CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Unidad Distrito Federal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica

Tesis que presenta:

Santiago Inzunsa Cázares

para obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

en la Especialidad de

Matemática Educativa

Director de tesis: Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

México, Distrito Federal Febrero de 2006

Resumen

El presente trabajo ha tenido como objetivo principal investigar los significados que estudiantes universitarios construyen sobre las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica como el que proporciona Fathom, un software que ha sido desarrollado para la enseñanza de la estadística y la probabilidad. El interés del estudio se enfocó en identificar los diferentes elementos de significado puestos en juego por los estudiantes, las relaciones establecidas entre ellos, su evolución como consecuencia del ambiente de simulación y el efecto de dicho ambiente en la resolución de problemas de carácter deductivo que van de la población a la muestra.

Los principales conceptos abordados en el estudio fueron la variabilidad muestral, el efecto del tamaño de muestra en las propiedades de las distribuciones muestrales, como son la forma (teorema del limite central), el centro, la variabilidad, y el cálculo de probabilidades de resultados muestrales. Todos ellos en el ámbito de distribuciones muestrales de medias y proporciones.

El estudio se llevó a cabo considerando una metodología de tipo cualitativo (estudio de casos) y estuvo conformado por 9 actividades que contemplaban diversos tipos de distribuciones poblacionales (binomiales, uniformes, normales, de forma irregular), algunas de las cuales fueron diseñadas con el propósito de explorar conceptos y propiedades, mientras que otras, con fines de cálculo de probabilidades de resultados muestrales.

Los principales instrumentos de recolección de información fueron un examen sobre sus conocimientos del tema antes de iniciar las actividades, en el que se pedía que resolvieran problemas en forma tradicional, dos cuestionarios –uno previo y otro posterior a las actividades-, hojas de trabajo, disquetes con el trabajo realizado en la computadora en cada una de las sesiones y entrevistas con algunos estudiantes en la etapa final.

Los sujetos de estudio fueron 11 estudiantes voluntarios que estaban tomando un curso de Inferencia Estadística en la Licenciatura en Informática en el Instituto Politécnico Nacional. El estudio se realizó en 20 sesiones de trabajo, incluyendo la aplicación de cuestionarios y entrevistas, en un tiempo total de 30 horas en un período de 2 meses.

Entre los resultados obtenidos podemos mencionar que los significados construidos por los estudiantes en el ambiente de simulación, incorporan muchos más elementos de

significado que los que pusieron en juego en el ambiente tradicional de lápiz y papel. Fathom les proporcionó los medios para que utilizaran diversas representaciones de los conceptos involucrados y las relacionaran entre en sí de forma dinámica y simultánea. Dichas representaciones fueron claves en algunas etapas del proceso de simulación para que los estudiantes desarrollaran intuiciones e ideas correctas de diversos conceptos y propiedades.

Sus acciones y procedimientos se orientaron a la construcción de las distribuciones muestrales, generando las poblaciones, extrayendo muestras y calculando estadísticos, para finalmente calcular probabilidades de muestras. Esto les permitió enfocarse tanto en el proceso como en el resultado final al resolver las actividades. Algunos procesos que son clave en el ambiente de lápiz y papel, se volvieron triviales e incluso innecesarios en el ambiente de simulación, como fue el caso de la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad.

El análisis de los cuestionarios y las entrevistas muestra que muchos estudiantes tuvieron una evolución en sus significados acerca de las distribuciones muestrales, sin embargo, algunos de ellos continuaron sin comprender diversos conceptos y propiedades, no obstante que el diseño de las actividades hacía énfasis en ellos.

En términos cuantitativos observamos un incremento notable de respuestas correctas en muchas de las preguntas del cuestionario final respecto al diagnóstico; mientras que en términos cualitativos se observa que los estudiantes han incorporando argumentos más sólidos y bien fundamentados en sus respuestas, con lo que muestran que el significado que atribuyen a las distribuciones muestrales, es más cercano al significado de referencia.

