ANEXOS

ANEXOS A

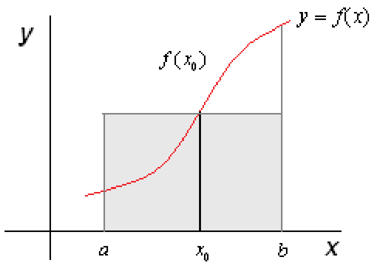
República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua
Departamento de Ciencias Básicas

PRUEBA PARCIAL

Nombre y Apellido__________________________________**C.I**______________

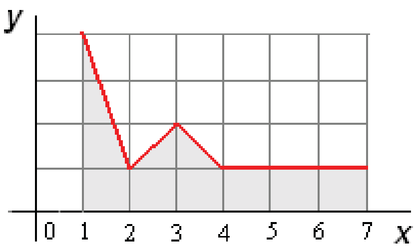
Argumenta tu respuesta a cada uno de las siguientes preguntas.

1. El Teorema del Valor Medio para integrales plantea: Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $x_o \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$. Interprete este teorema geométricamente, explique.



2. ¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$? Explique.

3. De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.



4. Calcule: $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx$

5. Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo $[-3,3]$ el área bajo la curva $y = x^2 + 1$

6. La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$. Si t es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?

7. Determine el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 1 \;\; y \;\; g(x) = 3 - x^2$

8. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje x la región limitada por $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

9. Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar

$$\int_0^{22} c(t)dt$$

Segundos después de la inyección	Concentración (mg/litro)
0	0
2	0
4	0,6
6	1,4
8	2,7
10	3,7
12	4,1
14	3,8
16	2,9
18	1,5
20	0,9
22	0,5

10. La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$ el eje de las x y el eje de las y. Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.

11. Calcula la integral $\int_0^4 (x^2 + 5)dx$ mediante sumas de por la derecha, tome h=0,5.

Puntuación

Pregunta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
Valor	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**

ANEXOS B

La Victoria, 25 de octubre de 2007

Estimado Estudiante

Me dirijo a Usted en la oportunidad de informarle que me interesa desarrollar un proceso de estudio tendiente a mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral que se administra en Matemática II de la carrera informática. Es una actividad personal, por eso requiero de veinte (20) estudiantes de esta sección que quieran participar en ella.

Los estudiantes que participen en este proceso asistirán en un horario diferente a l de las secciones 1 y 2 que lo convendremos, ya que requeriremos del uso del Laboratorio de Informática de la sede SOCO.

Si deseas formar parte de este nuevo grupo escribe tu nombre y número de cédula y señala en las horas en blanco del siguiente horario tu disponibilidad.

¡Gracias!

Nombre y Apellido:____

Sección:_____________ Cédula de Identidad:__________________

Atentamente,

Prof. Luis Capace

TU	HORA/DIA	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
M	7:30 A 8:15					
A	8:20 A 9:00					
Ñ	9:05 A 9:50					
A	9:55 A 10:35					
N	10:40 A 11::25					
A	11:30 A 12:15					

T	1:30 A 2:15					
A	2:15 A 3:00					
	3:05 A 3:50					
R	3:55 A 4:40					
D	4:45 A 5:30					
E	5:30 A 6:15					

ANEXOS C

MAI-203

Grupo 1 (Miércoles y jueves de 7:30 a 9:00 am.)

	Apellidos y Nombres	Cédula	Sección	Miércoles	Jueves	Observaciones
1	Mora, Marwuis	19468862	1	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
2	Guariguata, María	16849424	1	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
3	Terán, Yeniffer	18640130		7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
4	Villegas, Jomaira	17598935	1	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
5	Guevara, Diony	17701302	2	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
6	Pilligua, Jhon	19740705	2	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
7	Pérez, Félix	19471756	2	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	
8	Garrido, Fredy	19136457	2	7:30 a 9:00	7:30 a 9:00	

MAI-203

Grupo 2 (Miércoles de 7:30 a 9:00 am. Y viernes 9:00 a 10:30 am.)

	Apellidos y Nombres	Cédula	Sección	Miércoles	Viernes	Observaciones
1	Pino, Jesús	19137241	1	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
2	Chati, Diana	22294652	1	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
3	Blanco, Leonardo	19269041	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
4	Campos, Alexander	17387288	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
5	Khandji, Mónica	19594668	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
6	Salas, Madering	19137557	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
7	Tiberio, Maryelyz	17143076	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	
8	Salvatierra, Ronaldy	17042160	2	7:30 a 9:00	9:00 a 10:35	

ANEXOS D

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN CULTURA Y DE PORTES
INSTITUTO UNIVERSITARIO EXPERIMENTAL DE TECNOLOGÍA
DE LA VICTORIA
LA VICTORIA. ESTADO ARAGUA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

(MAI-203)
PERÍODO: 2007-II HORAS PROGRAMADAS: 64

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

SEMANA	CONTENIDOS	EVALUACIÓN
1	Función primitiva. Integral indefinida. Propiedades. Integrales inmediatas	
2	Integraciones por sustitución. Integración por partes	
3	Integración por partes. Integración de funciones racionales	PP1- 20%
4	Integración de funciones racionales. Integración de funciones trigonométricas	
5	Integración por sustituciones trigonométricas	PP2- 20%
6	Integral definida. Propiedades fundamentales de la integral definida.	
7	Funciones definidas por integrales. Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema del valor medio para integrales. Propiedades de la integral definida.	
7	La integral vista como una sumatoria. Aplicaciones de la integral	
8	Cálculo del área de regiones limitadas por funciones continuas	PP3- 20%
9	Cálculo del volumen de sólidos de revolución. Volúmenes de sólidos.	
10	Cálculo del área de la superficie de un sólido de revolución. Longitud de arco	
11	Aplicaciones a la economía y modelos varios	
12	Integrales impropias. Convergencia de integrales impropias	PP4- 20%
13	Criterios de convergencia de integrales impropias	
14	Integración numérica: Newton, Trapezoidal y parabólica o de Simpson. Error de una aproximación	
15	Aplicaciones de integración numérica.	
16	Aplicaciones varias de la integral.	*PP5- 20%*

17		

Bibliografía

Larson, Hostetler y Edward. Cálculo. Editorial Mc Graw Hill Volumen 1. España. 1999

Edward y Penney. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Prentice Hall. Hispanoamérica. México. 1996

Edwin J. Purcell, Dale Varberg. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Prentice Hall. 1992
Hispanoamérica. México.

Piskunov N. Cálculo Diferencial e Integral. UTEHA. Grupo Noriega Editores. México. 1983

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
VALENCIA -VENEZUELA

ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA

PROGRAMA SINÓPTICO

DEPARTAMENTO Y/ O CÁTEDRA: MATEMÁTICA REQUISITO: MA1B01-MA1B02 FECHA: 05/2001 .

ÁREA DE FORMACIÓN: CIENCIAS BÁSICAS CARÁCTER: OBLIGATORIO .

CÓDIGO	ASIGNATURA	T	P	L	HT	UC
MA2B03	ANÁLISIS MATEMÁTICO I I	3	2	0	5	4

JUSTIFICACIÓN:
La asignatura está estructurada de tal forma que los estudiantes adquieran un conjunto de conocimientos básicos del cálculo integral que le permiten desarrollar hábitos de pensamiento lógicos con los cuales podrán afrontar con éxito muchos problemas de aplicación. También proporciona herramientas necesarias para la comprensión de conocimientos posteriores de la carrera. Además suministra las herramientas matemáticas que le permitirán alcanzar madurez en el enfoque de problemas relacionados o no con su profesión, así como también lo ejercitan en las técnicas para analizar, solucionar problemas y tomar decisiones.

OBJETIVO GENERAL:
Aplicar los conocimientos para resolver problemas analíticos, geométricos y físicos de utilización frecuente en el campo de la Ingeniería. Manejar el lenguaje del cálculo integral y series, en forma clara, precisa, y ordenada. Desarrollar el hábito de razonamiento lógico estimulando la creatividad y el sentido crítico. Comprender y usar los conceptos matemáticos necesarios en el aprendizaje de conocimientos posteriores. Constatar la aplicabilidad de la asignatura en los sucesos de la vida cotidiana.

CONTENIDOS:
UNIDAD I. Tema 1. Integral Indefinida, El diferencial de una función y sus propiedades. Definición de integral indefinida. Antiderivadas. Teorema de Antiderivación. Relación con los diferenciales. Propiedades de la integral indefinida. Integrales inmediatas. Tema 2. Métodos de integración: **Por descomposición** en sumandos, por cambio de variable, por sustitución y sustitución trigonométrica, por partes. Integración de funciones trigonométricas e hiperbólicas mediante: Cambio de variable, identidades, fórmula de Euler. Integración de Funciones Racionales: Raíces Reales: distintas y repetidas. Raíces Imaginarias: distintas y repetidas. Método de Hermite. Integración de funciones trigonométrica racionales en senx y **cosx. Integración de funciones irracionales. Integración de funciones binómicas. Tema 3: Aplicación de la integral** indefinida: Problema geométricos y físicos. **UNIDAD II. Tema 1. Integral definida: Introducción. Participaciones de un** intervalo (a,b). Definición de: longitud, subintervalo del intervalo (a,b). Diámetro de una partición del intervalo (a,b). Sumas superior, inferior y de Riemann de una función sobre una partición de (a,b). Definición de: Integral superior, inferior, de Riemann. La integral definida como límite de suma. Función Integrable. Integrabilidad de funciones continuas y de funciones monótomas. Propiedades de la integral definida. Teorema del valor medio para integrales. Teorema **Fundamental del Cálculo de variable en una integral definida. Tema 3. Integrales Impropias. Tema 4. Aplicaciones de la** integral definida: Cálculo de áreas planas. Coordenadas Cartesianas. Coordenadas Paramétricas. Coordenadas polares. **UNIDAD III. Tema 1. Series Numéricas: Definición de una serie numérica. Tipos de series. Sucesión de sumas parciales. Definición de convergencia y de divergencia. Serie geométrica. Serie** telescópica. Serie P. Teorema de condición necesaria de convergencia. Criterio del término enésimo para series divergentes. Propiedades de convergencia. Criterio de convergencia: de comparación, de comparación por límite, de la integral, de la razón o cociente. De la raíz enésima, de Raabe. Convergencia de una serie alterna: Criterio de Leibniz. Error de series alternas. Convergencia absoluta. **Convergencia condicional. Propiedades. Tema 2. Series de Potencias: Definición de: Serie de Potencias. Región de** convergencia. Serie de Taylor. Serie de Maclaurin. Definición e integración de series de potencias. Operaciones básicas para series de potencias. Serie binomial.

ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA
Exposición teórico - práctica. Resolución de problemas. Trabajos en grupos.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÍCLO BÁSICO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

CÁLCULO II (0252)

SEMESTRE 1- 2006

EVALUACIÓN

La evaluación de curso consistirá en:

- **EXÁMENES PARCIALES:** Se realizarán tres (3) exámenes parciales teóricos prácticos, en las semanas indicadas en el cronograma estimado y con los contenidos que en él se indican. Cada profesor fijará con sus alumnos la fecha de estas evaluaciones.

La inasistencia a dos (2) exámenes parciales trae como consecuencia la pérdida de la materia. La nota final del curso será el promedio de los tres exámenes parciales.

- **EXAMEN DE RECUPERACIÓN POR PARCIAL**: Es un examen departamental que se realiza en la semana, día y hora que fije control de estudio. Ofrece al estudiante la oportunidad de recuperar la menor de las notas obtenidas en las evaluaciones parciales mediante un examen cuyo contenido será el mismo del parcial. Tienen derecho a presentar este examen los estudiantes que hayan acumulado un mínimo de diecisiete (17) puntos en los otros dos parciales.

Así mismo, el examen de recuperación ofrece al estudiante la oportunidad de recuperar un parcial que haya perdido por causas justificadas, la cual ha debido ser notificada al profesor.

La nota obtenida por el estudiante en el examen de recuperación ***sustituirá totalmente*** la calificación previa en dicho examen.

- **EXAMEN DE REPARACIÓN**: Esta evaluación se realizará en la fecha que fija a tal fin la oficina de control de estudios. Tendrán derecho a presentarlo los estudiantes que hayan asistido al menos a dos (2) parciales realizados durante el semestre.

Al entregar el resultado de las evaluaciones el profesor debe fijar fecha, hora y lugar de la revisión de prueba. Todo estudiante tiene derecho a la revisión de prueba.

CONTENIDO

- **PROGRAMA SINÓPTICO**

Tema 1: La integral indefinida o antiderivada.
Tema 2: La integral definida.
Tema 3: Integrales Impropias.
Tema 4: Aplicaciones de la integral definida.
Tema 5: Series numéricas.

Tema 6: Series de Potencias.

- ***PROGRAMA DETALLADO***

1. LA INTEGRAL INDEFINIDA O ANTIDERIVADA.
   1.1 Primitiva de una función.
   1.2 Integrales inmediatas. Tablas de integrales.
   1.3 Propiedades de la integral indefinida.
   1.4 Métodos de integración:
      1.4.1 Cambio de variabla o sustitución.
      1.4.2 Por partes.
      1.4.3 Integración de funciones trigonométricas. Cambio universal. Fórmulas de reducción.
      1.4.4 Integrales con trinomios de segundo grado.
      1.4.5 Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones parciales elementales.
      1.4.6 Integración de funciones irracionales mediante sustitución de funciones trigonométricas.
2. LA INTEGRAL DEFINIDA.
   2.1 Introducción. Partición de un intervalo. Notación de sumatoria. Propiedades.
   2.2 Área bajo la curva. Sumas superiores e inferiores.
   2.3 Integral definida: concepto y propiedades.
   2.4 Teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del cálculo integral.
   2.5 Cálculo de integrales definidas. Teorema de sustitución. Integración por partes.

4 3. INTEGRALES IMPROPIAS.
   3.1 Concepto y clasificación. Notación.
   3.2 Ejemplos de integrales impropias.
   3.3 Conceptos de convergencia y divergencia.
   3.4 Criterios de convergencia: comparación directa y al límite.

3 4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.
   4.1 Área entre curvas.
   4.2 Volumen de un sólido.
      4.2.1 Método de las secciones paralelas.
      4.2.2 Sólidos de revolución: método de discos y capas cilíndricas.
   4.3 Longitud de una curva dada en forma explícita y en forma paramétrica.
   4.4 Área de una superficie de revolución.
   4.5 Momento y centro de masa de una lámina y de un alambre
   4.6 Teorema de Pappus.
   4.7 Trabajo de una fuerza variable. Resortes. Vaciado y llenado de tanques. Gravitación universal (opcional).

5. SERIES NUMÉRICAS
   5.1 Sucesiones. Convergencia.
   5.2 Definición de serie numérica.
   5.3 Suma n-ésima parcial.
   5.4 Convergencia y divergencia de series numéricas.
   5.5 Series particulares: geométricas, telescópicas y armónicas. Propiedades.

5.6 Series alternas. Criterios de convergencia. Estimación del resto.

6. SERIES DE POTENCIAS
   6.1 Definiciones.
   6.2 Convergencia. Radio e intervalo de convergencia.
   6.3 Derivación e integración de series de potencias.
   6.4 Desarrollos de funciones en series de Taylor y MacLaurin.

BIBLIOGRAFÍA

- Guerreiro C. y Rios A.: "Cálculo II". Edit. Departamento de Matemáticas Aplicadas UCV- Ingeniería. 2005.
- Thomas: "Cálculo de una Variable". Edit. Pearson. 2005
- Thomas: "Cálculo en varias variables". Edit. Paerson.2005
- Larson, Hostetler y Edwards: "Cálculo" Vol. 2. Edit. Mc. Graw Hill 1995
- Leithold L.: "El Cálculo con Geometría Analítica". Edit. Harla.
- Smith y Minton: "Cálculo". Vol 1. Edit. McGraw Hill.
- Stewart J.: "Cálculo de una Variable". Edit. Thomson Learning.

REPUBLICA DE VENEZUELA
MINISTERIO DE EDUCACION
DIRECCION GENERAL SECTORIAL DE EDUCACION SUPERIOR
INSTITUTO UNIVERSITARIO EXPERIMENTAL
DE TECNOLOGIA DE LA VICTORIA
LA VICTORIA ESTADO ARAGUA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

PROGRAMA
ASIGNATURA: MATEMATICA II

SEMESTRE	T	TP	T/HS	UC
2do.	4	2	6	5

OBJETIVOS GENERALES

Analizar problemas técnicos enmarcados en el campo de la Mecánica, dentro de una perspectiva de correlación con otras áreas de la especialidad utilizando la metodología adecuada y herramientas tales como : El Cálculo Integral, Resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, con coeficientes constantes, la transformada de Laplace y la integral doble, que permita el abordaje de situaciones complejas en el contexto futuro de desempeño.

PROGRAMA

DEPARTAMENTO:

ASIGNATURA: MATEMATICA II

CODIGO: MAM205

SEMESTRE	T	TP	T/HS
2do.	4	2	6

CONTENIDOS	OBJETIVOS TERMINALES
UNIDAD 1 : CALCULO INTEGRAL Y SUS APLICACIONES 1.1. Definición de primitiva de una función 1.2. Integral indefinida 1.3. Integral definida. 1.4. Propiedades de la integral 1.5. Primero y segundo teorema fundamental del cálculo integral. 1.6. Métodos de integración : sustitución e integración por partes 1.7. Integrales Trigonométricas 1.8. Sustituciones trigonométricas 1.9. Método de las fracciones parciales simples 1.10 Area bajo la gráfica de una función 1.11 Longitud de Arco de una función real 1.12 Volumen de sólidos de revolución	- El estudiante al término de la unidad, deberá ser capaz de : 1.1. Mostrar destreza en el cálculo de integrales por sustitución y por partes. Y otros métodos 2.2. Aplicar la integral definida, en la resolución de problemas geométricos y físicos referentes a la Mecánica, a partir del marco teórico analizado

PROGRAMA

DEPARTAMENTO:

ASIGNATURA: MATEMATICA II

CODIGO: MAM205

SEMESTRE	T	TP	T/HS	L
2do.	4	2	6	[illegible]

CONTENIDOS	OBJETIVOS TERMINALES	T
UNIDAD 1 : CALCULO INTEGRAL Y SUS APLICACIONES	- El estudiante al término de la unidad, deberá ser capaz de :	2C
1.1. Definición de primitiva de una función	1.1. Mostrar destreza en el cálculo de integrales por sustitución y por partes. Y otros métodos	
1.2. Integral indefinida		
1.3. Integral definida.		
1.4. Propiedades de la integral		
1.5. Primero y segundo teorema fundamental del cálculo integral.	2.2. Aplicar la integral definida, en la resolución de problemas geométricos y físicos referentes a la Mecánica, a partir del marco teórico analizado	
1.6. Métodos de integración : sustitución e integración por partes		
1.7. Integrales Trigonométricas		
1.8. Sustituciones trigonométricas		
1.9. Método de las fracciones parciales simples		
1.10 Area bajo la gráfica de una función		
1.11 Longitud de Arco de una función real		
1.12 Volumen de sólidos de revolución		

CONTENIDOS		OBJETIVOS TERMINALES	Nº T
	1.13 Area de una superficie de revolución		
	1.14 Trabajo efectuado por una fuerza integrable		
	1.15 Momento de inercia, Centro de masas, Centroide		
	1.16 Integrales impropias		
	1.17 Tipos de integrales impropias		
	1.18 Definición de integral impropia convergente		
	1.19 Criterios de convergencia		
UNIDAD 2	**ECUACIONES DIFERENCIALES**		
	2.1 Definición de Ecuación Diferencial 2.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales, lineales, homogéneas 2.3. Orden de una Ecuación Diferencial 2.4. Ecuaciones diferenciales de primer orden : 2.4.1. En variables separables 2.4.2. Homogéneas en X, y 2.4.3. Exactas 2.5. Factor integrante de una Ecuación diferencial de primer orden y lineal 2.6. Ecuación diferencial de Bernoulli		- Resolver Ecuaciones Diferenciales de primer y segundo orden, con coeficientes constantes, que rigen el estado de un sistema Mecánico, a partir del marco teórico analizado.	20

C O N T E N I D O S	OBJETIVOS TERMINALES	Nº Horas T TP
2.7. Problemas de valores iniciales del tipo : (P_1) : $y' + P(x)y = 0$ $y(x_o) = y_o$ (P_2) : $y' + P(x)y = Q(x)$ $y(xo) = y_o$ 2.8. Soluciones particulares y generales 2.9. Problemas que conducen a resolver una Ecuación Diferencial de Primer Orden 2.10 Ecuaciones Diferenciales de Segundo orden a Coeficientes Lineales 2.10.1 Homogénea 2.10.2 No Homogénea 2.11 Polinomio característicos de una Ecuación Diferencial de segundo orden 2.12 Operadores Diferenciales 2.13 Solución general de la Ecuación : (H): $ay'' + by' + cy = 0$ 2.14 Solución general de la Ecuación : (N-H): $ay'' + by' + cy = Q(x)$ 2.15 Métodos de Variación de Parámetros 2.16 Métodos de los Coeficientes Indeterminados		

CONTENIDOS	OBJETIVOS TERMINALES
2.17 Problemas que conducen a resolver una Ecuación Diferencial de segundo orden, con coeficientes constantes.	
UNIDAD 3 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE	- El estudiante al término de la Unidad, deberá ser capaz de :
3.1. Definición de la Transformada de Laplace	3.1. Resolver problemas de valores iniciales, utilizando la transformada de Laplace
3.2. Propiedades de la Transformada de Laplace	3.2. Utilizar la transformada de Laplace, para calcular la función de transferencia de un sistema mecánico, a partir del marco teórico analizado
3.3. Transformada de Laplace de funciones elementales	
3.4. La Transformada de Laplace de una función periódica	
3.5. Función escalonada unitaria de Heaviside	
3.6. Definición de Convolución de funciones	
3.7. La Transformada Inversa de Laplace	
3.8. Fórmulas fundamentales	
3.9. Método de las fracciones parciales simples, para calcular transformada inversa de Laplace	
3.10 Cálculo de transformada inversa de Laplace, utilizando el teorema de Convolución	
3.11 Resolución de ecuaciones diferenciales utilizando la Transformada de Laplace	
3.12 Aplicación de la Transformada de Laplace en el cálculo de la función de transferencia de un sistema mecánico.	

MECANICA

C O N T E N I D O S	OBJETIVOS TERMINALES	Nº H
UNIDAD 4 : CALCULO EN VARIAS VARIABLES		
4.1. Funciones de dos o más variables 4.2. Límite y continuidad de una función de dos variables 4.3. Límites Unidimensionales, Bidimencionales e Iterados 4.4. Derivadas parciales 4.5. El gradiente de una función de 2 o más variables 4.6. Derivada Direccional 4.7. Interpretación Geométrica del Gradiente y Derivada Direccional 4.8. Funciones compuestas 4.9. Regla de la cadena 4.10 Definición Integral doble de una función definida y acotada en un rectángular 4.11 Cálculo de integrales dobles, por integración unidimensional reiterada 4.12. Intercambio en el orden de integración 4.13 Integrales dobles extendidas a regiones más generales 4.14 Cambios variables en la Integral doble 4.15 Cambio de Coordenadas polares 4.16 Aplicaciones de la Integral doble al cálculo de : Area, Vólumenes, Centro Masa, Momentos de Inercia 4.17 Extensiones a la Integral Triple	- Aplicar la integral doble a problemas que involucren el cálculo de : Area, Vólumenes, Momentos de Inercia, etc., a partir del marco teóricc analizado	14

MECANICA-10/88

MINISTERIO DE EDUCACION
DIRECCION GENERAL SECTORIAL DE EDUCACION SUPERIOR
INSTITUTO UNIVERSITARIO EXPERIMENTAL
DE TECNOLOGIA DE LA VICTORIA
LA VICTORIA — ESTADO ARAGUA

Núm. ______________

ESTUDIOS BASICOS

Asignatura: Matemática II

Código : MAE205

Prelación : MAE105

Semestre : II

Unidades Crédito: 5

Horas por Semestre: 108

Horas por semana :

Teoría : 4

Trabajo Práctico : 2

OBJETIVOS GENERALES:

Al finalizar esta asignatura el estudiante estará en capacidad de:

- Utilizar el Cálculo Integral en la resolución de problemas
- Resolver ecuaciones diferenciales
- Aplicar las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas
- Aplicar la transformada de Laplace en la resolución de problemas

Av. Ricaurte - Urb. Industrial SOCO - fte. Mavipianca - Telfs. (044) 214723-215031 - Apartado 109
Codigo Postal 2121 - Telex: 44130 IUT - LV - VC - Fax 215665

MINISTERIO DE EDUCACION
INSTITUTO UNIVERSITARIO EXPERIMENTAL
DE TECNOLOGIA DE LA VICTORIA

DEPARTAMENTO DE ELECTRICIDAD

CONTENIDOS	OBJETIVOS TERMINALES	N° Hr T	TP
I. INTEGRALES: Definición de primitiva, cálculo de algunas integrales sencillas por definición, funciones integrables. Definición de Rieman. 1er. y 2do. teorema del cálculo integral. Métodos de integración, sustitución por partes. Integración de funciones que contengan un trinomio de segundo grado. Integración de funciones racionales. Integración de funciones irracionales. Integración de funciones trigonométricas. Aplicaciones del cálculo integral, cálculo de áreas longitud de arco, y trabajo realizado por una fuerza integral. Integrales impropias	- Al finalizar la unidad el estudiante estará en capacidad de: utilizar los diferentes métodos de integración para el cálculo de integrales. - Aplicar el cálculo integral a la resolución de problemas.	30	1
II. ECUACIONES DIFERENCIALES: Def de ecuación diferencial, orden de una ecuación diferencial ordinaria, diferenciar una ecuación diferencial ordinaria de los parciales. Ecuaciones diferenciales lineales. - Ecuación diferencial homogéneas. Ecuación diferencial de 1er. orden. Método de separación de variable. Ecuación de Bernoulli	- Resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. - Utilizar las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas de circuitos RC-L en series, paralelo y serie paralelo.	22	1?

CONTENIDOS	OBJETIVOS TERMINALES	Nº Hr T	T
Problemas de valores iniciales de tipo a) $y' + P(x)y = 0$ $y(0) = y_0$ b) $y' + P(x)y = Q(x)$ $y(0) = y_0$ Ecuaciones diferenciales de segundo orden, ecuaciones lineales homogéneos de segundo orden con coeficientes constantes. E.D.O. no homogóneos de segundo orden con coeficientes constantes. Método de variación de parámetros. Método de coeficientes indeterminado. Ecuación que rige el estado de un circuito RCL, en serie en paralelo y serie paralelo Masa, resorte, amortiguador, oscilaciones forzadas. Resonancia.			
III. TRANSFORMADA DE LAPLACE : Definición, teoremas; formulas elementales la transformada de laplace de una función periódica, escalonada unitaria de heaviside Transformación inversa. (Fracciones parciales/convolución tablas. Solución de Ecuaciones diferenciales. Lineales Circuitos	- Resolver problemas de valores iniciales usando la transformada de laplace y su inversa.	20	1[illegible]

REPÚBLICA DE VENEZUELA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN
DIRECCIÓN GENERAL SECTORIAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR

INSTITUTO UNIVERSITARIO EXPERIMENTAL
DE TECNOLOGÍA DE LA VICTORIA
LA VICTORIA - ESTADO ARAGUA

Número:

ADMINISTRACION

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS

Asignatura:	MATEMATICA II	Horas por Semestre:80
Código :	MAA-204	Horas por Semana
Prelación :	MATEMATICA I	Teoría: 3
Semestre :	II	Trabajo Práctico: 2
Unidades de Créditos: 5		

OBJETIVOS GENERALES:

Al finalizar esta asignatura, el estudiante estará en capacidad de :

- Aplicar el cálculo integral en la resolución de problemas de economía.
- Aplicar el cálculo Matricial en la resolución de problemas de economía.

Av. Universidad (al lado comando FAN-Peaje) y Av. Ricaurte, Urb. Industrial SOCO (frente Maviplanca) Teléfonos (044) 214878-214723 Fax (044) 215031- Apartado 109 - Código Postal 2121 - I:U:E:T:-L:V.

UNIDAD I

1.1. Funcion Primitiva
1.2. Integral Indefinida
1.3. Propiedades de la Integral Indefinida
1.4. Integrales Inmediatas
1.5. Integración por cambio de variable o sustitución
1.6. Integración por parte
1.7. Integración de funciones Racionales
1.8. Integración de Funciones Trigonométricas
1.9. Integración por sustitución Trigonométricas

UNIDAD II

2.1. La integral definida (Fórmula de Barrow)
2.2. Propiedades fundamentales de la integral definida
2.3. Funciones definidas por integrales
2.4. Teorema Fundamental del cálculo
2.5. Cambio de variable en una integral definida
2.6. Aplicaciones de la integral definida:
- Cálculo del área de una región limitada por funciones continua.
- Volumen de Sólidos de revolución
- Cálculo del área superficies de revolución
- Fórmula del valor medio de una función
- Aplicaciones a la economía

UNIDAD III

3.1. Integrales impropias

3.2. Integrales Impropias en un Intervalo infinito

3.3. Criterios para establecer la convergencia de integrales impropias.

3.4. Integrales Impropias no acotadas

UNIDAD IV

4.1. Matrices- Definición- Elementos- Notación

4.2. Oden de una matriz cuadrada

4.3. Tipos de matrices: Matriz columna, Matriz fila, Matriz nula, Matriz opuesta, Matriz diagonal, Matriz triangular, Matriz simétrica, Matriz inversa y Matriz Identidad.

