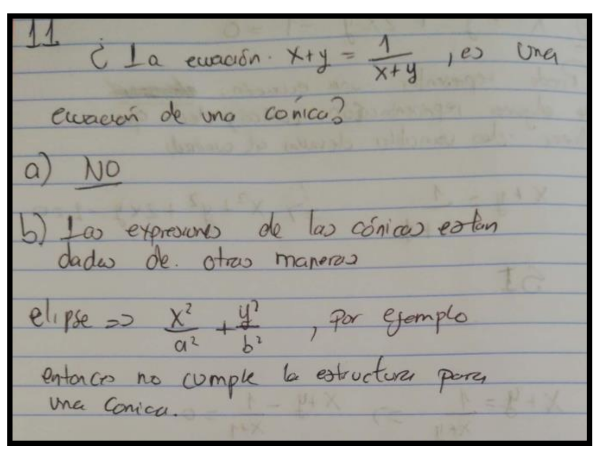


b) $x+y = \frac{1}{x+y} \Rightarrow x+y - \frac{1}{x+1} = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x+y) - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + xy + yx + y^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 1$

$\Rightarrow$ Son iguales



11 ¿La ecuación $x+y = \frac{1}{x+y}$, es una ecuación de una cónica?

a) NO

b) Las expresiones de las cónicas están dadas de otras maneras

elipse $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, por ejemplo

entonces no cumple la estructura para una conica.

La Tabla 19 resume las producciones de cada uno de los profesores de secundaria frente a la Tarea 4. Se resaltan en azul los profesores que no realiza una articulación semiótica o los sentidos asignados no son relacionados entre sí.

Tabla 19

Tarea 4. Interpretación de Ecuaciones. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Secundaria

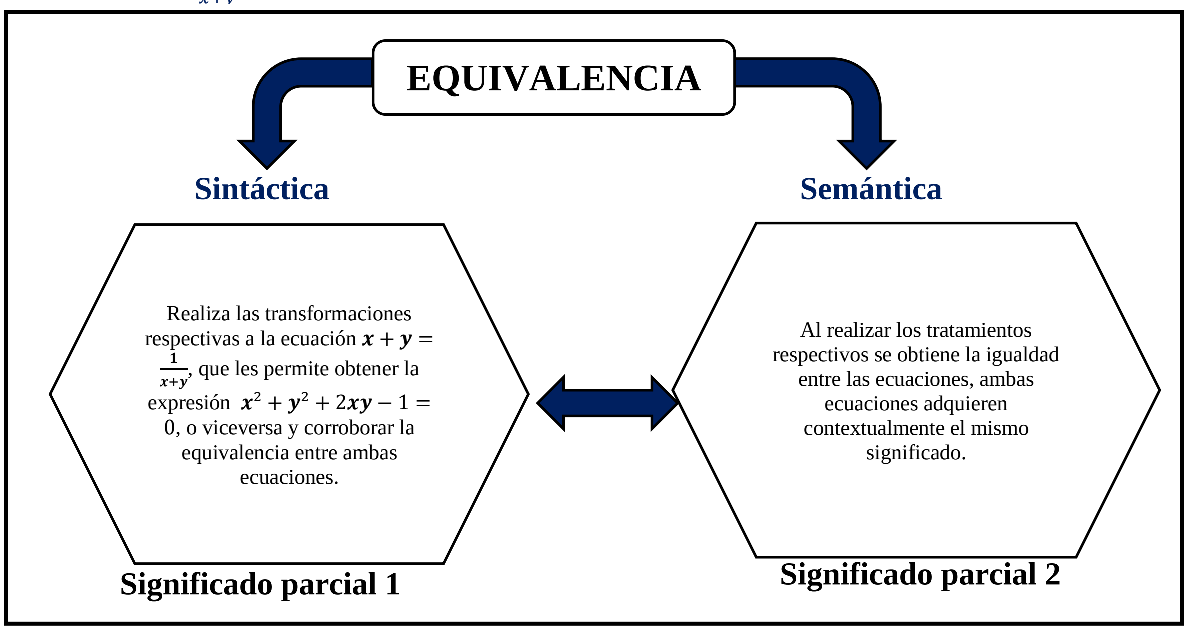
Docente/Ítem	Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ es……………?
Secundaria-1	Representa una figura de puntos (x, y), tales que $(x + y) = 1$	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$, es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, representa una figura de punto (x, y) tales que$(x + y) = 1$
Secundaria-2	Trinomio cuadrado perfecto. Caso de factorización.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, estructuralmente no es igual, pero al resolver la transposición se va completando un cuadrado.
Secundaria-3	La suma del cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$, es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, después de un tratamiento si debe llegar a la misma expresión en principio si diría que no.
Secundaria-4	El cuadrado de la suma de dos números reales cualesquiera menos uno.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$, es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, es una expresión equivalente.
Secundaria-5	Ecuación cuadrática.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, es una ecuación cuadrática, la ecuación no modela la misma situación.
Secundaria-6	Puede representar una ecuación de alguna representación cónica.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, las ecuaciones de las cónicas están dadas de otra manera.
Secundaria-7	La expresión muestra la relación entre dos variables.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, la igualdad me permite expresar la relación que hay entre dos variables X e Y.
Secundaria-8	Expresión algebraica	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, es la misma expresión algebraica.
Secundaria-9	Una ecuación que probablemente es una cónica.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, es una figura cónica.
Secundaria-10	No responde, no sabe	No responde, no sabe	No responde, no sabe
Secundaria-11	Ecuación donde se multiplican y se suman dos números reales.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación $\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, claramente se observa que es uno de los casos de factorización aplicándolos al momento de organizar el polinomio
Secundaria-12	Es una ecuación de segundo grado	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, es una ecuación de segundo grado, es una igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas con $x + y \neq 0$
Secundaria-13	Es una circunferencia	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	No, es una circunferencia.
Secundaria-14	Polinomio de dos variables	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x + y = \frac{1}{x+y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0}$	Sí, polinomio de dos variables.

Docente/Ítem	Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$	¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$	¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es……………?
Secundaria-15	La suma de dos variables elevadas al cuadrado.	No, realiza la demostración.	No, ya que no se garantiza que $x+y\neq 0$. Además, la significación de la representación cambia.
Secundaria-16	Una curva	No, realiza la demostración. Y escribe la condición que $x+y\neq 0$	No, ya que hay una condición
Secundaria-17	Es una ecuación de segundo grado.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una ecuación de segundo grado. El mayor exponente es 2.
Secundaria-18	Es una ecuación de segundo grado.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una ecuación de segundo grado
Secundaria-19	Es una ecuación cuadrática. .	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una ecuación cuadrática.
Secundaria-20	Es una ecuación con dos variables. Es una cuadrática.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente e a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	No, es una ecuación cuadrática ya que, es una igualdad entre un número y su inverso.
Secundaria-21	Es una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, sigue siendo una recta.
Secundaria-22	Polinomio de segundo grado.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	No, porque expresa una igualdad de dos expresiones lineales con x ≠-y o y ≠-x. La suma de dos números reales es igual a su opuesto de esa suma.
Secundaria-23	Es una función de segundo grado.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es ***e***quivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una función de segundo grado.
Secundaria-24	Es una ecuación cuadrática	No, realiza correctamente los cálculos.	Sí, es una ecuación cuadrática.
Secundaria-25	Ecuación cuadrática.	No, realiza la demostración.	No, es una ecuación cuadrática.
Secundaria-26	Es una ecuación de segundo grado	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una ecuación de segundo grado.
Secundaria-27	Es un caso de factorización.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es un caso de factorización.
Secundaria-28	Corresponde a una circunferencia	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es ***e***quivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una circunferencia.
Secundaria-29	Es un trinomio cuadrado perfecto o tiene la forma de una circunferencia.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	No, el planteamiento no es un trinomio cuadrado perfecto.
Secundaria-30	Al graficar son dos líneas paralelas.	No, realiza la demostración.	No sabe, no responde.
Secundaria-31	Sección cónica.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es equivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	No, la ecuación no es una sección cónica porque no tiene su forma.
Secundaria-32	Diferencia de cuadrados.	Sí, muestra paso a paso, que la ecuación$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ es ***e***quivalente a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+2\boldsymbol{xy}-1=0$	Sí, es una diferencia de cuadrados. Transposición de términos.

En la tabla anterior se resaltan en color gris 6 profesores que no realizaron algunos de los tres ítems propuestos, y en color azul se resaltan 10 profesores que realizaron los respectivos cálculos algebraicos que les permitió verificar que ambas expresiones son equivalentes [sintáctico], pero dotar de sentido y significado la expresión $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$, no coincide con la interpretación dada inicialmente, es decir, los dos sentidos otorgados a las expresiones no son relacionados entre sí, o no se articulan. En el siguiente diagrama se muestra la articulación de los dos significados parciales [sintáctico – semántico] que les permite articular los dos sentidos asignados a las ecuaciones dadas y concluir que no solo **sintácticamente** son equivalentes sino **semánticamente** también.

Figura 38

Articulación de los Dos Significados Parciales Sintáctico y Semántico Implícita en la Equivalencia Entre las Ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, *y* $x^2+y^2+2xy-1=0$



Fuente: Adaptado de Chalé-Can et al., (2017)

A continuación, se sintetiza las producciones de los profesores frente a las cuatro tareas propuestas. En relación a la primera tarea, se resaltan los profesores que reconocen que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero desde el aspecto semántico representan situaciones diferentes. Respecto a la interpretación de gráficos estadísticos se seleccionan aquellos profesores que eligen uno de los dos gráficos como aquel diagrama que representa la información suministrada. Frente a la tarea sobre el cálculo de la probabilidad se identifican los profesores que calculan la probabilidad de manera correcta y reconocen que las fracciones $3/6,\ 1/2$ y $4/8$ son equivalentes [sintáctico] pero no admiten que esta última puede representar la probabilidad pedida, en tanto, manifiestan que el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico]. Finalmente, sobre la tarea de interpretación de las ecuaciones se seleccionan aquellos profesores que reconocen que las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y , $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, son equivalentes, realizan los cálculos para verificar la igualdad [equivalencia sintáctica], pero las interpretaciones otorgadas a cada expresión no son relacionadas entre sí, [equivalencia semántica].

Tabla 20

Resumen de las Cuatro Tareas. Rejilla de Respuestas del Grupo de 32 Profesores de Secundaria

Docente/Tareas	Interpretación de expresiones.	Equivalencia de gráficos estadísticos: Consumo de agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando dados	Interpretación de las ecuaciones
Secundaria-1	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ representa una figura de punto (x, y) tales que$(x + y) = 1$
Secundaria-2	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico]	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-3	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico]pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ puede interpretarse como la suma del cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno
Secundaria-4	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ puede interpretarse como el cuadrado de la suma de dos números reales cualesquiera menos uno.
Secundaria-5	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico]pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-6	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación

Docente/Tareas	Interpretación de expresiones.	Equivalencia de gráficos estadísticos: Consumo de agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando dados	Interpretación de las ecuaciones
		en una vivienda del sur de Bogotá.	a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	$x+y=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-7	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico]pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, muestra la relación entre dos variables.
Secundaria-8	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada a través de las fracciones 1/2 y 4/8	La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una expresión algebraica
Secundaria-9	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico A como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una figura cónica.
Secundaria-10	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula de manera incorrectamente la probabilidad pedida.	No sabe no responde
Secundaria-11	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$ son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-12	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico]pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$, son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-13	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$, son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $\mathbf{x+y}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+y}}$ representa otro objeto matemático o modela otra situación

Docente/Tareas	Interpretación de expresiones.	Equivalencia de gráficos estadísticos: Consumo de agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando dados	Interpretación de las ecuaciones
Secundaria-14	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante las fracciones 1/2 y 4/8	La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, es un polinomio de dos variables.
Secundaria-15	Reconoce que las expresiones$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	No realiza la demostración de la equivalencia de las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$,y, $x^2+y^2+2xy-1=0$
Secundaria-16	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	No realiza la demostración de la equivalencia de las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$,y, $x^2+y^2+2xy-1=0$
Secundaria-17	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una ecuación de segundo grado.
Secundaria-18	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada a través de las fracciones 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ecuación de segundo grado.
Secundaria-19	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ecuación de segundo cuadrática.
Secundaria-20	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$,y, $x^2+y^2+2xy-1=0$ son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación x + y $=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación
Secundaria-21	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	No reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1.

Docente/Tareas	Interpretación de expresiones.	Equivalencia de gráficos estadísticos: Consumo de agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando dados	Interpretación de las ecuaciones
Secundaria-22	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico]	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, no es un polinomio de segundo grado.
Secundaria-23	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una función de segundo grado.
Secundaria-24	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante las fracciones 1/2 y 4/8	No realiza la demostración de la equivalencia de las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$
Secundaria-25	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula de manera incorrectamente la probabilidad pedida.	No realiza la demostración de la equivalencia de las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$
Secundaria-26	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico]pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una ecuación de segundo grado
Secundaria-27	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada a través de las fracciones 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es un caso de factorización.
Secundaria-28	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, corresponde a una circunferencia
Secundaria-29	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Calcula la probabilidad establece la equivalencia entre 3//6, 1/2 y 4/8 [sintáctico] pero 4/8 no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 caras y no 8 [semántico].	Desde lo sintáctico reconoce que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$, son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación

Docente/Tareas	Interpretación de expresiones.	Equivalencia de gráficos estadísticos: Consumo de agua	Cálculo de la probabilidad: Lanzando dados	Interpretación de las ecuaciones
Secundaria-30	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada a través de las fracciones 1/2 y 4/8	No realiza la demostración de la equivalencia de las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$
Secundaria-31	Reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y 3n son equivalentes [sintáctico] pero representa situaciones diferentes [semántico].	Elije el gráfico B como el diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada por medio de las fracciones 1/2 y 4/8	La ecuación $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\frac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$, no corresponde a una sección cónica.
Secundaria-32	Admite que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número.	Reconoce que los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda del sur de Bogotá.	Reconoce que la probabilidad pedida puede ser expresada mediante las fracciones 1/2 y 4/8	La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es una diferencia de cuadrados.

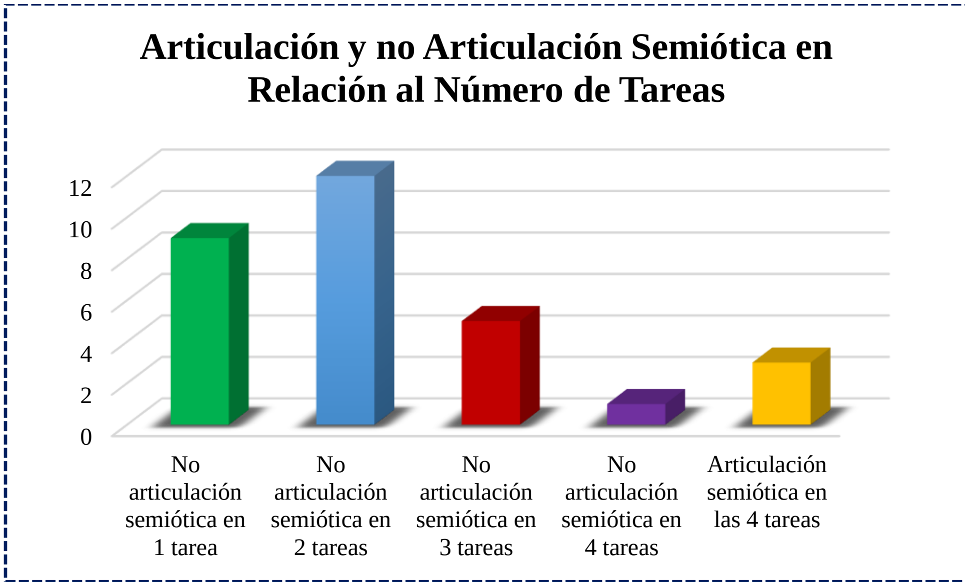
Nota.

No articulación semiótica en una tarea.
No articulación semiótica en dos tareas.
No sabe o realiza procesos incorrectos.
No articulación semiótica en tres .
No articulación semiótica en las cuatro.
Articulación semiótica en las cuatro.

En la rejilla anterior se resaltan en amarillo 9 profesores que no logran articular los dos significados parciales **sintáctico** y **semántico** en una tarea; en naranja se resaltan 12 profesores que no realizan dicho reconocimiento en dos tareas, en verde se resaltan 5, en azul se resalta 1 profesor en cuatro tareas y en blanco se resaltan 3 profesores que relacionan entre sí, los sentidos asignados a las representaciones semióticas en las cuatro tareas. Así mismo, 1 profesor realiza la articulación en tres tareas y en una tarea no realiza los cálculos correctos y otro profesor que articula en dos tareas y en las otras dos realiza los cálculos erróneos [los profesores no son contabilizados en la gráfica siguiente grafica].

Figura 39

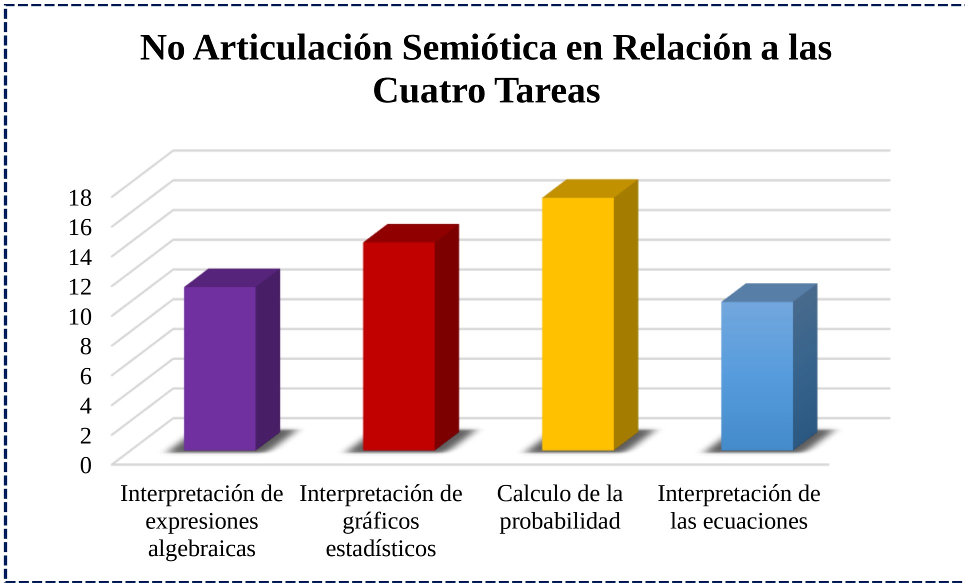
Articulación y No Articulación Semiótica en Relación al Número de Tareas



En la anterior gráfica se muestra la distribución por tareas así: Frente a los resultados 11 profesores reconoce que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [equivalencia sintáctica] pero representa situaciones diferentes [equivalencia semántica]; 14 elijen uno o ninguno de los gráficos como aquel diagrama que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior en una vivienda ubicada en el sur de Bogotá; 17 profesores calculan la probabilidad pedida y establece la equivalencia entre 3/6, 1/2 y 4/8 [equivalencia sintáctica] pero expresan que 4/8, no puede representar la probabilidad pedida debido a que, el dado tiene 6 y no 8 caras [equivalencia semántica] y 10 profesores desde el aspecto **sintáctico** reconocen que las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y, $x^2+y^2+2xy-1=0$, son equivalentes, pero desde el punto de vista semántico la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, representa otro objeto matemático o modela otra situación.

Figura 40

No Articulación Semiótica en Relación a las Cuatro Tareas



Para conformar el grupo de profesores que hacen parte del estudio de caso colectivo, se seleccionaron aquellos profesores que en mínimo en tres tareas no realizan una articulación semiótica. El grupo de educación básica primaria estuvo conformado por los profesores: primaria-3, primaria-4, primaria-9, primaria-31, primaria-32. Para efectos de las configuraciones cognitivas, las funciones semióticas y el análisis a estas producciones, se emplea la notación de A, B, C, D, E, respectivamente que hace referencia a los cinco profesores en su orden, junto a la clasificación de cada grupo, primaria o secundaria. Frente al grupo de profesores de secundaria el estudio de caso estuvo conformado por 6 profesores: secundaria-1, secundaria-12, secundaria-13, secundaria-22, secundaria-26, y secundaria-31 que serán nombrados como secundaria A. B, C, D, E y F respectivamente, distribuidos por tareas así: 5 profesores no articulan el aspecto semántico con el sintáctico en la tarea sobre interpretación de expresiones, 5 en la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos, 5 en el cálculo de la probabilidad y 4 profesores en la tarea de interpretación de ecuaciones. En total de las 128 producciones realizadas por los profesores, 34 de estas serán analizadas en el Capítulo 6, correspondiente al análisis de los resultados. Para analizar las producciones realizadas por los profesores se emplearán elementos de análisis propuestos en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, específicamente se identifica las configuraciones cognitivas activadas por éstos y las relaciones que los profesores establecen por medio de las funciones semióticas que emergen en el proceso de significación.

CAPÍTULO 6
PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y CONFIGURACIONES COGNITIVAS ASOCIADAS A TAREAS ESPECÍFICAS

El presente capítulo corresponde al análisis de los datos de investigación [fase pos-activa del estudio de caso colectivo]. Se realiza un análisis de las producciones de 11 profesores que hacen parte del estudio, clasificados en dos grupos [5 profesores de primaria y 6 de secundaria], quienes mínimo en tres tareas de las cuatro propuestas, aplicaron una serie de procedimientos y reglas, que les permitió obtener otra expresión obtenida mediante tratamiento y con ello verificaron la igualdad entre ambas expresiones [equivalencia sintáctica], pero dotar de sentido y significado dichas expresiones, impidió el reconocimiento de la equivalencia semántica entre ambas expresiones, a lo que Rojas (2012) ha denominado **no articulación semiótica.** Inicialmente se presenta una rejilla en la que se organiza y sintetiza la información correspondiente en relación a las soluciones y argumentos dados por los profesores, posteriormente se hace uso de herramientas de análisis desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), en tanto, posibilitó describir los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas por tratamiento en términos de prácticas, configuraciones cognitivas de objetos primarios y procesos activados en estas, así como, identificar las dificultades que encontraron los profesores para relacionar los sentidos asignados entre sí, por medio de las relaciones que establecen mediante las funciones semióticas. Se realiza un análisis de tipo descriptivo-interpretativo, tanto de las configuraciones activadas por los profesores como de las entrevistas semiestructuradas basada en tareas realizadas a éstos (Godino, Batanero y Font, 2007).

6.1. Consolidación del Estudio de Caso Colectivo

Se analizan las producciones y entrevistas de los profesores que hacen parte del estudio de caso colectivo, seleccionados entre los 64 profesores que conforman la población total de la investigación fruto del criterio de selección [no articulación semiótica mínimo en tres tareas]. Se clasifican los profesores en dos grupos, uno de primaria, cuya característica es la ausencia de una formación específica en educación matemática, pero que tienen a su cargo esta asignatura, otro, el grupo de profesores de secundaria que se caracteriza por tener conocimientos en educación matemática. Como se mencionó en el capítulo 5 los profesores son denominados con la letra A, B, C, D, E y F, junto a la etiqueta [primaria-secundaria]. El grupo de profesores de primaria contó con la participación de: 1 profesora de ***primaria-A*** licenciada en lenguas modernas, con estudios de maestría culminada y con 11 años de experiencia; ***primaria-B*** licenciada en matemáticas, con estudios de especialización y con 17 años de experiencia; ***primaria-C*** licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, con estudios de maestría culminada y 5 años de experiencia en básica primaria; ***primaria-D*** licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, con estudios de maestría culminada y 10 años de experiencia; ***primaria-E*** licenciada en educación básica primaria con estudios de maestría y 14 años de experiencia en básica primaria. Este grupo cuenta con tres profesoras con conocimientos en matemáticas y dos profesores con formación no matemática. El grupo de profesores de secundaria fue conformado por: ***secundaria-A,*** licenciado en matemáticas, con estudios de maestría culminada y con 32 años de experiencia; ***secundaria-B*** licenciado en matemáticas, con estudios de maestría en curso y con 6 años de experiencia; ***secundaria-C*** licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas, con estudios de maestría en curso y con 12 años de experiencia; ***secundaria-D*** licenciada en física y matemáticas, con estudio de maestría culminada y con 12 años de experiencia; ***secundaria-E*** licenciado en matemáticas, con estudios de especialización y con 27 años de experiencia; ***secundaria-F*** licenciado en matemáticas, con maestría culminada y 15 años de experiencia. Respecto al grupo de profesores de secundaria todos cuentan con estudios de licenciatura ya sea en educación básica con énfasis en matemáticas, en física y matemáticas o en matemáticas específicamente. Los dos grupos de profesores cuentan con estudios de posgrados en proceso o culminado.

Frente a las entrevistas semiestructuradas basadas en tareas se realizaron un total de 20 entrevistas, de las cuales 11 pertenecen al estudio de caso y 9 pertenecen a unos profesores que el cálculo aritmético y la aplicación de reglas y procedimientos les permitió admitir la equivalencia sintáctica y relacionar los dos sentidos entre sí [equivalencia semántica], pero en las producciones realizadas no se evidencia una relación especifica con la tarea propuesta. Por ejemplo, en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad se evidencia que los profesores reconocen la equivalencia entre las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$, pero no justifican, ni enlazan la fracción $4/8$, con el evento aleatorio que se propone en la tarea. En el caso de los profesores de primaria las entrevistas giraron en torno a cuestionarios semi estructurados: una sobre la interpretación de las expresiones [cuestionario 1]; sobre probabilidad [cuestionario 2]; sobre interpretación de gráficos estadísticos [cuestionario 3]. En el caso particular del grupo de profesores de primaria no se tendrán en cuenta los resultados obtenidos en la tarea sobre la secuencia de números cuadrados, puesto que, el trabajo con número específicos [numérico] posibilitó que estos realizaran una articulación semiótica. Para el caso del grupo de profesores de secundaria las entrevistas giraron en relación a cuatro cuestionarios, uno sobre la interpretación de las expresiones [cuestionario 1]; sobre probabilidad [cuestionario 2]; sobre interpretación de gráficos estadísticos [cuestionario 3]; y sobre la interpretación de la ecuación [cuestionario 4]. Cada entrevista se centró específicamente en las tareas que no realizan una articulación semiótica, esto es, la no relación entre sí, de los sentidos asignados a cada representación o expresión propuesta en la tarea, es decir, aquellos profesores que aplican ciertas reglas y procedimientos [tratamiento] que les permite obtener otra expresión, y con ello, corroborar la equivalencia sintáctica entre las expresiones, pero dotar de sentido y significado impide que se admita la equivalencia semántica y que estos sean relacionados entre sí. Finalmente se analizan las soluciones realizadas por los profesores a la luz de los resultados reportados por Rojas (2012) quien documenta las dificultades que encuentran los estudiantes al articular sentidos asignados a representaciones semióticas al solucionar tareas que impliquen transformaciones semióticas de tipo tratamiento, esto con el fin de encontrar similitudes y diferencias entre los razonamientos y argumentos dados por los estudiantes y los dados por los profesores.

6.2. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuraciones Cognitivas de Objetos Matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Primaria a la Tarea Sobre Interpretación de Expresiones

Trabajo realizado por el grupo de profesores de primaria-A, B, C, D y E, sobre la tarea de interpretaciones de expresiones algebraicas [equivalencia de expresiones algebraicas]. En un inicio se presenta la rejilla con la información del trabajo realizada por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta los diagramas obtenidos a partir de las producciones realizadas que corresponde a la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios activada por cada uno. Así mismo, se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la transcripción y las grabaciones realizadas, que permiten reforzar o ampliar las configuraciones movilizadas por los profesores y las funciones semióticas establecidas por estos.

Tabla 21

Rejilla de Respuestas del Grupo de 5 Profesores de Primaria. Tarea Interpretación de las Expresiones

Docente/Ítem	1.Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $3n$	2. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la expresión $3n$?	4. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como el triple de un número?
Primaria- A	Cualquier número natural tres veces.	A un número cualquiera se le resta 1 luego se hace lo mismo con la suma y luego se suma todo.	Son expresiones que se agrupan y llegan al mismo resultado.	No, ya que n puede ser cualquier número natural y no necesariamente indica el triple.
Primaria- B	El triple de un número	La suma tres números consecutivos.	Tienen en común n.	No, porque $(n+1) \neq n \neq (n-1)$
Primaria- C	Se triplica una cantidad cualquiera.	La suma de tres números consecutivos.	Existe una equivalencia entre dos expresiones matemáticas.	No, como expresión sumo 3 términos que no son equivalentes, [consecutivos].
Primaria- D	Tres veces el número n. Lineal	Realiza los cálculos $n=1,\ n=2$.	Son equivalentes	No, desde mi perspectiva se están sumando el antecesor, sucesor y el número.
Primaria- E	Tres veces el número (...).	Darle un valor n a cada operación.	En ambos en ambos casos la n es común	No, porque yo le puedo asignar diferentes valores a n que hace que no siempre sea la operación del triple de un número.

Entre las interpretaciones que realizan los profesores a las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ se destacan: «*3 multiplicado por* n», «*triple de un número*», y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada con la suma de tres números, específicamente de tres números consecutivos, traducción del lenguaje simbólico al natural y la realización de procedimientos como el asignar un número especifico de n. En su aspecto **sintáctico** los profesores verifican y admiten la igualdad entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n,$ desde el aspecto **semántico** las dos expresiones son asociadas con objetos o situaciones matemáticas diferentes. En la siguiente rejilla que se relaciona en la tabla 22, se sintetiza las producciones de los cinco profesores, que hacen parte del estudio de caso, se muestra, que el aspecto **sintáctico** permite reconocer la equivalencia entre ambas expresiones, pero el aspecto **semántico** impide que se articulen los sentidos asignados a éstas y no se relacione los sentidos asignados entre sí.

Tabla 22

Rejilla Síntesis del Reconocimiento de la Equivalencia de Expresiones Algebraicas por Parte de los Profesores de Primaria

	Primaria- A	Primaria- B	Primaria- C	Primaria- D	Primaria- E
Reconoce sintácticamente la equivalencia entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)=3n$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede interpretarse como el triple de un número.	NO	NO	NO	NO	NO

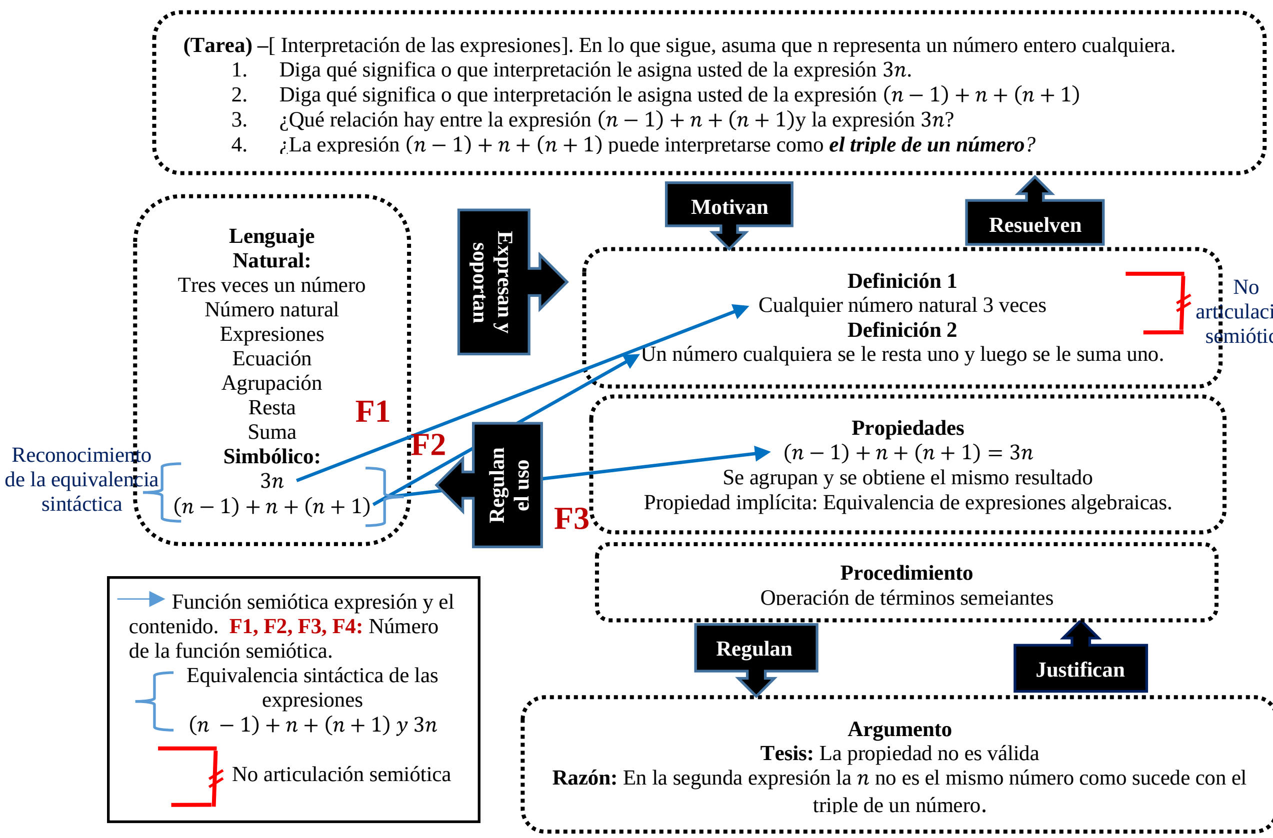
En los diagramas siguientes se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios, obtenida a partir del trabajo realizado por cada profesor de primaria, que permiten evidenciar los objetos matemáticos a los que recurren los profesores para dar solución a las tareas propuestas y los sentidos asignados a cada expresión. En las configuraciones cognitivas se muestra que los objetos matemáticos primarios no actúan de manera aislada, tal y como lo sostienen Font, Godino y Gallardo (2013) sino que éstos se vinculan entre sí, en tanto, las situaciones o problemas son el origen y motivación de la actividad matemática, el lenguaje actúa como soporte para representar a las entidades, y a su vez, sustentan las acciones realizadas, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. En cada una de las configuraciones se señalan [mediante una flecha azul] las funciones semióticas establecidas que relaciona un **antecedente/expresión** con el **consecuente/contenido**, la letra **F1**, **F2, F3**, etc., refiere al número de funciones semióticas que establecen los profesores en cada tarea; el corchete de color azul representa la igualdad sintáctica entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n,$ las líneas de color rojo refieren a la no articulación semiótica es decir, la imposibilidad de conectar el aspecto sintáctico con el semántico.

Seguido a la configuración se presenta la transcripción que corresponde a la entrevista que se realizó con cada profesor que permite ampliar o reforzar los argumentos y las relaciones que establecen a través de las funciones semióticas en las soluciones dadas inicialmente en el proceso de significación. La transcripción se presenta en cuatro columnas: la primera, hace referencia al intervalo de tiempo [minutos y segundos] transcurridos; en la segunda, aparece la notación empleada para los interlocutores [profesor /entrevistadora]; la tercera, hace referencia al número de cada fragmento en relación a toda la transcripción con el fin de hacer uso de esta notación en el análisis de la entrevista; y en la cuarta, aparece el dialogo que relaciona los argumentos dados por el profesor y las preguntas realizadas por la entrevistadora. Con los profesores entrevistados no se abordaron todas las tareas propuestas, sino aquellas que evidencia la no articulación semiótica. La entrevista se llevó a cabo de manera lineal, motivo por la cual, en las tareas siguientes el intervalo de tiempo no inicia en el minuto 00:00, y en otros casos se realizó luego de abordar las cuatro tareas propuestas a cada grupo específico.

6.2.1. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–A

Figura 41

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-A. Interpretación de Expresiones Algebraicas



En términos de los objetos matemáticos primarios activados por la profesora [Primaria-A] en el proceso de significación, la expresión $3n$ es asociada como cualquier número natural tres veces y $(n-1)+n+(n+1)$ como un número cualquiera que se le resta uno y luego se le suma uno [correspondencia entre el lenguaje simbólico con el lenguaje natural] frente a las propiedades, la profesora establece la relación de equivalencia entre expresiones y en los procedimientos aplica la operación de términos semejantes con la cual corroboró la igualdad. La profesora reconoce la igualdad entre las expresiones [equivalencia sintáctica], pero no admite la veracidad de la conjetura «*la expresión* $(n-1)+n+(n+1)$ *puede ser interpretada como el triple de un número*» , en tanto, la n no es el mismo número [tres números diferentes] como sucede con el triple de un número [equivalencia semántica].

La profesora establece tres funciones semióticas que se relacionan entre sí: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente *«tres veces cualquier número natural»;* otra, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente *«un número cualquiera se le resta uno, luego se le suma uno»;* y una tercera, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$» [agrupación de términos semejantes] el consecuente «*expresiones equivalentes*». La profesora realiza transformaciones de tratamiento que le permite transformar $(n-1)+n+(n+1)$ en $3n$, así como, aceptar la igualdad entre ambas expresiones [equivalencia sintáctica], argumenta que dado que en $(n-1)+n+(n+1)$ la n no es el mismo número como en el caso del triple de un número que relaciona tres veces un número igual, no puede ser interpretada como el *triple de un número.* Hecho que impide que se relacione la cuarta función semiótica **F4**, con las funciones **F1**, **F2** y **F3**. Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo [0:01-4:31] que corresponde a la transcripción de la entrevista que se realizó a la profesora.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	No	Diálogo
$[0{:}00-1{:}57]$	Entrevistadora	1	Buenos días. Gracias por regalarme estos minutos de reflexión. No vamos a hablar de todas las tareas sino de algunas. Para comenzar iniciemos con la tarea sobre las interpretaciones de expresiones [la entrevistadora compartió la pantalla con las soluciones realizadas por la profesora]. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea. ¿Se ve la pantalla?
$[1{:}57-1{:}59]$	Primaria-A	2	Si. [Indicando que si con la cabeza]
$[1{:}59-3{:}05]$	Entrevistadora	3	[Inicia realizando un resumen de la solución dada por la profesora a la tarea]. Bueno, por ejemplo, en el primer ítem [Señalando la pantalla con el cursor] la profesora escribió que la expresión 3n puede interpretarse como un número natural tres veces, frente a la interpretación de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ escribió que corresponde a un número cualquiera al que se le resta uno y luego se le suma uno. Y al resolver $(n-1)+n+(n+1)$ [operando los términos semejantes] se obtiene $3n$. En el cuarto ítem escribió que, aunque las expresiones son iguales corresponde a situaciones diferentes y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, no puede ser interpretada como el triple de un número. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión no podía ser considerada como el triple de un número.
$[3{:}05-3{:}25]$	Primaria-A	4	Bueno. Si, [Indicando si con la cabeza] es que cuando tenemos la expresión 3n, yo entiendo, que se refiere a un mismo número y en la expresión $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ a números diferentes, ósea no son tres veces el mismo número, sino que son números diferentes ¿si me hago entender?

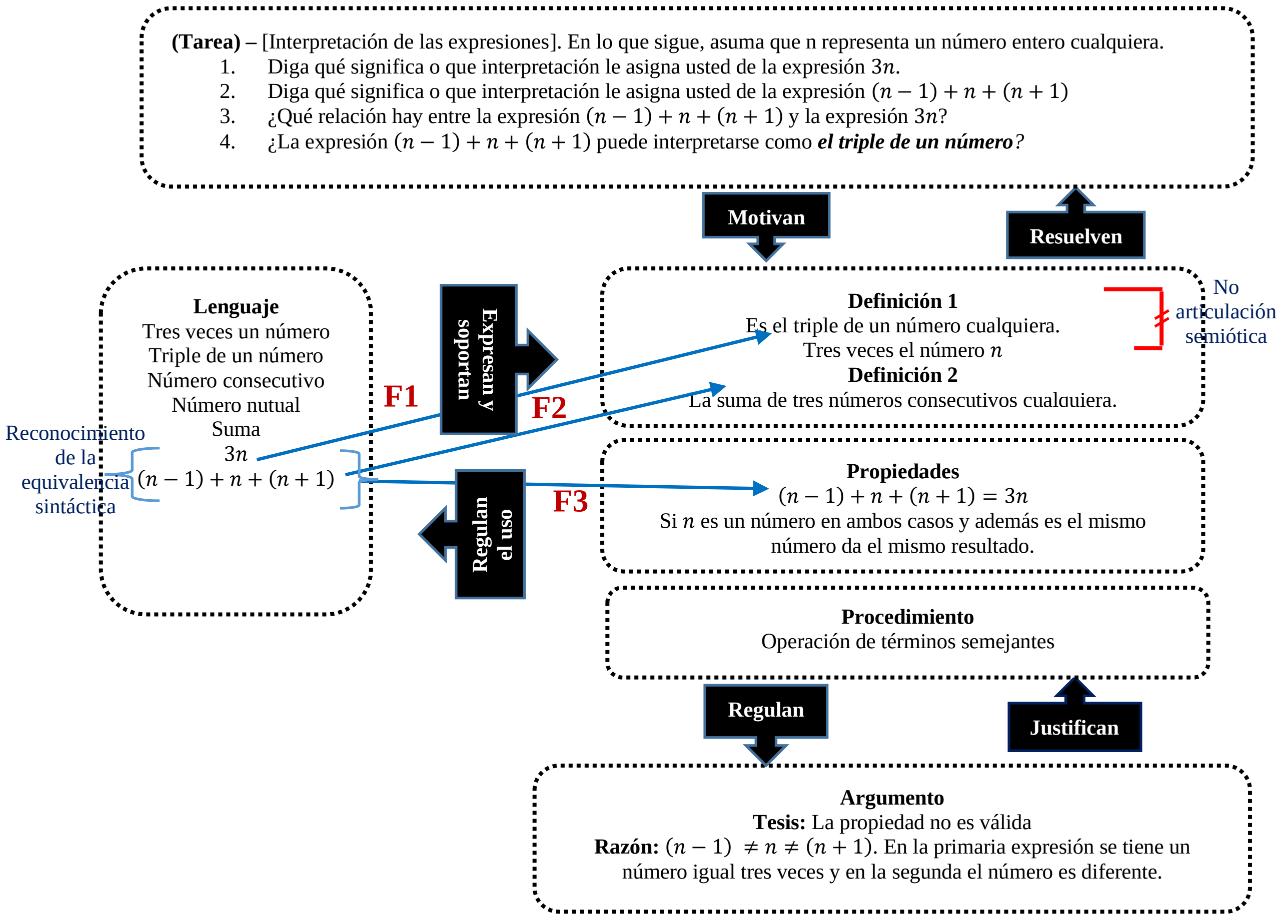
$[3{:}25 - 3{:}29]$	Entrevistadora	5	Vamos a ver si le entendí cuándo usted habla de números diferentes se refiere a la segunda expresión, es decir a $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ los números son diferentes. Podríamos ampliar un poco esa diferencia.
$[3{:}29 - 4{:}31]$	Primaria-A	6	Si, [Indicando que si con la cabeza] cuando se tiene las tres n se podría dar como el triple de cualquier número y entonces como n es cualquier número natural en la segunda expresión no necesariamente es el triple de algo, ósea yo me remití a la expresión cuando tengo la expresión 3n por ejemplo, si le doy el valor de 2 son tres veces 2 pero acá [señala con el dedo índice la pantalla] pues cambia porque seria 2-1= 1, 2 y 2+1=3 es decir, 1+2+3=6 tres números diferentes.

En la anterior transcripción se muestra los argumentos que justifican las funciones semióticas establecidas inicialmente por la profesora y que justifican las interpretaciones realizadas en la solución inicial. El fragmento 4, relaciona la expresión $3n,$ con cualquier número natural 3 veces, evidenciada en la función semiótica **F1**; en el fragmento 6, explicita un caso particular con $n = 2$, para explicar, que $(n-1)+n+(n+1)$ asocia tres números diferentes, donde se obtiene $2-1=1; 2$ y $2+1=3$; cuyo resultado es 6, justifica las relaciones establecidas en las funciones semióticas **F2** y **F3**. Tanto en la solución de la tarea como en la entrevista, la profesora argumenta que el hecho que, en la primera expresión se relacione tres números iguales y la segunda tres números diferentes, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número. Aspecto que pone en evidencia un hecho cultural, y es que la expresión $3n$, comúnmente es asociada con una multiplicación o como una suma reiterada $(2+2+2=6)$ de forma abreviada $(3*2=6)$ y la segunda, con una suma de tres números diferentes, es decir que para la profesora estas dos expresiones modelan situaciones diferentes.

6.2.2. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–B

Figura 42

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-B Interpretación de Expresiones Algebraicas



Con relación a la configuración cognitiva activada por la profesora [Primaria-B] la expresión $3n$ es interpretada como el triple de un número cualquiera o tres veces el número n, y $(n-1)+n+(n+1)$ como la suma de tres números consecutivos. Frente a las propiedades: la profesora reconoce que sí n es un número común en ambos casos y además la n toma el mismo valor se obtiene el mismo resultado; como procedimiento o acciones, se destaca la operación de términos semejantes que le permite establecer la relación de igualdad entre ambas expresiones. Respecto a los argumentos dados, la profesora manifiesta la validez de la conjetura, desde su aspecto sintáctico, pero desde el aspecto semántico la conjetura no es válida, en tanto, alude que en la segunda expresión se tiene $(n-1) \neq n \neq (n+1)$.

La profesora establece tres funciones semióticas que son relacionadas entre sí: la primera, entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*el triple de un número cualquiera o tres veces el número n*»; la segunda, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*la suma* *de tres números consecutivos cualquiera*»; y una tercera entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$, y $3n$» [si **n** es un número en ambos casos y además es el mismo número da el mismo resultado] Aunque reconoce la equivalencia sintáctica, obtenida mediante transformaciones de tratamiento desde el aspecto semántico, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de número, en tanto, se tiene números diferentes $(n-1) \neq n \neq (n+1)$. Hecho que deja en evidencia la no relación de la función semiótica **F4**, con las funciones **F1, F2** y **F3.** Aspecto que se profundiza el siguiente en el intervalo de tiempo [0:07-7:49] que corresponde a la entrevista realizada a la profesora:

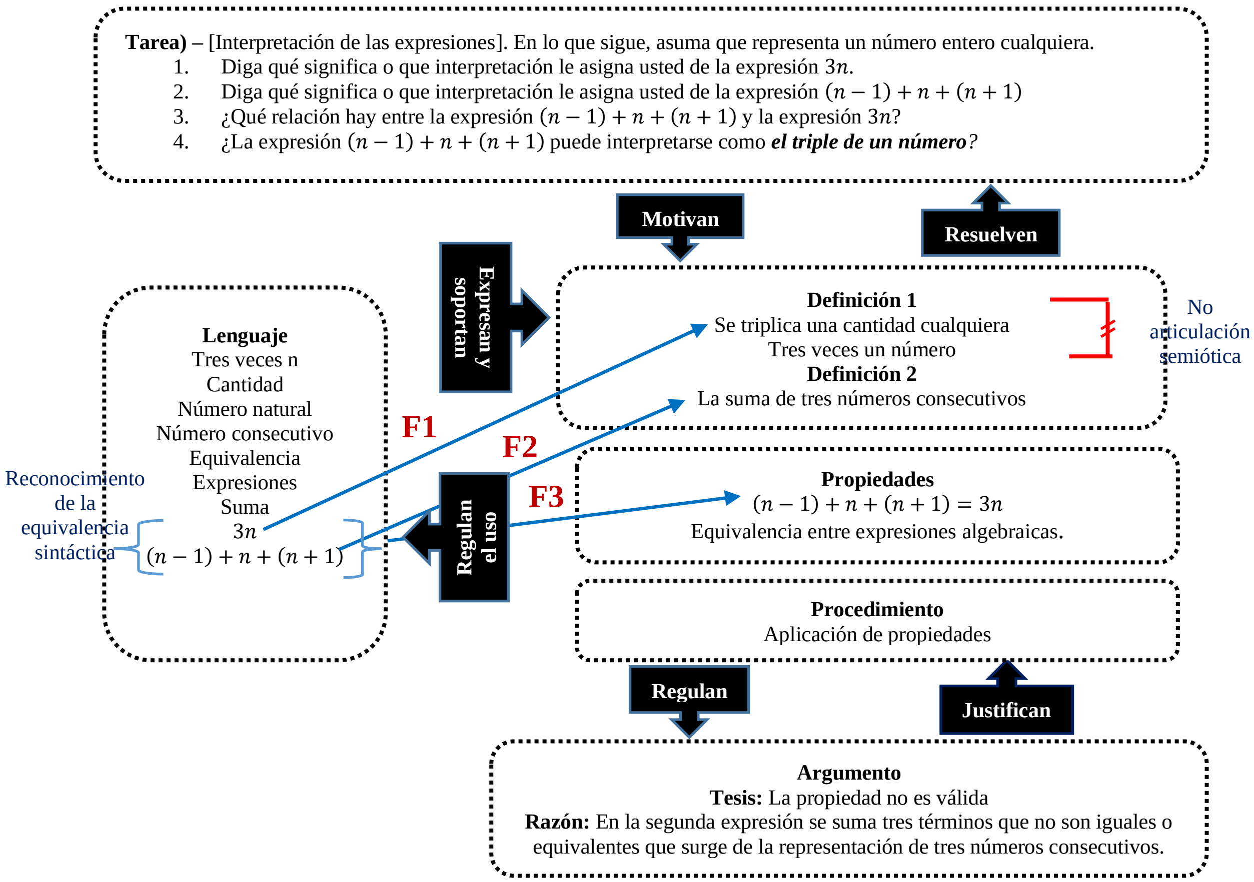
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[0{:}07-2{:}25]$	Entrevistadora	1	Muchas gracias por brindarme estos minutos para esta pequeña charla. Iniciemos con la tarea sobre interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las soluciones de la profesora]. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea. Pregunta ¿Alcanza a ver mi pantalla?
$[2{:}25-2{:}26]$	Primaria-B	2	Si señora. [Indicando que si con la cabeza]
$[2{:}26-3{:}47]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación, comienza realizando un resumen de la solución dada por la profesora a la tarea]. Frente a la primera pregunta la profesora escribió que la expresión $3n$ corresponde al triple de un número, en cuanto a la interpretación de $(n-1)+n+(n+1)$ escribió que relaciona la suma de tres números consecutivos. Reconoció que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes. En el cuarto ítem que indagaba si $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser vista como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que no se podía interpretar la expresión como el triple de un número.
$[3{:}47-5{:}56]$	Primaria-B	4	O.K. Pues yo siento que, si uno les dice a los estudiantes que representa lo mismo, se le va generar una confusión, a pesar de que son expresiones equivalentes, en contexto son cosas que son totalmente diferentes. Entonces uno debe tratar de separar ambas interpretaciones. Decir que los sucesores y el triple de o tres veces algo, pues como que choca a pesar de que tienen el mismo, valor, la misma equivalencia, las expresiones, pues no representan lo mismo en lenguaje natural.
$[5{:}56-5{:}57]$	Entrevistadora	5	Cuando usted habla de contexto a que se refiere específicamente.
$[5{:}57-7{:}49]$	Primaria-B	6	A bueno [guarda silencio unos segundos] cuando hablo de contexto me refiero, por ejemplo, que si uno le pone una situación en lenguaje algebraico o en lenguaje natural las representaciones [pues], son diferentes [sí], en ambas expresiones, los contextos son diferentes. Cuando yo le mencione ese lenguaje natural al chico para que lo pase a lenguaje algebraico son diferentes son dos representaciones diferentes, a pesar de que si el chico empieza a evaluar la letra pues encontraría el mismo valor entonces son como dos respuestas diferentes a pesar que las expresiones son equivalentes.

La anterior transcripción muestra que la profesora recurre a justificar las funciones semióticas que estableció inicialmente. En el fragmento 4, manifiesta que los contextos en las dos expresiones son distintos, puesto que, en lenguaje natural las expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ tienen significados diferentes: en la primera, se tiene el triple de un número; y en la segunda expresión los sucesores de un número y en lenguaje simbólico las dos escrituras son diferentes, donde, $3n \neq (n-1)+n+(n+1)$, para la profesora el contexto de una le indica una multiplicación y en la otra una suma , aspectos que impidieron para que no se articulara el aspecto sintáctico con el semántico. Por otro lado, cada expresión emplea unos procedimientos y reglas específicas que permiten, desde el aspecto **sintáctico** corroborar la igualdad de las expresiones, y desde el aspecto **semántico** las expresiones representan situaciones diferentes, como se señala en el fragmento 6.

6.2.3. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria –C

Figura 43

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-C. Interpretación de Expresiones Algebraicas



La profesora [Primaria-C] relaciona la expresión $3n$ con el triple de una cantidad cualquiera o tres veces un número, y $(n-1)+n+(n+1)$ la asocia con la suma de tres números consecutivos. Frente a las propiedades la profesora reconoce que $(n-1)+n+(n+1)\ y\ 3n$ son equivalentes [sintáctico] y los procedimientos que le permite identificar la relación entre ambas expresiones se resalta la aplicación de propiedades. Respecto a los argumentos dados por la profesora desde el aspecto **sintáctico** las expresiones son iguales, pero desde lo **semántico** la propiedad no es válida, en tanto, en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se suma tres términos que no son iguales, [tres números consecutivos].

En cuanto a las funciones semióticas la profesora establece tres que son relacionadas entre sí: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*el triple de un número cualquiera o tres veces el número* n»; otra entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*la suma de tres números consecutivos cualquiera»*; y una tercera entre la el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$» y el consecuente «*las expresiones son equivalentes*» que posibilita el reconocimiento de la equivalencia **sintáctica** entre ambas expresiones, obtenida mediante transformaciones de tratamiento. A continuación, se presenta la trascripción de la entrevista desarrollada con la profesora, inicia en el minuto 40:08. debido que desde el minuto 0:00 al 39:07 abordo las cuatro tareas.

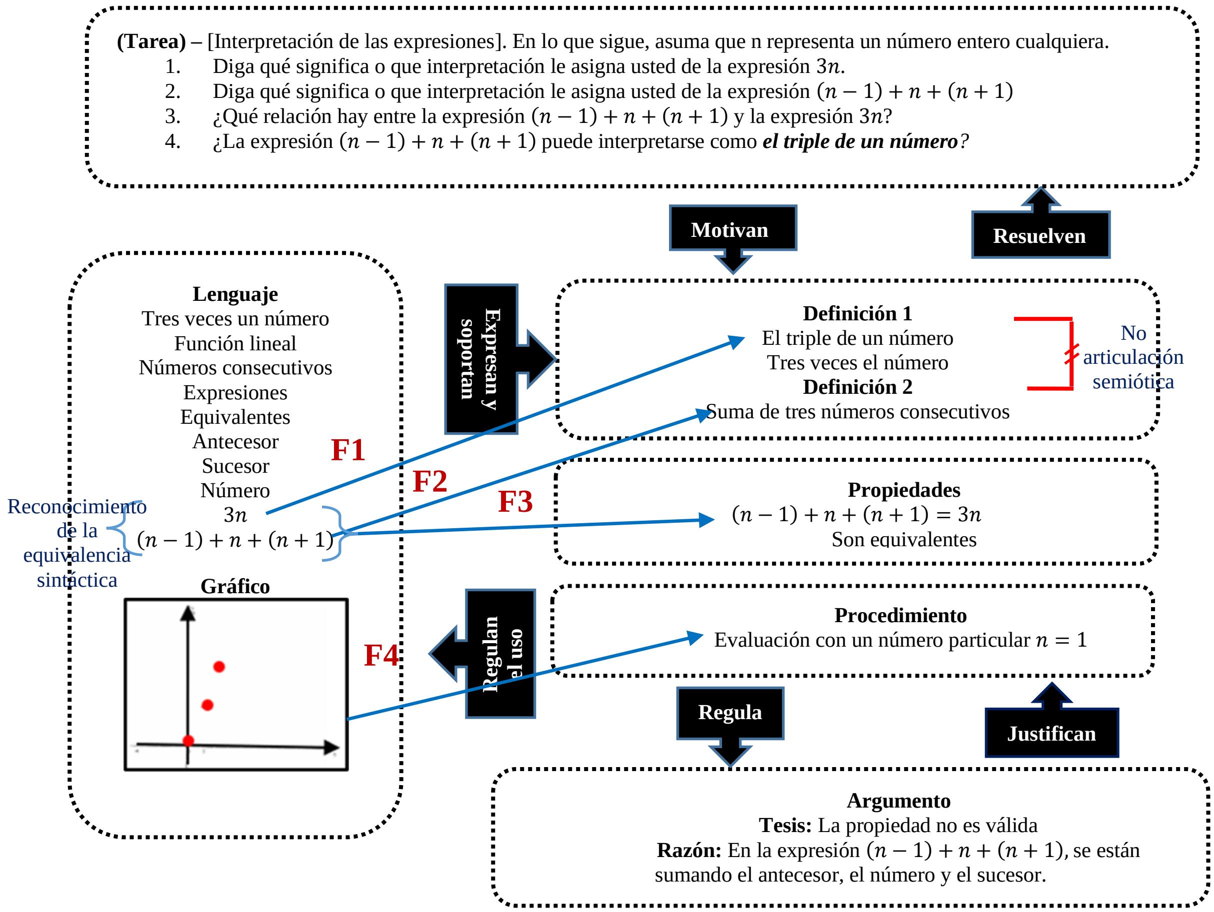
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[40:08-40:12]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la primera tarea sobre la interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones que la profesora le envió]. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea. ¿Si se ve mi pantalla?
$[40:12-40:13]$	Primaria-C	2	Si señora.
$[40:13-40:57]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación]. Frente a la primera pregunta la profesora escribió que la expresión 3n puede ser interpretada como el triple de un número, en cuanto a la interpretación de $(n-1)+n+(n+1)$ escribió que corresponde a la suma de tres números consecutivos. Reconoció que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$. son equivalentes. En el cuarto ítem que indagaba si $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión no podía ser interpretada como el triple de un número.
$[40:57-41:50]$	Primaria-C	4	No [Indicando no con la cabeza] puede ser considera como triple de un número porque, [un momento de silencio] me está expresando situaciones diferentes por ejemplo en la expresión 3n expresa un número igual [sí] es decir tres veces el mismo número y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ representa un número que son diferentes.
$[41:50-42:30]$	Entrevistadora	5	Vamos a ver si le comprendí bien cuándo usted habla de números diferentes se refiere a que en la primera n tengo tres veces el mismo número, por ejemplo; 3 + 3 +3 =9 y en la segunda se tiene $(3-1)=2$; $3+(3+1)=4$; que es 2 + 3 +4=9 y que son números diferentes.
$[42:30-42:31]$	Primaria-C		Aja [Indicando que si con la cabeza]

Como se evidencia en el fragmento 4, la profesora hace énfasis en que la expresión $3n$ se tiene una suma de tres números iguales y $(n-1)+n+(n+1)$ se tiene la suma de tres números diferentes, aspecto que fue corroborado en el fragmento 5, por medio de un ejemplo particular con $n=3$, en la primera expresión se tiene $3+3+3=9$ y en la segunda $2+3+4=9$, siendo este un aspecto fundamental para demostrar la equivalencia **sintáctica** entre ambas expresiones pero desde el aspecto **semántico** las expresiones relaciona situaciones diferentes, en tanto relaciona tres números diferentes.

6.2.4. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–D

Figura 44

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria-D. Interpretación de Expresiones Algebraicas



La profesora [Primaria-D] asocia la expresión $3n$ con tres veces un número o una función lineal, y $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada con la suma tres números [antecesor, número, sucesor]. En términos de la relación entre ambas expresiones, la profesora reconoce que $(n-1)+n+(n+1)=3n$ son equivalentes [aplicación de propiedades]. En cuanto a las funciones semióticas, establece cuatro que se relacionan entre sí: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*el triple de un número cualquiera o tres veces el número n*»; otra, entre el antecedente a «*cada número se multiplica por tres*» [le asigna casos particulares] y el consecuente «*una función lineal*»; y la tercera entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*suma de tres números consecutivos*», una cuarta entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*expresiones equivalentes*». Aunque reconoce que las dos expresiones son iguales [equivalencia sintáctica], obtenida mediante transformaciones de tratamiento, la profesora argumenta que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, en tanto, se está sumando el sucesor y el antecesor de un número [equivalencia semántica] Aspecto que fue corroborado en el intervalo $[0:03-6:06]$ que corresponde a la entrevista desarrollada a la profesora.