A lo largo del proceso de simulación los estudiantes mostraron diversas dificultades y algunas concepciones erróneas de diversos conceptos. Sobresalen de manera particular, la dificultad para definir el modelo poblacional en cada una de las actividades, y otras, ligadas con el uso de las representaciones simbólicas del software. Entre las concepciones erróneas más significativas se encuentra la confusión entre distribución de una muestra y distribución muestral y la dificultad para pasar de los resultados de una muestra a los de una distribución de muestras.

INDICE

Capítulo 6

SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES EN UN AMBIENTE DE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

Capítulo 7

LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL COMO MÉTODO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Capítulo 8

EVOLUCIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1. Introducción

La inferencia estadística es una de las áreas de mayor aplicación de la estadística práctica, ya que mediante la utilización de sus métodos se pueden obtener conclusiones significativas acerca de toda una población, con base en la información que proporcionan los datos de una sola muestra o un experimento. Dichos métodos hacen uso del azar para seleccionar los elementos de la muestra o asignarlos a los diversos tratamientos de un experimento, lo que permite el uso de la teoría de la probabilidad para evaluar la confiabilidad de los resultados obtenidos.

Un concepto fundamental en el que se apoyan los métodos de inferencia estadística son las distribuciones muestrales. Una distribución muestral representa el valor que puede tomar un estadístico (por ejemplo, la media) en cada una de las muestras aleatorias de un tamaño dado que son posibles de seleccionar de una misma población. Así, en tanto los estadísticos constituyen un recurso para estimar el valor de los parámetros poblacionales, el conocimiento de su distribución muestral, permite prever intervalos de valores que puede tomar un determinado parámetro, o si suposiciones de valores de los parámetros, concuerdan con los valores del estadístico que proporciona la distribución muestral.

Tradicionalmente, las distribuciones muestrales y la inferencia estadística han sido enseñadas en los cursos de estadística, utilizando un enfoque deductivo basado en teoría de la probabilidad (ver por ejemplo: Mendenhall et al., 1994; Walpole et al., 1998). Los desarrollos que se utilizan para su explicación son expresados a través de un lenguaje matemático que con frecuencia está fuera del alcance de muchos estudiantes, y lo que es más importante, la distribución muestral descrita mediante una distribución teórica de probabilidad, es difícil de asociar con el proceso físico real de selección de muestras de una población (Lipson, 2002, p. 2).

Desde esta perspectiva, si bien muchos estudiantes aprenden a realizar los cálculos necesarios para resolver un problema que involucra distribuciones muestrales, no siempre logran comprender el proceso subyacente ni los conceptos involucrados, de tal forma que conceptos y propiedades como la variabilidad muestral, el efecto del tamaño de la muestra en la forma (teorema del limite central), centro y variabilidad de las distribuciones muestrales, así como el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad obtenida, que son considerados elementos claves para comprender e interpretar los resultados en inferencia estadística, permanecen obscuros e incomprendidos por muchos estudiantes.

En la literatura de educación estadística (Shaughnessy, 1992; Gordon y Gordon, 1992; Moses, 1992; Rossman, 1997, Scheaffer, 1992) con frecuencia se sugiere la utilización de simulación computacional como alternativa para abordar la problemática del aprendizaje de las distribuciones muestrales. Se señalan diversas ventajas de la simulación respecto al enfoque tradicional de enseñanza, como es el hecho de permitir un acercamiento empírico mediante la selección repetida de muestras de una misma población, calculando el estadístico en cada una de las muestras y acumulándolos para formar la distribución. Este proceso está más relacionado conceptualmente con el proceso real de inferencia y requiere de pocos antecedentes matemáticos por parte de los estudiantes. Por otro lado, si este enfoque se implementa en un ambiente de estadística dinámica y de múltiples representaciones, como es el caso de Fathom –el software que hemos utilizado en la investigación-, ayuda a que los estudiantes se involucren en la construcción de las distribuciones muestrales, pongan en juego y relacionen los diversos conceptos y propiedades que en ellas intervienen.