4.4. Igualdad de Matrices

4.5. Operaciones con matrices:

- Adición y sus propiedades
- Sustración
- Multiplicación de un escalar por una matriz
- Multiplicación de matrices y sus propiedades

4.6. Algunas matrices notables:

- Matriz escalonada por filas
- Matriz escalonada reducidas por filas

4.7. Operaciones elementales con filas

UNIDAD V

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales

5.2. Sistemas compatibles e Incompatibles

5.3. Método de Gauss-Jordan para resolver sistemas de de ecuaciones.

UNIDAD VI

6.1. Determinante- Definición- Notación

6.2. Propiedades de los determinantes

6.3. Método de los coefactores para hallar el determinante de una matriz.

6.4. Matriz Adjunta

$$A = \frac{ADJ\ (A^t)}{det\ (A)}$$

6.5. Inversa de una matriz por Gauss Jordan

6.6. Regla de Cramer para resolver sistemas de n-ecuaciones con n-Incognitas.

ANEXOS E

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua

Papel de trabajo:

Calculemos las siguientes integrales con ayuda del software MAPLE:

1. $\int e^x dx$

Con Maple
```
> Int(exp(x),x)=int(exp(x),x);
```

2. $\int \frac{dx}{1+x^2}$

Con Maple
```
> Int(1/(1+x^2),x)=int(1/(1+x^2),x);
```

3. $\int \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx$

Con Maple
```
> with(student);
> a:=Int(2*x/(x^2+1)^3,x):a;
> changevar(x^2+1=u,a,u);
> value(%);
> subs(u=x^2+1,%);
```

4. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$

Con Maple
```
> with(student);
> b:=Int(x/sqrt(2*x-1),x):b;
> changevar(sqrt(2*x-1)=u,b,u);
> value(%);
```

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Con Maple
```
>Int(1/sqrt(1-x^2),x)=int(1/sqrt(1-x^2),x);
```

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$

Con Maple
```
> with(student):
> c:=Int(1/(sqrt(x)*(1+sqrt(x))),x):c;
> changevar(1+sqrt(x)=u,c,u);
> value(%);
> subs(u=1+sqrt(x),%);
```

$7. \int \sqrt{1+tg^2 x}\,dx$

Con Maple

```
> Int(sqrt(1+tan(x)^2),x)=int(sqrt(1+tan(x)^2),x);
```

$8. \int \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx$

Con Maple

```
> with(student);
> e:=Int((1+ln(x))^2/x,x):e;
> changevar(1+ln(x)=u,e,u);
> value(%);
> subs(u=1+ln(x),%);
```

$9. \int \frac{e^{3/x}}{x^2}dx$

Con Maple

```
> with(student);
> f:=Int(exp(3/x)/x^2,x):f;
> changevar(3/x=u,f,u);
> value(%);
> subs(u=3/x,%);
```

$10. \int e^x \cos(e^x)dx$

Con Maple

```
> with(student);
> g:=Int(exp(x)*cos(exp(x)),x):g;
> changevar(exp(x)=u,g,u);
> value(%);
> subs(u=exp(x),%);
```

$11. \int xe^{2x}dx$

Con Maple

```
> with(student);
> h:=Int(x*exp(2*x),x):h;
> intparts(h,x);
> value(%);
> h=%;
```

$12. \int x\cos x dx$

Con Maple

```
> with(student);
> i:=Int(x*cos(x),x):i;
> intparts(i,x);
> value(%);
> i=%;
```

Con Maple

```
> with(student);
> j:=1/(x*(x-1)*(x+2)):j;
> convert(j,parfrac,x);
> map(Int,%,x);
> value(%);
```

13. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}$

14. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$

Con Maple

```
> with(student):
> k:=(x-8)/(x^3-4*x^2+4*x):k;
> convert(k,parfrac,x);
> map(Int,%,x);
> value(%);
```

15. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Con Maple

```
> with(student):
> Int(x^3/sqrt(16-x^2),x)=int(x^3/sqrt(16-x^2),x);
```

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

Con Maple

```
> with(student):
> Int(1/(x*sqrt(x^2-4)),x)=int(1/(x*sqrt(x^2-4)),x);
```

17. $\int \frac{dx}{5senx+3}$

Con Maple

```
> with(student):
> Int(1/(5*sin(x)+3),x)=int(1/(5*sin(x)+3),x);
```

18. $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Con Maple

```
> with(student):
> l:=Int(x^3*sqrt(1-x^2),x):l;
> changevar(x=sin(t),l,t);
> subs(sqrt(1-sin(t)^2)=cos(t),%);
> subs(sin(t)^3=sin(t)*(1-cos(t)^2),%);
> expand(%);
> value(%);
> l=%;
```

19. $\int x^2 e^{2x}dx$

Con Maple

```
> with(student):
> m:=Int(x^2*exp(2*x),x):m;
> m1:=intparts(m,x^2):m1;
> m2:=op(2,op(2,m1)):m2;
> m3:=intparts(m2,x):m3;
> value(%);
> m=op(1,m1)-%;
```

$$20. \int \frac{dx}{3x^2 - 5x + 2}$$

Con Maple

```
> with(student);
> f:=x->1/(3*x^2-5*x+2);
> completesquare(denom(f(x)));
> o:=Int(1/(%),x):o;
> changevar(x-(5/6)=u,o,u);
> value(%);
> subs(u=x-(5/6),%);
> Int(f(x),x)=%;
```

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua.

Departamento de Ciencias Básicas
Prof. Luis Ernesto Capace Pérez

Sesión Nº 1 **La integral definida**

Introducción

La finalidad de esta sesión es la comprensión del concepto de *integral definida* y establecer vínculos con lo que ya se conoce de la integral indefinida y los métodos de integración.

Objetivo General

Comprender el concepto de integral definida y sus propiedades.

Recursos: Material de apoyo, uso del laboratorio de informática con el software Maple (un operador simbólico y gráfico para matemática y herramienta de cálculo) y pizarra y marcadores.

Actividades con el software MAPLE
Sesión 1

Actividad 1:

```
> with(student);
> f:=x->sqrt(3+x^2);
> plot(f(x),x=-2..6,y=0..7,thickness=2);
> rightbox(f(x),x=-1..4,3);
> rightbox(f(x),x=-1..4,25);
> rightbox(f(x),x=-1..4,100);
> leftbox(f(x),x=-1..4,3);
> leftbox(f(x),x=-1..4,25);
> leftbox(f(x),x=-1..4,100);
> middlebox(f(x),x=-1..4,3);
> middlebox(f(x),x=-1..4,25);
> middlebox(f(x),x=-1..4,100);
```

Actividad 2:

```
> restart:
> with(student);
> g:=x->x^2-3*x+5;
> plot(g(x), x=-5..5,y=-3..15,thickness=2);
> middlebox(g(x),x=-1..4,4);middlesum(g(x),x=-1..4,4);
> evalf(%);
> middlebox(g(x),x=-1..4,25);middlesum(g(x),x=-1..4,25);
> evalf(%);
> middlebox(g(x),x=-1..4,65);middlesum(g(x),x=-1..4,65);
> evalf(%);
```

Actividad 3:

```
> restart;
> with(student);
> Sum('k','k'=1..n) = sum('k', 'k'=1..n);
> factor(%);
> Sum('k^2','k'=1..n) = sum('k^2', 'k'=1..n);
> factor(%);
```

Actividad 4:

```
> restart;
> Int(x^2,x=-2..1)=int(x^2,x=-2..1);
```

Actividad 5:

```
> restart:
> f:=x->x^2+1;g:=x->-x^2+3;
> solve(f(x)=g(x));
> plot({f(x),g(x)},x=-4..4,thickness=2);
> Int(f(x),x=-1..1)=int(f(x),x=-1..1);
> Int(g(x),x=-1..1)=int(g(x),x=-1..1);
```

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua.

INTEGRALES DEFINIDAS
Prof. Luis Capace
Enero 2008

Calcula las siguientes integrales definidas:

Integral	Respuesta	Integral	Respuesta
1) $\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\, dx$	$\frac{2}{9}$	**6)** $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$	2
2) $\int_{-2}^{2} \mathbf{e}^{(-1/2\, x)}\, dx$	$-2\,\mathbf{e}^{(-1)} + 2\,\mathbf{e}$	7) $\int_{-6}^{-10} \frac{1}{x+2}\, dx$	$\ln(2)$
3) $\int_{3/4\,\pi}^{1/2\,\pi} \sin(x)\, dx$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	8) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+4}\, dx$	$\frac{1}{4}\pi$
4) $\int_{0}^{2/3\,\pi} \frac{1}{5 + 4\cos(x)}\, dx$	$\frac{1}{9}\pi$	9) $\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2 - 4}\, dx$	6.893586100
5) $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}\, dx$	$-\frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$	10) $\int_{1}^{\mathbf{e}} \ln(x)\, dx$	1
		18)	

11) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$	$-\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{6}\ln(5)$ **=** $.0655070979$	$\displaystyle\int_{8}^{27} \frac{1}{x-x^{(1/3)}}\,dx$	$\frac{9}{2}\ln(2)-\frac{3}{2}\ln(3)$

12) $\displaystyle\int_{2}^{3} x\ln(x-1)\,dx$	$4\ln(2)-\frac{7}{4}$	19) $\displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,dx$	$\frac{98}{3}$
13) $\displaystyle\int_{1}^{4} (1-x)\sqrt{x}\,dx$	$\frac{-116}{15}$	20) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$	$\ln(\sqrt{2}-1)$
14) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^2(x^3+1)\,dx$	$\frac{40}{3}$	21) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)\,dx$	$\ln(2)-2+\frac{1}{2}\pi$
15) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$	**22)** $\displaystyle\int_{4}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$	$-1-8\ln(2)+4\ln(3)$
16) $\displaystyle\int_{4}^{8} \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx$	6	**23)** $\displaystyle\int_{-8}^{-3} \frac{x+2}{x(x-2)^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{5}-\ln(2)$
17) $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx$	$\frac{1}{9}\sqrt{3}\,\pi-\frac{5}{8}$	**24)** $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{1}{25-x^2}\,dx$	$\frac{1}{5}\ln(3)-\frac{1}{5}\ln(2)$

MAI-203
Secciones 1 y 2
Prof. Luis Capace

Aplicaciones diversas de la integral

1. **La población actual de una ciudad es de 3.000.000 y ésta esta creciendo exponencialmente con una constante de crecimiento de 0,02. ¿Cuál será la población promedio de la ciudad en los próximos 50 años?**

2. **Una empresa almacena 6000 unidades de un producto cada 4 meses. Si el producto se vende continua y linealmente hasta carecer del producto a final del cuarto mes. a) Deduzca la función inventario para los cuatro primeros meses. b) Calcule el promedio de existencia del producto en el almacén en un lapso de cuatro meses.**

3. **El crecimiento de una población de bacteria cambia a ritmo de** $\frac{dp}{dt} = \frac{3000}{1+0{,}25t}$**, donde *t* es el tiempo en días. La población inicial (*t=0*) era de 1000. Escriba una ecuación que describa la población en cualquier instante y calcula la población cuando *t* =3**

4. **La ecuación de la demanda de cierto producto es :** $P = \frac{90000}{400+3x}$ **Calcula su precio medio en** $[40{,}50]$**.**

5. **Calcula el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 F° a 250 F° evaluando**
$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300} \frac{1}{T-100}\,dT$$

6. **Los costos de mantenimiento de un departamento de producción aumenta de acuerdo con la antigüedad del local donde funciona y se ha determinado que la variación en los costos, expresada en bolívares por año del edificio donde está ubicado el departamento de producción, se puede expresar por** $C'(x) = 12000x^2 + 2500000$ **donde *x* es la antigüedad del local y** $C(x)$ **es el costo total acumulado en *x* años.**

7. **Un pozo petrolero que produce 50 barriles de petróleo crudo al día se agotará dentro de cuatro años y ha sido estudiado que dentro de t meses el precio del petróleo será de** $2000 + 0{,}3\sqrt{t}$ **por barril. Suponiendo que el petróleo acumulado en la producción mensual se vende totalmente al precio del mercado en ese momento, calcular ¿cuál es el ingreso futuro obtenido de la venta del petróleo extraído del pozo.**

8. **El costo marginal de una fábrica está dado por $\frac{1}{10}(x-3)^2$ bolívares por artículo producido, cuando el nivel de producción es *x* unidades. Deducir una fórmula que permita calcular el costo total en función de los costos de producción en *x* unidades y de los gastos fijos CF (costo al nivel cero) y calcule cuál es el costo total en la producción de 50 docenas de artículos, si los costos fijos ascienden a 2000000.**

9. **Durante ciento períodos de 12 horas la temperatura al tiempo *t* (medida en horas) fue de $47+4t-\frac{1}{3}t^2$ grados. ¿Cuál fue la temperatura promedio durante ese período?**

10. **Una familia española mantiene una reserva en euros que viene dada por $E(t)=\frac{250}{27}t^2+\frac{21.250}{27}t+\frac{32.500}{27};0\le t\le 12$ ¿Cuál es la reserva en euros promedio para el primer trimestre?**

11. **La ganancia de los consumidores por una mercancía que tiene una curva de demanda $p=f(x)$ es $\int_0^A [f(x)-B]dx$ donde la cantidad demandada es *A* y el precio es $B=f(A)$.**
Encuentre la ganancia (en dólares) de los consumidores para un producto con curva de demanda $p=\frac{500}{x+10}-3$ a un nivel de venta de 40.

12. **Si un capital p_0 es colocado al $r\%$ anual la capitalización se realiza *n* veces al año. Para ello se obtiene la fórmula $P=p_0\left(1+\frac{r}{100n}\right)^n$ ahora bien si la capitalización se realiza en cada instante del tiempo *t*, lo que equivale a decir $n\to\infty$ se tiene que $P=p_0e^{\frac{r}{100}t}$ es decir una capitalización continua y la fórmula recibe el nombre de *Ley del crecimiento exponencial.***

Supóngase que se deposita diariamente en una cuenta de ahorros a razón de Bs. 50.000.000 anual. La cuenta paga 7% de interés compuesto continuo. ¿Qué capital se tendrá al cabo de 5 años?

13. **Supóngase que se deposita diariamente dinero en una cuenta de ahorros a una razón de $ 16000 anual. Determine el saldo al final de 4 años si la cuenta paga el 8% de interese continuos compuestos.**

14. **Encuentre la ganancia de los consumidores (en dólares) para un producto con curva de demanda $f(x) = 50 - 0{,}006x^2$ a un nivel de ventas de 20.**

15. **Una industria hizo un análisis de sus instalaciones de producción y personal. Con el equipo y número de trabajadores actuales, la fábrica puede producir 3000 unidades diarias. Se estimó que sin cambiar la inversión, la razón de cambio del número de unidades producidas por día con respecto a un cambio en el número de empleados adicionales es $80 - 6\sqrt{x}$ donde x es el número de empleados adicionales. Encontrar la producción diaria si se aumenta 25 empleados a la fuerza laboral existente.**

16. **Un pozo petrolero produce 50 barriles de petróleo crudo al día y se agotará dentro de cuatro años. Se ha estudiado que dentro de *t* meses el precio de petróleo será de $2000 + 0{,}3\sqrt{t}$ por barril. Suponiendo que el petróleo acumulado en la producción mensual lo vende totalmente al precio marcado en ese momento. ¿¿Cuál será el ingreso futuro obtenido en la venta del petróleo extraído de ese pozo?**

17. **Suponga que la población mundial actual es de 5.500 millones y que la población dentro de *t* años está dada por la ley de crecimiento exponencial $P(t) = 5{,}5e^{0{,}023t}$ Encuentre la población promedio de la tierra en los próximos 30 años.**

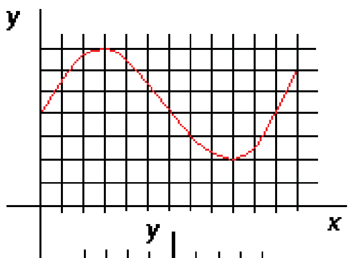
18. **Una planta que produce llantas de automóvil, encuentra que su costo marginal por producir llantas es $0{,}04x + 150\,dólares$ a un nivel de producción de x llantas diarias. Si los costos fijos son de \$500 diarios, encuentre el costo de producir x llantas diarias.**

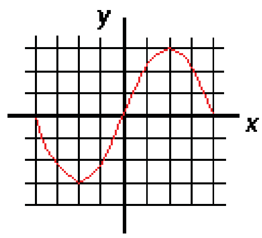
Batería de situaciones varias de aplicaciones de la Integral Definida.

1. **Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de la curva $f(x) = \cos x$, el eje x en el intervalo $[0, \pi]$.**

2. **Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo [-3,3] el área bajo la curva $y = x^2 + 1$**

3. **Calcula con la mejor aproximación que puedas el área bajo la curva, se desconoce la expresión que rige la función.**





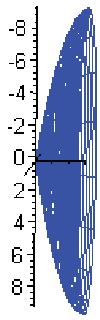
4. **Calcula el área limitada por la gráfica y el eje x en el intervalo [-3,3]. Vea la siguiente figura:**

5. **Dada la función $f(x)=1+\frac{6}{x^2}$. Calcula el área de la región que ella encierra con el eje x entre las rectas $x=1$ y $x=3$.**

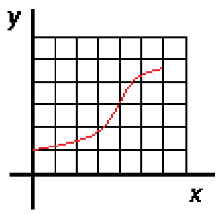
6. **Si $\int_0^1 f(x)dx=2$ y f es siempre una función positiva. Entonces $f(x)\leq 2, \forall x\in[0,1]$ justifica tu respuesta.**

7. **Sean f y g continuas en $[a,b]$ con $f(x)=-g(x)$ en todo el intervalo. ¿Cómo son las áreas de las regiones que ellas encierran con respecto al eje x entre a y b?**

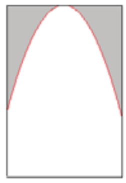
8. **El siguiente sólido se obtiene al rotar entorno al eje x el tramo de la curva $y=6x-x^2$ entre dos y tres. ¿Cuál es el volumen del sólido? (Ver figura)**



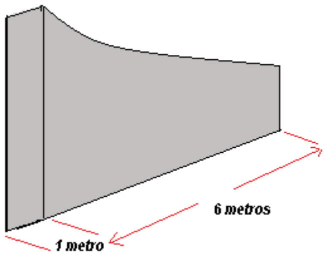
9. **Enuncia el Teorema del Valor Medio para integrales y aproximadamente en qué punto de la siguiente gráfica la función alcanza su valor medio. Justifica tu respuesta.**



10. Se tiene una parcela rectangular de 20 x 50 metros. Se quiere cubrir con baldosas un área de 800 m^2 y el resto dejarlo como jardín. La región que se va a cubrir con baldosas tiene forma de parábola como lo indica la figura. ¿Qué parábola debemos trazar?



11. Se quiere construir un muro de contención para evitar derrumbes en la carretera. Para ello se requiere hacer un encofrado de madera. El perfil a cubrir se muestra en la figura y está definido por la función $f(x)=3+\dfrac{1}{x^2}$ para $x\geq 1$ expresado en metros. ¿Cuánta madera se necesita?



12. Calcula la longitud del arco de la gráfica de $y=\ln(\cos x)$ entre $x=0$ y $x=\dfrac{\pi}{4}$

13. Al inicio de los años setenta, la tasa anual de consumo de petróleo era dada por $T(t)=16{,}1e^{0{,}07t}$ en miles de millones de barriles de petróleo al año, donde t es el número de años contados a partir de 1970. determina:

a) Determine la cantidad de petróleo consumido entre 1972 y 1974.
b) Bosqueje la gráfica indicado el área representada.

14. La deforestación es uno de los problemas más importantes que enfrenta el África del Sub-Sahara. Aunque el desmonte del terreno para la agricultura ha sido la causa principal, la creciente demanda de madera como combustible se ha vuelto un valor significativo. El pronóstico del Banco Mundial, la razón de consumo de madera como combustible (en millones de metros cúbicos) en el Sudán t años después de 2007 está dada aproximadamente por la función $C(t)=76{,}2e^{0{,}03t}$. Determine la cantidad de madera para combustible que se consumirá de año 2007 al 2010.

15. Determine el área limitada por las curvas $y=2x^2$ y $y=x^3-3x$

16. La base de cierto sólido es un disco circular de diámetro *AB* de longitud *2a*. Determine el volumen del sólido si cada sección transversal perpendicular a *AB* es un triángulo equilátero.

17. **Calculemos el área de la región *R* limitada por las gráficas de *y* = ln *x; y* = 0*; x* = *e*.**

18. **Hallar el área de la región *R* limitada por las gráficas de las ecuaciones:** $y=\frac{(x-2)^2}{9}-1, y=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}, x=4$

19. **Hallar el área de la región *R* limitada por las gráficas de las ecuaciones:** $y=-\frac{x}{2}+1, x=-2, x=4, y=0$

20. **Hallar el área de la región *R* limitada por las gráficas de las ecuaciones:** $y=\frac{x^2}{2}-2x+1, y=\frac{x}{3}+1, y=-x+5$

21. **Hallar el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje *x*, la región limitada por la gráfica de de *y* =** $\sqrt{x}$ **,*y* = 0, *x* = 1, *x* = 4.**

22. **Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje *x*, la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones** $y=x^2, y=\sqrt{x}$

23. **Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo anterior, alrededor del eje *y*.**

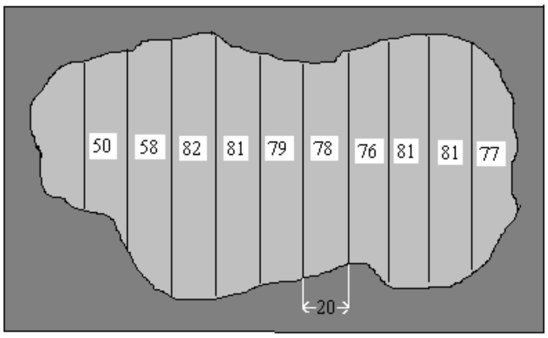
24. **En cada caso calcular la longitud del arco de curva que se indica.**

1. $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{3/2}, desde\ x=0\ hasta\ x=3$

2. $9x^2=4y^3, desde\ (0,0)\ hasta\ (2\sqrt{3},3)$

3. $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}, desde\ y=1\ hasta\ y=2$

25. **Para estimar la superficie de un lago se han realizado mediciones que se muestran en la figura. Estimar la superficie mediante la regla de los trapecios. Las medidas están en metros. Ver la siguiente figura**



26. Se inyectan cinco miligramos de colorantes en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea $c(t)$ la concentración en la aorta después de t segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar $\int_0^{22} c(t)dt$

Segundos después de la inyección	Concentración (mg/litro)
0	0
2	0
4	0,6
6	1,4
8	2,7
10	3,7
12	4,1
14	3,8
16	2,9
18	1,5
20	0,9
22	0,5

27. Calcula el valor aproximado con 4 cifras decimales de cada una de las siguientes integrales. Usa los métodos Trapezoidal y de Simpson.

a) $\int_0^3 \frac{1}{1+x^4}dx \quad n=6$ **b)** $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \quad n=8$

28. La tabla muestra la velocidad $v(t)$ registrada por los instrumentos de un submarino que viaja bajo una capa de hielo polar directamente al polo norte. Utilice la regla Trapezoidal y de Simpson para estimar la distancia $s=\int_a^b v(t)dt$ recorrida por el submarino en un período de 10 horas de

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	h
V(t)	12	14	17	21	22	21	15	11	11	14	17	Millas/h

29. Una empresa almacena 6000 unidades de un producto cada 4 meses. Si el producto se vende continua y linealmente hasta carecer del producto a final del cuarto mes. a) Deduzca la función inventario para los cuatro primeros meses. b) Calcule el promedio de existencia del producto en el almacén en un lapso de cuatro meses.

30. Calcula el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300 F° a 250 F° evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2}\int_{250}^{300}\frac{1}{T-100}\,dT$$

31. Una familia española mantiene una reserva en euros que viene dada por $E(t) = \frac{250}{27}t^2 + \frac{21.250}{27}t + \frac{32.500}{27};0 \le t \le 12$ **¿Cuál es la reserva en euros promedio para el primer trimestre?**

Anexo F

Observación del día 23 -01- 08

El profesor hace un recuento de la integral indefinida sobre la que trabajó Newton. En el día de hoy se estudiará el trabajo de (Riemann), la integral definida.

Reseña histórica. Problemas del siglo (XVII) 1) ¿Cómo obtener rectas tangentes a una curva? Pregunta que es una curva y el alumno respondió que una parábola, el profesor aclara lo que es curva 2) ¿Cómo determinar longitudes de curvas, áreas de regiones limitadas por curvas y volúmenes de sólidos por regiones?

El profesor sugiere que los alumnos tomen apunte que luego se utilizará el computador.

El profesor explica como obtener una recta tangente a una curva y pregunta cómo se soluciona ese problema. Los alumnos no responden y el profesor aclara que es la derivada.

En el problema a determinar áreas de regiones limitadas por curvas…. (Hace el dibujo) (Subraya el área determinada entre ellas dos). Pregunta cómo se calcula el área de un triángulo, de una circunferencia, un rectángulo, etc. Explica que ese problema está asociado con la integral definida. Recuerda que para el estudio de área es necesario conocer lo que es la cuadratura. Define la cuadratura. Los alumnos copian. Reseña histórica.

Hipócrates ofreció determinar la cuadratura del círculo. Explica y aclara que eso es lo que hace la integral.

Dibuja en el pizarrón una curva limitada entre dos puntos. Especifica que es más fácil hallar el área a través del computador.

Asigna la actividad Nº 1 y entrega un resumen de la clase de hoy y la de mañana. Comienza dando las instrucciones que se van a seguir en el computador. Los alumnos comienzan a trabajar en el computador, con el programa MAPLE. Explica los comandos que aparecen en el computador y cómo deben aplicarlos.

Alumno señala que hay error en la guía de ejercicios. El profesor aclara duda al estudiante en el computador. El profesor se va acercando a cada alumno para observar el trabajo que realizan.

Los alumnos se interesan por las actividades con el Maple, durante éstas compartían sus hallazgos, consultan entre sí, porque se tardan mucho tiempo para graficar. El profesor se acerca hacia dos alumnos que tienen problemas para graficar y les aclara las dudas.

Pregunta a los alumnos sobre el número de rectángulos que se forman y como su aumento se acerca más al área requerida, los alumnos responden que cuando hay nuevos rectángulos sobran más espacios de la curva. Algunos alumnos que llegaron tarde piden aclaraciones porque no pueden graficar.

Pregunta cuales son las conclusiones; un alumnos responde que a medida que aumentan los rectángulos se acerca a la curva y el profesor le aclara que se acerca al "área de la curva" Detalles de errores ortográficos en el pizarrón.

Pregunta que otras conclusiones se pueden obtener. Nadie responde, proporciona más información y un alumno da con la respuesta acertada. (2da. Conclusión)

Propone realizar actividad Nº 2. Un caso donde se trabaje de valor medio y explica que se van a utilizar otros comandos. A una alumna que llegó tarde y no estaba trabajando, le entregó el material y la colocó en una computadora para que iniciara su actividad. Se acerca a los alumnos para asesorarlos en la actividad.

Un alumno pregunta porqué no le da el gráfico. El profesor aclara. Explica que al final del gráfico del computador aparece una sumatoria.

Copia en el pizarrón la reseña de lo que desarrolló Riemann en base a la experiencia.

Pregunta qué representa el numerito que aparece al final de la gráfica. Ese número representa la suma de las áreas de los □. Concluye que se aproxima cada vez más al área de la curva. Pregunta si está claro y les dice que aquellos alumnos que no lo hayan calculado trabajen con aquellos compañeros que ya lo obtuvieron.

Aclara que ahora se va a trabajar en el pizarrón, ya no geométricamente (computador) sino analíticamente.

Pregunta qué es infinito, aclara que en un área limitada puede haber infinitos rectángulos. Les recuerda que en Matemática 1 se estudió que entre 0 1 hay infinitos números.

Ejemplifica lo enunciado $x=-1,\ y=x_4$ ¡Error!

Dibuja la gráfica y explica como calcular las distancias entre los intervalos, y así determinar la base de los rectángulos.

Aclara en que cada Δx_i se selecciona un r_i, a través de los $f(r_i)$ determina la altura de los rectángulos.

Pregunta si está claro. Los alumnos responden que si.

Escribe el área de la región (fórmula).

(¡Distractor!) (El encargado del laboratorio)

Pregunta si conocen el símbolo $\sum$, sólo un alumno responde que si.

Pregunta lo que significa que la norma tiende a 0 significa que hay un número infinito de rectángulos. Explica a la conclusión que llegó Riemann.

Escribe la fórmula de la integral definida. La finalidad de esta clase es que se tenga la interpretación geométrica de la integral, experiencia vital para entender mejor a través del uso del computador. Define suma de Riemann.

Explica en el pizarrón la diferencia entre las dos sumas de Riemann.

Observación del día 24-01-08

El profesor comienza escribiendo en el pizarrón la fórmula general de la integral definida. A su vez como ejemplo comienza a resolver $\int_{-2}^{1} x^2 dx$ como $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_i)\Delta x_i$

(El profesor comenzó clase con 05 alumnos)

Toma intervalos iguales para dividir la distancia entre a y b, obteniendo 2 intervalos. (Forma $\frac{3}{n}$), sigue explicando como se construyen los intervalos y los va denotando por X $_i$ sobre la recta. Explica que la succión se puede escribir $\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{3}{n}i\right)$ Una alumna pregunta sobre el desarrollo de la potencia $\left(-2+\frac{3}{n}i\right)^2$ Aclara la duda desarrollando $(x-a)^2$ Luego utiliza la suma de los ene primeros números de $\frac{3}{n}$, o sea $\frac{3}{n}$(1+2+3…..). Para demostrar esto por inducción, le recuerda que en bachillerato (1ª Cs) deben haber visto progresiones y sucesiones; sin embargo obtendrán esta sumatoria utilizando la computadora para resolver el ejercicio Nº 3.

Los alumnos interactúan con el profesor sobre el trabajo realizado con el computador, atiende sus dudas, pide explicaciones y hace aclaratorias. Los alumnos tienen

algunas dudas en relación a los comandos a usar en la computadora y el profesor la aclara a cada uno las dudas que tienen al respecto. (Ej. Comando zoom).

Los alumnos tardan para calcular y el profesor pregunta si ya habían trabajado con esos comandos.

El profesor pregunta qué significa la suma de los primeros números y a cuanto equivale. Y así sucesivamente.

El profesor pregunta si hay alguna duda y nadie responde…….

Una alumna tiene dudas con la fórmula para trabajarla en la computadora y el profesor se acerca para asesorarla y aclarar la situación. (Los alumnos se tardan para hallar los cálculos)

El profesor explica los cálculos obtenidos en el pizarrón. Se van incorporando otros alumnos a la clase (después de 20 min.)

Aclara que esa era la forma en que Riemann hallaba la integral formal. Aclara que todo este proceso se hace de forma analítica, pero ahora se va a demostrar de forma geométrica. A su vez copia en el pizarrón el teorema fundamental del cálculo (Relación entre la integral indefinida con la integral definida) y aclara que todo lo que se ha visto en la semana tiene que ver con este teorema.

Además el profesor hace la observación que no tenemos que hacer la demostración como Riemann, sino que nos interesa su aplicación (ya que no son matemáticas).

Usando el teorema fundamental del cálculo. Copia el mismo problema anterior $\int_{-2}^{1} x^2 dx$

y lo resuelve, obteniendo el mismo resultado de una manera más sencilla.

¿El profesor vuelve a preguntar si hay alguna duda? (nadie responde) ¡o sea!

Seguidamente les recuerda que ya conocen las propiedades de la integral indefinida y comienza a escribir las propiedades de integral definida en el pizarrón.

Les indica que se van a verificar en el MAPLE.

(Algunos alumnos están distraídos observando la computadora)

Les propone resolver la integral resuelta anteriormente en MAPLE.

Proporciona los comandos que se van a utilizar y sugiere que se resuelva el ejercicio 4.

Seguidamente les indica que van a resolver en la computadora el ejercicio Nº 5, relacionado con las propiedades de la integral definida.

Luego de unos minutos pregunta a los alumnos si han hecho el ejercicio y cómo quedaron los gráficos de f y g. pregunta cuál de las funciones está por encima. Un

alumno responde que la gráfica verde (la negativa). Hace la observación de que escriben muy lento y tardan en copiar los comandos. Pregunta cuál es el área mayor y una alumna responde que la de g.
Luego copia la propiedad Nº 4 y la grafica en el pizarrón.
Propone resolver ejercicios de la guía utilizando la computadora comenzando con el Nº 3, usando el MAPLE. Les sugiere que se lleven la guía para traer algunos resultados en la próxima clase.
Copia una integral en el pizarrón y pregunta cómo se puede resolver. Un alumno indica que con cambio de variable $u = x^2 + 1$ y el profesor prosigue resolviendo el ejercicio en el pizarrón. Explica que al final hay que restituir la variable y ahora no es necesario, para ello se cambian los límites de integración.
Pregunta cómo se resuelve la integral $\int_2^{10} \frac{du}{u^3}$ y cual es la fórmula para resolverla. Los alumnos no responden acertadamente.
Sigue preguntando cómo se resuelve y recordándoles la forma de resolver una integral, hasta terminar el ejercicio.
Les pide que resuelvan el ejercicio ahora con el MAPLE.
Aclara cambios en los comandos y como el MAPLE cambia automáticamente los límites de integración.
Propone que resuelvan el ejercicio Nº 8 en el computador, que luego se analizará en el pizarrón.
Pregunta si ya lo resolvieron y ellos dicen que están trabajando. Luego copian el ejercicio en el pizarrón y pregunta cómo se hace el cambio de variable. Una alumna responde y el profesor le corrige. Continúa desarrollando el ejercicio en el pizarrón. Vuelve a preguntar sobre los límites de integración y los alumnos dudan al responder. Algunos responden que 1 y el profesor preguntan porqué.
Pregunta cómo son la función log y la e^x y nadie responde.
Vuelve a preguntar la forma de resolver la integral.
Sólo 1 alumno responde. Continúa resolviendo con la participación de algunos alumnos.
En la próxima clase se le asigna a cada alumno un ejercicio y lo van a resolver de las dos formas.