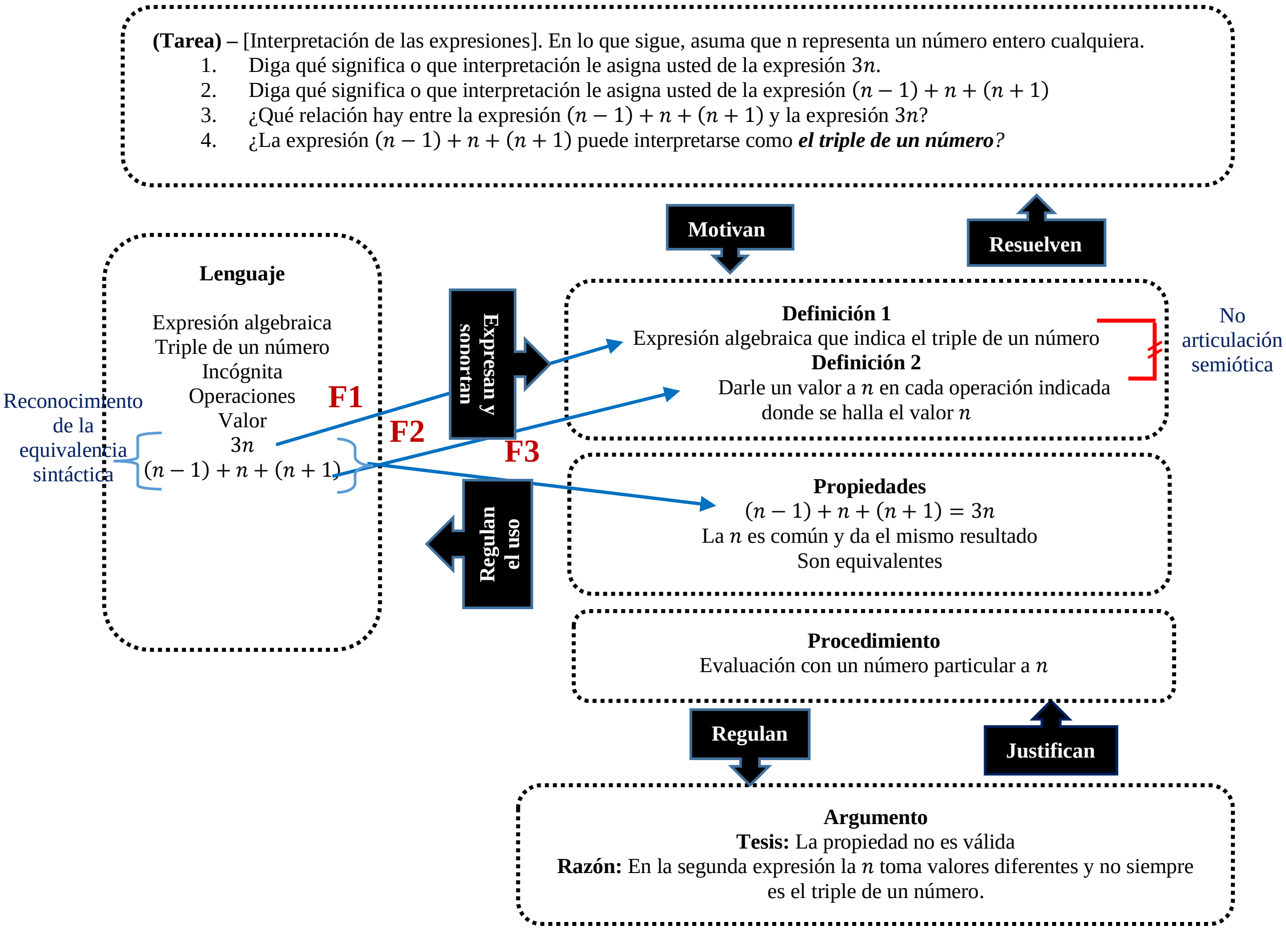
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[0:03-2:27]$	Entrevistadora	1	Buenas tardes profe. Gracias por dedicar unos minutos de su tiempo para charlar un poco sobre las soluciones realizadas en cada tarea, no vamos a abordar todos los ítems sino algunos de estos. Comencemos con la tarea que corresponde a la interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones del docente] ¿alcanza a ver mi pantalla?
$[2:27-2:29]$	Primaria-D	2	Si señora. [Indicando que si con la cabeza]
$[2:29-3:32]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación]. Frente a la primera pregunta la profesora escribió que la expresión de $3n$ puede ser interpretada como el triple de un número o tres veces el número y $(n-1)+n+(n+1)$ corresponde a la suma de tres números consecutivos. También las dos expresiones son equivalentes. En el cuarto ítem se indagaba si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número.
$[3:32-5:29]$	Primaria-D	4	Bueno [guarda un momento de silencio] las expresiones son equivalentes pero una cosa es tener un número completico, por ejemplo, en la expresión $3n$ que es un número multiplicado por tres o la suma de tres números iguales y en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es la suma de tres números diferentes, el número, el sucesor y el antecesor.
$[5:29-5:37]$	Entrevistadora	5	Pero si se hacen las operaciones obtienen el mismo resultado ¿Cierto?
$[5:37-6:06]$	Primaria-D	6	Sí [Indicando que si con la cabeza] desde mi perspectiva no significaría lo mismo, porque no son lo mismo, como que te digo en la segunda expresión el número no es tres veces [o sea] tengo números diferentes, números distintos [un momento de silencio] así pues digamos en el caso de cuatro en la expresión $3n$ se tendría 12 y en la segunda se tendría 3+ 4 + 5, que es igual a 12. Aunque son los mismos resultados son situaciones diferentes.

El fragmento 4, evidencia que la profesora refuerza los argumentos dados en la solución inicial de la tarea, enfatiza que la expresión $3n$ hace referencia a la multiplicación y $(n-1)+n+(n+1)$ una suma de tres números consecutivos [diferentes]; en el fragmento 6, introduce el concepto de número *«completo»*. Cuando la investigadora pregunta a que refiere el término de «*número completo*», por medio, de un caso particular $n=4$, explica aquello que denomina número completo como aquel número que al ser multiplicado con tres se obtiene 12, es decir es un número igual, en la segunda expresión refiere a números diferentes, en tal caso se tiene $3+4+5$ respectivamente, que son números diferentes. Los números iguales o *«completos»* y diferentes juegan un papel importante para que la profesora no acepte la igualdad entre ambas expresiones desde su aspecto semántico.

6.2.5. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–E

Figura 45

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria-E. Interpretación de Expresiones Algebraicas



En la anterior configuración cognitiva activada por la profesora [Primaria-E] la expresión $3n$ es interpretada como una expresión algebraica que significa el triple de un número, aunque específicamente no asigna un significado a $(n-1)+n+(n+1)$ la profesora reconoce que al darle un valor específico a n en cada operación y realizar las operaciones indicadas, en ambas expresiones se obtiene el mismo resultado. En términos del reconocimiento de la equivalencia desde el punto **sintáctico** reconoce que $(n-1)+n+(n+1)=3n$ [operaciones de términos semejantes] son iguales, pero $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, en tanto, en la segunda expresión se tienen tres números diferentes. La profesora establece tres funciones semióticas que se relacionan entre sí: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*el triple de un número*», otra, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*darle valores a n*» y otra, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*la n común y el mismo resultado*». En cuanto al argumento resalta que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número debido que, la n

toma valores diferentes y no siempre es el triple de un número. Aspecto, que deja en evidencia la no relación de la función semiótica **F4** con las funciones **F1, F2** y **F3,** que fue profundizado en la entrevista que se presenta a continuación correspondiente al intervalo de tiempo $1:27:21$ al $1:28:31$, debido que desde el minuto 0:00 al $1:2O$ la profesora abordo cada una de las tareas propuestas:

Intervalo de tiempo	**Interlocutores**	**N°**	**Diálogo**
$[1:27:21\ -1:27:43]$	Entrevistadora	1	Luego que la docente dio solución a las tareas propuestas [envió sus producciones al WhatsApp de la entrevistadora y se procedió a compartir estas producciones con la profesora]. Se da inicio con la tarea sobre interpretaciones de expresiones algebraicas. la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones del docente]. ¿alcanza a ver mi pantalla?
$[1:27:43-1:27:44]$	Primaria-E	2	Si señora. [Indicando que si con la cabeza]
$[1:27:44-1:28:10]$	Entrevistadora	3	Ante la interpretación de la expresión 3n escribió que corresponde a una expresión algebraica que indica el triple de un número donde n puede representar la cantidad que se asigne, y $(n-1)+n+(n+1)$ corresponde a una operación donde se resuelven las operaciones indicadas que permite hallar el valor final y frente a la relación entre ambas expresiones la profesora reconoce que en ambas expresiones se obtiene el mismo valor. En el cuarto ítem que pregunta si $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretado como el triple de un número. Usted escribió que no porque representa situaciones diferentes ¿Cómo se dio cuenta que representa situaciones diferentes?
$[1:28:10-1:28:31]$	Primaria-E	4	Si [Indicando si con la cabeza] le doy el valor de 3 a la expresión 3n me da 9, cierto [eee] acá tengo 3 más 3 más 3 [Uju] o 3 por 3 que es 9 pero acá [señala la expresión con el dedo índice en la pantalla] (n − 1) por ejemplo, si le asigno el valor de 3, obtengo 3 menos 1 es 2, acá, 3 y acá [señala la expresión en la pantalla] $(n+1)$ es 4, son números diferentes, pero en ambos casos obtengo 9. Para mí no es la misma expresión, aunque se obtengan los mismos resultados.

La anterior transcripción muestra que las justificaciones dadas por la profesora refuerzan los argumentos dados inicialmente y sustentan al proceso de significación de las expresiones algebraicas. En el fragmento 4, la profesora justifica la función **F1,** con un caso particular $n=3$, explica que la expresión $3n$ refiere a números iguales, por ejemplo, al tomar este número se tiene 3 más 3 más 3 que es 9 y en la segunda expresión se tiene números como 2, 3 y 4, que son diferentes, aspecto fundamental para no relacionar la función **F4,** con las funciones semióticas **F1, F2** y **F3,** y que hace que no articule el aspecto **semántico** con el **semántico**.

6.2.6. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuración Cognitiva de Objetos matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Secundaria

En el caso particular del grupo de secundaria se contó con 5 profesores quienes reconocen que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes [equivalencia sintáctica], pero dotar de sentido y significado las expresiones, son relacionadas con objetos o situaciones matemáticas diferentes [equivalencia semántica]. A continuación, se presenta el trabajo realizado por los profesores de secundaria-A, B, C, E y F, sobre la tarea de interpretaciones de expresiones algebraicas. Inicialmente se presenta la rejilla con una síntesis del trabajo realizada por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios activados. Así mismo, se realiza el análisis de cada entrevista, que permiten reforzar o ampliar las configuraciones activadas inicialmente por los profesores y las funciones semióticas establecidas.

Tabla 23

Rejilla de Respuestas del Grupo de 5 Profesores de Secundaria. Tarea Interpretación de Expresiones

Docente/Ítem	1.Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $3n$	2. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$	3. ¿Qué relación hay entre la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ y la expresión $3n$?	4. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como el triple de un número?
Secundaria – A	Tres veces n	Sucesión de tres números enteros consecutivos	Las dos expresiones representan la misma cantidad	No, las dos expresiones son equivalentes, pero representa situaciones diferentes.
Secundaria – B	Relación entre los números enteros y los múltiplos de tres (…)20	Es una expresión que indica la suma de tres números consecutivos.	Representan la misma sucesión de números enteros.	No, porque directamente no se puede determinar sin antes hacer las operaciones algebraicas.
Secundaria – C	Un número cualquiera y multiplicarlo por tres.	Dado un número cualquiera se le suma el anterior y el siguiente.	Es una identidad para cualquier $n \in Z$	No, en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se tiene una suma de tres.
Secundaria – E	Indica un producto por 3	Indica una suma	La n es común en las dos expresiones.	No, en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se adiciona y se sustrae valores
Secundaria – F	Relaciona un valor constante y una variable.	Polinomio factorizable	$3n$ es la solución al reducir al mínimo factor el polinomio $(n-1)+n+(n+1)$	No, al no estar factorizado no se interpreta como el triple de un número.

A continuación, se sintetiza las producciones de los 5 profesores que hacen parte del grupo de secundaria, que dejan en evidencia que las leyes y procedimientos permite que éstos reconozcan la igualdad entre las expresiones [equivalencia sintáctica], pero los sentidos asignados a cada expresión no son relacionados entre sí, [no equivalencia semántica].

[20] (…) Significa que el profesor realizo varias interpretaciones a la expresión $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ que será ampliada en la configuración cognitiva.

Tabla 24

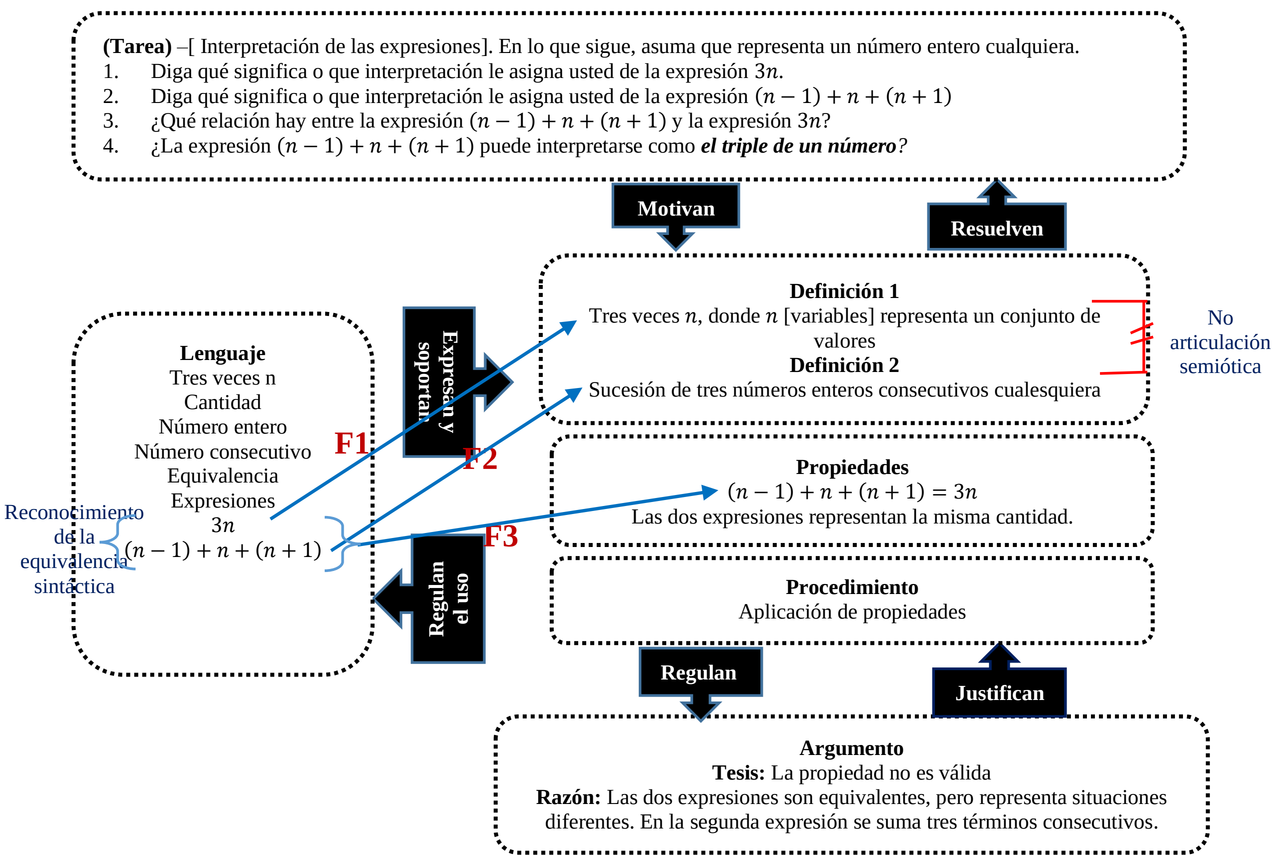
Rejilla Síntesis del Reconocimiento de la Equivalencia de Expresiones Algebraicas por Parte de los Profesores de Secundaria

	Secundaria- A	Secundaria – B	Secundaria – C	Secundaria – E	Secundaria -F
Reconoce sintácticamente la equivalencia entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)=3n$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede interpretarse como el triple de un número.	NO	NO	NO	NO	NO

6.2.7. *Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria–A*

Figura 46

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor Secundaria-A. Interpretación de Expresiones Algebraicas



El profesor [Secundaria–A] asocia la expresión $3n$ con tres veces n, donde n [variables] representa un conjunto de valores, y $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada con una sucesión de tres números enteros consecutivos cualesquiera; corrobora que ambas expresiones representan la misma cantidad: equivalencia desde su aspecto **sintáctico**; y desde su aspecto **semántico** argumenta que las representan situaciones diferentes, por ejemplo, en $(n-1)+n+(n+1)$ se tienen tres números consecutivos. Argumentos similares a los dados por las profesoras de primaria A, B, C, E y F, quienes manifiestan que $(n-1)+n+(n+1)$ relaciona tres números diferentes.

En relación a las funciones semióticas, el profesor establece tres que son relacionadas entre sí: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*tres veces el número n*»; otra entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*la suma de tres números consecutivos cualquiera*»; y una tercera, entre la el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*ambas expresiones representan la misma cantidad*», hecho que le posibilita establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, pero dotar de sentido y significado las expresiones, la función semiótica **F4,** no es relacionada con las funciones semióticas **F1**, **F2** y **F3,** puesto que, ambas expresiones modela situaciones diferentes. Aspecto que profundizo en la entrevista que corresponde al intervalo de tiempo $[0:11-5:19]$:

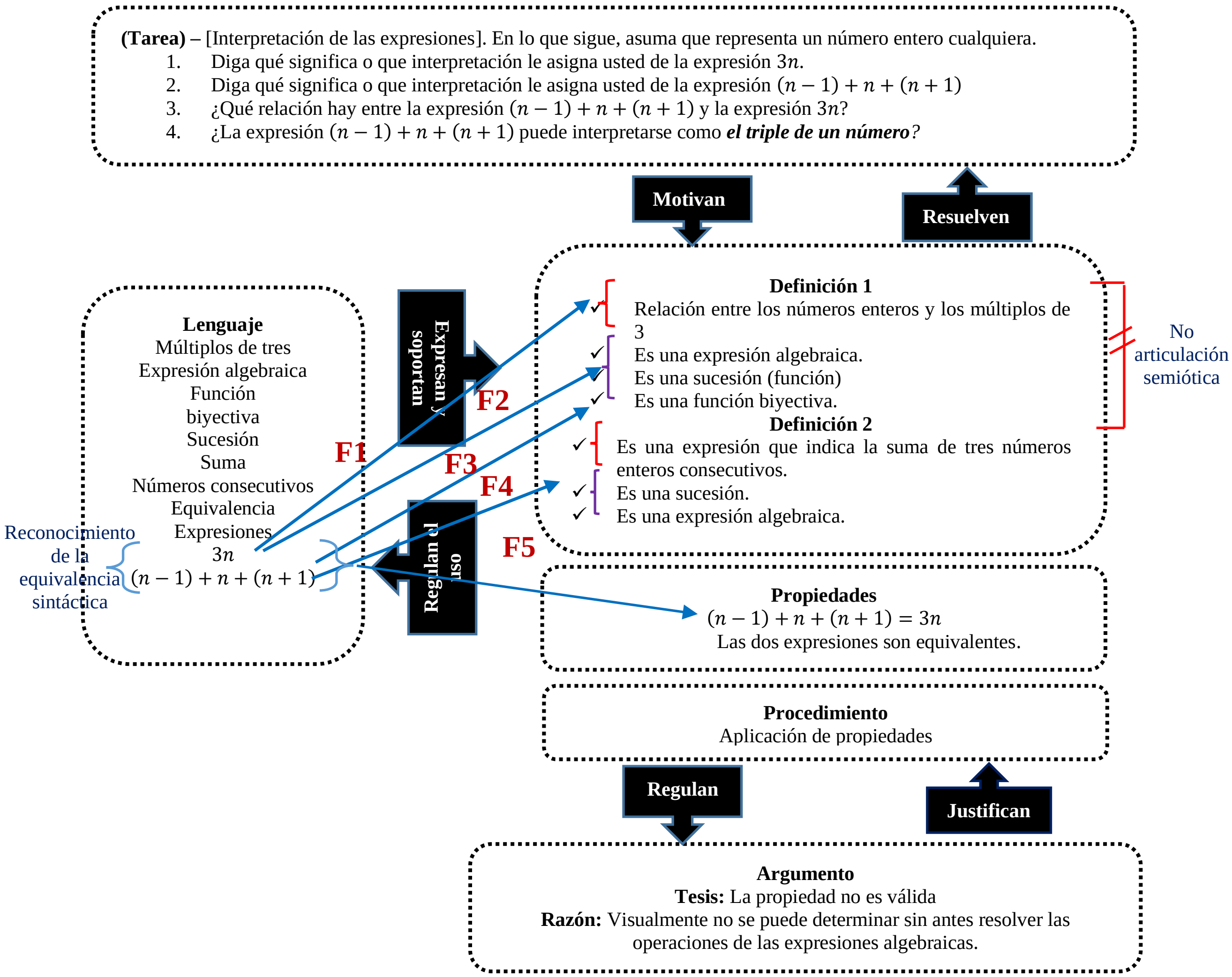
Intervalo de tiempo	**Interlocutores**	**N°**	**Diálogo**
$[0:11-1:58]$	Entrevistadora	1	Buenos tardes. Le agradezco por estar aquí. Para comenzar esta pequeña charla de reflexión iniciemos con la tarea sobre las interpretaciones de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla de las producciones realizadas por el profesor]. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea. ¿Se ve la pantalla?
$[1:58-1:59]$	Secundaria-A	2	Si. [Indicando que si con la cabeza]
$[1:59-3:26]$	Entrevistadora	3	En el primer ítem [Señalando la pantalla con el cursor] el profesor escribió que la expresión 3n representa 3 veces un número entero y $(n-1)+n+(n+1)$ escribió que corresponde a la sucesión de 3 enteros consecutivos, cualquiera, frente a la relación que existe entre las dos expresiones estableció la equivalencia entre ambas. En el cuarto ítem escribió que, aunque las expresiones son iguales corresponde a situaciones diferentes y en este orden $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión no podía ser considerada como el triple de un número.
$[3:26-4:22]$	Secundaria-A	4	Si, [Indicando con su cabeza] es que cuando tenemos la expresión 3n se tiene un mismo número y en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se tienen tres números diferentes y son situaciones diferentes pese que se obtiene el mismo resultado.
$[4:22-5:18]$	Entrevistadora	5	Es decir que al darle un número a n por ejemplo $\mathrm{n}=3$ en la expresión 3n son tres veces tres, pero acá [señala en su pantalla $(n-1)+n+(n+1)$ con el cursor] cambia porque seria 3-1= 2, 3 y 3+1=4 es decir, 2+3+4=9 esos números son diferentes
$[5:18-5:19]$	Secundaria-A	6	Si, [Indicando que si con la cabeza]

En el fragmento 4, el profesor ratifico los argumentos dados en la solución inicial de la tarea y que justifican las funciones semióticas **F1**, **F2** y **F3**, reconoce la equivalencia entre las dos expresiones, en tanto, en ambas se obtiene el mismo resultado, pero el hecho que, en la primera expresión, se tenga tres números iguales y en la segunda tres números que son diferentes, es fundamental para no aceptar la igualdad de las expresiones desde su aspecto **semántico.**

6.2.8. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– B

Figura 47

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria-B Interpretación de Expresiones Algebraicas



El profesor [Secundaria-B] asocia la expresión $3n$ con varias referencias, como son los múltiplos de 3, una expresión algebraica, una sucesión y una función, y $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada como una suma de tres números consecutivos, una sucesión y una expresión algebraica, reconoce que las dos expresiones son equivalentes, pero alude que $(n-1)+n+(n+1)$ no puede representar el triple de un número, puesto que, visualmente no se puede determinar, sin anteriormente realizar la operación indicada, es decir, $(n-1)+n+(n+1)$ debe ser expresada como $3n$. Aspecto fundamental para que algunos profesores cambiaran su decisión inicial, tal y como, se evidencia en el siguiente argumento, dado por la profesora de primaria-8, quien manifiesta que: «*inicialmente pensé que no tendrían relación, pero decidí probar mi suposición y vi que si hay una clara relación y si podría interpretarse como el triple de un número.*

Pensé en las operaciones de suma y multiplicación por separado y por eso no podría reconocer una relación». Aunque la comprobación numérica sirvió para que algunos profesores cambiaran su posición inicial, para otros no fue suficiente como el caso del profesor de secundaria- B, quien manifiesta que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, en tanto, no tenga la forma de $3n$, que posibilite una coincidencia entre la escritura simbólica y el lenguaje natural.

El profesor establece cinco funciones semióticas, que se relacionan entre sí: la primera relaciona el antecedente «$3n$» y el consecuente «*los múltiplos de 3*»; en la segunda se agrupan las interpretaciones: expresión algebraica, sucesión [función] y función biyectiva, en tanto, son interpretaciones similares, siendo estas el consecuente de la función semiótica; la tercera, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*suma de tres números enteros consecutivos*», la cuarta entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente sucesión y expresión algebraica siendo el consecuente, y la quinta, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*expresiones equivalentes*». Aunque el profesor reconoce que ambas expresiones son iguales, el lenguaje simbólico y natural en $(n-1)+n+(n+1)$ deben coincidir, para ser interpretada como el triple de un número. Este hecho pone en evidencia la no relación del sentido asignado a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, con el sentido asignado a la expresión $3n$. Aspecto que se profundiza en la siguiente transcripción que corresponde al intervalo de tiempo $[0{:}31-5{:}11]$ de la entrevista realizada al profesor.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[0{:}31-0{:}57]$	Entrevistadora	1	Buenos tardes. Gracias por regalarme un poco de su tiempo. Hablemos de la primera tarea que corresponde a la interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las respuestas dadas por el profesor]. ¿alcanza a ver mi pantalla?
$[0{:}57-0{:}58]$	Secundaria -B	2	Si. [Indicando que si con la cabeza]
$[0{:}58-3{:}07]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación]. Frente a la primera pregunta el profesor escribió varias interpretaciones para $3\mathrm{n}$ como la relación entre los números enteros y los múltiplos de 3, una expresión algebraica, una sucesión [función] y una función biyectiva. Para $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ el profesor escribió que puede ser interpretada como una expresión que indica la suma de tres números enteros consecutivos, una sucesión o una expresión algebraica. Demostró que ambas expresiones son equivalentes. Al justificar si $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que $(n-1)+n+(n+1)$ no podía ser interpretada como el triple de un número.
$[3{:}07-3{:}58]$	Secundaria -B	4	Sí, visualmente, [guarda un poco de silencio] yo sé que para mí las dos expresiones es una igualdad matemática. Pero, cuando se hace todo el procedimiento, se puede establecer la igualdad. Si uno le presenta a un estudiante las dos expresiones, el estudiante a primera vista no va decir que esas dos «cosas» son iguales.

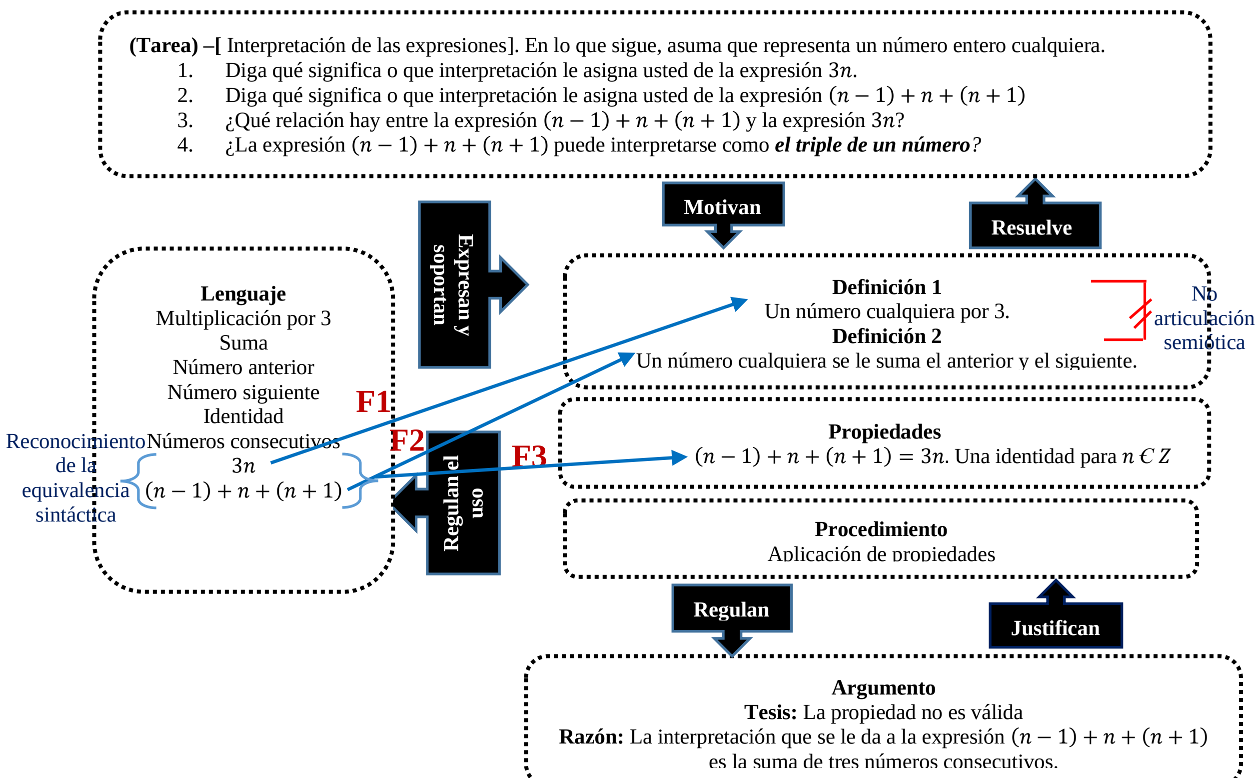
$[3{:}58 - 4{:}09]$	Entrevistadora	5	Es decir que sintácticamente cuando se hace todo el procedimiento, puedo decir que la expresión si puede ser interpretada como el triple de un número de lo contrario no.
$[4{:}09 - 5{:}11]$	Secundaria -B	6	Sí [Indicando que si con la cabeza y señalando la expresión$(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ con el dedo índice] tendría que hacer el proceso de demostración, sumar las variables que están ahí y sumar los números, las constantes que están. Visualmente, desde un punto de vista primario por decirlo así, no sé torna como el triple de un número. Para un estudiante, estoy seguro que cuando uno le está introduciendo, estas cuestiones, no va decir que son iguales así directamente, él tendría que realizar las operaciones. Uno tendría que pedirle que demuestre si esas dos cosas son iguales y pedirle que haga el proceso.

En el fragmento 4, se evidencia que el profesor admite la igualdad entre las expresiones [equivalencia semántica] siempre y cuando exista una coincidencia entre el lenguaje simbólico con su lenguaje natural. Los fragmentos 4 y 6, muestran algunos argumentos dados por el profesor quien manifiesta *«…cuando se hace todo el procedimiento, se puede establecer la igualdad. Si uno le presenta a un estudiante las dos expresiones, el estudiante a primera vista no va decir que esas dos [cosas] son iguales»*. El anterior razonamiento permite inferir que para el profesor juega un papel importante el hecho la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ tenga la forma de $3n$, es decir, sea expresada por medio un producto, aspecto que permite hacer una traducción literal de la expresión como el triple de un número.

6.2.9. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria–C

Figura 48

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor Secundaria-C. Interpretación de Expresiones Algebraicas



El profesor [Secundaria-C] relaciona la expresión $3n$ con un número cualquiera multiplicado por tres y $(n-1)+n+(n+1)$ con la suma de tres números consecutivos. Respecto a la relación entre ambas expresiones, reconoce la igualdad entre estas, manifiesta que $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretado como el triple de un número, puesto que, el sentido que se debe asignar a dicha expresión es la suma de tres números consecutivos, que es posible encontrar una expresión equivalente pero su interpretación es diferente. El profesor establece tres funciones semióticas que se relacionan entre sí: la primera relaciona el antecedente «$3n$» y el consecuente «*un número cualquiera multiplicado por tres*»; otra entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*un número que se le suma el anterior y el siguiente*»; y una tercera, entre la el antecedente «$(n-1)+n+(n+1) = 3n$» y el consecuente «*ambas expresiones representan son idénticas*». En las producciones realizadas se evidencia la no relación entre sí. Aspecto que profundiza en el minuto $0:18$ al $7:15$ de la entrevista realizada al profesor.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[0:18-0:47]$	Entrevistadora	1	Buenos tardes y gracias por regalarme este espacio. Vamos hablar primero de la tarea que corresponde a la interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones del docente]. ¿si alcanza a ver mi pantalla?
$[0:47-0:48]$	Secundaria -C	2	Si señora. [Indicando que si con la cabeza]
$[0:48-2:09]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación]. Frente a la primera pregunta el profesor escribió que la expresión 3n puede ser interpretada como cualquier número multiplicado por 3; y $(n-1)+n+(n+1)$ corresponde a un número entero que suma el antecesor y sucesor. Demostró que ambas expresiones son equivalentes. En el cuarto ítem que se indaga si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la $(n-1)+n+(n+1)$ no podía interpretarse como el triple de un número.
$[2:09-3:57]$	Secundaria -C	4	Si, [Bueno] hay podríamos hacer una analogía Gladys, por ejemplo, [jue madre. Guardo silencio durante unos segundos]. Como me hago entender. Ósea que en ultimas el resultado es igual, pero representa situaciones diferentes.
$[3:57-4:09]$	Entrevistadora	5	Me gustaría que me ampliara por qué representa situaciones diferentes.
$[4:09-5:16]$	Secundaria -C	6	Si, yo escribí que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número porque el significado que se le debe dar a esta, [expresión] es la suma de 3 números consecutivos. Sin embargo, es posible encontrar una expresión equivalente que nos arroje el mismo resultado. Por tanto, aunque existe una equivalencia su interpretación es diferente, lo que yo quiero decir es que una cosa es coger 3 números consecutivos tres números consecutivos y sumarlos, y coger un número y multiplicarlo por 3 para mi es totalmente diferente.
$[5:16-5:43]$	Entrevistadora	7	¿Por qué?
$[5:43-7:10]$	Secundaria -C	8	Gladys porque uno llega y le dice a un chico sume dos números, $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ ahora que represente el doble de; el chico dice 2x cierto. Ahora uno le podría decir al chico $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ es igual a 2x? entonces el chico puede decir no esa vaina no es igual, o puede decir si hay caso que es igual, en el que y es igual a x entonces digamos como que x, aunque existe una equivalencia. En el resultado interpretan en la vida real cosas diferentes. Me hago entender.

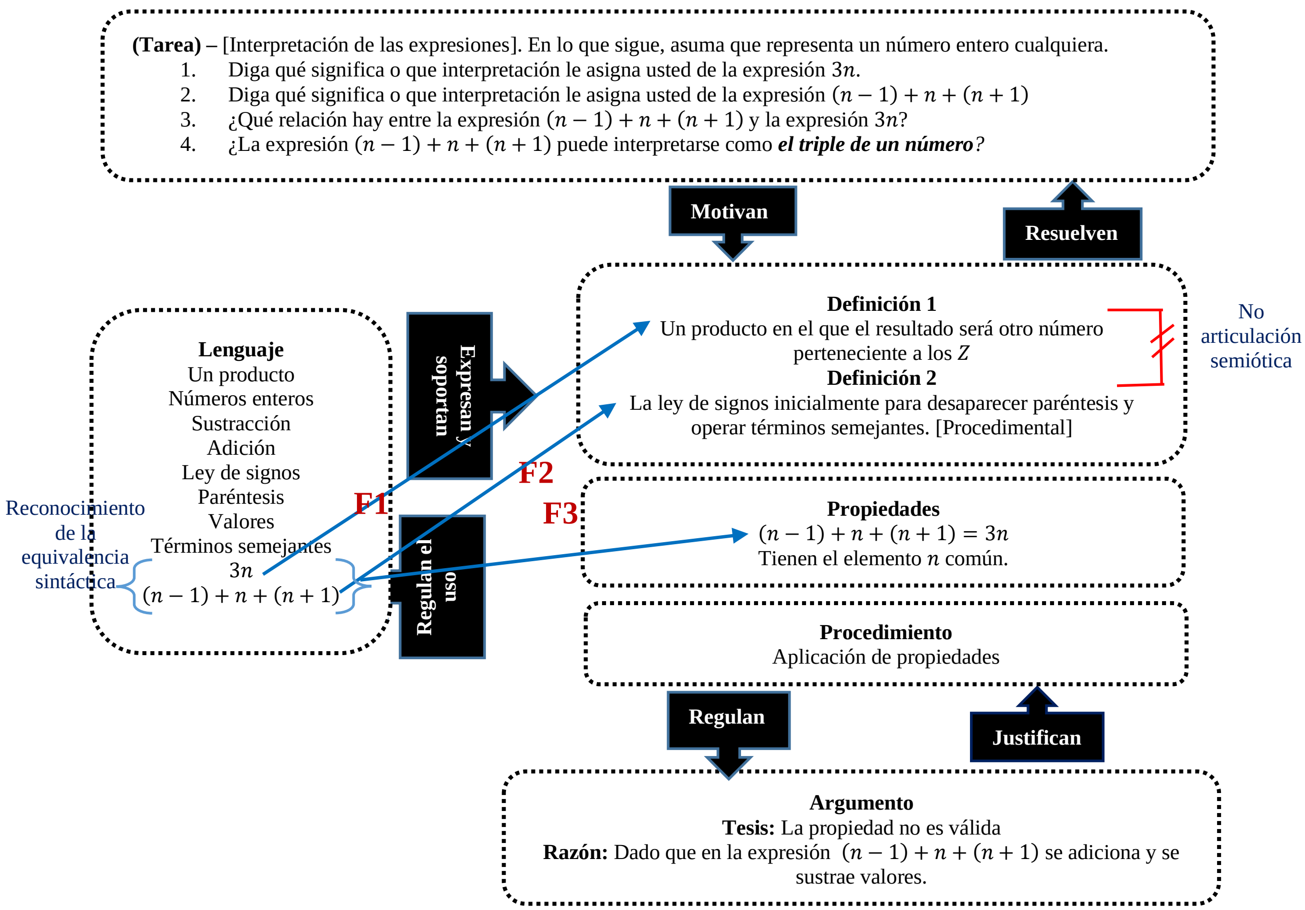
$[7{:}10 - 7{:}15]$	Entrevistadora	9	O.k. Ya le comprendo…

En la anterior entrevista el profesor corrobora la igualdad entre las dos expresiones, pero manifiesta que independientemente de obtener el mismo resultado no admite que $(n-1)+n+(n+1)$ pueda ser interpretada como el triple de un número, puesto que, cada expresión relaciona situaciones diferentes, en los fragmentos 6 y 8, con un ejemplo particular de la suma de dos números y su doble, se tendría dos expresiones diferentes como son $(x+y)$ y $2x$, argumento, que deja ver que para el profesor pensar en el doble de un número, éstos deben ser iguales y no considera números diferentes como el caso $2(x+y)$. Argumentos que justifican las relaciones que el profesor establece por medio de las funciones semióticas **F1, F2** y **F3**, que muestran que, el doble o el triple de un número, deben ser iguales y no se piensa en la posibilidad de números diferentes, aspecto que impide relacionar la función semiótica **F4**, con las tres funciones establecidas inicialmente.

6.2.10. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Secundaria– E

Figura 49

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Secundaria-E. Interpretación de Expresiones Algebraicas



La profesora [Secundaria-E] relaciona la expresión $3n$ con un producto, cuyo resultado será otro número del conjunto de números enteros (Z) y $(n-1)+n+(n+1)$ es asociada con la ley de signos, inicialmente para desaparecer paréntesis y operar términos semejantes, interpretación que describe el procedimiento que realizaría un resolutor al reducir la expresión. Respecto a la relación entre ambas expresiones, la profesora reconoce que la n es común en ambas expresiones y que se obtiene el mismo resultado. Argumenta que $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, puesto que, se adiciona y se sustrae el número y en la expresión $3n$ se tiene una multiplicación. En relación a las funciones semióticas establece tres que se relacionan entre sí: la primera relaciona el antecedente «$3n$» y el consecuente *«un producto»*, otra, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente *«ley de signos y términos semejantes»* [procedimental]; y una tercera, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*ambas expresiones tienen en común la n*». En las producciones realizadas se evidencia la no relación de los sentidos asignados a cada expresión entre sí. Aspecto que profundiza en el minuto $[0:15-5:11]$ que corresponde a la entrevista que se realizó a la profesora.

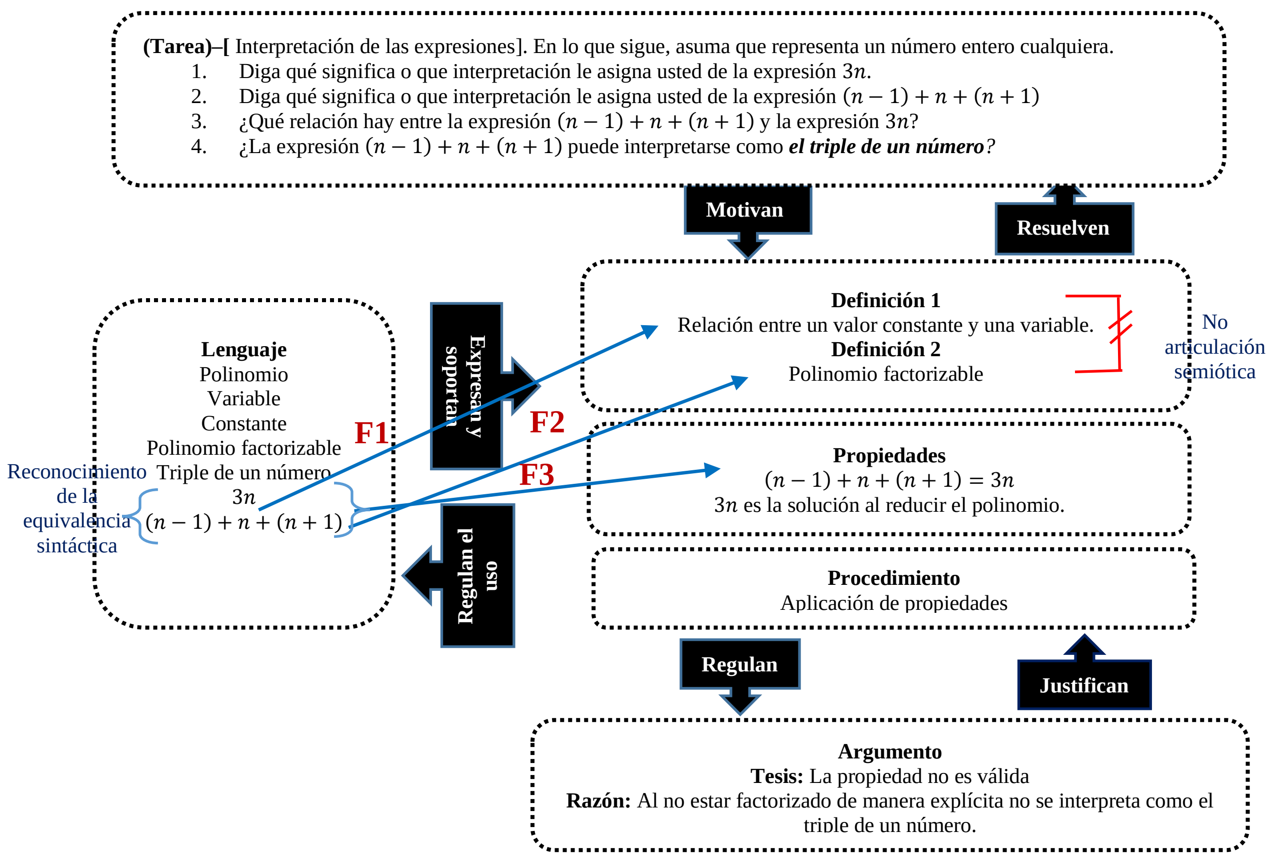
Intervalo de tiempo	**Interlocutores**	**N°**	**Diálogo**
$[0:15-0:49]$	Entrevistadora	1	Buenos días y gracias por regalarme este pequeño espacio. Hablemos de la primera tarea que corresponde a la interpretación de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla con las fotos de las producciones del docente]. ¿alcanza a ver mi pantalla?
$[0:49-0:48]$	Secundaria -E	2	Si. [Indicando que si con la cabeza]
$[0:48-2:59]$	Entrevistadora	3	[Amplia el tamaño de la presentación]. Frente a la primera pregunta la profesora escribió que puede ser interpretada como un producto en el que el resultado será otro número perteneciente a los Z y en cuanto la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como la ley de signos inicialmente para desaparecer paréntesis y operar términos semejantes. Demostró que ambas expresiones son equivalentes. En el cuarto ítem que indaga si la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, escribió que no. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la $(n-1)+n+(n+1)$ no podía interpretarse como el triple de un número.
$[2:59-3:07]$	Secundaria -E	4	Bueno, pues yo escribí con base a la ley de los signos de la segunda expresión. Entonces en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se adiciona, ósea que se sustrae y adiciona, valores. Pero no es igual que la expresión inicial, es decir que en la expresión 3n que indica producto, entonces en la segunda expresión los valores de n cambia.
$[3:58-4:09]$	Entrevistadora	5	Es decir que en la primera expresión se tiene una multiplicación y en la segunda una adición y una resta.
$[4:09-5:10]$	Secundaria -E	6	Sí [Indicando que si con la cabeza] pues va a variar los valores, y no siempre van a corresponder al triple de un número porque en la segunda expresión se adiciona y se resta, son expresiones diferentes, así numéricamente se obtenga el mismo resultado.

Los argumentos dados por la profesora en la entrevista dejan en evidencia que los sentidos asignados a cada expresión son otorgados en relación a los signos. En los fragmentos 4 y 6, evidencian que los signos que implican la suma y la multiplicación, en tanto, en la segunda expresión se añada y se sustrae valores, aspecto que las hace diferentes, independientemente que en ambas expresiones se obtengan los mismos resultados, las dos expresiones refiere situaciones diferentes. Hecho que se convirtió en obstáculo para la función semiótica **F4**, no sea relacionada con la función **F1**, **F2** y **F3.**

6.2.11. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– F

Figura 50

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor Secundaria-F. Interpretación de Expresiones Algebraicas



El profesor [Secundaria-F] relaciona la expresión $3n$ con un valor constante y una variable, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ con un número factorizable. Frente a la relación entre ambas expresiones reconoce $3n$ es el resultado de solucionar $(n-1)+n+(n+1)$ pero esta no puede representar el triple de un número, puesto que, al no estar factorizado de manera explícita no se le puede asignar dicha interpretación. Argumento similar al dado por el profesor de secundaria- B quien alude que la $(n-1)+n+(n+1)$ debe estar expresada como $3n$, es decir, la expresión en lenguaje simbólico debe coincidir con el lenguaje natural.

El profesor establece tres funciones semióticas que se relacionan entre sí: la primera entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*la relación entre un valor constante con una variable*»; la segunda, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*un polinomio que se puede factorizar*», y una tercera, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente «*resultado de resolver expresión* $(n-1)+n+(n+1)$». El profesor no admite que $(n-1)+n+(n+1)$ pueda ser interpretada como el triple de un número. Aspecto que profundizado en intervalo $[0:17-4:31]$, que corresponde a la entrevista realizada.

Intervalo de tiempo	**Interlocutores**	**N°**	**Diálogo**
$[0:17-1:58]$	Entrevistadora	1	Buenos tardes, le agradezco mucho por regarle este pequeño espacio. Para comenzar esta pequeña charla vamos a hablar sobre las interpretaciones de expresiones algebraicas [la entrevistadora compartió la pantalla de las producciones del docente]. Señalando la diapositiva correspondiente a la tarea. ¿Se ve la pantalla?
$[1:58-2:01]$	Secundaria-F	2	Si. [Indicando que si con la cabeza]
$[2:01-3:56]$	Entrevistadora	3	En el primer ítem [Señalando la pantalla con el cursor] el profe escribió que la expresión $3n$ es un valor constante y una variable. Me gustaría que pudiéramos definir cuál es el valor de la constante.
$[3:56-3:57]$	Secundaria-F	5	El valor constante, 3 es el valor constante y n es la variable.
$[3:57-4:03]$	Entrevistadora	6	En la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ el profesor escribió que corresponde a un polinomio factorizable.
$[4:03-4:57]$	Secundaria-F	7	Si n $-$ 1 $+ n + n +$ 1 se podría reducir, términos semejantes.
$[4:57-5:53]$	Entrevistadora	8	Frente a la relación que existe entre las dos expresiones estableció la equivalencia entre ambas. Y en el cuarto ítem escribió que, aunque las expresiones son iguales corresponde a situaciones diferentes y en este orden $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión no puede ser considerada como el triple de un número en tanto tiene que estar factorizada.
$[5:53-6:11]$	Secundaria-F	9	Si. si no resuelvo $(n-1)+n+(n+1)$ a su mínima expresión. no podría interpretar, que es el triple de un número porque la estoy viendo es un polinomio que tiene una variable n, con una constante en uno de los paréntesis -1 y en la otra +1 es lo que yo visualmente identifico.
$[6:11-6:47]$	Entrevistadora	5	O.k. Me pareció interesante, la interpretación que le dio a las dos expresiones.
$[6:47-7:17]$	Secundaria-F	6	Si, [Indicando que si con la cabeza] Pero para que yo pueda interpretarla como, 3n, el triple de un número. Yo tengo que resolver la expresión $(n-1)+n+(n+1)$.

En la solución dada inicialmente y en la entrevista realizada se evidencia que los sentidos dados a las dos expresiones están relacionados con procesos algebraicos, por ejemplo, en el fragmento 5, el profesor explicita que en la expresión $3n$, tres es una constante del monomio y la n es la variable y $(n-1)+n+(n+1)$ es interpretada como un polinomio factorizable, en el cual la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número, siempre y cuando sea reducida a $3n$, de lo contrario no. Argumento similar al dado por el profesor de secundaria-B, tal y como lo señala en el fragmento 6, que alude «*tendría que hacer el proceso de demostración, sumar las variables que están ahí y sumar los números, las constantes … visualmente, desde un punto de vista primario por decirlo así, no sé torna como el triple de un número. Para un estudiante, estoy seguro que cuando uno le está introduciendo, estas cuestiones, no va decir que son iguales así directamente, él tendría que realizar las operaciones. Uno tendría que preguntarle pedirle que demuestre si esas, dos cosas son iguales y el hacer el proceso*». Los profesores manifiestan que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ debe ser resuelta y obtener $3n$, para ser interpretada como el triple de un número, es decir, debe posibilitar realizar la misma traducción de las expresiones al lenguaje natural.

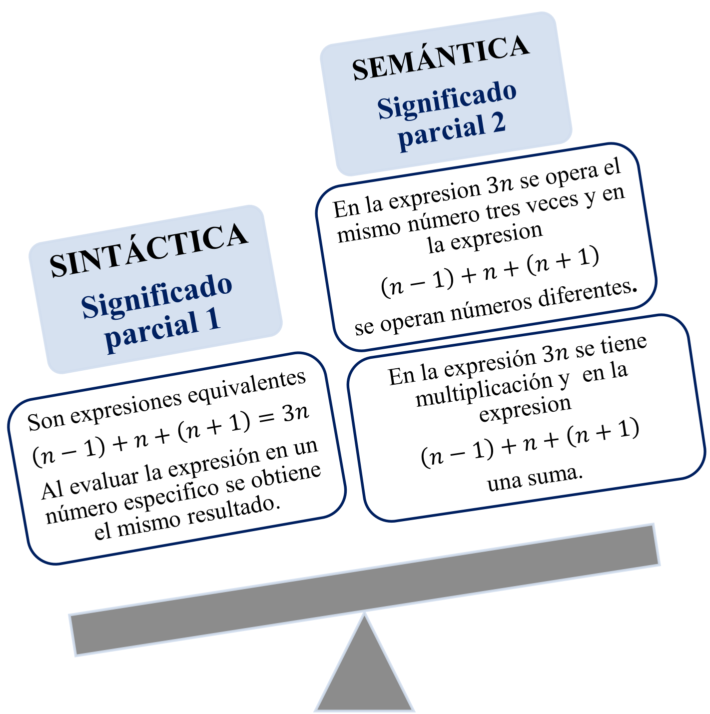
6.2.12. Síntesis de las Producciones Realizadas

Frente a los resultados obtenidos en la tarea, 10 profesores de los 11 que conforman el estudio de caso colectivo, reconocen la equivalencia sintáctica entre las dos expresiones, pero dotar de sentido y significado las expresiones la conjetura no es válida [aspecto semántico], en tanto, las expresiones son relacionadas con objetos o situaciones diferentes. Por ejemplo, los profesores de primaria-A, primaria-C, primaria-D, primaria-E, secundaria-A, secundaria-C, manifiestan que en $(\mathrm{n}-1)+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)$ se tienen tres números diferentes y en la expresión $3n$, tres números iguales. La profesora de primaria-B y la de secundaria-F, otorgan los significados a las expresiones en relación a las operaciones implícitas en cada una. Por ejemplo, la profesora de primaria-B, relaciona la expresión $3n$ con una multiplicación que relaciona los tres números iguales, y $(n-1)+n+(n+1)$ una suma de tres números diferentes, por su parte la profesora de secundaria-F, manifiesta que en la expresión se adiciona y en la expresión $3n$, se multiplica. Aunque los profesores de secundaria B y F reconocen la equivalencia sintáctica entre las expresiones, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, debido que, la expresión debe ser reducida a $3n$, es decir, posibilitar una traducción y correspondencia entre el lenguaje simbólico con el lenguaje natural.

En correspondencia con la complejidad de la noción de equivalencia descrita en términos de dos significados parciales llamados **sintáctico** y **semántico** (Chalé-Can et al., 2017). Los resultados muestran, que desde el aspecto **sintáctico** la aplicación de determinadas reglas permite obtener otra expresión, como es el caso que a partir de $(n-1)+n+(n+1)$ obtienen $3n$, que surge de la aplicación de algunas reglas, como la operación de términos semejantes y la aplicación de propiedades, que, a su vez, permite concluir que las dos expresiones son equivalentes. Estos resultados muestran un significado parcial [sintáctico] que nace del uso de reglas y procedimientos, que no puede ser articulado con el significado parcial [semántico] en tanto, los profesores manifiestan que las dos expresiones corresponden a situaciones u objetos matemáticos diferentes. Lo anteriormente hace que los profesores tengan una concepción primitiva e intuitiva de la noción de equivalencia [equivalencia sintáctica] puesto que, desde el punto de vista **semántico** las expresiones no pueden ser equivalentes, aspecto que impide que los dos significados parciales no sean conectados entre sí. Las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, son iguales desde su aspecto **sintáctico** y en su aspecto **semántico** estas dos expresiones son equivalentes, en tanto, se tiene un contexto en el que los símbolos de las expresiones adquieren significados contextuales y en el que, además, se puede decir que estos dos significados son el mismo y $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como «*el triple de un número.* Los resultados muestran que los profesores verifican desde lo **sintáctico** la igualdad de las expresiones en el cual la primera expresión puede ser obtenida de la aplicación de reglas algebraicas sobre la segunda, el ir más allá de la aplicación de reglas, los dos significados parciales no pueden ser relacionados o articulados entre sí, puesto que las expresiones modelan situaciones diferentes. Tal y como se evidencia en el siguiente esquema.

Figura 51

No Articulación de los Significados Parciales Sintáctico y Semántico a la Equivalencia de las Expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ *y* $3n$

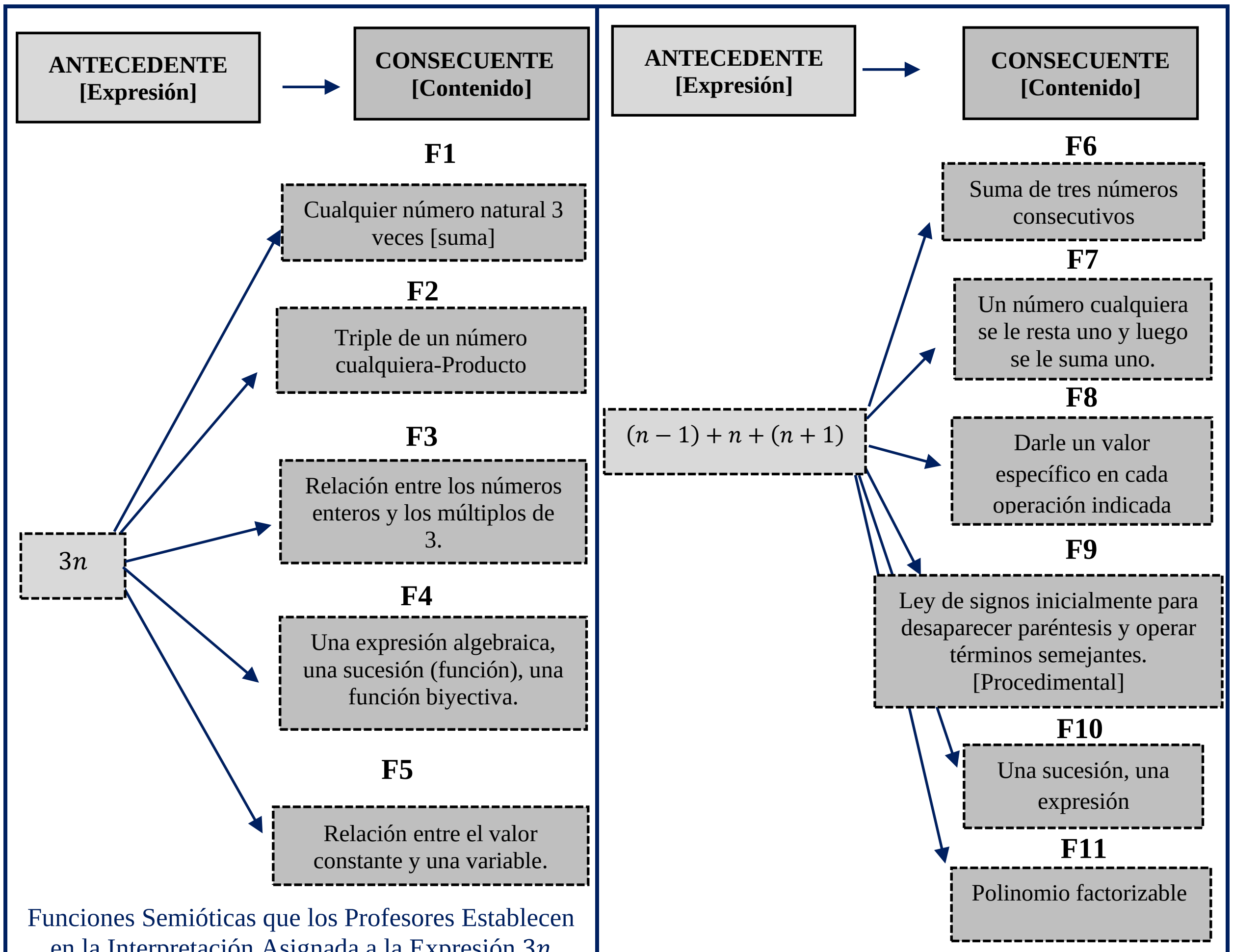


En relación al reconocimiento de la equivalencia se evidencia que, desde el aspecto **sintáctico** $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, las transformaciones de tratamiento requeridas permiten obtener una de las expresiones a partir de la otra [agrupación de términos semejantes] o verificar la igualdad a través de la asignación de un número particular a n. Los profesores no admiten la veracidad de la conjetura desde el aspecto **semántico,** al considerar que las dos expresiones relacionan objetos matemáticos o modela situaciones diferentes, en una se tiene un número igual y en los otros tres números diferentes o en una se relaciona una multiplicación y la otra una suma.

En relación a los significados parciales en términos de prácticas matemáticas y configuraciones cognitivas de objetos primarios activada en dichas prácticas, se evidencia la no articulación semiótica de los significados parciales [sintáctico - semántico] en tanto, las expresiones representan situaciones u objetos matemáticos diferentes. Las prácticas matemáticas realizadas por los profesores permiten construir una serie de funciones semióticas presentes en el proceso de significación de las expresiones algebraicas, que dejan ver las relaciones que los profesores establecen mediante estas, fungiendo el rol de **antecedente/expresion** o de **consecuente/contenido** mediante un criterio de correspondencia (Godino Batanero y Font, 2008).

Figura 52

Funciones Semióticas Establecidas por el Grupo de Profesores Frente a la Tarea de Interpretaciones de Expresiones



Funciones Semióticas que los Profesores Establecen en la Interpretación Asignada a la Expresión $3n$

Funciones Semióticas que los Profesores Establecen en la Interpretación Asignada a la Expresión $(n-1)+n+(n+1)$

ANTECEDENTE [Expresión]	F12	CONSECUENTE [Contenido]	Funciones Semióticas que los Profesores Establecen en la Relación que Existe Entre las Expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$.
$(n-1)+n+(n+1)=3n$	→	Las expresiones son equivalentes o iguales.	

Los argumentos dados por los profesores permiten agrupar las relaciones que éstos establecen por medio de doce funciones semióticas. La función semiótica **F1,** establece una relación entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*un número natural 3 veces*» que asocia una suma reiterada de un número, por ejemplo, para el caso particular de $n = 2$, se tiene 2 +2 +2 =6. En la función semiótica **F2,** se establece la relación entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*triple de un número cualquiera*» que deja en evidencia la relación implícita de la multiplicación abreviada. Por ejemplo, para el caso particular de $n = 2$, se tiene «3.2=6», que multiplica 3 por 2. En la función semiótica **F3,** el antecedente «$3n$» y el consecuente *«relación entre los números enteros y los múltiplos de 3»*, esta relación hace referencia a la secuencia de números enteros [multiplicación], las funciones semióticas **F4** y **F5,** relacionan la noción de secuencia y múltiplos, con los consecuentes expresión algebraica, sucesión [función], una función biyectiva, relación entre el valor constante y una variable respectivamente. Las funciones semióticas **F3, F4**, **F5**, se encuentran relacionadas entre sí.

La función semiótica **F6,** establece la relación entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*la suma de tres números consecutivos, con* $(n-1) \neq n \neq (n+1)$»*;* la función semiótica **F7,** relaciona el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» con el consecuente *«un número cualquiera se le resta uno y luego se le suma uno»*, [congruencia entre el lenguaje simbólico de la expresión con el lenguaje natural]; la función semiótica **F8,** entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» con el consecuente «*un valor especifico a n en cada operación indicada*» *[procedimental]*. La función semiótica **F9,** establece la relación entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente «*ley de signos para desaparecer paréntesis y operar términos semejantes*» [Procedimental]. La función semiótica **F10,** entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» con el consecuente *«una sucesión, una expresión algebraica»*, función semiótica similar a la establecida en **F11,** dada por el consecuente *«polinomio factorizable»*, finalmente la función semiótica **F12,** establece la relación entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente las expresiones son equivalentes o iguales, conjetura que verifican por medio de la aplicación de transformaciones de tratamiento requeridas [agrupación de términos semejantes, evaluación con un número particular, aplicación de propiedades] que posibilita obtener otra expresión y reconocer que en ambas expresiones se obtiene el mismo resultado, [equivalencia sintáctica].