No obstante las ventajas que se le atribuyen al enfoque de simulación computacional, el cual se apoya en el enfoque frecuencial de la probabilidad, pocos resultados de investigación se han publicado acerca de la efectividad de las actividades de simulación para mejorar la comprensión y el razonamiento de los estudiantes, por lo que se requiere aún de mucha investigación en torno al impacto de esta herramienta en los cursos de estadística (Chance, et al., 2004; Mills, 2002).

Teniendo en cuenta lo anterior, en el presente trabajo nos propusimos investigar en torno al efecto que podría tener un enfoque de simulación computacional implementado en un ambiente de estadística dinámica en los significados que estudiantes universitarios asignan a las distribuciones muestrales. El software que hemos utilizado en el estudio es Fathom (Finzer, et al., 2002). Dicho software pertenece a una categoría moderna de software denominado de *estadística dinámica*, y fue desarrollado con propósitos exclusivamente de enseñanza, teniendo en cuenta la opinión de investigadores en educación estadística. Una premisa clave en su diseño es que permite el manejo flexible de múltiples representaciones ligadas simultáneamente entre sí, de tal forma que un cambio en una de las representaciones puede ser visualizado de inmediato en las demás. A diferencia de otros paquetes de software que permiten trabajar con distribuciones muestrales (por ejemplo, Sampling Distributions y Minitab) los cuales incorporan simulaciones pre-construidas y donde el usuario interactúa con un modelo experto del fenómeno, Fathom permite al usuario construir su propio modelo computacional y realizar las experimentaciones y ajustes que él desee de manera interactiva y flexible.

2. Objetivos de la investigación

Como señalan Godino y Batanero (1998), el propósito específico de la educación matemática como campo de investigación, es el estudio de los factores que inciden en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. Uno de estos factores que mayor importancia está teniendo hoy en día es el uso de las herramientas computacionales. Estas herramientas poseen el potencial de cambiar las prácticas matemáticas de los estudiantes cuando resuelven un problema, el contenido y la forma de trabajar (Dörfler, 1993), por lo que existe la necesidad de investigar el efecto que éstas herramientas tienen en la actividad cognitiva de los estudiantes.

En este sentido, el objetivo general de este trabajo ha sido: *Investigar sobre los efectos de un enfoque frecuencial basado en simulación computacional, en el significado que estudiantes universitarios asignan a las distribuciones muestrales.* Del objetivo general se desprenden metas específicas las cuales señalamos a continuación:

1. Investigar y describir los elementos de significado, de acuerdo con el modelo teórico elegido, que los estudiantes han construido sobre las distribuciones muestrales como resultado de actividades en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica.

2. Investigar hasta dónde es posible que los estudiantes resuelvan problemas donde se utilizan distribuciones muestrales mediante el uso del software, si las soluciones que obtienen son matemáticamente válidas y cómo las consideran respecto a las soluciones obtenidas mediante el uso de los métodos tradicionales.

3. Investigar si los significados que los estudiantes tenían de las distribuciones muestrales antes de la enseñanza con simulación, evolucionan hacia los significados institucionales de referencia, como producto de la enseñanza que recibieron.

3. Preguntas de investigación

Las preguntas de investigación guardan estrecha relación con nuestras metas y el marco teórico de referencia. Específicamente, las preguntas que nuestra investigación trata de contestar son las siguientes:

1. *¿Cuáles son los elementos de significado que los estudiantes atribuyen a las distribuciones muestrales como resultado de una enseñanza basada en un ambiente de simulación computacional?*

Nos interesa conocer los elementos de significado (significado personal) que los estudiantes han construido como resultado de trabajar con la herramienta de simulación computacional en un ambiente de estadística dinámica. Estos elementos de significado son observables a través del sistema de prácticas que los estudiantes utilizan al resolver situaciones-problema y están dados por las representaciones utilizadas (expresiones, notaciones, gráficas), situaciones (problemas de aplicación), acciones (estrategias, procedimientos), conceptos (descripciones, definiciones), propiedades y argumentaciones.