Observación del día 30-01-08

A las 7:50 el profesor comienza escribiendo en el pizarrón el teorema del valor medio para integrales. Aclara que lo importante en esta primera parte se trabajará con teoría. Hace una recapitulación de lo que es la integral definida. Pregunta cuál es el vínculo entre la integral indefinida y la integral definida, recordando el teorema fundamental del cálculo. Les pregunta qué decía el teorema del valor medio para derivadas y como no responden, el profesor lo explica en el pizarrón. Luego explica el T.V.M. para integrales. Pregunta lo que representa gráficamente esa fórmula ($\int_a^b f(x)dx = (b-\alpha)f(\alpha)$) y aclara que α no es necesariamente único.

Pregunta si está claro ese concepto. Nadie responde. El profesor resuelve un ejemplo en el pizarrón. Hace preguntas sobre el ejemplo y los alumnos no responden. Luego procede a resolverlo. Pregunta qué es lo que nos va a dar al final. Un alumno responde que un número. Comienza a resolver y preguntar sobre la primitiva. Los alumnos no recuerdan las fórmulas de la integración. Pregunta qué se hace para resolver α y los alumnos no aciertan. Luego de calcular α, grafica la función en el pizarrón y ubica el área, así como el valor medio.

Pregunta si está claro y nadie responde ¿?

Seguidamente escribe en el pizarrón las propiedades ¿? Y las explica, haciendo alusión a que luego se ejemplificará. Copia un ejercicio en el pizarrón sobre determinar α para que se verifique el TVM. Pregunta sobre lo que significa el número que da por resultado la integral. Pregunta cómo calcularían el área de las habitaciones de su casa. Nadie responde.

Luego copia las aplicaciones de la integral definida. Copia un ejercicio y comienza a preguntarles a los alumnos como son las rectas que limitan la función y ningún alumno sabe responder. El profesor lo aclara en el pizarrón. Pregunta qué es lo que sigue para resolver el ejercicio.

Nadie responde. Grafica la función en el pizarrón.

Antes de haberse iniciado la clase, el profesor había repartido un material impreso de ejercicios a cada alumno.

Seguidamente les da las instrucciones (comandos) para que empiecen a resolver los ejercicios. Mientras el profesor explica, ya los alumnos estaban comenzando a hacer los ejercicios con la computadora.

Procede a resolver otro ejemplo (podría asignar a un alumno para que lo resolviera en el pizarrón, bajo su guía, por supuesto). Pregunta la diferencia entre este ejemplo y el anterior. Una alumna dice que no dan los intervalos o rectas. El profesor pregunta que es lo que hace suponer eso. Aclara que hay que hallar puntos de corte. Factoriza la ecuación. Grafica la función.

(Se observan grandes deficiencias en conocimientos matemáticos básicos)

Una alumna pregunta sobre el tipo de valores que dan en el gráfico.

Explica que a veces hay regiones positivas y negativas que ameritan resolver dos integrales. Copia el ejercicio 4, pregunta cómo se calculan los puntos de corte. Los calcula y les asigna los comandos para que lo grafiquen en sus computadoras.

Grafica y resuelve el ejercicio en el pizarrón. Luego los estudiantes se interesan por desarrollar las actividades con el Maple que le ayudaron a resolver el problema.

Les informó que en los ejemplos realizados se verifica en los gráficos si las áreas están por encima o por debajo de los ejes.

Puede presentarse el caso de dos curvas, y se quiere saber el área que hay entre las curvas limitadas entre dos valores reales. También puede presentarse el caso de hallar la región entre una curva y una recta.

Observaciones del día 31-01-08

El profesor comienza repasando la clase de ayer, sobre las áreas determinadas por dos curvas y limitadas entre dos puntos del eje x.

Comienza preguntando sobre la clase anterior y sugiere resolver un problema que copia en el pizarrón. Pregunta cómo se puede resolver el ejercicio, algunos responden que graficando las ecuaciones. El profesor sugiere que además hallando los puntos de corte entre ambas (curva y recta).

Pregunta cómo se pueden resolver ambas ecuaciones. Resuelve la primera ecuación y pregunta quién quiere graficarla. Propone que lo hagan en el computador y le indica los comandos. Los alumnos la grafican en el computador y el profesor pregunta cual de los dos gráficos es mayor y cuáles valores le asignamos. Pregunta cómo se ensambla la integral definida. Les pide que lo hagan verbalmente y no en el computador.

Define los puntos de corte y aclara que la recta que está por encima es la mayor (figurativamente). Hace preguntas sobre cómo quedará la integral definida y resuelva la primitiva. Termina resolviendo todo el ejemplo. Luego coloca ejercicio indicando

que se trata de hallar el área entre dos curvas. Pregunta qué es lo que se debe hacer primero. Indica los comandos para resolver en el computador.

Una vez que lo resuelven en el computador (puntos de corte) indica que se va a realizar analíticamente en el computador. Indica que se va a realizar la gráfica de las dos funciones en la computadora y le indica los comandos. (Los alumnos tardan mucho en graficar).

Luego el profesor grafica en el pizarrón (analíticamente) y señala las dos regiones que se forman, áreas que se van a calcular a continuación. Pregunta cómo se va a ensamblar esa integral. Pregunta cuál de las regiones está por encima y cuál por debajo.

Pregunta los intervalos de cada región que vamos a calcular y cómo se restarán las curvas.

Luego le asigna a cada alumno un ejercicio específico de la guía que les fue entregado previamente. El profesor va aclarando dudas según se van preguntando en cada alumno.

Observaciones del día 13-02-08

A las 7:50 AM. El profesor ya había copiado en el pizarrón lo relativo al tema de volúmenes de sólidos de revolución, conceptos y ejemplos. Sólo se encontraban para ese momento tres alumnos. Comienza reseñando la clase anterior sobre aplicaciones de la integral definida y formuló algunas preguntas que los alumnos no respondieron. Hizo observaciones sobre la evaluación anterior aclarando que había que explicar todo el procedimiento y no utilizar sólo los comandos del MAPLE. Explica lo que son sólidos de revolución. Formula algunas preguntas relativas al tema. Luego explica los gráficos del pizarrón.

Luego sugiere que cuando $\Delta x \to 0$ **entonces el volumen del cilindro i es una buena aproximación. (Algunos alumnos (02) distraídos hablando de otras cosas)**

Concluye que se puede calcular el volumen del cilindro así: $v = \int_a^b A(r_i)dx$ **, o sea que con la integral calculamos el volumen del sólido sin necesidad de calcular la suma de Riemann.**

Escribe la conclusión en el pizarrón sobre el cálculo de la función área de las secciones transversales. Seguidamente copia en el pizarrón lo relativo a secciones transversales perpendiculares al eje y , concepto y ejemplo.

Explica gráficamente el método del disco.

Coloca un ejemplo y pregunta cuáles son los pasos a seguir. Resuelve el ejercicio en el pizarrón. Luego con la misma función rota entorno a la recta X=2 y la región limitada por una curva y una recta. Un alumno pregunta sobre una duda en relación a la ubicación del disco en el gráfico. Se le aclaran las dudas y prosigue el profesor resolviendo el ejercicio.

Hace un aparte para aclarar que el área de una región limitada por una curva simétrica al eje X y explica la propiedad de dicha integral. Luego sustituye los términos y pregunta cómo puede resolver la integral (¡Nadie responde!) Vuelve a preguntar que se les ocurre. Nadie responde. (Desarrollo de un cuadrado) (Diferencia del cuadrado). A los alumnos les cuesta visualizar un producto notable y por ello el profesor tiene que resolverlo. ¡Horror!

Asigna un ejercicio para el día siguiente, hallando el volumen de un anillo o arandela. (Investigar). Les sugiere que repasen porque van a tener próxima evaluación, además que no se pierde tiempo en clase aclarando conceptos.

Observaciones del día 14-02-08

A las 7:55 AM. El profesor tenía copiado en el pizarrón el método del anillo o arandela: Giro de una región entre dos curvas.

Les preguntó a los alumnos si habían investigado al respecto y nadie lo hizo. Así que procedería a explicarlo inmediatamente.

El profesor aclaró que había un compromiso entre profesor y alumnos para asistir regularmente y cumplir las asignaciones dadas en clase, repasar y mantener la asignatura al día; pero que eran muy pocos los que estaban cumpliendo dicho compromiso.

Seguidamente comenzó explicando el método del anillo o arandela y luego resolvió un ejemplo. Preguntó cómo conseguir puntos de corte entre las funciones planteadas y nadie respondió. Prosiguió con la explicación graficando en el pizarrón. Luego procedió a resolverlo analíticamente. Al preguntar los límites entre los cuales se aplicará la integral, los alumnos respondieron.

Luego de resolverlo, añadió que ese mismo ejercicio se resolvería desde otras perspectivas o condiciones.
Plantea el ejemplo anterior, pero estando la misma región entorno al eje y **.**

Pregunta cómo se imaginan los alumnos que quedaría la región rotándola entorno a y **. Nadie responde.**

Una vez graficadas las funciones explica que hay que hacer conversiones en las variables y procede a realizar las sustituciones. Aclara cuales son los radios de las funciones en relación al eje y**. Se va a integrar no con respecto a** x **sino a** y**.**
Generalmente, cuando el profesor pregunta sobre la resolución de los integrales, los alumnos presentan serios problemas en las operaciones básicas (ejemplo, Propiedades de las potencias, operaciones algebraicas sencillas) y no tienen bien asentados los conocimientos relativos a las propiedades de las integrales y su resolución.
Luego pregunta si hay alguna duda y les manifiesta que en la próxima media hora resolverán ejercicio con la ayuda del MAPLE para ser entregados al profesor en una hoja previa asignación individual.
Resuelve otro ejemplo sobre el mismo ejercicio pero rotando la región entorno a la recta $x=-1$**. Grafica la función y pregunta sobre cuales son los radios. Nadie responde. El profesor los escribe en el pizarrón y un alumno pregunta una duda sobre uno de los radios. El profesor aclara la duda y prosigue el ejercicio.**
Para obtener una nota de significación del curso, el profesor asigna ejercicios que serán resueltos en la última media hora de clase.
Observaciones de día 20-02-08
A las 7:45 AM. El profesor comenzó preguntando cómo se obtienen los sólidos de revolución, los alumnos respondieron aunque no del todo acertado.
Seguidamente, una vez copiado el tema en el pizarrón, se dispuso a explicar volúmenes de sólidos de secciones conocidas.
En la gráfica o figura presentada explicó las diversas propiedades que se presentan y así comenzó a calcular la fórmula que determina su volumen. Luego pregunta cómo se calcula la integral obtenida y nadie responde. El profesor vuelve a preguntar cómo se resolverá ahora en el MAPLE y escribe los comandos en el pizarrón.
Una alumna lo resuelve en la computadora, y luego, el profesor comienza a resolverlo en el pizarrón. Al final pregunta a qué les recuerda esa fórmula, un alumno responde

que se parece al área del Δ. El profesor les corrige recordándoles que es el volumen de la pirámide.

A continuación les asigna un ejercicio. Comienza a resolverlo y pregunta si hay duda, nadie responde.

Una vez resuelto el ejercicio procede a explicar otro punto: longitud de arco, explicando la diferencia entre curvas suaves. Pregunta cómo se calcula el área de una circunferencia y sólo una alumna responde.

El profesor representa en el pizarrón la aproximación de la integral de un arco suave. Al proseguir en el cálculo de la longitud del arco pregunta cómo se calcula la distancia entre dos puntos dados. Sólo un alumno responde a medias. El profesor prosigue la demostración en el pizarrón. Pregunta seguidamente sobre el teorema del valor medio de las integrales y nadie lo recuerda, y luego procede a aplicarlo a la longitud del arco. Una vez hechos los cálculos correspondientes, se obtiene la longitud del arco. (Existe cierta distracción entre los alumnos mientras el profesor copia en el pizarrón)

Coloca un ejemplo en el pizarrón y les indica como resolverlo en MAPLE asignando los comandos. Una vez asignado el ejercicio se acerca a cada uno de los alumnos para ayudarlos con el computador. Prosigue resolviendo el ejercicio en el pizarrón, con muy poca interacción con los alumnos, ya que estos no recuerdan cálculos elementales.

Para finalizar asigna un ejercicio para hallar la longitud de un arco en términos de y, para ello, antes escribe en el pizarrón la fórmula correspondiente.

Observaciones del día 27-02-08

La clase de hoy será eminentemente práctica.

El profesor le asigna una batería de problemas de aplicaciones de la integral definida. Los alumnos escogen el primero de los ejercicios de la guía. Previamente explicó en el pizarrón el arco parabólico de Simpson. Los alumnos proceden a realizar el ejercicio en su respectiva computadora. Una vez que obtienen la gráfica, el profesor les pregunta que van a hacer con la gráfica. El problema consiste en calcular el área de la región comprendida por la gráfica de la curva $f(x) = \cos x$, el eje x en el intervalo $[0, \pi]$.

El profesor dibuja la curva en el pizarrón y pregunta cuáles son las áreas que se van a buscar. Un alumno pasa al pizarrón para rayar el área buscada. Luego pregunta cómo

hallar los puntos de corte. Como los alumnos no responden, el profesor indica los comandos en el pizarrón. Aún así los alumnos no saben representar la integral definida que se requiere. El profesor los induce a responder y sólo un alumno lo hace correctamente. Prosigue el profesor con el ejercicio en el pizarrón resolviéndolo analíticamente.

Luego los alumnos escogen resolver el problema Nº 7, el profesor hace la observación de que se resuelve teóricamente, utilizando un ejemplo arbitrario de tomar dos funciones, donde una es la opuesta de la otra, pregunta cómo son ambas áreas determinadas por las funciones en un intervalo dado. Indica los comandos en el pizarrón para que los resuelvan en la computadora. Una vez que grafican se llega a la conclusión de que las áreas son iguales.

A continuación los alumnos eligen resolver el problema Nº 9 y el profesor les aclara que está basado en la teoría del valor medio para integrales. Como nadie lo recuerda, el profesor lo enuncia en el pizarrón.

Comienza explicando en el gráfico la función limitada entre dos puntos, aclarando que el rectángulo formado es igual al área de la región bajo la curva. Se resolverá por aproximación. Pregunta cuantos cuadritos tiene el área bajo la curva.

Una vez resuelto el ejercicio se procede a resolver el ejercicio Nº 10.

El profesor grafica el área solicitada. Procede a determinar la parábola a través de la ecuación general de segundo grado, para sustituir el vértice. Pregunta cómo se puede vincular el área dada con la parábola obtenida. Los alumnos no saben responder.

El profesor nuevamente pregunta, induciendo la respuesta y por fin coloca la integral igualándola al área dada. Se sugiere a un alumno que evalúe dicha integral en el pizarrón. El alumno no puede concluir el ejercicio ya que no sabe despejar la constante. El profesor le pregunta al resto de la clase y nadie lo quiere resolver. El profesor concluye el ejercicio.

A continuación se escoge resolver el problema Nº 21. El profesor les hace la observación de que si no recuerdan las fórmulas usen el MAPLE, pero que por lo menos le den el resultado. Un solo alumno resuelve el ejercicio en su cuaderno y se lo muestra al profesor. Luego el profesor les recuerda la fórmula y se las escribe en el pizarrón.

Pregunta nuevamente a los alumnos quién ha resuelto el problema. Procede a resolverlo analíticamente en el pizarrón, hasta obtener el resultado buscado.

Anexo G

Información en crudo tomada directamente de las grabaciones y apuntes

Reconstrucción de la primera sesión de clase 23/01/08

El profesor escribe el la pizarra *Integral Definida.*

P: **Continuando con lo previsto en el programa… nos toca ver ahora la integral definida, nosotros hasta el momento, estábamos viendo la integral indefinida… un poco lo que hacía Newton, en cuanto a la manera de calcular las integrales… y nosotros vamos enfocarnos ahora en lo que hizo Riemann (matemático Alemán). La integral de Riemann.**

P: **Ahora bien… fíjense. Desde la antigüedad existían dos problemas que eran estudiado por todos aquellos que se dedicaban a hacer matemática y que persistieron hasta el siglo XVII… uno de ellos era, cómo obtener… rectas tangentes a una curva. ¿A qué me refiero yo cuándo hablo de una curva? ¿Qué es una curva?**

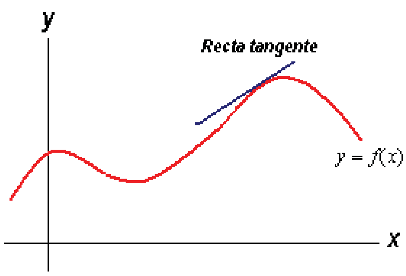
A1: ¿**una parábola?**

P: **Puede ser una parábola, cuando me refiero a una curva no me refiero a una función en sí, sino a la representación gráfica, a un bosquejo de cómo se comporta la función, cuando la función no es lineal, es decir no es la función afín entonces puede tomar diferentes formas curvilíneas… a eso se le denomina curva.**

P: **Entonces fíjense, uno de los problemas era cómo obtener una recta tangente a una curva y, otro cómo determinar longitudes de curvas, áreas de regiones limitadas por curvas y volúmenes de sólidos determinados por regiones.**

El profesor escribe en la pizarra:

1)



Tiene que ver con lo que hoy se conoce como derivada.

P: **Esos eran los dos problemas que persistían en el siglo XVII, a estos problemas se les trataba de dar solución desde la antigüedad.**

P: **El primero que quiere decir… yo creo que ustedes saben…la tangente a una curva, si tengo una curva, cómo hallar la recta tangente. Éste es el primer problema o uno de**

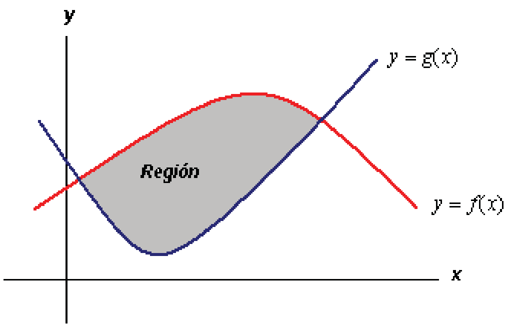
los problemas que se presentaban. ¿Hoy día con qué se asocia este tipo de problema? Para determinar la recta tangente a una curva ¿qué utilizo?

A2: **¿La integral?**

P: **No,… con lo que hoy conocemos como derivada… recuerdan, la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto de su dominio: Es la tangente del ángulo que determina la recta tangente con respecto al eje x.**

P: **Y,...este otro problema en el que vamos a obviar la longitud de una curva, vamos a obviar el volumen de un sólido limitado por regiones y nos concentraremos en lo básico: cómo determinar el área de una región limitada por curvas, a lo que nos refiere esto, que si yo tengo ... por ejemplo estas dos curvas...**

Escribe en la pizarra:



Hoy se asocia con la integral definida.

...y quiero hallar el área de la región limitada por ellas, fíjense que para ellos era un problema y yo creo que para ustedes también ¿ustedes saben calcular áreas? ¿El área de un triángulo la saben calcular?

A2: **base por altura entre dos.**

P: **¿El de un rectángulo también lo saben calcular? ¿Y el área del círculo?**

A1: **Pi por radio al cuadrado.**

P: **Exacto, Pi por radio al cuadrado.**

P: **Pero fíjense ustedes, ¿hay alguna fórmula para hallar el área de esta región?**

A1: **No.**

A2: **No.**

P: **Entonces tenemos ahí un problema y este problema está vinculado con el cálculo integral o la integral definida. Como ustedes saben porque ya lo han estudiado, el primer problema, el de la recta tangente se resuelve con la derivada. En el segundo**

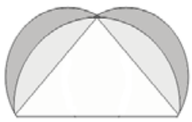
problema, desde la antigüedad se le busca solución haciendo cuadraturas, veamos lo que es una cuadratura.

Escribe en la pizarra:

<u>*Cuadratura*</u>*: Es una región rectilínea cuya área es equivalente a la de una región curvilínea.*

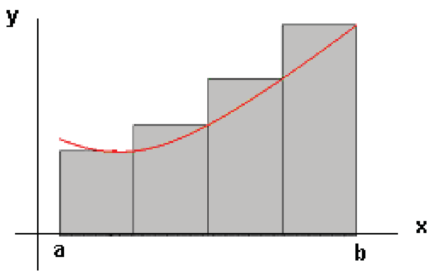
P: **Realizar una cuadratura es determinar un área rectilínea equivalente al área curvilínea que se quiere hallar. Si puedo hallarla con eso soluciono el problema. Hubo muchos intentos de cuadraturas, la primera que se conoce la realizó Hipócrates (450 AC) al querer cuadrar el círculo, él no lo logró, pero llegó a determinar algo muy interesante para su época...**

El profesor dibujó en la pizarra:



...demostró que la suma del área de las dos lunetas era equivalente al área del triángulo rectángulo. Así un área rectilínea como la de un triangulo es equivalente a la suma de dos áreas curvilíneas y eso es una cuadratura y eso es lo que hace la integral por ejemplo en la integral de Riemann.

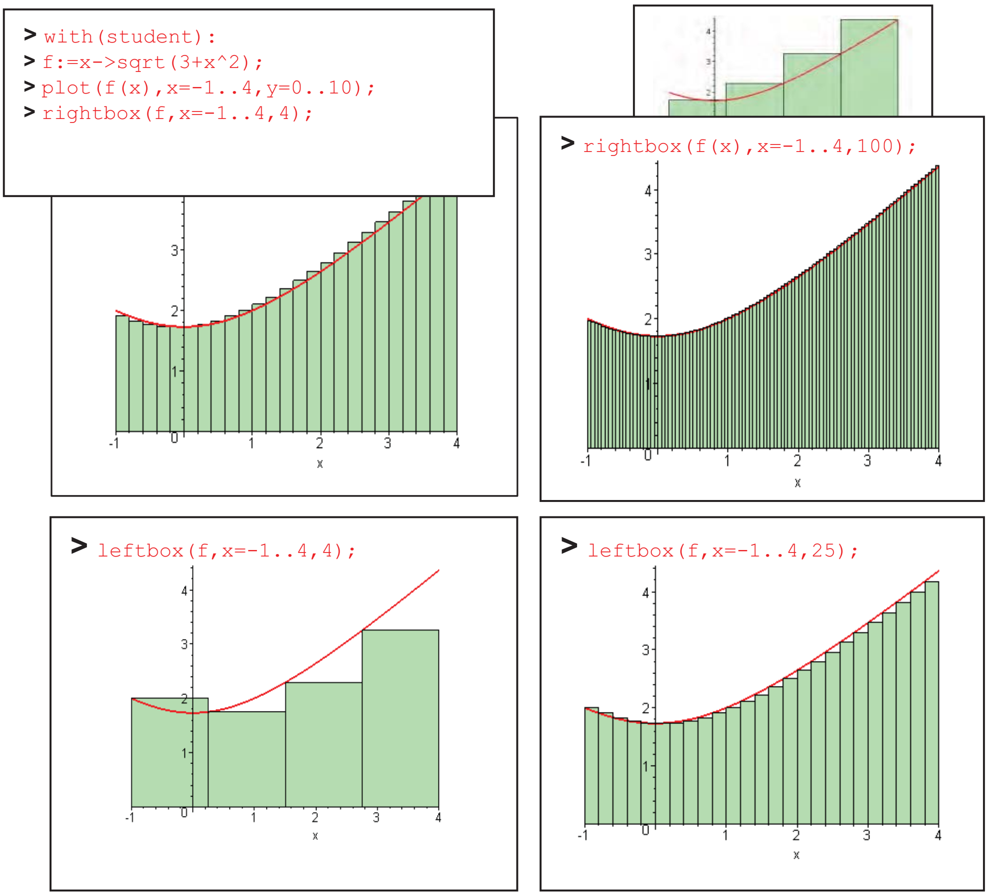
Dibujó en la Pizarra:

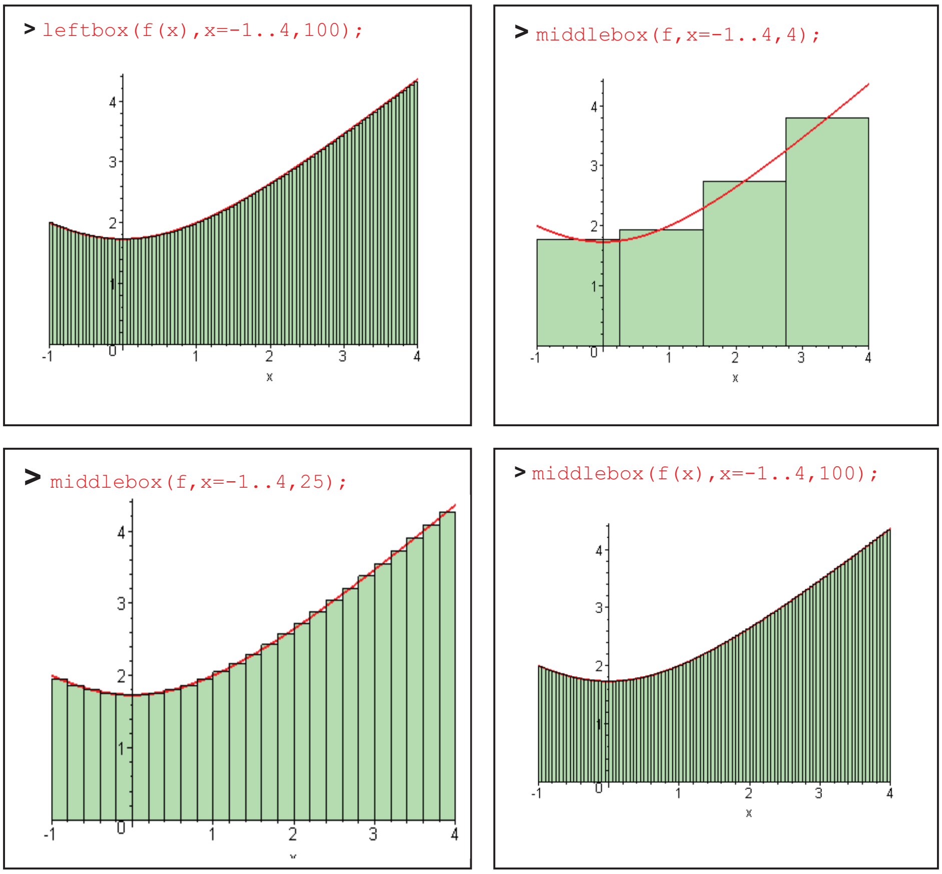


P: **A pesar de que ya se había trabajado en la integral definida, fue Riemann el que la formalizó. Riemann alemán que vivió entre 1826 y 1866, él es famoso por lo que se conoce como la suma de Riemann y eso lo vamos a ver hoy. Para tener mayor claridad de la suma de Riemann, vamos a trabajar en el computador pero, antes, quiero decirle que en realidad lo que él hace es esto (Se refiere a lo que dibujó en la pizarra), él tiene una curva y tiene ya el área entre dos puntos, entre a y b el particiona el espacio entre a y b, bueno después le diré lo que es una partición pero él lo que hace es que construye triángulos, perdón triángulos no rectángulos, Bien sea por el extremo**

superior de cada intervalo, o por el extremo menor, de manera tal que la base de cada rectángulo es cada uno de los subintervalos de la partición y la altura la define la imagen del extremo mayor o menor de cada intervalo mediante la función. Él concluye que cuando se construyen esos rectángulos la suma del área de los rectángulos es equivalente, bajo ciertas condiciones, es equivalente al área de la región. Nosotros antes para comprender, como hacer los dibujos en la pizarra no es fácil y nos lleva mucho tiempo, vamos ver que es lo que hacía Riemann con los rectángulos para ello vamos a realizar la actividad uno en el computador.

Descripción de la actividad 1 utilizando el Software Maple versión 8





Durante la práctica con el MAPLE

P: **Con el comando** rightbox **después que se realiza la partición se construyen rectángulos por el lado derecho es decir; el extremo superior de cada subintervalo. Con el comando** leftbox **los rectángulos se construyen por el extremo menor o izquierdo y con el** middlebox **se construye de acuerdo a un valor intermedio. Se pueden construir todos los rectángulos que se quieran: 4, 25, 100...**

P: **Cómo ven ustedes los primeros rectángulos con relación a la curva? por ejemplo en el primero cuando eran cuatro.**

A1: **Sobran pedazos de rectángulos sobre la curva.**

P: **¿Qué pasa cuando construimos 25 rectángulos?**

A2: **Sobra menos...?**

P: **¡Aja! Y cómo queda cuando se construyeron 100 rectángulos?**

A3: **Casi se ajustan.**

P: **Que conclusión podemos obtener.**

A2: **Mientras más rectángulos se ajustan mejor.**

P: **Entonces a medida que se aumenta el número de rectángulo, la suma del área de éstos se aproxima al área de la región limitada por la curva, el eje x entre x = -1 y x = 4.**

P: **Con el left ¿qué pasa?**

A1: **faltan pedazos para llegar a la curva**

P: **pasa lo mismo en cuanto a mayor número de rectángulo, éstos se ajustan mejor a la curva. De igual forma ocurre con Middlebox.**

P: **Conclusión, qué conclusión podemos obtener de ahí.**

A2: **Mientras mayor número de rectángulos pareciera estar a la altura de la data.**

P: **¿Qué es la data?**

A2: **El área de la curva.**

P: **La suma de los rectángulo se aproxima al área de la curva, de todas forma eso lo vamos a comprobar ahora.**

P: **Esa es una primera conclusión:**

Escribe en la pizarra:

1) *A medida que se aumenta el número de rectángulo, la suma del área de éstos se aproximan al área de la región limitada por la curva, el eje x entre x = -1 y x = 4.*

P: A medida que se aumenta el número de rectángulo... la suma del área de éstos se aproxima al área de la región limitada por la curva, el eje x entre x = -1 y x = 4.

P: **Que otra conclusión podemos obtener... recuerden que la base de los rectángulos son los subintervalos en que se dividió el intervalo [-1,4] ...qué se puede decir.**

P: **Qué pasa con la medida de la base cuando se aumenta el número de rectángulos.**

A2: **Va tendiendo a cero.**

P: **Va tendiendo a cero, entonces ¿qué quiere decir?**

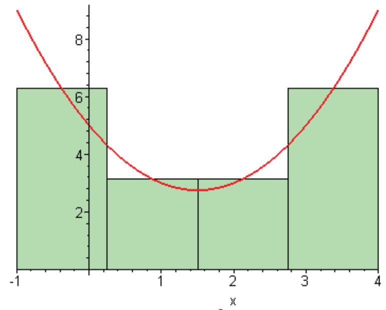
Escribe el la pizarra mientras lo dice:

2) A medida que se aumenta el número de rectángulos las bases de éstos tiende a cero.