6.2.13. Articulación y No Articulación de Sentidos Asignados a Expresiones Algebraicas Vista Mediante una Cadena de Funciones Semióticas

Frente a los 64 profesores que dieron solución a la tarea, 36 relacionan entre si los sentidos asignados a cada expresión o realizan una *articulación semiótica*, generando una cadena de funciones semióticas, por ejemplo, en su mayoría los profesores interpretan $3n$ como el triple de un número y la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como la suma de tres números, específicamente tres números consecutivos, que son relacionados entre sí, generando inicialmente dos funciones semióticas que reflejan la relación del aspecto **sintáctico** con el **semántico**, tal y como se evidencia en siguiente diagrama.

Figura 53

Articulación Semiótica Mediante una Cadena de Funciones Semióticas Establecidas en la Tarea Interpretaciones de Expresiones Algebraicas

FUNCIÓN SEMIÓTICA F4	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
$(n-1)+n+(n+1)$	Triple de un número. [Relación de los sentidos 1 y 2]

FUNCIÓN SEMIÓTICA F3	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
$(n-1)+n+(n+1)=3n$	Expresiones equivalentes

FUNCIÓN SEMIÓTICA F2	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
$(n-1)+n+(n+1)$	Suma de tres números consecutivos

FUNCIÓN SEMIÓTICA F1	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
$3n$	Es el triple de un número

Sentido 2

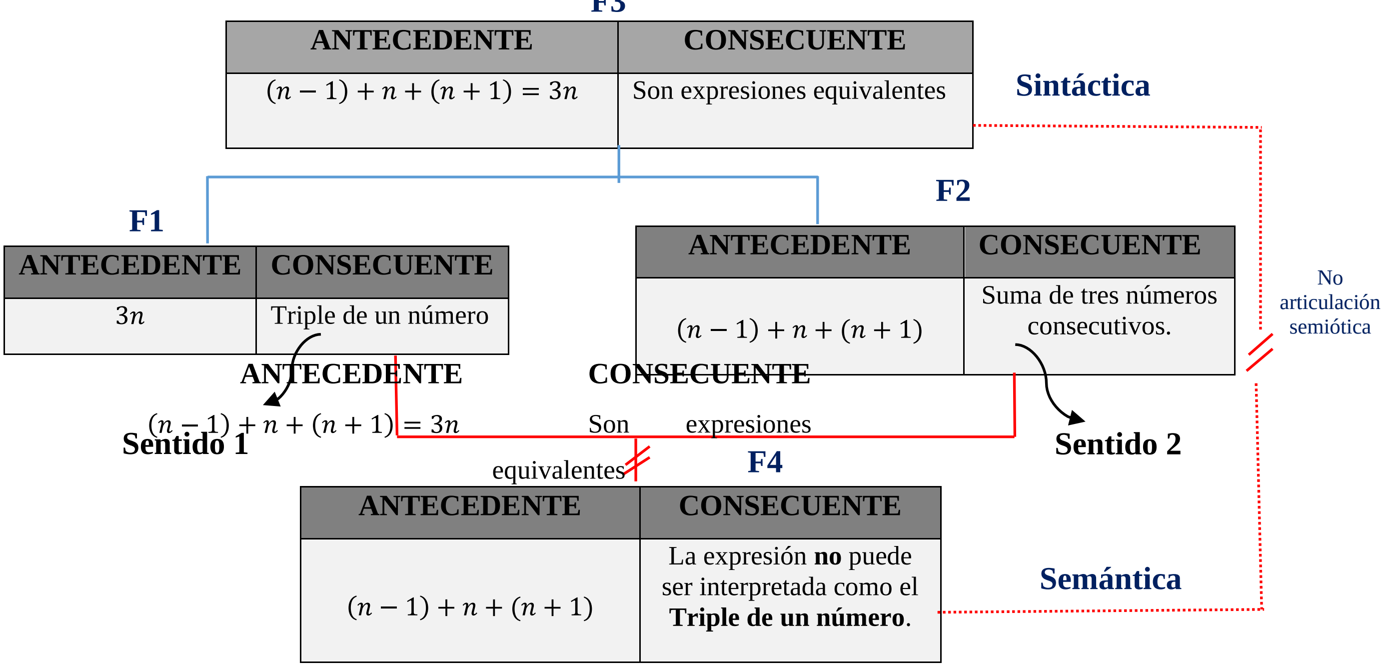
Sentido 1

En el esquema anterior se evidencia la relación entre sí, de los **sentidos 1** y **2**, mediante las funciones semióticas **F1** y **F2**, el antecedente de la función **F3,** son los dos antecedentes que relacionan los **sentidos 1** y **2,** el consecuente «*las dos expresiones son equivalentes*», el antecedente que se relaciona en el **sentido 2,** por medio de la función **F3,** es el antecedente de la función semiótica **F4,** con el consecuente que se relaciona en el **sentido 1**, el «***triple de un número***», que permite relacionar entre si los dos sentidos asignados a las expresiones. Por otra parte, entre el grupo de los 64 profesores, 57 corroboran la equivalencia de las expresiones, pero este hecho no fue suficiente para 21 profesores que, a pesar de obtener el mismo resultado, no reconocieron la equivalencia, en tanto «*veían*» expresiones con formas diferentes, que les evoca operaciones diferentes, lo que género que los profesores asignan un sentido a cada expresión, pero estos no son relacionados entre sí. En términos de una la cadena de funciones semióticas, la ***no***

articulación semiótica se tendrá una cadena interrumpida de funciones semióticas, debido que, no se articula los significados parciales sintáctico y semántico. Tal y como se evidencia en la siguiente figura.

Figura 54

La No articulación Semiótica Mediante una Cadena Interrumpida de Funciones Semióticas. Tarea Interpretaciones de Expresiones Algebraicas



En el esquema anterior se muestra la no articulación semiótica mediante una cadena interrumpida de funciones semióticas: el **sentido 1**, relaciona la función semiótica **F1**, entre el antecedente «$3n$» y el consecuente *«triple de un número»;* el **sentido 2**, establece la función semiótica **F2**, entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$» y el consecuente *«la suma de tres números consecutivos»*. Los dos antecedentes de las funciones **F1** y **F2**, son el antecedente de la función semiótica **F3**, que relaciona el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)=3n$» y el consecuente son «*expresiones equivalentes*». Desde el significado parcial **sintáctico** los profesores aplican una serie de prácticas matemáticas en torno a las transformaciones de tratamiento [agrupación de términos semejantes, evaluación con un número particular, aplicación de propiedades] requeridas para obtener otra expresión, como $3n$. En relación al significado parcial **semántico** se establece una cuarta función semiótica donde $(n-1)+n+(n+1)$ funge como antecedente y el triple de un número como consecuente que no es admitida por los profesores como el triple de un número, en tanto, algunos explicitan que en la primera expresión relaciona tres números iguales y en la segunda tres números diferentes, otros explicitan que en la primera relaciona una multiplicación y en la segunda una suma, específicamente de números consecutivos y otros argumentan que la segunda debe ser reducida y debe coincidir entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural, aspecto que imposibilita que se establezca una correspondencia de la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ con el ***«triple de un número».*** En síntesis, se tiene un objeto matemático primario al cual se le asignan dos sentidos diferentes y la no articulación semiótica impide que se relacione la función semiótica **F4**, en la que una de las dos funciones semióticas anteriores juega el papel de antecedente.

Por otro lado, en las producciones realizadas se identifica que desde el aspecto **sintáctico** los profesores reconocen que las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$ son equivalentes, el grupo en general muestra un dominio y conocimiento de las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de las expresiones a partir de la otra [operación de términos semejantes, calculo especifico con un número dado, uso propiedades de los números] pero encuentran dificultades para reconocer la equivalencia **semántica** entre las expresiones algebraicas dadas, en tanto, el triple de un número, no suele ser asociado con una expresión que representa una suma de términos específicamente una suma de números consecutivos que relaciona tres números diferentes, sino con una expresión que pueda ser reconocida directamente como «*multiplicación por 3*» o como suma reiterada [3 veces un mismo número] tal y como se mostró en los argumentos dados.

6.2.14. Similitud y Diferencias Entre las Dificultades que Encuentran los Profesores de Primaria y los Profesores de Secundaria Para Articular Sentidos Asignados a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento

Frente a las interpretaciones asignadas por los profesores de primaria y secundaria a la expresión $3n$ las producciones muestran que los 64 profesores emplean referencias como *«triple de un número», «tres multiplicado por número»,* o *«tres veces un número».* Con relación a la interpretación que realizan a $(n-1)+n+(n+1)$; 3 profesoras de primaria la relacionan con la suma de tres números consecutivos; 3 con una multiplicación por tres; 19 profesores escriben la traducción entre lenguaje natural y la expresión dada en lenguaje simbólico como *«a un número cualquiera se le resta 1 luego se hace lo mismo con la suma y luego se suma todo», «operación matemática que involucra resta y suma», «primero le resta 1, luego le suma el número y luego el siguiente de ese número» ,«un número disminuido en 1, más ese #, más el mismo # aumentado en 1»,* etc. Respecto al grupo de profesores de secundaria 2 profesores emplean este tipo de argumento; y los 30 restantes la asocian con la suma de tres números consecutivos.

Los resultados obtenidos permiten identificar tres aspectos en relación a las prácticas matemáticas que desarrollaron los profesores; primero, ***resuelven la tarea propuesta***. 7 profesores de primaria o no realizan una interpretación de alguna de las dos expresiones o no establecen la relación entre ambas y todos los profesores de secundaria resuelven la tarea; segundo, ***uso de un lenguaje matemático:*** 19 profesores de primaria establecen una traducción literal del lenguaje simbólico al natural y en secundaria, 2 profesores de secundaria realizan este tipo de procedimiento; tercero, ***realizan más de una interpretación:*** los profesores de secundaria que cuentan con una formación en educación matemática establecen más de una función semiótica por medio de las relaciones que establecen en las interpretaciones de las expresiones. Frente a los profesores que no cuentan con una formación en educación matemática especifica no fue impedimento para resolver la tarea, así como, el asignar sentidos a las expresiones y establecer la relación de equivalencia entre ambas. Por ejemplo, 32 profesores de primaria que resolvieron la tarea, 25 profesores de primaria asignan una interpretación a la expresión $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ así como, el establecimiento de la equivalencia entre ambas expresiones. Aunque los 25 profesores de primaria admiten la equivalencia y algunos corroboraron que en ambas expresiones se obtienen el mismo resultado, para 10 profesores este hecho no fue suficiente puesto que, no logran relacionar los dos sentidos asignados entre sí, resultados similares a los obtenidos por los profesores de secundaria quienes reconocen la igualdad entre ambas expresiones, pero este hecho no es suficiente para 11 profesores que desde el aspecto **semántico** consideran que la conjetura no es válida y consideran que la expresion $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el *triple de un número.*

Respecto a las dificultades que encuentran los profesores de primaria y los profesores de secundaria que impiden que relacionen los dos sentidos asignados, se pueden identificar algunas similitudes entre los dos grupos: los profesores de primaria argumentan que en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, la n no toma los mismos valores, se tiene $(n-1) \neq n \neq (n+1)$, que son números diferentes, como sucede con el triple de un número que relaciona los tres números iguales; por otro lado, el grupo de profesores de secundaria manifiesta que las dos expresiones son equivalentes, pero representa situaciones diferentes, algunos expresan que al no estar factorizada de manera explícita $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, argumento que muestra que los profesores aceptan la igualdad entre ambas expresiones, pero debe tener la forma del triple de un número para ser aceptada como tal, es decir, que debe existir una coincidencia entre la expresión en lenguaje simbólico con el lenguaje natural. Por otra parte, la $3n$, no suele ser asociada con una expresión que representa una suma de términos, menos con la $(n-1)+n+(n+1)$ que representa una suma tres números consecutivos, aspecto que dejan en evidencia que las dificultades que encuentran los profesores de primaria y los profesores de secundaria para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento son similares.

6.2.15. *Similitud y Diferencias Entre las Dificultades que Encuentran los Estudiantes y los Profesores de Matemáticas para Articular Sentidos a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento*

Los resultados documentados por Rojas (2012) muestran que la expresión $3n$ es asociada por los estudiantes como «*3 multiplicada por n*» y «*triple de un número*», y $(n-1)+n+(n+1)$ es interpretada como la suma de tres números, o más específicamente como la suma de tres números consecutivos. En relación a las producciones de los 64 profesores que abordaron la tarea; 24 relacionan $3n$ con el triple de un número; 8 con una suma reiterada de tres veces un número especifico y 26 como el producto o la multiplicación de 3 por un número. La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es relacionada por 25 profesores explícitamente como la suma de tres números consecutivos, sentidos asignados que dejan en evidencia que los significados personales de los profesores y estudiantes son similares.

Así mismo Rojas (2012) manifiesta que en las respuestas dadas por los estudiantes, éstos verifican la igualdad entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, algunos aceptan la equivalencia de las dos expresiones algebraicas; lo hace a partir de la evaluación con un valor específico de n, y aunque reconocen que los resultados de la evaluación son los mismos, no admiten que la expresión puede ser interpretada como el triple de un número, puesto que, el triple del número indica multiplicación o la suma reiterada de un mismo número, aspecto que no se puede visualizar en $(n-1)+n+(n+1)$ que relaciona tres números diferentes, hecho que impide para que los estudiantes articulen los sentidos asignados a dichas expresiones. Razonamientos que fueron evidenciados en las soluciones realizadas por el grupo de profesores, en el cual, se tiene que 55 profesores reconocen la equivalencia sintáctica entre las dos expresiones, en tanto, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas que les permite obtener otra expresión, como es el caso en que transforman $(n-1)+n+(n+1)$ en $3n$, corroboran que ambas expresiones son equivalentes, pero no siempre logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones, como es el caso de 21 profesores quienes no aceptan que $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número o no logran relacionar los dos sentidos entre sí. En relación a los 11profesores que conforman el estudio de caso colectivo, 10 profesores [5 de primaria y 5 secundaria] no relacionen los significados parciales **sintáctico** y **semántico.**

Por otra parte, los profesores que no logran relacionar los sentidos asignados a las dos expresiones, establecen en su mayoría tres funciones semióticas que se relacionan en la solución de la tarea: una entre el antecedente «$3n$» y el consecuente «*resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*»; otra entre el antecedente «$3n$» y el consecuente *«suma de 3 números*» [n número cualquiera]; y otra entre el antecedente «$(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$» [evaluando las expresiones, tomando un valor específico]. Resultados que coinciden con los reportados por Rojas (2012) y aunque algunos estudiantes y profesores evalúan las dos expresiones asignando un valor especifico a ambas expresiones o aplicación de transformaciones [operación de términos semejantes] que permite corroborar que en ambas expresiones se obtiene el mismo resultado desde el aspecto **sintáctico**, desde el aspecto **semántico** la expresion $(n-1)+n+(n+1)$, no puede ser interpretada como triple de un número. Aspecto que permite corroborar un hecho cultural que ha sido documentado por Rojas (2012) quien manifiesta que: la expresión $3n$ corresponde a la representación de un producto o multiplicación entre números, mientras que $(n-1)+n+(n+1)$ es asociada con una suma en donde se tiene sumandos diferentes, que impide articular los sentidos asignados a las expresiones. Así mismo para algunos estudiantes y profesores el poder corroborar y garantizar la igualdad entre las expresiones les permitió dar sentido a la igualdad entre las dos expresiones: *«suma de números consecutivos»* y *«triple de un número»* y relacionarlos entre sí.

6.2.16. Conexiones Matemáticas y Articulación Semiótica en la Tarea sobre Interpretaciones de Expresiones Algebraicas

En las consideraciones teóricas de este trabajo se aclaró que las conexiones matemáticas son un constructo teórico más global que la articulación de sentidos o semiótica, puesto que, las conexiones matemáticas implican establecer relaciones tanto al interior del campo como entre las matemáticas y otras disciplinas. Se asumió que hablar de conexiones matemáticas al interior de las matemáticas equivale a hablar de una articulación de sentidos o articulación semiótica. Para el caso particular de la tarea *«interpretación de expresiones algebraicas»* puede emerger las siguientes conexiones matemáticas:

a) ***Representaciones diferentes:*** se identifica dos registros semióticos diferentes para expresar el triple de un número: lenguaje natural, lenguaje algebraico $[3n; (n-1)+n+(n+1)]$.

b) ***Procedimiento*:** en esta tipología se ubican los profesores que asignan un valor específico a n, u operan términos semejantes.

c) ***Significado:*** la tarea pide que los profesores realicen una interpretación a las expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$.

d) ***Característica:*** en esta tipología se ubican los profesores que tienen en cuenta las características de cada expresión para realizar sus interpretaciones, por ejemplo, $3n$, es relacionada con una multiplicación y $(n-1)+n+(n+1)$, con una suma específicamente una suma de tres números consecutivos.

e) ***Implicación*:** si los profesores que establecen que las expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ son equivalentes, desde lo **sintáctico** entonces las expresiones toman el mismo valor contextual [triple de un número- equivalencia semántica].

f) ***Reversibilidad:*** esta conexión hace referencia al establecimiento de la igualdad entre las expresiones $3n$ y $(n-1)+n+(n+1)$ desde lo **sintáctico.** Si la expresion $3n$ es interpretada como el *triple de un número*, la expresion $(n-1)+n+(n+1)$ también puede ser expresada como el triple de un número.

A continuación, se sintetiza las producciones dadas por los profesores de primaria A-B-C-D-E y los profesores de secundaria A- B-C-E-F.

Tabla 25

Frecuencia con que Emergieron las Conexiones Matemáticas en la Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas

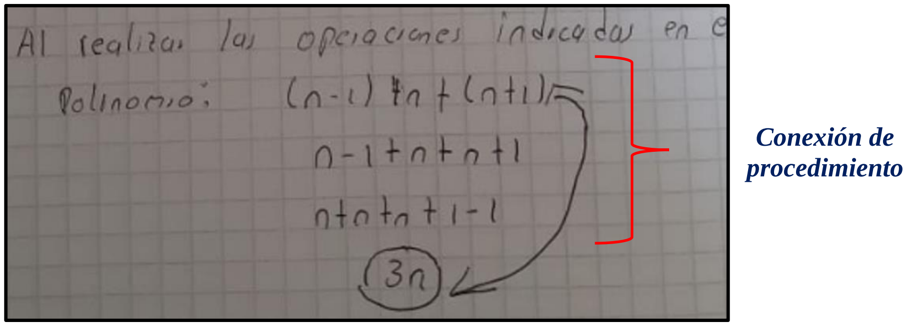
Conexión	P-A	P-B	P-C	P-D	P-E	S-A	S-B	S-C	S-E	S-F	*f*
CI	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
RD	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
PR	•	—	—	•	•	—	—	•	—	—	4
IM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
PT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SG	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
CT	—	•	•	—	—	•	•	—	•	•	6
RV	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
MT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Nota:
CI=Conexiones orientadas a la instrucción, RD=Representaciones diferentes, PR= Procedimiento, IM=Implicación, PT= Parte-todo, SG= Significado, CT=Característica, RV= Reversibilidad, MT= Metafórica, *f*= Frecuencia, P= profesor de primaria, S= profesor de secundaria, • = Presencia de la conexión, = No presencia de la conexión, ¯ = La situación no posibilita que emerja la conexión.

Con relación a las conexiones matemáticas los 10 profesores que conforman el estudio de caso colectivo establecen cuatro conexiones que emergen en la solución de la tarea. Los profesores de primaria A-B-C-D-F y los profesores de secundaria A-B-C-E y F, establecen representaciones diferentes como el lenguaje natural y algebraico; establecen la *conexión de significado*, en tanto, asignan sentidos a las dos expresiones en relación a sus concepciones por ejemplo, la expresión $3n$, es interpretada como «*cualquier número natural tres veces*», «*se triplica una cantidad cualquiera*» o «*el triple de un número*» y $(n-1)+n+(n+1)$ es interpretada como «*la suma tres números consecutivos*», «*a un número cualquiera se le resta 1 luego se hace lo mismo con la suma y luego se suma todo*». Reconocen la *equivalencia sintáctica* entre ambas expresiones, para corroborar la igualdad entre las expresiones aplican los procedimientos respectivos a $(n-1)+n+(n+1)$ que les permite obtener $3n$ o asignan un número particular para verificar que en ambas expresiones se obtiene el mismo resultado. Tal y como se evidencia en la solución dada por el profesor de secundaria F.

Figura 55

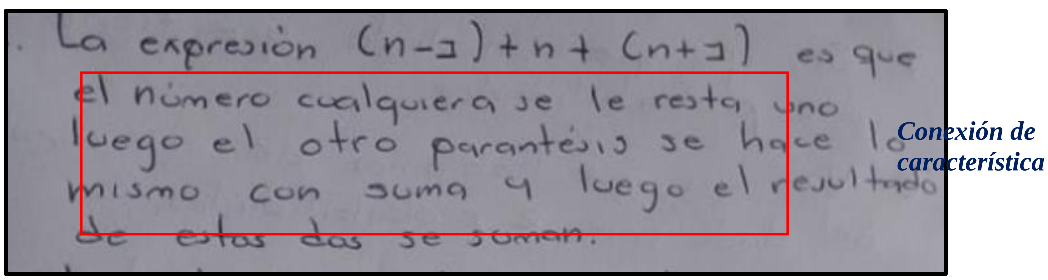
Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas- Conexión de Procedimiento. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria – F



En esta producción la profesora de primaria- A manifiesta en lenguaje natural la característica de la expresión.

Figura 56

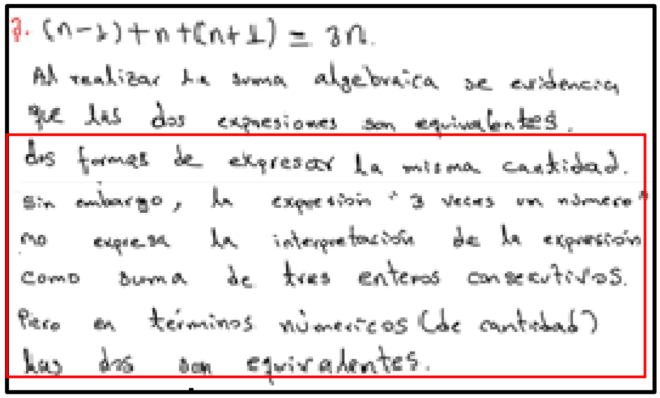
Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas- Conexión de Característica. Producción Realizada por la Profesora de Primaria – A



Así mismo, la *conexión de característica* es establecida por los profesores de primaria B - C y secundaria A-B-E y F; quienes asignan sentidos a las expresiones en relación a las características de estas, por ejemplo, $(n-1)+n+(n+1)$ es asociada con *«sucesión de tres números enteros consecutivos», «dado un número cualquiera se le suma el anterior y el siguiente»*, o, *«indica una suma »* y la expresión $3n$ es asociada con *«un valor constante y una variable», «indica un producto por 3» o «un número cualquiera y multiplicarlo por tres»*. Por otro lado, entre los 32 profesores de primaria se cuenta con 17 de estos, quienes admiten desde el aspecto sintáctico la igualdad, pero desde su aspecto semántico no. Tal y como se evidencia en la producción realizada por el profesor de secundaria-14.

Figura 57

Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas- Conexión de Característica. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-14


7. $(n-1)+n+(n+1) = 3n$.
Al realizar la suma algebraica se evidencia que las dos expresiones son equivalentes.
dos formas de expresar la misma cantidad.
Sin embargo, la expresión "3 veces un número" no expresa la interpretación de la expresión como suma de tres enteros consecutivos.
Pero en términos numéricos (de cantidad) las dos son equivalentes.

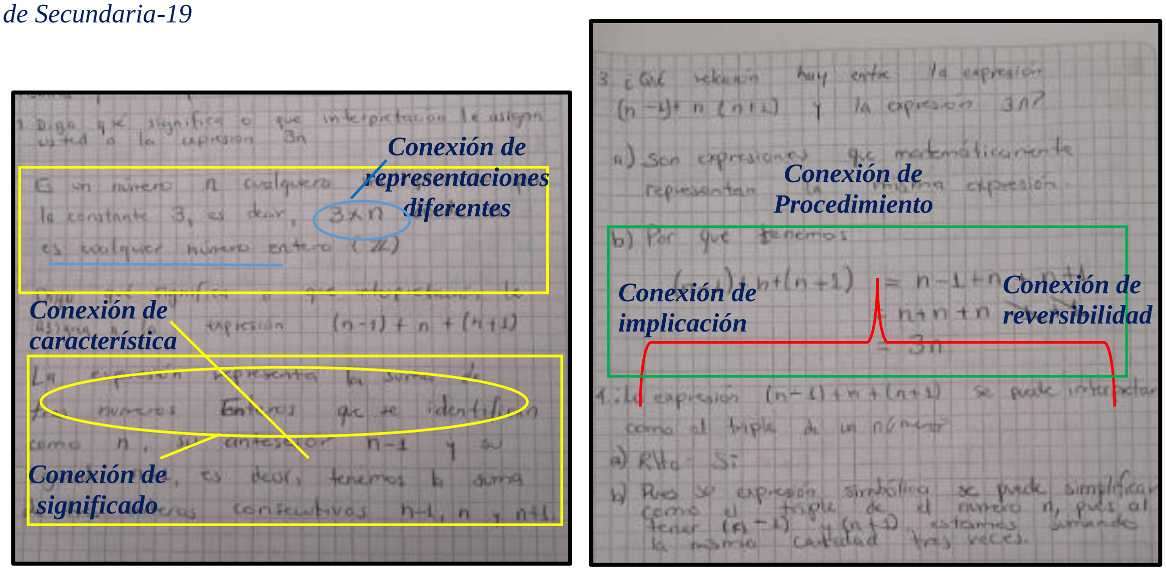
Conexión de Característica

En la producción se evidencia que *las características* de las expresiones es el factor principal para que no se admita la equivalencia total entre las expresiones posibilitando una articulación del aspecto **semántic**o con el **sintáctico**. Los resultados muestran que los sentidos asignados por los profesores están asociados a las características de dichas expresiones.

Los 15 profesores de primaria y los 21 profesores de secundaria que reconocen la equivalencia entre ambas expresiones articulando el aspecto **sintáctico** con el **semántico** establecen las conexiones de implicación, parte todo y reversibilidad puesto que, desde la conexión de implicación, los profesores reconocen que las dos expresiones son equivalentes desde su aspecto **sintáctico** que implica que desde su aspecto **semántico** también lo sean; frente a la *conexión parte- todo*, los profesores reconocen el todo como la equivalencia y las partes como el significado parcial **semántico** y el significado parcial **sintáctico**; la conexión de *reversibilidad* emerge cuando los profesores establecen la equivalencia de las expresiones desde lo **sintáctico,** que posibilita establecer la equivalencia también desde lo **semántico** y concluir que la expresion $(n-1)+n+(n+1)$ puede ser interpretada como el triple de un número. Tal y como se evidencia en la siguiente producción que indaga por la relación entre ambas expresiones.

Figura 58

Tarea Interpretación de Expresiones Algebraicas-Conexiones Matemáticas. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-19



6.3. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuraciones Cognitivas de Objetos Matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Primaria Sobre la Tarea de Interpretación de Gráficos Estadísticos

A continuación, se presenta el trabajo realizado por el grupo de 5 profesores de primaria integrado por los profesores-A, B, C, D y E, sobre la tarea de interpretaciones de gráficos estadísticos, quienes seleccionan uno o ninguno de los dos diagramas. Inicialmente se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios. Así mismo, se realiza el análisis de cada entrevista, que permiten reforzar o ampliar las configuraciones activadas por los profesores y las funciones semióticas establecidas por estos. La situación problema que se propone para evidenciar las interpretaciones y el establecimiento de lo que hemos asumido como equivalencia contextual entre gráficos estadísticos, gira en torno al consumo de agua de una vivienda en el último trimestre presentada en dos diagramas de barras, uno en escala con número fraccionarios y el otro en números enteros.

Tabla 26

Rejilla de Respuestas del Grupo de 5 Profesores de Primaria. Tarea Interpretación de Gráficos Estadísticos

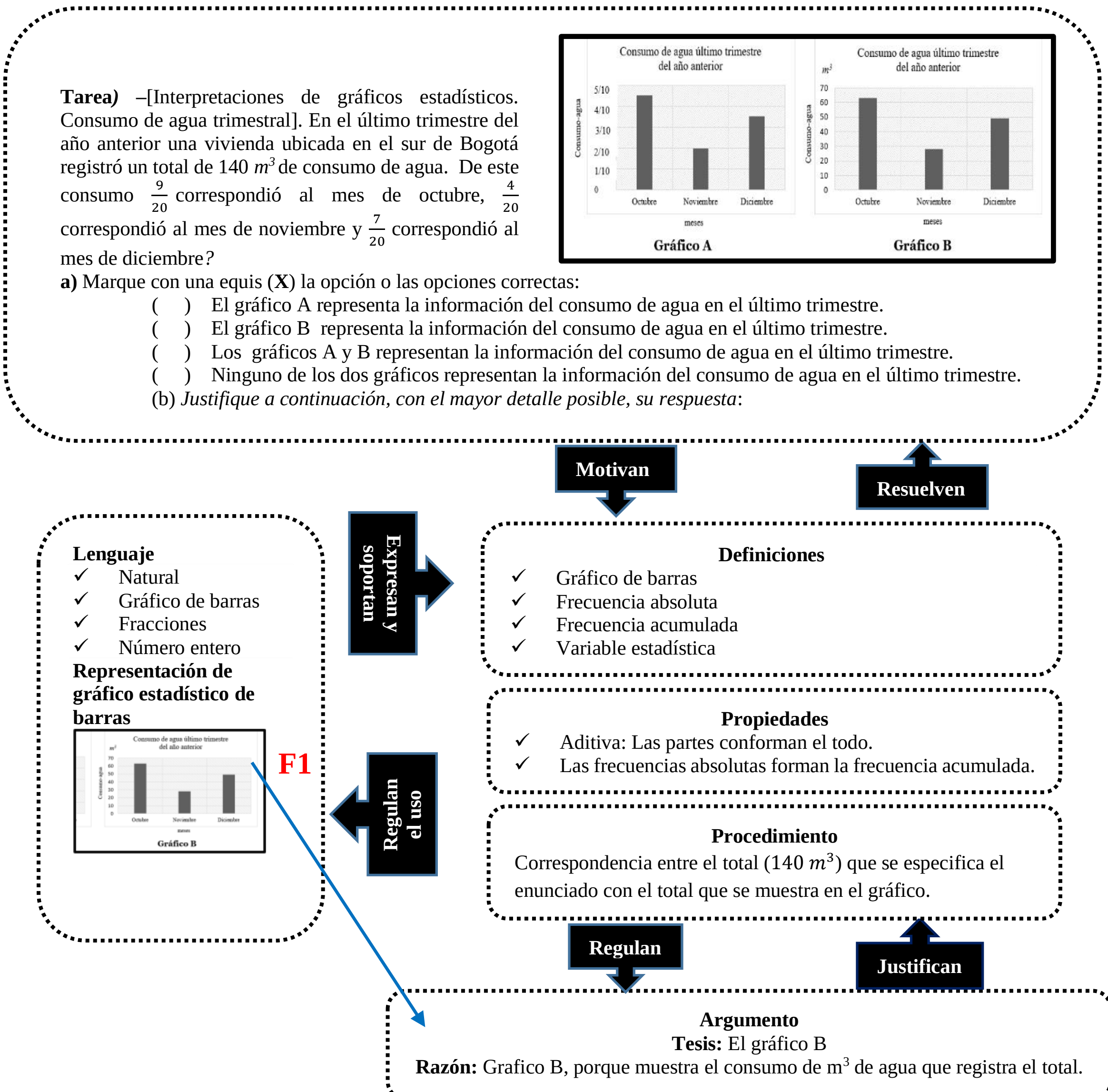
Docente/Ítem	Primaria-A	Primaria-B	Primaria-C	Primaria-D	Primaria-E
Gráfico que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior.	Gráfico B, por muestra el consumo de m^3 de agua el cual registra el total.	Gráfico B, porque contiene los valores equivalentes en m^3 de cada fracción de los 140 m^3 totales.	Gráfico B, representa en m^3el consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total.	Gráfico B, porque corresponde con los datos del enunciado.	Ninguno de los dos gráficos representa la información de la situación.

Con el propósito de identificar los sentidos asignados por los profesores de matemáticas sobre la interpretación que estos realizan a gráficos estadísticos, así como las dificultades que encuentran para establecer la equivalencia contextual entre estos, se presenta la configuración cognitiva de objetos primarios activada por cada profesor que relaciona los seis objetos primarios [situaciones-lenguajes-definiciones-propiedades-procedimiento y argumentos]. Las configuraciones son presentadas en una rejilla que sintetiza las similitudes entre las interpretaciones que realizan los profesores, seguidamente se presenta las transcripciones de las entrevistas realizadas a los profesores con el fin de identificar y analizar los argumentos que justifican las relaciones establecidas en la solución por medio de las funciones semióticas.

6.3.1. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–A

Figura 59

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-A. Interpretación de Gráficos Estadísticos



La profesora [Primaria-A] selecciona el gráfico B, como el diagrama que representa la información suministrada en el enunciado, calcula el número entero (63, 29 y 49 m^3) correspondiente a cada fracción relacionada. Frente a las propiedades reconoce que el todo equivale a $140\ m^3$ y que la suma de las partes 63, 29 y 49 es igual a 140, que equivale al total de agua consumida durante el último trimestre del año anterior. Las producciones realizadas dejan en evidencia que existe un reconocimiento de las frecuencias relativas que corresponden al consumo mes a mes de agua y la frecuencia absoluta que corresponde al consumo total. La profesora alude que el gráfico B, muestra el consumo de agua en metros cúbicos (m^3), hecho que fue decisivo para que eligiera el gráfico B. Aspecto que se profundiza en el minuto $4:32$ al $7:02$ que corresponde a la entrevista que se desarrolló.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[4:32-5:07]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $\frac{9}{20}$ correspondió al mes de octubre, $\frac{4}{20}$ correspondió al mes de noviembre y $\frac{7}{20}$ correspondió al mes de diciembre.». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el gráfico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[5:07-6:01]$	Primaria-A	2	A bueno [se rio] te digo que muy mala para interpretar gráficos.
$[6:01-6:53]$	Entrevistadora	3	No importa, lo importante es su esfuerzo.
$[6:53-7:02]$	Primaria-A	4	Bueno elegí el gráfico B, porque vi que en el gráfico A, y no se relacionaba la unidad de medida [metros cúbicos], entonces yo solo lo interprete a partir de que el consumo de agua que debe estar en metros cúbicos y por eso descarte la gráfica A.

En el fragmento 4 de la transcripción, se evidencia que para la profesora el hecho que el gráfico B, especifique la magnitud de medida *«metros cúbicos»*, juega un papel fundamental para descartar el gráfico A, en el que se relaciona el consumo por medio de fracciones, aspecto que y no sea analizado por la profesora y se verifique la correspondencia de las fracciones dadas en el diagrama con las dadas en el enunciado de la tarea.

6.3.2. Configuración Cognitiva Activada por los Profesores de Primaria –B, C y D

Tabla 27

Rejilla de Síntesis de las Configuraciones Cognitivas Activadas por los Profesores de Primaria B-C y D. Tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos

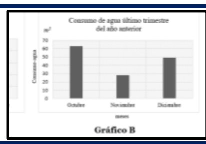
(Tarea –Interpretaciones de gráficos estadísticos. Consumo de agua trimestral*)*. En el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 *m3* de consumo de agua. De este consumo $\frac{9}{20}$ correspondió al mes de octubre, $\frac{4}{20}$ correspondió al mes de noviembre y $\frac{7}{20}$ correspondió al mes de diciembre*?*

a) Marque con una equis (**X**) la opción o las opciones correctas:

( ) El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Ninguno de los dos gráficos representan la información del consumo de agua en el último trimestre.

(b) *Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta*:

Docente	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Primaria-B	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras** 	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras: Correspondencia entre los valores dados en el enunciado [fracciones] con los valores dados en el gráfico B [número entero].	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** Gráfico B, porque contiene los valores equivalentes en m^3de cada fracción de los 140 m^3totales.
Primaria-C	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras** 	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras: Correspondencia entre los valores dados en el enunciado [fracciones]con los valores dados en el gráfico B [número entero].	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** Gráfico B, representa en m^3 el consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total.
Primaria-D	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras:**	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la	Lectura de gráficos de barras: Correspondencia entre los valores dados en el enunciado [fracciones] con los valores dados en el gráfico B [número entero].	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** Gráfico B, representa en m^3 del consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total.

	frecuencia acumulada.

La tabla anterior muestra las configuraciones cognitivas activadas por las profesoras de primaria-B, C y D; quienes eligen el gráfico B, como aquel diagrama que representa la información suministrada en el enunciado. La profesora [Primaria-B] establece el número entero que corresponde a cada fracción relacionada en el enunciado de la tarea (63, 29 y $49\mathrm{m}^3$) aunque considera que en ambos gráficos se relacionan los valores de consumo, pero se inclina por el diagrama B, en tanto explicita la unidad de consumo [metros cúbicos]. Reconoce que el todo equivale a los $140\ \mathrm{m}^3$ [frecuencia absoluta] y la suma de las partes conforman el consumo total [frecuencias relativas], pese que en los dos gráficos se puede deducir dicha información, se hace más evidente en el gráfico B. La profesora establece una función semiótica entre el antecedente, que relaciona el enunciado de la tarea, y el consecuente *«el gráfico B»*. La correspondencia entre los valores enteros dados en metros cúbicos [consumo en cada mes] y las fracciones de consumo durante el último trimestre del año anterior relacionadas en el enunciado de la tarea son fundamentales para que la profesora seleccionara el diagrama B, tal y como se evidencia en el argumento donde explicita que: *«gráfico B, porque contiene los valores equivalentes en m^3de cada fracción de los $140\, m^3$ totales»*. Aspecto que fue profundizado en el minuto $7{:}\,50$ hasta $11{:}\,03$, que corresponde a la entrevista realizada a la profesora:

Intervalo de tiempo	**Interlocutores**	**N°**	**Diálogo**
$[7{:}\,50 - 8{:}\,53]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre.». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[8{:}\,53 - 9{:}\,57]$	Primaria-B	2	O.k. en un primer momento, dije que ambas me pueden servir, a pesar que es poco común ver una gráfica con escala de fracciones. Pero lo que me llamo la atención es que independientemente de que este en fracciones, no se especifica el total o una parte del consumo por mes, por ejemplo, en octubre se consumió tantos litros.
$[9{:}\,57 - 9{:}\,58]$	Entrevistadora	3	Me gustaría que profundizara un poco por qué finalmente no eligió ambas graficas.
$[9{:}\,58 - 10{:}\,59]$	Primaria-B	4	Porque la gráfica A, no me permite, saber el consumo total del trimestre a pesar de que si yo sumo, me va a dar la totalidad evidentemente, pero el consumidor no va a saber cuánto gasto en el trimestre mientras que en la gráfica B, se puede deducir el consumo de los $140\ \mathrm{m}^3$, por ejemplo, se suma los valores de cada barrita en cada mes. Entonces yo dije la gráfica B, es

	mucho mejor que la gráfica A, como la cantidad de consumo puede ser tan variante, puedo consumir unos mil metros cúbicos de agua y eso no me lo puede estar diciendo la gráfica A, y la gráfica tiene que darme toda esa información; la gráfica B, permite inferir toda esta información.

En el fragmento 2, la profesora reconoce que el gráfico A y B, representan la misma información, pero el establecer una correspondencia entre el resultado de la suma de 63, 28, 49 y los $140m^3$, que corresponde al consumo total durante el trimestre fue un aspecto decisivo para que la profesora seleccionara el diagrama B. Aunque la profesora establece el número entero que corresponde a cada fracción, expresa que el gráfico A, no es evidente dicha información, debido que, no se explicita la unidad de consumo. Tanto los argumentos dados en la solución de la tarea y en la entrevista muestran que la elección se debió a la correspondencia que podía establecer entre el total de consumo, el consumo mes a mes y la unidad de consumo [metros cúbicos] elementos que son especificados en la gráfica B.

La profesora [Primaria–C] calcula el número entero que corresponde a cada fracción relacionada en el enunciado de la tarea (63, 28 y 49 m^3). Reconoce que el todo equivale a los $140\ m^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencias relativas]. Aspecto que junto a la explicitación de la unidad de medida m^3, hacen que la profesora se incline por el diagrama B, como se evidencia en el siguiente argumento «*gráfico B, representa en m^3 el consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total*». La profesora establece una función semiótica entre el antecedente, consumo de agua que registra una vivienda en el último trimestre del año anterior, y el consecuente «*el gráfico B*». Aspectos que fueron profundizados en el minuto $42:32$ hasta $49:47$, que corresponde a la entrevista realizada a la profesora:

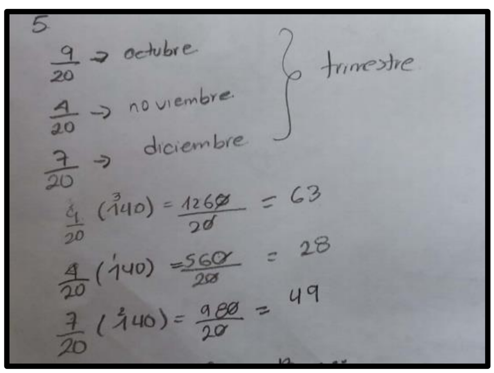
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[42:32-44:07]$	Entrevistadora	1	Hablemos ahora sobre la tarea de interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[44:07-45:03]$	Primaria-C	2	Porque, claro yo veía que había equivalencia en cuanto a los datos del consumo.
$[45:03-46:02]$	Entrevistadora	3	¿Como se dio cuenta que en ambas gráficas eran equivalentes?
$[46:02-48:01]$	Primaria-C	4	Si, las fracciones en el gráfico A, coincide con los valores del enunciado, pero entonces, no me estaba fijando que el consumo de agua porque dicha información no se presenta en fracciones y en el grafico B, se presenta el consumo mes a mes en metros cúbicos y con un número entero.
$[48:01-48:53]$	Entrevistadora	5	¿Y por qué no se debe presentar el consumo en fracciones?

$[48{:}01 - 49{:}47]$	Primaria-C	6	Porque no es usual, siempre que uno mira un gráfico, como este, que representa el consumo ya sea de gua o luz lo hace con números enteros y el gráfico B, da cuenta de la cantidad en relación con el total y expresa mejor la información.

En el fragmento 2, la profesora-C explicita la equivalencia entre las tres representaciones [Lenguaje natural, gráfico de barras A y B], pero en el fragmento 4, explicita que no es usual que se presente la información de consumo con números fraccionarios, así mismo, expresa que el gráfico B, explicita la unidad de consumo «*metros cúbicos*». Por otro lado, en el fragmento 6, la profesora alude que, al representar la información por medio de un gráfico estadístico, en este se debe especificar claramente la información y las escalas que deben ser en números enteros, así como, la unidad de consumo, etc. En la siguiente figura se muestra la solución realizada por la profesora de Primaria–D quien reconoce que las tres representaciones [gráficos de barras en fracciones y números enteros y el enunciado de la tarea], muestra la misma información pero que las especificaciones que se realizan en el diagrama B, hacen que se incline por este gráfico.

Figura 60

Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción Realizada por la Profesora de Primaria - D



Reconoce que el todo equivale a los $140\ m^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencias relativas]. Aspecto fundamental para que la profesora se inclinara por el gráfico B, al respecto alude: «*gráfico B, representa en m^3 el consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total*». La profesora establece una función semiótica entre el antecedente consumo de agua que registra una vivienda en el último trimestre del año anterior y el consecuente «*el gráfico B, representa la información suministrada*». A continuación se presenta la transcripcion de la entrevista realizada a la profesora correspondiente del minuto $6{:}07$ al $9{:}25$, que amplian los argumentos dados inicialmente:

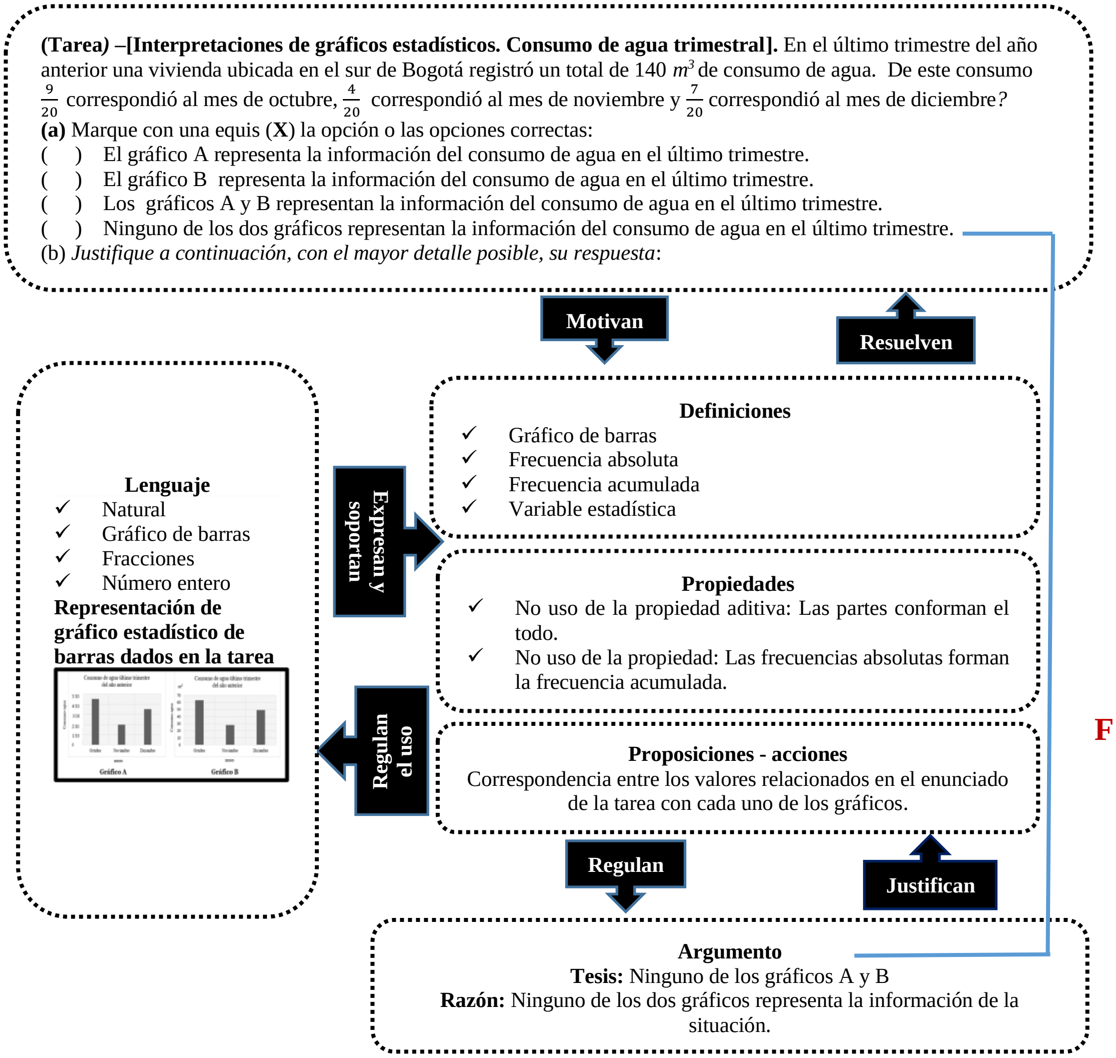
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[6{:}07 - 7{:}34]$	Entrevistadora	1	Hablemos sobre la interpretación de gráficos [lo señala con el puntero de su computador], se presenta la siguiente situación: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que ampliáramos como se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[7{:}34 - 8{:}12]$	Primaria-D	2	Bueno, no lo hice solo con cálculos matemáticos decía creo que en el trimestre se consumían 140 metros cúbicos si no estoy mal; entonces pues lo que hice fue sacarle 9/20 a 140 4/20 y 7/20 entonces me dio 63, 28 y 49, que estos números eran los que se relacionaban en la gráfica B.
$[8{:}12 - 8{:}57]$	Entrevistadora	3	Si, y entonces se dio cuenta que el número entero correspondía con las fracciones dadas en el enunciado. ¿Este fue el motivo por el cual eligió el grafico B?
$[8{:}57 - 9{:}25]$	Primaria-D	4	Si, elegí el gráfico B, porque si me preguntan por el agua, no puedo decir que 9/20 a 27 4/20 ni 7/20, porque me están preguntando específicamente por el agua.

En el fragmento 4, evidencia que la profesora-D manifiesta que no se podría representar el consumo en fracciones, aspecto que deja en evidencia dos aspectos: el primero, se relaciona con la construcción y presentación de gráficas de barras, en el que usualmente se trabaja con números enteros para representar las frecuencias relativas; y segundo, el hecho que usualmente los valores de consumo sean presentados con un número entero, argumentos que hacen que la profesora descarte el gráfico A.

6.3.3. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria–E

Figura 61

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-E. Interpretación de Gráficos Estadísticos



La profesora [Primaria-E] manifiesta que ninguno de los dos gráficos representa la información presentada en el enunciado, puesto que, los diagramas no relacionan los datos de la tarea, situación que deja en evidencia la búsqueda de la profesora por realizar una traducción literal entre las tres representaciones. Para reconocer la equivalencia entre las representaciones se requiere simplificar las fracciones relacionadas en el gráfico A, y se calculen los números enteros correspondientes a cada fracción que se muestran en el diagrama B, hecho que impide establecer la equivalencia contextual entre los gráficos y el enunciado. Fenómeno que fue profundizado en la entrevista realizada a la profesora, correspondiente al minuto 1: 28: 33 hasta 1: 35: 03:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[1:28:33 - 1:30:31]$	Entrevistadora	1	Hablemos sobre la tarea de interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[1:30:31 - 1:31:25]$	Primaria-E	2	Si, porque al observar el enunciado y los dos gráficos no coinciden.
$[1:32:23 - 1:33:17]$	Entrevistadora	3	¿Como verifico que los valores no coincidían?
$[1:33:17 - 1:35:03]$	Primaria-E	4	Porque, en el gráfico A, las fracciones no coinciden con los valores dados en el enunciado y en el gráfico B, los valores no se relacionan.

En los fragmentos 2 y 4, la profesora-E, argumenta la solución dada inicialmente, en su intento de establecer directamente la coincidencia entre los valores relacionados en el enunciado con los valores dados en los dos diagramas, aspectos que influyeron para que no estableciera la equivalencia contextual entre los gráficos.

6.3.4. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuraciones Cognitivas de Objetos Matemáticos Primarios del Grupo de Profesores de Secundaria

A continuación, se presenta el trabajo realizado por el grupo de 5 profesores de secundaria, integrado por los profesores de secundaria-A, B, D, E y F, sobre la tarea de interpretaciones de gráficos estadísticos. Al igual que en el grupo de profesores de primaria se eligen aquellos profesores que seleccionan uno o ninguno de los diagramas. Inicialmente se presenta la rejilla con la información del trabajo realizada por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios. Así mismo, se realiza el análisis de cada entrevista, lo que permite reforzar o ampliar las configuraciones activadas por los profesores y las funciones semióticas establecidas por estos.

Tabla 28

Rejilla de Respuestas del Grupo de 5 Profesores de Secundaria. Tarea interpretación de Gráficos Estadísticos

Docente/Ítem	Secundaria-A	Secundaria-B	Secundaria-D	Secundaria-E	Secundaria-F
Gráfico que representa el consumo de agua en el último trimestre del año anterior.	Gráfico B, calcula el número entero que corresponde a cada fracción de consumo mes a mes.	Gráfico B, calcula el número entero que corresponde a cada fracción de consume mes a mes.	Gráfico B, representa adecuadamente los consumos de acuerdo a las proporciones de consumo en el último trimestre.	Gráfico B, se indica el consumo en m^3 con relación al total de los 140 m^3 muestra la cantidad de unidades cubicas consumidas en cada uno de los meses.	Gráfico B, porque al tratarse de consumo de agua dentro del gráfico no se evidencia con que magnitud se representa.

6.3.5. Configuración Cognitiva Activada por el grupo de Profesores de Secundaria–A, B, D, E y F

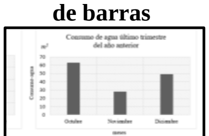
Se sintetiza en un cuadro la configuración cognitiva activada por los profesores A, B, D, E y F, en tanto, los argumentos dados por los profesores de secundaria son similares.

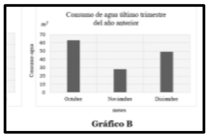
Tabla 29

Rejilla de Síntesis de las Configuraciones Cognitivas Activada por los 5 Profesores de Secundaria A- B-D -E y F. Tarea sobre Interpretación de Gráficos Estadísticos

(Tarea*)*–[Interpretaciones de gráficos estadísticos. Consumo de agua trimestral]. En el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 *m3* de consumo de agua. De este consumo $\frac{9}{20}$ correspondió al mes de octubre, $\frac{4}{20}$ correspondió al mes de noviembre y $\frac{7}{20}$ correspondió al mes de diciembre*?*

(a) Marque con una equis (**X**) la opción o las opciones correctas:
( ) El gráfico A representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) El gráfico B representa la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Los gráficos A y B representan la información del consumo de agua en el último trimestre.
( ) Ninguno de los dos gráficos representan la información del consumo de agua en el último trimestre.
(b) *Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta*:

Docente	Lenguaje	Definiciones	Propiedades	Procedimientos	Argumentos
Secundaria-A	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras**  Gráfico B	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras. Correspondencia entre los valores dados en el enunciado con los valores dados en cada uno de los gráficos.	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** Gráfico B, relaciona los valores dados en el enunciado.
Secundaria-B	✓ Lenguaje Natural ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras**  Gráfico B	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística.	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras. Correspondencia entre los valores dados en el enunciado con los valores dados en cada uno de los gráficos.	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** El gráfico A, no es tan preciso en la información, ya que en el titulo por lo menos debería decir el total de consumo y las unidades de las medidas del volumen.
Secundaria-D	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico**	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística.	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la	Lectura de gráficos de barras. Correspondencia entre los valores dados en el enunciado con los valores dados en cada uno de los gráficos.	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** En el gráfico B, representa adecuadamente los consumos de acuerdo a las proporciones de consumo en el

	de barras 		frecuencia acumulada.		último trimestre. En cambio, la variable de consumo en el gráfico A no está bien determinada y aplicada a la realidad, sería difusa esta información.
Secundaria-E	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras** 	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulada. ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras. Correspondencia entre los valores dados en el enunciado con los valores dados en cada uno de los gráficos.	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** En la gráfica B, se indica el consumo m^3, en relaciónal total, de los 140 m^3, .Muestra la cantidad cubicas consumidas en cada uno de los meses del trimestre.
Secundaria-F	✓ Lenguaje Natural. ✓ Lenguaje gráfico. ✓ Fracciones. ✓ Número entero. **Representación de gráfico estadístico de barras** 	✓ Gráfico de barras. ✓ Frecuencia absoluta. ✓ Frecuencia acumulad ✓ Variable estadística	1. Uso de la propiedad aditiva: Las partes conforman el todo. 2. Las frecuencias absolutas forman la frecuencia acumulada.	Lectura de gráficos de barras. Correspondencia entre los valores dados en el enunciado con los valores dados en cada uno de los gráficos.	**Tesis:** El gráfico B **Razón:** El gráfico B, porque al tratarse de consumo de agua, dentro del gráfico A, no se evidencia con que magnitud se representa. En el grafico B, está explicito en m^3.

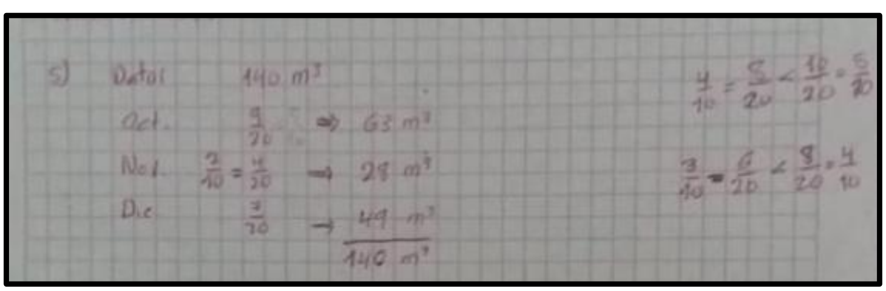
En la tabla anterior se muestra las configuraciones cognitivas de los profesos de secundaria-A. B, D, E y F; quienes seleccionan el gráfico B, como el diagrama que representa el consumo de agua de una vivienda en el último trimestre del año anterior. Los profesores establecen una relación por medio de una función semiótica entre el antecedente «*en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo* $9/20$ *correspondió al mes de octubre*,$4/20$ *correspondió al mes de noviembre y* $7/20$ *correspondió al mes de diciembre» y* el consecuente *«el gráfico B, representa la información del enunciado*». Frente a las configuraciones cognitivas activadas por el grupo de profesores de secundaria: el profesor de secundaria-A instaura una correspondencia entre el número entero con la fracción que se relaciona en el enunciado de la tarea (63, 29 y 49m^3), reconoce que el todo corresponde a 140 m^3 [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de 63, 29 más 49 conforman el todo, [frecuencias relativas]; el profesor argumenta que en el «*gráfico B*», relaciona los valores dados en el enunciado, muestra un reconocimiento de la frecuencia absoluta y las frecuencias relativas que fueron fundamentales para que el profesor se inclinara por el gráfico B. Tal y como se muestra en la siguiente transcripción, que corresponde a la entrevista desarrollada al profesor del minuto $5:20$ al $8:03$:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[5:20 - 6:53]$	Entrevistadora	1	Hablemos sobre la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[6:53 - 7:07]$	Secundaria-A	2	Bueno, si hablamos del gráfico A, los datos no son muy coherentes ¿no?
$[7:07 - 7:08]$	Entrevistadora	3	¿Por qué no son coherentes?
$[7:08 - 8:03]$	Secundaria-A	4	Porque, aunque en el gráfico A, aparece el consumo no explicita muy bien los metros cúbicos y no suele presentarse dicha información por medio de números racionales. Como en este gráfico no aparece los metros cúbicos no dude en elegir el grafico B, si hubiera aparecido en el gráfico A, tal vez hubiera dudado.

En los fragmentos 4 y 6, el profesor-A explicita que: aunque en el gráfico A, coinciden con los valores del enunciado, alude que no es usual interpretar un diagrama de barras con escalas en fracciones. Aspecto para que se incline por el diagrama B, reconoce que ambos gráficos presentan el consumo de agua, pero la representación de los datos con números fraccionarios y la falta de explicitar la unidad de consumo hace que el profesor excluya el diagrama A. El profesor de secundaria–B calcula el número entero correspondiente a cada fracción relacionada en el enunciado de la tarea (63, 29 y $49m^3$). Reconoce que el todo equivale a los $140\ \mathrm{m}^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencias relativas]. Tal y como se muestra en la siguiente figura que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 62

Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria -B



En la solución dada por el profesor-B se evidencia que la unidad de medida m^3, junto con el total de consumo que se puede deducir en el gráfico B, juegan un papel fundamental para que el profesor se incline por este diagrama, como se evidencia en el siguiente argumento *«el gráfico A, no es tan preciso en la información, ya que en el titulo por lo menos debería decir el total de consumo, ni las unidades m^3, de medida del volumen»*. Aspecto que fue profundizado en la entrevista que se realizó al profesor correspondiente al minuto $5:12$ a $9:02$.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[5:12 - 6:53]$	Entrevistadora	1	Hablemos sobre la tarea de interpretación de gráficos estadísticos [*lo señala con el puntero de su computador*], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 *m3* de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el gráfico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[6:53 - 7:41]$	Secundaria-B	2	Siempre les digo a los estudiantes que sean muy precisos a la hora de leer o construir un gráfico, puesto que estos deben reflejar los datos que se quieren representar, como el título y los datos no se pueden representar erróneamente porque eso sería darle una mala información al que va a leer ese gráfico, considero que el gráfico presenta erróneamente la información.
$[7:41 - 7:43]$	Entrevistadora	3	Específicamente que incoherencias encontró en el gráfico A
$[7:43 - 9:02]$	Secundaria-B	4	[Guardo unos minutos de silencio] Ósea por lo menos, en el eje vertical debería tener una etiqueta y pues en el gráfico A, no aparece la etiqueta, no aparece una unidad de medición. Ósea dice el consumo de agua, pero establece unos valores que coinciden con el enunciado, pero nada más. Dada estas inconsistencias descarté el gráfico A, y elegí el gráfico B, porque me pareció más completo y representa el consumo en metros cúbicos.

Tanto en la solución de la tarea realizada inicialmente como en la entrevista el profesor de secundaria-B manifiesta los elementos por los cuales consideraba que el gráfico A, presenta inconsistencias, específicamente el no especificar la unidad de consumo y el no poder el consumo total, puesto que al sumar las fracciones debe reflejar dicho total. Argumentos que fueron fundamentales para que el profesor eligiera el diagrama B, tal y como se evidencia en los fragmentos 4 y 6.