2. *¿En qué medida el uso de la simulación computacional permite a los estudiantes resolver problemas que involucran a las distribuciones muestrales?*

El enfoque tradicional de resolución de problemas que involucran distribuciones muestrales e inferencia estadística, hace énfasis en un enfoque deductivo apoyado en la teoría de la probabilidad, utilizando conceptos como variables aleatorias y distribuciones de probabilidad. Sin embargo, este enfoque no está relacionado directamente con el proceso real de toma de muestras y cálculo de estadísticos que son característicos en un problema real de inferencia, y requiere además de un buen manejo de recursos matemáticos que no siempre están al alcance de muchos estudiantes. Es por ello que estamos interesados en conocer cuál es el papel que juega la simulación computacional en la resolución de estos problemas, sí es posible llegar a una solución adecuada mediante el uso del software y las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolverlos por este medio.

3. *¿Cómo evolucionan los significados de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales cuando trabajan en un ambiente de simulación computacional respecto al ambiente de lápiz y papel?*

Esta pregunta obedece al propósito de estudiar los cambios que ha sufrido el significado de las distribuciones para los estudiantes -si es que éste se ha presentado-, como consecuencia de una enseñanza basada en simulación computacional. Nuestra hipótesis es que el ambiente de simulación computacional con Fathom provocará ciertas reorganizaciones cognitivas en la mente de los estudiantes e influirá en una evolución de los significados que ellos tenían previo a la enseñanza, hacia un significado más cercano al significado institucional de referencia.

4. Características generales el estudio

Las actividades, cuestionarios y entrevistas que se diseñaron para alcanzar los objetivos planteados y responder las preguntas de investigación, se desarrollaron durante 20 sesiones con un tiempo total de 30 horas. Los conceptos investigados fueron: variabilidad muestral, efecto del tamaño de muestra en la forma (teorema del limite central), centro y dispersión de una distribución muestral, cálculo de probabilidades de resultados muestrales y el efecto del tamaño de muestra en los valores de dichas probabilidades. Se desarrollaron 9 actividades que consideraban diferentes distribuciones poblacionales, las cuales fueron resueltas mediante simulación computacional, y en algunos casos, también resueltas teóricamente.

La metodología del estudio respondió a un planteamiento de construir conceptos y descubrir propiedades, para lo cual, el papel del profesor se limitó al de un guía que leía las actividades y auxiliaba sólo en los casos en que era estrictamente necesario, para poder continuar con la actividad. Algunas actividades fueron abordadas en forma individual y otras parejas. A su vez, algunas contemplaban simulación física previa a la simulación computacional (las primeras tres actividades) y otras solo la simulación con computadora.

La investigación realizada es de tipo cualitativo y en ellas han participado 11 estudiantes voluntarios que estaban tomando un curso de Inferencia Estadística en la Licenciatura en Informática en el Instituto Politécnico Nacional.

5. Organización del documento

El documento está organizado en 8 capítulos y 4 anexos, cuyos contenidos se describen a continuación:

En el capítulo 1 se aborda el marco teórico en que se fundamenta la investigación. Como lo describiremos posteriormente, éste presenta dos componentes, una que tiene que ver con el significado y la comprensión de los objetos matemáticos, propuesta por Godino y Batanero (1994, 1988) y Godino (2002, 2003), y la otra, relacionada con la utilización de las computadoras como herramientas cognitivas en la educación matemática, fundamentada en ideas de Dörfler (1993) y Pea (1987).

En el capitulo 2, abordamos los antecedentes de la investigación, los cuales enfatizan en la importancia y la dificultad que tiene el aprendizaje de las distribuciones muestrales en el estudio de la inferencia estadística, así como estudios previos que analizan dicha problemática cuando las distribuciones se inscriben en un ambiente de simulación computacional.

En el capítulo 3, se describe el diseño de la investigación y la metodología del estudio. Asimismo se tratan las diferentes etapas por las que se desarrolla la presente investigación, los instrumentos de recolección y las técnicas de análisis de los datos, así como las características del proceso de enseñanza basado en el ambiente de Fathom.

En el capítulo 4, se exponen los resultados de un estudio exploratorio que se realizó con un grupo de estudiantes del Instituto Politécnico Nacional, a través de un cuestionario que aborda diversos conceptos y propiedades relacionadas con las distribuciones muestrales, cuyos resultados permitieron identificar dificultades que se tuvieron en cuenta en el diseño de las actividades.