P: **Vamos a realizar ahora mismo la actividad número dos con el computador.**

Descripción de la actividad 2 utilizando el Software Maple versión 8

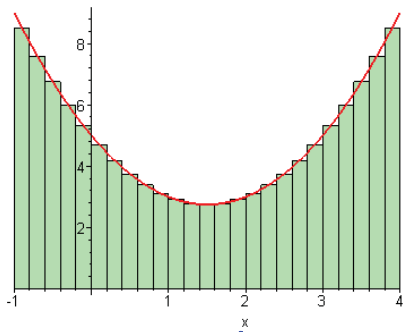
```
> with(student):
> g:=x->x^2-3*x+5;
> plot(g(x),x=-5..5,y=-3..15,thickness=2);
> middlebox(g(x),x=-1..4,4);middlesum(g(x),x=-1..4,4);evalf(%);
```



$$\frac{5}{4}\left(\sum_{i=0}^{3}\left(\left(-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}i\right)^2+\frac{49}{8}-\frac{15}{4}i\right)\right)$$

$$23.51562500$$

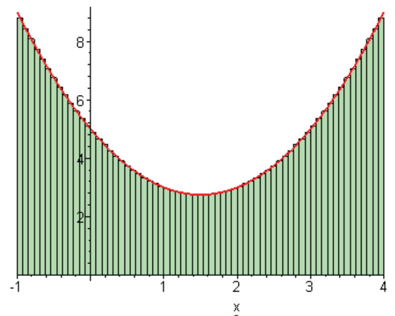
```
> middlebox(g(x),x=-1..4,25);middlesum(g(x),x=-1..4,25);evalf(%);
```



$$\frac{1}{5}\left(\sum_{i=0}^{24}\left(\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2+\frac{77}{10}-\frac{3}{5}i\right)\right)$$

$$24.15000000$$

```
> middlebox(g(x),x=-1..4,65);middlesum(g(x),x=-1..4,65);evalf(%);
```



$$\frac{1}{13}\left(\sum_{i=0}^{64}\left(\left(-\frac{25}{26}+\frac{1}{13}i\right)^2+\frac{205}{26}-\frac{3}{13}i\right)\right)$$

$$24.16420118$$

Comentarios durante la ejecución de la actividad 2:

P: **Fíjense que ahora vamos a trabajar con el valor intermedio** Middlebox **, es decir la altura de los rectángulo va ha estar determinada por la imagen de un valor intermedio de cada intervalo. Vamos a ver como se comporta el valor del área a medida que se aumenta el número de rectángulos.**

Al final de la actividad:

P: **Se dan cuenta, ¿qué ocurre ahí? Esa sumatoria qué representa? ¿Qué representa numerito que aparece abajo? El numerito que está abajo ¿qué es?**

A4: **El resultado**

P: **Si pero que representa ese numerito. Cuando ustedes trabajaron con cuatro, veinticinco y sesenta y cinco rectángulo aparece abajo un numerito, ese numerito representa la suma de las áreas de los rectángulos y de ahí que a medida que los rectángulos se van ajustando más a la curva, ese numerito puede aumentar o disminuir, en este caso va aumentando, se aproxima cada vez más al valor del área de la región limitada por la curva** $y = x^2 - 3x + 5$ **el eje x, entre x =-1 y x =4.**

P: **¿Está claro? Ese número es la suma del área de los rectángulos, la sumatoria representa la suma del producto de la base por la altura de cada rectángulo.**

P: **Bien en lo que nos queda de tiempo vamos a trabajar en la pizarra, vamos a reseñar en base a esta experiencia lo que desarrolló Riemann.**

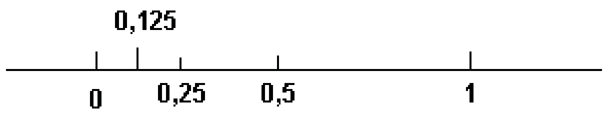
P: **Veamos cómo establece Riemann esto para calcular la integral. Ahora vimos como funciona geométricamente...geométricamente, pero ahora queremos como llegó Riemann de forma matemática, que la integral es igual a la suma del área de los rectángulos cuando el número de éstos tiende a infinito.**

P: **Primero para estas cosas hay que tener claro lo que es el infinito. ¿Qué significa que algo tiende a infinito?**

A4: **¿Que va creciendo?...**

P: **¿Que crece ilimitadamente. Ahora lo que es más difícil entender es cómo un área finita como es la limitada por la gráfica de una función el eje x entre dos puntos, yo pueda lograr meter ahí infinitos rectángulos. Es decir que en ella caben infinitos rectángulos. Lo abstracto de la matemática es eso. Un ejemplo que siempre le coloco a los estudiantes en Matemática I es el intervalo [0,1] entre cero y uno hay infinitos números. ¿Ustedes creen eso? Y yo les decía a ellos que si sumo cero más uno y lo divido entre dos obtengo 0,5. Ahora sumo cero más cero coma cinco y lo divido entre dos y obtengo 0,25 este proceso es infinito y siempre encontraré otro número todos ellos entre cero y uno.**

Escribió en la pizarra:



P: **¿Cuántas veces se puede repetir este proceso?**

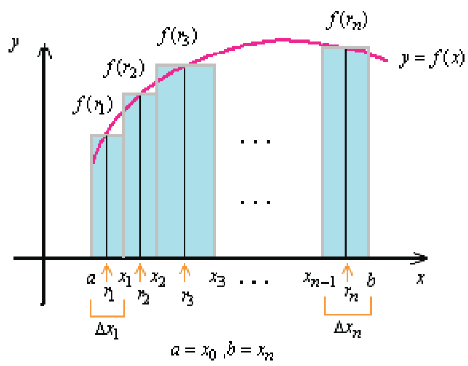
A3: **infinitamente.**

P: **Entonces no hay infinitos números entre cero y uno. Fíjense que esto se puede repetir indefinidamente cada vez va aumentando el número de cifras decimales, que pueden ser infinitas. Algo parecido a esto es lo que hay que tener en cuenta para comprender la integral de Riemann. Riemann hizo...**

Escribe en la pizarra:

Reseñemos en base a la experiencia anterior, lo que desarrollo Riemann

Y dibuja:



P: **Riemann hizo lo siguiente: El espacio entre a y b lo particionó es decir lo dividió en subintervalos, no importa que no sean iguales los subintervalos. Por ejemplo el colocó aquí un punto x_1, un punto x_2, un punto x_3, ... x_{n-1}, así sucesivamente hasta x_n, al primero lo llamó x_0 y al último x_n.. Una partición no importa los pedazos que tenga.**

P: **Ahora fíjense él llamó delta equis sub-uno a la distancia entre equis sub-uno y equis sub-cero. Cómo se calcula la distancia: equis sub-uno menos equis sub-cero, delta de equis sub-dos menos equis sub-uno, así sucesivamente, mientras escribe:**

$$
\begin{aligned}
\Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\
\Delta x_2 &= x_2 - x_1 \\
\Delta x_3 &= x_3 - x_2 \\
&\vdots \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\
&\vdots \\
\Delta x_n &= x_n - x_{n-1}
\end{aligned}
$$

P: **¿Qué está definiendo él ahí o qué definió ?....**

P: **La base de los rectángulos.**

P: **Otra cosa es que en cada base Δx_i él seleccionó un r_i . Así en cada Δx_i seleccionó r_i de tal forma que es un valor intermedio, por ejemplo: Escribe en la pizarra y dice: erre sub-uno tal que es mayor que equis sub-cero y menor que equis sub-uno, erre sub-dos mayor que equis sub-sub –uno y menor que equis sub-dos y así**

En cada Δx_i selecciono un r_i

$$
\begin{array}{l}
r_1 \; tal \; que \; x_o < r_1 < x_1 \\
r_2 \; tal \; que \; x_1 < r_2 < x_2 \\
r_3 \; tal \; que \; x_2 < r_3 < x_3 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
r_i \; tal \; que \; x_{i-1} < r_i < x_i \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \\
r_n \; tal \; que \; x_{n-1} < r_n < x_n
\end{array}
$$

P: **Una cosa que le iba a decir...¡ajá! Una de las conclusiones que ustedes sacaron de las actividades con la calculadora era: que al aumentar el número de rectángulos ¿qué pasaba alguien dijo por ahí?**

A2: **Tiende a cero...**

P: **Tienden a cero entonces, si ellos tienden a cero, en particular el mayor de ellos que es la norma va ha tender también a...'**

A3: **a cero.**

P: **Ahora ¿qué significa que el mayor de los subintervalos tienda a cero? Que el número de rectángulos tiende a infinito. Así al decir que la norma tiende a cero es lo mismo que decir que "ene" tiende a infinito, es decir; que el número de rectángulos tiende a infinito.**

P: **Ahora cuando trabajamos las actividades en el computador pudimos observar que a medida que se aumenta el número de rectángulo, éstos se ajustaban mejor al área de la región. Entonces con esta idea Riemann. Claro que no estamos demostrando, sólo estamos reseñando, pasa con el límite de la relación de aproximado a la relación de igualdad mientras escribía en la pizarra:**

$$Area(de\ la\ región) \approx \Delta x_1 f(r_1) + \Delta x_2 f(r_2) + \Delta x_1 f(r_1) + \Delta x_3 f(r_3) + \ldots + \Delta x_n f(r_n) \ \ (suma\ de\ Riemann)$$

$$Area(de\ la\ región) \approx \sum_{1}^{n} \Delta x_i f(r_i)$$

P**: Al mayor de los sub intervalos le llamaremos la norma y lo denotaremos por:**

Escribe en la pizarra: $\|\Delta x\|$

P: **Él dijo que el límite, es decir; que el área de la región es igual al límite cuando la norma de delta x tiende a cero de la sumatoria desde i igual uno hasta ene de los**

productos de los delta equis sub-i por lo efe de erre sub-i. Y esto a su vez, aunque yo no le diga ahora mismo cómo lo van a calcular, y escribe

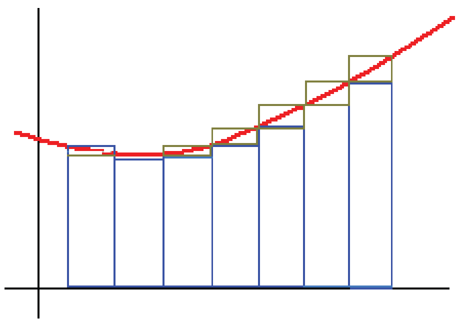
$$Area(de\ la\ región) \approx \sum_{1}^{n} \Delta x_i f(r_i) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

P: **es igual a la integral entre a y b de efe de equis diferencial de equis. Ahora nos falta establecer un vínculo... de la integral como nosotros la venimos calculando hasta el momento la integral indefinida y la integral definida. Nosotros lo que vamos a hacer mañana con los que vienen mañana y el viernes con los que vienen el viernes...y, es que vamos a calcular una integral como lo hacía Riemann haciendo la partición y todo, pero después vamos a ver herramientas, como el Teorema Fundamental del Cálculo que nos van a permitir calcular la integral con lo que ya venimos utilizando desde el inicio del semestre.**

Lo que yo quería que ustedes vieran en esta clase es el aspecto geométrico de la integral definida. Así cuando vieron derivada se hizo hincapié en la interpretación geométrica de lo que es la derivada, recuerden que los aspectos geométricos o gráficos son los que más rápido se fijan en la mente.

P: **Con el computador ustedes puede hacer particiones y dividir el área en mil rectángulo y más y pueden ver como los rectángulos se ajustan cada vez más a la curva. Esa experiencia me imagino que fue clave para comprender esto.**

P: **Nosotros trabajamos la suma de Riemann con los valores intermedio, pero también se puede trabajar con los extremos inferiores o superiores de los subintervalos y escribe:**



P: **que pasa que cuando yo hago la suma superior y la suma inferior de Riemann, por ejemplo en esta región. Trazo primero por el lado izquierdo, que serían los azules, se dan cuenta por el lado izquierdo. Pero si lo hago por el derecho lo hacemos en verde.**

Vemos que existe una diferencia en la suma de los rectángulos azules y la suma de las áreas de los rectángulos verde. Esa diferencia puede ser mínima o tendiente a cero y esa diferencia se asocia con la derivada asociada siempre con diferencias y la integral asociada con la suma y de ahí que podamos establecer relación entre el cálculo de primitiva la integral indefinida y la integral definida. A partir del momento en que se llegan a establecer estas cosas es que se percibe que los dos problemas de los que hablamos al principio: el de las rectas tangentes y el del cálculo de área están íntimamente relacionados. Fue a partir de este razonamiento que hizo Cavalieri y que llevó a la conclusión de que la derivada y la integral son de alguna manera operaciones inversas. Por eso nosotros no comenzamos el programa con lo que estamos haciendo hoy sino, utilizando las nociones de derivada que ustedes conocen.
Cierra: **Mañanas vamos a calcular integrales como el límite de la sumatoria y después veremos el teorema fundamental del cálculo y las calcularemos con lo que hemos venido trabajando y por últimos veremos algunas propiedades de la integral definida, bueno vamos a dejarlo hasta aquí por hoy. Hasta mañana.**

Reconstrucción de la segunda sesión de clase 24/01/08

P: **Bien, en la clase de ayer estuvimos viendo un poco lo que hizo Riemann en relación a la integral definida ¿recuerdan? En aquella oportunidad se dijo que era una reseña. Entonces ahora tenemos un ejemplo y el Maple nos permitirá hacer algunas demostraciones que son necesarias para desarrollar el ejemplo.**
P: **Riemann llegó que la integral de una función entre dos valores era el límite de una sumatoria, el límite cuando la norma tiende a cero. Escribe en la pizarra:**

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{\|\Delta x\| \to 0}{Lím} \sum_1^n f(r_i)\Delta x_i$$

P: **Estamos claro en eso, la idea era que ayer hubiésemos visto un ejemplo, pero no fue posible, entonces...aquí tenemos el ejemplo de una integral que vamos a calcular haciendo uso del método de Riemann. Es la integral entre menos dos y uno de equis cuadrado por el diferencial de equis. Escribe en la pizarra:**

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx$$

P: **Es una integral que de forma indefinida es muy fácil de calcular ¿ Cómo se calcularía?**

A1: **Por la fórmula del potencial.**

P: **Bien, ¿cómo quedaría?**

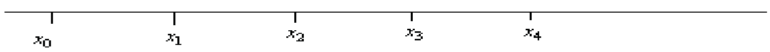
A1: **Equis a la tres sobre tres.**

P: **Entonces lo primero que tenemos que hacer es la partición, recuerde que lo primero que hicimos ayer era la partición que se hacía del espacio de integración, es decir; al intervalo de integración en el caso de ayer era entre a y b y hoy es entre menos dos y uno. Vamos a tomar subintervalos iguales ¿cuál es la manera de tomar subintervalos iguales?... Tomar la distancia y dividirla entre el número de intervalos que queremos tener. Si Usted tiene un espacio y lo divide entre dos va ha tener dos subibtervalos...si lo divide entre tres va ha tener tres subintervalos y así sucesivamente.**

P: **Entonces si la distancia es entre** a y b **entonces se calcula b menos a entre ene, delta equis es la longitud de cada intervalo y escribe en pizarrón:** $\Delta x = \dfrac{b-a}{2}$ **entonces en este caso el extremo superior es uno, entonces será uno menos menos dos entre ene, así cada intervalo será de longitud** $\dfrac{3}{n}$ **y escribe en la pizarra:**

$$\Delta x = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$$

P: **Entonces fíjense como se va a construir, estos eran los delta equis sub i ¿recuerdan? Y dibuja en la pizarra:**



P: **Cómo se obtienen, equis sub-uno será menos dos, que es el extremo menor del intervalo más** $3/n$ **, es como si en un intervalo Usted tiene el punto uno si le sumamos dos, se obtiene que el próximo es tres, pero en este caso la longitud es** $3/n$ **que va a depender del valor de ene, si ene vale cuatro, la longitud será de tres cuartos,...si ene vale cinco, la longitud será de tres quinto, si ene vale cien, será tres sobre cien. Entonces cada uno de los** x_i **de los que hablamos ayer, el primero será:**

$x_i = -2 + \frac{3}{n}$, $x_2 = -2 + \frac{3}{n}.2$ **¿Por qué?... porque se está sumando la longitud tres sobre ene dos veces,** $x_3 = -2 + \frac{3}{n}.3$ **porque se está sumando la longitud tres veces y así escribe:**

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{1}^{n} f(r_i)\Delta x_i$$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{1}^{n} \left(-2 + \frac{3}{n} i\right)^2 \frac{3}{n}$$

P: **Cada** r_i **¿recuerdan? Cada** r_i **va ha tener esta forma: menos dos más tres sobre ene por *i* donde *i* toma los valores uno, dos, tres, hasta ene; bueno eso lo dice la sumatoria y delta equis sub-i es el valor de tres sobre ene, el valor numérico de los delta sub-i es tres ene, ese es la medida. Recuerden estamos calculando áreas de rectángulos, esta es la base y esta la altura.**

P: **¿Por qué elevamos medos dos más tres entre ene por *i* al cuadrado?**

P: **Bueno, porque la función dice que todo elemento de su dominio tiene por imagen, él mismo elevado al cuadrado, es la función equis al cuadrado, por ejemplo la imagen del dos mediante la función es dos al cuadrado igual a cuatro, en particular este valor que es la forma general de la sucesión de puntos que obtuvimos, entonces la imagen mediante la función será "menos dos más tres sobre ene por i, todo elevado al cuadrado". Así lo que ustedes están viendo se puede escribir así y escribe en la pizarra:**

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \left(-2 + \frac{3}{n} i\right)^2 \frac{3}{n}$$

P: **Así menos dos más tres sobre ene por i es la forma del elemento genérico o general es decir; la forma de los** r_i **es menos dos más tres sobre ene por i y eso elevado al**

cuadrado es el efe de ene sub-i y tres sobre ene es la longitud de los delta equis sub-i y esto se puede escribir y escribe en el pizarrón:

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{12}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\right)$$

P: **Al elevar al cuadrado quedaría: el cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado de segundo esto es:**

Cuatro menos doce sobre ene por *i* , más nueve sobre ene al cuadrado por *i* al cuadrado.

P: **¿Está claro o no?**

A1: **No**

P: **¿Dónde está la duda?**

A1: **Ahí**

P: **¿En este desarrollo?**

A1: **¡Aja!**

P: **Bueno, una diferencia al cuadrado: El cuadrado del primero, menos...**

A1: **¡Aja!**

P: **...el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.**

P: **Ahora bien, que significa esto, que estamos sumando desde i igual uno hasta ene, esto fíjense que yo puedo sacar factor común tres sobre ene: y escribe en un borde de la pizarra:**

$$\frac{3}{n}+\frac{3}{n}.2+\frac{3}{n}.3+\ldots=\frac{3}{n}(1+2+3+4+\ldots)$$

P: **Yo puedo escribir tres sobre ene por uno más dos más tres y así sucesivamente, entonces que da la suma de los ene primeros números naturales. A qué es igual la suma de los ene números naturales. Esto se demuestra analíticamente, creo que ustedes utilizaron esta identidad cuando trabajaron con sucesiones y progresiones. Nosotros lo vamos a demostrar utilizando el Maple, no es una demostración formal, pero el software calcula la forma general de las dos sumas infinitas que se presentan y escribe:**

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

P: **Esto lo vamos a realizar con la actividad número tres con el Maple, fíjense no sólo ocurre con doce entre ene por i, sino también con nueve sobre ene cuadrado por i al**

cuadrado, va a ocurrir algo parecido, vamos a sacar factor común nueve sobre ene cuadrado y nos queda y escribe:

$$\frac{9}{n^2}+\frac{9}{n^2}.2^2+\frac{9}{n^2}.3^2+\frac{9}{n^2}.4^2+\ldots=\frac{9}{n^2}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\right)$$

Que eso va resultar igual a ene por ene más uno por dos enes más uno sobre seis, y escribe:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+..k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

P: **Estas dos expresiones son la próxima actividad con Maple, con esa actividad se espera ver su veracidad. El comando sum de la librería les da la expresión que rige la suma de los k primeros términos, veamos…**

Descripción de la actividad 3:

```
> with(student):
> Sum('k','k'=1..n)=sum('k','k'=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$$

```
> factor(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n\,(n+1)$$

```
> Sum('k^2','k'=1..n)=sum('k^2','k'=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}n+\frac{1}{6}$$

```
> factor(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$$

P: **Fíjense que existen dos comandos Sum uno con mayúscula en la inicial y otro con minúscula.**

P: **¿Nunca habían trabajado o deducido la expresión de la suma de los ene primeros números naturales?**

A2**: No.**

P: **¡ven que es exactamente la misma expresión! El Maple nos permite comprobar la veracidad de la expresión. Él calcula la suma de los ene primeros números naturales. Fíjense si yo hago ene igual tres ¿cuánto medaría la suma de los tres primeros números naturales?**

A3: **Seis.**

P: **Así, como es hasta tres yo sustituyo en la fórmula tres por tres más uno entre dos y eso es seis.**

P: **si ahora quiero la suma de los tres primeros números elevados al cuadrado, entonces escribo: tres por tres más uno por seis más uno entre seis y eso da catorce. ¿Alguna pregunta?.**

P: **Bien, está claro, entonces fíjense ahora yo cambio la sumatoria en la demostración que venimos haciendo, es decir; la suma de los ene números naturales es igual a ene por ene más uno entre dos y la suma de los ene primeros números naturales al cuadrado es igual a ene por ene más uno por dos por ene más uno entre seis.**

Escribe en la Pizarra:

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left[4n-\frac{12}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{9}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right]$$

A1: **¿Por qué queda cuatro por ene?**

P: **Bueno, si yo sumo ene veces cuatro, quedarán cuatro por ene.**

Escribe en la pizarra:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left[4n-6n-6+\frac{3}{2n}(n+1)(2n+1)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)\left[4n-6n-6+\frac{3}{2n}\left(2n^2+3n+1\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(12-18-\frac{18}{n}+9+\frac{27}{n}+\frac{9}{n^2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(21-18)\\
&=21-18\\
&=3
\end{aligned}$$

P: **así la integral es igual a tres, esto se hizo para que vean la forma como Riemann calculaba integrales. Cada vez que calculaba una integral tenía que realizar este proceso, es decir; hacer una partición, es un trabajo tanto algebraico como geométrico: trabaja con particiones, sub-intervalos y la parte algebraica. Muchas veces tenía que demostrar expresiones como las que nosotros comprobamos con el maple.**

P: **Esa es la integral formal de Riemann, el hecho de hacerlo así es para que ustedes vean la relación que tiene la integral con los aspectos geométricos.**

P: **ayer estuvimos viendo los aspectos geométricos más crudos para realizar cuadraturas hoy vemos aspectos geométricos que tienen que ver con segmentos y particiones, que también tienen que ver con el formalismo matemático, la partición tiene que ver con la teoría de conjuntos. Pero nosotros no lo vamos hacer así, nosotros vamos a utilizar lo que ya hemos trabajado, la integral indefinida.**

Escribe en la pizarra: $\int_{-2}^{1} x^2 dx$

P: **¿Esta integral es igual a qué?**

A: **A equis al cubo sobre tres.**

P: **Así es; pero tenemos que evaluarla entre menos dos y uno, pero para ello tenemos que definir un teorema: El Teorema Fundamental del Cálculo, es fundamental porque precisamente permite vincular lo que ya nosotros conocemos de la integral indefinida con la integral definida.**

Escribe en la pizarra:

<u>Teorema fundamental del cálculo:</u> Sea $f(x)$ ***una función continua en*** $[a,b]$ ***y*** $F(x)$ ***una primitiva de*** $f(x)$ ***en*** $[a,b]$ ***así:*** $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

P: **Bien, este teorema fundamental del cálculo me establece una relación entre la integral indefinida y los métodos de integración: integración por sustitución, por parte, por sustituciones trigonométricas es decir; todos los que veníamos viendo en las semanas anteriores, el teorema me permite utilizar eso para el cálculo de integrales definidas.**

P: **La notación de Newton y Leibniz nos permite escribir la primitiva y decir entre que valores se evaluará.**

Escribe en la pizarra:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

P: **Se evaluará entre a y b**

P: **Entonces para aplicar la integral a la resolución de problemas no es necesario aplicar los procedimientos originales de Riemann. Se aplica el teorema fundamental del cálculo y así es que vamos en las próximas clases a aplicar la integral indefinida para resolver problemas de áreas, volúmenes y otras aplicaciones... Por ejemplo esa integral que acabamos de hacer, la integral entre menos dos y uno de equis al cuadrado por diferencial de equis, nosotros la podemos calcular haciendo uso de lo que ya sabemos.**

P: **¿A qué es igual esa integral'**

A: **A equis al cubo sobre tres.**

P: **Utilizando las formulas de integración, que veo que muchos no la saben, ¿evaluando entre que valores?**

Escribe en la Pizarra:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

P: **así nosotros llegamos al valor, sin necesidad de calcular el límite de una sumatoria o le desarrollo que antes hicimos. Ahora nosotros vamos a hacer ejercicios de este tipo con el apoyo del computador, pero antes veamos las siguientes propiedades:**

P: **¿Alguna pregunta?**

P: ¿**Ustedes recuerdan las propiedades de la integral indefinida? Si las recuerdan verán que son las mismas.**

Escribe en la pizarra:

$$1)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \text{ para } k\in\Re$$

P: **La primera dice que la integral entre a y b de ka por efe de equis diferencial de equis es igual a ka por la integral entre a y b de efe de equis diferencial de equis.**

Escribe en la pizarra:

$$2)\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

P: **La integral entre ay b de la suma o la resta de efe de equis y ge de equis diferencial de equis es igual a la integral entre ay b de efe de equis más o menos la integral entre a y b de ge de equis.**

P: **La siguiente propiedad para una mejor comprensión la vamos a utilizar el maple.**

Escribe en la pizarra:

3) ***Si*** f y g ***son funciones integrables en*** $[a,b]$ ***y*** $f\geq g$ ***para todo*** $x\in[a,b]$***,***

entonces, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

P: **Esta propiedad es... importante para cuando estemos determinando áreas de regiones limitadas por funciones y dice: Si efe y ge son integrables en el intervalo cerrado a, b y siempre efe toma valores mayores que ge en ese intervalo, entonces la integral de la primera función es mayor. Recuerden recuerde que la integral definida la estamos asociando al área de la región que encierra la gráfica de la función y el eje equis entre a y b.**

P: **En el material que les entregué en la parte cinco hay un ejemplo para hacerlo con el Maple, vamos a realizar el ejercicio cinco, aunque nos saltamos el cuatro, donde se calculaban integrales definidas. Bueno se hacen los dos el cuatro y el cinco.**

P: **En el ejercicio cuatro se hace la integral que hicimos de ejemplo; recuerdan los comandos ya lo utilizamos la semana pasada. El comando int.**

Actividad cuatro:

```
> Int(x^2,x=-2..1)=int(x^2,x=-2..1);
```

$$\int_{-2}^{1} x^2\, dx = 3$$

P: **La semana pasada trabajamos con estos comandos, pero con integrales indefinidas, es decir obteníamos una expresión simbólica, ahora se obtiene un número.**

P: **Ahora hagamos la actividad cinco.**

Actividad cinco:

```
> f:=x->x^2+1;g:=x->-x^2+3;
```

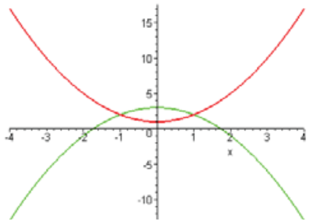
$$f := x \to x^2 + 1$$

$$g := x \to -x^2 + 3$$

```
> solve(f(x)=g(x));
```

$$1, -1$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-4..4,thickness=2);
```



```
> Int(f(x),x=-1..1)=int(f(x),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^2 + 1 \, dx = \frac{8}{3}$$

```
> Int(g(x),x=-1..1)=int(g(x),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} -x^2 + 3 \, dx = \frac{16}{3}$$

P: **¿Qué pasó con las gráficas del ejemplo? ¿Cuál toma valores mayores? ¿Lo han hecho? ¿La efe o la ge?**

A4: **La verde.**

P: **¿Cuál es la función de la gráfica verde?**

A4: **La que tiene el menos.**

P: **Muy bien la parábola que tiene negativo el coeficiente del término de equis cuadrado, es decir la ge. Ahora calculemos la integral.**

P: **No sé qué les pasa les falta rapidez en el computador, ustedes son estudiantes de informática.**

A2: **La ge que es la verde.**

P: **Es claro la ge alcanza valores mayores por eso el área bajo su gráfica es mayor que la de la función efe.**

A3: **¡Profesor!**

P: **Dime**

A3: **¿Por qué me dice error?**

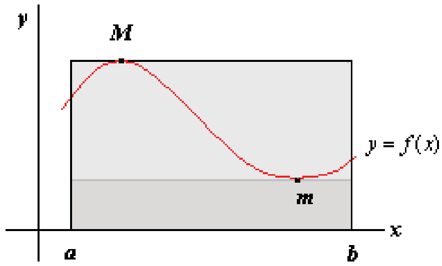
P: **Hay algo incorrecto, veamos... sí le faltó una llave.**

A3: **Así no lo había visto.**

P: **Bien, seguimos otra propiedad y escribe en la pizarra:**

4) ***Si M y m son valores máximo y mínimo respectivamente de la función*** $f(x)$ ***en el intervalo cerrado*** $[a,b]$ ***y además*** f ***es integrable en el mismo intervalo, entonces se cumple:*** $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

P: **A esto nos referimos y por rapidez lo vamos hacer gráficamente y bosqueja en la pizarra:**



P: **Si tenemos esta función, vamos a trazarla con el marcador rojo para que se vea mejor. Esta función toma un valor máximo *M* en a, b y un valor mínimo *m* en a, b. Si se establecen dos rectángulos de base be menos a, pero el primero de altura *M* y el segundo de altura *m*. El área del rectángulo de altura *m* es menor que la integral y el área del rectángulo de altura *M* es mayor que la integral, es decir que el áreas bajo la curva entre a y be. Así la integral está acotada por los dos rectángulos.**

P: **Vamos ahora a calcular algunas integrales definidas, apoyándonos en el computador, con el Maple, es la segunda parte de la guía. Por ejemplo hagamos la número tres. Ahora en esta clase porque no hay tiempo, pero en la próxima vamos a**

tomar una hora para que ustedes calculen integrales definidas apoyados por el software. Los ejercicios van ha se de la guía que les entregué.

P: **Qué método vamos a utilizar para calcular esta integral, fíjense que a mi también me interesa que utilicen el software para que cuando trabajemos las aplicaciones puedan apoyarse en él.**

P: **Cómo calculamos esta integral.**

Escribe en la pizarra:

$$\int_1^3 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx$$

A1: **por cambio de variable.**

P: **¿Cuál es el cambio de variable?**

A1: **U igual a equis cuadrado más uno.**

P: **¿Cómo queda el diferencial?**

A1: **Dos equis.**

P: **Queda entonces y escribe en la pizarra:**

$$\int_1^3 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \int \frac{du}{u^3}$$

P: **Pero aquí lo importante es... Cuando nosotros hacíamos estas integrales por cambio de variable, esta es muy sencilla, las hacíamos más complicadas con sustituciones trigonométricas que también vamos a calcular ahora como definidas. Al final teníamos que restituir el cambio, es decir; volver a escribirla en la variable original.**

P: **Ahora no es necesario, porque vamos a obtener un valor numérico, para ello cambiamos también los límites de integración y al final evaluamos con esos límites.**

P: **¿Cómo cambiamos los límites?**

A2: **Eh...?**

P: **Bueno, para equis igual a uno, u es igual a uno al cuadrado más uno igual a dos.**

Escribe en la pizarra:

Para $x=1; \quad u=1^2+1=2$

P: **Para equis igual tres u es igual a tres al cuadrado más uno igual a diez.**

Escribe en la pizarra:

$$\textit{\textbf{Para}}\ x = 3;\quad u = 3^2 + 1 = 10$$

P: **Así el límite inferior es dos y es superior diez.**

P: **¿Cómo hacemos para calcularla?**

A5: **La integral de u.**

P: **Ya se les olvidó las fórmulas.**

Escribe en la pizarra:

$$\int_1^3 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \int_2^{10} \frac{du}{u^3}$$

P: **¿Cómo hacemos para resolverla?**

A5: **La integral de u**

P: **¿Ya se les olvidaron las fórmulas?**

A4: **De de equis sobre equis**

P: **Ahora la variable es u olvídense de equis.**

A7: **Logaritmo neperiano de u.**

P: **No.**

A5: **Profesor es u a la ene por de, de u… se me olvidó.**

P: Si no se aprenden las fórmulas.

Escribe en la pizarra:

$$\int_2^{10} u^{-3}du = \left.\frac{u^{-2}}{-2}\right|_2^{10}$$

A5: **Esa profesor es la que yo quería decirle.**

P:**¿Y a qué es igual esto?**

A2: **Se coloca a lo que es igual u, que es equis cuadrado más uno.**

P: **No.**

Escribe en la pizarra:

$$= -\left.\frac{1}{2u^2}\right|_2^{10}$$

P: **¿Cómo lo evalúo?**

A2: **Bueno u es diez elevado a la dos.**

P: ¿**Así qué tenemos?**

A2: **Menos uno entre doscientos.**

P: **¿Qué más?**

A2: **Más uno entre ocho.**

P: **Muy bien y eso da.**

A3: **Menos uno entre doscientos más uno entre ocho.**

El Profesor escribe en la pizarra:

$$= -\frac{1}{2u^2}\Bigg|_2^{10} = -\frac{1}{200} + \frac{1}{8} = \frac{-1+25}{200} = \frac{24}{200} = \frac{3}{25}$$

P: **Muy bien, ahí tienen el valor numérico de la integral. Vamos a hacerlo con el Maple:**

Descripción de la práctica:

```
> with(student);
```

$[D, Diff, Doubleint, Int, Limit, Lineint, Product, Sum, Tripleint, changevar, completesquare, distance, equate, integrand, intercept, intparts, leftbox, \ldots makeproc, middlebox, middlesum, midpoint, powsubs, rightbox, rightsum \ldots showtangent, simpson, slope, summand, trapezoid]$

```
> a:=Int(2*x/(x^2+1)^3,x=1..3):a;
```

$$\int_1^3 2\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$

```
> changevar(x^2+1=u,a,u);
```

$$\int_2^{10} \frac{1}{u^3}\,du$$

```
> value(%);
```

$$\frac{3}{25}$$

P: **Fíjense que al hacer el cambio de variable con el Maple, éste les cambia de una vez los límites de integración.**

P: **Vamos a hacer ahora la número ocho, pero la hacen primero con el Maple, al lado tienen los comandos, y después la hacemos a mano. También se hace por cambio de variable.**

Los estudiantes comienzan a trabajar con el computador en la siguiente experiencia:

```
> with(student):
> e:=Int((1+ln(x))^2/x,x=1..exp(1)):e;
```

$$\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}\,dx$$

```
> changevar(1+ln(x)=u,e,u);
```

$$\int_1^2 u^2\,du$$

```
> value(%);
```

$$\frac{7}{3}$$

P: **Entonces ¿Cómo lo harían?**

A2: **Estamos trabajando.**

A3: **Por cambio de variable, el mismo que hicimos con el Maple. Uno más logaritmo neperiano de equis.**

P: **Bien y de de u.**

A5: **equis de de equis.**

P: **De de equis entre equis ya que cuál es la derivada de uno más logaritmo neperiano de equis.**

A5: **De de equis entre equis.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx = \int_1^2 u^2 du$$

P: **Pero tenemos que cambiar los límites de integración, para equis igual a uno, u es uno más logaritmo neperiano de uno. ¿Cuánto da eso?**

A5: **Uno.**

P: **¿por qué?**

A5: **Uno más cero.**

P: **Claro logaritmo de uno es cero y para equis igual a e, u es igual a uno más logaritmo neperiano de e. ¿Cuánto vale eso?**

A2: **Debe ser dos, logaritmo de e debe ser uno.**

P: **¿Por qué?**

A2: **Bueno profesor el Maple dice que es dos y como es uno más el logaritmo de e.**

P: **Fíjense que aunque eso lo debían recordar, el Maple le hizo deducir que logaritmo neperiano de e es uno.**

A2: **Más fácil profesor.**

P: **No, pero tienen que tener los conocimientos teóricos para hacer un buen uso de él. Sólo con él no van a hacer nada.**

A2: **Tiene razón.**

P: **Ustedes cursaron Matemática uno. La función logarítmica es la inversa de la exponencial y viceversa. Cuando se compone una función con su inversa. ¿Qué se obtiene?**

A1: **La identidad.**

P: **¿Cuánto da la integral de u cuadrado sobre dos?**

A5: **u a la tres sobre tres.**

P: **¿Por qué?**

A5: **Ehhh...**

P: **Acuérdense que pueden usar el Maple, pero el cálculo deben entregarlo escrito en la hoja de examen. Si esto da u a la tres sobre tres evaluado entre uno y dos.**

Escribe en la pizarra.

$$= \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^2$$

P: **¿Cómo se evalúa?**

A3: **Dos a la tres sobre tres menos uno a la tres sobre tres.**

El profesor escribe:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

P: **así quiero que trabajen la próxima clase, a cada quien le voy a dar ejercicios para que los calculen con el apoyo del software. Tienen que aprenderse las propiedades y las fórmulas y también ejercitar los comandos del Maple. Hasta Mañana...**

Reconstrucción de la tercera sesión de clase 30/01/08

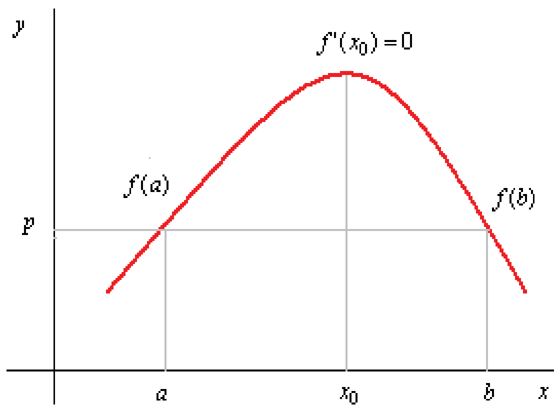
P: **¡Buenos días! Hoy continuamos con la planificación del contenido de este curso, vamos a ver el cálculo del área de regiones limitadas por funciones continuas. Recapitulando lo que se hizo la semana anterior, se puede decir que la semana pasada vimos los aspectos teóricos de la integral definida; los relacionamos con lo que habíamos visto en la semanas anteriores, la integral indefinida. ¿Cuál fue el vínculo entre la integral indefinida y la integral definida?**

A1: **La primitiva.**

P: **¡Aja! ¿Y de dónde surge eso? Del teorema fundamental de cálculo, este teorema nos permite utilizar los objetos de integración indefinida que venimos utilizando para calcular integrales definidas. Otro tema importante es el teorema del valor medio para integrales que nos quedó pendiente de la clase anterior.**

P: **Recuerdan el teorema del valor medio para el cálculo diferencial. ¿Qué dice? Este teorema señala que si una función continua toma igual valor para dos elementos diferentes de su dominio, es decir; efe de a igual a efe de b, entonces entre a y be existe un valor para el cual la derivada se hace cero.**

Bosqueja en la pizarra:



P: **ese es el teorema del valor medio para la derivada. El teorema del valor medio para integrales dice algo similar, pero tiene que ver con lo que significa la integral. Fíjense lo que dice este teorema: Si una función es continua en un intervalo cerrado, podemos determinar un alfa perteneciente a ese intervalo para el cual se verifica esta igualdad.**

Habla mientras escribe en la pizarra:

Si f ***es continua en*** $[a,b]$ ***entonces, existe*** $\alpha \in [a,b]$ ***tal que se cumpla la siguiente igualdad*** $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\alpha)$

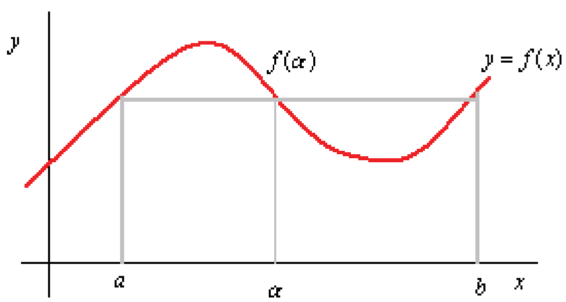
P: **¿Qué significa esta igualdad?**

P: **La expresión be menos a por efe de alfa. ¿Qué les recuerda?**

A2: **los rectángulos.**

P: **En la integral definida, be menos a es la base y efe de alfa es la altura.**

Bosqueja en la pizarra:



P: **Esto quiere decir que existe un rectángulo, lo que hablamos, un área rectilínea que es equivalente al área limitada por la gráfica de efe de equis entre equis igual a y equis igual be. ¿Qué significa? Que ese alfa entre a y be (señala en el dibujo) determina en la curva un punto efe de alfa, la imagen de alfa mediante la función efe. Por ese punto efe de alfa de la curva se puede trazar un rectángulo y é área de ese rectángulo es exactamente igual al área limitada por la curva, el eje equis entre equis igual a y equis igual be. Eso es lo que nos dice el teorema de valor medio para integrales.**

P: **Ahora el alfa no es única, pudieran existir más de uno para los cuales se cumpla la igualdad.**

Agrega: ***α no es necesariamente único*** **al teorema antes escrito en la pizarra.**

P: **Bien está claro.**

(La mayoría dice que si)

P: **Bien, vamos a hacer un ejemplo, para determinar el valor de alfa.**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ***determina α para que se verifique el TVM en*** $[1,4]$.

P: **Tenemos un ejemplo. ¿Qué función es esa? Es un polinomio. Determina el alfa para que se verifique la igualdad en el intervalo uno cuatro. ¿Qué debe ocurrir? Bueno yo le resalté que la función es un polinomio, porque el polinomio siempre es continuo y la condición del teorema dice que efe debe ser continua. ¿Qué debe ocurrir?**

Escribe en la pizarra:

Debe ocurrir que:

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx = (4-1)f(\alpha)$$

P: **Que la integral entre uno y cuatro de equis al cuadrado, más cuatro equis, más cinco es igual a cuatro menos uno por efe de alfa. Es lo que dice el teorema del valor medio.**

P: **¿Cómo podemos despejar alfa?**

P: **Primero calculamos la integral, esto debe estar claro para ustedes. Al calcular una integral definida ¿Qué obtenemos?**

A1: **Un número.**

P: **Sí siempre nos va a dar un número... un número. Bien entonces calculamos la integral ¿Cuál es la primitiva de esto? (señala la integral en la pizarra).**

A3: **equis al cubo sobre tres.**

P: **¿Qué más?**

A2: **Cuatro por equis cuadrado sobre dos.**

P: **Perfecto ¿Qué más?**

A3: **Cinco equis.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Bigg|_1^4=3f(\alpha)$$

P: **Eso es evaluado entre uno y cuatro, es igual a tres por efe de alfa. Evaluamos...**

Escribe en la pizarra:

$$\left(\frac{64}{3}+32+20\right)-\left(\frac{1}{3}+2+5\right)=3f(\alpha)$$
$$\frac{64}{3}+52-\frac{1}{3}-7=3f(\alpha)$$
$$21+45=3f(\alpha)$$
$$22=f(\alpha)$$

P: **¿Cómo es efe de alfa?**

Continúa escribiendo en la pizarra:

$$\alpha^2+4\alpha+5=22$$
$$\alpha^2+4\alpha-17=0$$
$$\alpha_1=-2+\sqrt{21};\ \alpha_2=-2-\sqrt{21}\ (\text{No pertenece a }[1,4])$$

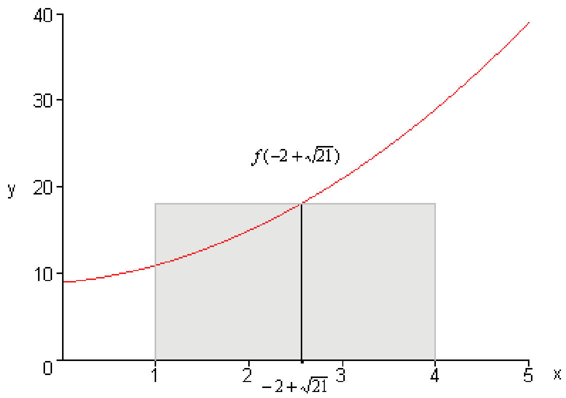
P: **Luego alfa es igual a menos dos más raíz cuadrada de veintiuno aproximadamente a dos coma cincuenta y ocho.**

Escribe en la pizarra;

$$\alpha=-2+\sqrt{21}\approx 2{,}58$$

P: **Fíjense que la segunda solución la descartamos porque no está en el intervalo uno cuatro. El alfa es aproximadamente dos coma cincuenta y ocho que si está en el intervalo uno cuatro. Ahora grafiquemos y veamos lo que ocurre:**

Bosqueja en la pizarra:



P: **Entonces esta es la gráfica de la función, si quieren ustedes la pueden hacer ahora con el Maple. Existe un valor; menos dos más raíz cuadrada de veintiuno que es aproximadamente igual a dos coma cincuenta y ocho que está más o menos por acá (señala el gráfico en la pizarra) para el cual efe de menos dos más raíz de veintiuno está acá (señala el gráfico en la pizarra) es la imagen de ese valor. Así el rectángulo es igual al área bajo la curva entre uno y cuatro, pueden verificar esa imagen con el Maple, la semana pasada estuvimos trabajando en eso, así...**

Escribe en la pizarra los comandos:

```
> f:=x->x^2+4*x+5;
> plot(f(x),x=0..5,y=0..40);
```

P: **Alguna pregunta.**

P: **Antes de comenzar a ver las aplicaciones, vamos a ver dos propiedades que no vimos la clase pasada y que son importantes para el cálculo de áreas.**

Escribe en la pizarra:

1) Si f ***es continua en*** $[a,b]$, $[a,c]$ ***y*** $[c,b]$; $a<c<b$ ***entonces***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2) $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

P: **A estas propiedades les veremos la utilidad, sobre todo a la primera, cuando estemos calculando áreas de regiones limitadas por funciones y nos interese dividir el intervalo de integración y calcular el área en cada uno de ellos de acuerdo a las características de la función. Fíjense que la función es continua en el intervalo más grande a, be, pero también es continua en los subintervalos a, ce y ce, de. Con esto se quiere garantizar que la función no tiene puntos de discontinuidad. Así se puede la integral se puede escribir como las suma de otras dos, la que va de a, a ce y la que va de ce a be.**

P: **La segunda propiedad pues, nosotros sabemos que en una integral definida el límite superior se escribe en la parte de arriba y el inferior abajo, pero a veces cuando hacemos cambios de variable, mañana vamos a ejercitarnos sobre eso, nos quedan invertidos, es decir arriba el menor y abajo el mayor. Buenos en esos casos se utiliza la propiedad se invierte pero, se coloca un signo menos a la integral.**

P: **Buenos voy a dejarle estos ejercicios sobre el teorema del valor medio.**

Escribe en la pizarra:

Determine α para que se verifique el TVM.

a) $$\int_1^2 x^3 dx = (2-1)f(\alpha)$$

b) $$\int_{-2}^2 \left(x^2+1\right)dx = (2+2)f(\alpha)$$

P: **Son ejercicios como el que acabamos de hacer.**

P: **Qué decíamos la vez pasada acerca del número que obtenemos al calcular una integral definida. Yo calculo una integral definida y obtengo nueve ¿Qué significa ese número?...Hablamos también, creo que cuando comenzó el curso, sobre si tiene un espacio rectangular de cinco metros de largo por cuatro de ancho, entonces el área es veinte ¿Qué significa ese veinte?**

A2: **El espacio se parte en varios pedazos,...en veinte...**

P: **Eso lo que significa es que ese espacio está determinado por veinte cuadrados de un metro de lado cada uno. Buenos ahora seguimos buscando ese mismo número pero en regiones curvilíneas y haciendo uso de la integral.**
P: **La integral definida nos permite determinar el número que representa el área de una región limitada por curvas y esa es la primera aplicación que vamos a ver.**

Escribe es la pizarra:

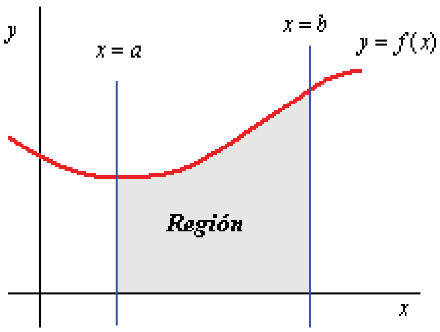
Aplicaciones de la integral definida Cálculo del área de regiones limitadas por curvas:

P: **Nosotros vamos a ver varias aplicaciones, la primera es esta y vamos a comenzar con un ejemplo a manera de ilustración, por supuesto que ejemplificaremos diversas situaciones.**
Escribe en la pizarra:

Ejemplo 1: Determina el área de la región limitada por $f(x)=4-x^2$***, el eje x entre las rectas*** $x=-2$ ***y*** $x=1$.

P: **Bien... eso para ustedes ahora es un problema, por eso requiere analizar la situación. Fíjense nos dan una función y su gráfica encierra una región conjuntamente con el eje equis y en relación con las rectas equis igual menos dos y equis igual uno. ¿Cómo son esas rectas? ¿Cómo son con relación al plano? Son verticales u horizontales o son oblicuas.**
A2: **En el espacio.**
P: **No, ustedes están en el espacio, las rectas equis igual menos dos y equis igual uno son perpendiculares al eje equis, son verticales en relación a éste. Recuerden que toda recta de la forma equis igual a, a es perpendicular a el eje equis y toda recta de la forma ye igual a b es perpendicular al eje ye.**
P: **¿Qué creen ustedes que debemos hacer primero? Para tener mayor información.**
A3: **Resolver la ecuación.**
P: **¡Aja! Pero para qué la vamos a resolver. ¿Qué conseguimos con resolverla? Les digo esto porque si yo tengo una función (Bosqueja en la pizarra) y tengo dos rectas equis igual a y equis igual be y queremos determinar el área de esta región y la función ye es igual efe de equis, entonces simplemente el área de la región es igual a la integral entre a y be de efe de equis diferencial de equis.**

Mientras hablaba bosquejo en la pizarra:



P: **¿Eso le aclara lo que tenemos que hacer? ¿Qué debemos hacer?**

P: **Podemos calcular directamente la integral pero nosotros no sabemos como es la región. Les decía hace rato que si una función trabaja con valores negativos tenemos que colocarle un signo menos a la integral para que el área sea positiva. Nosotros no sabemos cómo se comporta esta función, es posible que algunos de ustedes se imaginen la gráfica porque es una parábola. Pero hay casos que no es tan sencillo. Lo primero que debemos hacer es graficar la función sobre todo entre menos dos y uno. Otra cosa que podemos hacer es hallar los puntos de corte con los ejes. Entonces vamos a hacer eso primero.**

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte con los ejes

Con el eje x **Con el eje y**

$$4 - x^2 = 0 \qquad f(0) = 4 - 0^2$$

$$(2 - x)(2 + x) = 0 \qquad = 4$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2 \qquad y = 4$$

P: **Los puntos de corte con el eje equis: equis sub-uno igual a dos y equis sub-dos igual a menos dos y corta al eje ye en cuatro.**

P: **Ahora grafiquemos.**

A3: **En el plano.**

P: **Sí, dibujamos en el plano. Le damos valores a equis ¿Qué valor le damos?**

A1: **Cero.**

P: **¿La imagen de cero es?**

A2: **Cuatro.**

P: **Para uno ¿Cuánto vale?**

A3: **Menos uno.**

P: **No, pero sustitúyelo en la función ¿Qué da?**

A3: **tres.**

P: **Y para menos uno... tres también.**

P: **Para dos ¿Cuánto da?**

A3: **Cero.**

P: **Y para menos dos.**

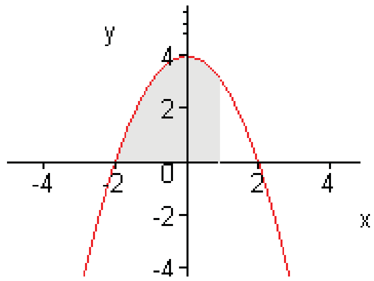
A3: **Cero.**

P: **Para tres.**

A1: **Uno...no menos cinco.**

P: **Menos cinco.**

Mientras hablaba el profesor fue bosquejando en la pizarra:



Los cálculos para la gráfica los hizo el profesor conjuntamente con los alumnos, éstos mostraron pocas destrezas en ello.

P: **Entre qué valores me están pidiendo calcular el área de la región ¿Entre qué valores?**

A2: **Menos dos y uno.**

P: **Es decir que me están pidiendo que halle el área de la región y lo señala en la pizarra. Como trabajamos con valores positivos de la función no es necesario colocarle el signo menos delante de la integral, es decir; el área está en la parte positiva del eje ye. La función toma valores positivos. Entonces, podemos construir la integral que representa el área de esa región.**

P: **¿Cómo queda la integral?**

A2: **La integral de cuatro menos equis al cuadrado por diferencial de equis.**

P: **Pero, ¿Cuáles son los límites de integración son?**

A2: **Entre menos dos y uno.**

A3: **Menos dos y uno.**

P: **Bien se dan cuenta que ustedes saben lo que no quieren es hablar.**

P: **A qué es igual esa integral. La primitiva, nosotros hemos hecho muchas integrales, ésta es muy sencilla. ¿Cuál es la integral indefinida de cuatro más equis al cuadrado?**

A2: **Cuatro equis menos equis al cubo entre tres.**

P: **Muy bien, eso lo vamos a evaluar entre menos dos y uno.**

Entre preguntas y respuestas ha escrito en la pizarra:

$$
\begin{aligned}
A(\text{Re}\,gi\acute{o}n) &= \int_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx \\
&= \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} \\
&= \left(4-\frac{1}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right) \\
&= 4-\frac{1}{3}+8-\frac{8}{3} \\
&= 12-3 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

P: **¿Qué significa esas nueve unidades? Que dentro de esa región caben nueve cuadritos de una unidad de lado. ¿Está claro?**

A2: **Sí.**

A3: **Sí.**

P: **Mañana ustedes van a hacer problemas de este tipo. Ustedes están apurado ¿tienen clase ahora?**

A1: **Sí.**

P: **Ahora les voy a escribir... Ahí tienen en el Dossier que les entregué cómo hacer el cálculo de áreas con ayuda del computador. De toda manera le voy a escribir cómo lo hubiéramos hecho con el Maple.**

Escribe en la pizarra:

```
> f:=x->4-x^2;solve(f(x)=0);
> plot(f(x),x=-4..4,y=-6..6);
```

P: **Háganlo en el computador, es importante porque en la clase de mañana cuando estén trabajando pueden apoyarse en el computador y en las evaluaciones también pueden hacer uso de él. Claro lo importante es que en el papel tienen que escribirme todos los pasos.**

P: **Ya lo terminaron.**

A6: **No.**

A2: **La gráfica varía un poco.**

P: **Bueno más precisión... en la pizarra le dimos algunos valores y unimos los puntos. Recuerden que sólo es un bosquejo de lo que es la gráfica, la gráfica es un ideal, es decir siempre lo que bosquejamos son aproximaciones con exactitud no es la gráfica. El computador es más preciso, sin embargo no es exactamente la gráfica.**

A6: **Puse restart y no aparece nada.**

P: **Es que estas trabajando a modo de texto. Bueno recuerden que la clase de hoy es teórica, si quieren los que puedan quedarse en el laboratorio y pueden ir resolviendo problemas con el apoyo del computador y mañana vamos a la práctica en las dos horas.**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo 2: Sea $g(x) = x^2 - 7x + 6$ ***una función. Halle el área de la región limitada por la gráfica de ella y el eje x.***

P: **¿Qué ven ustedes de diferente al anterior?**

A7: **Que no dan los intervalos de las rectas.**

P: **El intervalo de integración ¿Qué les hace suponer eso?**

A7: **Que tenemos que calcularlo.**

P: **¿Cómo lo calculamos?**

A7: **Eh..?**

P: **Se debe entender que la gráfica de ge corta al eje equis en dos puntos por lo que determina una región. Entonces, tenemos que hallar primero. ¿Qué tenemos que hallar primero?**

A3: **Los puntos de corte.**

P: **Exactamente los puntos de corte.**

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte con el eje x

P: **Entonces igualo a cero esto es equis cuadrado menos siete equis más seis igual a cero.**

Escribe en la pizarra:

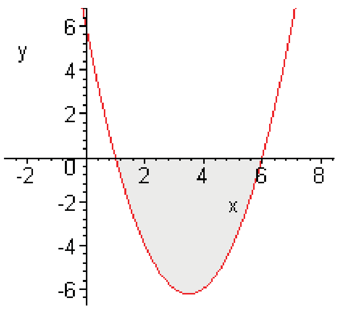
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$(x-1)(x-6) = 0$$
$$x_1 = 1; x_2 = 6$$

P: **Qué otra cosa debemos hacer para tener claro el problema.**

A2: **La gráfica.**

P: **Claro porque no sabemos si la gráfica está por debajo del eje equis, es decir; la función toma valores negativos. Bosquejemos su gráfica, el problema de ustedes es que mañana vienen otra vez igualito a como vinieron hoy, el marco de la puerta tiene algo que cuando pasan por ahí se les olvida todo. Vamos a graficar:**

Escribe y bosqueja en la pizarra:



$$ax^2bx + c = 0$$

$$abcisa\ del\ vértice = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2}$$

$$g\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(-\frac{7}{2}\right) + 6 = \frac{45}{4}$$

Los cálculos para la gráfica los hizo el profesor conjuntamente con los alumnos, éstos mostraron pocas destrezas en ello.

P: **Ahora fíjense, la función en ese intervalo toma valores negativos, si yo calculo la integral me dará negativo. Por eso es necesario al calcular el área de la región, colocarle un signo menos y así se obtiene el área positiva.**

P: **Así el área de la región es igual a menos el integral entre uno y seis de equis al cuadrado menos siete equis más seis.**

Escribe en la pizarra:

$$A(R) = -\int_{1}^{6}\left(x^2 - 7x + 6\right)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{1}^{6}$$

$$= \frac{125}{6}$$

A3: **Profe, el menos se coloca cuando la región es negativa.**

P: **Sí, cuando la región está por debajo del eje equis, es decir; la función toma valores negativos del eje ye.**

P: **Así la integral da ciento veinticinco sobre seis. Ya veo que la están calculando en el computador, el procedimiento es el mismo: se define la función, hallan los puntos de corte con el eje equis, grafican y por último integran en relación con los puntos de corte.**

P: **Miren, a veces... ocurre que la región a calcular el área en una parte la función toma valores positivos y en otra valores negativos. Entonces, tenemos que calcular dos o más integrales y ese es el caso del ejemplo que vamos a hacer ahora.**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo 3: Encuentre el área de la región limitada por $h(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$***, el eje x entre*** $x = 1$ ***y*** $x = 3$**.**

P: **Primero ¿qué debemos buscar? Con la intención de bosquejar la gráfica.**

P: **Los puntos de corte.**

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte con el eje x.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

P: **Factorizamos ¿Verdad? ¿Cómo lo factorizamos?**

Escribe en la pizarra:

$$x\left(x^2 - 6x \quad + 8\right) = 0$$

P: **Factorizamos el trinomio.**

Escribe en la pizarra:

$$x(x-4)(x-2)=0$$

P: **Los puntos de corte son equis sub-uno igual a cero, equis sub-dos igual a dos y equis sub-tres igual a cuatro.**

Escribe en la pizarra: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 4$

P: **Hagamos la gráfica, como ya hemos hecho otros ejemplos y estamos corto de tiempo, vamos a hacerla con el Maple. Para mayor rapidez le voy a escribir los comandos:**

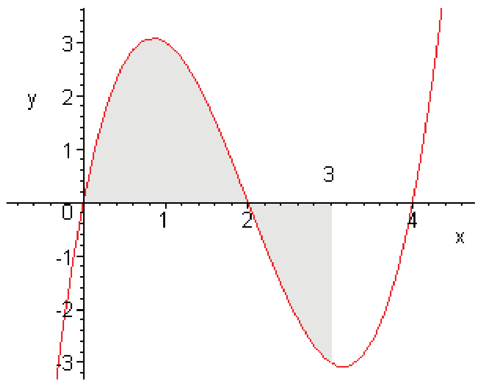
Escribe en la pizarra:

```
> plot(x^3-6*x^2+8*x,x=-1..6,y=-4..4);
```

P: **Pueden hacer eso.**

P: **Se dan cuenta como es la gráfica, pueden ver que en uno vale tres, en equis sub-uno igual a cero vale cero, en equis sub-dos igual a dos vale cero y en equis sub tres igual cuatro vale cero y en tres vale menos tres.**

Reproduce la gráfica realizada con el Maple en la pizarra.



P: **Fíjense que encierra dos áreas esta (señala en la gráfica) y encierra esta (vuelve a señalar en la gráfica). Con el Maple pueden ampliar el rango en el comando plot y verán que la gráfica de la función no encierra más áreas.**

P: **En una de las regiones, la función toma valores positivos la que está entre cero y dos y otra que toma valores negativos la que está entre dos y cuatro. Hay una**

propiedad que la vimos temprano que dice que el intervalo de integración a, be lo puedo dividir en a, ce y ce, be para ce entre a y be y eso es lo que vamos a hacer.

Escribe en la pizarra:

$$A(R)=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx-\int_2^3\left(x^3-6x^2+8x\right)dx$$

P: **La primera integral toma valores positivos, a la segunda integral hay que colocarle un menos ya que la función en ese intervalo toma valores positivos.**

Escribe en la pizarra:

$$=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^3=\frac{23}{4}$$

P: **Si quisiéramos apoyarnos con el Maple haríamos:**