El profesor de secundaria–D establece el número entero correspondiente a cada fracción relacionada en el enunciado de la tarea (63, 29 y $49m^3$). Reconoce que el todo equivale a los $140\ m^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencia relativa]. Aspecto que fue fundamental para que el profesor se inclinara por el gráfico B, en el argumento explicita que: «*el gráfico B, representa adecuadamente los consumos de acuerdo a las proporciones de este en el último trimestre. En cambio, la variable de consumo no está bien* *determinada y aplicada a la realidad, sería muy complicado esta información para el usuario y para el que aprende. Por tanto, se deben determinar las proporciones»*. Aspecto que fue profundizado en el minuto $0{:}\,05$ al $6{:}\,03$, que corresponde a la entrevista desarrollada al profesor:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[0{:}05 - 2{:}07]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre.» Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el gráfico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[2{:}07 - 3{:}01]$	Secundaria -D	2	Pues sí, son muy pocas gráficas que aparecen así con números racionales, generalmente las gráficas más cuando se les enseña a los estudiantes, son con números enteros. ¿Sí? Pero sin embargo uno no tiene que confiarse en la gráfica, en los valores, uno tiene que fijarse, en ¿Cómo están representadas sus variables? sí.
$[3{:}01 - 3{:}53]$	Entrevistadora	3	Me gustaría saber cómo hizo para elegir la gráfica B.
$[3{:}53 - 5{:}02]$	Secundaria -D	4	Bueno yo opte por la segunda, porque en el gráfico B, me daban los valores del consumo y las proporciones ¿sí? Entonces lo que hice fue, las operaciones, convertir cada fracción de consumo en números enteros ¿sí? También me fije en el consumo total. Entonces como me daban los valores por eso opte por la gráfica B. De pronto para una persona experta sí, se representa con números racionales, pero para los estudiantes sería un problema grave ¿no? porque cuando presentan la gráfica estadística la persona tiene que tener conocimientos universitarios o para, para trabajar con fracciones ¿no?
$[5{:}02 - 5{:}33]$	Entrevistadora	5	Por qué sería un problema grave para los estudiantes.
$[5{:}33 - 6{:}03]$	Secundaria -D	6	Porque uno no trabaja con escalas en fracciones y no se coloca a analizar a los estudiantes ese tipo de graficas.

En la anterior transcripción se pone en evidencia la prioridad que ha tenido al trabajo de situaciones en el dominio numérico de los naturales y enteros, dentro del aula de matemáticas. Aspecto que influyó en la elección del diagrama B, y que el profesor enfatiza en los fragmentos 2 y 6, cuando expresa *«obviamente son muy pocas gráficas que aparecen así con números racionales, generalmente las gráficas más cuando se les enseña a los estudiantes, son con números enteros»*. Por otro lado, el profesor manifiesta que el gráfico B, especifica el consumo en cada mes y la unidad de medida, tal y como se especifica en el fragmento 4.

La profesora de secundaria-E establece una correspondencia entre el número entero y la fracción relacionada en el enunciado de la tarea (63, 29 y $49m^3$). Reconoce que el todo equivale a los $140\ m^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencias relativas]. Frente al argumento explicita que: «*en la gráfica B, se indica el consumo* $m^3, en\ relacional\ total$*, de los* $140\ m^3$. *Muestra la cantidad en metros cúbicos consumidas en* *cada uno de los meses del trimestre»*. Aspecto que fue profundizado en la entrevista que se le realizó, correspondiente a los minutos $5:11$ al $7:45$.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[5:11-6:57]$	Entrevistadora	1	Pasemos a la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.
$[6:57-7:45]$	Secundaria-E	2	Si, [guarda un poco de silencio] yo cogí 140 m^3 que es el consumo total y le hallé $9/20, 4/20$ etc., ósea le hallé la fracción para saber cuál era el valor entero que correspondía a cada fracción me di cuenta que el gráfico B, es más preciso, trae la información más completa del consumo en metros cúbicos.

Aunque en la solucion de la tarea la profesora, reconoce que ambos gráficos relacionan la misma informacion, en el fragmento 2, alude que el hecho que se explicite en el diagrama B, la unidad de consumo se descrimina el gráfico A, puesto que no se explicita los metros cúbicos y la informacion se presenta en una escala fraccionaria.

El profesor de secundaria-F establece el número entero correspondiente a cada fracción que es relacionada en el enunciado de la tarea (63, 29 y $49m^3$). Reconoce que el todo equivale a los $140\,m^3$ [frecuencia absoluta] de consumo y la suma de las partes conforman el todo [frecuencias relativas]. La relación de la magnitud de medida que se hace en el diagrama B, fue un aspecto fundamental para que el profesor se incline por el gráfico B, argumentando que: *«el gráfico B, porque al tratarse de consumo de agua, dentro del gráfico A, no se evidencia con que magnitud se representa. En el gráfico B, esta explicito en m^3»*. Aspecto que fue profundizado en la entrevista que se realizó al profesor- correspondiente al minuto $7:17$ a $11:05$.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[7:17-8:58]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos [lo señala con el puntero de su computador], que hace referencia a: «en el último trimestre del año anterior una vivienda ubicada en el sur de Bogotá registró un total de 140 m3 de consumo de agua. De este consumo $9/20$ correspondió al mes de octubre, $4/20$ correspondió al mes de noviembre y $7/20$ correspondió al mes de diciembre». Se presenta la información en dos gráficos de barras y se pide establecer si uno o ambos diagramas representan la información que se relaciona en el enunciado de la tarea. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que el grafico B, era el diagrama que representaba dicha información.

$[8:58 - 9:56]$	Secundaria-F	2	Si, a ver espérame vuelvo a mirar bien la pregunta [lee nuevamente el ítem] ¡Esta pregunta lo confunde a uno un poco! Porque ahí dejé a un lado la orientación y me puse en el lugar de un consumidor. El gráfico que a mí me muestra el consumo de agua y que es más explícito para mí como consumidor, es el gráfico B.
$[9:56 - 9:59]$	Entrevistadora	3	Me gustaría que me explicara a que se refiere cuando habla de orientación.
$[9:59 - 11:05]$	Secundaria-F	4	Desde el punto de vista docente o matemático, si miro el consumo de agua, desde mi orientación yo puedo interpretarlo desde el gráfico A o desde el gráfico B, porque ambos me están representando la misma información, pero si soy el consumidor, me interesa es mirar el consumo, en metros cúbicos de agua, el gráfico B, me muestra la unidad de consumo y los metros consumidos en cada mes, por eso el gráfico B el que más corresponde, a la pregunta.

En el fragmento 2, se evidencia la ruptura del razonamiento entre el profesor de matemáticas y un consumidor o usuario, desde el ámbito matemático reconoce que los dos diagramas relacionan la misma información suministrada en el enunciado y por el otro lado, se pone en el lugar de consumidor y como consumidor realiza la elección del diagrama, en tanto, el consumo relacionado con números enteros permite evidenciar la variabilidad de los metros cúbicos consumidos durante el último trimestre y muestra la unidad de consumo (m^3). Aspectos que jugaron un papel fundamental en la elección.

6.3.6. Análisis a las producciones realizadas

Con relación a las producciones realizadas sobre la interpretación de gráficos estadísticos y el establecimiento por parte de los profesores de la equivalencia contextual de gráficos estadísticos. Los resultados obtenidos permiten corroborar los tres aspectos que resalta Curcio (1987) frente a la comprensión gráfica: primero, el reconocimiento de las palabras que proporcionan la información necesaria para comprender el gráfico y su contexto [título, etiquetas en ejes y escalas]; segundo, reconocimiento del contenido matemático que comprende el gráfico; y tercero, el reconocimiento de los convenios específicos de cada tipo de gráfico. Elementos que posibilitan dotar de sentido y significado los diagramas creados por uno mismo o por otros. En cuanto a los tres elementos que intervienen en la comprensión de un gráfico estadístico los resultados obtenidos muestran:

1. *Las* ***palabras o expresiones*** *que proporcionan la información necesaria para comprender el gráfico y su contexto* [título, etiquetas en ejes y escalas]. Los resultados muestran que los 35 profesores: que establecen una equivalencia contextual entre los gráficos A, B, y el enunciado de la tarea; reconocen en los dos diagramas, el título, la unidad de consumo y las escalas que representan los valores relacionados en el enunciado; aspectos que permiten hacer una comprensión del contexto que se propone en la tarea. Por otro lado, 21 profesores hacen dicho reconocimiento en el diagrama B, por ejemplo, identifican las etiquetas en los ejes que relaciona las unidades que miden el consumo [metros cúbicos m^3], característica fundamental para que este grupo de profesores no acepten el diagrama A, como aquel diagrama que representa la información suministrada y con ello establecer la equivalencia contextual entre

las representaciones. Frente a lo anterior algunos profesores expresan que en el gráfico B, se especifica la unidad de consumo (m^3), elemento que no es muy claro en el gráfico A, otros reconocen que el diagrama A, relaciona los valores $1/10$, $2/10$, $3/10$, $4/10$, de consumo, pero no explicita la unidad en m^3. Entre los 64 profesores, 5 de ellos eligen el gráfico A, no porque se evidencie un reconocimiento de las etiquetas en los ejes [unidad de consumo] sino por la correspondencia entre las fracciones simplificadas relacionadas en el diagrama y las dadas en el enunciado de la tarea. Los 3 profesores que no eligen ningún gráfico dejan en evidencia un reconocimiento del contexto que enmarca la tarea, pero realizan una lectura literal de los dos diagramas con su enunciado, hecho que no les permite establecer la equivalencia entre las representaciones.

2. *El* ***contenido matemático*** *que comprende el gráfico*. El gráfico A, relaciona los datos de consumo en fracciones, siendo éste un impedimento para que algunos profesores no establezcan la equivalencia contextual entre los diagramas y el enunciado de la situación, algunos manifiestan que «*los gráficos de barras con este tipo de numeración no son usuales*» o desconocen cómo hacer la lectura del diagrama, así mismo aplican erróneamente procesos para simplificar fracciones. Los resultados obtenidos muestran que los 35 profesores que establecen la equivalencia contextual entre los dos gráficos comprenden los aspectos matemáticos que se ponen en juego en cada diagrama, algunos simplifican las fracciones que se relacionan en el gráfico A, y calculan el número entero que corresponde a cada fracción del enunciado, aludiendo que: «*ambas gráficas presentan los datos dados en el enunciado de forma correcta, al convertir las fracciones del enunciado a números decimales corresponde en equivalencia a las fracciones del gráfico A, y al hallar la fracción de un número en relación a los valores dados del gráfica B, se verifica la equivalencia*», «*los dos gráficos no son excluyentes, puesto que el gráfico A, representa la cantidad relativa al consumo en su relación parte todo y el gráfico B representa la cantidad absoluta*» , «*los dos gráficos muestran el consumo. El gráfico A, lo relacionan frente a una fracción simplificada y el gráfico B, frente al consumo directo*».

   Por otra parte, los 5 profesores que eligen el gráfico A, manifiestan no recordar el contenido matemático, que se relaciona en el gráfico B, en tanto centran la atención en la correspondencia de las fracciones inmersas en el diagrama A, con las fracciones dadas en el enunciado, o algunos desconocen el algoritmo para establecer el número entero que corresponde a una fracción. Algunos argumentan que «*el gráfico A, representa los registros con fracciones simplificadas*», «*el gráfico A, representa la información del consumo de agua en el último trimestre, reporta los valores equivalentes. Aunque no es tan comprensible*». De los 21 profesores que eligen el gráfico B, algunos profesores simplifican las fracciones de manera errónea tal y como se evidencia en el siguiente argumento «*debido a los cálculos realizados el gráfico B representa la información de consumo de agua. En el gráfico A octubre no concuerda con* $3/10$ *y en el gráfico B octubre, noviembre y diciembre concuerdan con las* *barras»,* otros profesores muestran en sus producciones un dominio matemático del contenido que se relacionan en ambos diagramas pero centran la atención en la unidad de consumo o desconocen cómo hacer lectura del gráfico, tal y como se muestra en el siguiente argumento «*…al tener presente los datos como son* $140\ m^3$ *de consumo y las fracciones que representa cada mes, al realizar la operación para conocer el número correspondiente de consumo … no me guio por la gráfica A, y su relación consumo-agua expresada en fracciones sino por el número natural que se expresa en la gráfica B, no comprendo como leer la gráfica A, para mi es más comprensible la lectura de la gráfica B*», «*el gráfico A, representa fracciones equivalentes a la información dada en el problema, pero no hace referencia a la unidad, por ejemplo* $2/10$ *pero no explica de que unidad por lo tanto descarto este gráfico porque no proporciona la información completa frente al consumo trimestral*». En cuanto a los 3 profesores que no seleccionan ningún gráfico en las producciones realizadas se evidencia una comprensión del enunciado, pero posiblemente el no dominar los contenidos matemáticos para establecer la equivalencia entre las representaciones les imposibilita la interpretación de los gráficos.

3. *Los* ***convenios específicos*** *en cada gráfico.* Frente a los gráficos A y B, los resultados muestran que: los 35 profesores que establecen la equivalencia contextual entre los dos diagramas con el enunciado natural de la tarea; reconocen los aspectos en la construcción de cada gráfico como la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa; identifican la proporción de cada barra en relación a los datos relacionados y la magnitud de medida. En relación a los 21 profesores que eligen solo el gráfico B: reconocen en este la frecuencia absoluta; la proporción entre las barras; la unidad de medida; y establecen una correspondencia entre el número entero relacionado en el diagrama con el enunciado de la tarea. Los 5 profesores que eligen solo el gráfico A: realizan la correspondencia entre las fracciones simplificadas y los valores relacionados en el enunciado de la tarea; se evidencia que los 3 profesores que no seleccionan ninguno de los diagramas no reconocen los convenios que se establecen en la construcción de los gráficos de barras, que posibilitan realizar una lectura de éstos.

Con relación a los profesores que conforman el estudio de caso colectivo: las profesoras de primaria-A, B, C y D seleccionan el gráfico B, y la profesora-E expresa que «*ninguno de los dos gráficos representa la información suministrada en el enunciado en tanto, en ninguno de los diagramas se relaciona los datos dados en el enunciado de la tarea*»; algunos argumentan que «*el gráfico B, muestra el consumo de* m^3*de agua, el cual registra el total», «el gráfico B, contiene los valores equivalentes en* m^3 *de cada fracción de los* $140\ m^3$ *totales», «el gráfico B, representa en* m^3 [metros cúbicos] *el consumo de agua para cada mes en correspondencia con el total del trimestre y las partes sugeridas para cada mes*» y «*en el gráfico A, no se puede determinar con exactitud la medida que se extrae con la operación*». Respecto al grupo de profesores de secundaria, los profesores-A, B, D, E y F eligen el gráfico B. Algunos argumentan que: «*el gráfico A, no es tan preciso en la información, en el titulo debería decir* *el total del consumo, y las unidades de medida del volumen», «el gráfico B, representa adecuadamente los consumos de acuerdo a las proporciones de consumo en el último trimestre…», «en la gráfica B, se indica el consumo en* m^3*, con relación al total de los* $140\ m^3$**.** *Muestra la cantidad de unidades cubicas consumidas en cada uno de los meses del trimestre»* y *«el B porque al tratarse de consumo de agua dentro del gráfico A, no se evidencia con que magnitud se representa. En el gráfico B, está explicito en* m^3*»***.** Resultados que evidencia un dominio de los conceptos matemáticos que se relacionan en el diagrama B, pero la especificación de la unidad de medida en el consumo de agua es decisiva para descartar el diagrama A, en los dos grupos de profesores.

El diseño de la tarea solo permitió indagar respecto a la equivalencia de gráficos en la interpretación en dos niveles de los cuatro propuestos Friel, Curcio y Bright (2001, como se citó en Batanero et al., 2010. p. 5) y que hacen referencia a: **nivel 1.** *Leer los datos;* **nivel 2.** *Leer dentro de los datos;* **nivel 3.** *Leer más allá de los datos;* y el **nivel 4.** *Leer detrás de los datos,* en cuanto a la interpretación de gráficos estadísticos y a la equivalencia contextual entre estos. Los profesores deben simplificar las fracciones dadas en el gráfico A, calcular el número entero que corresponde a cada fracción en el gráfico B, para finalmente establecer una coincidencia entre los valores en cada gráfico con los valores de consumo dados en el enunciado.

Entre los 64 profesores: 4 profesores de primaria y un profesor de secundaria seleccionan el gráfico A, hacen una lectura literal de la información representada en el diagrama. Por ejemplo, realizan la correspondencia entre los valores dados en la situación con los valores que se relacionan en el gráfico barras A, aspecto que hace que los profesores se encuentren en el ***nivel 1*** de interpretación de gráficos; los 21 profesores eligen el gráfico B, [8 de primaria y 13de secundaria], establecen elementos que no están presentes en el gráfico como el cálculo del número entero que corresponde a cada fracción del enunciado, pero dado que en su elección descartan el gráfico A, no se alcanza el nivel 2 en la interpretación, hecho que hace que los profesores se encuentren en un ***nivel 1***. Los 35 profesores que eligen los gráficos A y B, que establecen la equivalencia entre los dos diagramas con el enunciado de la situación, se ubican en un ***nivel 2,*** sobre la interpretación de gráficos estadísticos, en tanto simplifican las fracciones entre dos y calculan el número de entero de cada fracción, elementos que no se encuentran presentes en los diagramas, que permite por un lado, alcanzar el ***nivel 2,*** en la interpretación de gráficos estadísticos y por otro parte establecer la equivalencia contextual de gráficos estadísticos. Los 11 profesores que conforman el estudio de caso ubican en el ***nivel 1.***

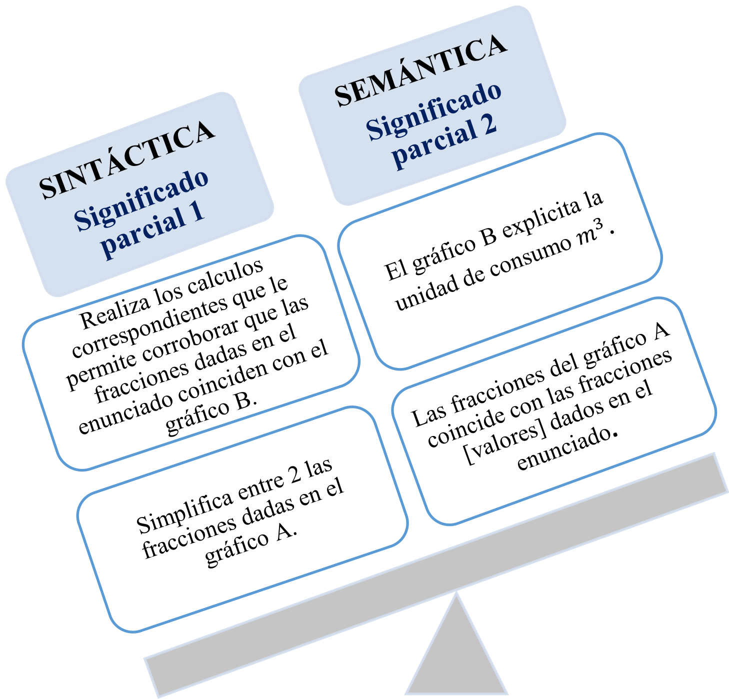
6.3.7. Una Síntesis de las Producciones Realizadas

El trabajo realizado por los profesores brinda resultados sobre la interpretación de gráficos estadísticos, específicamente sobre la posibilidad de reconocer la equivalencia contextual de gráficos estadísticos, entendida como la capacidad que tienen los sujetos para identificar la misma información por medio de diferentes representaciones [contextual]. Los resultados obtenidos permiten corroborar que «*la construcción e interpretación de gráficos estadísticos es una tarea* *compleja, por elemental que sea el diagrama, debido a la complejidad en el lenguaje utilizado*» (Batanero et al., 2010). Aunque el gráfico de barras es considerado un diagrama elemental, su interpretación requiere que los sujetos comprendan aspectos en su construcción como: las variables de los ejes; frecuencia relativa; frecuencia absoluta; escalas, etc. En la tarea los dos gráficos son contextualmente equivalentes, debido a que representan la misma información, su interpretación y construcción requiere que los sujetos pongan en juego otros objetos matemáticos y procedimientos, por ejemplo, el gráfico A, implica que los sujetos apliquen el proceso de simplificación de fracciones y en el gráfico B, que se calcule el número entero que corresponde a cada fracción. Aspectos que al comparar los dos diagramas involucra una complejidad semiótica diferente, dependiendo de los conocimientos matemáticos que se pongan en juego, hecho que no les permite establecer la equivalencia contextual entre los dos gráficos y el enunciado de la tarea, y solo una parte de profesores admiten solo de los dos gráficos.

Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al., (2017) en términos del EOS la noción de equivalencia intervine dos significados *parciales* [sintáctico-semántico], así como su necesaria articulación, se reconoce la complejidad en la equivalencia de gráficos de manera análoga a la equivalencia de expresiones algebraicas, que requiere los aspectos **sintáctico** y **semántico,** así como, su necesaria articulación para interpretar y reconocer la equivalencia contextual entre éstos. Frente a los resultados obtenidos se tiene un total de 21 profesores que eligen el gráfico B, como el diagrama que representa la situación que se enmarca en el enunciado, 8 profesoras de primaria y 13 de secundaria. Con relación a su aspecto **sintáctico** los profesores que eligen el gráfico B, realizan la correspondencia entre las fracciones de consumo de agua dadas en el enunciado con el número entero que expresa el consumo mes a mes, y en su aspecto ***semántico*** los profesores argumentan que el gráfico A, no especifica los metros cúbicos de consumo, ni la variación mes a mes. Tal y como se evidencia en el siguiente diagrama.

Figura 63

No Articulación de los Significados Parciales Sintáctico y Semántico en la Interpretación sobre Equivalencia Contextual de Gráficos Estadísticos.



En su aspecto **semántico** se tiene dos gráficos que representa la misma información [equivalencia contextual], el contexto permite que las representaciones gráficas adquieran significados y en el que, además, se puede decir que los gráficos A y B, son equivalentes. Los resultados muestran que aquellos profesores que eligen solo el gráfico B, en su mayoría verifican que el gráfico A, representa la información suministrada en el enunciado [valores de consumo]. Algunos profesores manifiestan «*en este diagrama la forma de presentación de los datos en números fraccionarios no es usual en los gráficos de barras*», así como, la no especificación la magnitud de consumo [metros cúbicos], elementos decisivos para no admitir la equivalencia entre las representaciones. Los profesores que eligen uno de los dos diagramas no logran articular el aspecto **sintáctico** con el **semántico**, hecho que no les permite relacionar entre si las interpretaciones realizadas en los gráficos A y B.

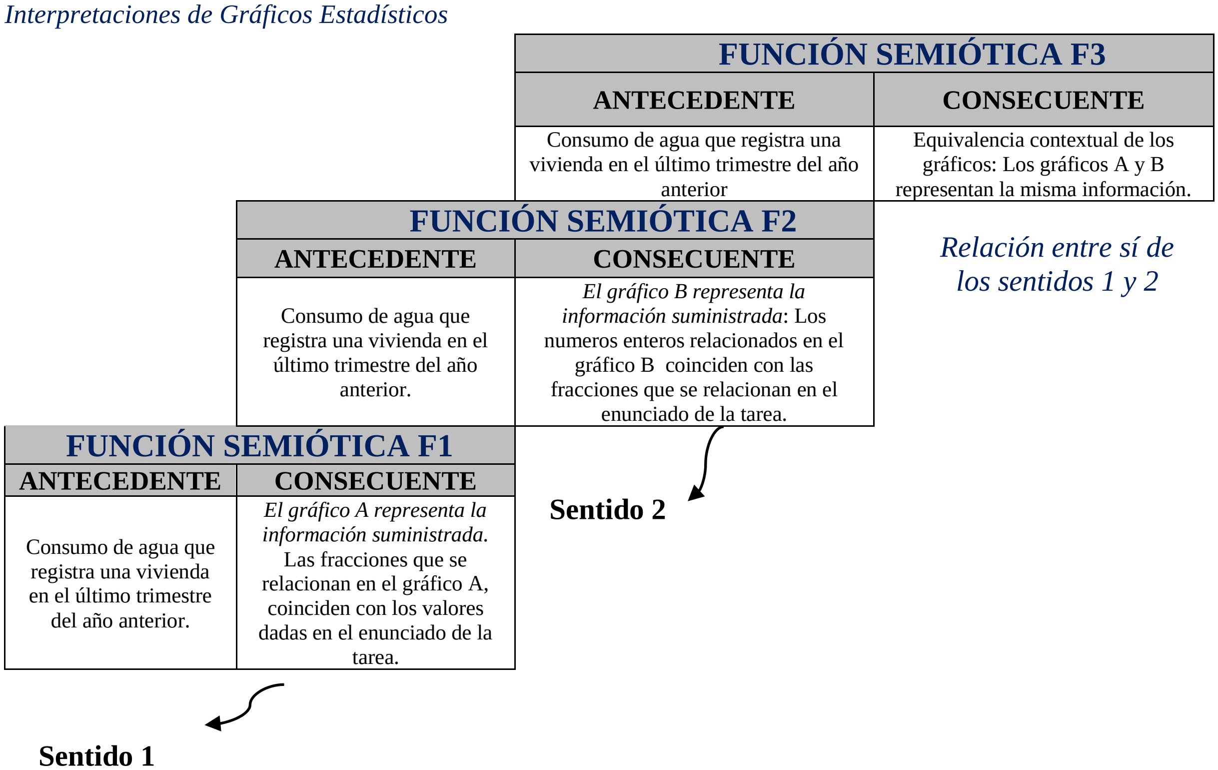
6.3.8. Articulación y No Articulación de Sentidos Asignados a Gráficos Estadísticos Mediante una Cadena de Funciones Semióticas

La relación de los aspectos **sintáctico** y **semántico**, en la que nos hemos centrado en la interpretación de gráficos estadísticos, que subyace en la transformación de **tratamiento**, es analizada a través de una tarea que requiere: por una parte, la interpretación de una situación [lenguaje natural] para transformarla al lenguaje gráfico de barras A o B [conversión]; y, por otra parte, del lenguaje gráfico de barras A, al lenguaje gráfico de barras B [tratamiento]. Con respecto a los planteamientos realizados por Chalé-Can et al., (2017) en relación a los dos significados parciales [sintáctico - semántico] y su posible articulación, se encontró: 1) una parte de profesores establecen la correspondencia entre el gráfico de barras A, con el enunciado que enmarca la situación: 2) establecen correspondencia entre el gráfico de barras B, con el enunciado de la tarea; y 3) admiten la equivalencia contextual entre las tres representaciones.

Con relación al establecimiento de la equivalencia contextual entre las representaciones 35 profesores admiten que los gráficos A y B, representan el consumo de agua en el último trimestre, es decir, relacionan entre sí las dos interpretaciones realizadas a cada uno de los diagramas con el enunciado de la tarea [articulan los significados parciales **sintáctico** y **semántico**]. Estos profesores establecen tres relaciones por medio de las funciones semióticas, la primera entre el antecedente «*consumo de agua registrado en una vivienda en el último trimestre del año anterior*» y el consecuente «*el gráfico A representa la información suministrada*», la segunda entre el antecedente «*consumo de agua registrado en una vivienda en el último trimestre del año anterior*» y el consecuente «*el gráfico B, representa la información suministrada*», y la tercera entre el antecedente «*consumo de agua registrado en una vivienda en el último trimestre del año anterior*» y el consecuente, «*los gráficos A y B representan la misma información*», la relación entre estas generan una cadena de funciones semióticas. Tal y como se muestra en la figura 65:

Figura 64

Articulación Semiótica Mediante Una Cadena de Funciones Semióticas Establecidas En la Tarea Sobre Interpretaciones de Gráficos Estadísticos



El anterior esquema muestra la cadena de funciones semióticas que los profesores explicitan al establecer la equivalencia contextual entre las representaciones en la solución de la tarea. La función semiótica **F3**, relaciona las dos interpretaciones de los gráficos A y B, que son los antecedentes de las funciones semióticas **F1** y **F2,** con el consecuente *«los gráficos A y B, representan la misma información».* Respecto a la regla de correspondencia que les permite relacionar entre sí estas dos interpretaciones y concluir que ambos diagramas representan la misma información, los resultados permiten inferir las reglas de correspondencia de las funciones semióticas reflejadas en argumentos como: «los *dos gráficos representan lo mismo porque se están relacionando las variables puestas en juego, meses Vs consumo, la diferencia tiene que ver con tomar el 140 m3 como el total de consumo durante los tres meses. [Gráfico B] ...».* Algunos profesores realizan los cálculos respectivos para hallar el número entero dado en el gráfico B, con la fracción suministrada en el enunciado y simplifican las fracciones relacionadas en el gráfico A, y con ello corroborar estos resultados con los valores dados en el enunciado de la tarea.

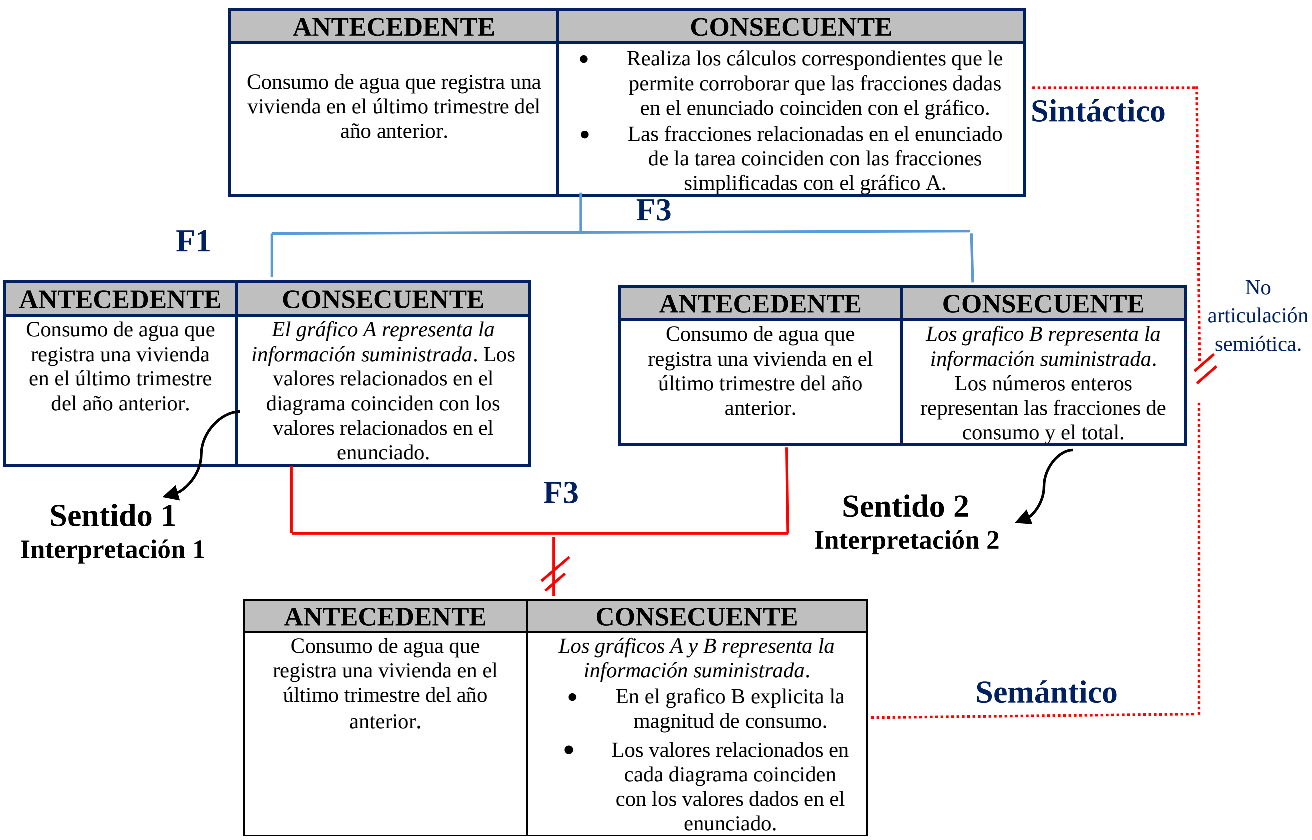
Partiendo del hecho que para admitir la equivalencia contextual de gráficos estadísticos, es necesario la articulación del aspecto **sintáctico** y **semántico**; en la tarea propuesta, desde lo **sintáctico,** se requiere que los profesores simplifiquen fracciones, calculen el número entero que corresponde a cada fracción y conozcan elementos en la construcción de los dos gráficos, por ejemplo, la proporción de las barras correspondiente a la frecuencia del consumo de agua y, desde lo **semántico,** requiere que interpreten la frecuencia relativa, frecuencia absoluta, etc., aspectos necesarios para realizar una adecuada interpretación de los dos diagramas de barras.

En consecuencia, con el EOS, frente a la articulación de los significados parciales [sintáctico - semántico], los resultados muestran que cuando no se logra dicha articulación, los profesores no establecen la equivalencia contextual entre los gráficos estadísticos. Con base a las producciones realizadas por los profesores: 29 de estos eligen el gráfico A, B o ninguno de los dos diagramas; en primaria se cuenta con 15 profesores de los cuales 8 eligen el gráfico B, 4 el gráfico A, y 3 ninguno de los dos diagramas; en el caso de los profesores de secundaria 13 eligen el gráfico B, y 1 profesor el diagrama B. En términos de funciones semióticas cuando los profesores no articulan las dos interpretaciones entre sí, eligen el gráfico A o B. Por otra parte, se habla de una cadena interrumpida de funciones, cuando los profesores seleccionan uno de los dos gráficos, los resultados muestran que los profesores realizan los cálculos correspondientes para calcular el número entero que corresponde a cada fracción dada en el enunciado, aspecto que permite corroborar la coincidencia entre los valores de un gráfico y el enunciado.

Por otra parte, los resultados muestran que 26 de los 29 profesores que no reconocen la equivalencia contextual entre las representaciones eligen el gráfico A o B; 5 profesores eligen el gráfico A, desde el aspecto **sintáctico** aplican los procedimientos respectivos en la simplificación de fracciones y desde el aspecto **semántico** las fracciones obtenidas coinciden con los valores del enunciado. Los 21 profesores que eligen el diagrama B, desde el aspecto **sintáctico** calculan el número entero correspondiente a cada fracción de consumo; desde el aspecto **semántico** algunos profesores argumentan que «*en el gráfico B, se especifica el consumo en m^3con relación al total de los $140m^3$*», «*muestra la cantidad de unidades cúbicas consumidas en cada uno de los meses*», aspecto decisivo para que los profesores se inclinen por uno los diagramas y no lograr establecer la equivalencia contextual entre las representaciones. En el siguiente esquema se muestra la cadena interrumpida de funciones semióticas frente a la interpretación y el reconocimiento de gráficos estadísticos.

Figura 65

La No Articulación Semiótica Mediante una Cadena Interrumpida de Funciones Semióticas en la Tarea Sobre Interpretación de Gráficos Estadísticos



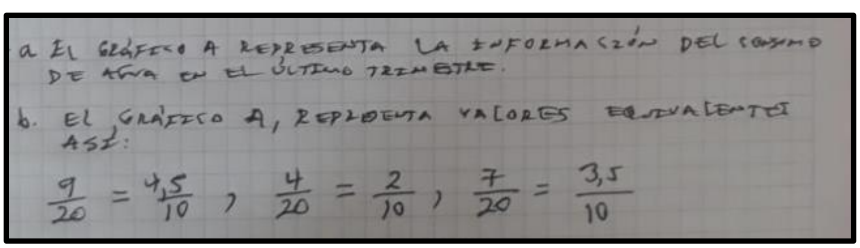
3 profesores que no eligen ninguno de los dos diagramas no se ubican dentro de esta cadena interrumpida de cadenas semióticas, en tanto, no relacionan la situación [enunciado de la tarea] con el gráfico A o B, específicamente manifiestan que la información suministrada en el enunciado no se relaciona con los diagramas.

6.3.9. Similitud y Diferencias Dificultades que Encuentran los Profesores de Primaria y los Profesores de Secundaria para Establecer la Equivalencia Contextual de Gráficos Estadísticos

Los resultados muestran unas similitudes y diferencias entre las interpretaciones realizadas por los profesores de primaria y secundaria, así como, las dificultades que encuentran ambos grupos para reconocer la equivalencia contextual entre las representaciones. Frente al reconocimiento de la equivalencia contextual de los gráficos estadísticos 15 profesores de primaria no logran relacionar entre si los dos diagramas con el enunciado natural y 14 profesores de secundaria no logran articular las dos interpretaciones, resultados que muestran un porcentaje similar entre la cantidad de profesores que hacen parte de cada grupo. Las producciones realizadas por los profesores permiten evidenciar que en el caso particular del grupo de profesores de primaria 3 de los 15 argumentan que ninguno de los dos gráficos representa la información suministrada puesto que, los datos que se relacionan en cada diagrama no coinciden con los del enunciado de la situación, se evidencia que los profesores realizan una traducción literal del enunciado y por tanto no coincide con ninguno de los gráficos y el enunciado. Situación que no se presentó con los profesores de secundaria que en las soluciones dadas ningún profesor elige esta opción. Con relación a la elección del gráfico A, respecto a los profesores de primaria 4 eligen esta opción argumentan que «*al simplificar las fracciones del enunciado de las barras gráficas de la opción A, las barras que corresponden a la información bridada*» y en el caso de los profesores de secundaria un profesor elige esta opción. Estas producciones dejan ver que los profesores luego de simplificar las fracciones relacionadas en el gráfico A, realizan una traducción literal, aspecto que permite establecer la coincidencia entre los valores dados en el gráfico y el enunciado. tal y como se evidencia en la siguiente producción realizada por el profesor de primaria – 12.

Figura 66

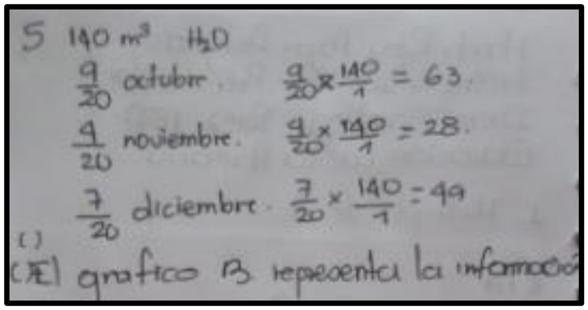
Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción Realizada por la Profesora de Primaria-12



Con relación a la elección del gráfico B, 8 profesores de primaria eligen esta opción algunos centran la atención en procesos matemáticos y otros en la unidad de medida, por ejemplo, algunos expresan que: «*el gráfico B, porque la suma da los* $140\, m^3$*indicados*» realizan los cálculos respectivos. Tal y como se evidencia en la siguiente producción realizada por la profesora de primaria – 24.

Figura 67

Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción realizada por la Profesora de Primaria-24



Respecto a los profesores de secundaria:13 de ellos eligen la opción B, como el diagrama que representan la información suministrada, algunos realizan los cálculos que permite conocer el número entero correspondiente a cada fracción, algunos simplifican las fracciones dadas en el gráfico A, pero expresan que en el gráfico B, se explicita la unidad de medida en (m^3), hecho decisivo para que gran parte de los profesores se inclinen por el gráfico B. Tal y como se evidencia en la siguiente producción realizada por la profesora de primaria – 14 y el profesor de secundaria-19.

Figura 68

Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción Realizada por la Profesora de Primaria-14

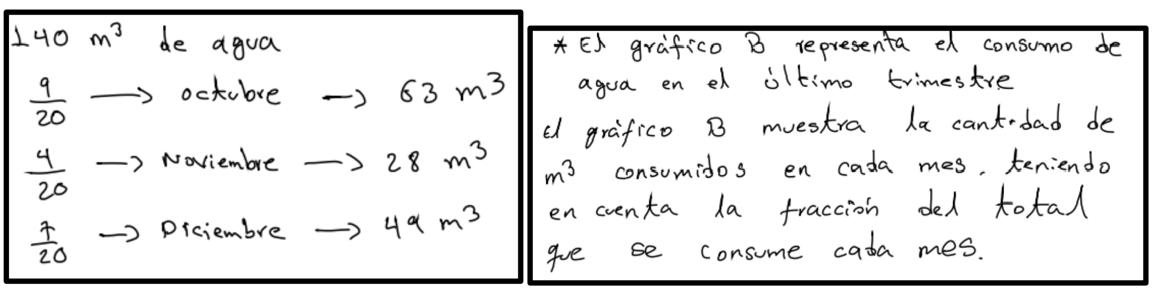
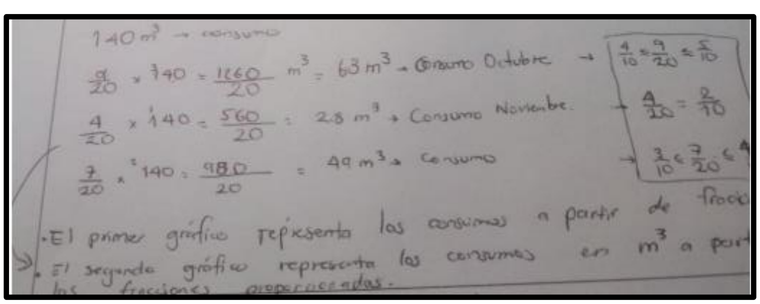


Figura 69

Interpretación de Gráficos Estadísticos. Producción Realizada por la Profesora de Secundaria-19



Estos resultados muestran que tanto el grupo de profesores de primaria como los profesores de secundaria aplican procedimientos matemáticos similares para establecer la equivalencia entre las representaciones presentadas en la tarea. Frente a los 10 profesores que hacen parte del estudio de caso colectivo, 9 eligen el gráfico B, y una profesora no elige ninguno de los gráficos. Entre los 9 profesores que eligen el diagrama B, 4 son profesores de primaria y 5 de secundaria. Los profesores de primaria –B, C, secundaria -A y F, explicitan específicamente la equivalencia entre las tres representaciones, pero la unidad y las escalas con números fraccionarios hace que se descarte el gráfico A. Aunque los profesores de primaria A, -D, y secundaria-B, D y E, no explicitan específicamente la equivalencia entre las representaciones, si hacen mención a la unidad de consumo (m^3).

6.3.10. Conexiones Matemáticas y Articulación Semiótica Sobre la Tarea de Interpretación de Gráficos Estadísticos

Las producciones realizadas por los profesores frente a la interpretación de gráficos y el establecimiento de la equivalencia contextual posibilitan que los profesores establezcan las siguientes conexiones matemáticas:

a) ***Representaciones diferentes****:* los resolutores pueden identificar dos lenguajes: por un lado, el gráfico de barras A [eje dado en números fraccionarios] y el gráfico de barras B [eje dado en números enteros] y por otro, el lenguaje natural que enmarca el enunciado de la tarea.

b) ***Procedimiento****:* en esta conexión se ubican aquellos profesores que simplifican las fracciones dadas en el enunciado y el grafico A, establecen el número entero correspondiente a cada fracción en el gráfico B.

c) ***Parte- Todo:*** el todo corresponde al total de consumo y las partes corresponde al consumo mes a mes.

d) ***Características:*** en esta tipología se ubican los profesores que no realizan explícitamente un procedimiento, puesto que, centran la atención en la unidad de medida o el comportamiento de variabilidad de los datos.

e) ***Significado:*** esta conexión hace referencia a la interpretación de los diagramas relacionados en la tarea.

La situación propuesta no posibilita que los profesores establezcan las conexiones: orientadas a la instrucción, puesto que no se está introduciendo una temática nueva para los profesores sino se parte de los aprendizajes que estos han construido con anterioridad; la metafórica, en tanto, los profesores no construyen nuevos conceptos matemáticos. A continuación, se sintetiza las producciones dadas por los profesores de primaria A-B-C-D-E y los profesores de secundaria A- B-C-D-E.

Tabla 30

Frecuencia con que Emergieron las Conexiones Sobre la Interpretación se Gráficos Estadísticos

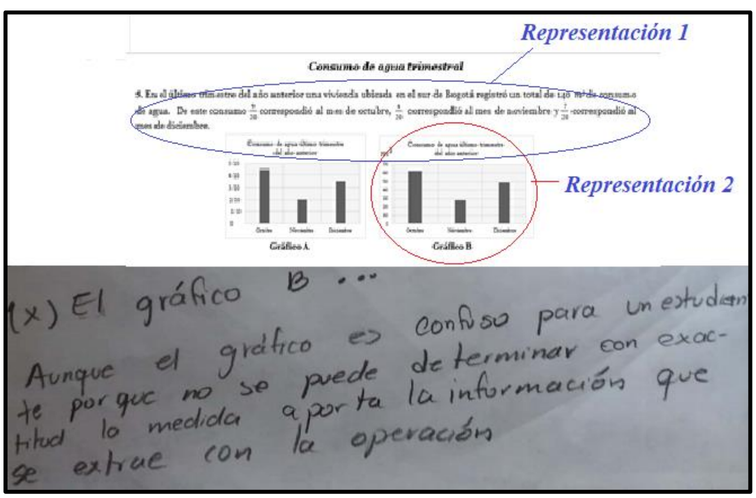
Conexión	P-A	P-B	P-C	P-D	P-E	S-A	S-B	S-C	S-E	S-F	*f*
CI	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
RD	•	•	•	•	–	•	•	•	•	•	10
PR	–	–	–	–	–	•	•	–	–	–	2
IM	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
PT	–	•	•	•	•	•	•	•	•	•	9
SG	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
CT	•	•	•	•	•	–	–	•	•	•	8
RV	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
MT	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Nota
CI=Conexiones orientadas a la instrucción, RD=Representaciones diferentes, PR= Procedimiento, IM=Implicación, PT= Parte-todo, SG= Significado, CT=Característica, RV= Reversibilidad, MT= Metafórica, *f*= Frecuencia, P= profesor de primaria, S= profesor de secundaria, • = Presencia de la conexión, ¯ = No presencia de la conexión, ¯ = La situación no posibilita que emerja la conexión.

Entre los 11 profesores que hacen parte del estudio colectivo 9 de estos estos reconocen dos formas diferentes de representar el consumo de agua en el último trimestre del año anterior. Tal y como se evidencia en la siguiente solución dada por la profesora de primaria – D.

Figura 70

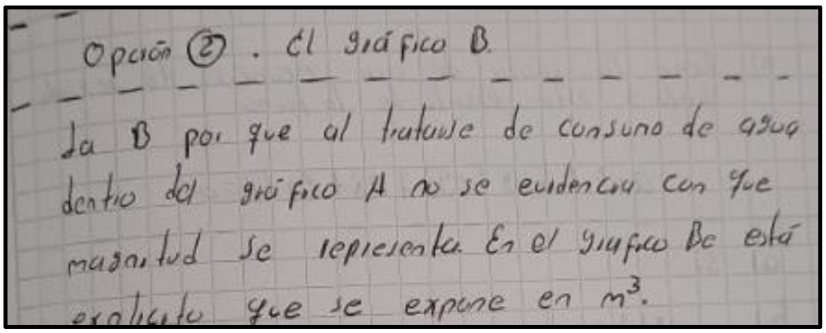
Interpretación de Gráficos Estadísticos- Conexión de Representaciones. Producción Realizada por la Profesora de Primaria-32



Una profesora no admite que dicho consumo pueda ser representado por medio de alguno o los dos gráficos estadísticos. Con relación a la conexión de procedimiento 2 profesores explícitamente realizan los procedimientos respectivos que le permitieron corroborar los valores del gráfico con los dados en el enunciado. Por otro lado, 8 profesores identifican una característica de los gráficos que representan el consumo como es la unidad de medida o la variabilidad de los datos que expresan el consumo de agua. Tal y como se evidencia en la producción realizada por el profesor de primaria-F.

Figura 71

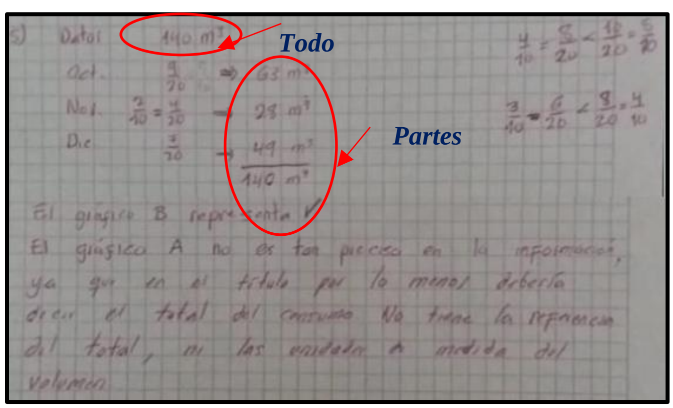
Interpretación de Gráficos Estadísticos- Conexión de Características. Producción Realizada por la Profesora de Primaria-F



Los 9 profesores que conforma el estudio de caso colectivo reconocen las partes y el todo del gráfico B. Tal y como se muestra en la producción realizada por el profesor de secundaria-B.

Figura 72

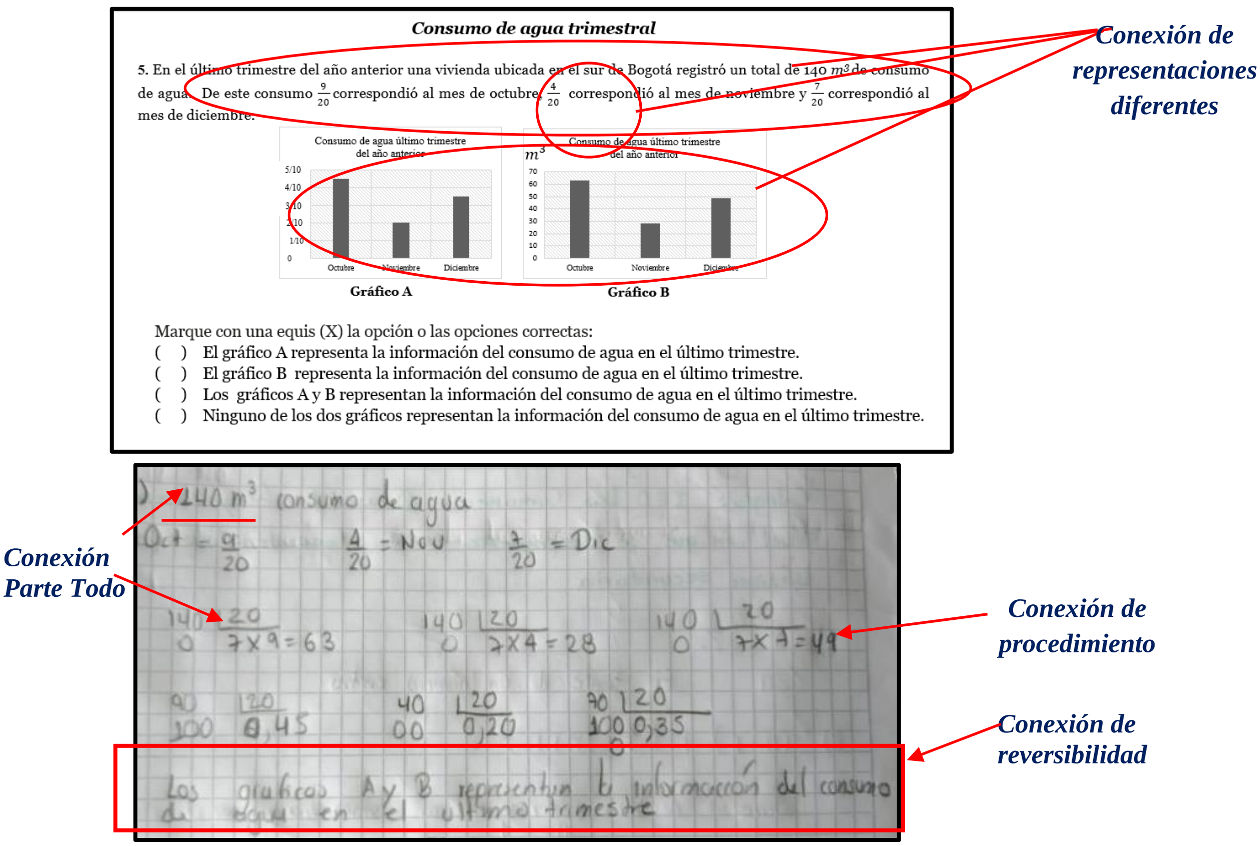
Interpretación de Gráficos Estadísticos- Conexión Parte-Todo. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria- B



Entre los 32 profesores de primaria que resolvieron la tarea 17 identifican la equivalencia contextual de gráficos estadísticos, estos profesores reconocen el todo y las partes en ambas representaciones [enunciado natural, gráfico A, gráfico B] identifican el total de agua consumida y las partes que corresponden a los consumos de cada mes. Frente a los 32 profesores de secundaria 18 de estos establecen la equivalencia contextual entre los gráficos estadísticos, producciones que se caracterizan por identificar dentro de los diagramas el todo y las partes en cada representación. Tal y como se muestra en la producción realizada por el profesor de secundaria-5.

Figura 73

Interpretación de Gráficos Estadísticos- Conexiones Matemáticas. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-5



6.4. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Primaria Sobre la Tarea del Cálculo de Probabilidad

A continuación, se presenta el trabajo realizado por los profesores de educación primaria A, B, C, D y E, sobre la tarea del cálculo de probabilidad. Se seleccionaron aquellos profesores que reconocen la **equivalencia sintáctica** de las fracciones, pero no la **equivalencia semántica,** en este caso, aquellos que calculan correctamente la probabilidad pedida, reconocen que ésta puede ser representada mediante la fracción $1/2$, admiten que es equivalente a $4/8$, pero esta última no representa el evento aleatorio enmarcado en la situación. Inicialmente se presenta la rejilla con la información del trabajo realizada por cada profesor, luego se muestra la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios activada por cada profesor. Finalmente, se analizan los fragmentos que corresponde a las transcripciones de las entrevistas realizadas, que refuerzan o amplían los razonamientos y las relaciones que los profesores establecen por medio de las funciones semióticas.

Tabla 31

Rejilla de Respuestas le los Profesores de Primaria A-B-C-D-E. Tarea del Cálculo de la Probabilidad

Docente/Ítem	1. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par? Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad.	2. ¿La anterior probabilidad se podría representar con la expresión $1/2$? Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.	3. ¿Esta probabilidad se podría representar con la expresión $4/8$? Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.
Primaria- A	La probabilidad es de un 50%.	Sí, ya que un dado tiene dos posibilidades [pares -impares].	No, ya que hablamos de seis caras del dado con 2 posibilidades.
Primaria- B	La probabilidad es de $1/2$.	Sí, por varias razones. La primera porque los números pares, representa dos en el dado son la mitad del total de números y porque $3/6$, es equivalente a $1/2$.	No, aunque es $1/2$ es equivalente a $4/8$, la probabilidad contempla un dado de 6 caras.
Primaria- C	La probabilidad es de $1/2$.	Sí, 3 números de 6 posibles $3/6 = 1/2$, es una equivalencia, pero también la representación de la mitad de los eventos posibles.	No, aunque la probabilidad es una equivalente, no está en correspondencia al evento planteado.
Primaria- D	La probabilidad es de $3/6$.	Sí, considero que todos miden igual. Con simplificación $3/6 = 1/2$.	No, se puede observar que $4/8 = 1/2$, pero como estamos hablando de lanzar un dado éste solo tiene 6 caras, por ende, si colocamos $4/8$ no tendríamos un cubo que cumpla esa condición.
Primaria- E	La probabilidad que se obtenga un número par es 3 de 6	Sí, pienso que si se puede representar con la expresión $1/2$ porque podría asumir el lanzamiento como el todo $1/2$ representaría la probabilidad de que caigan números pares.	No se puede representar con la expresión, porque ésta estaría indicando que un lanzamiento tendría que salir 4 caras que tienen un número par, además indica que el dado tiene el número 8.

En la tabla 29 se evidencia que para el cálculo de la probabilidad los profesores identifican los casos favorables sobre los casos posibles [probabilidad simple], expresan la probabilidad por medio de expresiones $3/6$, $1/2$, 50% o como 3 de 6. Admiten que la probabilidad se puede reprensentar mediante la fracción $1/2$, pero no con la fracción $4/8$, en tanto, aluden que el dado tiene 6 caras y no 8. La siguiente rejilla sintetiza las producciones de los cinco profesores de primaria que conforman el estudio de caso colectivo.

Tabla 32

Rejilla Síntesis del Reconocimiento de la Equivalencia Entre las Fracciones por los Profesores de Primaria en la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad

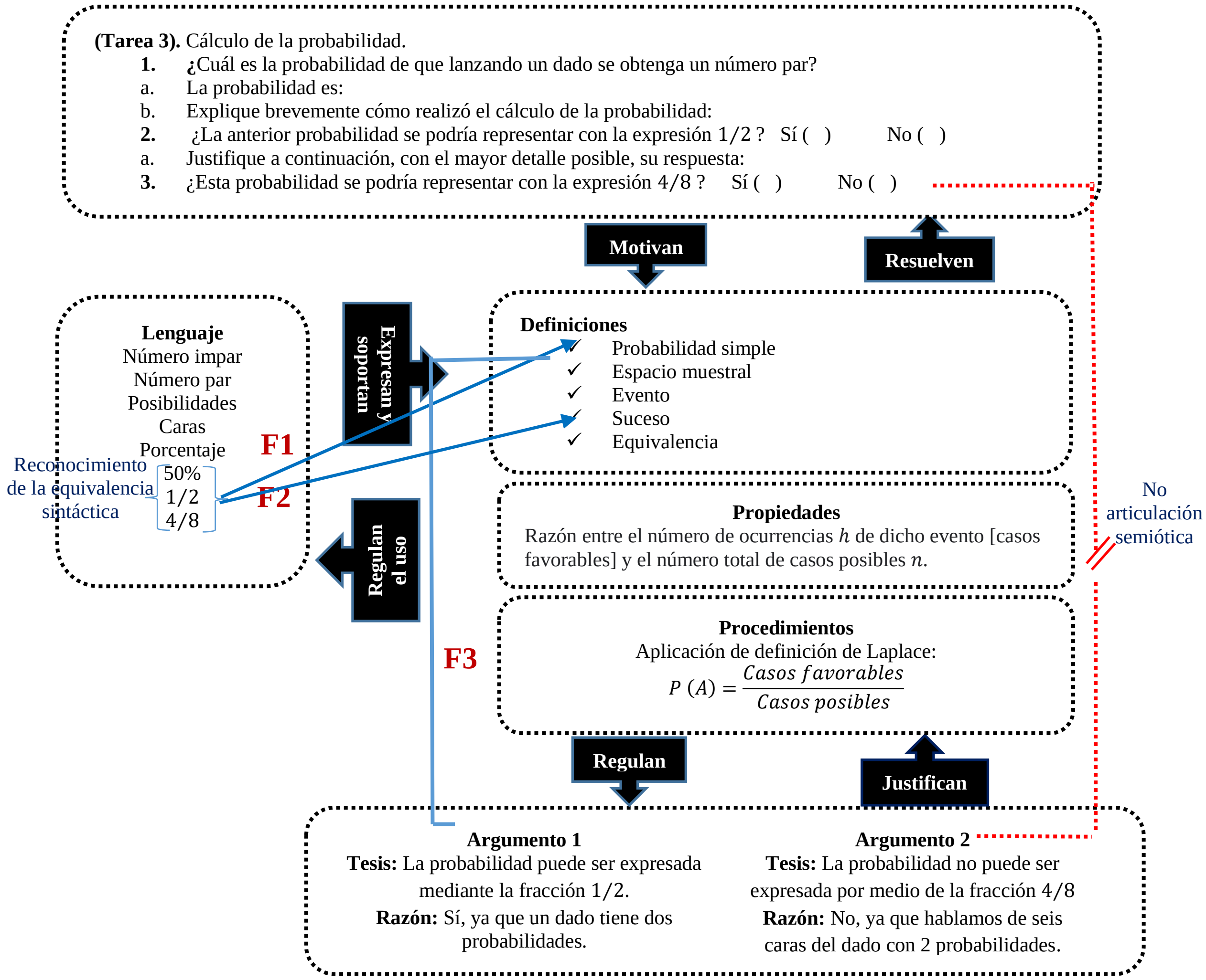
	Primaria- A	**Primaria- B**	**Primaria- C**	**Primaria- D**	**Primaria- E**
Calculan correctamente la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par.	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Admiten que la probabilidad pedida se puede expresar por medio de la fracción $1/2$.	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Reconocen que $1/2$ es equivalente a la expresión $4/8$.	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Admiten que el evento aleatorio que se enmarca en la tarea pueda ser representada mediante la fracción $4/8$.	NO	NO	NO	NO	NO

La tabla 30 muestra los profesores que reconocen la equivalencia entre las fracciones $3/6$=$1/2 = 4/8$ [equivalencia sintáctica] pero no admiten que el evento aletorio pueda ser represantado mediante la expresion $4/8$, en tanto no es una expresión que representa el evento alatorio [equivalencia semántica]. En la siguiente sección se presentan los diagramas correspondientes a las configuraciones cognitivas activadas por el grupo de los 5 profesores frente a la tarea propuesta. Siguiendo el mismo esquema de presentación en la primera tarea en los diagramas se señalan [mediante una flecha o línea de color azul], las funciones semióticas se denotan con la letra **F1, F2, F3,** etc.; así mismo las líneas interrumpidas de color rojo representa la no articulación semiótica. Posteriormente a cada configuración se presenta la transcripción que corresponde a la entrevista realizada que amplia o refuerza los argumentos y las relaciones que los profesores establecen en la solución de la tarea, así como, la identificación de argumentos que complementan y justifican los razonamientos dados en las producciones iniciales.