En el capítulo 5 se realiza una descripción general sesión por sesión, de los hechos y aspectos más sobresalientes del estudio que tuvieron impacto en los resultados obtenidos, como son la justificación y objetivos de las actividades y cuestionarios, la forma de organización del trabajo de los estudiantes, la cantidad de alumnos o parejas que llegaron a la solución correcta y las principales dificultades que enfrentaron.

En el capítulo 6 se proporcionan los resultados de la primer pregunta de investigación, que trata sobre los significados que los estudiantes asignan a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional. Esto de acuerdo a los elementos de significado especificados en el modelo teórico elegido.

En el capítulo 7, se trata la segunda pregunta de investigación, relacionada con la simulación computacional como método de resolver problemas de distribuciones muestrales. Se proporcionan resultados que muestran la forma y las dificultades a que se enfrentan los estudiantes en el proceso de solución.

En el capítulo 8, se analiza la evolución de los significados de los estudiantes como consecuencia de la enseñanza basada en simulación computacional. Finalmente se describen las conclusiones generales del estudio y las implicaciones que puede tener en la enseñanza de las distribuciones muestrales.

Por su parte en el anexo 1, se describe el significado que las distribuciones muestrales tienen para la institución de los educadores estadísticos en un primer curso de estadística en el nivel universitario, el cual es fundamental para delimitar el campo de problemas que se abordarán en las actividades de enseñanza. Dicho significado fue determinado a partir de una muestra representativa de libros de texto utilizados en carreras universitarias como ingeniería y ciencias económicas y administrativas. En el anexo 2, se muestran las actividades de enseñanza que conformaron el estudio y los criterios que se tuvieron en cuenta para su diseño, en anexo 3 se describen algunos fundamentos matemáticos de la distribución muestral de la media y la proporción, las dos distribuciones abordadas en el presente estudio, mientras que en el anexo 4 se muestran los cuestionarios anterior y posterior a las actividades.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1 Introducción

El marco teórico de referencia que utilizamos en nuestro trabajo de investigación consta de dos componentes principales. La primera tiene que ver con una concepción acerca del significado y la comprensión de los objetos matemáticos propuesta por Godino y Batanero (1994; 1998) y Godino (2002; 2003). La segunda, se refiere a la utilización de las computadoras como herramientas cognitivas, con potencial para generar cambios estructurales en la actividad mental de los estudiantes cuando exploran conceptos y resuelven problemas matemáticos (Dörfler, 1993; Pea, 1987).

Hemos adoptado dos enfoques teóricos, porque consideramos que el planteamiento de Godino y Batanero, aunque posee los constructos necesarios para precisar los significados y la comprensión desarrollada por los estudiantes; en nuestro caso, dichos significados están ligados a la herramienta computacional que se ha utilizado en la enseñanza, por lo que requerimos de elementos teóricos que nos permitan describir el efecto que tuvo la herramienta en los significados que los estudiantes construyeron.

Apoyados en ambos enfoques, estamos en posibilidad de realizar una descripción más detallada de todos los factores que tuvieron influencia en el estudio; además, como señala Mariotti (2002), la investigación centrada en aspectos cognitivos debe ser complementada con investigación sobre el efecto que las actividades en ambientes computacionales pueden tener en la clase de matemáticas.

1.2 Teoría del significado de los objetos matemáticos

La teoría del significado de los objetos matemáticos es abordada por Godino y Batanero (1994; 1998), y sus principales supuestos epistemológicos y cognitivos son los siguientes:

1. Las matemáticas pueden ser vistas como una actividad humana que involucra la solución de situaciones-problema socialmente compartidos, los cuales se refieren al mundo real y social, o pertenecientes al campo de las matemáticas mismas. Como respuesta o solución de estos problemas, surgen los objetos matemáticos y evolucionan progresivamente.
2. La actividad matemática crea un lenguaje simbólico en el cual son expresadas las situaciones-problema y sus soluciones. Los sistemas de símbolos son vistos como unidades culturales que tienen una función tanto comunicativa como instrumental, la cual modifica a la persona misma cuando los utiliza como mediadores.
3. La actividad matemática se propone entre otras cosas, la construcción de un sistema conceptual (conceptos, teoremas, propiedades) lógicamente organizado que explican el gran número de problemas involucrado en el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, dos importantes características de la teoría y en las cuales se fundamentan sus constructos son:

1. La adopción de un *enfoque antropológico* en el estudio de la cognición matemática. Es decir, se parte del supuesto que las personas trabajan e interactúan dentro de diferentes grupos o instituciones donde las matemáticas son objeto de estudio, por lo tanto, el conocimiento está mediado por las características del contexto donde se abordan los objetos matemáticos.

2. La adopción de un *enfoque pragmático* en el estudio de los objetos matemáticos. Esto es, el significado de un objeto matemático está en función del sistema de prácticas o uso que se hace de él para resolver situaciones-problema.

En este sentido, *el sistema de prácticas realizadas en determinados contextos es lo que determina la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y sus significados, por lo tanto, estos están ligados a los problemas y a la actividad realizada para resolverlos*.

De acuerdo con el enfoque antropológico adoptado, el significado de un objeto matemático puede variar de una institución a otra, por lo que no hay un significado único de los objetos matemáticos. Lo mismo sucede con las personas, no todas exhiben las mismas prácticas para resolver un campo de problemas, así que para contemplar lo anterior, el modelo tiene en cuenta dos dimensiones interdependientes para el significado de los objetos matemáticos: la *dimensión institucional* y la *personal*.

La dimensión institucional, tiene que ver con el significado que el objeto tiene para un determinado grupo de profesionales interesados en situaciones-problema de donde este emerge; y la personal, está relacionada con el significado que a un objeto matemático le atribuye una persona (por ejemplo, un estudiante), cuando el objeto es estudiado por ella. Desde esta perspectiva, el punto de partida de una investigación sobre el significado de un objeto matemático, requiere primeramente de la caracterización del uso que hace de ellos en una institución determinada, esto es, el significado institucional.

En particular, en este trabajo estamos interesados en analizar el objeto matemático "distribuciones muestrales" y establecer el significado institucional que se le atribuye en la institución o grupo de educadores matemáticos en el nivel universitario. Este significado ha sido el punto de referencia para el diseño de las actividades de enseñanza que se han presentado a los estudiantes, con el objetivo de estudiar cómo construyen su significado personal en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Por otra parte, desde una perspectiva pragmática de la educación matemática como la que adopta el presente modelo, se atribuye un papel central a la actividad matemática que realizan los estudiantes ante cierto tipo de situaciones-problema. De esta manera, la noción de *situación-problema* es la noción más básica a partir de la cual se desarrollan las diferentes nociones y conceptos teóricos del modelo. Los autores consideran que esta noción toma en cuenta las principales componentes de la actividad matemática señalados por Freudenthal (1991):

- Desarrollar una simbolización adecuada para representar la situación y las soluciones encontradas, así como comunicar las soluciones a otras personas.
- Producir nuevas expresiones significativas y enunciados a través de manipulaciones simbólicas.
- Justificar (validando o argumentado) las soluciones propuestas.
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problema y procedimientos

En este sentido, una situación-problema viene siendo cualquier tipo de circunstancia en la cual se vuelve necesario efectuar actividades de matematización (simbolización, resolución, validación, argumentación, generalización, comunicación). Por ejemplo, consideremos la siguiente situación-problema (tomada de Walpole, et al, 1999):

> Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye aproximadamente normal con media de 800 hrs. y una desviación estándar de 40 hrs. Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 16 focos tenga una vida promedio de menos de 775 hrs.

Para resolver dicho problema en forma tradicional (enfoque deductivo), se requiere determinar la distribución muestral de la media, estandarizarla y sustituir información como el tamaño de la muestra (16), la media poblacional (800), la desviación estándar (40) y el valor de la media muestral (775). Sabiendo que la población se distribuye aproximadamente normal, entonces la distribución muestral será también normal –como consecuencia del teorema del limite central- con una media igual a 800 hrs. y una desviación estándar de $40/\sqrt{16}$ hrs., por lo que se procede a calcular la probabilidad utilizando la distribución normal estandarizada ($\mu = 0, \quad \sigma = 1$) en su versión tabular.