```
> h:=x->x^3-6*x^2+8*x;solve(h(x)=0);
> plot(h(x),x=-1..6,y=-4..4);
> int(h(x),x=0..2)-int(h(x),x=2..3);
```

P: **Eso les daría todo lo que hicimos.**

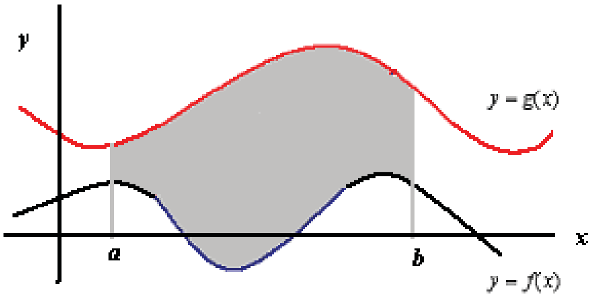
P: **El tiempo no rinde, quería que hiciéramos otros ejemplos que también son importantes, como el área de una región limitada por dos o más curvas y cuando trabajamos con la variable ye como variable independiente, pero... tendremos que verlo mañana.**

El profesor revisa lo que hacen los estudiantes en el computador y atiende sus preguntas en cada sitio.

P: **Qué vamos a ver mañana sobre áreas ahora les voy a dar una idea gráfica. Ustedes pueden haber visto que siempre es importante graficar para ver cómo es la gráfica, que áreas encierra. A veces decimos que la gráfica está por encima del eje equis o por debajo, eso es figurativo ya que la pizarra está de forma vertical. ¿Qué pasa si colocamos la pizarra en el piso? Ja..ja..**

P: **Ahora yo les dije en un principio: áreas limitadas por curvas y hasta ahora hemos trabajado ejemplo con una curva, pero que pasa si tengo dos o más curvas. Fíjense si tengo esto:**

Bosqueja en la pizarra



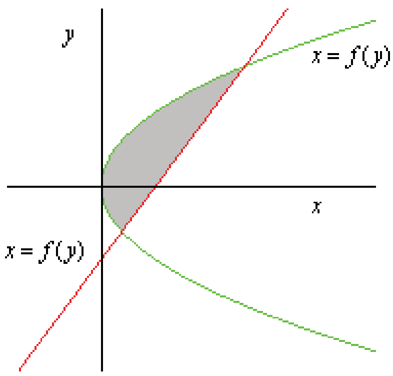
P: **El área de la región es igual a la integral entre a y be de la función que toma valores mayores, es decir la ge, menos la que toma valores menores la efe y cálculo esa integral.**

Escribe en la pizarra:

$$A(\text{Re}\,gi\acute{o}n) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

P: **También nosotros no hemos visto ejemplos de cálculo de una región donde trabajamos la integral en función de la variable ye como variable independiente, eso lo vamos a ver mañana, pero si eso ocurre. Si yo tengo esto, por ejemplo...**

Dibuja en la pizarra:



P: **Fíjense que están invertida la variable.**

A5: **¿por qué?**

P: **Eso no lo hemos visto, mañana le explicaré.**

P: **En este caso el área de esta región, aquí no es la que toma valores mayores con relación al eje ye sino en relación al eje equis. ¿Cuál es la que toma valores mayores? La roja o la que está más a la derecha del eje ye y la que toma valores menores la verde o la que está más a la izquierda. Como en el primer caso decíamos la que está por arriba menos la que está por abajo, en este ejemplo podemos decir la que está a l derecha menos la que está por la izquierda.**

En este caso sería:

$$A(\text{Re}\,gión) = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

P: **El área de la región es igual a la integral entre a y be de eje de ye menos ge de ye.**

P: **Esto lo vamos a ver mañana a primera hora y después vamos a hacer uno ejercicios, yo le asigno unos ejercicios a cada uno y me lo entregan en una hoja y pueden apoyarse en el computador.**

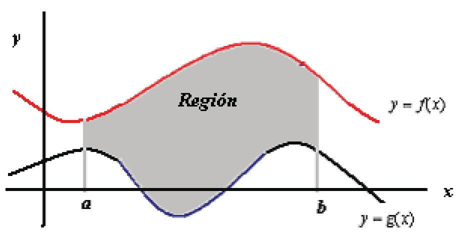
Reconstrucción de la Cuarta sesión de clase 31/01/08

P: **¡Buenos días! Hoy comenzamos con los ejemplos que nos faltaron en la clase anterior y después les voy a asignar unos ejercicios y problemas para que los trabajen, siempre con la ayuda del computador.**

P: **¿Qué decíamos al terminar la clase de ayer? ¿Cómo podíamos hallar el área de una región que está comprendida entre dos curvas? ¿Cuál es el procedimiento?**

P: **Fíjense, yo tengo dos funciones...**

Bosqueja en la pizarra:



P: **¿Cómo determino esa área?**

A1: **Con la integral entre a y be.**

P: **Sí, pero cómo es la integral.**

A2: **La integral de efe de equis menos ge de equis.**

P: **¿Por qué de efe de equis menos ge de equis?**

P: **¿por qué?... porque siempre a la que toma valores mayores le restamos la de que toma valores menores. En este caso podemos ver en el bosquejo que la curva roja es la mayor, es decir; efe de equis como lo dijo ella.**

Escribe en la pizarra:

$$A(región) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

P: **¿está claro?**

A1: **Sí.**

A2: **Sí.**

P: **Vamos a hacer este ejemplo.**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo: Determina el área de la región limitada por $m(x) = x^2 - 3$ ***y*** $n(x) = x - 1$**.**

P: **Tenemos dos funciones y las dos son continua en R por se polinómicas, la primera es una curva y esta (refiriéndose a la segunda) ¿Qué es? LA gráfica de equis menos uno, si la bosquejamos ¿Qué va dar?**

A1: **Una recta.**

P: **Es una función afín. ¿Qué debemos hacer para determinar esa área?**

A4: **Graficamos primero.**

P: **Okey graficar y... qué otra cosa podemos hacer.**

P: **Ver si la funciones se cortan. ¿Cómo hallamos los puntos de corte?**

A6: **Se toma equis a la dos menos tres.**

P: **¡Aja!**

A6: **La igualo a cero.**

P: **No, cuando la igualo a cero es para hallar los puntos de corte de su gráfica con... ¿Con quién?**

A2: **Con el eje equis.**

P: **Con el eje equis, pero si yo quiero hallar los puntos donde las gráficas de las funciones se cortan entonces, con quién tengo que igualar a equis cuadrado menos tres.**

A6: **Con equis menos uno.**

P: **Perfecto, con la otra función.**

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte:

Igualamos: $x^2 - 3 = x - 1$

P: **¿Cómo resolvemos esa ecuación?**

A6: **Será equis al cubo menos equis.**

P: **Pero no es equis al cubo es equis cuadrado.**

A6: **Equis cuadrado menos equis igual a menos dos.**

P: **¿Cómo lo resolvemos?**

A6: **Se puede factorizar equis más uno y equis menos dos.**

El profesor escribe en la pizarra mientras pregunta y explica.

$$x^2 - 3 = x - 1$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

P: **¿Cuáles son los puntos de corte?**

A6: **Dos y menos uno.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$x_1 = 2; x_2 = -1$$

P: **¿Qué hacemos ahora?**

A6: **La gráfica.**

P: **¿Quién quiere hacer la primera gráfica? Se pueden ayudar con el computador. La gráfica de la primera es...**

A3: **Una curva.**

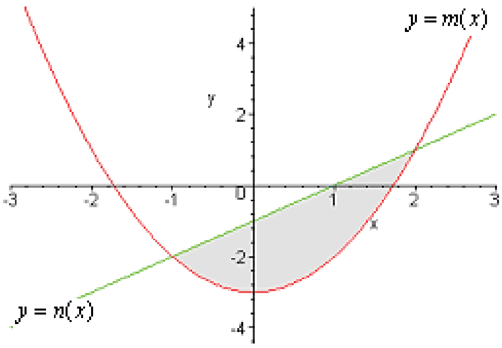
P: **Pero qué tipo de curva. Si quieren la grafica en el maple. Definámoslas primero**

Escribe en la pizarra:

```
> m:=x->x^2-3;n:=x->x-1;
> plot({m(x),n(x)},x=-3..3,y=-5..5);
```

P: **Fíjense en la gráfica que tienen en el computador**

El profesor bosqueja la gráfica en la pizarra:



P: **¿Cuál toma valores mayores entre menos uno y cuatro?**

A2: **La verde.**

P: **¿Cuál es la verde?**

A2: **Equis menos uno.**

P: **¿Cómo es la integral que define esa región?**

P: **Inés entre que valores se va a integrar**

A3: **En los puntos de corte menos uno y dos.**

P: **Muy bien integramos entre menos uno y dos.**

P: **Entonces la integral va a estar definida entre...**

A2: **Menos uno y dos.**

P: **¿Cómo es el integrando? Recuerden... cuál toma valores mayores en ese intervalo o, figurativamente ¿Cuál está por encima? Y ¿Cuál por debajo?**

A1: **La recta toma valores mayores.**

P: **Entonces a esa le restamos la otra.**

Escribe en la pizarra:

$$A(\mathrm{Re}\,gión) = \int_{-1}^{2} \left[x - 1 - \left(x^2 - 3\right)\right] dx$$

P: **¿Quién quiere resolver esa integral?**

P: **¿Cómo queda el integrando?**

P: **Repite.**

P: **¿Cómo queda?**

Escribe en la pizarra:

$$= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2 \right) dx$$

P: **¿Cuál es la primitiva de ese polinomio?**

A2: **Equis al cubo.**

A7: **Menos equis al cubo entre tres.**

P: **¿Qué más?**

A7: **Uno entre dos.**

P: **Tienen que ejercitar más, tienen que aprenderse las fórmulas de integración.**

Escribe en la pizarra:

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$$= -3 + 6 + 2 - \frac{1}{2}$$

$$= 5 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

P: **Pueden comprobar lo realizado con el Maple.**

Los estudiantes trabajan en el computador, algunos estudiantes no recuerdan los comandos del Maple y eso que tienen el material de apoyo

P: **Bien ahora vamos con otro ejemplo, Podemos ayudarnos con el computador desde el principio. Si quieren escriban restart: antes de trabajar el otro ejercicio. También en el Maple algunos hacen unas cosas, ahora alguien escribió el comando plot y dos puntos, como si fuese a definir una variable.**

P: **Otro problema y escribe en el pizarrón:**

Encuentre el área de la región limitada por $x = 3 - y^2$ ***y*** $y = x - 1\,(x = 1 + y)$

P: **Busquemos los puntos de corte de las dos gráficas. Fíjense que estamos trabajando con la variable ye como independiente. Busquemos los puntos de corte.**

Escribe en la pizarra:

$$3 - y^2 = 1 + y$$

P: **¿Qué obtuvieron con el Maple?**

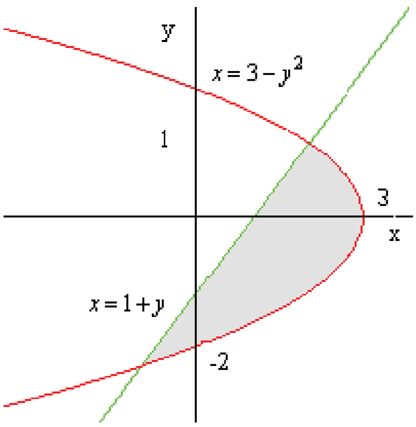
A3: **Menos dos y uno.**

P: **Y la gráfica la hicieron... ¿Qué función toma mayores valores en menos dos uno?**

A7: **La parábola.**

P: **Bien veamos su gráfica**

Bosqueja la gráfica en la pizarra:



P: **Fíjense que la representación la hacemos al revez, le damos valores de ye y obtenemos valores de equis.**

Escribe en la pizarra:

$$A(\text{Región}) = \int_{-2}^{1} \left[3 - y^2 - (1 + y)\right] dy$$

P: **La roja está más a la derecha entonces a ella se le resta la verde. ¿Cuánto da esa integral con el Maple?**

A5: Nueve **medios.**

P: **Exacto, que casualidad da lo mismo del ejercicio anterior.**

P: **Otro problema...**

Escribe en la pizarra:

Determina el área de la región limitada por $k(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ ***e*** $i(x) = x^2 - 4x$**.**

P: **Son dos curvas una es una parábola ¿Qué debemos hacer?**

A3: **Buscar los puntos de corte.**

P: **Exacto buscar los puntos de corte.**

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte

$$x^3 - 6x + 8x = x^2 - 4x$$

P: **Si quieren a la par que lo hacemos en la pizarra, también lo hacen con en el computador, aprovechen ese recurso.**

Escribe en la pizarra:

```
> restart:
> k:=x->x^3-6*x^2+8*x;i:=x->x^2-4*x;
> solve(k(x)=i(x));
> plot({k(x),i(x)},x=-1..6,y=-10..10);
```

P: **Hagan eso para que después tengamos más claridad cuando lo calculemos en la pizarra.**

P: **¿Qué puntos de corte obtuvieron?**

A5: **Cero, cuatro y tres.**

P: **Okey cero cuatro y tres, ahora hagámoslo analíticamente. ¿Cómo encontramos esos valores en la igualdad que está en el pizarrón?**

A5: **Factorizando.**

P: **Primero tenemos que...**

A5: **Agrupar.**

P: **Agrupar términos semejantes... ¿Cómo queda?**

A5: **Equis a la tres, menos siete equis al cuadrado más cuatro equis.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$x^3 - 7x^2 + 4x = 0$$

P: **¿Qué podemos hacer?**

A5: **Sacar factor común.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$x\left(x^2 - 7x + 4\right) = 0$$

P: **¿Cómo puedo escribir lo que está dentro del paréntesis?**

A2: **Como hicimos en el anterior buscando dos números...**

P: **¿Cuáles son?**

A5: **Que sumado den menos siete...**

P: **Es que aquí hay un error, no es cuatro equis, sino doce equis por eso no pueden hallarlos.**

Corrige en la pizarra:

$$x^3 - 7x^2 - 12x = 0$$
$$x\left(x^2 - 7x - 12\right) = 0$$

P: **¿Cuáles son?**

A5: **tres y cuatro**

P: **Menos tres y menos cuatro.**

Escribe en la pizarra:

$$x(x-3)(x-4) = 0$$

P: **Vemos que los valores que anulan la expresión son: cero, tres y cuatro.**

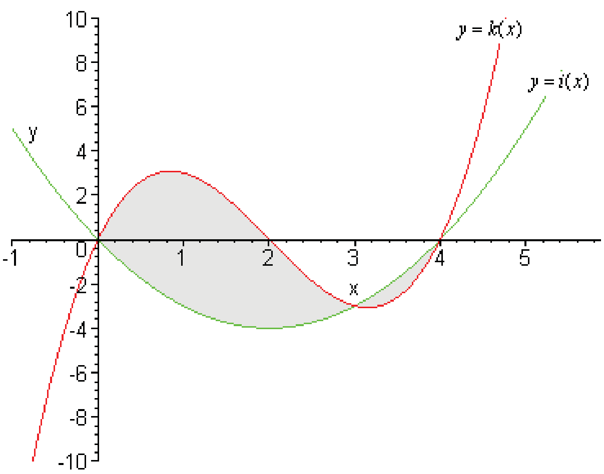
P: **Hagan la gráfica, usen el computador.**

P: **La graficaron, les pido que la hagan primero en el computador porque no es sencilla.**

A4: **Sí.**

P: **Si vemos la gráfica pasa por cero. Yo la voy a bosquejar rápido en la pizarra:**

Bosqueja:



P: **Fíjense que podemos hacer la gráfica paso por paso y además tenemos la ayuda de Maple.**

P: **Ahora cómo hacemos para definir la integral o las integrales de acuerdo a la gráfica. Recuerden la función que está más arriba menos la que está más abajo.**

A7: **Equis al cubo menos seis equis al cuadrado más ocho equis.**

P: **¿Está por encima?**

A7: **En cero tres.**

P: **Entonces hay que formar dos integrales una para cada región. A esta región la vamos a llamar uno y escribe en el gráfico de la pizarra y a esta dos y vuelve a escribir en la pizarra.**

P: **¿Qué pasa en la región uno? ¿Quien está por encima? ¿Ka o i?**

A4: **Ka.**

P: **Y por debajo está i. ¿Qué pasa con la otra región?**

A4: **Está i.**

P: **i y por debajo está ka, es decir ocurre lo contrario, entonces ¿Con una sola integral podemos calcular el área?**

A3: **Hay que hacer dos.**

P: **¿por qué?... por la forma como ellas encierran las regiones.**

P: **¿Cómo pueden ser las integrales? Ayer vimos una propiedad de la integral definida donde se puede separar, es decir; que si yo tengo la integral entre a y be, pero ce es un valor intermedio, entonces ésta e igual a la integral entre a y ce más la integral entre ce y be.**

P: **Escribe en la pizarra:**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

P: **¿Cómo serían las integrales a calcular?**

A1: **Entre cero y tres.**

P: **Muy bien...**

Escribe en la pizarra:

$$A(\text{Región}) = \int_0^3$$

P: **¿Cómo es el integrando?**

A5: **A ka le restamos i.**

P: **¿Quién es ka?**

A5: **Equis al cubo, menos seis equis al cuadrado más ocho equis.**

P: **Bien, y a eso le vamos a restar: equis cuadrado menos cuatro equis, más la otra integral ¿Cuál es la otra integral?**

A3: **Entre tres y cuatro.**

P: **¿Cómo queda?**

A5: **Por encima está i y por debajo ka.**

P: **Entonces i menos ka.**

Mientras se da esta discusión el profesor fue escribiendo en la pizarra:

$$A(\text{Región}) = \int_0^3 \left[x^3 - 6x^2 + 8x - \left(x^2 - 4x\right)\right]dx + \int_3^4 \left[x^2 - 4x - \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\right]dx$$

P: **Todos trajeron el material anterior, el que les dí de integral definida. Estas integrales las pueden hacer con el Maple, pero ahora cuando hagamos la práctica. Ahora vamos a terminar el ejercicio.**

P: **¿Cómo quedaría la integral?**

A3: **Equis al cubo.**

P: **Al reducir términos. ¿Qué más?**

A2: **Menos siete equis al cuadrado más doce equis.**

P: **Y la otra.**

P: **Quedan los mismos términos pero con signos contrarios.**

Escribe en la pizarra:

$$=\int_0^3 \left(x^3 - 7x^2 + 12x\right)dx + \int_3^4 \left(-x^3 + 7x^2 - 12x\right)dx$$

P: **Como me interesa ganar tiempo para el trabajo que va ha realizar ahora, esas integrales ustedes las pueden concluir, pero fíjense al calcular las integrales, evaluarla y sumar los valores obtenidos esos les va a dar setenta y una sobre seis.**

A partir de este momento y hasta el final del tiempo restante el profesor asignó ejercicios individuales a los estudiantes y éstos procedieron a resolverlos.

P: **¡Buenos días! ¿Cómo están?**

A1: **Bien.**

P: **Nosotros continuamos con lo que estábamos viendo la clase pasada sobre las aplicaciones de la integral definida. En la clase pasada estuvimos viendo teoría y haciendo aplicaciones de ¿qué? ¿En qué aplicamos la integral definida en la clase pasada? Incluso hicieron un trabajo en el aula y lo entregaron ¿Qué hicimos?**

A2: **Cálculo de área.**

P: **Cálculo de áreas, muy bien, eso estuvimos viendo la vez pasada. Hay que estudiar y ejercitar más. En la evaluación final van a tener problemas de áreas, se pueden apoyar con el Maple pero debemos manejar la teoría y deben tener destrezas.**

P: **Una observación en la evaluación pasada hay algunos que escribieron en la hoja los comandos que utilizaron del Maple y la gráfica y los resultados. Esa no es la idea, la intención es que ustedes calculen y resuelvan los problemas, el Maple es un apoyo. Esa es la idea.**

P: **Hoy vamos a ver sólidos de revolución ¿Saben lo que es un sólido de revolución?**

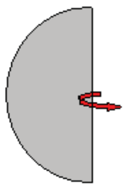
A3: **No.**

Escribe en la pizarra:

Sólido de revolución: Es un sólido obtenido al rotar una región del plano entorno a una recta llamada eje de rotación.

P: **Como se dice en la pizarra es el sólido que se obtiene al rotar una región del plano entorno a una recta que denominamos eje de rotación.**

Dibuja en la pizarra:



P: **Eso que dibujé ¿qué es?**

A2: **Un semicírculo.**

P: **La mitad de un circulo, sabemos que el segmento de línea que divide al círculo en dos semicírculos es el diámetro. Si yo roto alrededor del diámetro esa región. Supongamos que coloco la región sobre un dispositivo que la haga girar a cierta velocidad, ya no vamos a ver el semicírculo sino ¿qué vamos a ver?**

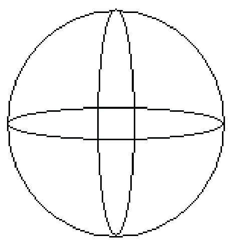
A3: **¿Una circunferencia?**

P: **Pero al rotar la circunferencia ¿qué ves?**

A1: **Una esfera.**

P: **Una esfera, esto es lo que se ve...**

Bosqueja en la pizarra:



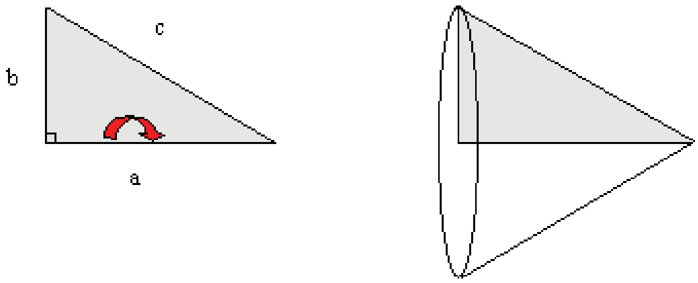
P: **Y el volumen de las esfera lo conocemos es cuatro tercios de pi por el radio al cubo.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

P: **Si tenemos un triángulo rectángulo y lo rotamos, por decir algunos de los muchos ejemplos que hay**

Bosqueja en la pizarra:



P: **Tengo un triángulo rectángulo, si lo roto entorno al cateto a señalado en la figura ¿qué obtengo?... un cono recto circular ¿Cuál es la fórmula para hallar el volumen de un cono recto circular?**

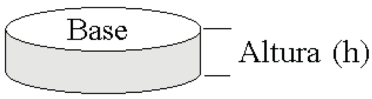
P: **Pi por el radio al cuadrado sobre tres por hache.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \frac{\pi\, r^2}{3} h$$

P: **Hache es la altura del cono y ere es el radio de la base del cono. En general cuando nosotros tenemos un cilindro...**

Bosqueja en la pizarra



P: **Su volumen es el área de la base por la altura.**

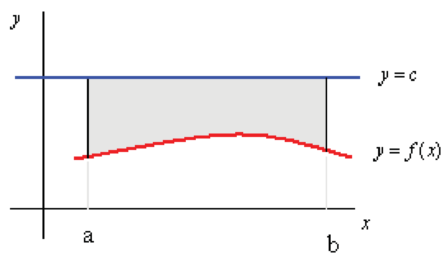
Escribe en la pizarra:

$$v = (\text{área de la base}).h$$

P: **Fíjense ustedes como nosotros podemos construir sólidos de revolución al rotar regiones del plano, no importa la forma que tenga.**

P: **Bien tenemos un ejemplo general, una función hipotética ye igual efe de equis y una recta ye igual ce, la gráfica de la función con la recta origina una región entre dos puntos del dominio de la función, los puntos a y be.**

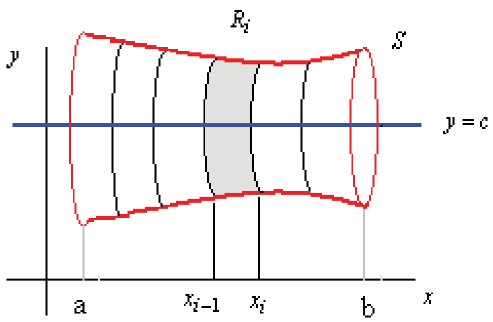
Mientras habla bosqueja en la pizarra:



Escribe en la pizarra:

Si rotamos la región limitada por $y = f(x)$ ***y la recta*** $y = c$ ***entre*** $x = a$ y $x = b$ ***tenemos....***

Bosqueja en la pizarra:



P: **Todos los subintervalos son de la misma longitud** $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$ **donde n es el número de subintervalos. Sea** R_i **una rebanada o rodaja de S.**

P: **Si la región se rota entorno a la recta ye igual ce, que voy a obtener... esa sólido que vemos ahí, no es de una forma regular como el cono que es lineal pero si es circular. Si a este sólido lo rebanamos, lo que vamos a tener son cilindros, el número de cilindros dependerá de la partición que se haga.**

P: **Está claro hasta aquí. Entonces, como escribí en la pizarra todos los subintervalos son de la misma longitud, ya eso lo sabemos de cuando vimos la integral definida. En particular tenemos un intervalo que es la equis sub-i menos uno y equis sub-i que originan la rebanada *i* *(R_i)*. Denotemos por** Δ_{vi}**. Cada rebanada en la que hemos dividido el sólido.**

P: **Por supuesto que delta de equis sub-i es igual a ve de ese sub-i.**

Escribe en la pizarra:

Denotemos por Δ_{vi} el volumen de la rebanada i, así $\Delta_{vi} = V(R_i)$

P: **Si nosotros determinamos el volumen de todas las rebanadas de *S*, la suma de ellas es el valor del volumen de *S.***

Escribe en la pizarra:

$$V(s) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{Vi}$$

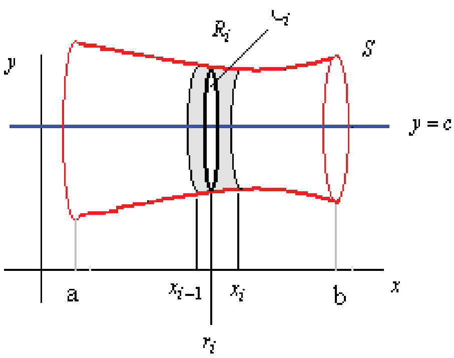
P: **Es algo parecido a lo que se hizo, cuando estábamos viendo la integral de Riemann con los rectángulos, sólo que ahora son cilindros. El primero que comenzó con estas ideas para calcular el volumen fue Cavalieri (1598-1647).**

P: **En este caso para llegar a la aplicación de la integral veamos lo siguiente:**

Escribe en la Pizarra:

Para aproximar Δ_{vi} elegimos $r_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y consideramos el cilindro C_i cuya altura es Δ_x y cuya base es la sección transversal de R_{ri} de S en r_i.

Bosqueja en la pizarra:



P: **Así como en la integral de Riemann, elegimos un** r_i**, aquí también. Fíjense que estamos trabajando con la rebanada *i* si tenemos un** r_i **tendremos un disco**

Escribe en la pizarra:

Esto sugiere que cuando Δ_x tiende a cero $V(C_i)$ es una buena aproximación a $\Delta_{vi} = V(R_i)$

P: **¿Cuándo delta equis tiende a cero?**

A3: **Cuando son...**

P: **Cuando el número de rebanadas tiende a infinito.**

P: **Si tenemos muchas rebanadas ¿a qué tiende la altura delta equis de cada una?**

A2: **a Cero.**

P: **Lo que pasa es que cuando la altura del cilindro tiende a cero, entonces el cilindro se convierte en la rebanada, entonces la rebanada es una aproximación del cilindro. Fíjense que en el gráfico dibuje el cilindro recto y pasa como en los rectángulos, que se exceden o no llegan a la curva, cuando delta equis tiende a cero son discos que se adaptan más al sólido.**

P: **Cuando tiende a cero ocurre que:**

Escribe en la pizarra:

$$\Delta_{vi} \approx V(C_i) = A((R_{ri})\Delta x = A(r_i)\Delta x$$

Como son cilindros el área de la base es $A(r_i)$ ***y la altura es h es*** Δ_x***. Entonces sumamos los volúmenes de estos cilindros de aproximación para i = 1,2,3,4,5...n***

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{Vi} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta(r_i)\Delta_x$$

P: **Recordemos que la suma de Riemann en el intervalo a, be es la integral entre a y be de efe de equis diferencial de equis, cuando ene tiende a infinito o lo que es equivalente delta equis tiende a cero.**

Escribe en la pizarra:

Conclusión: Si el sólido S se encuentra a lo largo de $[a,b]$ ***en el eje x y tiene una función área de las secciones transversales*** $A(x)$***, entonces:***

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Secciones transversales perpendiculares al eje equis.

P: **Nosotros podemos calcular así el volumen, ya que al integral de Riemann es el límite de una sumatoria y aquí también tenemos el límite de una sumatoria.**

P: **La intención de describir este proceso es para que ustedes observen que el camino seguido para el cálculo del volumen de un sólido es el mismo de la integral de Riemann y por eso se puede aplicar la integral para ese tipo de cálculos.**

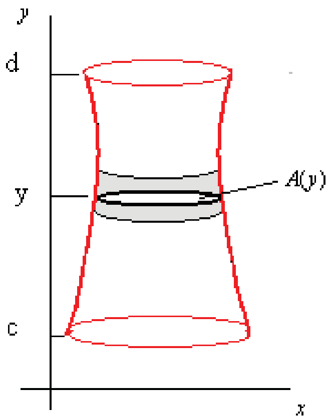
P: **Ahora si el sólido está a lo largo del eje ye. Las secciones transversales serán ahora perpendiculares al eje ye. No lo vamos a desarrollar, pero vamos a establecer las conclusiones:**

Escribe en la pizarra:

Secciones perpendiculares transversales al eje y

Si S se encuentra a lo largo de $[c,d]$ ***en el eje y*** $A(y)$ ***es la función área de cada sección transversal, entonces...***

Escribe en la pizarra:

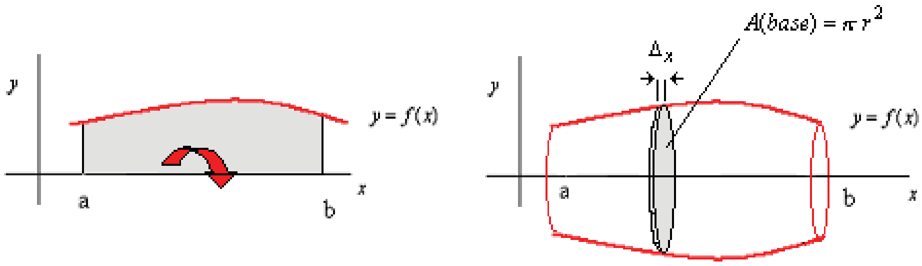


$$V = \int_c^d A(y)dy$$

P: **Igual solamente que trabaja con la variable ye como independiente y las secciones son perpendiculares al eje ye.**

Escribe en la pizarra:

Método del disco



P: **Fíjense presten atención, veamos lo que está en la pizarra. Se tiene una región limitada por ye igual efe de equis, el eje equis, entre equis igual a, a y equis igual a be. Si rotamos esa región alrededor del eje equis, tenemos el sólido de la derecha, ese es un sólido de revolución. Ahora en cualquier parte que yo haga una sección transversal a ese sólido ¿Qué voy a obtener?**

P: **Voy a obtener exactamente un disco y muestra en la figura el disco dibujado, donde el espesor del disco va a estar dado por delta equis y el área de la base es decir; el área del círculo. ¿Cuál es el área de un círculo?**

A3: **Pi por el radio al cuadrado.**

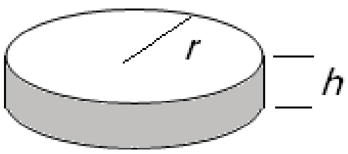
P: **Pi por radio al cuadrado muy bien, entonces tenemos como lo escribí que el área de la base es Pi por el radio al cuadrado y el radio es ye igual efe de equis.**

Escribe en la pizarra:

Sabemos que los sólidos de revolución los dividimos en discos.

P: **Cuando nosotros tenemos un disco como ya se los dije.**

Dibuja en la pizarra:



$$V = A(Base).h$$
$$V = \pi r^2 h$$

P: **Sabemos que el disco tiene una altura hache y esta es el área de la base (señala la pizarra). Así el área de la base es igual a Pi por radio al cuadrado. Cómo el volumen es igual á área de la base por la altura, entonces el volumen es Pi por radio al cuadrado por hache, esa es la fórmula del volumen de un disco, la suma de los volúmenes de todos los disco, es el volumen de sólido. Es decir; que para hallar el volumen por el**

método de disco… el volumen va a ser igual a la integral entre ay be de Pi por el radio al cuadrado, pero ya dijimos que el radio es efe de equis, entonces quedará:
Escribe en la pizarra:

$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

P: **Claro, cuando la figura está paralela al eje ye, entonces es la misma integral pero en términos de la variable ye. Vamos a hacer un ejemplo y nos podemos ayudar con el computador.**
Escribe en la pizarra:
Ejemplo: Determine el volumen del sólido generado por la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ ***y la recta*** $x = 2$ ***, entorno al eje x.***
P: **Bien ahí tenemos un problema en el cual vamos a aplicar el método del disco. ¿Qué debemos hacer primero?**
A4: **La gráfica.**
P: **Para qué tenemos que hacer la gráfica.**
A2: **Para ver cómo es el sólido.**
A4: **Para sacar el volumen.**
P: **¡Aja! Cómo es el sólido, eso depende de qué.**
A4: **Del volumen.**
P: **¿A quién vamos a rotar? Siempre que tenemos un sólido de revolución es porque hemos rotado ¿qué?**
A1: **Si es un cono es porque era un triángulo.**
P: **Sí, pero que lo limita**
A4: **Una función.**
P: **Pero lo rayado ¿qué es? Señalando la figura anterior en la pizarra)**
P: **Siempre que tenemos un sólido de revolución y calculamos su volumen, nos interesa saber la región que lo origina. En el problema se habla de que el área está en el primer cuadrante y las funciones que la limitan, pero lo primero que debemos saber es cómo es esa región, para ello graficamos.**
P: **Cómo tenemos ye al cuadrado igual a ocho equis esto lo podemos escribir como equis igual a ye al cuadrado sobre ocho.**
Escribe en la pizarra:

$$y^2 = 8x \Rightarrow x = \frac{y^2}{8}$$

P: **Incluso ahora también lo hacemos con el Maple. Bien vamos a ver, vamos a darle valores, para ye igual cero ¿cuánto vale equis?**

A4: **Cero.**

P: **Para ye igual uno… un octavo; Para ye igual dos… ¿Cuánto vale?**

A1: **Cuatro…un medio.**

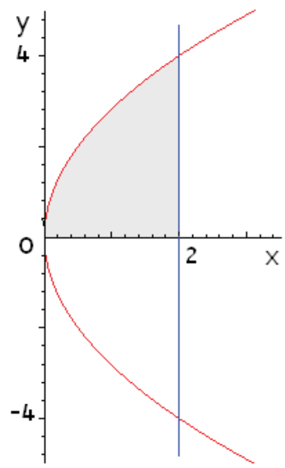
P: **Para tres… nueve octavos**

P: **Para cuatro ¿Cuánto vale?**

A1: **Dos.**

P: **Entonces veamos la gráfica es así:**

Bosqueja en la pizarra:



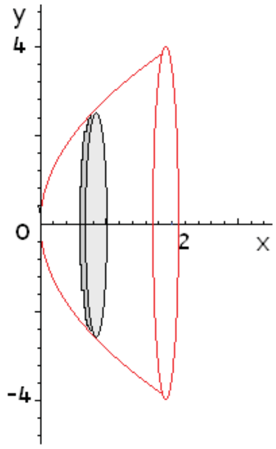
P: **El problema dice que el área es limitada en ¿dónde?**

A3: **En el primer cuadrante.**

P: **Entonces por eso la parte rayada es esa; Si roto esa región entorno al eje equis ¿Qué obtengo? Nosotros tenemos el Maple ocho en las versiones más nuevas se pueden graficar los sólidos de revolución sin tanta programación como en este.**

P: **Si rotamos la región anterior qué voy a tener. Recuerden que las dos gráficas se intersectan en los puntos dos, cuatro y dos menos cuatro, veamos:**

Dibuja en la pizarra:



P: **El sólido es así, un paraboloide, en cualquier parte que yo haga una sección transversal voy a obtener un disco, el radio de la base del disco va a ser la función ye igual efe de equis, es decir; el radio va a se ye igual a la raíz cuadrada de ocho equis. El espesor del disco está dado por delta equis. Así utilizando el método de disco…**

Escribe en la pizarra:

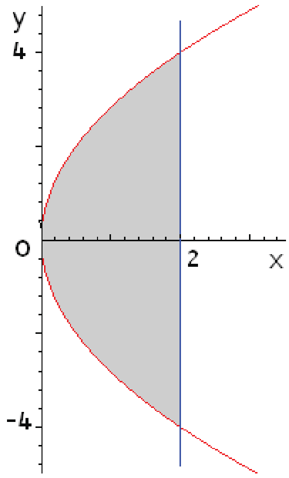
$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \pi\, y^2 dx \\
&= \int_0^2 \pi\left(\sqrt{8x}\right)^2 dx \\
&= 8\pi \int_0^2 x dx \\
&= 4\pi\, x^2 \Big|_0^2 \\
&= 4\pi\left(2^2 - 0^2\right) \\
&= 16\pi \text{ Unidades cúbicas}
\end{aligned}
$$

P: **Fíjense otro ejemplo puede se, con la misma función, pero rotando entorno a la recta equis igual dos, la región limitada por ye al cuadrado igual a ocho equis y equis igual dos pero alrededor de la recta equis igual dos.**

Escribe en la pizarra:

Con esa misma función pero, rotando entorno a la recta $x = 2$ ***la región limitada por*** $y^2 = 8x$ y $x = 2$

Dibuja en la pizarra:



P: **Vamos a rotar esa región, esa que está ahí, pero entorno a la recta equis igual dos ¿cómo queda el sólido? ¿Cómo se lo imaginan?**

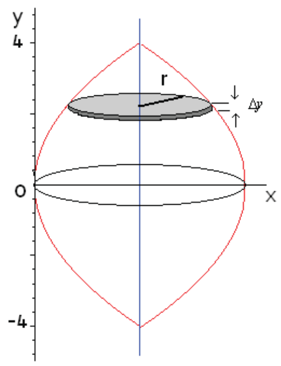
A3: **Una esfera.**

P: **espera si esto empieza a rotar ¿Cómo lo ves? (Señala la región en la pizarra)...como una especie de pelota de football americano.**

A3: **¡Aja! Así.**

P: **esta claro de todas maneras vamos a bosquejar el dibujo.**

Dibuja en la pizarra:



P: **Queda esto, más o menos...este... si yo hago una sección transversal en cualquier parte, por ejemplo aquí (señala el disco dibuja do en la figura) tengo un disco.**

A3: **¡Aja! Y si...**

P: **Diga.**

A3: **Yo creo que no es así.**

P: **¿Por qué?**

A3: **Usted dice que si se rota así (Con la mano hace el gesto de una rotación vertical) sobre ye.**

P: **No, fíjate aquí dice entorno a qué se debe rotar; equis igual a dos. Una recta paralela al eje equis.**

A3: **Así.**

P: **Fíjense ahí tenemos el disco, el disco es este caso su espesor no está dado por equis sino por...**

A2: **Ye.**

P: **El espesor del disco ahora no se mide en términos del eje equis sino del eje ye. El radio erre ¿Cómo es el radio? Este radio (señala en el dibujo de la pizarra) ¿Cómo calculamos esa distancia?**

A6: **En el eje equis.**

P: **Exacto, tengo que quitar este pedacito (señala en el dibujo). A esta distancia que va de cero a dos le resto este pedacito, entonces ¿Cómo sería el radio?**

P: **Esta distancia es dos y esta es equis ¿Cómo queda el radio?**

A4: **Dos.**

P: **Dos menos qué, ya sabemos que no es toda la distancia ¿Qué le tenemos que restar?**

A5: **Ese pedazo de la línea roja.**

A3: **Ye igual...**

P: **Olvidémonos de la función ahora, esta distancia esta medida en términos de qué eje.**

A4: **El eje equis.**

P: **En función de equis, entonces a dos le vamos a quitar equis.**

Escribe en la pizarra:

$$r = 2 - x$$

P: **¿Quién es equis? Según la función que es la línea roja.**

A3: **Ye cuadrado sobre ocho.**

P: **Bien queda que el radio es dos menos ye al cuadrado sobre ocho.**

Escribe en la pizarra:

$$r = 2 - \frac{y^2}{8}$$

P: **Fíjense que aquí estamos utilizando secciones transversales perpendiculares al eje que le dije que era igual a...**

Escribe en la pizarra:

$$\int_c^b A(y)dy$$

P: **Así el volumen en este caso va a ser igual a la integral entre menos cuatro y cuatro, porque estamos trabajando con el eje ye. Como es el método de disco, el área de la base es Pi ¿por quién multiplicamos a Pi?**

A3: **Dos menos ye al cuadrado sobre ocho.**

P: **Entonces quedaría; Pi por dos menos ye al cuadrado sobre ocho al cuadrado por de, de ye.**

Mientras el profesor fue escribiendo en la pizarra:

$$V = \int_{-4}^{4} \pi \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy$$

P: **Como el volumen generado por la rotación de la región de cero a cuatro es el mismo generado de cero a menos cuatro, entonces se puede escribir:**

Escribe en la pizarra:

$$= \int_0^4 \pi \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy$$

P: **Esto me simplifica la evaluación de la integral ¿Cómo se puede calcular? ¿Qué puedo hacer?**

P: **¿Qué se le ocurre? (Se dirige a un estudiante)**

P: **¿Qué se les ocurre? (se dirige a todos)**

A1: **Se cambia la ye por equis.**

P: **No, trabajamos con la variable ye. ¿Qué hacemos? ¿Hay alguna de las fórmulas que se pueda aplicar directamente? Algo se podrá hacer.**

A2: **Despejar ye.**

P: **No.**

A6: **Simplificamos.**

P: **¿Cómo?**

A4: **Se desarrolla el cuadrado.**

A3: **Completar cuadrados.**

P: **No, se desarrolla la diferencia al cuadrado.**

Escribe en la pizarra:

$$= 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{64} \right) dy$$

P: **¿Por qué escribí eso?**

A3: **Lo multiplicó por dos.**

P: **Ven estas cosas que ustedes olvidan les hacen perder tiempo y muchas veces no pueden calcular la integral por cosas simples.**

P: **¿Qué se hizo ahí? No pierdo más tiempo.**

A2: **La fórmula esa del cuadrado del primero...**

P: **Eso, productos notables: El cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.**

A3: **Ja...ja.**

P: **Fíjense como después se ríen de sus olvidos. ¿Cuál es la primitiva de esa integral?**

A5: **Cuatro equis.**

P: **Dos Pi por cuatro ye, estamos trabajando con ye ¿Qué más?**

A5: **Menos ye a la tres sobre tres.**

P: **Y el dos queda ye a la tres sobre seis?**

A5: **Sí..si.**

P: **Y el último.**

A3: **Cinco.**

P: **Ye a la cinco sobre qué, multipliquen.**

A3: **Sobre trescientos veinte.**

El Profesor escribe en la pizarra:

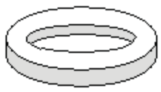
$$= 2\pi\left(4y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{320}\right)\Bigg|_0^4$$

$$= 2\pi\left[\left(16 - \frac{64}{6} + \frac{1024}{320}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{256}{5}\pi$$

P: **Para mañana repasen esto e investiguen cuál es el volumen de un anillo o arandela. ¿Saben lo que es un anillo o arandela?**

Dibuja en la pizarra:



¿Cuál es su volumen?

P: **Revisen eso para mañana que vamos a ver el método del anillo. ¡Hasta mañana!**

Reconstrucción de la quinta sexta de clase 14/02/08

P: **En la clase de ayer estuvimos viendo volúmenes de sólidos de revolución, se explicó lo que es un sólido de revolución y el método del disco para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Hoy, vamos a ver el método de la arandela o el anillo. Existen otros métodos como el de las capas cilíndricas que no lo vamos a ver, que es dividir el sólido en capas cilíndricas, como es por ejemplo una cebolla.**

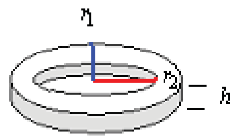
P: **entonces quedamos en que íbamos a comenzar con el método del anillo... Yo les pedí a ustedes que revisaran cómo es el volumen de un anillo o arandela. ¿Lo hicieron?**

A1: **No.**

A2: **No.**

P: **Yo lo sabía, entonces el volumen de una arandela, en forma muy simple una arandela es un disco con una perforación central, esa perforación o hueco, ese vacío es otro disco.**

Dibuja en la pizarra:



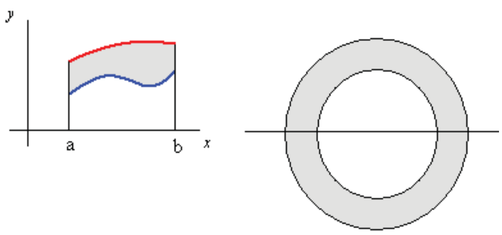
P: **Para calcular su volumen, consideramos el disco que origina el radio mayor, recuerden su volumen es Pi por erre uno al cuadrado por hache y le restamos el espacio vacío que es Pi por erre dos al cuadrado por hache.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \pi\, r_1^{\,2} h - \pi\, r_2^{\,2} h$$
$$= \pi (r_1 - r_2)^2 h$$

P: **Así quedaría el volumen del anillo es Pi por la diferencia de erre uno al cuadrado, el radio mayor, menos erre dos al cuadrado por hache. Este es el volumen del anillo o arandela, es lo que les pedí que revisaran. Ahora vamos a ver como aplicamos eso en un sólido de revolución. Aquí en la pizarra tienen un esquema que les dibuje antes de que llegaran... de una región del plano que va a girar entorno al eje equis. Que pasa cuando se gira....**

El dibujo es el siguiente:



P: **Eso que vemos es precisamente un anillo o una arandela. ¿Sí? O ¿No? Entonces nosotros tenemos un primer ejemplo:**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo: Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje x la región limitada por $y^2 = x$ y $y = x^3$

P: **¿Cómo encuentro los puntos de corte?... igualando las dos funciones... claro antes se escriben las dos funciones de forma explícita en relación a la variable...**

A3: **Dependiente.**

El profesor escribe en la pizarra.

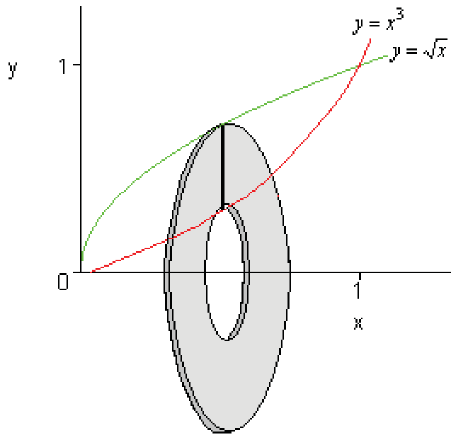
$$y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$$
$$y = x^3$$

Puntos de corte

$$y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$$
$$y = x^3$$

P: **Así igualando equis al cubo igual a raíz cuadrada de equis. A resolver nos que equis a la seis menos equis igual a cero, que se cumple para equis igual a cero y equis igual uno. Su gráfica.**

Bosqueja en la pizarra:

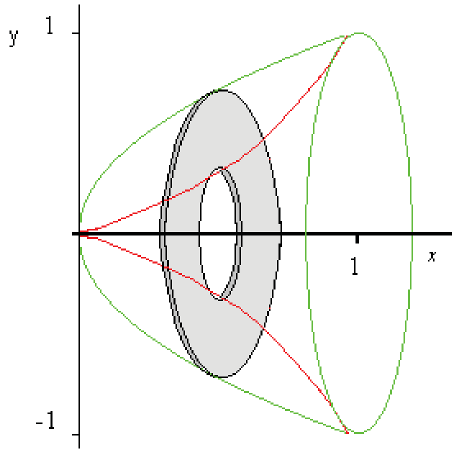


Gráfica con Maple.