6.4.1. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria – A

Figura 74

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-A. Cálculo de la Probabilidad



La Profesora [Primaria-A] calcula la probabilidad mediante la expresión 50%, argumenta que el dado tiene 6 opciones que corresponde a todos los números que se puedan obtener y con las mismas posibilidades [definición de la probabilidad simple]; admite que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, puesto que, el dado tiene dos posibilidades [pares e impares], pero esta no puede ser expresada a través de la fracción $4/8$, en tanto, el dado tiene seis caras con dos opciones. La profesora establece tres funciones semióticas, la primera que relaciona el antecedente «*cálculo de la probabilidad al lanzar un dado y obtener un número par*» con el consecuente «50%», la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; y la tercera entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$» y el consecuente «*el dado tiene dos probabilidades* *[posibilidades]*»; simplifica la fracción $3/6$ [transformaciones de tratamiento] que le permite admitir que el evento aleatorio puede ser expresado mediante la fracción $1/2$, reconoce que ésta es equivalente a $4/8$ [equivalencia sintáctica], pero no admite que $4/8$ puede representar la probabilidad del evento aleatorio, puesto que el dado tiene 6 caras, con dos posibilidades y no 8 [equivalencia semántica]. Aspecto que fue ampliado en la entrevista que se realizó con la profesora y que corresponde al minuto $7:03$ a $12:03$.

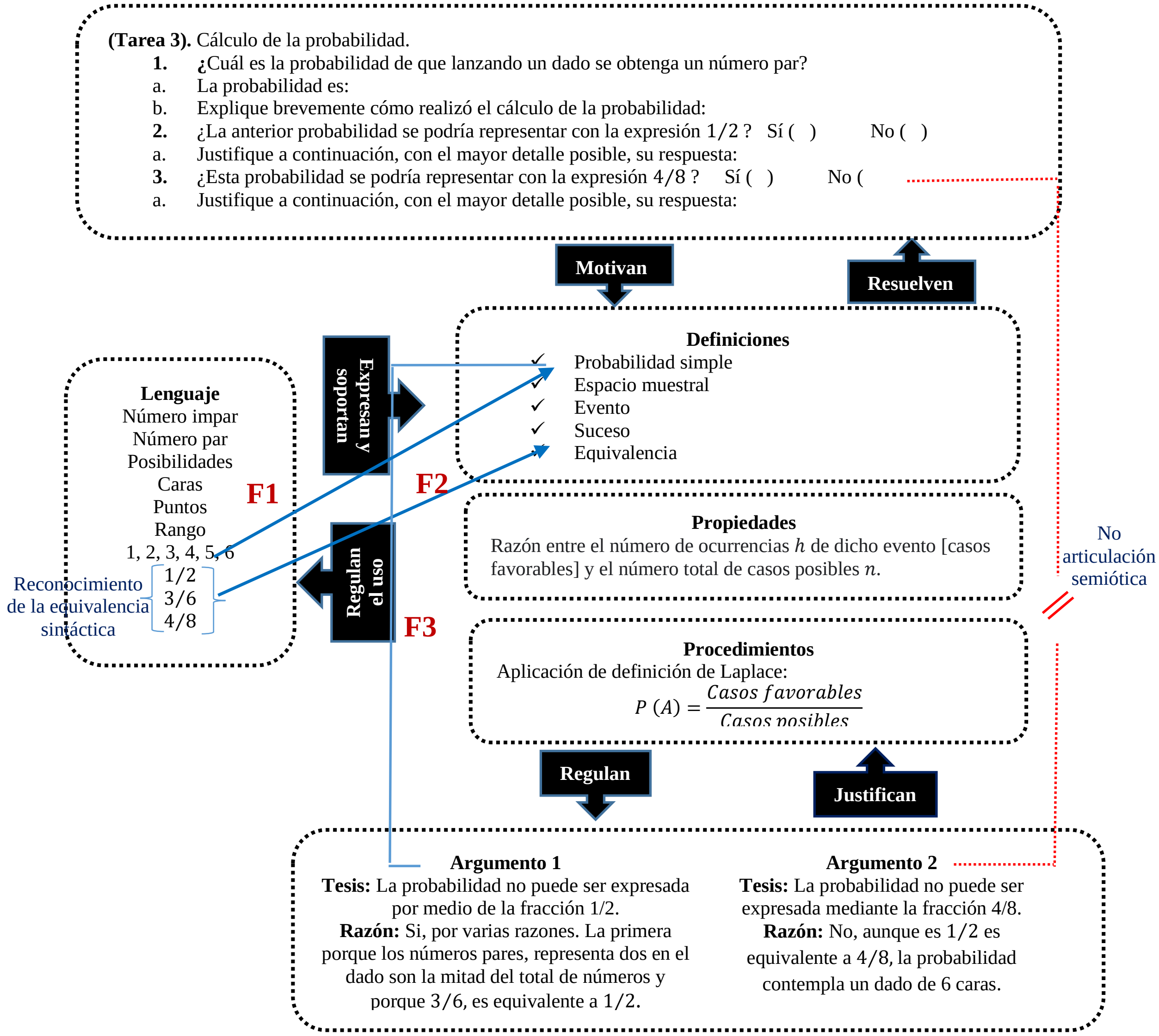
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[7:03 - 8:33]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que, al ser lanzado un dado, se obtenga un número par. Si la probabilidad podría ser expresada mediante la fracción $1/2$ y si esta puede ser representada por medio de la fracción $4/8$, [Señalando la pantalla con el cursor, en el cual están las respuestas dadas por la profesora], me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$ son equivalente, pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[8:33 - 9:01]$	Primaria-A	2	Sí [Afirmando con un movimiento de la cabeza], aunque las fracciones son equivalentes desde el punto de vista matemático, la fracción $4/8$ no sirve porque el dado tiene 6 caras, con 3 posibilidades y no 8 caras.
$[9:01 - 10:03]$	Entrevistadora	3	Y si tenemos un dado de 8 caras sí podemos expresar la probabilidad con la fracción $4/8$.
$[10:03 - 12:03]$	Primaria-A	4	[Guardó silencio unos segundos…] ahí sí sirve la expresión $4/8$ porque tendría las 8 caras y 4 de ellas son pares.

Tanto en las producciones iniciales como en la entrevista la profesora reconoce que las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$ son equivalentes [sintácticamente], tal y como se corrobora en el fragmento 2. El evento aleatorio *«objeto físico»* define la expresión matemática [número de caras del dado, en este caso 6 y 3 casos favorables], aspecto que juega un papel fundamental para no admitir que la fracción $4/8$ puede representar la probabilidad pedida; no obstante, en los fragmentos 3 y 4 al hacer referencia a un dado de 8 caras, la profesora alude que en este caso la fracción seria pertinente puesto que se *«tendría 8 caras y 4 de ellas son pares»*. Argumentos que dejan en evidencia que la profesora reconoce explícitamente la equivalencia entre las fracciones $3/6$ y $4/8$, y que cualquier fracción equivalente a $3/6$ representa la mitad, pero el objeto físico [el dado y su número de caras] no permite articular los sentidos asignados a tales expresiones y, por tanto, no acepta la fracción $4/8$ como representativa de dicha probabilidad [no reconoce la equivalencia semántica]. Aspecto que Rojas (2012) denomina *«anclaje»* a la situación.

6.4.2. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria – B

Figura 75

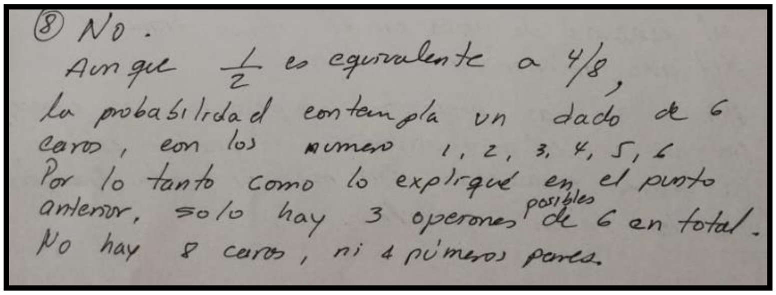
Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-B. Cálculo de la Probabilidad



La Profesora [Primaria-B] representa la probabilidad mediante la expresión $1/2$, manifiesta que el dado tiene 6 caras, con un número en cada una de ellas [del 1 al 6], entre los cuales sólo hay 3 opciones posibles [números pares 2, 4 y 6]. Asume que la probabilidad elemental está dada por: $P = casos\ esperados/casos\ totales$, del evento aleatorio enmarcado en la tarea se tiene $P = 3/6 = 1/2$; reconoce que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, puesto a que el dado tiene la mitad de los casos favorables y segundo que la fracción $3/6$ es equivalente a $1/2$, pero dicha probabilidad no puede ser representada a través de la fracción $4/8$, en tanto, se habla de un dado de 6 caras con 2 posibilidades [pares e impares], tal y como se muestra en la figura 76, que corresponde a la solución dada por la profesora.

Figura 76

La Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $4/8$- *Producción Realizada por la Profesora de Primaria-B*



8 No.
Aunque $\frac{1}{2}$ es equivalente a $4/8$,
la probabilidad contempla un dado de 6
caras, con los numero 1, 2, 3, 4, 5, 6
Por lo tanto como lo expliqué en el punto
anterior, solo hay 3 opciones posibles de 6 en total.
No hay 8 caras, ni 4 números pares.

La profesora establece tres funciones semióticas: la primera, entre el antecedente «*cálculo de la probabilidad al lanzar un dado y obtener un número par*» y el consecuente «$3/6 = 1/2$»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; y la tercera, entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$» y el consecuente «*es equivalente a* $1/2$». La profesora simplifica las fracciones [tratamiento] que permite corroborar la equivalencia entre las fracciones, entre $3/6 = 1/2 = 4/8$ [equivalencia sintáctica], manifiesta que la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida, puesto que se habla de un dado con 6 caras, con dos posibilidades. Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo [11:04-17:53] que corresponde a la entrevista desarrollada a la profesora:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[11{:}04 - 12{:}53]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que existe al lanzar un dado y obtener un número par. Si la probabilidad puede ser expresada mediante la fracción $1/2$, si ésta puede ser representada por medio de la fracción $4/8$ [Señalando la pantalla con el cursor, comparte las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$ son equivalentes, pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[12{:}53 - 13{:}44]$	Primaria-B	2	Sí [realiza un movimiento afirmativo con su cabeza] por el contexto, si nos encontramos trabajando con el tema de razones, las fracciones son equivalentes, pero en probabilidad no podemos emplear todas las fracciones equivalentes porque dependen de la situación.
$[13{:}44 - 13{:}57]$	Entrevistadora	3	¿Por qué no?
$[13{:}57 - 15{:}42]$	Primaria-B	5	Porque en la situación me están hablando de un dado de 6 caras y no de 8, el denominador debe expresar la cantidad total de casos posibles y el numerador la cantidad de casos favorables, por eso, a pesar que tienen el mismo valor en cuanto todas las fracciones son iguales a 0,5, la expresión no me está expresando la misma situación.

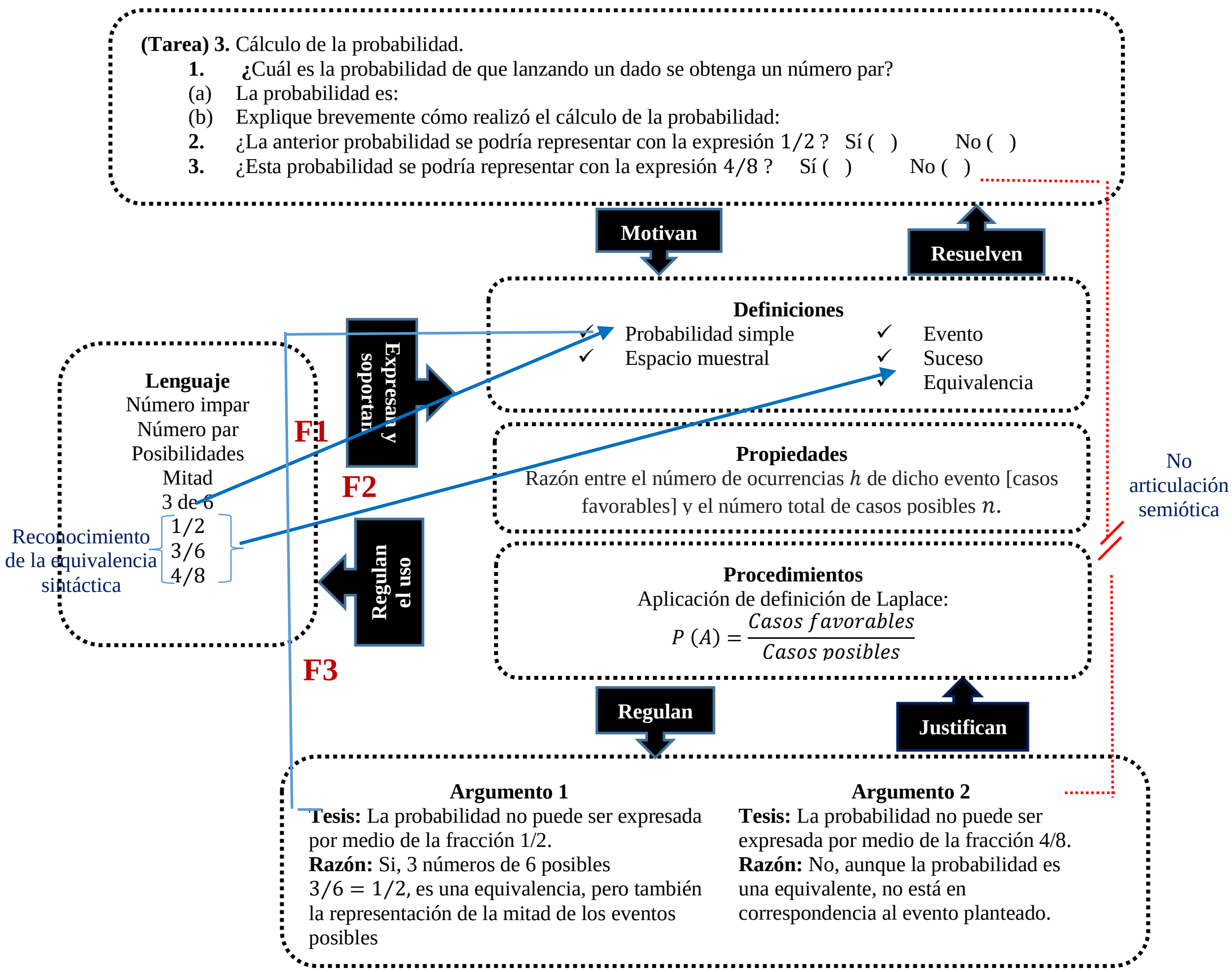
$[15{:}42 - 16{:}01]$	Entrevistadora	6	Y si tenemos un dado de 8 caras sí podríamos expresar la probabilidad con la fracción $4/8$.
$[16{:}01 - 17{:}53]$	Primaria-B	7	[Guardó silencio unos segundos…] sí claro, en este caso sí, tendría 8 [caras] 8 posibilidades del 1 hasta el 8. Los números pares serían, 2, 4, 6 y 8, siendo las posibilidades de sacar un número par.

La anterior transcripción deja en evidencia que la profesora reconoce que las fracciones $[3/6,\ 1/2\ y\ 4/8]$ son equivalentes, pero desliga dicha equivalencia con los temas aleatorios tal y como alude en el fragmento 2 que sostiene: *«… por el contexto, si nos encontramos trabajando con el tema de razones, las fracciones son equivalentes, pero en probabilidad no podemos emplear todas las fracciones equivalentes porque dependen de la situación»*. En el tema de la probabilidad la fracción $4/8,$ no puede representar la probabilidad pedida en tanto, el número de las caras del dado juegan un papel fundamental; dicho aspecto fue profundizado en el fragmento 6, que indaga sí al tener un dado de 8 caras, la fracción $4/8,$ representaría la probabilidad, al respecto, alude que, en este caso, la expresión refleja el evento aleatorio, puesto que, tanto el numerador como el denominador corresponden al número de caras del objeto físico «*dado*». Argumentos que muestran un «*anclaje*» al objeto físico y que impide que se admita la fracción cuando se tiene un dado de 6 caras. El sentido y significado asignado a la fracción $4/8,$ no le permite identificarla como representativa del evento aleatorio; si bien admite que la probabilidad pueda ser representada por medio de las expresiones $3/6$ y $1/2$, éstas reflejan las 6 caras del dado o las dos posibilidades [par o impar], es decir la fracción detalla alguna cualidad del dado.

6.4.3. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria – C

Figura 77

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-C. Cálculo de la Probabilidad



La profesora [Primaria-C] representa la probabilidad mediante la fracción $1/2$, manifiesta que el dado tiene 6 caras, 3 son pares y corresponden a la mitad de posibilidades sobre el total, razonamiento que a su vez le permite corroborar la equivalencia $3/6 = 1/2$, pero no admite que la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción $4/8$, al respecto explícita que, si bien son muchas las fracciones equivalentes, pero no necesariamente representan la situación.

En relación con las funciones semióticas, la profesora establece tres: la primera entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «*la expresión* $1/2$»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; y la tercera función semiótica entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$» y el consecuente «*la representación de la mitad de los* *eventos posibles*». La solución evidencia que la simplificación de fracciones permite corroborar la equivalencia entre las fracciones, $3/6 = 1/2 = 4/8$ [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto semántico el evento aleatorio que se enmarca en la tarea no puede ser representado por medio de la expresión $4/8$, en tanto, el dado tiene 6 caras; aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo [49:48-54:11] de la entrevista desarrollada con la profesora:

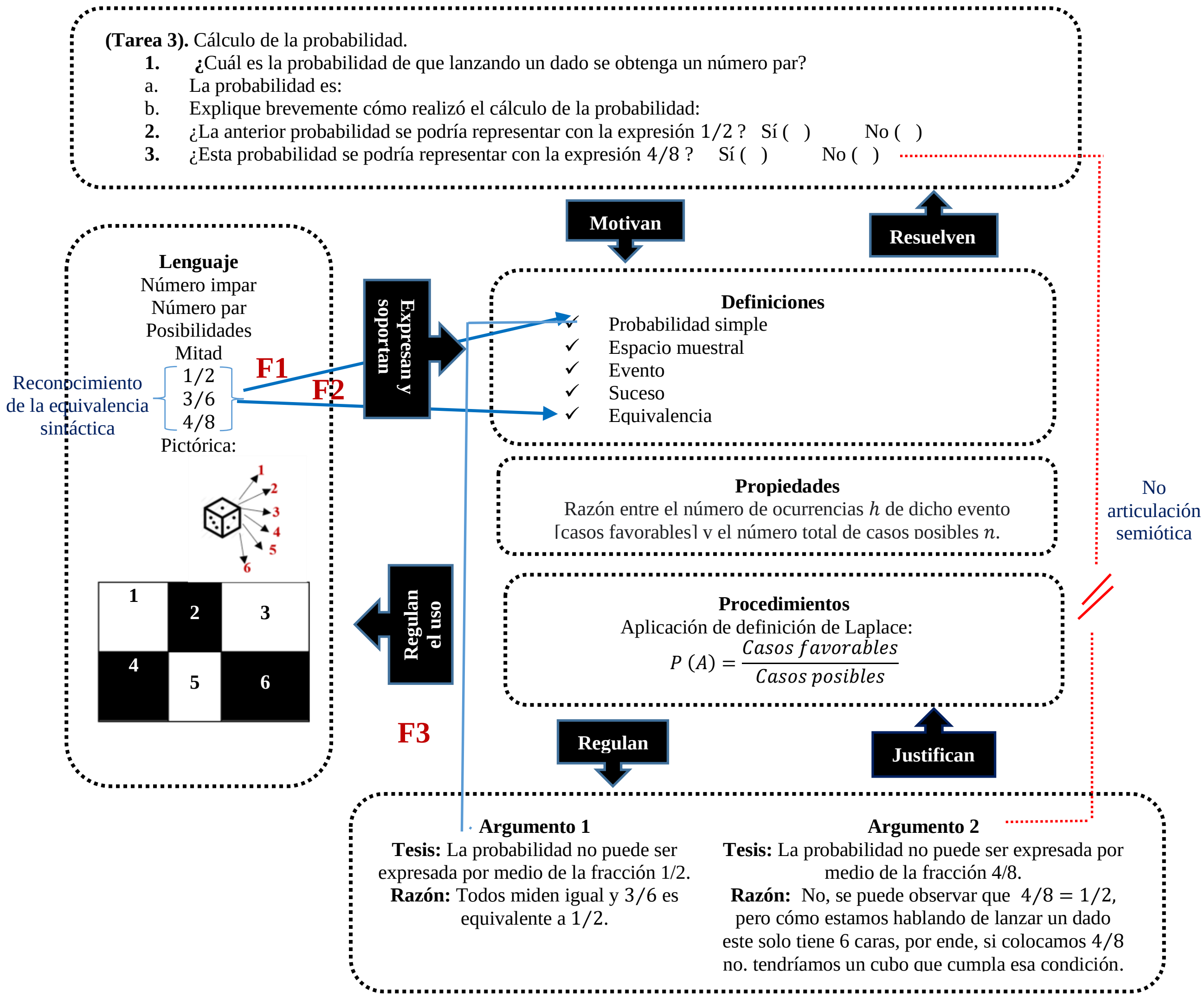
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[49{:}48 - 50{:}43]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par. Sí la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, y si ésta puede ser representada por medio de la fracción $4/8$[señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$ son equivalentes pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[50{:}43 - 51{:}42]$	Primaria-C	2	Sí [realizando un movimiento afirmativo con la cabeza] esta pregunta me puso a pensar mucho porque son expresiones equivalentes numéricamente, pero en la situación del dado $4/8$ no es una fracción pertinente para expresar la probabilidad pedida, dentro del marco de la situación el máximo de posibles eventos es 6 entonces en ese sentido yo consideraba que no correspondía al evento y más si se trata de un dado de 6 caras, desde el principio se limitó el evento a ese tipo de dado.
$[51{:}42 - 51{:}43]$	Entrevistadora	3	¿Por qué se limitó el evento?
$[51{:}43 - 52{:}10]$	Primaria-C	4	Porque el dado es de 6 caras yo pensaba en ese momento que hay muchas fracciones equivalentes, pero no todas representan la situación.
$[52{:}10 - 53{:}07]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de ocho caras, ¿sí podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$?
$[53{:}07 - 54{:}11]$	Primaria-C	6	[Guardó silencio unos segundos], Sí claro porque en este caso el dado tendría 8 caras, con 4 opciones.

En el fragmento 2 se corrobora que la profesora reconoce la equivalencia entre las fracciones, pero el contexto que enmarca la tarea hace que no se admita la fracción $4/8$, en tanto, no modela el evento aleatorio «*dado*» como una expresión representativa de la probabilidad pedida tal y como se muestra en el fragmento 4. En el fragmento 6, se indaga por la probabilidad en un dado de 8 caras, frente a esta situación, la profesora alude que la expresión $4/8$, sí representaría la probabilidad, puesto que, se tiene un dado de 8 caras [posibilidades], y los casos favorables serian 4, tanto el numerador como el denominador refleja las características de un dado de 8 caras.

6.4.4. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria – D

Figura 78

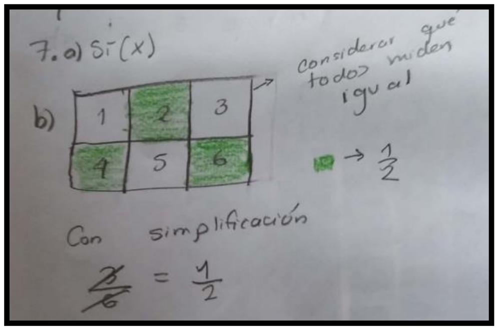
Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-D. Cálculo de la Probabilidad



La profesora calcula la probabilidad mediante la expresión $3/6$, alude que la probabilidad puede ser representada por medio de la fracción $1/2$, puesto que, es equivalente a $3/6$ con las mismas opciones. Tal y como se evidencia en la figura 79 correspondiente a la solución dada por la profesora.

Figura 79

La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $1/2$ *- Producción Realizada por la Profesora de Primaria-D*



La profesora admite que la probabilidad pueda ser expresada mediante la fracción $1/2$, pero considera que ésta no puede ser expresada por medio de la fracción $4/8$. Establece tres funciones semióticas; la primera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente la expresión «$3/6$»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente *«fracciones equivalentes»*; y la tercera función semiótica entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$» y el consecuente «$3/6$ *es equivalente a* $1/2$». Los argumentos y relaciones que la profesora establece a través de las funciones semióticas dejan en evidencia que mediante la simplificación de fracciones corrobora la equivalencia entre las fracciones $3/6 = 1/2 = 4/8$, además que el evento aleatorio puede ser representado a través de la fracción $1/2$ [equivalencia sintáctica], pero la probabilidad no puede ser representada mediante $4/8$, puesto que, el dado tiene 6 caras [equivalencia semántica]. Aspecto que fue ampliado en el intervalo [7: 03-11: 58] de la entrevista que se desarrolló con la profesora:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[7{:}03 - 8{:}05]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par. Si esta puede ser representada mediante de la fracción $1/2$, y si esta puede ser representada por medio de la fracción $4/8$ [Señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[8{:}05 - 9{:}43]$	Primaria-D	2	Bueno, yo la verdad me centré en el evento aleatorio que se enmarca en la tarea [un dado de 6 caras], entonces el tener $4/8$, desde mi perspectiva, no cumple con las 6 caras, ahora en el caso de $1/2$ sí se cumple porque tenemos dos opciones [pares e impares] en cambio en cuatro octavos a mí parece que no se puede decir 4 de las 8 caras, por ejemplo, porque el dado no tiene 8 caras.
$[9{:}43 - 10{:}01]$	Entrevistadora	3	Si tuviéramos un dado de 8 caras la probabilidad puede ser expresada a través de la fracción $4/8$.

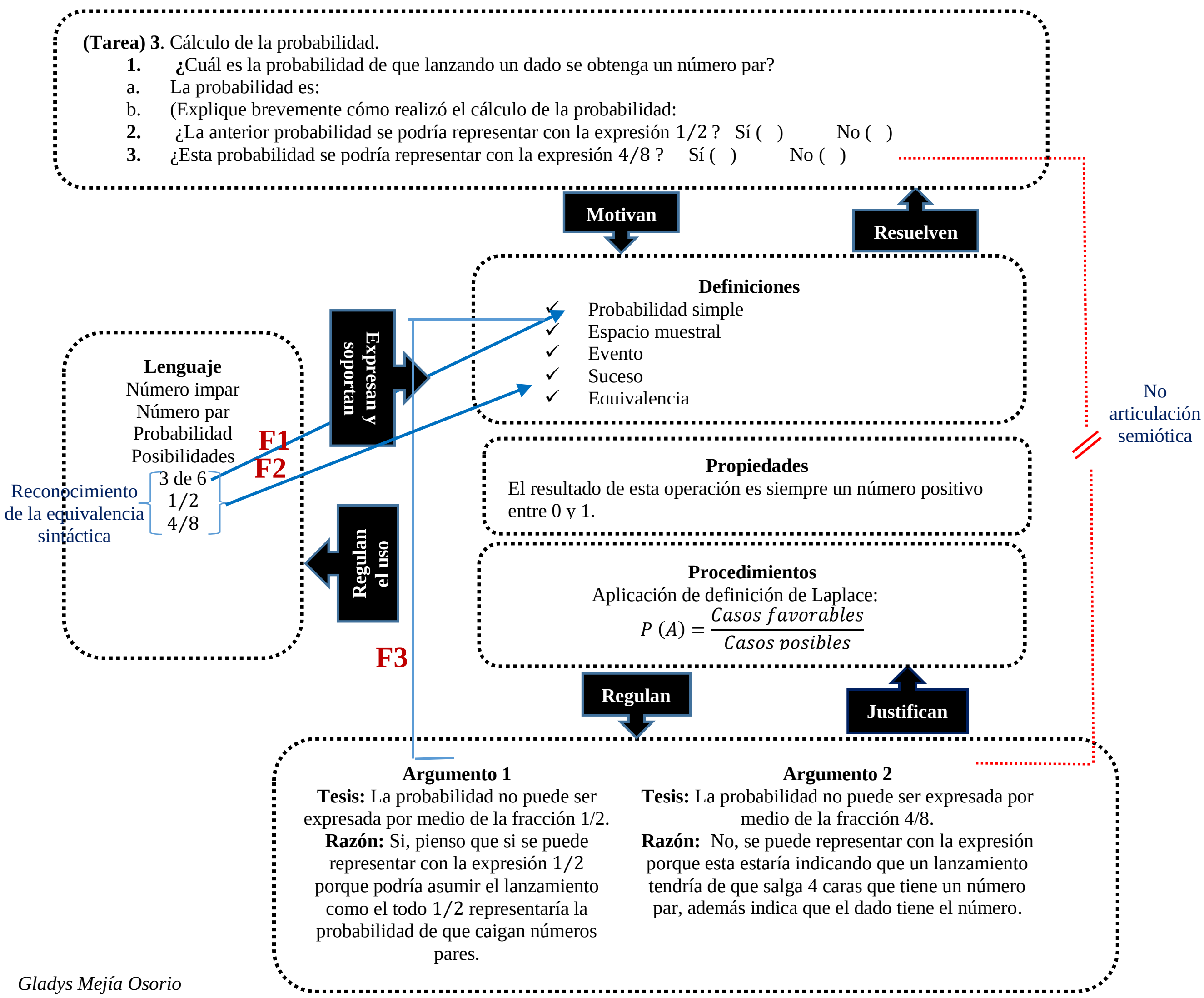
[10:01 – 11:58]	Primaria-D	4	[Guardo silencio unos segundos] en ese caso sería diferente porque ya dejaría de cumplir la condición que se puso al inicio del problema que especifica que el dado tiene 6 caras, únicamente.

Los fragmentos 2 y 4, muestran que el objeto físico «*dado*» juega un papel fundamental para que la profesora no acepte que la fracción $4/8$, representa la probabilidad, al respecto considera que la expresión debe explicitar la cantidad de caras posibles que tiene un dado [6 caras], con dos opciones [pares-impares]. Al indagar si dicha expresión representaría la probabilidad cuando se tiene un dado de 8 caras, la profesora alude que en este caso la fracción $4/8$, sí expresa dicha probabilidad, en tanto, la condición es *diferente* [dado con 8 caras]; argumentos, que permiten corroborar un «*anclaje*» al objeto físico, pues admiten la expresión en relación con las caras del dado.

6.4.5. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Primaria – E

Figura 80

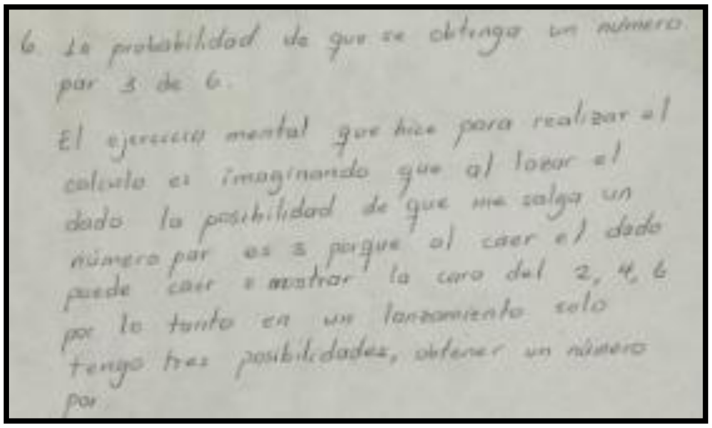
Configuración Cognitiva Activada por la Profesora Primaria-E. Cálculo de la Probabilidad



Aunque la profesora [Primaria-D] no expresa la probabilidad mediante una expresión, recurre a la experimentación mental del evento a través de la relación del número total de caras y la cantidad de números pares, e identifica que, de las 6 opciones del dado, 3 cumplen la condición, tal y como se muestra en la figura 81.

Figura 81

Cálculo de la Probabilidad- Producción Realizada por la Profesora de Primaria-E


6. La probabilidad de que se obtenga un número par 3 de 6.
El ejercicio mental que hice para realizar el calculo es imaginando que al lanzar el dado la posibilidad de que me salga un número par es 3 porque al caer el dado puede caer o mostrar la cara del 2, 4, 6 por lo tanto en un lanzamiento solo tengo tres posibilidades, obtener un número par

Por otro lado, la profesora admite que la probabilidad puede ser representada mediante la expresión $1/2$, en tanto, el dado tiene dos opciones [pares-impares]. La profesora establece tres funciones semióticas: la primera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «*3 de 6*»; y la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente *«fracciones equivalentes*»; la tercera, entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$», y el consecuente «*se podría asumir el lanzamiento como el todo* $1/2$ *representaría la probabilidad de que caigan números pares*». Las anteriores relaciones dejan en evidencia que la profesora admite que la probabilidad puede ser representada a través de la expresión $1/2$ [equivalencia sintáctica], que las fracciones $1/2$ y $4/8$ son equivalentes, pero esta última no representa la probabilidad pedida, en tanto, el dado no tiene 8 caras; como se evidencia en el intervalo de tiempo [1:35:03-1:40:05].

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[1{:}35{:}03 - 1{:}36{:}07]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par. Si la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, y si esta puede ser expresada a través de la fracción $4/8$. [Señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes pero la fracción $4/8$, no puede representar la probabilidad pedida.

$[1:36:07 - 1:37:02]$	Primaria-E	2	Sí [Indicando que si con la cabeza] yo me fijé en las caras del dado que son 6 y de esas las caras son 2, 4 y 6, contienen números pares es decir que tendría 3 posibilidades y la fracción $4/8$ no me serviría.
$[1:37:03 - 1:38:01]$	Entrevistadora	3	Quisiera que profundizara un poco más porque la fracción $4/8$ no serviría.
$[1:38:01 - 1:39:00]$	Primaria -E	4	Porque solamente tengo 3 posibilidades que me caiga un número par y no 4.
$[1:39:00 - 1:39:01]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de 8 caras ¿sí podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$?
$[1:39:01 - 1:40:05]$	Primaria-E	6	[Guardó silencio unos segundos] si desde un inicio pensé en esa situación y lo representé en mi mente y para que fueran $4/8$, tendría que tener hasta 8 caras o un dado de 8 caras, porque pues se hace una correspondencia, ¡cierto!

El fragmento 2, se evidencia que el dado, como objeto físico, jugó un papel fundamental para que la profesora estableciera la probabilidad pedida, identifica las 6 caras del dado, de las cuales 3 de estas son pares. Admite que la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción $1/2$, puesto que, esta representa la cantidad de números impares y pares, pero la expresión $4/8$, no puede representar la probabilidad pedida, puesto que se indica un dado 6 caras y no 8. En el fragmento 6, se corrobora un «*anclaje*» al objeto físico [el dado] en tanto, admiten que la expresión $4/8$, representaría la probabilidad para un dado de 8 caras, es decir ésta es asumida en relación con las caras del dado.

6.4.6. *Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Secundaria Sobre la Tarea del Cálculo de Probabilidad*

A continuación, se presenta el trabajo realizado por los profesores de secundaria A, B, C, D y E, sobre la tarea del cálculo de probabilidad. Al igual que con el grupo de primaria, se seleccionaron aquellos profesores que calculan correctamente la probabilidad, admiten que ésta puede ser representada mediante la fracción $1/2$, reconocen que la expresión es equivalente a $4/8$, pero no admite que esta última pueda representar la probabilidad pedida. Inicialmente, se muestra la rejilla con la información del trabajo realizada por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios activada por cada profesor. Finalmente, se realiza el análisis de cada entrevista, que permiten reforzar o ampliar las configuraciones movilizadas por los profesores y las funciones semióticas establecidas por estos.

Tabla 33

Rejilla de Respuestas le los Profesores de Secundaria A-B-C-D-E. Tarea del Cálculo de la Probabilidad

Docente/Ítem	1. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par? Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad.	2. ¿La anterior probabilidad se podría representar con la expresión $1/2$? Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.	3. ¿Esta probabilidad se podría representar con la expresión $4/8$? Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.
Secundaria-A	Conjunto M= Evento de casos posibles sobre total posibilidades.	Si, la probabilidad es un número que se obtiene del cociente entre dos números.	No, representa al mismo número, pero no la misma situación en este caso el dado tiene 6 posibilidades, pero se puede generalizar para un dado de 8 caras, etc.
Secundaria-B	$E = \{1,2,3,4,5,6\}$ $S = \{2,4,6\}$ Casos favorables sobre casos posibles. $3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$	Las expresiones $1/2 = 0.5 = 50\%$. Son equivalentes.	No, desde un punto de vista matemático sí, porque $3/6 = 1/2 = 4/8$, pero desde un punto de vista conceptual no.
Secundaria-C	La probabilidad es de $3/6 = 1/2$. Casos favorables sobre casos posibles.	Una función donde el conjunto de llegada es el intervalo cerrado entre $[0,1]$ y $1/2$ esta entre 0 y 1.	No, aunque $4/8 = 3/6 = 1/2$, Son equivalentes, esta forma de presentar no se ajusta directamente con el problema.
Secundaria-D	La probabilidad es de $1/2$.	La probabilidad es $3/6$ y por tanto igual a $1/2$.	No, porque no corresponde al mismo evento de los dados.
Secundaria-E	La probabilidad es de $3/6$ =0.5	Si, al simplificar la expresión $1/2 = 0.5$	No, aunque también es una expresión equivalente, no da cuenta de la probabilidad de ocurrencia de los números pares en el lanzamiento del dado.

En la tabla anterior se evidencia que los profesores recurren a la definicion de probabilidad simple, identifican los casos favorables sobre los casos posibles, dicha relación es representada a través de expresiones matematicas como $3/6$, $1/2$, 50% y 0.5. Los profesores corroboran que estas expresiones son equivalentes, admiten que la probabilidad puede ser expresada mediante la fracción $1/2$, pero ésta no puede ser representada por medio de la expresion $4/8$, en tanto, el dado no tiene 8 caras. En la siguiente rejilla se sintetiza las producciones de los cinco profesores de secundaria, en el que se evidencia un reconocimiento de la equivalencia entre las expresiones $3/6$=$1/2 = 4/8$, [equivalencia sintáctica] pero no admiten que el evento aletorio pueda ser represantado a través de la expresion $4/8$ [equivalencia semántica].

Tabla 34

Rejilla Síntesis del Reconocimiento de la Equivalencia de las Fracciones por los Profesores de Secundaria a la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad

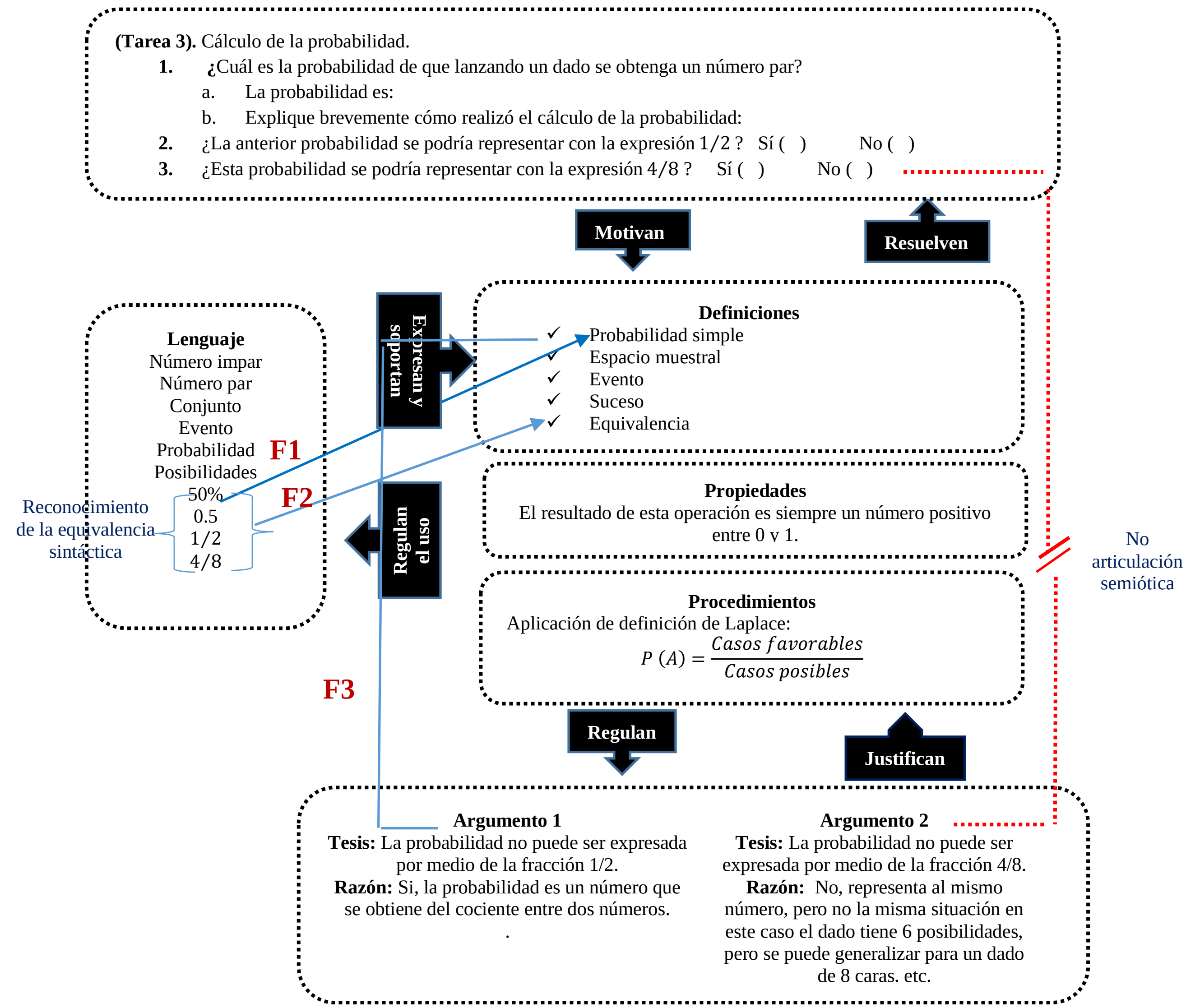
	Secundaria-A	**Secundaria-B**	**Secundaria-C**	**Secundaria-D**	**Secundaria-E**
Calculan correctamente la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par.	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Admiten que la probabilidad pedida se puede expresar mediante la fracción $1/2$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Reconocen que $1/2$ es equivalente a la expresión $4/8$.	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
No admiten que el evento aleatorio que se enmarca en la tarea pueda ser representada por medio de la expresión $4/8$.	NO	NO	NO	NO	NO

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva activada por cada una de los profesores de secundaria frente a la tarea propuesta. Seguido de cada diagrama se presenta la transcripción de la entrevista realizada que amplia o refuerza los argumentos dados inicialmente.

6.4.7. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– A.

Figura 82

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -A. Cálculo de la Probabilidad



El profesor [secundaria-A] para calcular la probabilidad denomina el conjunto M, como el evento de casos posibles sobre el total de posibilidades. Admite que la probabilidad puede ser representada por medio de la expresión $1/2$, puesto que, ésta es un número que se obtiene del cociente entre dos números a y b, pero no admite que la probabilidad pueda ser representada mediante la expresión $4/8$, aunque reconoce que, aunque representa el mismo número, no representa la situación en este caso el dado tiene 6 posibilidades, pero se puede generalizar para un dado de 8 caras, etc.

El profesor establece tres funciones semióticas: la primera, entre el antecedente *«obtener un número par al lanzar un dado»* y el consecuente «*casos posibles sobre el total de casos,* $3/6$*»;* la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente *«fracciones equivalentes*»; y la tercera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «$3/6$ *es equivalente a* $1/2$ *y 50*%». Simplifica las fracciones, que permite corroborar su equivalencia, y admite que la probabilidad puede ser representada mediante $1/2$ [equivalencia sintáctica]. Desde el aspecto **semántico** el evento aleatorio no puede ser representado por medio de la expresión $4/8$, en tanto, el dado no tiene 8 caras sino 6; aspecto que fue ampliado en el intervalo$[8:04 - 11:53]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor:

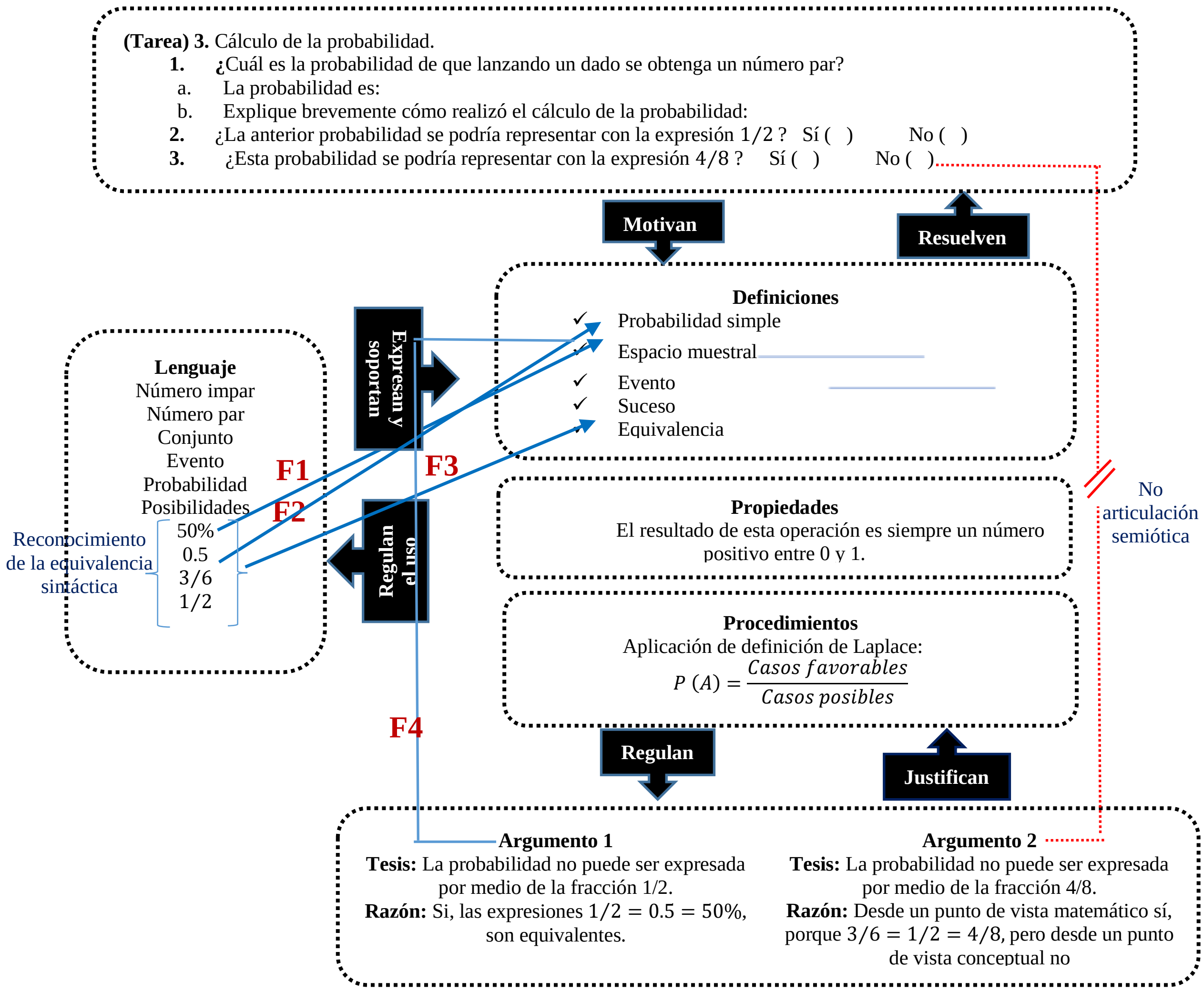
Intervalo de tiempo	Interlocutor	N°	Diálogo
$[8:04 - 9:05]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tarea que pide calcular la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par. Si la probabilidad puede ser representada a través de la fracción $1/2$, y si esta puede ser expresada mediante la fracción $4/8$ [señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes, pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[9:05 - 10:04]$	Secundaria-A	2	Sí, aunque son fracciones equivalentes las fracciones representa casos diferentes, por ejemplo, en un dado tradicional es lógico decir 3 de 6, pero no se puede decir 4 de 8, aunque son expresiones equivalentes porque representa $1/2$, pero cada uno representa situaciones diferentes pues el dado tiene 6 caras.
$[10:04 - 10:58]$	Entrevistadora	3	Y si tenemos un dado de ocho caras se podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$
$[10:58 - 11:53]$	Secundaria-A	4	[Guardó silencio unos segundos] en ese caso sí podemos representar la probabilidad por medio de la fracción $4/8$, porque se tendría las 8 caras y 4 son pares.

En el fragmento 2 se evidencia que el profesor reconoce que $1/2$, $3/6$ y $4/8$, son equivalentes [equivalencia sintáctica], pero relaciona las fracciones $3/6$ y $4/8$ con situaciones diferentes en tanto, la primera expresión relaciona un dado de 6 caras y la segunda un dado de 8 caras [no equivalencia semántica]. Argumentos que muestran un «anclaje» al objeto físico, aspecto que impide articular los sentidos asignados a estas expresiones, tal y como se corrobora en fragmento 4 en el que, se considera el cálculo de la probabilidad en un dado de 8 caras y obtener los números paras, al respecto el profesor alude que la fracción $4/8$, seria pertinente, en tanto, posibilita relacionar los casos favorables sobre los casos posibles, es decir, las 8 caras posibles y las 4 caras de casos favorables.

6.4.8. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– B

Figura 83

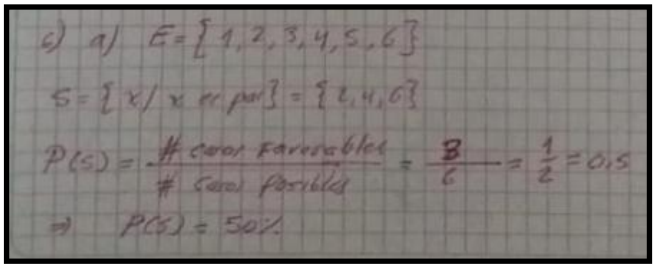
Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -B. Cálculo de la Probabilidad



En el cálculo de la probabilidad, el profesor [Secundaria-B] establece el espacio muestral de las expresiones matemáticas $3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$, tal y como se muestra en la siguiente figura.

Figura 84

La Probabilidad que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par- Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-B



El profesor admite que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, debido a que las expresiones $1/2 = 0.5 = 50\%$, son equivalentes [sintáctica], pero no admite que la probabilidad pueda ser representada mediante la fracción $4/8$; puesto que, las expresiones $3/6$ y $4/8$ refieren situaciones diferentes [no equivalencia semántica]. El profesor establece cuatro funciones semióticas; la primera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «*casos posibles sobre el total de casos*, $3/6$»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8 = 0.5$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»;; la tercera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «$3/6$ es equivalente a $1/2$ y 0.5»; y la cuarta función semiótica «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «$3/6$ *es equivalente a* $1/2$, *0.5 y 50%*». En las producciones realizadas se evidencia el reconocimiento de la equivalencia de las fracciones, admite que la probabilidad puede ser representada a través de la expresión $1/2$ [equivalencia sintáctica], pero que desde el aspecto semántico el evento aleatorio no puede ser representado por medio de la expresión $4/8$, en tanto, no se tiene un dado con 8 caras. Aspecto que fue ampliado en el intervalo $[9{:}03 - 14{:}01]$ que corresponde a la entrevista que se desarrolló con el profesor:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[9{:}03 - 10{:}05]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea que pide calcular la probabilidad que tiene obtener un número par al lanzar un dado. Si esta puede ser representada mediante la fracción $1/2$, si esta podría ser expresada a través de la fracción $4/8$ [señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes, pero la fracción $4/8$, no representa la probabilidad pedida.
$[10{:}05 - 11{:}06]$	Secundaria-B	2	Bueno, en realidad uno debe ser capaz de modelar una expresión matemática cuando son equivalentes porque son iguales, pero en cuestiones de probabilidad la expresión matemática debe modelar el evento aleatorio, por ejemplo, en el caso del dado se tiene 6 caras y 3 de ellas son pares, la parte conceptual sería diferente porque se perdería la esencia de la situación.
$[11{:}06 - 11{:}46]$	Entrevistadora	3	Me gustaría que me explicara el por qué se perdería la esencia.

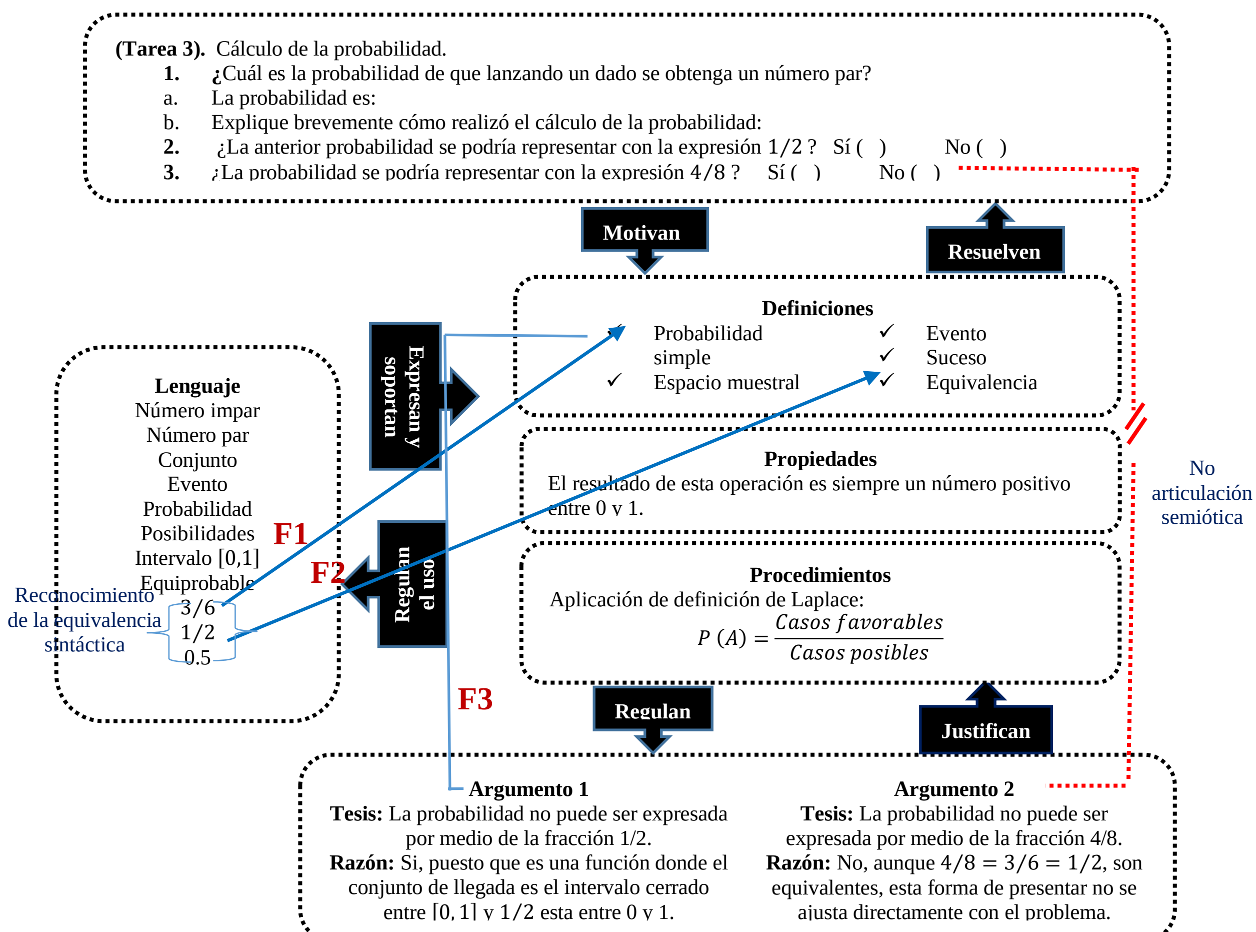
$[11{:}46 - 12{:}28]$	Secundaria-B	4	Porque ya no se está hablando de un dado de 6 caras o se estaría representando las dos opciones del dado [pares e impares] y uno con los estudiantes debe ser muy claro para que no se confundan.
$[12{:}28 - 13{:}14]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de ocho caras, ¿sí podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$?
$[13{:}14 - 14{:}01]$	Secundaria-B	6	Claro, ahí sí serviría, porque los $4/8$ refiere a la misma situación de marcar números pares en un dado de ocho caras.

El fragmento 2 muestra que el profesor reconoce que las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$ son equivalentes, en tanto, representan el mismo número, alude que en cuestiones de la probabilidad no todas las fracciones son pertinentes para modelar el evento aleatorio, puesto que la expresión debe explicitar simbólicamente la situación, en este caso la expresión $4/8$, no permite modelar la situación, y pierde la esencia que ofrece las fracciones $1/2$ y $3/6$ las cuales describen alguna de las características del evento aleatorio, hecho que no permite articular los sentidos asignados a tales expresiones; en el caso que el dado tenga 8 caras, dicha fracción seria pertinente como lo explicita en los fragmentos 4 y 6.

6.4.9. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– C

Figura 85

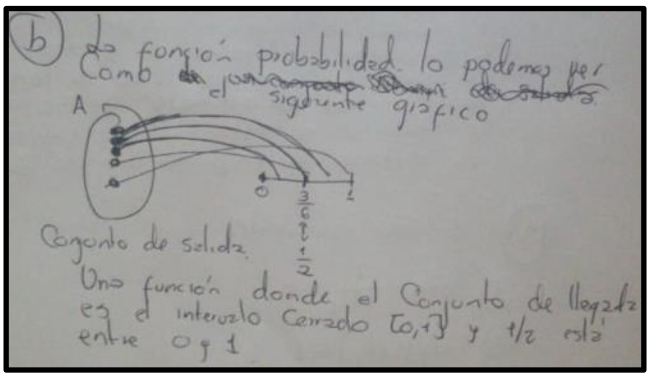
Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -C. Cálculo de la Probabilidad



Para el cálculo de la probabilidad el profesor [secundaria-C] enfatiza, que se debe especificar si el dado es de 6 caras, puesto que, todas las caras tienen la misma posibilidad de caer [equiprobable], partiendo de ello recurre a expresiones como $1/2$, $3/6$ y 0.5 que representan los casos probables sobre el total de casos. Reconoce que las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$ son equivalentes, admiten que la probabilidad puede ser representada por medio de la expresión $1/2$, en tanto, es una función donde el conjunto de llegada es el intervalo cerrado entre $[0, 1]$ y la fracción $1/2$ se encuentra en dicho intervalo, tal y como se muestra en la figura 86, que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 86

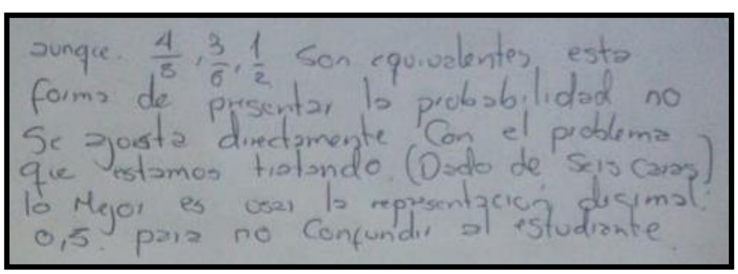
La Probabilidad que Lanzando un Dado se Obtenga un Número Par- Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-C



El profesor no admite que la probabilidad pueda ser representada por medio de la expresión $4/8$, puesto que, la fracción no se ajusta directamente con el evento aleatorio enmarcado en la situación, tal y como se muestra en la figura 87 que corresponde a la solución dada.

Figura 87

La Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $4/8$ *-Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-C*



aunque $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{2}$ Son equivalentes esta
forma de presentar la probabilidad no
Se ajusta directamente Con el problema
que estamos tratando (Dado de Seis Caras)
lo Mejor es usar la representación decimal
0,5 para no Confundir al estudiante

El profesor establece tres funciones semióticas: la primera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «*casos posibles sobre el total de casos*, $3/6$»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8 = 0.5$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; y la tercera, entre el antecedente «*la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción* $1/2$», y el consecuente «*una función donde el conjunto de llegada es el intervalo cerrado entre* $[0, 1]$ *y* $1/2$ *esta entre 0 y 1*». Admite que la probabilidad puede ser representada mediante la expresión $1/2$ [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto semántico el evento aleatorio no puede ser representado a través de la fracción $4/8$, en tanto, el dado tiene 6 caras. Aspecto que fue ampliado fue ampliado en el intervalo $[7:05 - 11:43]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor.