Para llevar a cabo todo el proceso anterior, el estudiante requiere realizar acciones como sustituir datos y realizar cálculos, validar etapas del proceso de solución y justificarlas adecuadamente poniendo en juego conceptos y propiedades, manejar simbología para representar el problema, como gráficas y sombreado de la porción de interés y finalmente interpretar resultados.

Ahora, cuando un conjunto de situaciones-problema aparece interrelacionados y comparten diversas componentes de la actividad de matematización, como procesos similares de solución, representaciones, argumentaciones, etc., se dice que forman un *campo de problemas*. Para resolver estos campos de problemas, las personas o instituciones hacen uso de ciertas acciones o prácticas que involucran conocimientos matemáticos. En este sentido se considerará como una *práctica* a cualquier acción llevada a cabo por alguien para resolver un problema matemático, comunicar su solución a otras personas, validar y generalizar su solución a otros contextos y situaciones. Sin embargo, más que una práctica en particular, lo que interesa son los *sistemas de prácticas* a las que las personas o instituciones recurren para la solución de un campo de problemas.

Por ejemplo, el problema planteado anteriormente pertenece a un campo de problemas de las distribuciones muestrales donde a partir de que son conocidos ciertos parámetros y la forma de la población, se pide calcular la probabilidad de que se presenten ciertos resultados muestrales. Esto no solo en el contexto de medias, sino también en el de otros estadísticos como las proporciones. En todos estos problemas, las acciones o sistemas de prácticas son similares: determinar la distribución muestral, sustituir información proporcionada por el problema, utilizar tablas para calcular la probabilidad de los valores muestrales.

Estas *prácticas* pueden ser *significativas* para una persona o para una institución, si cumple una función en la resolución de un problema, en su comunicación a otra persona o en su generalización a otro contexto o situación. En este punto interesa distinguir que los sistemas de prácticas significativas pueden ser atribuidos ya sea a una persona o a una institución. En la parte que toca a la institución, entre sus integrantes se establece lo que debe ser una práctica significativa para la solución de una situación-problema. Por lo general, estos sistemas de prácticas y sus soluciones son socialmente compartidas por los que integran la institución.

En lo que corresponde a las personas o estudiantes, estos también llevan a cabo ciertas prácticas para la resolución de problemas, sin embargo, es posible que no todas las prácticas que efectúan se consideren correctas por la institución de referencia, de hecho es frecuente que existan varios intentos fallidos, errores y procedimientos infructuosos que son abandonados, decimos entonces que sus prácticas no corresponden con las establecidas como correctas por la institución. Por ejemplo, una práctica incorrecta que es frecuente en los estudiantes al calcular la probabilidad que se pide en un problema que involucra una distribución muestral de medias -como es el caso de los focos-, es utilizar la distribución poblacional en lugar de hacerlo con la distribución muestral; es decir, al estandarizar la distribución se olvidan del tamaño de muestra. Otra práctica incorrecta tiene que ver con el uso de las tablas, al calcular en ocasiones, probabilidades de cola izquierda cuando se les piden probabilidades de cola derecha.

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \text{Si } \bar{X} \sim N\left[\mu, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right] \rightarrow Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Distribución poblacional Distribución muestral de la media

En nuestro caso podemos identificar diversas instituciones que están involucradas en el estudio de conceptos de inferencia estadística, como son las distribuciones muestrales. La institución de los estadísticos matemáticos, constituida por personas involucradas en resolver nuevos problemas o productores de nuevos conocimientos estadísticos, la institución de los estadísticos aplicados, conformada por personas que aplican los conocimientos estadísticos a la solución de problemas del mundo real, como serían los actuarios, ingenieros, estadísticos y matemáticos, y la institución de los educadores estadísticos, formada por los profesores e investigadores que tienen como propósito la enseñanza de conceptos de probabilidad y estadística.