```
>plot({sqrt(x),x^3},x=0..2,
y=0..2);
```

P: **Le escribí, para recordar los comandos del Maple que permiten también hacer la gráfica. El área que vamos a rotar es esta Señala en la pizarra en el dibujo. Fíjense en la gráfica de equis al cubo, que está representada por la curva roja y la verde que representa a la raíz cuadrada de equis. Fíjense la región que encierran, si rotamos un segmento de esa región y señala el segmento marcado en la figura, si se rota ese segmento, ven ustedes el anillo que origina. La suma de todos los volúmenes de todos los anillos como ese da el volumen del sólido.**

Bosqueja en la pizarra:



P: **Fíjense que la arandela que está en este sólido tiene dos radios. El radio que va desde el eje equis hasta la línea verde, que está dado por ye igual a raíz cuadrada de equis y, el que va desde el eje equis hasta la línea roja y que está dado por ye igual a equis al cubo. Entonces los radios son ere uno raíz cuadrada de equis y erre dos equis al cubo. ¿Qué dice el método del anillo?... Bueno el área va a ser igual a la integral entre cero y uno de Pi por raíz cuadrada de equis al cuadrado, menos equis al cubo al cuadrado por de, de equis.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right]dx$$

P: **Como Pi es una constante va fuera de la integral y tenemos:**

Escribe en la pizarra:

$$= \pi\int_0^1 \left(x - x^6\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{5}{14}\pi$$

P: **Ese es el volumen del sólido de revolución.**

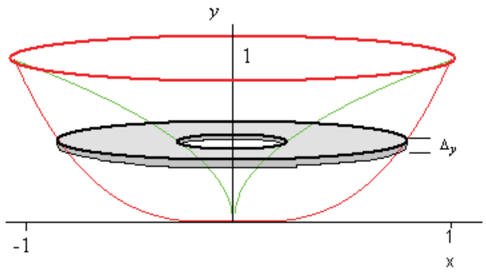
P: **Un segundo ejemplo que vamos a hacer es rotar esa misma región pero ahora entorno al eje ye.**

P: **¿Cómo creen ustedes que sería el sólido, si roto esa misma región entorno al eje ye? ¿Cómo sería?**

A1: **Sería horizontal.**

P: **Es decir, ahora nos quedaría de borde la curva roja.**

Bosqueja en la pizarra.



P: **Quedaría así como la parte superior de una copa, se puede verter un líquido en ella. Ahora si yo hago un corte aquí (Señalando en la pizarra la figura donde ya dibujó el anillo) en este caso es transversal y perpendicular al eje ye. Como vamos a trabajar con respecto al eje ye el espesor de la arandela está en términos de ye, delta ye. Los radios también están en términos de ye, porque la distancia se mide en equis... Así el radio mayor, erre uno será raíz cúbica de ye y el menos será ye al cuadrado.**

Escribe en la pizarra:

$$r_1 = \sqrt[3]{y} \text{ y } r_2 = y^2 \quad \textbf{O también } r_1 = y^{1/3} \text{ y } r_2 = y^2$$

P: **Entonces ensamblamos nuestra integral que será la integral entre cero y uno de Pi por erre uno al cuadrado, erre uno es equis a la un tercio.**

A3: **¿Porqué equis profesor?**

P: **A no, es ye a la un tercio menos ye al cuadrado elevado al cuadrado por de, de ye.**

Mientra hablaba, el profesor escribía en la pizarra:

$$V = \int_0^1 \pi \left[\left(y^{1/3} \right)^2 - \left(y^2 \right)^2 \right] dy$$

P: **¿Cómo quedaría esa integral después de elevar al cuadrado?**

A2: **Ye a la dos tercios.**

P: **Y la otra.**

A2: **Ye a la cuatro**

El profesor escribe en la pizarra:

$$= \pi \int_0^1 \left(y^{2/3} - y^4 \right) dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}} - \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \pi \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right] = \frac{2}{5} \pi$$

P: **Ahí también tenemos el volumen de ese sólido.**

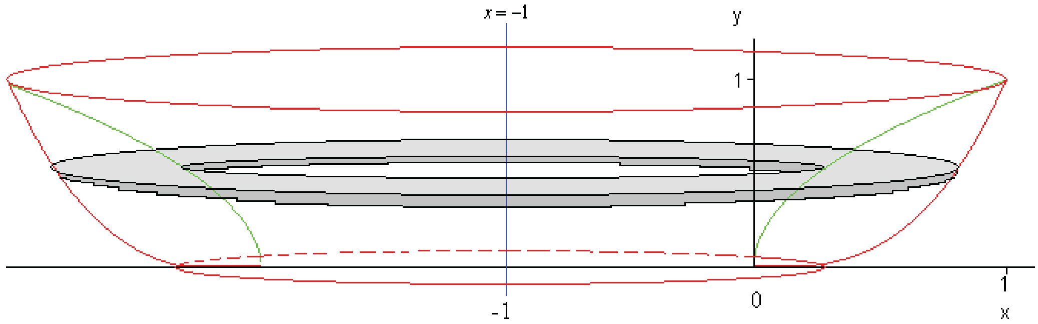
P: **Bien, esa misma región... es el último ejemplo que vamos a hacer antes que ustedes comiencen a trabajar en la asignación que les voy a entregar a cada quien y que se pueden ayudar con el computador.**

Escribe en la pizarra:

La misma región pero ahora se rotará entono a la recta x=-1.

P: **¿Cómo quedaría si lo rotamos entorno a la recta equis igual a menos uno? ¿Cómo?**

Bosqueja en la pizarra:



P: **Quedaría algo así y si hago un corte el anillo sería este (señala en la pizarra).**

P: **Radio uno y radio dos. ¿Cuál sería el radio uno?**

A4: **Menos tres.**

P: **Fíjense, el centro es el eje de rotación, la recta equis igual uno. Desde el centro al borde ¿Cuánto mide el radio uno?**

P: **De menos uno a cero hay una unidad y de cero a la línea roja se tiene ye a la un tercio, entonces el radio es uno más ye a la un tercio.**

A3: **Y... ¿por qué?**

P: **Te repito de menos uno a cero la distancia es uno y de cero a la línea roja está dada por ye a la un tercio, ahora con la verde... igual... desde menos uno a cero hay una unidad y de cero a la línea verde está dada por equis igual ye al cuadrado.**

Escribe en la pizarra:

$$r_1 = 1 + y^{1/3}$$

$$r_2 = 1 + y^2$$

P: **Así que el volumen sigue siendo la integral entre cero y uno de Pi por el radio uno que es uno más ye a la un tercio elevado al cuadrado menos uno más ye al cuadrado al cuadrado por de, de ye.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \int_0^1 \pi \left[\left(1 + y^{1/3} \right)^2 - \left(1 + y^2 \right)^2 \right] dy$$

P: **¿Qué harían para calcular esa integral?**

A6: **Se desarrollan los cuadrados.**

P: **¡Aja! Cuadrado del primero más el doble producto...**

Escribe en la pizarra:

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^1 \left[1 + 2y^{1/3} + y^{2/3} - \left(1 + 2y^2 + y^4\right) \right] dy \\
&= \pi \int_0^1 \left(-y^4 - 2y^2 + 2y^{1/3} + y^{2/3} \right) dy \\
&= \pi \left(-\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}y^3 + 2\frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \frac{y^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right) \Bigg|_0^1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \left[\left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{5} \right) - 0 \right] \\
&= \pi \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right] = \pi \left(\frac{12 - 20 + 45}{30} \right) \\
&= \frac{37}{30}\pi
\end{aligned}
$$

P: **El volumen es treinta y siete sobre treinta Pi unidades cúbicas... bien...fíjense lo que vamos a hacer ahora...**

En el resto del tiempo los estudiantes estuvieron trabajando los ejercicios y problemas que le asignó el profesor. Los estudiantes se apoyan con el computador y el profesor atiende las dudas de los estudiantes en su sitio, muchas dudas eran relativas a los comandos del software Maple.

Reconstrucción de la quinta séptima sesión de clase 20/02/08

P: **¡Buenos días! Vamos a continuar con lo que estábamos viendo la clase pasada: volúmenes de sólidos. Los sólidos que vimos de qué tipo eran...**

A1: **La esfera.**

P: **Pero ¿qué tipo de sólidos eran?**

A2: **Sólidos de revolución.**

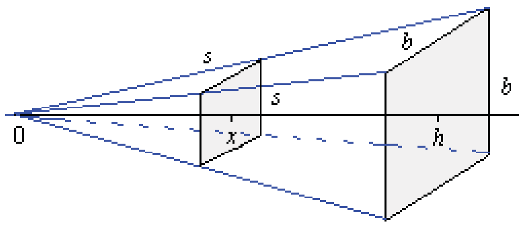
P: **¿Cómo se obtenía un sólido de revolución?**

A3: **Al rotar.**

P: **Hoy vamos a ver volúmenes de sólidos que tienen secciones de áreas conocidas, es decir el corte nos da: un cuadrado, un triángulo o cualquier otra figura de área conocida.**

Escribe en la pizarra:

Ejemplo: La siguiente figura muestra una pirámide de base cuadrada orientada de forma que su altura h ***corresponde con el intervalo*** $[0,h]$ ***en el eje*** x***, su base es un cuadrado de lado b y cada sección transversal al eje*** x ***también lo es. Determine el volumen de la pizarra.***



P: **estos problemas son muy ilustrativos porque son figuras que podemos encontrar en muchas partes. Fíjense en este caso tenemos una pirámide de base cuadrada y su altura coincide con el espacio del eje equis entre cero y hache. El eje equis es el eje de la pirámide. Así la altura de la pirámide es hachee. Si hacemos un corte transversal en cualquier parte vamos a tener un cuadrado. Claro que en cada punto vamos a tener un cuadrado de diferente dimensión de lado y el lado será más pequeño si nos aproximamos a cero.**

P: **¿Está claro? Ahora nosotros necesitamos saber en términos de equis, este... cuál es el área de esta sección transversal porque ya nosotros sabemos de clases pasadas que el volumen viene dado por la integral entre cero y hache de A de equis por de, de equis.**

Escribe en la pizarra:

$$V=\int_{0}^{h} A(x)dx$$

P: **A de equis es el área de la sección. Ahora que relación podemos establecer para esa área... Bueno lo vamos a establecer en base a una proporción. Cómo es una pirámide de base cuadrada todas las secciones van aumentando de tamaño a medida que avanzamos de cero a hache o disminuyen si vamos de hache a cero. Entonces, establezco la siguiente proporción.**

P: **Fíjense este punto aquí del eje equis, lo llamamos hachee (señala a la pizarra) y el lado del cuadrado es b, entonces yo puedo establecer que be sobre hache la longitud del lado de cuadrado en función a la posición que ocupa de cero a hache debe ser igual a la proporción del cuadrado de lado s, es decir;**

Escribe en la pizarra:

$$\frac{s}{x} = \frac{b}{h} \Rightarrow s = \frac{b}{h}x$$

P: **Es decir; el lado del cuadrado más grande, be, entre hache el valor donde corta a el eje equis donde está ubicado, es igual al cociente del lado del cuadrado más pequeño, ese, entre en punto equis donde corta al eje equis, pero ¿cuál es el área de ese cuadrado? (señala el más pequeño), si el lado es ese ¿Cuál es el área de ese cuadrado?**

A4: **Eh...el lado al cuadrado.**

P: **Y si nosotros determinamos que el lado de ese cuadrado es igual a be sobre hache por equis ¿Cuál es su área?**

A4: **Eh...**

P: **El área de ese cuadrado es ese al cuadrado igual a be al cuadrado sobre hache al cuadrado por equis al cuadrado.**

Escribe en la pizarra:

$$s^2 = \frac{b^2}{h^2}x^2$$

P: **Sí, entonces ya podemos calcular el volumen, el volumen va a ser igual a la integral entre cero y hache de be al cuadrado entre hache al cuadrado por equis al cuadrado por de, de equis.**

Escribe en la pizarra:

$$V = \int_0^h \frac{b}{h}x^2 dx$$

P: **Calculemos esa integral:**

A4: **Y el cuadrado de be y hache.**

P: **Ah... no los escribí,**

Escribe en la pizarra:

$$V=\int_0^h \frac{b^2}{h^2}x^2dx$$

P: **¿Cómo calculamos esa integral? Si la hicieran con el Maple ¿Cómo lo harían?...**

Escribe en la pizarra:

```
> int((b^2/h^2)*x^2,x);
```

P: **Eso es lo que vale la integral, pero la queremos hacer manual también.**

A3: **Mire profesor.**

P: **Esa es la integral indefinida, si quieres hallar la definida escribes equis igual a cero dos puntos seguidos y hache.**

P: **Esa integral a qué es igual...**

A5: **A equis a la tres sobre tres.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$=\left(\frac{b^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h$$

P: **Esto evaluado entre cero y hache, si lo evaluamos en hache va a ser be al cuadrado sobre hache al cuadrado por hache al cubo sobre tres y si lo evaluamos en cero va a ser be al cuadrado sobre hache al cuadrado por cero al cubo sobre tres.**

Escribe en la pizarra:

$$=\frac{b^2}{h^2}\frac{h^3}{3}-\frac{b^2}{h^2}\frac{0^3}{3}$$

P: **por lo tanto la integral va a ser igual a un tercio de be al cuadrado por hache.**

Escribe en la pizarra:

$$=\frac{1}{3}b^2h$$

P: **Ese es el valor de ese volumen, siempre dependerá del valor de la hache y be. ¿Qué notan ustedes en ese resultado? No reconocen algo...**

A4: **Parece la fórmula del área de un triángulo.**

P: **Es la fórmula del volumen de una pirámide... recuerdan un tercio del área de la base por la altura.**

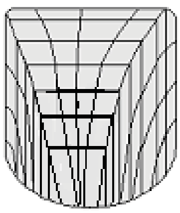
Escribe en la pizarra:

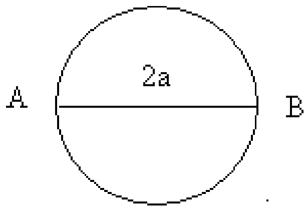
$$V = \frac{1}{3} A(Base)h$$

P: **Es el volumen de un sólido que no es de revolución, vamos a hacer otro, se lo dicto y hago el dibujo en la pizarra:**

P: **Un observatorio tiene la forma de un sólido cuya base es un disco circular con diámetro A, Be y de longitud dos a. determine el volumen de este sólido si cada sección transversal perpendicular a A, Be es un cuadrado.**

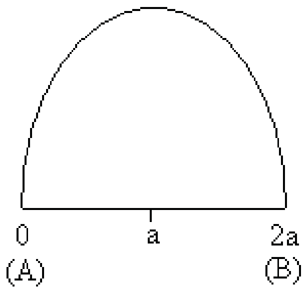
Dibuja en la pizarra:





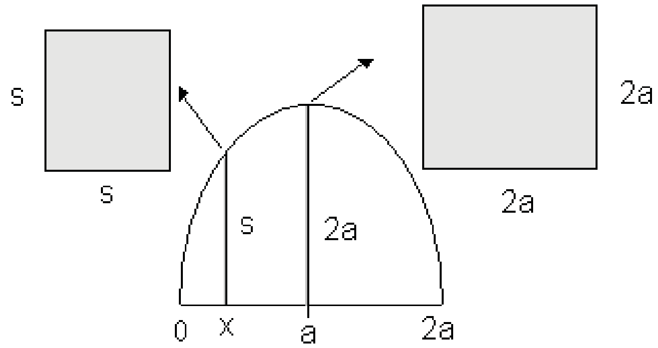
P: **La figura es más o menos así, está en perspectiva, requiere imaginación, ese observatorio la base es circular, pero si lo vemos de lado será así:**

Dibuja en la pizarra:



P: **De lado se verá como un arco, lo cierto es que en cualquier parte que se haga una sección será un cuadrado. Ahora como nos dice el problema que la base es circular**

de diámetro dos a. Vamos a hacer algo parecido a lo que hicimos en el problema anterior. Supongamos que este es el observatorio aquí está A y aquí está Be.
Dibuja en la pizarra:



P: **Establecemos la siguiente proporción: el lado del cuadrado más grande es dos a y está ubicado en el punto a, el más pequeño tiene lado ese y está ubicado en el punto que llamamos equis. Así ese sobre equis es igual a dos a sobre a.**
Escribe en la pizarra:

$$\frac{s}{x} = \frac{2a}{a} \Rightarrow s = 2x$$

P: **Luego el área del cuadrado es ese al cuadrado, es decir ese al cuadrado igual a cuatro equis al cuadrado.**
Escribe en la pizarra:

$$s^2 = 4x^2$$

P: **Sí o no, ¿Cuál es la duda?...Como son las secciones cuadradas, el cuadrado que está sobre el diámetro, dos a, su lado mide dos a, y el que está en equis, no lo sé lo llamo ese. Ahora llegamos a que cualquier parte del eje equis el lado del cuadrado en esa posición es dos equis.**
P: **podemos establecer el volumen, va a ser igual a la integral entre cero y dos a. ¿Por qué?... porque recorremos todo el diámetro que mide dos a. ¿De quién?...del área de la base; cuatro equis cuadrado por diferencial de equis.**
Escribe en la pizarra:

$$V = \int_0^{2a} 4x^2 dx$$

P: **Calculemos esa integral, a qué va a ser igual.**

A3: **Logaritmo.**

P: **¡Que logaritmo chico!**

A3: **No...No.**

A3: **Cuatro equis a la tres sobre tres.**

P: **Cuatro equis a la tres sobre tres.**

Escribe en la pizarra:

$$= \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^{2a}$$

$$= \frac{4}{3}\left[(2a)^3 - 0^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}8a^3 = \frac{32}{3}a^3$$

P: **Ese es el valor del volumen. Se pueden hacer muchas aplicaciones, la semana que viene vamos a hacer otras aplicaciones...**

P: **Otra cosa que vamos a ver ahora es longitud de arco.**

Escribe en la pizarra:

Longitud de arco

P: **Si ustedes quieren medir la longitud de una circunferencia. ¿Cómo lo hacen?...recuerdan.**

A1: **Pi por radio.**

P: **Dos Pi por radio...dos Pi por radio. Nosotros también vamos a medir longitudes de arcos suaves, aplicando la integral definida.**

Escribe en la pizarra:

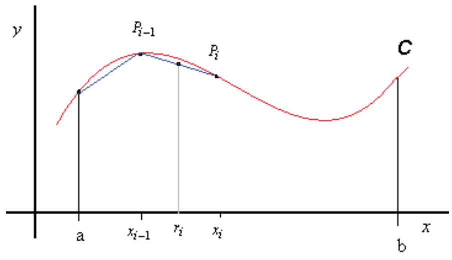
Un arco suave es la gráfica de una función cuya derivada f' ***es continua en*** $[a,b]$***. La continuidad evita la posibilidad de la existencia de puntos "esquinas" en la gráfica de*** f ***.***

P: **Entonces fíjense, un arco suave son aquellas funciones continuas, pero lo importante es que su derivada sea continua. ¿Por qué?...Bueno cuándo ustedes vieron derivadas estudiaron aquellos casos en que ésta no existe, las esquinas e indeterminaciones...El hecho es que si la derivada es continua no existen esos puntos.**

El profesor escribe en la pizarra:

Para aproximar la longitud s del arco suave C Procedemos así:

Bajo la hipótesis de que C es la gráfica de una función suave definida en $[a,b]$***. Se considera una división de*** $[a,b]$ ***en subintervalos todos ellos de la misma longitud*** Δ_x**.**



P: **Fíjense ahí tenemos la gráfica, hacemos la subdivisiones del intervalo a, be la cual define estos puntos en la curva, los cuales los vamos a unir con una línea recta... supongamos que Ce es un arco suave. Primero trataremos de deducir una fórmula para medir su longitud siguiendo lo que hizo Riemann, hacemos una partición del intervalo a, be. Todos los subintervalos de la misma longitud. Ahí tenemos la gráfica, a este punto lo vamos a llamar pe sub-i menos uno y a este p sub-i. A estos puntos equis sub-i menos uno y a este equis sub-i. Pe sub-i menos uno es la imagen de equis sun-i menos uno mediante la función ye igual efe de equis y pe sub-i es la imagen de equis sub-i mediante efe. Sea pe sub-i...**

Escribe en la pizarra

Sea Pi el punto de la gráfica $(x_i, f(x_i))$ ***sobre el arco correspondiente al i-enésimo punto*** x_i***.***

P: **Fíjense que hay dos arcos el determinado por la curva suave y el determinado por la poligonal. La idea es ver cómo se aproxima el de la poligonal al de la curva. Aquí pasa como en la integral de Riemann mientras mayor sea el número de subintervalos más aproximado será el arco de la poligonal al arco de la curva. Recuerden que** *C* **es el arco de la curva.**

Escribe en la pizarra:

Nuestro arco poligonal "inscrito en C" es la unión de los segmentos: $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ..P_{n-1}P_n$ ***Así la aproximación de S de C es:***

P: **Podemos escribir ese como la sumatoria, ese es la aproximación del arco ce... es la sumatoria desde i igual uno hasta ene de los pe sub-i menos uno, pe sub-i...**

Escribe en la pizarra:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \qquad \textbf{(1)}$$

P: **Ustedes saben cómo se calcula la longitud entre dos puntos del plano. ¿Cómo viene definida la distancia entre dos puntos del plano? ¿No recuerdan?**

A1: **Equis uno menos equis dos...ah...**

P: **O mejor así...**

Escribe en la pizarra:

$$d(x_1, x_2) = |x_1, x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (f(x_1) - f(x_2))^2}$$

P: **Esta fórmula es la que nos va a permitir aproximar, porque la poligonal está formada por segmentos de cierta longitud. Así la longitud del segmento típico es...**

Escribe en la pizarra:

La longitud del segmento típico es:

$$|P_{i-1} - P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

P: **Ustedes recuerdan el teorema del valor medio de la derivada... ¿Puede borrar aquí?**

A2: **Si.**

Escribe en la pizarra el teorema del valor medio.

P: **El teorema del valor medio dice que si efe es continúa en el intervalo equis sub-uno, equis sub-dos. Entonces existe alfa tal que efe de equis sub-dos menos equis sub-uno es igual a efe prima de alfa por equis sub-dos menos equis sub-uno. Esto nos permite...**

Escribe en la pizarra:

Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función f ***en*** $[x_{i-1}, x_i]$ ***concluimos la existencia de*** r_i ***en ese intervalo tal que*** $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(r_i)(x_i - x_{i-1})$

Así,

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(r_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$|P_{i-1}-P_i|=\sqrt{\frac{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}{(x_i-x_{i-1})^2}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{(f(x_i)-f(x_{i-1}))}{(x_i-x_{i-1})}\right)^2}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sqrt{1-[f'(r_i)]^2}\Delta x \text{ (2) Donde } \Delta_x=x_i-x_{i-1}$$

P: **Tenemos dos ecuaciones, sustituyendo dos en una tenemos:**

Escribe en la pizarra:

Sustituyendo (2) en (1) se tiene que:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(r_i)]^2}\Delta_x$$

Esta es la suma de Riemann para la función $\sqrt{1-[f'(r_i)]^2}$ ***en*** $[a,b]$ ***. Como*** f' ***es continua tal suma tiende a la integral y la integral a la longitud del arco real S, cuando*** $\Delta_x \to 0$***. En base a esto se define la longitud S del arco suave C como:***

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(r_i)]^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

En el caso de que el arco suave esté dado por la gráfica de $x=g(y)$ ***para*** y ***en*** $[c,d]$ ***un análisis similar al anterior en base a una subdivisión de*** $[c,d]$ ***se obtiene:***

$$S=\int_c^d\sqrt{1+[g'(r_i)]^2}dy=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

P: **Vamos a hacer el siguiente ejemplo para lo cual nos podemos ayudar con el Maple.**

Escribe en la pizarra:

Determinar la longitud de arco de la llamada parábola semi-cúbica (aunque no es realmente una parábola) $y=x^{3/2}$ ***en*** $[0,5]$

P: **Bien qué es lo primero que tenemos que hacer...**

A4: **Graficar.**

P: **Okey grafiquemos, se les olvidó, definan la función**

Escribe en la pizarra

```
> f:=x->x^(3/2);
```

P: **Para graficar escribimos el comando plot**

P: **hagan eso para que analicemos la gráfica. Ese es un arco suave, que vamos a medir ya queremos saber su longitud.**

P: **Para calcular la longitud de ese arco.**

P: **Ahora vamos a calcular esa longitud, para ello se tiene la integral entre a y b la fórmula. En este caso ¿Cuánto vale a? ¿Cuánto vale be?**

A3: **Cero.**

P: **¿Y be?**

A5: **Cinco.**

P: **Entonces se nosotros queremos hallar la longitud de ese arco... tenemos que escribir: ese es igual a la integral entre cero y cinco de la raíz cuadrada de uno más, la función que tenemos, ¿Cuál es la función?**

P: **Bueno es la derivada de la función ye igual a equis a la tres medio ¿Cuál es la derivada?**

A1: **Tres medio.**

P: **¿Cuál es la derivada? Si lo hacemos con el Maple, recuerden se utiliza el comando diff ( ), pero es muy sencilla ¿Cuál es la derivada?**

P: **Inés ¿Cuál es la derivada?**

A4: **Tres medio de equis...**

P: **La equis elevada a qué.**

A3: **A un medio.**

P: **Okey, así tenemos la integral entre cero y cinco de la raíz cuadrada de uno menos ye prima que es tres medio de equis a la un medio, elevada al cuadrado... ¿Cómo queda la integral?**

Escribe en la pizarra:

$$S=\int_0^5 \sqrt{1-(y')^2}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx$$

A5: **Se multiplica un medio por dos...**

P: **Y cómo queda...**

Escribe en la pizarra:

$$S=\int_0^5 \sqrt{1-\frac{9}{4}x}dx$$

P: **Cómo hacemos la integral, la pueden hacer con el Maple. Es muy sencilla...con un cambio de variable. ¿Cuál es el cambio?**

A2: **Se hace u igual a uno más nueve cuartos de equis... y de, de u es...**

A1: **Nueve cuartos por de, de u.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$\int u^{1/2} du = \frac{4}{9}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

P: **Evaluamos. Escribe en la pizarra:**

$$=\frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}.5\right)^3}-\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}.0\right)^3}\right]$$

$$=\frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{45}{4}\right)^3}-\sqrt{1^3}\right]$$

$$=\frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3}-1\right]=\frac{335}{27}$$

P: **Ese valor en la longitud de ese arco C**

En esta clase se realizaron otros ejemplos que quedaron en grabación y que permitirán continuar con el estudio en otro momento.

Pasaremos ahora a la reconstrucción de la novena sesión de clase dejando la octava sesión para estudios posteriores. En la novena sesión de clase se resolvieron situaciones variadas de aplicaciones de la integral definida.

Reconstrucción de una parte de la novena y última sesión de clase 27/02/08

P: **Ya hemos venido conversando que la finalidad que tiene la enseñanza del cálculo integral en las carreras técnicas es la de resolver problemas propios a cada carrera. En el material que les entregué, tenemos una batería de ejercicios y problemas que pueden ser resueltos aplicando la integral definida. La evaluación final que vamos a tener va a ser en base a ejercicios y problemas, lo haremos en este laboratorio y pueden utilizar el computador.**

P: **¿Qué ejercicio o problema quieren resolver?**

A1: **El primero.**

P: **Léanlo primero**

El ejercicio dice: Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de la curva $f(x) = \cos x$**, el** x **en el intervalo** $[0, \pi]$

P: **¿Qué se puede hacer primero?**

A1: **La gráfica.**

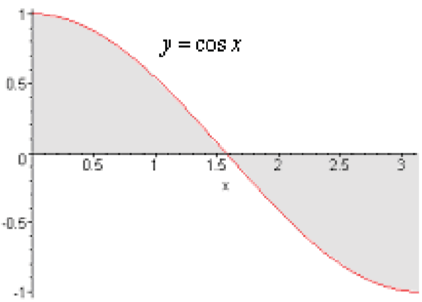
P: **Hagan la gráfica**

A2: **Una parte está en la parte positiva del eje ye y otra toma valores negativos.**

P: **¿Entonces?**

A3: **Hay que hacer dos integrales una entre cero y pi medio y la otra con un signo menos delante entre pi medio y pi.**

El profesor bosqueja en la pizarra:



P: **¿Cómo es la integral o las integrales?**

A4: **Entre cero y pi medio de coseno de equis menos entre pi medio y pi también de coseno de equis.**

P: **Bien y escribe en la pizarra:**

$$A = \int_{0}^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

P: **Calculen esas integrales. ¿Cuál es la integral del coseno?**

A1: **seno.**

A2: **Menos seno.**

P: **No es seno.**

Escribe en la pizarra.

$$\begin{aligned} A &= senx\Big|_{0}^{\pi/2} - senx\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= sen\left(\pi/2\right) - sen(0) - \left[sen(\pi) - sen\left(\pi/2\right)\right] \\ &= 1 - 0 - [0 - 1] \\ &= 2 \end{aligned}$$

P: **Veo que muchos ya lo habían hecho con el Maple. Vamos a resolver otro problema ¿Cuál quieren hacer?**

A2: **El siete.**

P: **El siete es una pregunta teórica léanla y analicen, también pueden construir en el Maple dos funciones con esas características, las grafican y saquen sus conclusiones.**

La pregunta siete dice: ***Sean*** f y g ***dos funciones continuas en*** $[a,b]$ ***con*** $f(x) = -g(x)$ ***en todo el intervalo. ¿Cómo son las áreas de las regiones que ellas encierran con respecto al eje*** x ***entre a y b?***

A3: **¿Si ge de equis es equis al cuadrado, entonces efe de equis es menos equis cuadrado?**

P: **Exacto si quiere defínelas con el Maple y las graficas.**

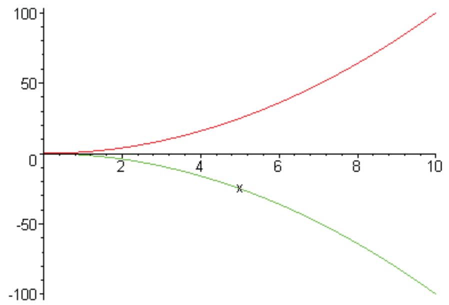
El estudiante hace lo siguiente y muchos otros también lo hacen:

```
> g:=x->x^2;f:=x->-x^2;
```

$$g := x \to x^2$$

$$f := x \to -x^2$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=0..10);
```



P: **De acuerdo a lo que hicieron ¿Cómo son las áreas?**

A3: **Iguales.**

A2: **Iguales.**

P: **El valor numérico del área de las dos regiones es el mismo y eso pasará con cualquier par de funciones con esas características.**

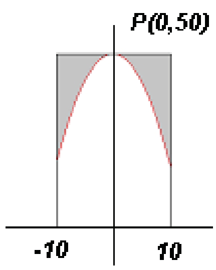
P: **Quiero que hagamos ahora el diez. ¡Léanlo!**

A5: **Se tiene una parcela rectangular de 20x50 metros. Se quiere cubrir con baldosas un área de 800 m^2 y el resto dejarlo como un jardín. La región que se va a cubrir con baldosas tiene forma de parábola como lo indica la figura. ¿Qué parábola debemos trazar?**

P: **¿Cómo lo podemos resolver?**

A2: **Por el método de Riemann.**

P: **No la integral la vamos a resolver utilizando el Teorema Fundamental de Cálculo. Dibuja en la pizarra la figura que aparece en la guía:**



P: **Pero el punto Pe de abscisa cero y ordenada cincuenta es el vértice de la parábola. Sabemos que una parábola se puede escribir como a, equis al cuadrado, más be, equis más ce y el vértice se puede escribir en término de los coeficientes.**

Escribe en la pizarra:

$$y = ax^2 + bx + c \ \textit{\textbf{Su vértice es:}}\ V(\ , \ )$$

P: **¿El vértice a qué es igual?**

A7: **A, a y b.**

A2: **a y c.**

P: **¿Cuál es el vértice?**

Escribe en la pizarra:

$$V(0{,}50) \Rightarrow b = 0 \wedge c = 50$$

P: **¿Entonces la parábola es?...recuerden que tenemos que determinar la parábola. ¿Qué parábola debemos trazar para colocar las baldosas como nos piden? Conocemos b y c ¿Cómo nos quedaría la ecuación?**

A2: **Ye igual a, a por equis cuadrado más... no.**

A1: **Ye igual a, a por equis cuadrado más cincuenta.**

P: **Bien.**

Escribe en la pizarra:

$$y = ax^2 + 50$$

P: **Esa es la parábola, pero falta conocer el valor de a. ¿Cómo determinamos a? ¿Qué otro dato conocemos?**

A3: **El área que es ochocientos**

P: **¿Cómo puedo vincular ese dato para hallar a?**

A4: **La integral entre cero y cincuenta.**

P: **Estamos trabajando en función del eje x**

A3: **La integral entre cero y diez de a por equis cuadrado más cincuenta es igual a ochocientos.**

P: **¿Por qué?**

A3: **La integral representa el área de la región que ya sabemos que es ochocientos.**

P: **Muy bien, entonces calculamos la integral y despejamos a.**

Escribe en la pizarra:

$$\int_{-10}^{10}\left(ax^2+50\right)dx=800$$

P: **¿Cómo lo despejamos?**

A5: **A equis al cubo sobre tres, más cincuenta equis igual a ochocientos. A petición del profesor A5 escribe en la pizarra:**

$$a\frac{x^3}{3}+50x\Big|_{-10}^{10}=800$$

P: **Lo evaluamos.**

A5: **Continúa y escribe en la pizarra:**

$$\left(a\frac{1000}{3}+500\right)-\left(-a\frac{1000}{3}-500\right)=800$$

$$\frac{2000}{3}a+1000=800$$

$$\frac{2000a+3000}{3}=800$$

$$2000a+30000=2400$$

$$2000a=-600$$

$$a=-\frac{3}{10}$$

P: **esto quiere decir que la parábola que debemos trazar es...**

A5: **Ye igual a menos tres sobre diez por equis cuadrado más cincuenta.**

El profesor escribe en la pizarra:

$$y=-\frac{3}{10}x^2+50$$

El profesor conjuntamente con los estudiantes en esta sesión de clase, resolvieron muchos otros ejercicios propuestos en un material denominado Batería de Ejercicios y Problemas, quedaron en las grabaciones para la continuación del proceso de estudio.

Anexos H

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua

Departamento de Ciencias Básicas

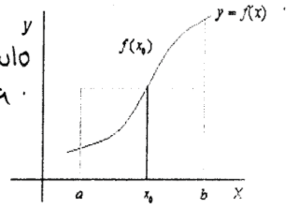
PRUEBA PARCIAL

Nombre y Apellido Monica Khandji D **C.I** 19594665

Parte I: Argumenta tu respuesta a cada uno de las siguientes preguntas.

1. **El Teorema del Valor Medio para integrales plantea: Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $x_o \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$. Interprete este teorema geométricamente, explique.**

La integral es igual al area de la curva y el area del rectangulo es tambien igual al area bajo la curba.

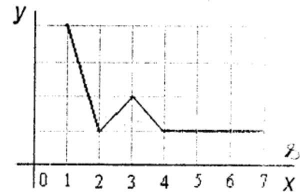


2. **¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$? Explique.**

3. **De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.**

$P = \frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)$

$= \frac{1}{6}\, 8.5 \qquad \frac{8,5}{6} = 1,416$



El valor promedio es 1,416

4. **Calcule: $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx$**

5. Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo el área $[-3,3]$ el área bajo la curva $y = x^2 + 1$

6. La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$. Si t es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?

7. Determine el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3 - x^2$

8. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje x la región limitada por $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

9. Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar

$$\int_0^{22} c(t)dt$$

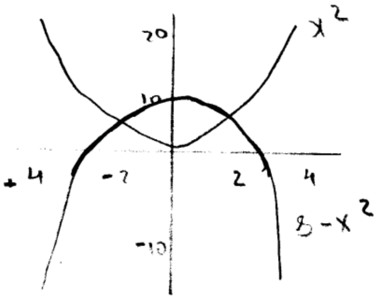
Segundos después de la inyección	Concentración (mg/litro)
0	0
2	0
4	0,6
6	1,4
8	2,7
10	3,7
12	4,1
14	3,8
16	2,9
18	1,5
20	0,9
22	0,5

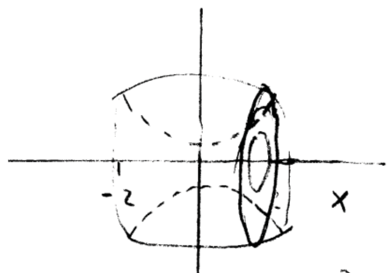
10. La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ el eje de las x y el eje de las y. Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.

11. Calcula la integral $\int_0^4 (x^2 + 5)dx$ mediante sumas por la derecha, tome h=0,5

Puntuación

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	2





$V_1 = 8 - x^2$

$V_2 = x^2$

Punto de corte $2, -2$

Se rota en torno al eje X

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left[g(x) + f(x) \right] dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \pi \left[8 - x^2 + x^2 \right] dx = \pi \int_{-2}^{2} \left[(8-x^2)^2 + (x^2)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left((64 - x^4) + x^4 \right) dx = V = \pi \left(64x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(128 - \frac{32}{5} \right) \frac{32}{5} \right] = \pi \frac{20}{5} + \frac{32}{5} = \frac{52}{5} u^3$$

Respuesta 9 representado volumen del sólido

$$(2/2) = \left[0 + 2.0 + 2.0{,}6 + 2.1{,}4 + 2.27 + 2.37 + 2.41 + 2.3{,}8 + 2.2{,}9 + 2.1{,}5 + 2.0{,}9 + 2.0{,}5 \right]$$

La construcción es de

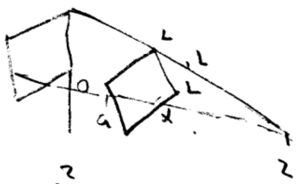
$= 411{,}2$

Monica Vibandji [illegible] Mate II

Respuesta 10

Gráfica

$$L = 1 - \frac{x^2}{4} \quad b = L^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)$$



$$\int_0^2 A(B) \cdot dx$$

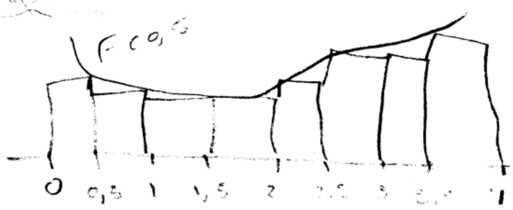
$$\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) = \left(1 - \frac{2^2}{2} + \frac{0^4}{16}\right) = \left(1 \cdot \frac{4}{2} + \frac{0}{16}\right)$$

$= 0{,}09$ este es el volumen del sólido

Respuesta 11

$$\int_0^4 (x^2 + 5)\, dx$$

$f(x) = x^2 + 5$



$A = 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2) +$
$0{,}5 \cdot f(2{,}5) + 0{,}5 \cdot f(3) + 0{,}5 \cdot f(3{,}5) + 0{,}5 \cdot f(4);$

El resultado de toda la suma es

$= 40{,}500$

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación Superior
Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria
La Victoria. Estado Aragua

Departamento de Ciencias Básicas

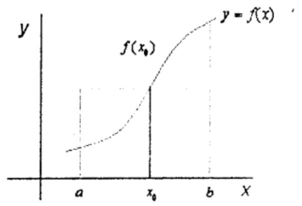
PRUEBA PARCIAL

Nombre y Apellido Inés Quiñonez **C.I** 17.768.965

Parte I: Argumenta tu respuesta a cada uno de las siguientes preguntas.

1. **El Teorema del Valor Medio para integrales plantea: Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $x_o \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$. Interprete este teorema geométricamente, explique.**

Geométricamente:
Existe un xo el cual el area del Rectangulo es igual al área bajo la curva



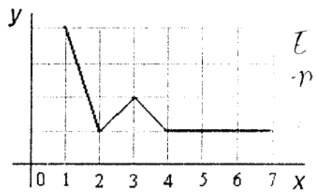
2. **¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$? Explique.** El teorema fundamental del calculo: Sea f(x) una función continua en [a,b] y F(x) una primitiva A f(x) Tambien en [a,b].

3. **De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.**

$P = \frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)\,dx$

$= \frac{1}{7-1} \cdot 8{,}5 \Rightarrow \frac{8{,}5}{6}$

$P = 1{,}416$



El valor promedio de la función es 1,416

4. **Calcule:** $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \frac{1}{10}\,Ln(2) + \frac{1}{10}\,Ln(3)$

$U = 1 + 5x^2$

$dU = x\,dx$

$\frac{dU}{x} = dx$

5. Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo el área $[-3,3]$ el área bajo la curva $y = x^2 + 1$

6. La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$. Si t es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?

7. **Determine el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3 - x^2$**

8. **Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje x la región limitada por $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.**

9. **Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar**

$\int_0^{22} c(t)\,dt$ $n = 2$

Segundos después de la inyección	Concentración (mg/litro)
0	0
2	0
4	0,6
6	1,4
8	2,7
10	3,7
12	4,1
14	3,8
16	2,9
18	1,5
20	0,9
22	0,5

$A \approx \left(\frac{2}{2}\right)(0 + 2.0 + 2.0{,}6 + 2.1{,}4 + 2.2{,}7 +$
$2.3{,}7 + 2.4{,}1 + 2.3{,}8 + 2.2{,}9 + 2.1{,}5 +$
$2.0{,}9 + 0{,}5)$

$\boxed{A \approx 43{,}7}$

El estimado es de 43,7

10. La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ el eje de las x y el eje de las y. Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.

11. Calcula la integral $\int_0^4 (x^2 + 5)\,dx$ mediante sumas por la derecha, tome h=0,5

Puntuación

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Valor	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	2

Respuesta 11

$A \approx 0{,}5\, f(0{,}5) + 0{,}5\, f(1) + 0{,}5\, f(2) + 0{,}5\, f(2{,}5) + 0{,}5\, f(3) + 0{,}5\, f(3{,}5) +$
$0{,}5\, f(4) = 45{,}500$

Respuesta 4.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}\,dx = \frac{1}{10} Ln(2) + \frac{1}{10} Ln(3)$$

$U = 1+5x^2$

$du = \frac{dx}{x}$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+5x^2} = \int_1^6 \frac{1}{10U}\,dU = \int_1^6 \frac{1}{100} \frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{1}{10(1+5x^2)} \; Ln|x| \Big|_1^6$$

Calculo $x = 1$

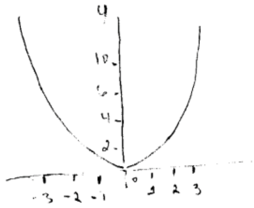
$1+5(1)^2 = 6$

$$= \frac{1}{10} Ln(2) + \frac{1}{10} Ln(3)$$

Calculo $x = 0$

$1+5(0)^2 = 1$

Respuesta 5.



$y = x^2 + 1$

cuando $x = -3$

$y = (-3)^2 + 1$

$y = 10$

cuando $x = -2$

$y = (-2)^2 + 1$

$y = 5$

cuando $x = -1$

$y = (-1)^2 + 1$

$y = 1$

cuando $x = 0$

$y = (0) + 1$

$y = 1$

cuando $x = 1$

$y = (1)^2 + 1$

$y = 2$

cuando $x = 2$

$y = (2)^2 + 1$

$y = 5$

cuando $x = 3$

$y = (3)^2 + 1$

$y = 10$

Respuesta 6

$$P = \frac{1}{7-3}\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$$

$$P = \frac{1}{4}\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$$

El promedio de la población en China entre 2003 y 2007 es de 1,232925

Calcular la Integral.

$$\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$$

$$= 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$$

$$= 1{,}15\left(\frac{1{,}014}{\ln|1{,}014|}\right)\Big|_3^7$$

$$= \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}014)^7}{\ln|1{,}014|}\right)\right] - \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}014)^3}{\ln|1{,}014|}\right)\right]$$

$$= \left[1{,}15\left(\frac{1{,}10221}{\ln|1{,}014|}\right)\right] - \left[1{,}15\left(\frac{1{,}0425}{\ln|1{,}014|}\right)\right]$$

$$= \frac{1{,}15}{4}\left(\frac{0{,}05962}{0{,}0139}\right)$$

$$= \frac{1{,}15}{4}\cdot 4{,}2885$$

$$= \frac{4{,}9317}{4} = 1{,}232925$$

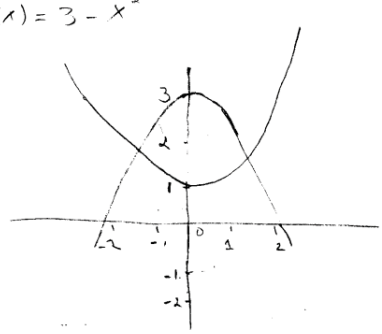
Calculo del valor promedio

$$P = \frac{1}{4}\cdot\frac{0{,}2633}{\ln|1{,}014|} \Rightarrow P = \frac{1}{4}\cdot\frac{0{,}2633}{0{,}0139}$$

$$P = \frac{0{,}2633}{0{,}0566} \Rightarrow P = 4{,}9317$$

¿ Respuesta 7

$f(x) = x^2+1$ y $g(x) = 3 - x^2$



Solución

$x^2+1 = 3 - x^2$

$x^2+1 - 3 + x^2 = 0$

$2x^2 - 2 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

$x_1 = -1 ; x_2 = 1$

$A(R) = \int_{-1}^{1} [3 - x^2 - (x^2+1)] \, dy$

$\int_{-1}^{1} x^2+1 - (3 - x^2)] \, dy$

$= \int_{-1}^{1} 2x^2 \, dy$

$= \frac{2x^3}{3} - 2x \Big|_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{2}{3} - 2\right) - \left(\frac{-2}{3} + 2\right)$

$= \frac{2-6}{3} - \left(\frac{-2+6}{3}\right)$

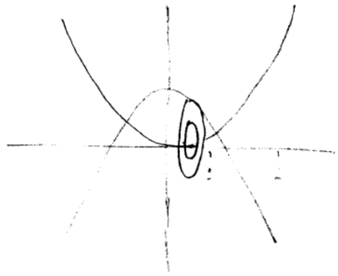
$= \frac{-4}{3} - \frac{4}{3}$

$= \frac{-4-4}{3} = A(R) = \frac{-8}{3}$

El area de la región limitada es $A = \frac{-8}{3}$

Respuestas

$y = x^2\ ,\ \ y = 8 - x^2$



Solución

$x^2 = 8 - x^2$

$x^2 - 8 + x^2 = 0$

$2x^2 - 8 = 0$

$(x+2)\ (x-2) = 0$

$x_1 = -2\ ;\ x_2 = 2$

$R_1 = x^2\ ;\ R_2 = 8 - x^2$

$V = \int_{-2}^{2} \pi \left[(x^2)^2 - (8 - x^2)^2 \right] dx$

$\pi \int_{-2}^{2} \left[x^4 - 8 + x^4 \right] dx$

$\pi \int_{-2}^{2} 2x^4 - 16\, dx$

$\pi\ \frac{2x^5}{5} - 16x \Big|_{-2}^{2}$

$\pi \left(2\frac{(32)}{5} - 32 \right) - \left(\frac{2(-32)}{5} - (-32) \right)$

$-\frac{2752}{15} + \frac{64\pi}{5}$

ANEXO I