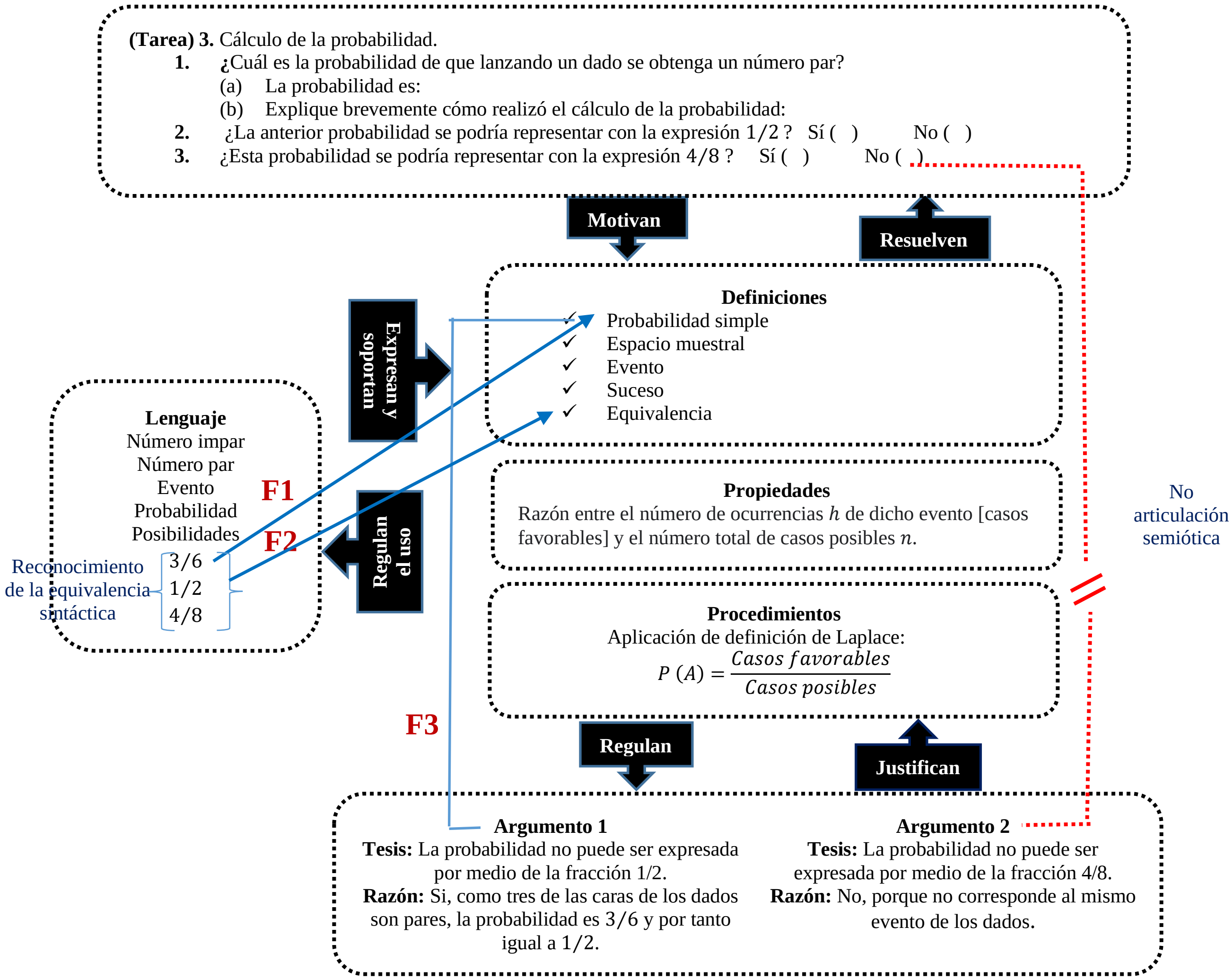
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[7:05 - 8:05]$	Entrevistadora	1	Hablemos un poco de la tercera tarea en la que se pide calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par. Si esta puede ser representada mediante la fracción $1/2$, y si esta puede ser expresada a través de la fracción $4/8$ [señalando la pantalla con el cursor, la entrevistadora muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$ son equivalentes pero la fracción $4/8$ no representa la probabilidad pedida.
$[8:05 - 9:43]$	Secundaria-C	2	Bueno [Guarda silencio unos segundos] porque se sale del contexto tal como lo escribí, si le digo al chico que 0.5 esta está entre el intervalo [0, 1] y 0.5 está dentro de ese intervalo y por ende la fracción $4/8$, pero la expresión debe modelar específicamente el evento aleatorio, porque el estudiante puede pensar que las fracciones $5/10$ y $6/12$ y todas las fracciones equivalentes servirían, pero en cuestiones de probabilidad se debe mirar el contexto de la situación, y en este caso $4/8$ se sale de ese contexto.
$[9:43 - 10:01]$	Entrevistadora	3	Me gustaría que profundizara y me explicara un poco por qué la fracción $4/8$ se sale del contexto.
$[9:43 - 10:01]$	Secundaria-C	4	[Guarda silencio unos segundos] Si en este caso se sale del contexto en términos de la situación y de la definición de probabilidad establecida mediante el número de casos favorables sobre casos posibles y la expresión debe especificar dicha condición y, la expresión $4/8$ no expresa el contexto de la situación puesto que no se tienen 8 caras sino 6.
$[9:43 - 10:01]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de 8 caras se podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$
$[10:01 - 11:43]$	Secundaria-C	6	[Guardo silencio unos segundos] en ese caso sí se puede expresar por medio de la fracción $4/8$, porque ya se tiene un dado de 8 caras.

Aunque en los fragmentos 2 y 4 el profesor reconoce que las fracciones son equivalentes, plantea que existen muchas fracciones equivalentes a ésta pero que se salen del contexto, en tanto, no describen los casos favorables sobre los casos posibles que enmarca el evento aleatorio determinado por las caras del dado. En el fragmento 6, enfatiza que cuando se cambia a un dado de 8 caras, la fracción $4/8$, sí representa la probabilidad, puesto que el denominador describe los casos posibles «8 caras» y el numerador la cantidad de casos favorables «*números pares*». En los argumentos se evidencia un «*anclaje*» al objeto, al dado y al número de caras, hecho que no le permite articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, no aceptar que la fracción 4/8, sea representativa de la probabilidad que se tiene en un dado de 6 caras.

6.4.10. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– D

Figura 88

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -D. Cálculo de la Probabilidad



El profesor [Secundaria-D] representa la probabilidad mediante la fracción $1/2$, obtenida al simplificar $3/6$, que corresponde a los seis números de las caras de un dado, tres son números pares y tres impares. Aunque, reconoce que la fracción $4/8$, es equivalente a $1/2$, manifiesta que la probabilidad no puede ser expresada por medio de la fracción $4/8$, en tanto, no corresponde al mismo evento de los dados. Establece tres funciones semióticas; la primera, entre el antecedente *«obtener un número par al lanzar un dado»* y el consecuente « $1/2$, *es equivalente a* $3/6$ »; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*», la tercera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «$3/6$, *3 de 6 caras»;* aplica los procedimientos respectivos [simplificación de fracciones], pero desde el aspecto semántico el evento aleatorio no puede ser representado a través de la expresión $4/8$, puesto que, el dado no tiene 8 caras sino 6. Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo $[6:03 - 11:44]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor:

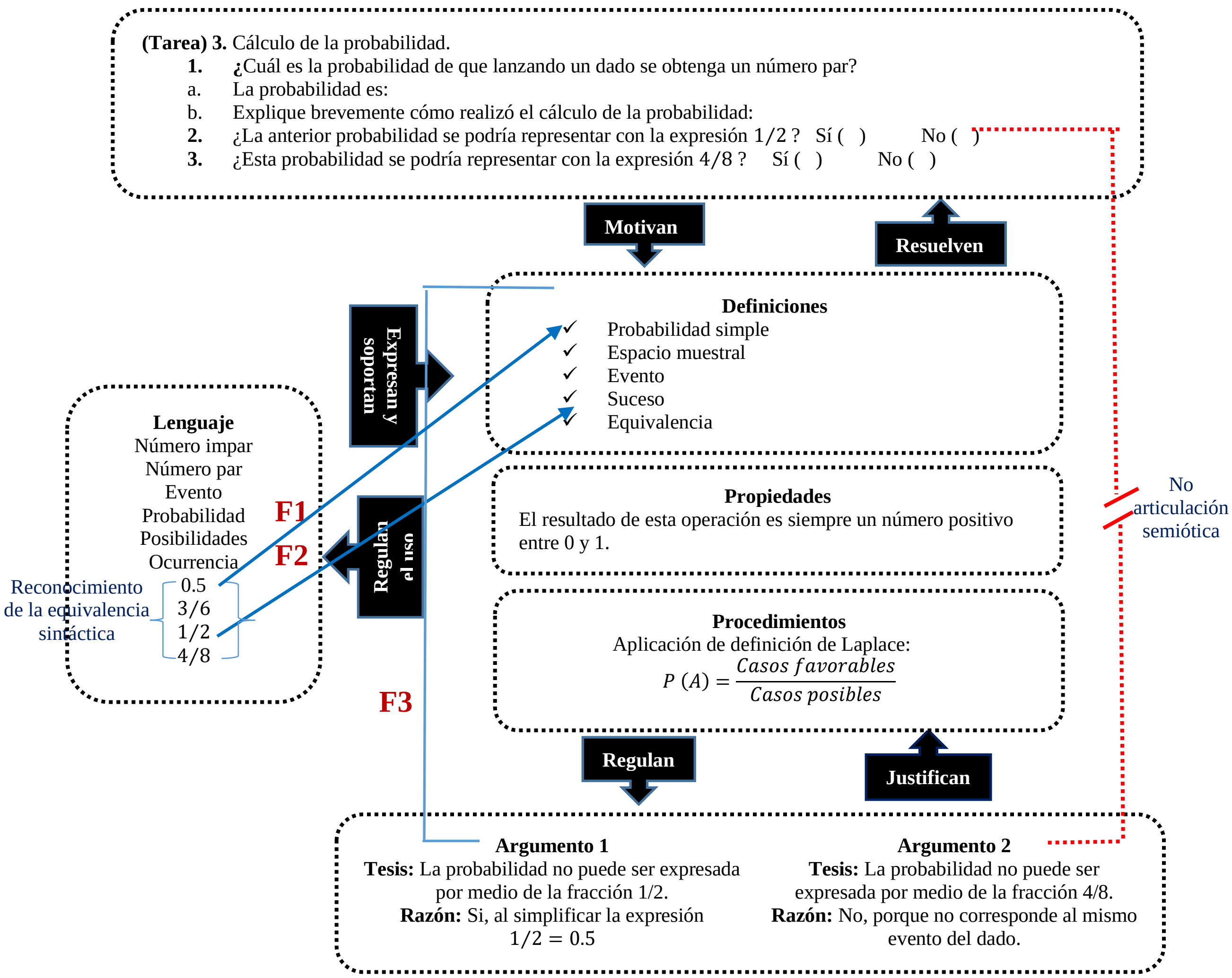
Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[6:03 - 7:34]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea que pide calcular la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par. Si la esta puede ser representada por medio de la fracción $1/2$, si esta puede ser expresada mediante la fracción $4/8$ [señalando la pantalla con el cursor muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes pero la fracción $4/8$ no puede representar la probabilidad pedida.
$[7:34 - 8:37]$	Secundaria-D	2	Exacto, porque las fracciones son equivalentes $1/2$, $2/4$, y $4/8$, conservan la igualdad al ser simplificadas, pero si vemos la expresión $4/8$ no es pertinente representar la probabilidad a través de esta, porque se debe mirar la relación a la situación inicial que son los números pares de las 6 caras del dado.
$[8:37 - 8:38]$	Entrevistadora	3	¿Por qué no es pertinente?
$[8:38 - 9:39]$	Secundaria-D	4	Porque el dado tiene 6 caras y 3 caras son números pares. Entonces a pesar que son fracciones equivalentes la expresion no representa las caras del dado puesto que son 6 y no 8.
$[9:39 - 10:13]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de ocho caras si podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$.
$[10:13 - 11:44]$	Secundaria-D	6	[Guardó silencio unos segundos] sí, porque cambiaría la situación, y las caras del dado serían 8 y no 6, la expresion $4/8$ nos representaría la probabilidad en un dado de 8 caras.

En el fragmento 2 se evidencia que el profesor reconoce la equivalencia entre las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$, pero no admite esta última como una fracción representativa de la probabilidad pedida, en tanto, hace que se pierda la relación que se establece en la situación inicial dada por los casos favorables sobre los casos posibles, en un dado de 6 caras. En los fragmentos 4 y 6 se evidencia que el objeto *«el dado»* impide que se acepte la expresión $4/8$, puesto que, no describe el evento aleatorio propuesto en la tarea, aspecto que deja evidencia el «a*ncla*j*e*» al objeto, determinada por el número de caras y los casos posibles en un dado de 6 caras, que impide que el profesor articule los sentidos asignados a dichas expresiones.

6.4.11. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Secundaria– E

Figura 89

Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de secundaria -E. Cálculo de la Probabilidad



La profesora [Secundaria-E] representa la probabilidad mediante las expresiones $3/6\ y\ 0.5$; considera los casos favorables sobre los casos posibles [3 números pares favorables en el dado, de 6 opciones]; reconoce que la probabilidad puede ser expresada por medio de la fracción $1/2$, puesto que, al simplificar la expresión $3/6$, se obtiene $1/2$, igual a 0.5. Pese a reconocer que la fracción $4/8$, es equivalente a $1/2$ y $3/6$, la expresión $4/8$ no da cuenta de la probabilidad de ocurrencia de los números pares en el lanzamiento del dado, puesto que, el denominador 8 no hace referencia a las caras del dado, que son 6. La profesora establece tres funciones semióticas; la primera, entre el antecedente «*obtener un número par al lanzar un dado*» y el consecuente «*casos posibles sobre casos favorables* »; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8 = 0.5$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; y la tercera, entre el antecedente «*la* *probabilidad puede ser representada por medio de la expresión* $1/2$» y el consecuente «*al simplificar la expresión* $1/2$ *es igual a 0.5*». La profesora reconoce que el cociente de las fracciones equivalentes es el mismo valor, en este caso 0.5, [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto **semántico**, dotar de sentido y significado las expresiones, el evento aleatorio no puede ser representado mediante la expresión $4/8$, debido que el dado no tiene 8 caras sino 6, es decir que no logra relacionar los sentidos asignados a estas fracciones. Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo $[11:06 - 16:18]$de la entrevista que se desarrolló con la profesora:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[11:06 - 12:43]$	Entrevistadora	1	Hablemos de la tarea que pide calcular la probabilidad que tiene lanzar un dado y obtener un número par. Si esta puede ser representada mediante la fracción $1/2$, y, si esta podría ser expresada por medio de la fracción $4/8$,[señalando la pantalla con el cursor, muestra las respuestas dadas por la profesora]. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que desde el punto de vista matemático las fracciones $1/2$ y $4/8$, son equivalentes pero la fracción $4/8$, no puede representar la probabilidad pedida.
$[12:43 - 13:23]$	Secundaria-E	2	Bueno cuando respondí esta pregunta, me cuestione mucho porque son fracciones equivalentes, pero cuando se habla de la fracción $4/8$, me estoy refiriendo a un dado de 8 caras y no de 6 como se explicita en el evento aleatorio inicial y no podemos mirar esa fracción dentro del dado de 6 caras. Entonces no me centre en el valor numérico de las fracciones sino en el evento, porque al mirar el evento no se puede decir que hay 4 posibilidades, de las 8 alternativas que arrojan del espacio muestral, pero si yo represento $4/8$, como valor numérico de la probabilidad que es 0,5 yo lo puedo representar $4/8$ al ser una fracción semejante a $1/2$. Pero el evento sería diferente.
$[13:23 - 13:58]$	Entrevistadora	3	Me podría explicar con más detalle por qué la expresión $4/8$ no representa el evento aleatorio.
$[13:58 - 14:08]$	Secundaria-E	4	[Guarda silencio unos minutos] Como decía anteriormente en el evento aleatorio yo no puedo decir que hay 4 posibilidades dentro de 8 porque solamente, el dado tiene 6 caras, pero si pienso en el valor numérico como número es 0.5, entonces ahí si la puedo representar con la expresión $4/8$, porque son equivalentes pero el evento es diferente.
$[14:08 - 15:02]$	Entrevistadora	5	Y si tenemos un dado de 8 caras si podría expresar la probabilidad con la fracción $4/8$.
$[15:02 - 16:18]$	Secundaria-E	6	[Guarda silencio unos minutos] si porque en este ejercicio el espacio muestral del evento aleatorio sería diferente, de 8 caras, y la fracción $4/8$, seria pertinente en ese contexto, cuando respondí esa pregunta me enfoqué más en lo que dice el contexto.

En el fragmento 2 la profesora manifiesta que pese a tener fracciones equivalentes, la expresión que se tome debe describir el espacio muestral, en este caso, el dado como «*objeto físico*», por ejemplo, en la expresion $3/6$ se logra establecer la cantidad de caras del dado «6», y los 3 casos favorables; en la fracción $1/2$ se puede hacer lectura de las dos opciones [pares-impares], expresiones que por un lado, permite identificar en el evento aleatorio y por otro la razón ambas son iguales a 0.5 tal y como se evidencia en los párrafos 4 y 6. Argumentos que dejan en evidencia un reconocimiento explícito de la equivalencia entre las fracciones $1/2$, $3/6$, y $4/8$ [sintáctica], pero el *«anclaje»* al objeto, no permite articular los sentidos asignados a dichas expresiones y, por tanto, aceptar que la fracción $4/8$ representa el evento aleatorio en un dado.

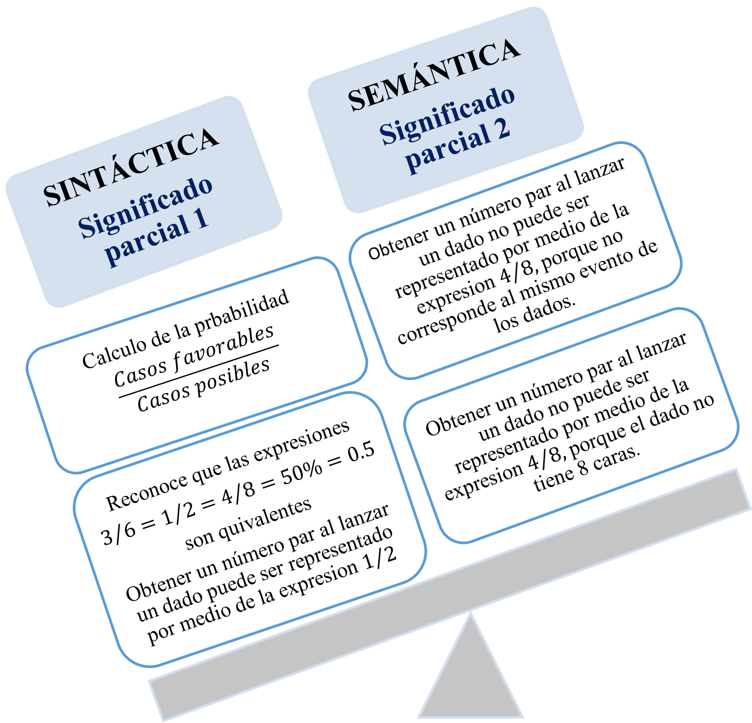
6.4.12. Una Síntesis de las Producciones Realizadas

Frente a los resultados obtenidos sobre el cálculo de la probabilidad *«lanzar un dado y obtener un número par»*, 10 profesores no realizan una articulación semiótica en esta tarea de los 11 profesores que conforman el estudio de caso colectivo. Los profesores seleccionados, calculan correctamente la probabilidad pedida, admiten que la probabilidad puede ser representada por medio de la fracción $1/2$. Reconocen que la fracción $3/6$ es equivalente a $1/2$ y $4/8$, [equivalencia sintáctica]. Pese al reconocimiento de la equivalencia entre las tres expresiones, consideran que la fracción $4/8$, no puede representar la probabilidad pedida, en tanto, el dado tiene 6 caras y en este caso, se está representando la probabilidad para un dado de 8 caras [equivalencia semántica]. Hecho que deja en evidencia un reconocimiento explícito de la equivalencia entre las fracciones con la fracción $3/6$, pero el «*anclaje*» al objeto físico, delimitado por el número de caras, y los casos favorables, no permite articular los sentidos asignados a tales expresiones, por ejemplo profesores de primaria-A, primaria-C, primaria-D, primaria-E, secundaria-A, secundaria-B, secundaria-C, secundaria-D y secundaria-E, reconocen desde el aspecto **sintáctico** la equivalencia entre las expresiones, pero al dotar de sentido y significado las expresiones matemáticas que modelan el evento aleatorio enmarcado en la tarea, manifiestan que no corresponde al mismo evento del dado, o no corresponde a la misma situación, en tanto, el dado tiene 6 posibilidades y no 8.

En términos de los significados parciales **sintáctico** y **semántico**, los resultados muestran que desde el aspecto **sintáctico** la aplicación de determinadas reglas como la simplificación de fracciones, el cociente entre dos números a y b [numerador-denominador] permiten reconocer la equivalencia de $3/6, 1/2$ y $4/8$; algunos profesores obtienen esta última expresión al multiplicar $1/2$ por $4/4$, aspecto que les permite concluir que las expresiones son equivalentes; pero el significado parcial [sintáctico] no es articulado con el significado [semántico], en tanto, la probabilidad no puede ser representada con la fracción $4/8$, puesto que, argumentan que corresponde a un evento aleatorio diferente. Esto permite concluir que el tener un significado parcial de la equivalencia, ya sea **semántico** o **sintáctico,** como es el caso de la tarea propuesta, es factor fundamental para no ser admitida la equivalencia total entre expresiones o representaciones, articulando los dos aspectos. Tal y como se muestra en el siguiente esquema que explicita la relación de los sentidos parciales sintáctico y semántico.

Figura 90

No Articulación de los Significados Parciales Sintáctico y Semántico en la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad

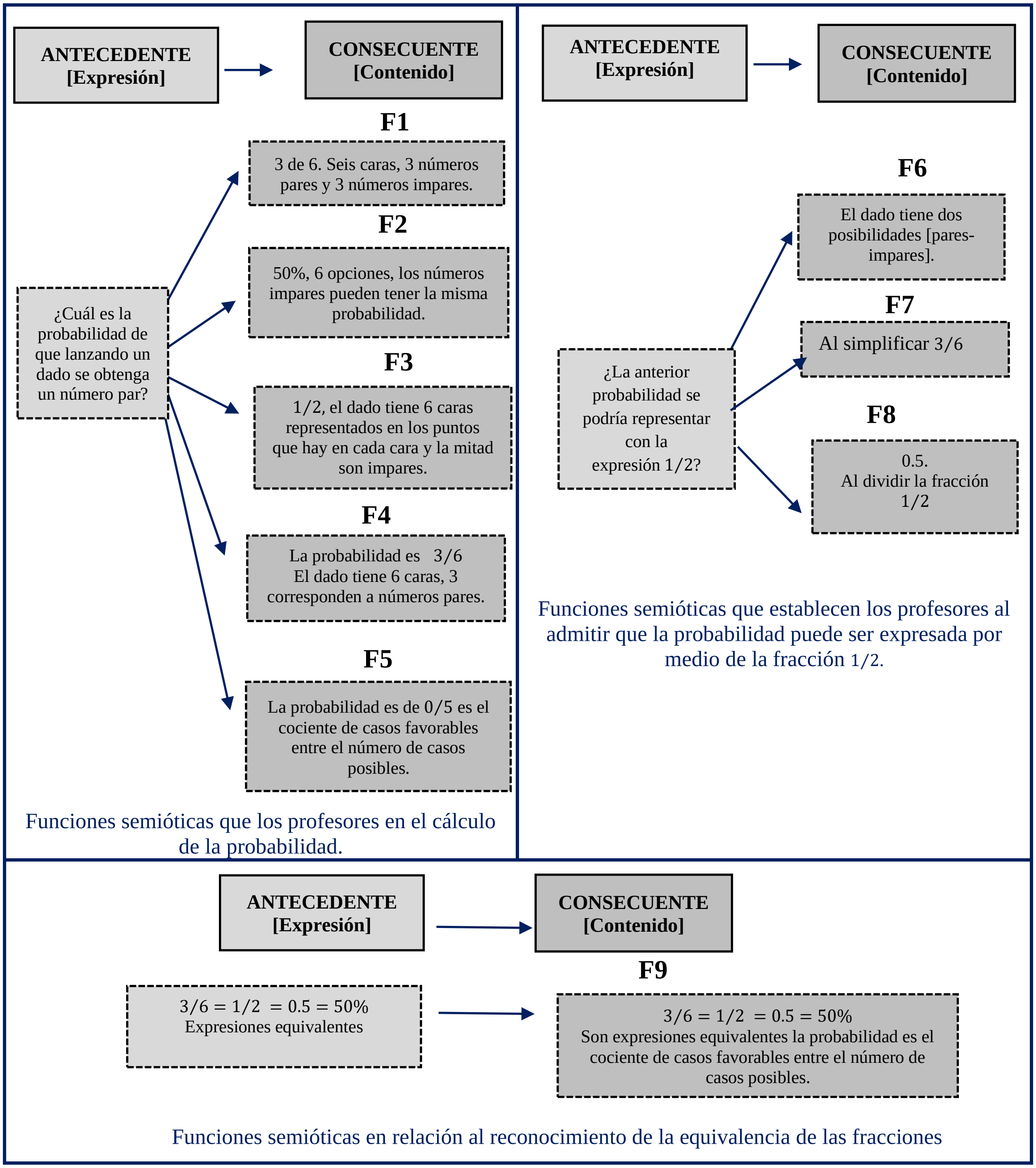


Frente al esquema anterior se tiene que en el aspecto **semántico** relaciona las fracciones $3/6$, $1/2$, y $4/8$, que se representa el mismo número [equivalencia de fracciones]. Desde el punto de vista matemático, los profesores reconocen dicha equivalencia, el contexto hace que las expresiones adquieran significados, que posibilite decir que las expresiones siguen siendo equivalentes, en tanto, representan la mitad de los casos favorables; los resultados muestran que dotar de sentido y significado la fracción $4/8$, los profesores no admiten que esta expresión pueda representar la probabilidad, puesto que, el dado tiene 6 caras y no 8.

Con relación a los dos significados parciales [sintáctico- semántico] que son analizados en las diferentes prácticas que los profesores realizan al calcular la probabilidad «*lanzar un dado y obtener un número par*», dejan en evidencia la no articulación semiótica de los significados parciales, en tanto, los profesores reconoce que las fracciones $1/2$, $3/6$, y $4/8$, son equivalentes y representan la mitad, pero en cuestiones de la situación del dado la expresión $4/8$, no describe el espacio muestral. Así mismo, las prácticas matemáticas permiten identificar una serie de relaciones que los profesores establecen al calcular la probabilidad perdida, a su vez, dichas prácticas posibilitan construir una serie de funciones semióticas que éstos establecen en el proceso de significación de dichas fracciones. Tal y como se muestra a continuación:

Figura 91

Funciones Semióticas Establecidas por el Grupo de Profesores [Primaria- Secundaria] Frente a la Tarea del Cálculo de la Probabilidad.



Las soluciones realizadas por los profesores permiten agrupar dichas producciones mediante nueve funciones semióticas. La función semiótica **F1,** establece una relación entre el antecedente «*calcular la probabilidad y obtener un número par*» y el consecuente «*3 de 6, seis caras, 3 números pares y 3 números impares*» con base a este antecedente los profesores establecen; la función **F2,** con el consecuente «*50%, 6 opciones, los números impares pueden tener la misma probabilidad*»; la función **F3,** con el consecuente «$1/2$*, el dado tiene 6 caras representados en los puntos que hay en cada cara y la mitad son impares*»; **F4,** con el consecuente «*la probabilidad es* $3/6$*, el dado tiene 6 caras, 3 corresponden a números pares*»; **F5,** con el consecuente «*la probabilidad es de* $0/5$ *es el cociente de casos favorables entre el número de casos posibles*». El segundo grupo de funciones semióticas se originan mediante el antecedente «*la probabilidad se puede representar por medio de la expresión* $1/2$» con lo cual se tiene tres relaciones; la función **F6,** con el consecuente *«el dado tiene dos probabilidades»;* **F7,** y el consecuente *«simplificación de la fracción* $3/6$*»;* la función **F8,** con el consecuente «*0.5 al dividir la fracción* $1/2$»; y finalmente la función semiótica **F9,** en el cual los profesores reconocen la equivalencia entre las expresiones $3/6 = 1/2 = 0.5 = 50\%$ que fungen como antecedente y el consecuente «*expresiones equivalentes puesto que la probabilidad es el cociente de casos favorables entre el número de casos posibles*» conjetura que corroboran a través de la aplicación de transformaciones de tratamiento requeridas [simplificación de fracciones, multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número, etc.] que les posibilita reconocer diferentes maneras de expresar la probabilidad y reconocer que estas representan la mitad de casos favorables.

6.4.13. Articulación y No Articulación de Sentidos Asignados a las Expresiones Numéricas $\mathbf{3/6}$*,* $\mathbf{1/2}$*, y* $\mathbf{4}/8$*, Mediante Una Cadena de Funciones Semióticas*

Los resultados obtenidos permiten identificar una serie de funciones semióticas que relacionan los sentidos entre sí, asignados a cada expresión. Las respuestas dadas por los profesores a la tarea propuesta, dejan en evidencian que 10 profesores, [6 de primaria y 4 de secundaria], calculan correctamente la probabilidad pedida, reconocen la equivalencia entre las expresiones $3/6$, $1/2$, y $4/8$, y admiten que la probabilidad, puede ser representada mediante la expresión $4/8$, dicho reconocimiento permite establecer como mínimo tres funciones semióticas que son relacionadas entres si, que a su vez, posibilita una articulación del aspecto **sintáctico** y **semántico,** en tanto, reconocen que la expresión $4/8$, continua representando la mitad de los casos [pares-impares], tal y como se muestra en el siguiente esquema que muestra una cadena de funciones semióticas.

Figura 92

Articulación Semiótica Mediante Una Cadena de Funciones Semióticas Establecidas en la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad

FUNCIÓN SEMIÓTICA F3	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
La probabilidad se puede representar mediante la expresión $4/8$	Si, puesto que $4/8$ sigue representando la mitad de casos

Relación entre sí de los dos sentidos

FUNCIÓN SEMIÓTICA F2	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
La probabilidad se puede representar mediante la expresión $1/2$	Si, debido que $1/2$ representa una de las dos opciones: pares e impares

Sentido 2

FUNCIÓN SEMIÓTICA F1	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
Probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par.	$3/6$ números de casos favorables sobre casos posibles.

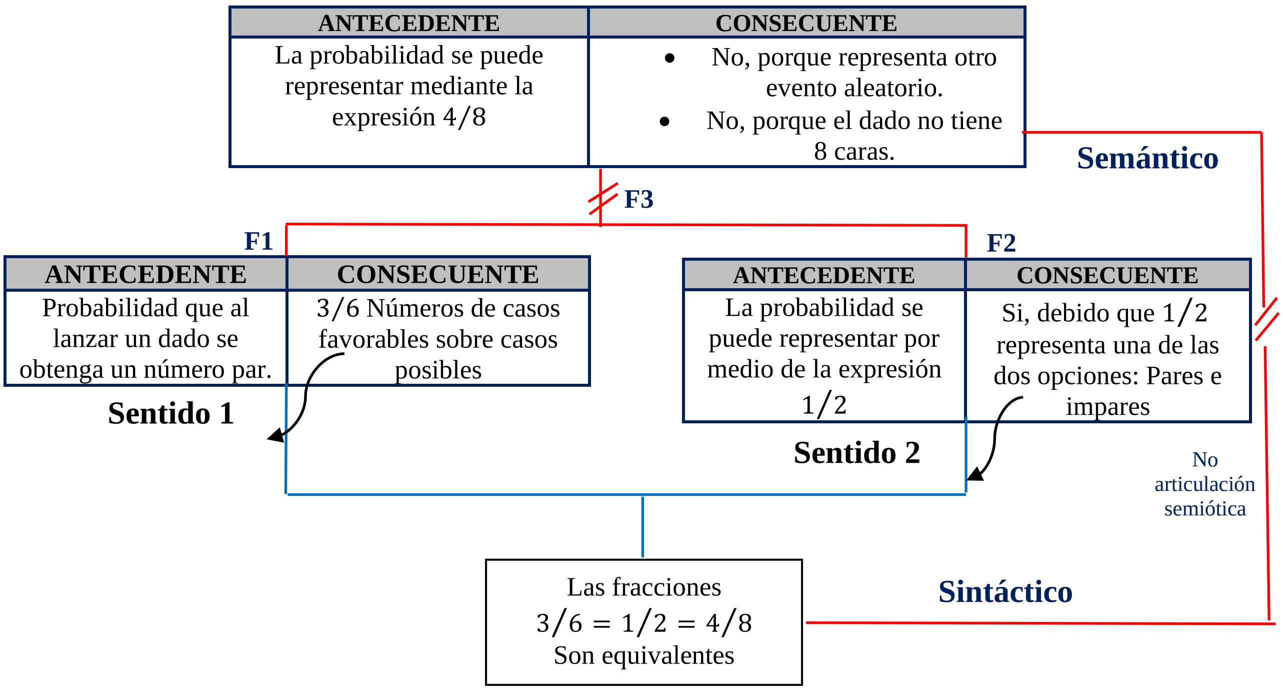
Sentido 1

El esquema anterior deja en evidencia que los profesores que articulan los sentidos asignados a las fracciones, establecen cuatro funciones relacionadas entre sí; la primera, entre el antecedente «*probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par*» y el consecuente «$3/6$ *números de casos favorables sobre casos posibles*»; la segunda, entre el antecedente «*las fracciones* $3/6 = 1/2 = 4/8 = 0.5$» y el consecuente «*fracciones equivalentes*»; la tercera, entre el antecedente «la *probabilidad se puede representar por medio de la expresión* $1/2$» y el consecuente «$1/2$, *representa una de las dos opciones: pares e impares»;* y la cuarta, entre el antecedente «*la probabilidad se puede representar por medio de la expresión* $4/8$» y el consecuente «$4/8$ *sigue representando la mitad de casos*».

Por otra parte, los resultados muestran que 16 profesores [8 de primaria y 8 de secundaria] aceptan que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $4/8$, en tanto, es una expresión equivalente, pero entre las producciones y las entrevistas realizadas a estos profesores, no relacionan el evento aleatorio con la expresión $4/8$, es decir, no articulan el aspecto **sintáctico** con el **semántico** [no articulación semiótica]. Por otro lado, 33 profesores, [16 de primaria y 17 de secundaria] aceptan que dicha probabilidad pueda ser expresada mediante la expresión $1/2$, reconocen que esta expresión desde un punto de vista matemático es equivalente a $4/8$, pero esta última no representa la probabilidad pedida, en tanto, representa una situación diferente a la inicial, aluden que el dado no tiene 8 caras. Frente a este fenómeno nos encontramos con una cadena interrumpida de funciones semióticas, puesto que, el sentido asignado a la fracción $1/2$, no se relaciona con el sentido asignado a la expresión $4/8$. Tal y como se muestra en el siguiente esquema.

Figura 93

La No Articulación Semiótica Mediante una Cadena Interrumpida de Funciones Semióticas en la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad.



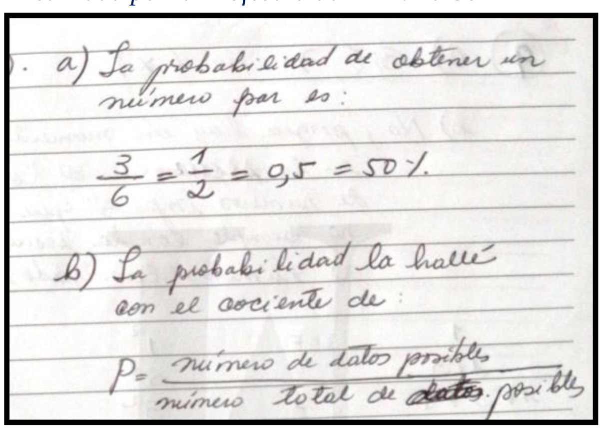
El esquema anterior muestra que los profesores establecen la función semiótica **F1** y **F2**, que corresponden al cálculo de la probabilidad «*lanzar un dado y obtener un numero par*», admiten que la probabilidad puede ser representada mediante la fracción $1/2$, respectivamente. Reconocen **sintácticamente** la equivalencia de las expresiones $3/6$, $1/2$ y $4/8$, pero **semánticamente** esta no puede representada mediante la fracción $4/8$, puesto que, no refiere el mismo evento aleatorio, en tanto, el dado no tiene 8 caras sino 6, aspecto que impide relacionar la función semiótica **F3,** con las funciones **F1** y **F2**, generando una cadena interrumpida de funciones semióticas. Frente a los resultados obtenidos por 32 de los 64 profesores que conforman la población de estudio, se tiene 16 de primaria y 17 de secundaria que no relacionan los sentidos asignados a estas expresiones matemáticas, es decir no establecen una articulación de sentidos. Tanto los 2 profesores que calculan erróneamente la probabilidad, puesto que, no considera que las expresiones $3/6$ y $4/8$, son equivalentes, como los 2 profesores que no admiten que la probabilidad puede ser representada por medio de la fracción $1/2$, y que las expresiones 1/2 y 3/6, expresan diferentes situaciones diferentes, no se hacen parte de esta función interrumpida de funciones, puesto que establecen una única función.

6.4.14. Similitud y Diferencias Ente las Dificultades que Encuentran los Profesores de Primaria y los Profesores de Secundaria Para Articular Sentidos a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento

Frente al cálculo de la probabilidad que se tiene al lanzar un dado y obtener un número par. Las producciones muestran que los 62 profesores recurren a la definición de la probabilidad simple «*casos favorables sobre posible*» con base a esta definición, representan la probabilidad mediante las expresiones matemáticas como: $3/6$, $1/2$, 0.5 o 50%. Con relación a las formas de representar la probabilidad; 5 profesores [2 de primaria y 3 de secundaria] la expresan por medio de la fracción $3/6$; 5 profesores [3 de primaria y 2 de secundaria] recurren la fracción $1/2$; 7 profesores [5 de primaria y 2 de secundaria] la expresan mediante 50%; 9 profesores [7 de primaria y 2 de secundaria] la representan mediante de las expresiones $3/6$, y, $1/2$; 3 profesores de primaria representan la probabilidad a través de las expresiones $3/6$ y 50%; 4 profesores de secundaria recurren a las expresiones $3/6$ y 0.5; 1 profesor de secundaria la expresa mediante 0.5; 1 profesor de primaria a través de las expresiones $1/2$ y 0.5; 1 profesor de secundaria con las expresiones $3/6$, $1/2$ y 50%; 1 profesor de secundaria con $3/6$, $1/2$ y 0.5;1 profesor de secundaria $3/6$, 0.5 y 50%; y 7 profesores [3 de primaria, 4 de secundaria] recurren a las cuatro expresiones $3/6$, $1/2$, 0.5 y 50%, tal y como se muestral en la siguiente figura correspondiente a la producción de la profesora de primaria-30.

Figura 94

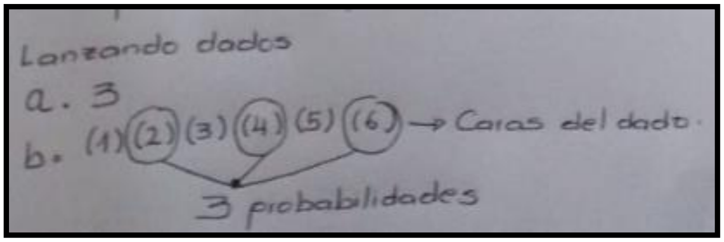
Cálculo de la Probabilidad que al Lanzar un Dado se Obtenga un Número Par-Producción Realizada por la Profesora de Primaria 30



Por otro lado, 10 profesores de primaria recurren al lenguaje natural para expresar dicha probabilidad, argumentan que la probabilidad es de 3, debido que el dado tiene 3 números impares y 3 pares. Tal y como se muestral en la siguiente figura que corresponde a la producción de la profesora de primaria-29.

Figura 95

Cálculo de la Probabilidad que al Lanzar un Dado se Obtenga un Número Par-Producción Realizada por la Profesora de Primaria 29



Con relación a los resultados obtenidos, se evidencia que no hay diferencias significativas en el cálculo de la probabilidad, 62 de los 64 profesores recurren a la definición de probabilidad simple, la diferencia radica en que los profesores de secundaria no recurren al registro semiótico de lenguaje natural para representar el cálculo de la probabilidad.

En cuanto al ítem que indaga sí la probabilidad puede ser representada mediante la expresión$1/2$:15 profesores [11 de primaria, 4 de secundaria] manifiestan que la $1/2$, corresponde a la mitad de casos favorables que se tienen; 5 profesores [2 de primaria, 3 de secundaria], argumentan que si puede ser representada por medio de la fracción $1/2$, puesto que, 0.5 es el cociente entre ambas fracciones; 26 profesores [16 de primaria, 10 de secundaria], argumentan que al simplificar la fracción $3/6$, se obtiene $1/2$; 20 profesores [14 de primaria, 6 de secundaria], aluden que la fracción $1/2$, representa la mitad de casos; y 10 profesores de secundaria establecen la equivalencia entre las expresiones 0.5, 3/6, 50%. Resultados que muestran la similitud entre los argumentos dados por los profesores de primaria y secundaria para calcular y admitir que la fracción $1/2$, puede representar el evento aleatorio, pero los profesores de secundaria lo hacen mediante un lenguaje simbólico y algunos profesores de primaria recurren al lenguaje natural. Tal y como se muestra en la siguiente figura que corresponde a la solución dada por el profesor de primaria-8 y secundaria-30.

Figura 96

La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $1/2$ *−Producción Realizada por la Profesora de Primaria 8*

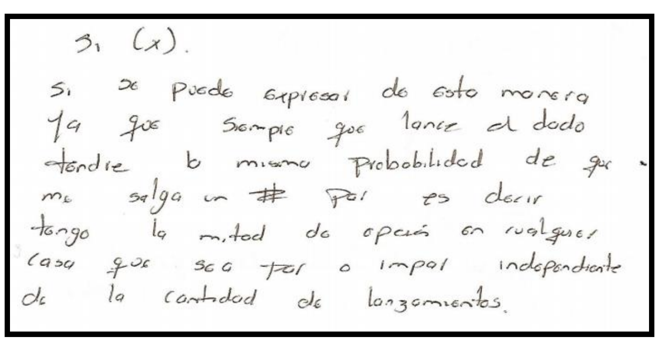
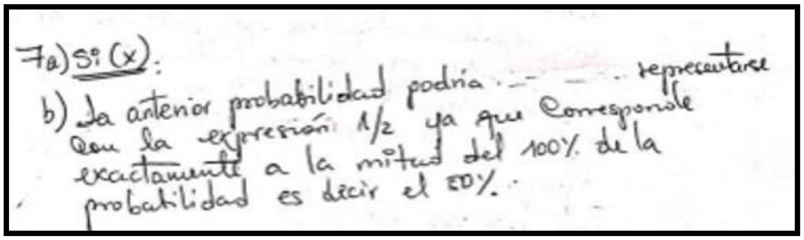

Si (x).
Si se puede expresar de esta manera ya que siempre que lance el dado tendre lo mismo probabilidad de que me salga un # par es decir tengo la mitad de opción en cualquier caso que sea par o impar independiente de la cantidad de lanzamientos.

Figura 97

La Anterior Probabilidad se Podría Representar con la Expresión $1/2$ *–Producción Realizada por la Profesora de Secundaria 30*



Por otro lado, 3 profesores [1 de primaria y 2 de secundaria], no admiten que la fracción $1/2$, puede representar la probabilidad pedida, en tanto, consideran que el dado tiene 6 caras y no 2. Con relación al ítem que indaga, sí la probabilidad puede ser representada por medio de la fracción $4/8$, 15 profesores [8 de primaria y 7 de secundaria], argumentan que ésta expresión puede representar la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado, puesto que, la fracción $4/8$, sigue representando la mitad de casos; 16 profesores [8 de primaria y 8 de secundaria], admiten que la expresión $4/8$, representan la probabilidad pedida, en tanto, es una expresión equivalente a $3/6$, pero no la relacionan dicha fracción con el evento aleatorio que se propone en la tarea, tal y como se muestra en las siguientes producciones que corresponde a las soluciones dadas por los profesores de primaria-24 y secundaria-23.

Figura 98

La Probabilidad se Puede Representar Mediante la Expresión $4/8$ *–Producción Realizada por la Profesora de Primaria- 24*

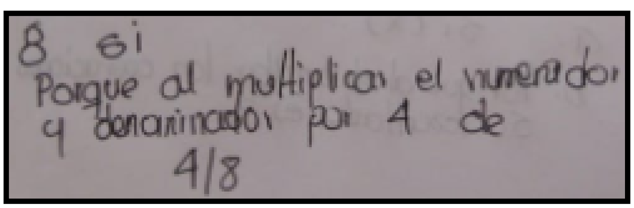
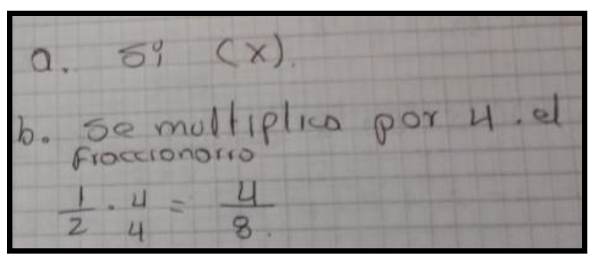


Figura 99

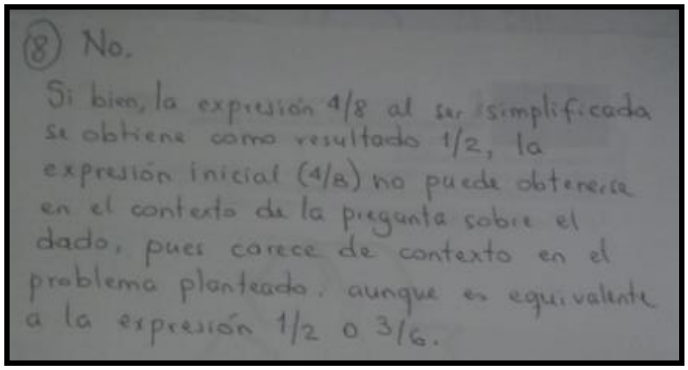
La Probabilidad se Puede Representar Mediante la Expresión $4/8$*-Producción Realizada por la Profesora de Secundaria- 23*



Así mismo, 33 profesores [16 de primaria y 17 de secundaria] manifiestan que la probabilidad no se puede representar por medio de la fracción $4/8$, ya que, la expresión no es representativa del evento aleatorio, tal y como se muestra en las siguientes producciones que corresponde a las soluciones dadas por los profesores de primaria-28 y secundaria-4.

Figura 100

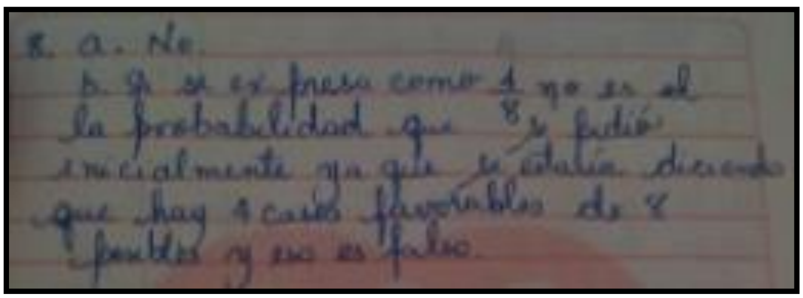
La Probabilidad se Puede Representar Mediante la Expresión $4/8$ *– Producción Realizada por la Profesora de Primaria- 28*



8 No.
Si bien, la expresión 4/8 al ser simplificada se obtiene como resultado 1/2, la expresión inicial (4/8) no puede obtenerse en el contexto de la pregunta sobre el dado, pues carece de contexto en el problema planteado, aunque es equivalente a la expresión 1/2 o 3/6.

Figura 101

La Probabilidad se Puede Representar Mediante la Expresión $4/8$ *–Producción Realizada por la Profesora de Secundaria- 4*



8. a. No.
b. Si se expresa como 4/8 no es el la probabilidad que se pidió inicialmente ya que se estaba diciendo que hay 4 casos favorables de 8 posibles y eso es falso.

Argumento que muestran que las dificultades que encuentran los profesores de primaria y secundaria para articular o relacionar los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento son similares.

6.4.15. Similitud y Diferencias Entre las Dificultades que Encuentran los Estudiantes y los Profesores de Matemáticas para Articular Sentidos Asignados a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento

Los resultados que reporta Rojas (2012) frente a la manera en que los estudiantes calculan la probabilidad y las dificultades que encuentran para relacionar los sentidos asignados a las fracciones $1/2$ y $4/8$, como representativas de la probabilidad pedida, son similares a las soluciones realizadas por los profesores, a continuación, se relacionan algunas evidencias al respecto. Rojas (2012) plantea que los estudiantes calculan la probabilidad mediante las expresiones numéricas 50% y 3/6. En las respuestas dadas por los profesores 18 recurren a una sola expresión como $3/6$, $1/2$, 50% o 0.5. Así mismo 10 profesores no representan la probabilidad por medio de una expresión, pero en los argumentos dejan en evidencia el uso de la definición de la probabilidad simple [casos favorables sobre casos posibles], 6 caras del dado y 3 números pares;

34 profesores representan la probabilidad empleando más de una expresión como $3/6$, $1/2$, 50% y 0.5, que depende de la formación matemática y la experiencia con el tema.

Frente a las funciones semióticas, Rojas (2012) manifiesta que en su mayoría los estudiantes establecen tres; una entre el antecedente «*la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par*» y el consecuente *«la probabilidad es* $3/6$*»;* otra entre el antecedente «*la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par*» y el consecuente *«la probabilidad es* $1/2$*»;* y la tercera, entre el antecedente «*la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par*» y el consecuente «*la probabilidad es 50%*». Relaciones similares a las establecidas por el grupo de profesores mediante las funciones semióticas. Por otro lado, el autor alude que los estudiantes no admiten que la probabilidad pueda ser representada mediante la fracción $4/8$, pese que reconocen la equivalencia entre las fracciones $3/6$, $1/2$ y $4/8$, es decir, no logran articular los sentidos asignados a las anteriores expresiones numéricas. La razón fundamental radica en que expresan que el número de caras del dado es 6 y no 8, lo que Rojas (2012) ha denominado *«anclaje a la situación»*, en tanto, el sentido asignado a la fracción $4/8$, está «anclado» al dado, al objeto concreto referido en la tarea, [el dado como objeto]. Los hechos que sustentan este fenómeno se encuentra en argumentos como «*el tema principal es el dado y éste sólo tiene 6 caras, entonces 4/8 pues no, no es tan representativo del dado, no tiene ocho caras, ni cuatro números pares*», «*hay 3 opciones de 6 y que no puede ser, ni de las 4 ni tampoco puede ser de 8», «la fracción 4/8, estaría mal planteada pues el problema debe resolverse con base en las caras del dado [y éste] nunca va a tener ocho caras», «la fracción 4/8 no puede ser la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado, ya que si el dado tiene 6 caras, hay 3 opciones de 6, entonces no puede tomarse el número de referencia cuatro ni ocho*». Argumentos que son similares a los dados por el grupo de profesores quienes reconocen la *equivalencia sintáctica* entre las expresiones, pero plantean que la probabilidad no puede ser representada por medio de la fracción $4/8$, debido a que, el dado no tiene 8 caras, otros profesores argumentan que «*en un dado tradicional la fracción* $3/6$ *muestra en detalle las 3 caras que hacen referencia a los números pares y el 6 a las caras del dado, en cambio en* $4/8$ *eso no estaría claro*»; en este caso se evidencia que en los profesores establecen la probabilidad en términos al evento aleatorio *«anclaje a la situación»*, que impide realizar las articulaciones requeridas. Lo anterior, permite concluir que las dificultades que encuentran los estudiantes para articular los sentidos asignados a cada una de las expresiones numéricas son similares a las dificultades que encuentran los profesores para relacionar los sentidos asignados entre sí, a cada una de las expresiones.

6.4.16. Conexiones Matemáticas y Articulación Semiótica en la Tarea Sobre el Cálculo de la Probabilidad

Para el caso particular de esta tarea se considera que los profesores pueden establecer las siguientes conexiones matemáticas:

- **a)** ***Representaciones diferentes:*** esta conexión hace referencia a las expresiones que emplea los profesores para representar la probabilidad pedida:$\frac{3}{6}$ notación fraccionaria o cualquier fracción equivalente a esta, 50% porcentaje, 0.5 notación decimal o en lenguaje natural [casos favorables sobre el total de casos].
- **b)** ***Procedimiento*****:** en esta tipología se ubican los profesores que simplifican la fracción:$\frac{3}{6}$ o establecen el cociente entre los dos números [número decimal] o calculan el porcentaje.
- **c)** ***Significado:*** los profesores calculan la probabilidad del evento aleatorio en relación a la definición de probabilidad simple: Laplace [casos favorables entre casos posibles].
- **d)** ***Característica:*** en esta tipología se ubican los profesores que calculan la probabilidad teniendo en cuenta algunas características del evento aleatorio relacionado, como son el total de casos [caras del dado], casos favorables [las tres caras del dado que corresponde las caras pares del dado].
- **e)** ***Implicación:*** si se admite que las expresiones $3/6$, $1/2$, $4/8$ son fracciones equivalentes, la fracción $4/8$ es una expresión representativa del dado, en tanto, representa la mitad de casos favorables.
- **f)** ***Reversibilidad:*** si se reconoce que las expresiones $3/6$, $1/2$, 0.5 y 50% representan la mitad de los casos favorables y la fracción $4/8$ es equivalente; esta última también representa la mitad de los casos favorables.

A continuación, se sintetiza las producciones dadas por los profesores de primaria A-B-C-D-E y los profesores de secundaria A- B-C-E-F.

Tabla 35

Tarea Calculo de la Probabilidad. Frecuencia con que Emergieron las Conexiones

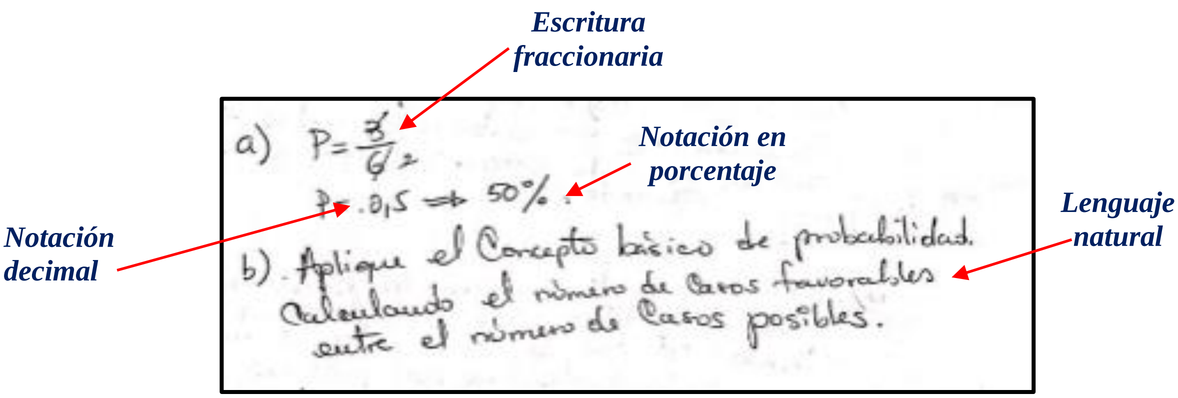
Conexión	P-A	P-B	P-C	P-D	P-E	S-A	S-B	S-C	S-E	S-F	*f*
CI	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
RD	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
PR	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
IM	—	—	—	—	—	—	—	—	–	–	–
PT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SG	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
CT	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
RV	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
MT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Nota.
CI=Conexiones orientadas a la instrucción, RD=Representaciones diferentes, PR= Procedimiento, IM=Implicación, PT= Parte-todo, SG= Significado, CT=Característica, RV= Reversibilidad, MT= Metafórica, *f*= Frecuencia, P= profesor de primaria, S= profesor de secundaria, • = Presencia de la conexión,– = No presencia de la conexión, — = La situación no posibilita que emerja la conexión.

Con relación a los 11 profesores que conforman el estudio de caso 10 no relacionan los sentidos asociados a cada una de las fracciones, por ejemplo, los profesores movilizan mínimo dos registros de representación: el lenguaje natural y el lenguaje simbólico [fracciones], algunos de ellos movilizan cuatro registros de representación: lenguaje natural, lenguaje simbólico [fracciones], notación decimal y porcentajes. Tal y como se evidencia en la solución dada por la profesora de secundaria- 30.

Figura 102

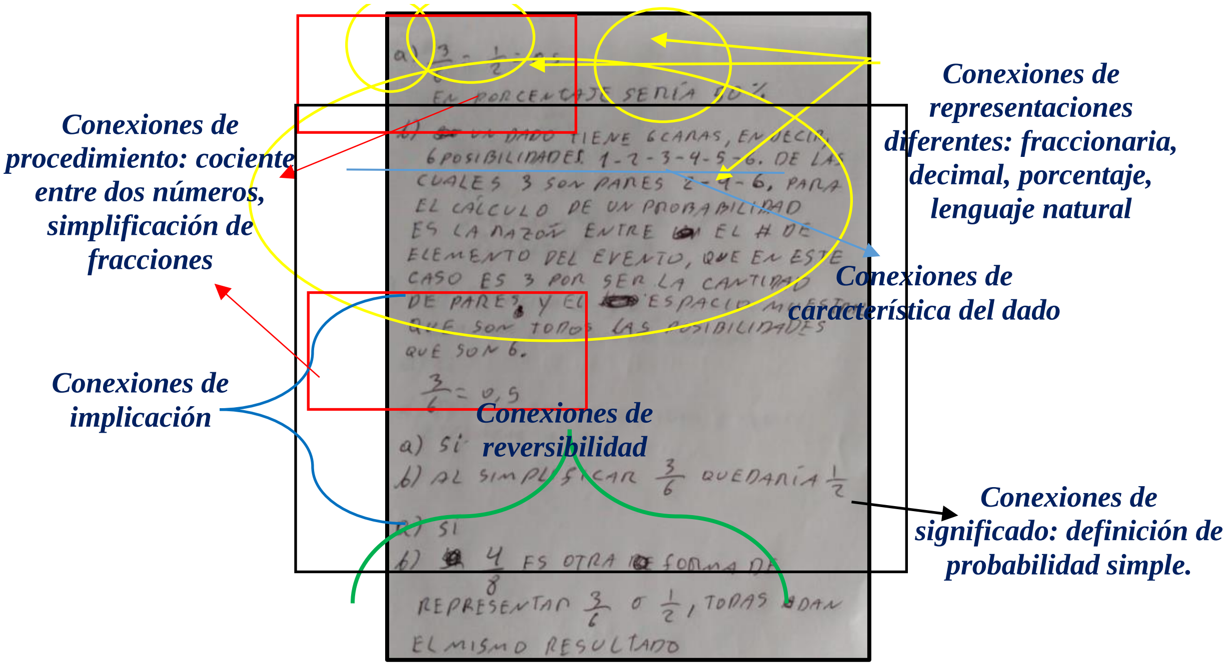
Cálculo de la Probabilidad que al Lanzar un Dado se Obtenga un Número Par- Conexión de representaciones Producción realizada por el profesor de secundaria-30



Los profesores realizan los procedimientos respectivos para el cálculo de la probabilidad, reconocen las características del evento aleatorio como son, las caras del dado, el total de caras, la cantidad de caras pares e impares. Entre los 32 profesores de primaria que resolvieron esta tarea 16, de ellos, establecieron que la probabilidad se puede representar por medio de la expresión $4/8$, en tanto, son fracciones equivalentes a $1/2$ y $3/6$. Entre los 32 profesores de secundaria, 12 de estos reconocen que esta probabilidad puede ser representada mediante la fracción $4/8$. Los profesores que reconocen la equivalencia entre las expresiones articulando el aspecto **sintáctico** con el **semántico** establecen las cinco conexiones que pueden emerger en el planteamiento de la tarea. Tal y como se muestra en la siguiente producción realizada por profesor de secundaria-18.

Figura 103

Tarea Calculo de la Probabilidad-Conexiones Matemáticas. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-18



La conexión de implicación es establecida por el profesor al reconocer que las expresiones $1/2$, $3/6$ y $4/8$, son equivalentes [sintáctica] y por ende la fracción $4/8$, sigue representando la mitad de los casos favorables [equivalencia semántica]. La conexión de reversibilidad emerge cuando el profesor admite que las expresiones son equivalentes desde su aspecto sintáctico también lo son desde su aspecto semántico y viceversa.

6.5. Rejilla de Respuestas y Diagramas de Configuración Cognitiva de Objetos Matemáticos Primarios Activadas por el Grupo de Profesores de Secundaria Sobre la Tarea de Interpretaciones de Ecuaciones

Esta tarea se aplicó solo al grupo de profesores de secundaria, se eligieron aquellos profesores que realizan una interpretación a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, admitien que esta expresión es equivalente a $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero la interpretación asignada a esta última ecuación no coincide con la interpretación realizada a la primera, en tanto, las ecuaciones se relacionan con situaciones u objetos matemáticos diferentes. Para esta tarea se contó con la participación de los profesores de secundaria B, C, D y F, quienes no logran realizar una articulación semiótica. A continuación, se presenta el trabajo realizado por los profesores sobre la tarea propuesta. En un inicio se muestra la rejilla con la información del trabajo realizada por cada profesor frente a la tarea propuesta, luego se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios; posteriormente se realiza el análisis de cada entrevista, que permite ratificar o ampliar las configuraciones movilizadas por los profesores y las funciones semióticas establecidas por estos en la solución de la tarea.

Tabla 36

Rejilla de Respuestas le los Profesores de Secundaria B-C-D-F. Tarea sobre Interpretación de Ecuaciones

Docente/Ítem	1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $\mathrm{x}^2+y^2+2xy-1=0$	2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, es equivalente a la ecuación $\mathrm{x}^2+y^2+2xy-1=0$	3. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, es ________?
Secundaria-B	Es una ecuación de segundo grado	Algebraicamente a partir de una ecuación se puede obtener la otra.	No, puesto que $x+y \neq 0$
Secundaria-C	Es una circunferencia	Aplica las transformaciones algebraicas que le permite reconocer la equivalencia entre ambas expresiones.	No, es una circunferencia
Secundaria-D	Un polinomio de segundo grado.	Aplica las transformaciones algebraicas que le permite reconocer la equivalencia entre ambas expresiones.	No, es un polinomio de segundo grado.
Secundaria-F	Una sección cónica.	Aplica las transformaciones algebraicas que le permite reconocer la equivalencia entre ambas expresiones.	No, tiene la misma forma.

La tabla anterior muestra que los profesores asignan una interpretación a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$ en correspondencia a la «forma» de las expresiones, por ejemplo, en relación con las variables x e y, las cuales se encuentran elevadas al cuadrado, con base en ello, la relacionan con un polinomio de segundo grado, una circunferencia, una ecuación de segundo grado, etc. Los profesores admiten que una ecuación puede obtenerse a partir de realizar transformaciones en la otra [equivalencia sintáctica], pero no desde el punto de vista semántico, por ejemplo, plantean que la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, no coincide con la interpretación dada a la $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{xy}-1=0$, en tanto, no tiene la misma *«forma»* o sus variables dejan de estar al cuadrado o el dominio tiene más restricciones [no equivalencia semántica]; tal y como se sintetiza en la siguiente tabla que resumen las producciones de los cuatro profesores.

Tabla 37

Rejilla Síntesis del Reconocimiento de la Equivalencia Entre las Ecuaciones por los Profesores de Secundaria

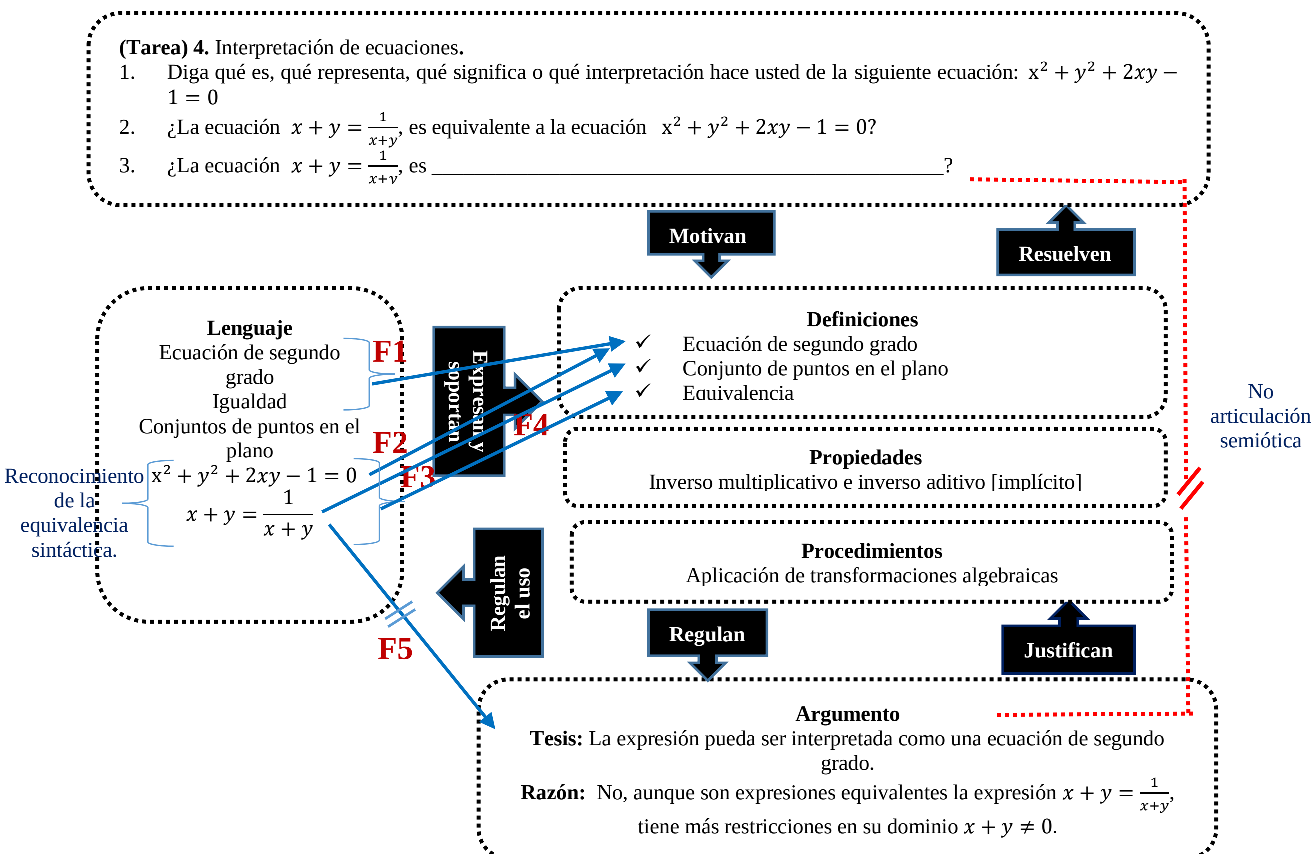
	Secundaria-B	Secundaria-C	Secundaria-E	Secundaria-F
Reconocen que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es equivalente a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
No admiten que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y $x + y = \frac{1}{x+y}$, corresponde al mismo objeto matemático.	NO	NO	NO	NO

En los siguientes diagramas se muestra la configuración cognitiva activada por cada uno de los profesores frente la tarea sobre interpretación de ecuaciones. Seguidamente se presenta la transcripción que corresponde a la entrevista realizada a cada profesor que amplia o refuerza los argumentos y las relaciones que estos establecen en la solución de la tarea, así como, a la identificación de argumentos que justifican y amplían los argumentos dados en las producciones iniciales.

6.5.1. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– B

Figura 104

Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -B. Interpretación de Ecuaciones



El profesor [secundaria-B] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación de segundo grado, y la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, con una igualdad entre dos cantidades o un conjunto de puntos en el plano; realiza los tratamientos necesarios que le permiten corroborar que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, son equivalentes, pero no admite que ésta última pueda ser interpretada como una ecuación de segundo grado, en tanto, el dominio no es el mismo, ya que $x + y$, debe ser diferente de cero.

El profesor establece cuatro funciones semióticas: la primera, entre el antecedente *«la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$» y el consecuente «*ecuación de segundo grado*»; la segunda, entre el antecedente «*la interpretación de la ecuación:* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$» y el consecuente «*igualdad entre dos cantidades un conjunto de puntos en el plano*»; la tercera, entre el antecedente «*la interpretación de la ecuación:*$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$» y el consecuente «*conjunto de puntos en un plano*»; y la cuarta, entre el antecedente *«la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0\ y\ x + y = \frac{1}{x+y}$» y el consecuente «*expresiones equivalentes*». Los argumentos y relaciones que el profesor establece mediante las funciones semióticas muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas, permite corroborar la equivalencia entre ambas ecuaciones [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto semántico la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y,}$ no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, puesto que, la expresión debe cumplir que $x + y \neq 0$. Aspecto que fue ampliado en el intervalo $[14{:}02 - 20{:}38]$ de la entrevista desarrollada al profesor:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[14{:}02 - 15{:}36]$	Entrevistadora	1	Finalmente hablemos un poco de la última pregunta que indaga por la interpretación que el profesor asigna a la ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, si esta ecuación es equivalente a la expresión expresiones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y si ésta corresponde a la interpretación asignada a la ecuación dada inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ corresponde a una ecuación de segundo grado.
$[15{:}36 - 16{:}06]$	Secundaria-B	2	Bueno uno en seguida deduce que es una ecuación de segundo grado y en ese caso no sé si especifique que era en dos variables claro está.
$[16{:}06 - 17{:}03]$	Entrevistadora	3	Cuáles son los elementos que hacen que uno deduzca inmediatamente que es una ecuación de segundo grado.
$[17{:}03 - 17{:}59]$	Secundaria-B	4	Porque en una ecuación de segundo grado el exponente máximo es dos.
$[17{:}59 - 18{:}47]$	Entrevistadora	5	Ahora me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que a pesar que las dos expresiones son equivalentes, la ecuación $\boldsymbol{x + y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$, no corresponde a una ecuación de segundo grado.
$[18{:}47 - 20{:}38]$	Secundaria-B	6	Bueno, en matemáticas son ecuaciones equivalentes, pero uno tiene que analizar las situaciones porque uno a veces omite ciertas características, por ejemplo, que no se puede dividir una expresión entre cero y en la ecuación $x +$

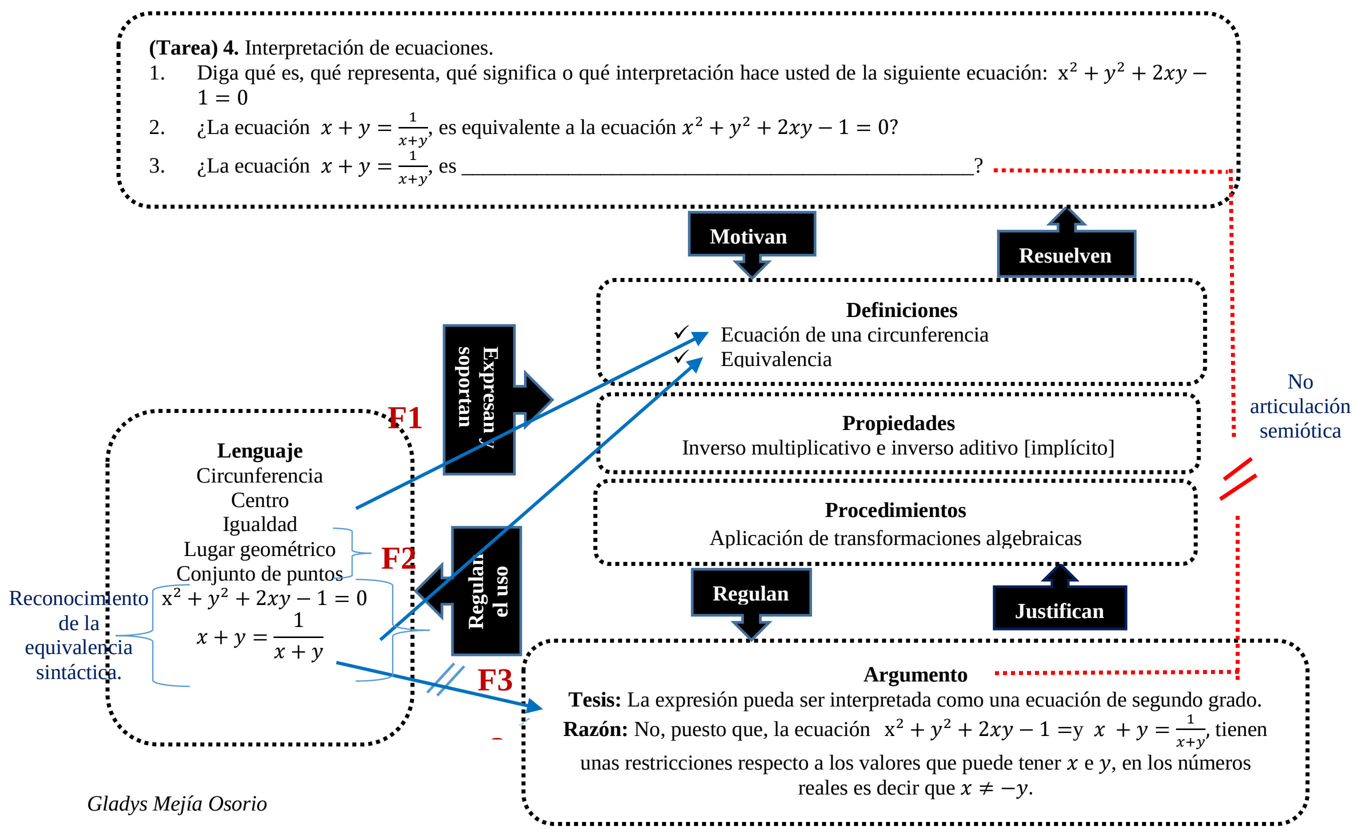
	$y = \frac{1}{x+y}$, $x + y$ debe ser diferente de cero. Entonces en la primera ecuación puede tomar todos los valores x e y, pero en la segunda ecuación no puede tomar todos los valores.

En los fragmentos 2 y 4 el profesor manifiesta que un aspecto que tuvo en cuenta para relacionar inmediatamente la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación cuadrática son las variables, las cuales deben estar elevadas al cuadrado, aspecto propio de las ecuaciones cuadráticas [características]. Pese a admitir en el fragmento 6 que ambas ecuaciones son equivalentes, plantea que $x + y = \frac{1}{x+y}$, , no puede ser asociada con una ecuación de segundo grado, puesto que, $x + y$, debe ser diferente de cero, y no pueden tomar todos los valores. Los argumentos dados tanto en la solución inicial como en la entrevista muestran evidencias de la percepción de la expresión fundamentalmente desde lo icónico asociada a una «*ecuación de segundo grado*» como aquella que tiene exponentes al cuadrado, aunque el profesor reconoce que ambas expresiones son equivalentes la percepción icónica hace que no sean asociadas con el mismo objeto matemático, por ejemplo, en el profesor manifiesta que en la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, las variables pueden tomar todos los valores sin restricción alguna y en la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, $x + y$, debe ser diferente de cero.

6.5.2. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– C

Figura 105

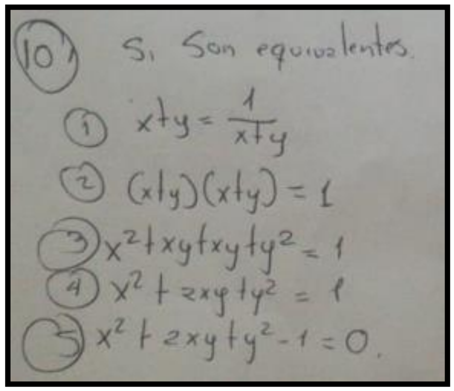
Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -C. Interpretación de Ecuaciones



El profesor [secundaria-C] relaciona la expresión $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{xy}-1=0$, con una «*circunferencia*»; aplica los tratamientos requeridos que le permiten reconocer la equivalencia entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, y, $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, tal y como se muestra en la figura 106, que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 106

¿$x+y=\frac{1}{x+y}$, es Equivalente a la Ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$? −Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-C



Pese a reconocer la igualdad entre ambas ecuaciones el profesor no admite que la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, también puede ser interpretada como una circunferencia, en tanto, la ecuación tiene unas restricciones en el dominio respecto a los valores que puede tomar x e y, es decir, que $x\neq -y$. Frente a las funciones semióticas, establece dos: la primera, entre el antecedente «*la ecuación* $x^2+y^2+2xy-1=0$» y el consecuente «*una circunferencia*»; y entre el antecedente « $x^2+y^2+2xy-1=x+y=\frac{1}{x+y}$» y el consecuente «*ecuaciones equivalentes*». El profesor corrobora la equivalencia entre ambas expresiones [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto semántico la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, no puede ser interpretada como una «*circunferencia*», puesto que, el dominio en ambas expresiones no es el mismo; la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones, por ejemplo, $x+y\neq 0$ [no equivalencia sintáctica]. Aspecto que fue ampliado en el intervalo $[11{:}44-15{:}46]$ de la entrevista desarrollada al profesor.

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[11{:}44-12{:}36]$	Entrevistadora	1	Finalmente hablemos de la última pregunta que indaga por la interpretación que el profesor asigna a la ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$, si esta ecuación es equivalente a la expresión expresiones $\boldsymbol{x+y}=\frac{\mathbf{1}}{x+y}$, y si esta corresponde a la interpretación dada a la ecuación inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, corresponde a una circunferencia.

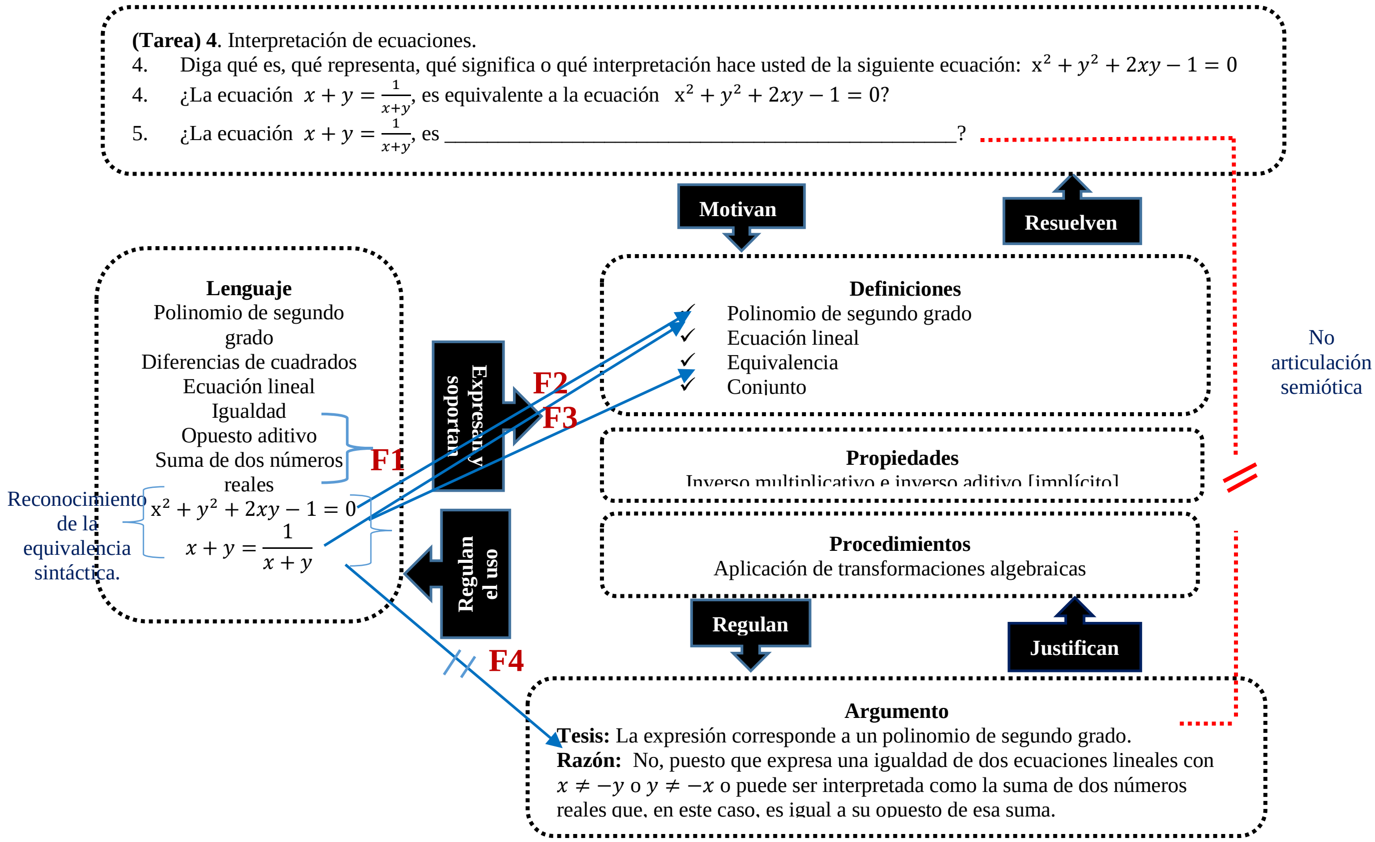
[12: 36 – 13: 44]	Secundaria-C	2	Bueno yo me centré en la forma de la ecuación específicamente las variables x e y, que están al cuadrado y dije eso debe ser [...] tiene cara de ser la ecuación de la circunferencia.
[13: 44 – 14: 06]	Entrevistadora	3	Me gustaría que me explicara cómo se dio cuenta que pese, de ser expresiones equivalentes las ecuaciones, la expresión $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, no corresponde a una circunferencia.
[14: 06 – 15: 46]	Secundaria-C	4	Porque la expresión, $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, no puede tomar todos los valores como la ecuación inicial, en esta expresión la x e y, no pueden tomar todos los valores porque existe un hueco y x debe ser diferente de $-y$. Además $x + y$ debe ser diferente de cero.

En el fragmento 2, el profesor alude que en la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, las variables están al cuadrado, *«tiene cara»* de una circunferencia. Tanto en la solución inicial como en la entrevista admite que ambas ecuaciones son equivalentes [sintácticamente], pero afirma que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde a una circunferencia, puesto que, en esta segunda expresión la x e y, no puede tomar todos los valores, debido que, $x + y$, debe ser diferente de cero. Estos argumentos dejan en evidencia que en el razonamiento realizado por el profesor prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a un *«circunferencia»*, a pesar de comprobar la equivalencia entre ambas expresiones [equivalencia sintáctica] tanto las variables como los valores que toman el dominio en la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$,son aspectos fundamentales para *«ver»* las expresiones como representaciones de dos objetos matemáticos diferentes [equivalencia semántica].

6.5.3. Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria– D

Figura 107

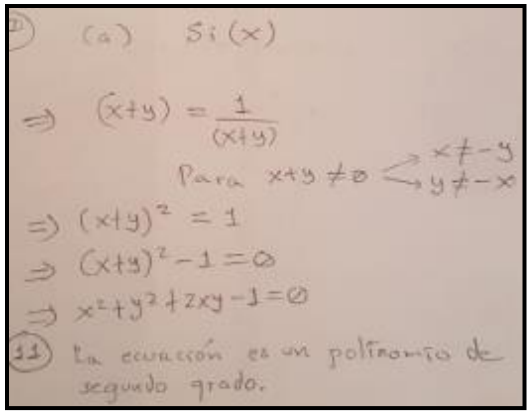
Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -D. Interpretación de Ecuaciones



El profesor [Secundaria-D] relaciona la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, con un polinomio de segundo grado que al ser factorizado representa una diferencia de cuadrados; aplica una serie de procedimientos que le permite reconocer y verificar la equivalencia entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, y, $x+y=\frac{1}{x+y}$, tal y como se muestra en la figura 108, que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 108

Qué Representa, Qué Significa o Qué Interpretación Hace de la Ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ – Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-D



Aunque el profesor reconoce que las expresiones son iguales, desde el punto de vista **sintáctico**, no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, pueda ser interpretada como un polinomio de segundo grado, puesto que, ésta expresa una igualdad de dos ecuaciones lineales o la suma de dos números reales que, en este caso, es igual al opuesto de esa suma. con unas restricciones en su dominio como $x \neq -y$ o $y \neq -x$. Frente a las funciones semióticas el profesor establece tres; la primera, entre el antecedente «*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$» y el consecuente «*un polinomio de segundo grado*»; la segunda, entre el antecedente «*la ecuación* $x + y = \frac{1}{x+y}$» y el consecuente «*una igualdad de dos ecuaciones lineales*»; y la tercera, entre el antecedente « $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = x + y = \frac{1}{x+y}$» y el consecuente «*son ecuaciones equivalentes*». La solución realizada por el profesor muestra que la aplicación de transformaciones algebraicas permite admitir la equivalencia entre ambas ecuaciones [equivalencia sintáctica], pero desde el aspecto **semántico** la $x + y = \frac{1}{x+y}$, no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, puesto que, la expresión representa una igualdad de dos ecuaciones lineales o la suma de dos números reales que, en este caso, es igual a su opuesto de esa suma. Aspecto que fue ampliado en el fragmento $[16{:}19 - 23{:}49]$ de la entrevista que fue desarrollada al profesor:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[16{:}19 - 17{:}49]$	Entrevistadora	1	Por último, me gustaría que habláramos un poco de la pregunta que indaga por la interpretación asigna a la ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, si esta ecuación es equivalente a la expresión expresiones $x + y = \frac{1}{x+y}$, y si esta corresponde a la interpretación dada inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, corresponde a un polinomio de segundo grado. [La investigadora muestra las respuestas dadas por el profesor a la tarea]

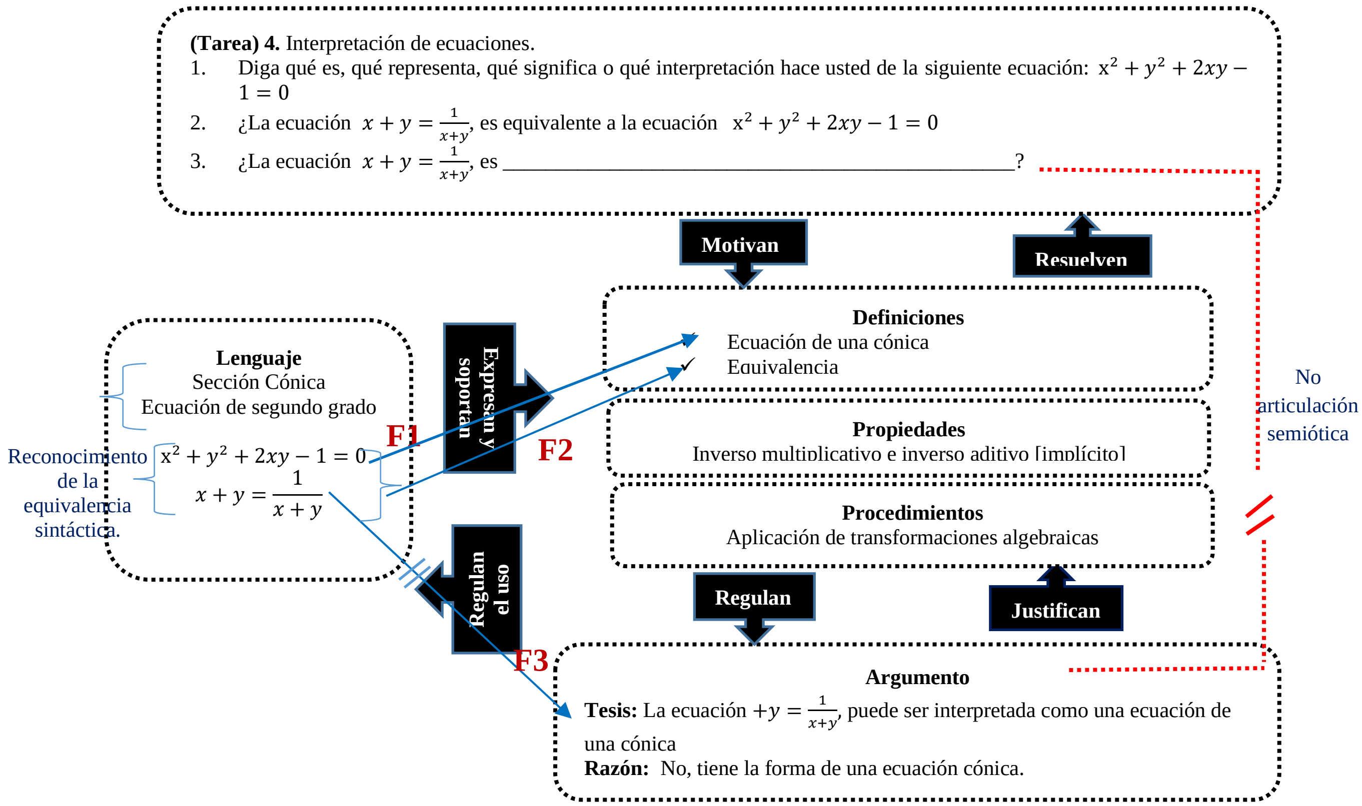
$[17{:}49 - 18{:}56]$	Secundaria-D	2	Bueno es una ecuación que uno maneja mucho con los estudiantes y a simple vista es un polinomio de segundo grado.
$[18{:}56 - 19{:}18]$	Entrevistadora	3	Qué o cuáles elementos tuvo en cuenta para asociarla directamente con un polinomio de segundo grado.
$[19{:}18 - 20{:}39$	Secundaria-D	4	Como las variables de un polinomio de segundo grado deben estar elevadas al cuadrado y como en la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, las variables x e y, las variables se encuentran al cuadrado corresponde a una ecuación de segundo grado.
$[20{:}39 - 22{:}01$	Entrevistadora	5	Y ahora me gustaría que me explicara un poco cómo se dio cuenta que las ecuaciones $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, pese a ser expresiones equivalentes, $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x+y}}$, no corresponde a un polinomio de segundo grado.
$[22{:}01 - 23{:}49$	Secundaria-D	6	Porque en la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ las variables están elevadas a uno y representa la suma de dos números reales $[x + y]$ que es igual a su opuesto lineal, entonces al hacer la gráfica de cada una serían dos, como rectas, por decirlo así dos rectas porque son ecuaciones lineales.

Tanto en la solución dada inicialmente como en la entrevista el profesor ratifica nuevamente que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, corresponde a un polinomio de segundo grado en tanto, tienen las variables al cuadrado tal y como alude en los fragmentos 2 y 4. Aunque el profesor admite que ambas ecuaciones son equivalentes, la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde a un polinomio de segundo grado, puesto que, al realizar la gráfica de esta ecuación se tiene dos rectas como manifiesta en el fragmento 6. Los argumentos dados dejan en evidencia que para el profesor prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a un «*polinomio de segundo grado*» y que se caracteriza por tener las variables elevadas al cuadrado, a pesar de comprobar la equivalencia sintáctica, las variables influyen para ver las expresiones como dos objetos matemáticos diferentes [no reconoce la equivalencia semántica].

6.5.4. Configuración Cognitiva Activada por la Profesora de Secundaria– F

Figura 109

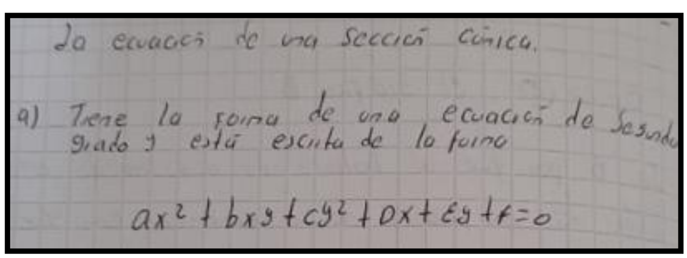
Configuración Cognitiva Activada por el Profesor de Secundaria -F. Interpretación de Ecuaciones



El profesor [Secundaria-F] relaciona la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación cónica, dada su forma, tal y como se muestra en la figura 110, que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 110

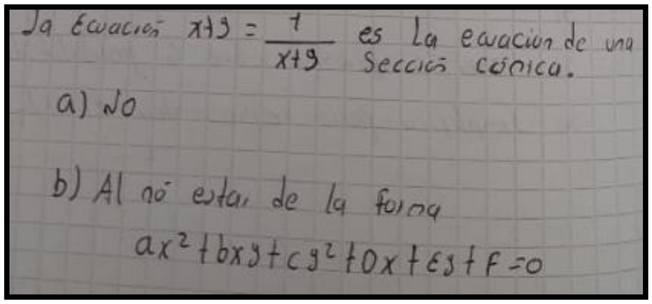
Qué Representa, Qué Significa o Qué Interpretación Hace de la Ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0 -$ Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-F



Por otro lado, el profesor aplica una serie de procedimientos que le permite reconocer la equivalencia entre la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$. Pero no admite que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, pueda ser interpretada como una ecuación de una cónica [segundo grado], puesto que, no tiene la misma forma. Tal y como se muestra en la figura 111, que corresponde a la solución dada por el profesor.

Figura 111

¿La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es……………………….?- Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-F



Con relación a las funciones semióticas el profesor establece dos; la primera, entre el antecedente «*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$,» y el consecuente «*una sección cónica*»; y otra, entre el antecedente «$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{xy} - 1 = \mathrm{x} + \mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$» y el consecuente «*son ecuaciones equivalentes*». Las producciones muestran que la aplicación de transformaciones algebraicas permite reconocer la equivalencia entre ambas ecuaciones [equivalencia sintáctica], pero dotar de sentido y significado la expresión la $x + y = \frac{1}{x+y}$, no puede ser interpretada como una ecuación de segundo grado, puesto que, en esta expresión no tiene la misma forma de una cónica. Aspecto que fue ampliado en el intervalo de tiempo$[12{:}01 - 18{:}34]$ de la entrevista que se desarrolló con el profesor:

Intervalo de tiempo	Interlocutores	N°	Diálogo
$[12{:}01 - 13{:}06]$	Entrevistadora	1	Finalmente hablemos de la última pregunta que indaga por la interpretación asignada a la ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, si esta ecuación es equivalente a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, y si esta última ecuación corresponde a la interpretación dada inicialmente. Me gustaría que me comentara cómo se dio cuenta que la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, corresponde a una sección cónica.
$[13{:}06 - 14{:}45]$	Secundaria-F	2	Bueno apenas vi la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, me di cuenta que tenía la forma general de una cónica que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, y la asocié con una función cónica.
$[14{:}45 - 15{:}13]$	Entrevistadora	3	Me gustaría que me comentara qué elementos tuvo en cuenta para asociar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con la ecuación general de una cónica.

$[15{:}13 - 16{:}23]$	Secundaria-F	4	Quizás por mi formación porque sé que las cónicas tienen esa forma y las variables x e y, deben estar al cuadrado, entonces teniendo en cuenta esos elementos dije que era una función de una cónica.
$[16{:}23 - 17{:}05]$	Entrevistadora	5	Y ahora me gustaría que me explicara un poco cómo se dio cuenta que la ecuación $x + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, no corresponde a una sección cónica pese a que es una ecuación equivalente a $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$.
$[17{:}05 - 18{:}34]$	Secundaria-F	6	Esta pregunta me hizo dudar mucho porque yo hice todo el procedimiento y verifiqué que ambas expresiones son iguales pues al desarrollar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, obtengo $x + y = \frac{1}{x+y}$, y viceversa, pero esta ecuación ya no tiene la forma inicial que al ser factorizada se obtiene la forma de una cónica, pero al ver esta ecuación corresponde a una ecuación de primer grado porque ya sus variables x e y no están al cuadrado.

En el fragmento 2, el profesor manifiesta que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, tiene la forma de una función cónica definida por la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, aspecto que influye para que esta sea asociada con una sección cónica tal y como lo corrobora en el fragmento 4, al expresar que al tener las variables x e y, al cuadrado cumple con la condición de las cónicas. Pese a reconocer que las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{\mathbf{1}}{x+y}$, son equivalentes, esta última ecuación no puede ser asociada con una sección cónica en tanto, las variables dejan de estar al cuadrado, hecho que hace que pierda su forma inicial, tal y como manifiesta en el fragmento 6. Tanto la solución inicial como la entrevista se muestra que para el profesor prima la percepción de la expresión como un ícono asociado a una «*sección cónica*» caracterizada por tener la forma de la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que a su vez las variables x e y, deben estar al cuadrado, pese a la comprobación de la equivalencia desde su aspecto sintáctico las variables influyen para ver en las expresiones dos objetos matemáticos diferente, una sección cónica y una ecuación de primer grado.

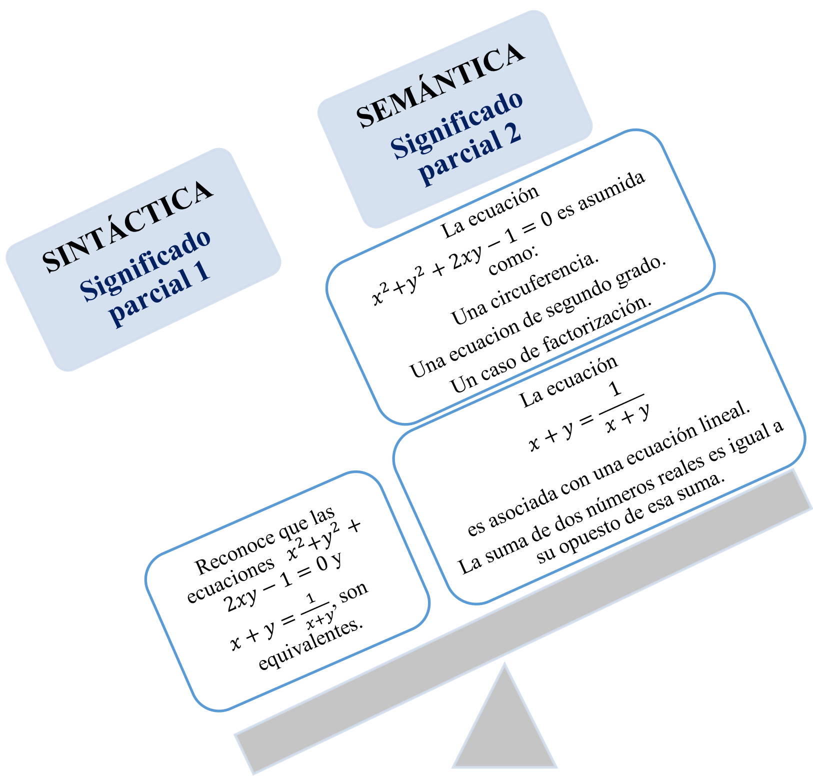
6.5.5. Una síntesis de las Producciones Realizadas

Frente a los resultados obtenidos sobre la interpretación de las ecuaciones $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ y $x + y = \frac{1}{x+y}$, los profesores asignan sentidos en relación a la forma de estas, por ejemplo, la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es relacionada con una circunferencia, una ecuación de segundo grado o un polinomio de segundo grado, etc. La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es asociada con una ecuación lineal o con la suma de dos números reales igual a su opuesto. Frente a esta tarea: 4 profesores que conforman el estudio de caso colectivo, realizan una interpretación a la ecuación $\mathrm{x}^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, demuestran que esta ecuación es equivalente a $x + y = \frac{1}{x+y}$ [equivalencia sintáctica], pero al dotar de sentido y significado la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, esta no coincide con la interpretación asignada inicialmente [equivalencia sintáctica]. Los profesores de secundaria-B, secundaria-C, secundaria-E y secundaria-F, reconocen desde el aspecto **sintáctico** la equivalencia entre las dos ecuaciones, pero desde su aspecto **semántico** los sentidos asignados no se relacionan entre sí, puesto que, las dos ecuaciones son relacionadas con objetos matemáticos diferentes.

En términos de los significados parciales **sintáctico** y **semántico**, los resultados muestran que desde el aspecto **sintáctico**, los profesores aplican determinadas reglas como la factorización, multiplicación de términos etc., procedimientos que les permite comprobar la equivalencia entre ambas expresiones; pero el significado parcial **sintáctico** no es articulado con el significado **semántico**, en tanto, la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, no tiene la misma forma a la ecuación inicial o el dominio en las variables x e y, presentan algunas restricciones como los valores que toman x deben ser diferentes a $-y$ o la suma x e y,debe ser diferente de cero. Aspectos que no posibilito la relación entre sí, entre ambos significados, tal y como se muestra en el siguiente esquema que muestra la no articulación semiótica frente a la tarea.

Figura 112

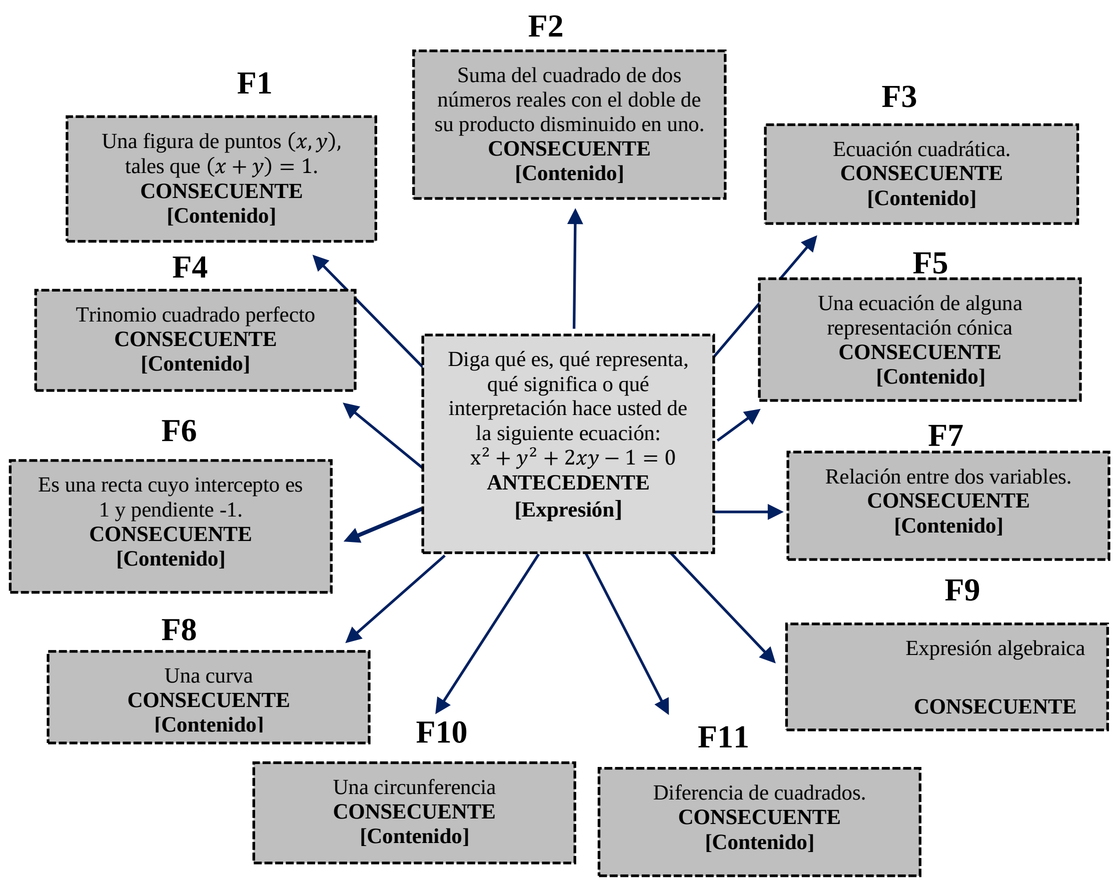
No Articulación de los Significados Parciales Sintáctico y Semántico Sobre la Tarea de Interpretación de Ecuaciones



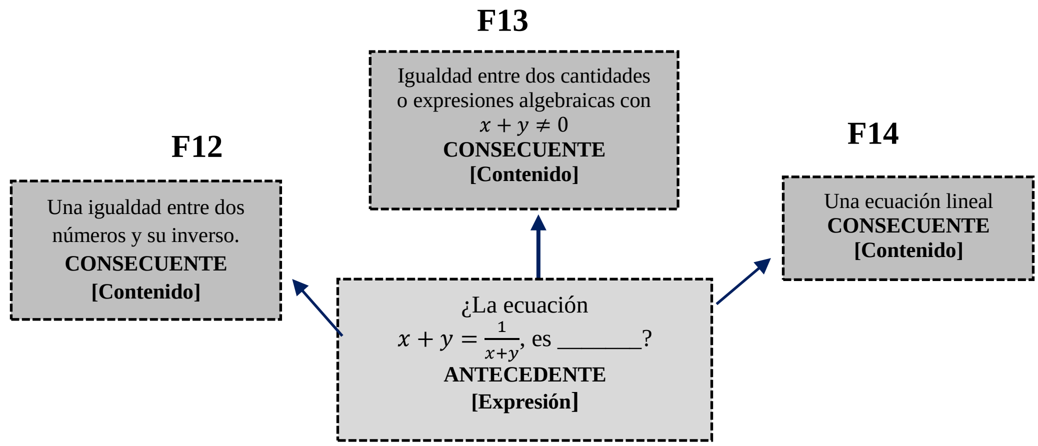
En su aspecto **sintáctico** la aplicación de reglas y procedimientos posibilitan transformar $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, en $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, en su aspecto **semántico**, el contexto posibilita que las ecuaciones adquieran significados que puedan ser relacionados entre sí, y que permiten concluir que las expresiones siguen siendo equivalentes, hecho que pone en evidencia la necesidad articular estos dos significados parciales. Frente a estos dos significados parciales [sintáctico- semántico] que son analizados en las diferentes prácticas que los profesores realizan al otorgar significados a las ecuaciones, así como, en el establecimiento de la equivalencia entre ambas, dejan en evidencia la no articulación semiótica de los significados parciales en el proceso de significación, en tanto, las ecuaciones son asociadas con objetos matemáticos diferentes. Aspecto que permiten construir una serie de funciones semióticas fruto de dichas prácticas y que dejan evidencia las relaciones que los profesores establecen, tal y como se muestra a continuación.

Figura 113

Funciones Semióticas Establecidas por el Grupo de Profesores de Secundaria Frente a la Tarea Sobre Interpretación de Ecuaciones

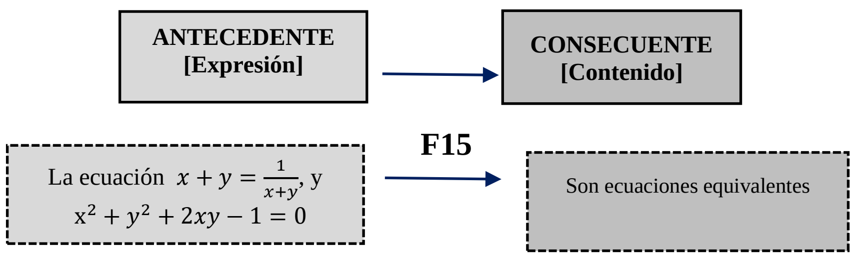


Funciones semióticas que los profesores establecen en la tarea sobre interpretación de ecuaciones. Ítem interpretación de la ecuación
$x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$



Funciones semióticas que los profesores establecen en la tarea sobre interpretación de ecuaciones. Ítem interpretación de la ecuación

$$x + y = \frac{1}{x + y}$$



Funciones semióticas en relación al reconocimiento de la equivalencia entre las ecuaciones.

Las soluciones realizadas por el grupo de profesores permiten identificar 15 funciones semióticas que éstos establecen. En el primer ítem que indaga por la interpretación que los profesores asignan a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, fungiendo como el antecedente de las funciones se identifica los 11 consecuentes; el primera, la función **F1,** «*una figura de puntos* (x, y)*, tales que* $(x + y) = 1$»*;* segundo, la función **F2,** «*suma del cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno*»; tercero, la función **F3,** «*ecuación cuadrática*»; cuarto, la función **F4,** «*trinomio cuadrado perfecto*»; quinto, la función **F5,** «*una ecuación de alguna representación cónica*»; sexto, la función **F6,** «*una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1*»; séptimo, la función **F7,** «*relación entre dos variables*», octavo, la función **F8,** «una curva»; noveno, la función **F9,** «*expresión algebraica*»; décimo, la función **F10,** «*una circunferencia*»; la función **F11** «*una diferencia de cuadrados*». Al asignar significado a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, que funge como antecedente de las funciones se identifican los consecuentes de las funciones **F12,** «*una igualdad entre un número y su inverso*», la función **F13,** «*igualdad entre dos cantidades o expresiones algebraicas con* $x + y \neq 0$» y la función **F14,** «*una ecuación lineal*». Finalmente, la función semiótica **F15,** en el cual los profesores corroboran y reconocen la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones.

6.5.6. Articulación y No Articulación de los Sentidos Asignados a las Ecuaciones $\boldsymbol{x^2+y^2+2xy-1=0}$, *y,* $\boldsymbol{x+y=\frac{1}{x+y}}$*, Mediante una Cadena de Funciones Semióticas*

Los resultados obtenidos permiten evidenciar que de los 32 profesores de secundaria que resolvieron la tarea, 16 establecen tres funciones semióticas que son relacionadas entre sí; la función semiótica **F1**, entre el antecedente «*la expresión* $x^2+y^2+2xy-1=0$*, es*» y el consecuente «*una circunferencia*», «*diferencias de cuadrados*», «*un caso de factorización*», « *una ecuación de segundo grado*», «*una función de segundo grado*», «*una recta cuyo intercepto es 1 y pendiente -1*», «*polinomio de dos variables*», «*una cónica*», «*una expresión algebraica*», «*cuadrado de la suma de dos números reales menos uno*», «*figura de puntos* (x,y)*, tales que* $(x+y)=1$», interpretaciones que dejan en evidencia el reconocimiento icónico de las expresiones. Corroboraron que las ecuaciones $x^2+y^2+2xy-1=0$ y $x+y=\frac{1}{x+y}$, son equivalentes, aspecto que fue fundamental para asignar sentido a la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, en relación a la identificación y verificaron la *equivalencia sintáctica* de las expresiones, aspecto que, permitió relacionar los dos sentidos entre sí, y generar una cadena de funciones semióticas entre las funciones **F1, F2** y **F3.** Tal y como se muestra en el siguiente esquema que corresponde a la cadena de funciones semióticas que los profesores establecen.

Figura 114

Articulación Semiótica Mediante una Cadena de Funciones Semióticas Establecidas en la Tarea Sobre interpretación de Ecuaciones

FUNCIÓN SEMIÓTICA F3	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
La expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, es	Una circunferencia

Relación entre sí de los dos sentidos

FUNCIÓN SEMIÓTICA F2	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
La expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$, es equivalente a $x+y=\frac{1}{x+y}$	Las expresiones $x+y=\frac{1}{x+y}$, y $x^2+y^2+2xy-1=0$ son equivalentes

Sentido 2

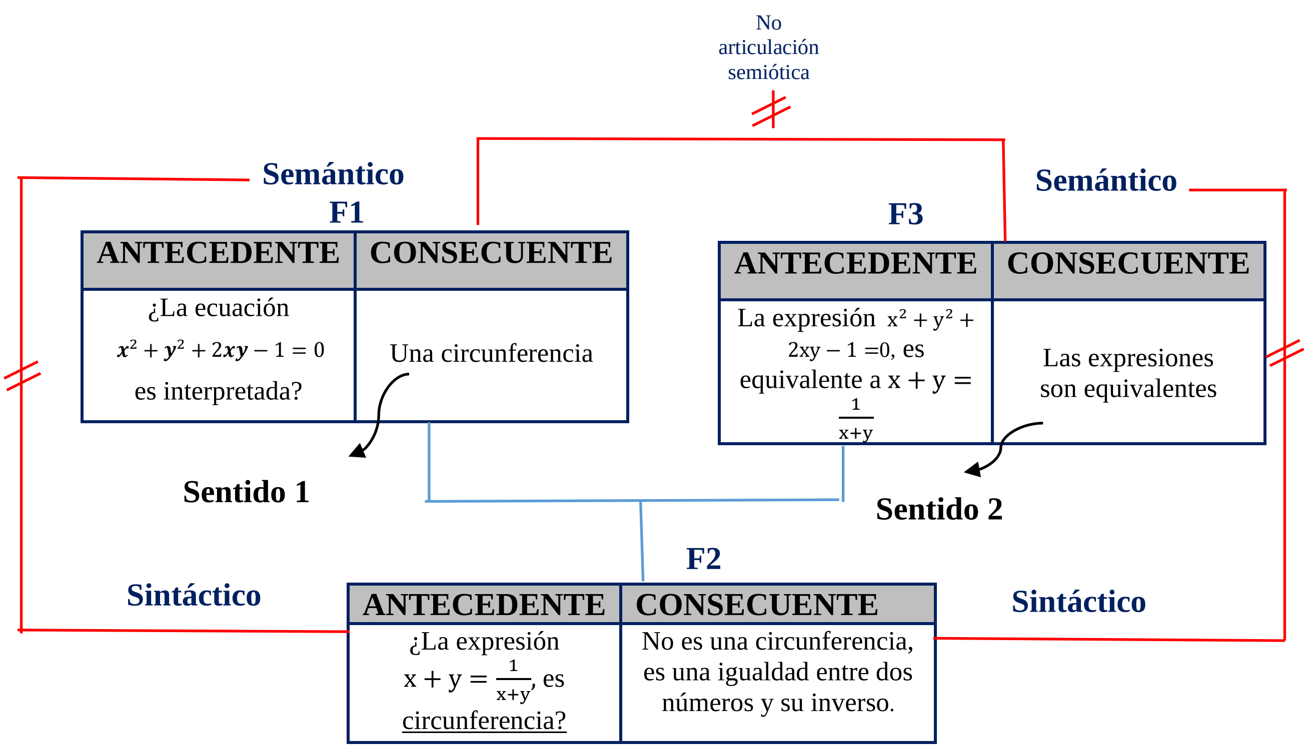
FUNCIÓN SEMIÓTICA F1	
ANTECEDENTE	**CONSECUENTE**
¿La ecuación $\boldsymbol{x^2+y^2+2xy}-1=0$ es interpretada?	Es una circunferencia.

Sentido1

Por otra parte, los resultados muestran que 10 profesores, reconocen la equivalencia entre la $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, pero la interpretación otorgada a esta no coincide con la interpretación asignada en la primera ecuación, marcadas, por un lado, en la forma de la ecuación [las variables x e y, no se encuentran elevadas al cuadro], y por otro lado, asociada en algunos casos con las características de una ecuación racional, definida como el cociente de dos polinomios cuyo denominador tiene un grado de por lo menos 1 [existencia de una variable en el denominador], aspecto que se puede evidenciar en argumentos en el cual, hacen énfasis en el dominio de la función, [$x + y$, debe ser diferente de cero]. Tal y como se muestra en el siguiente

Figura 115

La No Articulación Semiótica Mediante una Cadena Interrumpida de Funciones Semióticas en la Tarea Sobre Interpretación de Ecuaciones



El esquema muestra que los profesores establecen las funciones semióticas **F1** y **F2**, relacionadas con el significado asignado a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y el reconocimiento de la *equivalencia sintáctica* con la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, respectivamente. Para verificar dicha equivalencia los profesores recurren a las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una ecuación a partir de la otra [usando propiedades de los números reales], como es el caso, en que a partir de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, obtienen $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o viceversa, que permite reconocer **sintácticamente** la equivalencia de ambas ecuaciones.

Argumentan que **semánticamente** la expresión $x + \mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x+y}}$, no corresponde con la interpretación asignada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, es decir, no logra relacionar los sentidos 1 y 2. En términos de la cadena de funciones semióticas esta se ve interrumpida por la imposibilidad de relacionar la función semiótica **F3** con las funciones **F1** y **F2**. Así mismo 6 profesores no son ubicados en este esquema, en tanto, expresan no saber la interpretación de las ecuaciones, o el, no reconocimiento de la equivalencia de las dos expresiones.

6.5.7. Similitud y Diferencias Entre las Dificultades que Encuentran los Estudiantes y los Profesores de Matemáticas para Articular Sentidos Asignados a Representaciones Semióticas Obtenidas Mediante Tratamiento

Rojas (2012) presenta evidencias que los estudiantes asocian la expresión [ecuación] $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una circunferencia,21 aplican a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, las transformaciones de tratamiento que les permite obtener la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o viceversa, y con ello comprueban e identifican que ambas expresiones son equivalentes **sintácticamente.** El autor resalta que para estos estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la *«circunferencia»*, en tanto, la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, tiene las variables al cuadrado, interpretación que está asociada a dicha característica de las funciones cónicas, así mismo, reporto que algunos estudiantes manifiestan que la ecuación $x + y = \frac{1}{\mathrm{x+y}}$, no puede ser interpretada como una circunferencia, en tanto, las dos variables se encuentran al cuadrado.

Rojas (2012) señala que algunos estudiantes establecen dos funciones semióticas que se relaciona entre sí; la primera, entre el antecedente «*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$» y el consecuente «*una circunferencia*»; y la segunda, entre el antecedente «*la ecuación* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, *es equivalente a* $x + y = \frac{1}{x+y}$» y el consecuente «*ambas ecuaciones son equivalentes*». Así mismo, los estudiantes establecen una tercera función semiótica **F3,** cuyo antecedente radica en justificar sí la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una circunferencia y el consecuente «*no es una circunferencia*», que no logra ser relacionada con las funciones semióticas **F1** y **F2**. Al igual que los resultados mostrados por este autor, en el presente estudio los profesores establecen dos funciones semióticas en relación al mismo objeto

[21] Como se señaló en un inicio la ecuación $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{xy} - 1 = 0$, corresponde a una «cónica degenerada» [dos rectas paralelas]. Para efectos del análisis no resulta relevante si dicha ecuación es interpretada como una circunferencia, una ecuación cuadrática o un polinomio, etc.

matemático, como es la interpretación asignada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y la igualdad con la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, que se relacionan entre sí.

En el trabajo realizado por los profesores, respecto a la interpretación de la ecuación $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{xy} - 1 = 0$, se encontró que ellos asocian esta expresión [ecuación] con un caso de factorización [específicamente con un trinomio cuadrado perfecto o una diferencia de cuadrados], una ecuación de segundo grado, una cónica [específicamente con una circunferencia], una curva, el cuadrado de dos números reales con el doble de su producto disminuido en uno o el cuadrado de la suma de dos números reales, relación entre dos variables, polinomio de dos variables [una expresión algebraica], y una figura de dos puntos (x, y) tales que $(\mathrm{x} + \mathrm{y}) = 1$; interpretaciones asociadas con la percepción «forma» de las expresiones [desde lo icónico], por ejemplo, las variables al cuadrado, es un indicador para decidir que: la expresión corresponde a una *«circunferencia»*, *«una ecuación de segundo grado»* etc., resultados que muestran, que esta percepción icónica influye para que la expresión sea asociada con un objeto matemático que tenga dichas características de «forma». Aunque los profesores relacionan la ecuación $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{xy} - 1 = 0$, con diferentes referencias, y en el trabajo realizado por los estudiantes recurren a una o dos referencias [circunferencia-parábola]; la mirada icónica de las expresiones, demarcan el sentido asignado a ésta, puesto que, para los estudiantes como profesores prima la forma [exponente de las variables].

Por otro lado, en el trabajo realizado por los profesores la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es asociada en relación a dos características: por un lado, con una ecuación lineal o una suma de dos números reales igual a su opuesto, debido que, la expresión no tiene sus variables al cuadrado, como en el caso de la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$; por otro lado, algunos profesores asocian la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, en relación a las características que tienen las ecuaciones racionales, definida como el cociente de polinomios, en que su, denominador tiene un grado de por lo menos 1, esto significa que, debe existir una variable en el denominador, y por tanto $x + y$, debe ser diferente de cero, ya que, no se encuentra definida la división entre cero. Las soluciones dadas por el grupo de profesores dejan en evidencia la similitud entre las respuestas dadas por los estudiantes al abordar la misma tarea, en tanto, prima la percepción icónica de estas.

6.5.8. Conexiones Matemáticas y Articulación Semiótica en la Tarea de Interpretación sobre Interpretación de Ecuaciones

Frente a las conexiones que los profesores establecen en el proceso de solución no es relevante que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una circunferencia, una ecuación de segundo grado, un trinomio cuadrado perfecto, etc., solo se ha centrado la atención en aquellos profesores que reconocen la *equivalencia sintáctica* entre ambas expresiones, pero relacionan la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, con otro objeto matemático. Aclarado este aspecto los profesores pueden establecer las siguientes conexiones matemáticas:

a) ***Representaciones diferentes:*** se identifica dos registros semióticos en la interpretación de ecuaciones: lenguaje natural, lenguaje simbólico [$x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$]

b) ***Procedimiento*****:** se ubican aquellos profesores que factorizan la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o, realizan el procedimiento inverso a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$.

c) ***Significado:*** los profesores asignan una interpretación a las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$.

d) ***Característica****:* en esta tipología se ubican aquellos profesores que tienen en cuenta las características particulares para asignar su interpretación, por ejemplo, la expresión las variables en las ecuaciones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$,o, el dominio de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$.

e) ***Implicación****:* esta conexión hace referencia a aquellos profesores que establecen que las expresiones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$, son equivalentes desde lo **sintáctico** que implica que las ecuaciones tomen el mismo valor contextual [semántico].

f) ***Reversibilidad****:* en esta tipología hace referencia a los profesores quienes relacionan la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una circunferencia, una ecuación de segundo grado, un trinomio cuadrado perfecto etc., admiten que la expresión es equivalente a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, por tanto, esta última corresponde a una circunferencia, una ecuación de segundo grado, un trinomio cuadrado perfecto etc., y viceversa.

A continuación, se sintetiza las producciones dadas por los profesores de secundaria B-C-E-D-E-F.

Tabla 38

Frecuencia con que Emergieron las Conexiones

Conexión	P-A	P-B	P-C	P-D	P-E	S-A	S-B	S-C	S-E	S-F	*f*
CI	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
RD	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
PR	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
IM	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
PT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SG	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
CT	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10
RV	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
MT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

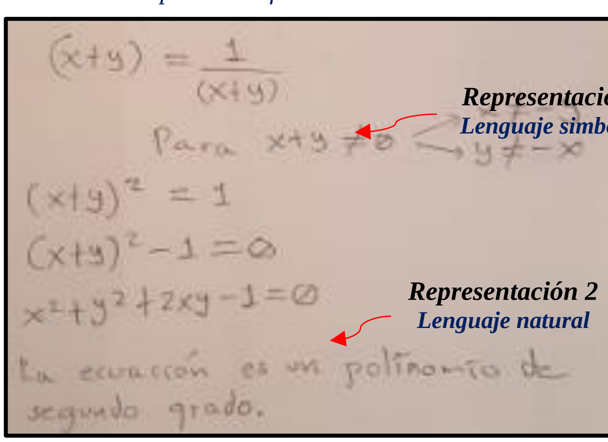
Nota

CI=Conexiones orientadas a la instrucción, RD=Representaciones diferentes, PR= Procedimiento, IM=Implicación, PT= Parte-todo, SG= Significado, CT=Característica, RV= Reversibilidad, MT= Metafórica, *f*= Frecuencia, P= profesor de primaria, S= profesor de secundaria, • = Presencia de la conexión, — = No presencia de la conexión, — = La situación no posibilita que emerja la conexión.

Los 5 profesores de secundaria que conforman el estudio de caso colectivo movilizan la conexión de representaciones diferentes. Por un lado, el lenguaje simbólico que permite realizar los tratamientos respectivos y concluir que las expresiones $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, y, $x + y = \frac{1}{x+y}$ son equivalentes, por otro lado, la interpretación que realiza a estas expresiones en lenguaje natural.

Figura 116

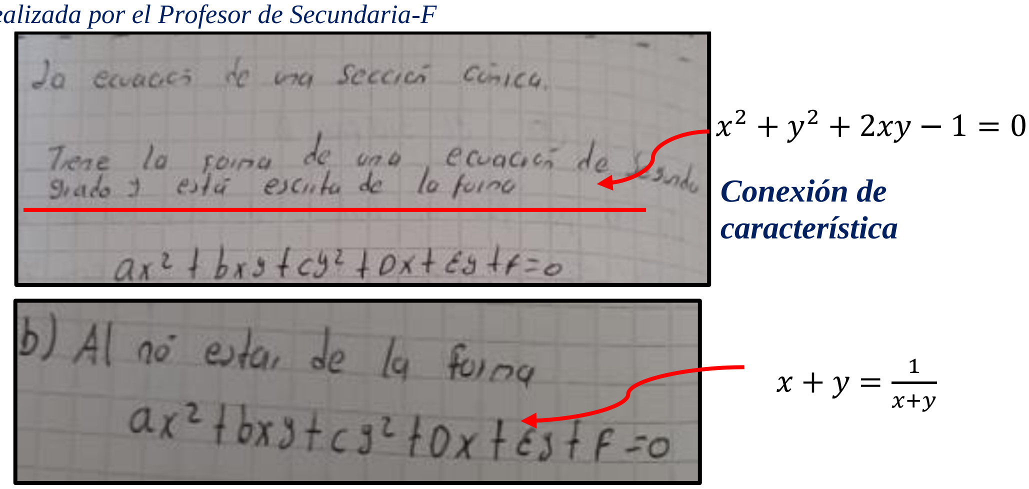
Tarea de interpretación de Ecuaciones-Conexión de Representaciones. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-D



En esta tarea los profesores realizan los procedimientos respectivos que les permitió corroborar la *equivalencia sintáctica* de las ecuaciones. En este caso a partir de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ obtienen, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o, viceversa. Así mismo los profesores relacionan la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con una ecuación de segundo grado, una circunferencia, un polinomio de segundo grado, una sección cónica, etc., significado que es asignado en relación a las características de las expresiones como las variables al cuadrado de la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, o, el dominio de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$. Tal y como se evidencia en la siguiente solución dada por la profesora de secundaria – F.

Figura 117

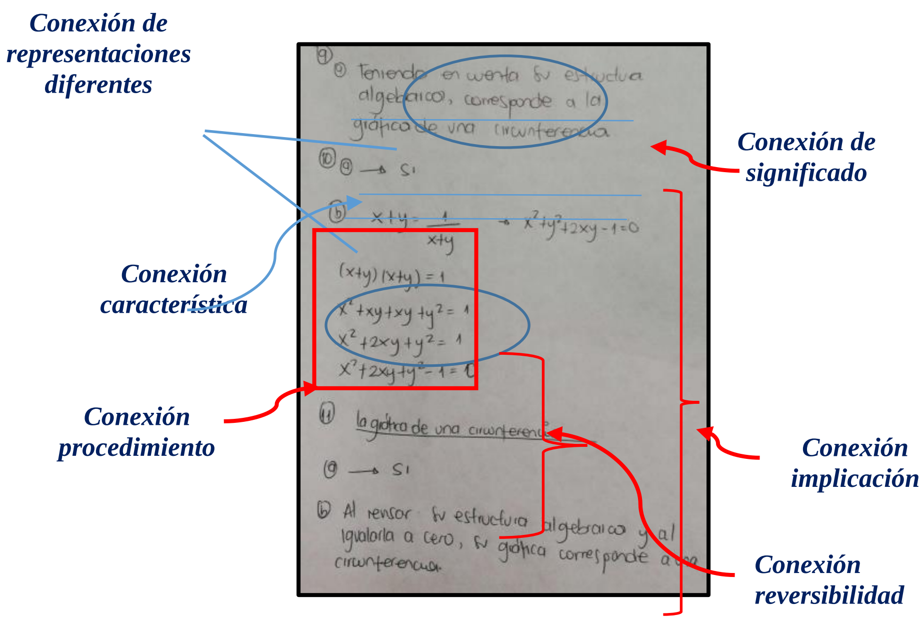
Tarea de interpretación de Ecuaciones-Conexión de Característica. Producción Realizada por el Profesor de Secundaria-F



Los resultados muestran que los 32 profesores, 6 de estos no realizan correctamente los procedimientos y 10 establecen la equivalencia entre las ecuaciones. Estos profesores establecen 6 conexiones que emergen en la solución de la tarea. Tal y como se muestra en la solución realizada por el profesor de secundaria-28.

Figura 118

Tarea de interpretación de Ecuaciones-Conexiones Matemáticas. Producción realizada por el Profesor de Secundaria-28



En la solución se evidencia que el profesor reconoce que ambas ecuaciones son equivalentes desde su aspecto **sintáctico,** y la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, puede ser interpretada como una circunferencia y viceversa, desde su aspecto **semántico.**

CAPÍTULO 7
REFLEXIONES FRENTE A LA NO ARTICULACIÓN SEMIÓTICA

En este trabajo nos planteamos dos objetivos: por un lado documentar las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático obtenidas mediante transformaciones de tratamiento; y, por otro lado, establecer similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los profesores con los resultados documentados en la literatura frente a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas. Para alcanzar los objetivos y dar respuesta a la pregunta de investigación se tomó el trabajo realizado por 11 profesores de matemáticas [5 de primaria-6 de secundaria], quienes conformaron el estudio de caso colectivo de esta investigación, fruto de las producciones realizadas frente a las tareas propuestas a 64 profesores [32 de primaria y 32 de secundaria] quienes no establecieron una **articulación de sentidos** o **una articulación semiótica** mínimo en tres tareas de las cuatro planteadas para cada uno de los grupos de profesores. El trabajo realizado por el grupo de profesores puso en evidencia dificultades que encuentran algunos de ellos para articular los sentidos asignados a expresiones matemáticas obtenidas mediante tratamiento. En el capítulo 6 se presentó evidencias que, si bien el grupo de los 11 profesores reconocen la *equivalencia sintáctica* entre dos o más expresiones dadas, por ejemplo, a partir de una de las expresiones, realizan las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener la otra expresión, no siempre logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones y son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes [equivalencia semántica]. Estos resultados corroboran que no solo las transformaciones de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino que estas dificultades son asociadas con las transformaciones de tratamiento (D´Amore 2006b; Santi, 2011; Rojas 2012).

En tanto nos propusimos establecer similitudes y diferencias entre las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas con las dificultades que encuentran los estudiantes para *articular los sentidos* asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento; se parte de los hallazgos reportados por Rojas (2012) quien concentra en cuatro grupos las dificultades que encuentran los estudiantes: **reconocimiento icónico de las expresiones; anclaje a situaciones dadas; interacción** y **cambios en la interpretación;** y **dificultades con el lenguaje matemático**. Dado que en este trabajo la población de estudio trabajo de manera individual y el estudio recae sobre los profesores de matemáticas no se considera la interacción y cambios en la interpretación, en tanto, su naturaleza cambia. Se tienen como referencia para el análisis de las soluciones dadas por los profesores los siguientes grupos: **reconocimiento icónico de las expresiones; anclaje a situaciones dadas;** y **dificultades con el lenguaje matemático,** con la convicción que estos criterios permiten concentrar las dificultades que encuentran los profesores, así como, identificar similitudes y diferencias. Para encontrar algunas similitudes y diferencias en los argumentos dados por los profesores se propusieron tres tareas, que fueron trabajadas por los estudiantes y que son reportadas por Rojas (2012): la tarea del triple de un número, que en este estudio se ha denominado interpretación de expresiones algebraicas; cálculo de la probabilidad e interpretación de la circunferencia, que ha sido denominada interpretación de ecuaciones. Igualmente dado que en Colombia los profesores de primaria no cuentan con una formación en educación matemática se clasificó la población en dos grupos de estudio [primaria y secundaria] así, algunas tareas fueron aplicadas a los dos grupos de profesores, como es el caso de las tareas sobre interpretación de expresiones, cálculo de la probabilidad e interpretación de gráficos estadísticos, esta última fue diseñada para el caso particular de esta investigación, debido que, por un lado, se quiso corroborar si las dificultades que encuentran los profesores para articular los sentidos asignados a expresiones en dominios algebraicos y probabilísticos persisten en otros contextos como el estadístico, y por otro lado, es usual definir el tratamiento desde lo numérico o algebraico pero en otro dominio matemático la conceptualización no es tarea fácil, como en este caso [interpretación de gráficos estadísticos]. Específicamente, con el grupo de profesores de primaria se aplicó la tarea sobre la secuencia de números cuadrados y para secundaria la tarea sobre interpretación de ecuaciones.

Frente a las tareas propuesta se identifican similitudes entre las dificultades que encuentran los profesores con las reportadas por Rojas (2012) sobre el trabajo que realizan los estudiantes al resolver este tipo de tareas. Por ejemplo, con relación a la situación de interpretación de expresiones, el autor reporta que, algunos estudiantes asignan sentido a las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, basados en un ***reconocimiento icónico*** de las mismas; en tanto, la forma de estas determina la interpretación realizada; específicamente centran la atención en la forma de las expresiones y los procesos asociados a cada expresión. El autor reporta que algunos estudiantes logran reconocer una equivalencia entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, asignando valores específicos de n [casos particulares] pero no logran articular los sentidos asignados a cada expresión. Inicialmente interpretan la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como una suma de tres números consecutivos, pero no como 3 veces un número, puesto que, argumentan que *«el triple de un número no es así, sino [que] esa es la suma de tres números consecutivos, no la suma tres veces un mismo número»* (Rojas, 2012, p. 117).Otros argumentos dados por los estudiantes muestran que estos centran la mirada en la forma de las expresiones y los procesos asociados con cada una: *«porque son tres términos diferentes [se refiere a los términos $n-1$; n; $n+1$], para ser el triple de un término tienen que ser iguales, pues ahí no»*, *«porque esta expresión suma, restas, paréntesis, números agregados y las [enes]»* (Rojas, 2012, p. 117). Los resultados también evidencian que en su mayoría los estudiantes reconocen que de la expresión $(n-1)+n+$

$(n+1)$, se obtiene como resultado la expresión $3n$, pero la primera expresión no es el triple de un número, puesto que, se suma números diferentes; en cambio $3n$, o el triple de n, se relacionan tres términos semejantes o iguales, es decir, cada una de estas expresiones incorpora procedimientos que las diferencian. En conclusión, los estudiantes argumentan que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser el triple de un número, pues si bien hay 3 términos, éstos son todos diferentes, tal y como se evidencia en el siguiente argumento dado por un estudiante «*para que sea el triple de un número, los tres términos tienen que ser iguales o semejantes y ahí no muestra eso; ahí muestra que es una operación de tres, pero … no, no creo sea el triple*» (Rojas, 2012, p. 118). Estos resultados muestran que: para algunos estudiantes la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ incorpora sumas, restas, números «*agregados*» y paréntesis; mientras en la expresión $3n$, sólo incluye una multiplicación o se suman tres números iguales. Argumentos similares a los dados por los profesores, que son presentados en el capítulo 6 que corresponde a los análisis de los datos de investigación y que permiten concluir que la asignación de sentidos asignados por los profesores también están asociadas con la forma de cada una de las expresiones, a su vez en las soluciones dadas se evidencia un hecho cultural en relación a la asignación de sentidos, en tanto, este es asignado en correspondencia con el reconocimiento icónico de las expresiones, tal y como se describe a continuación.

7.1. Reconocimiento Icónico de las Expresiones. En el Capítulo 6 se muestran evidencias que algunos profesores asignan sentido a las expresiones basados en un *reconocimiento icónico* de éstas, en tanto, su forma o características determinan la interpretación realizada. Los resultados señalan que algunos profesores establecen la *equivalencia sintáctica* de las expresiones, pero al asignar sentido y significado a dichas expresiones son relacionadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Las soluciones dadas por los profesores y las transcripciones que corresponden a las entrevistas realizadas, dejan en evidencia dicho *reconocimiento icónico*, que posibilita clasificarlas en tres subgrupos que, a su vez, reflejan tres posibles causas que impiden que los profesores relacionen los sentidos asignados a cada expresión entre sí:

a) ***Términos Semejantes y Diferentes*****:** este subgrupo se ubican las soluciones dados por los profesores, primaria-A, primaria-B, primaria-C, primaria-D, primaria-E, secundaria-A, secundaria-C, quienes reconocen la equivalencia sintáctica entre las expresiones $(n-1)+n+(n+1)$ y $3n$, aplican las transformaciones de tratamientos que permite verificar la igualdad de las expresiones [aplicación de leyes y la evaluación en casos particulares, valores específicos de n], pero no logran relacionar los sentidos asignados a cada expresión desde el aspecto **semántico**, en tanto, los números son de diferente naturaleza. Por ejemplo, para los profesores la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ corresponde a una suma de tres números consecutivos diferentes, algunos argumentan que, en ésta expresión «… *la n no es el mismo número como sucede con el triple de un número*», « $(n-1) \neq n \neq (n+1)$ en la expresión se tiene un número igual tres veces y en la segunda, el número es diferente», «…*se suma tres términos que no son iguales o equivalentes que surge de la representación de tres números* *consecutivos*», «*… se están sumando el antecesor, el número y el sucesor», «la n toma valores diferentes y no siempre es el triple de un número*», «*las dos expresiones son equivalentes, pero representa situaciones diferentes… se suma tres términos consecutivos*» o «*la interpretación que se le da a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es la suma de tres números consecutivos*». Los resultados señalan que los profesores reconocen la equivalencia sintáctica pero no sucede lo mismo desde su perspectiva **semántica,** puesto que, en la expresión $3n$ se suman números iguales, como se manifiesta en el argumento dado por la profesora de primaria-D «*…si son expresiones equivalentes pero una cosa es tener un número completico como en la expresión $3n$ que es un número multiplicado por tres o la suma de tres números iguales y en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es la suma de tres números diferentes, el número, el sucesor y el antecesor*», para profundizar en dicho aspecto de números completos, la profesora toma un caso particular «*…en el caso de cuatro en la expresión $3n$, seria 12 y en la segunda expresión se tendría, 3+ 4+ 5, que es igual a 12. Aunque son los mismos resultados son situaciones diferentes*». En conclusión, los profesores consideran que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no puede ser interpretada como el triple de un número, puesto que, los tres términos son diferentes; reconocen que la expresión $3n$ es el resultado de realizar las operaciones planteadas en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ algunos profesores manifiestan que para que la expresión pueda ser interpretada como el triple de un número, los tres términos deben ser iguales o semejantes y en ésta los tres son diferentes; razonamientos que corroboran los hallazgos reportados por Rojas (2012) con estudiantes al resolver esta misma situación.

b) ***No Relación Entre la Multiplicación y la Suma:*** en este subgrupo se encuentra las respuestas dadas por la profesora de secundaria-E. Expresa que: dado que en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se adiciona y en la expresión $3n$ se multiplica; hecho que deja en evidencia la importancia de los signos en la asignación de los sentidos tal y como se muestra en el siguiente argumento. «*…yo escribí con base a la ley de los signos de la segunda expresión. Entonces en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ se adiciona, o se sustrae, valores. Pero no, es igual que en la expresión $3n$ que indica producto, entonces en la segunda expresión los valores de n cambia*». Así mismo, los profesores reconocen la igualdad de las expresiones [equivalencia sintáctica] pero la adición y sustracción de valores hacen que se obtenga valores diferentes, como se muestra en el siguiente argumento *«…en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ los valores varían, y no siempre corresponden al triple de un número, porque en la segunda expresión se adiciona y se resta, y son expresiones diferentes, así numéricamente se obtenga el mismo resultado»*. Este tipo de razonamiento son similares a los dados por los estudiantes al resolver la misma situación, al respecto Rojas (2012) manifiesta que, si bien, en varios casos se evidencia que los estudiantes reconocen la equivalencia sintáctica entre las expresiones algebraicas dadas, varios de ellos considera que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no es el triple de un número, puesto que el triple de un número no suele ser asociado con una expresión que represente una suma de tres números consecutivos, sino con una expresión que pueda ser reconocida directamente como «multiplicación por 3» o como suma reiterada [3 veces un mismo número].

c) ***Resultado en el Tratamiento:*** este subgrupo se ubican los profesores de secundaria-B y F, quienes manifiestan que visualmente «*…no se puede determinar sin antes resolver las operaciones de las expresiones algebraicas*» o «*al no estar factorizado de manera explícita no se interpreta como el triple de un número*». Tal y como se muestra en el siguiente argumento dado por el profesor- B «*visualmente…yo sé que para mí las dos expresiones es una igualdad matemática. Pero, cuando se hace todo el procedimiento, se puedo establecer la igualdad. Si uno le presenta a un estudiante las dos expresiones, el estudiante a primera vista no establece que esas dos [cosas] son iguales*». Así mismo, el profesor-B argumenta que «*tendría que hacer el proceso de demostración, sumar las variables que están ahí y sumar los números, las constantes que están. Visualmente, desde un punto de vista primario por decirlo así, no se interpreta como el triple de un número. Para un estudiante, estoy seguro que cuando uno le está introduciendo, estas cuestiones, no va decir que son iguales así directamente, él tendría que realizar las operaciones. Uno tendría que pedirle que demuestre si esas dos cosas son iguales y pedirle que haga el proceso*». Rojas mostro evidencias que este tipo de argumentos son similares a los dados por los estudiantes quienes aluden que: «*… también se podría tomar en cuenta que si vemos la expresión y la resolvemos la finalidad de la expresión daría como … el resultado, ¿sí?, se podría dar como el triple de un número, pero ahí lo que nos están preguntando es si la expresión, nos refiere a eso. Lo que nos quiere decir la expresión es, bueno, ¿es el triple de un número? Y eso no es lo que hace la expresión, la expresión matemática lo que hace es decirnos, como ¡vea, hagan éste … proceso van a encontrar una cosa y eso sí puede ser el triple de un número!, por ese lado tal vez sí sería la respuesta así. Pero en sí la expresión, para mí, no es el triple. Pero sí resuelta [después de realizar las operaciones], sí puede dar, sí es el triple de un número entonces por ese lado se podría tomar que sí, pero en sí la expresión no es*» (Rojas, 2012, p. 118). Así mismo, el autor mostro otros argumentos como: «*pero sí resuelta [después de realizar las operaciones], sí puede dar, sí es el triple de un número entonces por ese lado se podría tomar que sí, pero en sí la expresión no es [se refiere a la expresión* $((n-1)+n+(n+1)$», « *porque es una expresión, ahí no me dan términos semejantes y que yo pueda decir cómo, ¡mire! si multiplicamos esto por esto, por esto, o multipliquemos este número por 3; eso no me lo está dando la expresión, la expresión me dice como, ¡vea! haga la expresión y después sí va a encontrar lo que necesita*». (Rojas, 2012, p. 119).

Otro caso, que se reporta en este trabajo referenciado por Rojas (2012) con estudiantes es la tarea que hemos denominado interpretación de ecuaciones, en esta, tanto estudiantes como profesores, asignan a las ecuaciones $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2\mathrm{xy}-1=0$ y $x+y=\frac{1}{x+y}$, en relación a un reconocimiento ***icónico de las expresiones.*** En virtud a la formación en educación matemática de los profesores esta situación solo fue aplicada al grupo de secundaria. Frente a los resultados obtenidos los profesores-B, C, D y F, hacen parte del estudio de caso colectivo, quienes reconocen que ambas expresiones son equivalentes desde el punto de vista **sintáctico,** pero la interpretación que otorgan a la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, no coincide con la interpretación realizada a la primera ecuación, en tanto, no corresponde con el mismo objeto matemático, [equivalencia semántica]. Las producciones de los profesores se pueden clasificar en los siguientes subgrupos:

a) ***Forma de las Variables****:* en este grupo se ubican los profesores de secundaria-D, y F, quienes reconocen la equivalencia de las ecuaciones desde el punto de vista sintáctico, pero dotar de sentido y significado la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no reconocen dicha igualdad [equivalencia semántica]. Por ejemplo, el profesor-D relaciona la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, con un polinomio de segundo grado, en tanto, se tienen las variables al cuadrado, tal y como se evidencia en el siguiente argumento: «*las variables de un polinomio de segundo grado deben estar elevadas al cuadrado y como en la expresión* $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, *las variables* x *e* y, *se encuentran al cuadrado corresponde a un polinomio de segundo grado*», y la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, es asociada con una ecuación lineal, en tanto argumenta que «*las variables están elevadas a uno, representa la suma de dos números reales e* $(x + y)$ *igual a su opuesto lineal, entonces al hacer la gráfica serían dos como rectas, por decirlo así, dos rectas porque son ecuaciones lineales*».

El profesor de secundaria-F expresa que la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, tiene la forma general de una cónica definida como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, por tanto corresponde con una función cónica, así mismo, alude que dada su formación matemática conoce que las funciones cónicas tienen esta forma [las variables x e y, deben estar al cuadrado], aspecto que no cumple la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$. Al respecto Rojas (2012) mostro evidencias que este tipo de argumentos son similares a los dados por los estudiantes quienes expresan que la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, no corresponde a una circunferencia puesto que: «*no puede ser una circunferencia, porque en una [ecuación] las variables están al cuadrado y en otra no*», la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, «*no se ve como una circunferencia, porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado*» (Rojas, 2012, p.78). Al igual que los profesores, los estudiantes aceptan la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones, aplican las transformaciones de tratamiento requeridas y reconocen que a partir de una ecuación se puede obtener la otra; resultados que muestran, que tanto, para los profesores como para los estudiantes prima la percepción de la ecuación como un *ícono* asociado a la «*circunferencia*», «*ecuación de segundo grado*», etc., caracterizada por tener las variables elevadas al cuadrado, sobre la comprobación de la *equivalencia sintáctica* realizada inicialmente.

b) ***Restricción en los dominios:*** en esta tipología se encuentran los profesores de secundaria-B, y C, quienes reconocen que ambas ecuaciones son equivalentes, la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, no corresponde con el sentido asignado a la primera ecuación puesto que, la ecuación $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que pueden tomar x e y, en el cual $x\neq -y$, argumentan «*no, aunque son expresiones equivalentes la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$, tiene más restricciones en su dominio $x+y\neq 0$*», «*puesto que, la ecuación $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, tiene unas restricciones respecto a los valores que puede tener x e y, en los números reales es decir que $x\neq -y$*». Resultados que dejan en evidencia que para asignar sentido a estas expresiones prima la percepción de la expresión como un *ícono* asociado, en este caso a las restricciones de una función racional, en tanto, la expresión $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, es asociada con algunas características de este tipo de funciones como son: la expresión debe estar en términos de x **:** $f(x)=\frac{numerador}{denominador}$, dada por cociente de dos polinomios**:** $f(x)=\frac{P\ (x)}{Q(X)}$, y las restricciones en el dominio en relación a los valores en que se encuentra definida la función, esto es, los valores de x para los cuales la función existe. Dada esta condición en el denominador se debe excluir del dominio todos los valores de la variable x, para los cuales su valor se convierte en cero, hecho característico de este tipo de funciones**.**

En conclusión estos resultados muestran, que tanto, para los profesores como estudiantes prima la percepción de la expresión como un *ícono* asociado a una circunferencia, una ecuación de segundo grado, un polinomio de segundo grado, etc., que se caracteriza por tener las variables elevadas al cuadrado, o como manifiestan algunos profesores la expresión $x\ +y=\frac{1}{x+y}$, tiene un dominio más restringido, aspectos que influyen para ver las expresiones como dos objetos matemáticos diferentes [equivalencia semántica].

Por otra parte, en este trabajo se asume que en toda transformación de tipo tratamiento subyace la noción de equivalencia, en términos del EOS los significados parciales **sintácticos** y **semánticos** son parte constitutiva en el desarrollo de dicha noción, y que a su vez requiere ser articulados (Chalé-Can et al., (2017). Frente a los resultados obtenidos se encontró, que desde el significado parcial *sintáctico* los profesores realizan una serie de prácticas como la aplicación de transformaciones de tratamiento [agrupación de términos semejantes, evaluación con un número particular, aplicación de propiedades] que posibilita obtener otra expresión, como en el caso en que transforman $(n-1)+n+(+1)$ en $3n$: desde el significado parcial *semántico* la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, no es admitida por algunos profesores como el «*triple de un número*» en tanto, consideran que la expresión $3n$ relaciona tres números iguales, mientras que la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ asocia tres números diferentes; otros manifiestan que en la expresión $3n$ involucra una multiplicación y en la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, una suma, o, se debe realizar primero la transformación de tratamiento para posteriormente ser interpretada como el triple de un número. En el caso particular de la interpretación de las ecuaciones: desde el significado parcial **sintáctico** los profesores aplican los procedimientos respectivos que les posibilita transformar la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0,$ en $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, que permite corroborar la igualdad entre las ecuaciones; y desde el significado parcial **semántico** la última expresión no puede ser interpretada como una circunferencia o como una ecuación de segundo grado, un polinomio de segundo grado, etc., en tanto, las variables no están expresadas al cuadrado o tiene más restricciones en su dominio.

En cuanto a la complejidad de la noción de equivalencia, descrita por medio de dos significados parciales [sintáctico y semántico], la valoración numérica de cada expresión realizada por los profesores mediante la asignación de un número específico o la reducción de términos semejantes en el caso de la tarea sobre interpretación de expresiones; o, el obtener la expresión $x + y = \frac{1}{x+y}$, producto de las transformaciones de tratamientos aplicada a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, puso en evidencia este hecho: para algunos profesores fue el paso que les permitió no sólo obtener el mismo resultado, sino verificar la equivalencia, estableciendo así una relación entre las perspectivas **semántico** y **sintáctico;** para otros este aspecto no fue suficiente y a pesar de obtener el mismo resultado y verificar la *equivalencia sintáctica*, no reconocieron la *equivalencia semántica*, en tanto *«veían»* expresiones con formas diferentes, que les evocaba operaciones, u objetos matemáticos diferentes, que relacionan sentidos diferentes que no se relacionaban entre sí. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al., (2017) se reconoce que la complejidad en torno a la equivalencia de expresiones algebraicas requiere de las perspectivas **sintáctica** y **semántica,** así como su necesaria articulación, debido que cada significado posibilita una serie de prácticas matemáticas específicas, tales como:

a) ***Equivalencia Sintáctica***: la evaluación particular con un número específico o la operación de términos semejantes permite establecer que las expresiones $(n-1) + n + (n+1)$ y $3n$ son iguales, en tanto, se obtiene el mismo resultado o al aplicar las transformaciones de tratamientos requeridos a la expresion $(n-1) + n + (n+1)$ se obtiene $3n$. Con relación a las ecuaciones, la factorización de la expresión $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, permite obtener la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, o viceversa, aspecto que permite corroborar la igualdad entre ambas.

b) ***Equivalencia Semántica***: permite evidenciar que existen diferentes maneras de representar un mismo número, como el caso de la expresión $(n-1) + n + (n+1)$, que puede ser interpretada como el *«triple de un número»*, en tanto, es equivalente a la expresión $3n$. Frente a la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$, y, $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$, otorga a cada uno de los términos el mismo valor contextual, y permite que se asigne el mismo sentido a ambas.

Por otro lado, los resultados obtenidos en la tarea sobre interpretación de expresiones mostraron que los profesores al bordar tareas indeterminadas, como en el caso de esta situación, es más compleja que en los casos en que la actividad relaciona números específicos, por ejemplo, la tarea sobre la secuencia de números cuadrados, que fue propuesta a 32 profesores de primaria, se obtuvo que 31 de éstos lograron verificar que la secuencia de números cuadrados coincidía con los resultados de cada posición en la suma de números impares, aspecto que les permitió evidenciar que la secuencia de números cuadrados podía ser expresada mediante una secuencia de suma de números impares en tanto, cada posición permitió establecer la correspondencia. Resultados que corroboran los planteamientos realizados por Chalé-Can et al., (2017) quienes consideran que la mayoría de los sujetos realizan una evaluación numérica que les permite tener un acercamiento **sintáctico** de la equivalencia posibilitando un desarrollo primitivo e ingenuo de esta noción, puesto que, permite una vinculación de expresiones por medio de diferentes transformaciones como factorización, expansión, agrupación, simplificación de términos y en el caso particular de las producciones de ésta tarea la evaluación numérica.

7.2. Anclaje a Situaciones Dadas. En las soluciones realizadas por los profesores se evidencia cierta tendencia a realizar interpretaciones ligadas a la situación propuesta, a lo que Rojas (2012) ha denominado *«anclaje»* a la situación dada en la tarea, como en el caso, que se pide calcular la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par y en la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos. Las respuestas dadas por los profesores permiten clasificarlas en dos subgrupos:

a) ***Anclaje al Artefacto:*** frente a la tarea sobre del cálculo de la probabilidad se ubican los profesores primaria-A, primaria-B, primaria-C, primaria-D, primaria-E, secundaria-A, secundaria-B; secundaria-C, secundaria-D y secundaria-E, quienes reconocen la *equivalencia sintáctica* entre las fracciones $1/2$, $3/6$ y $4/8$. Por ejemplo, la profesora de primaria-A, alude que:« *yo la verdad me centre en el evento aleatorio que se enmarca en la tarea [un dado de 6 caras], entonces el tener* $4/8$*, desde mi perspectiva no cumple con las 6 caras, ahora en el caso de* $1/2$*, si se cumple porque tenemos dos opciones [pares-impares] en cambio en cuatro octavos a mí parece que no se puede decir cuatro de las ocho caras, por ejemplo, porque el dado no tiene 8 caras*» o el profesor de secundaria-A, manifiesta que: «*si, aunque son fracciones equivalentes las fracciones representa casos diferentes, en un dado tradicional es lógico decir 3 de 6, pero no se puede decir 4 de 8, aunque son expresiones equivalentes porque representa* $1/2$*, pero cada uno representa situaciones diferentes pues el dado tiene 6 caras*». Este tipo de razonamiento son similares a los dados por los estudiantes al resolver la misma situación. Rojas (2012) manifiesta que algunos estudiantes no aceptan la fracción $4/8$, como la probabilidad pedida, puesto que, esta fracción no es «*representativa del dado*» algunos argumentan que: «$4/8$*, no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares*» (Rojas, 2012, p. 120).

Otros estudiantes argumentan que la fracción $4/8$, está «*mal planteada*» pues el dado no tiene 8 caras, al respecto aluden: «*la fracción estaría mal planteada, para […] resolver el problema, en base de las caras del dado […] Un dado nunca va a tener ocho caras*». Aunque algunos estudiantes aceptan que las fracciones $4/8$ y $3/6$ son iguales, en tanto, equivalen a la mitad, permite representar la probabilidad pedida, pero considera que esta fracción no permite tener «*precisión*», ni ser claros en el evento aleatorio, pues el dado tiene sólo 6 caras. Argumentando que: «*la fracción estaría mal planteada, para […] resolver el problema, con base a las caras del dado […] Un dado nunca va a tener ocho caras*» (Rojas, 2012, p. 121). Argumentos que corroboran los resultados encontrados con el trabajo realizado por los profesores.

Frente a los resultados obtenidos, desde el significado parcial *sintáctico***,** los profesores realizan una serie de prácticas, como el cálculo de la probabilidad a partir de la regla de Laplace: que relacionan la equiprobabilidad de todos los resultados de un experimento aleatorio, definida como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el suceso y el número de resultados posibles del experimento; así como la simplificación de expresiones que permite corroborar la equivalencia entre las fracciones. Respecto al significado parcial *semántico* la fracción $4/8$, no es admitida por algunos profesores como una expresión representativa del dado, en tanto, el dado no tiene 8 caras, ni 4 caras favorables. En el caso particular de la interpretación del cálculo de la probabilidad: desde la perspectiva *sintáctica* los profesores reconocen que las expresiones $1/2$, $3/6$, $4/8$, 0.5 y 50%, son equivalentes y desde su aspecto *semántico*, no es representativa del dado. Siguiendo los planteamientos de Chalé-Can et al., (2017), se reconoce que la complejidad en torno a la equivalencia en esta situación requiere de las visiones *sintáctica y semántica*, así como su necesaria articulación, en tanto, cada significado posibilita una serie de prácticas matemáticas específicas, tales como:

a) ***Equivalencia Sintáctica***: calcular la probabilidad, reconocer que las expresiones $1/2$, $3/6$, $4/8$, 0.5 y 50% son equivalentes puesto que representan la mitad de casos favorables y representan el evento aleatorio enmarcado en la situación.

b) ***Equivalencia Semántica***: permite evidenciar que existen diferentes formas de representar la probabilidad de un evento: por ejemplo, la fracción $4/8$, expresa la mitad de los casos favorables en la situación planteada.

Otro caso, que se reporta en este trabajo, se relaciona con la tarea sobre interpretación de gráficos estadísticos, tarea que fue aplicada a los dos grupos de profesores [primaria-secundaria]. En el estudio de caso colectivo se contó con la participación de los profesores de primaria-A, B, C, D, E; de secundaria-A, B, D, E y F, quienes eligen uno o ninguno de los dos gráficos diagramas. Se corroboro que proponer una tarea en un contexto diferente al numérico o algebraico enmarcada en la transformación cognitiva de tratamiento, como en este caso, el estadístico [interpretación de gráficas], la conceptualización de dicho proceso no es tarea fácil, puesto que, son varios elementos que intervienen en éste y no solo el manejo de un único registro semiótico como erróneamente se ha concebido; en tanto, cada diagrama relaciona conceptos diferentes que hacen que no se trabaje el proceso cognitivo *tratamiento* sino de *conversión*. Por ejemplo, en el gráfico de barras se relacionan conceptos como frecuencia relativa, frecuencia acumulada etc., y un diagrama de sectores se relacionan conceptos como porcentajes, proporcionalidad, etc. Al respecto Font, Godino y D'Amore (2007) manifiestan que no es posible hablar que dos o más gráficos son equivalentes, puesto que, relacionan conceptos matemáticos diferentes. Por otro lado, el trabajo realizado brinda resultados sobre posibles causas que impiden que no se admita la equivalencia contextual de estos gráficos, entendida como la capacidad que tienen los sujetos para identificar la misma información por medio de diferentes representaciones [contextual].

Por otro lado, se corrobora planteamientos de Batanero et al., (2010) quienes aluden que la construcción e interpretación de gráficos estadísticos es una tarea compleja, por elemental que sea el diagrama, debido a la complejidad en el lenguaje utilizado. Por ejemplo, en tarea propuesta, aunque el gráfico de barras es considerado un diagrama elemental, su interpretación requiere que los sujetos comprendan elementos en su construcción como las variables de los ejes, frecuencia relativa, frecuencia absoluta, escalas, etc. Así mismo, aunque los dos gráficos son contextualmente equivalentes, debido a que, representan la misma información, su interpretación y construcción requiere que los profesores pongan en juego otros objetos matemáticos y procedimientos. Por ejemplo, en el gráfico de barras dado en números enteros se debe establecer la correspondencia de cada fracción con el valor de consumo relacionado en fracciones en cada mes. Al comparar el gráfico de barras en fracciones con el gráfico de barras en enteros, reviste de una complejidad semiótica diferente, los resultados mostraron que para algunos profesores la lectura e interpretación realizada en el diagrama A, fue una tarea de mayor complejidad, como se puede evidenciar en el siguiente argumento: «*aunque en el gráfico A, aparece el consumo no explicita muy bien los metros cúbicos y no suele presentarse dicha información por medio de números racionales. Como en este gráfico no aparece los metros cúbicos no dude en elegir el gráfico B, si hubiera aparecido en el gráfico A tal vez hubiera dudado*». Otros profesores expresan que no es usual presentar un gráfico con ejes fraccionarias, elemento fundamental para que algunos profesores no admitan que el gráfico A, expresa el consumo de la vivienda en el último trimestre. Entre las interpretaciones realizadas por los dos grupos de profesores se evidencia cierta tendencia a realizar interpretaciones ligadas a la situación propuesta, que permite ubicar las respuestas de los profesores en la categoría denominada por Rojas (2012) como «*anclaje*» a situaciones específicas.

b) ***Anclaje a Situaciones Específicas:*** aunque algunos profesores reconocen la *equivalencia sintáctica* entre ambos diagramas, ignoran el diagrama A, hecho que deja en evidencia un cierto anclaje a la situación, en tanto, manifiestan que en la cotidianidad no es usual representar la información con ejes fraccionarios, aspecto que hace que este tipo de diagramas no sea tenido en cuenta, como es el caso de la profesora de primaria-C quien alude que: «*si, las fracciones en el gráfico A, coincide con los valores del enunciado, pero entonces, me fije que el consumo de agua no se presenta en fracciones y en el gráfico B, presenta el consumo mes a mes en metros cúbicos.*», otros profesores aluden que: «*porque no es usual, siempre que uno mira un* *gráfico se centra en cómo este representa el consumo ya sea de gua o luz, lo hace con números enteros y el gráfico B, da cuenta de la cantidad en relación con el total en números enteros y expresa mejor la información*»; otros argumentan que: «*si hablamos del gráfico A, los datos no son muy coherentes ¿no?*» y afirma que: «*aunque en el gráfico A, aparece el consumo no explicita muy bien los metros cúbicos y no suele presentarse dicha información por medio de números racionales. Como en este gráfico no aparece los metros cúbicos no dude en elegir el grafico B, si hubiera aparecido en el gráfico A, tal vez hubiera dudado*», la profesora de primaria-D, expresa que: «*elegí el gráfico B, porque si me preguntan por el agua, no puedo decir que 9/20 a 27 4/20 ni 7/20, porque me están preguntando específicamente por el agua*».

Por otro lado, otros profesores centran la atención en la unidad de medida: por ejemplo, los profesores: primaria-A, B, C, D y secundaria-A, B, C, D y F, consideran que este elemento es fundamental a la hora de presentar los datos en un diagrama, algunos argumentan que: *«…por lo menos, en el eje vertical debería tener una etiqueta y pues en el gráfico A, no aparece la etiqueta, no aparece una unidad de medición*», «*desde el punto de vista docente o matemático, si miro el consumo de agua, desde mi orientación yo puedo interpretarlo desde el gráfico A, o desde el gráfico B, porque ambos me están representando la misma información, pero si yo soy el consumidor, me interesa es mirar el consumo, en metros cúbicos de agua, el gráfico B, me muestra la unidad de consumo y los metros consumidos en cada mes, por eso el gráfico B el que más corresponde, a la pregunta*». Estos argumentos muestran que los profesores no consideran elementos en la construcción del diagrama A, debido que, la unidad cambia en el gráfico A, por ejemplo, al explicitar que de los $140m^3$ del total consumido 9/20 corresponde al mes de octubre, 4/20 al mes de noviembre y 7/20 al mes de diciembre, hace que la fracción correspondan a los metros cúbicos que han sido consumido en cada mes.

Al igual que en la equivalencia algebraica o numérica en la interpretación de gráficos estadísticos, se parte del supuesto que los elementos **sintácticos** y **semánticos,** son parte constitutiva de la equivalencia contextual entre estos. En el dominio estadístico la relación del aspecto *sintáctico y semántico*, es analizada mediante de una tarea que requiere, por una parte, la interpretación de una situación [en lenguaje natural] para transformarla al lenguaje gráfico de barras en fracciones y, por otra, del lenguaje de barras de fracciones al de lenguaje de barras con números enteros. Con respecto a las posibilidades planteadas por Chalé-Can et al., (2017) relacionadas con estos dos tipos de equivalencias y su posible articulación, se encontró:

a) ***Reconocen la equivalencia semántica***: una parte de los profesores articulan el gráfico de barras A o B, con el enunciado dado en la situación y establecen la correspondencia o coincidencia entre los dos lenguajes [un diagrama A o B y el enunciado de la tarea]. Explícitamente los profesores no realizan ningún cálculo matemático.

b) ***Reconocen la equivalencia sintáctica****:* el cálculo del número entero correspondiente a cada fracción de consumo o el desconocimiento de estos elementos impide que los profesores establezcan la equivalencia entre el gráfico A, dado en fracciones y el B, dado en números enteros y el enunciado natural. Los profesores realizan los cálculos, por ejemplo, simplifican las fracciones relacionados en el gráfico A, establecen la correspondencia entre las fracciones y los números enteros, que permite verificar que ambos diagramas relacionan los valores de consumo durante el último trimestre, pero solo eligen uno de estos.

a) ***Articular los dos tipos de equivalencia****:* un número reducido de profesores establecen dicha equivalencia articulando los aspectos **semánticos** y **sintácticos;** los resultados muestran que trabajar uno los dos aspectos [semántico-sintáctico] permite realizar una articulación semiótica.

Por otro lado, los resultados coinciden con los obtenidos por Chalé-Can et al., (2017) en el contexto de expresiones algebraicas, quienes reportan que para admitir la equivalencia de expresiones se requiere de la articulación de los dos significados parciales *sintáctico y semántico*; en particular, en el caso de la tarea abordada [interpretación de gráficos estadísticos] que proponemos en este estudio, puesto que, para admitir la *equivalencia contextual* entre las tres representaciones, desde lo **sintáctico** se requiere que los profesores: calculen los valores enteros que corresponden a cada fracción; conozcan elementos en la construcción de los dos gráficos; por ejemplo, las frecuencia relativa, frecuencia absoluta, etc., elementos necesarios para reconocer la equivalencia contextual de gráficos estadísticos. Algunos profesores que no establecen la equivalencia desconocen cómo establecer la correspondencia de la fracción con el número entero. El diseño de la tarea solo permitió indagar respecto a la interpretación de gráficos estadísticos en niveles iniciales propuestos por Curcio (1987) y queda para próximos estudios abarcar niveles superiores en cuanto a la interpretación de gráficos estadísticos y la equivalencia haciendo uso de diferentes gráficos a los abordados en este estudio y en otros conceptos estadísticos.

7.3. Dificultades con el Lenguaje Matemático. En el trabajo realizado por los profesores, frente a las tareas propuestas, se evidencia algunas dificultades relacionadas con las interpretaciones y con la realización de los tratamientos requeridos para cada situación, particularmente en el contexto algebraico. Por ejemplo: frente a la interpretación de expresiones algebraicas se consideran erróneas las respuestas realizadas por 7 profesores en tanto, no realizan la interpretación de algunas expresiones o no reconocen la equivalencia de estas desde su aspecto *sintáctico;* 10 profesores que no relacionan los dos sentidos asignados entre sí o no logran articular el significado parcial *sintáctico* con el significado parcial *semántico*; y en el caso de los profesores de secundaria 11 no realizan dicha articulación *semiótica*. Los resultados muestran que aquellos que cuenta con una formación en educación matemática o algún conocimiento en esta disciplina, asignan más de una interpretación a las expresiones y emplean un lenguaje matemático particular, por ejemplo: en su mayoría los profesores de primaria interpretan la expresión $3n$ como el triple de un número y los profesores de secundaria como triple de un número, múltiplos de tres, secuencia, expresión algebraica; etc. Con respecto a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$: algunos profesores de primaria realizan una interpretación literal de la expresión «*un número cualquiera se le resta 1 luego se hace lo mismo con la suma y luego se suma todo*», en el caso particular de los profesores de secundaria emplea un lenguaje matemático y la expresión es interpretada como una suma de tres números consecutivos; en su mayoría los profesores de primaria tomaron casos particulares para corroborar que en ambas expresiones se obtiene el mismo resultado; y en el caso particular de los profesores de secundaria operan términos semejantes que posibilita transformar $(n-1)+n+(n+1)$ en $3n$ y obtener los mismos resultados. Pese a las anteriores diferencias, las causas de no articulación entre los dos grupos de profesores son similares y coinciden con las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver la misma tarea, y que son reportadas por Rojas (2012, 2014) quien señala que una de las dificultades encontradas en cuanto al lenguaje matemático tiene que ver con la generalización a partir de algunos casos particulares, algunos estudiantes argumentan que:« *… lo hice primero y pues empecé a hacerlo con casos particulares y me daba, por ejemplo lo hice con el 9, con el 3, por ejemplo con el 9 dada 27 y el 3 me daba 9 … En el resultado, entonces yo … pues de ahí, de hacer varios, varias pruebas, si se puede decir así, yo inferí que sí era el triple del número, porque pues 9x3 da 27 y 3x3 da 9*», «*pues… yo puse… que sí y sostengo, porque pues con esta fórmula … que es igual a 3 ehhh … 3 es como tres veces y es el triple, además … la escritura…*». El autor manifiesta que otros casos que deja en evidencia este hecho de tomar un caso particular: *«… dio el número y pues cogí otro número y me dio … 3 veces el mismo número, o sea, sumando 3 [veces] el mismo número dio el resultado entre toda la operación y así lo hice con hartos números y entonces así quedó; siempre daba … 3 veces el mismo número*» (Rojas, 2012, p. 122-123). Así mismo, en los resultados obtenidos por este autor se evidencian dificultades que encuentran algunos estudiantes para realizar transformaciones de tratamiento de las expresiones algebraicas, por ejemplo, algunos afirman que $3n-1=2n$; este tipo de dificultades que han sido reportadas en anteriores investigaciones por el grupo Pretexto (Grupo Pretexto, 1997, como se citó en Rojas, 2012). Lo anterior permite concluir que las dificultades que encuentran los profesores de primaria, secundaria y estudiantes son similares.

Por otro lado, en relación con la tarea sobre interpretación de gráficos: 4 profesoras de primaria aluden que ninguno de los dos diagramas representan la información, en tanto, no aplican ningún procedimiento a los datos que se relacionan en cada uno de los ejes; 3 eligen el diagrama A, puesto que, al simplificar los valores que se relacionan en el diagrama coinciden con los del enunciado; y 8 profesores eligen el grafico B, algunos de estos establecen el número entero que corresponde a cada fracción del enunciado. Respecto a los profesores de secundaria: solo un profesor selecciona el gráfico A, realizan casi una traducción literal del enunciado; y 13 profesores eligen el diagrama B. Con relación a la formación matemática de los profesores con conocimientos en esta disciplina: se evidencia que estos elijen en su mayoría el gráfico B, no realizan una traducción literal de la situación; pese a estas diferencias las causas de no articulación entre los dos grupos de profesores son similares, puesto que, centran la atención en la unidad de consumo y la no cotidianidad de presentar un consumo en fracciones. Frente al cálculo de la probabilidad: los 32 profesores de primaria calculan correctamente la probabilidad pedida; 12 de éstos no la expresan por medio de una expresión matemática, sino que recurren al lenguaje natural para describir el evento aleatorio relacionado «*lanzar un dado y obtener un número par*»; y 4 emplean solo una expresión. En el caso particular de este grupo 16 profesores no realizan una articulación sentidos, en tanto no consideran que la expresión $4/8$ sea una fracción representativa del dado. Respecto a la tarea sobre interpretación de ecuaciones 6 profesores no establecen la equivalencia entre ambas expresiones en tanto no recuerdan o desconocen las transformaciones respectivas y 10 profesores admiten la *equivalencia sintáctica* de las expresiones, pero dotar de sentido y significado dichas expresiones desde lo semántico son asociadas con objetos matemáticos diferentes.

Con relación a las *conexiones matemáticas* los datos dejan en evidencia que una conexión fundamental que posibilita que los sujetos relacionen los sentidos entre sí, asignados a las representaciones de un mismo objeto matemático obtenida mediante tratamiento, es la conexión de *reversibilidad,* puesto que, si los profesores establecen que las dos expresiones son equivalentes, desde lo **sintáctico,** en su perspectiva semántica, las expresiones toman el mismo valor contextual y por ende también son equivalentes. Los resultados muestran que algunos profesores reconocen desde la perspectiva **sintáctica** la equivalencia de las expresiones, pero desde su aspecto semántico, las expresiones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes. Así mismo, los datos indican que los profesores establecen conexiones intra matemáticas al resolver problemas propuestos, pero utilizan las de tipo procedimental y las representaciones diferentes, que les permite reconocer la igualdad de las expresiones desde lo **sintáctico.**

El presente estudio muestra que las dificultades que encuentran los profesores de matemáticas para **articular los sentidos** asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático obtenidas mediante transformaciones de tratamiento, son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas que han sido reportados por Rojas (2012). Así mismo, se confirma el fenómeno reportado por D'Amore (2006) posteriormente por Santi (2011) y Rojas (2012) sobre las dificultades que encuentran los estudiantes para articular sentidos asociados a expresiones reconocidas sintácticamente equivalentes, obtenidas por tratamiento, en tanto, aplican las transformaciones requeridas para obtener una de ellas a partir de la otra. Este trabajo parte de las soluciones dadas por 64 profesores, clasificados en dos grupos [primaria-secundaria] de ocho regiones de Colombia, a partir de cuatro tareas asociadas con temáticas diferentes.

En los resultados se encontró algunas evidencias que permite explicitar posibles causas asociadas a la dificultad para articular los sentidos, asociadas a tres hechos fundamentales [reconocimiento icónico, anclaje a situaciones específicas y dificultades con el lenguaje matemático]. En relación al **reconocimiento icónico** de las expresiones los resultados se pueden corroborar en los hallazgos obtenidos en la tarea sobre interpretación de expresiones y ecuaciones que muestran que los profesores realizan una «*mirada*» básicamente icónica de las expresiones algebraicas. Frente a la tendencia a anclarse a situaciones específicas los resultados obtenidos en la tarea sobre el cálculo de la probabilidad e interpretación de gráficos estadísticos, dejan en evidencia cierto anclaje a situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta; finalmente se evidencia que los profesores emplean las transformaciones de tratamientos que posibilita establecer la **equivalencia sintáctica** de las expresiones, pero que dotar de sentido y significado dichas expresiones son asociadas con objetos matemáticos o situaciones diferentes, hecho que permite corroborar que este tipo de soluciones son similares a las respuestas dadas por los estudiantes. Las evidencias referidas muestran que en el caso de los profesores de matemáticas, no solo las transformaciones semióticas de conversión se relacionan con dificultades en la comprensión de un objeto matemático, sino también las transformaciones de tratamiento y que las dificultades que encuentran algunos profesores para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas obtenidas mediante tratamiento en tareas específicas son similares a las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver este tipo de tareas.

Referencias bibliográficas

Arcila, P; Mendoza, Y; Jaramillo, J & Cañón, O. (2010). Comprensión del significado desde Vygotsky, Bruner y Gergen. Revista Diversitas. Perspectivas en Psicología, 6(1), 37-49.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1938). La Psychanalyse de Feu. París: Gallimard.

Bachelard, G. (2004). La formación del espíritu científico. (J. Babini, trad). México: Siglo XXI (Obra original publicada en francés en 1938).

Batanero .C, .Godino. J , Vallecillos .A, Green D.R & Holmes , P. (2006). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 25(4*), 527-547.

Batanero, C; Arteaga, P. & Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. Enseñanza de las Ciencias, *28(1),* 141- 154.

Brown, L. (1993). The new shorter Oxford English dictionary on historical principles. Oxford: Clarendon Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathematiques, *7*(2), 33-115

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches En Didactique Des Mathématiques, *4(2),* 165–198.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Unpublished PhD Thesis]. Faculty of Education-Simon Fraser University, Canada.

Bruner, J. (1990). Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva. Madrid, Alianza. Col. Psicología Minor, 1991

___________. (1998). Realidad mental y mundos posibles: los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia. Barcelona: Gedisa.

___________. (2006). Actos de Significado: Más allá de la revolución cognitiva (J. Gómez & J. Linaza, Trads.). Madrid: Alianza (Original publicado en 1990). Cebreiro, B y Fernández, M. (2004). Estudio de casos. En F. Salvador Mata, J. L. Rodríguez Diéguez y A. Bolívar Botia, Diccionario enciclopédico de didáctica. Málaga: Aljibe.

Chalé–Can, S (2018). *Aspectos sintácticos y semánticos de la equivalencia de expresiones algebraicas en secuencias visuales* (Tesis doctoral). CINVESTAV-IPN. México.

Chalé-Can, S; Font, V. & Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/chale-can.pdf

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative Research Inquiry and Research Design.* Choosing among Five Traditions. Thousand Oaks, California.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: la pensée sauvage.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsor

Contreras, J; Molina-Portillo, E. Godino, J. D; Rodríguez-Pérez, C. & Arteaga, P. (2017). Funciones semióticas críticas en el uso de diagramas de barras por los medios de comunicación. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. Journal for Research in Mathematics Education 18(5), 382-393.

Darós, W. (2001). La propuesta filosófica de Richard Rorty. Revista de Filosofía, 23, 95- 121.

D’Amore, B. & Arrigo, G. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. Educación Matemática (Mexico DF), 11(1), pp. 5-24.

D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 3,* 325-336.

___________. (2006a). Didáctica de la Matemática (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio (Original publicado en 1999).

___________. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, 9(4)*, 177-196.

D’Amore B & Fandiño Pinilla, M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI, March 2008. WG5: The evolution of theoretical framework in mathematics education, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

D’Amore, B.; Font, V & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Paradigma, Maracay, v. 28, n. 2, p. 49- 77.

D’Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164.

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Antecedentes ilustres de la paradoja cognitiva de Duval. In B. D’Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica (pp. 133- 158). Chía: Universidad de La Sabana.

D´Amore y Radford, L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

De Barros, C &Hernández, A. (2016). Función simbólica y representaciones mentales. Un enfoque desde el lenguaje. España.

De Gamboa, G & Figueira, S, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. In: GONZALEZ, M. T. et al. (Ed.). Investigación en Educación Matemática XVIII. Salamanca: Ed. SEIEM, p. 337-344.

Distéfano, M.; Aznar, M, A & Pochulu, M. (2016). Prácticas Matemáticas y Funciones Semióticas en la Significación de Representaciones Simbólicas. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 11(2), 1-16.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5(1), 37–65.

___________. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang. Suisse.

___________. (1996). Quel Cognitif Reenir en Didactiques des Mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(3),* 349-382. Recuperado de http://rdm.penseesauvage.com/Quel-cognitif-retenir-en.html

___________. (1999). Semiosis y pensamiento. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, Cali, Universidad del Valle.

___________. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.) Cali: Universidad del Valle.

Duval, R & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Edited by Tânia M.M. Campos. Spriger.

Eco, U. (1986). La estructura ausente, introducción a la semiótica. España: Lumen.

___________ . (1968/2004). *Apocalípticos e integrados*. México: Lumen/Tusquets.

___________.(1976/2000). *Tratado de semiótica general*. España: Lumen.

Ernest, P. (1991). The philosophy of mathematics education. London, Falmer Press.

Fandiño Pinilla M.I. (2006). Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro. In S. Sbaragli (Ed.), La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno (pp. 117- 120). Atti del Convegno internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2000. Roma: Carocci.

___________. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. Bollettino dei docenti di matematica, 32(62), 51–58.

Ferrater, J. (1966). Las Filosofías de Ludwig Wittgenstein. Barcelona.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Revista EMA, 7(2), 127-170.

___________. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: Particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática, 19(2),* 95–128.

Font, V., Godino, J. D. & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, *27 (2):* 2 -7.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, 97-124.

Frege, G. (1985). Sentido y referencia (U. Moulines, Trad.). En: Estudios sobre semántica (pp. 51-86). Madrid: Orbis (Original publicado en 1892).

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mconexión matemáticans hechos por la escuela secundaria estudiantes en la realización de tareas de cálculo. *Enterrarnaciónal diario of Matemáticaal Education en Science and Technology*, 49 (2), 227–252. doi: 10.1080 / 0020739X.2017.135599

____________. (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. Mathematics Education Research Journal.

____________. (2020). Exploring pre-university students' mathematical con- nections when solving Calculus application problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.

Geoffrey, Pratt, Ochs y Gómez, (2000). Pragmática: conceptos claves. Tomado. https://digitalrepository.unm.edu/abya_yala/431

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3),* 325-355. Recuperado de http://rdm.penseesauvage.com/RDM-Vol-14-3.htm

Godino, J. D; Batanero, C. & Roa, R. (2000). Análisis Onto-Semiótico de problemas Combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics, 60 (1):* 3-36. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_ontosemiotico_combinatoria.pdf

Godino, J. D. & Arrieche, M. (2001). Génesis de un tema de investigación: Papel de la teoría de conjuntos en la formación de maestros. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Maurio Castro (pp. 245-255). Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*: 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-6-2. [155 páginas; 2,6 MB]. Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada.

___________. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Granada.

Godino, J. D.; Bencomo, D; Font, V; Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Revista Paradigma, 27(2),* pp. 1-25.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2),* 127-135.

___________. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

___________. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics Education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2),* 127-135.

Godino, J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D; Castro, W.; Ake, L. & Wilhelmi, M. (2012) . Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema.* 483-512.

Godino, J. D; Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. For the Learning of Mathematics, 39 (1), 37- 42

Goetz, J.P. & Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). Handbook of research design in mathematics and science education. Mahwah New Jersey- London: LEA.

Hjemslev, L. (1943/1974). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* 2ª Ed. [J. Díaz, Trad.]. Madrid: Gredos, 1971 (original publicado en 1943).

Kieran, C. & Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.) Proceedings of the 29th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 193-200). Melbourne: PME.

Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D. & Drijvers, P. (2013). Desing researches' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *The International Journal on Mathematics Education,* 45, 1045-1056.

Knuth, E., Stephens, A., Mc-Neil, N., & Alibali, M. (2008). The importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 13, Nº 9, pp. 514-519.

Latas, J. & Moreira, D. (2013). Explorar conexões entre matemática local e matemática global. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 6(3),* 36–66.

Leontiev, A. (1969). *El hombre Nuevo*. Barcelona: Martínez Roca.

Lotman, Y. (1998). *La semiosfera II. Semiótica de la cultura, del texto y de la conducta y del espacio.* Valencia: Universidad de Valencia.

Ley 115 de 1994. Ley General de Educación y Desarrollos Reglamentarios. Bogotá, D.C.: Autor. Ministerio de Educación Nacional.

Mejía, G y Rojas, P. (2020). Interpretaciones y Equivalencia de Gráficos Estadísticos. Un estudio con profesores de matemáticas. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16 (60),* 155-176.

Mejías, C. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Girona. España.

Ministerio de educación nacional. (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá. D.C.

___________. (2006). Estándares Básicos de calidad. Área de Matemáticas. Bogotá, MEN.

Montiel, M. y Wilhelmi, M. R. (2017). Funciones semióticas para el análisis de procesos de estudio integrados de matemáticas y música en la universidad. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/montiel_wilhelmi.pdf

National Council of Teachers of Mathematics- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

___________. NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Thales.

Nubiola, J. (2004). Pragmatismos y relativismo: C. S. Peirce y R. Rorty. Intuición, 1(2), 1- 12. Recuperado de: http://revistaintuicion.info/index.php/int/article/view/13/html

Pérez, H. (2008). Hacia una semiótica de la comunicación Comunicación y Sociedad, Universidad de Guadalajara Zapopan, México. pp. 35-58.

Peirce, C. S. (1931/1958). *Collected Papers, vol. I-VIII.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.

___________. (1960). Collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 2. Cambridge (Mass.): Harvard University Press. Recuperado: https://colorysemiotica.files.wordpress.com/2014/08/peirce-collectedpapers.pdf

Peña, C; Lozano, J & Abril, G, (1978). Bibliografía sobre análisis semiótico de las comunicaciones de masas.

Pochulu, M. (2012). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. In: POCHULU, M. Y.; RODRÍGUEZ, M. (Coord.). Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Villa María: Editorial Universitaria Villa María, p. 63-89.

Pontón, T. (2015). Foro. *Transición colegio-universidad. Problemática del rendimiento académico de los estudiantes en matemáticas.* Universidad Javeriana Seccional Cali. 01 de diciembre.

Radford, L. (2004). Syntax and Meaning. In M. J. Høines and A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 28), Vol. 1* (pp. 161-166). Norway: Bergen University College.

___________. (2006). Semiótica y educación matemática (pp. 7-21). Radford, L. & D´Amore (Eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. Relime, Número Especial.

___________. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities, PNA, 4(2), 37-62.

Ribes-Iñesta, E (2007). Lenguaje, aprendizaje y conocimiento. *Revista Mexicana de Psicología, 24(1),* 7-14. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=243020635002

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. EMA, "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.

Rodríguez, G. Gil, J. y García, E. (1996). *Métodos de investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Rodríguez, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2020). A new view about connections. The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos.* Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de:

https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/16315/RojasGarzonPedroJavier2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y

___________. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.* Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. DOI: https://doi.org/10.14483/9789588832333

Rorty, R. (1996). *Consecuencias del pragmatismo*, Madrid, Tecnos, trad. de José Miguel Esteban Cloquell, 1996. [Consequences of Pragmatism (Essays: 1972- 1980), Minneapolis, University of Minnesota Press, 1982.

___________. (1982) *Consequences of Pragmatism*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

___________. (1991). Contingencia, ironía y solidaridad (A. Sinnot, Trad.). Barcelona: Paidós. Recuperado de: http://www.bioetica.org/umsa/produccion/Rorty.pdf

Sackur, C., Drouhard, J.-P., Maurel, M., & Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire? [How to get at hidden knowledge in algebra and what to make of it?]. Repères-IREM, 28, 37–68.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. Educational. *Studies Mathematics*, *77*, 285-311.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot. (Primera edición, 1916).

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series. London, The Falmer Press.

Socas, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, cap. 5., pp. 125-154, en Rico, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori, Barcelona.

Solares, A. & Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 115-148.

Stake, R.E. (1994). Case Study, en N.K. Denzin & Y.S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative* Research (pp. 236-247). London: Sage.

Vásquez, A (2005): Rorty: pragmatismo, ironismo liberal y solidaridad. *Revista Telemática de Filosofía del Derecho*, núm. 8, pp. 337-346.

Vera, S. (2001). La filosofía del lenguaje en Wittgenstein y la cuestión del lenguaje privado. Universidad Autónoma del Estado de México Toluca, México.

Vergel, R (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 39, 65-76.

Vygotsky, L. S. (1987). Historia del desarrollo de las Funciones cultural en: Educación Especial: Razones, Visión Actual y Psíquicas Superiores, Ed. Científico Técnica, Ciudad de la Desafíos, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, Cuba Habana Cuba.

___________. (1931/2000). Obras escogidas (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor.

___________. (1934/2007). Pensamiento y habla (A. Ariel González, Trad.). Buenos Aires: Ediciones Colihue. Wertsch, J. (1988).

Wertsch, J. (1988). Vygotsky y la formación social de la mente (J. Zanón & M. Cortés, Trads.). Barcelona: Paidós (Original publicado en 1985)

Wittgenstein, L. (1999). Investigaciones filosóficas. Barcelona: Altaya (Original publicado en 1958). Disponible en http://www.uruguaypiensa.org.uy/imgnoticias/765.pdf.

___________. (1953). Philosophical investigations. Oxford, USA: Basil Blackwell.

___________. (1976). Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas. Madrid, España: Alianza.

Yang, X. (2014). Conception and characteristics of expert mathematics teachers in China. Berlin: Springer.

Yin, Robert K. (1994). Case Study Research: Design and Methods. Sage Publications, Thousand Oaks, CA.