De esta manera, *el sistema de prácticas prototípicas ligadas a un campo de problemas y* *aceptadas dentro de la misma institución*, determina el significado que dicha institución le atribuye al objeto matemático involucrado en su solución. A este sistema de prácticas se le conoce como *significado institucional* del objeto en cuestión. Estas prácticas son observables mediante descripciones, representaciones, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones, argumentaciones y procedimientos característicos de un campo de problemas.

Precisando, el *significado institucional de un objeto matemático* O_I *es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto* O_I *en un momento dado,* mientras que *el significado personal de un objeto matemático* O_P *es el sistema de prácticas personales que una persona lleva a cabo para resolver un campo de problemas del cual emerge el objeto* O_p *en un momento dado.* En nuestro caso, hemos determinado el significado institucional de las distribuciones muestrales a partir de un análisis de textos en una muestra representativa de libros de estadística orientados a estudiantes no matemáticos en el nivel universitario.

Por su parte al sistema de prácticas que los estudiantes desarrollan para resolver una situación-problema, -las cuales pueden corresponder o no con las prácticas consideradas adecuadas por una determinada institución- es lo que determina el *significado personal* del objeto matemático. Dicho significado lo hemos obtenido a través de diversos instrumentos (cuestionarios, entrevistas, hojas de trabajo, etc.) antes, durante y después de la aplicación de las actividades de enseñanza.

La intersección entre estos dos sistemas de prácticas (institucional y personal), es lo que la institución considera manifestaciones correctas, es decir, es lo que la persona conoce o comprende acerca del objeto desde el punto de vista de la institución. El resto de las prácticas personales son consideradas “errores” de acuerdo con la institución. En otras palabras, decimos que en una situación ideal y dentro de una institución dada, *una persona comprende el significado de un objeto matemático o que ha captado el significado de un concepto si es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, relacionarlas con otros objetos matemáticos y usarlas en situaciones-problemas prototípicas dentro de la* *institución* (Godino y Batanero, 1998, p. 187).

1.2.1 Elementos de significado de un objeto matemático

Hemos señalado anteriormente que el significado de un objeto matemático (personal o institucional) se concibe como el sistema de prácticas vinculadas a un campo de problemas matemáticos específicos. En dicho sistema de prácticas intervienen diversas entidades o elementos que se ponen en juego de manera interrelacionada en la actividad matemática involucrada en la resolución de situaciones-problema. Para dar cuenta de dicho sistema de prácticas y describir la actividad matemática realizada, en (Godino, 2002) se propone una clasificación o tipología de 5 elementos, de acuerdo con las diversas funciones que desempeñan en el trabajo matemático. Esta tipología constituye los *elementos o componentes de significado* que permiten establecer tanto el significado personal como institucional de los objetos matemáticos. Dichos elementos así como sus funciones específicas son:

1. *Situaciones-problema (elementos fenomenológicos).* Constituyen el campo de problemas del cual emerge el concepto. Son las tareas que inducen la actividad matemática. Por ejemplo, problemas que para su resolución se requiere de las distribuciones muestrales, como el calcular, cuáles valores muestrales son más probables que otros.
2. *Lenguaje (elementos representacionales).* Constituye las representaciones de los conceptos. Por ejemplo, las diversas representaciones de una distribución muestral, ya sea como histograma (distribución empírica), mediante una curva suave como la distribución normal (distribución teórica), mediante una tabla de valores o una expresión en lenguaje de computadora. De igual forma, las distintas notaciones para representar a los conceptos que forman parte de las distribuciones muestrales, tales como parámetros, estadísticos, poblaciones, muestras.
3. *Acciones (elementos procedimentales).* Es lo que hace el sujeto ante las tareas matemáticas que le son planteadas (operaciones, algoritmos, procedimientos). Por ejemplo, estandarizar la distribución muestral, sustituir datos y calcular la probabilidad en utilizando la distribución normal. En un ambiente computacional, puede ser modelar la población, tomar una muestra, calcular la media y acumular las

medias de muchas muestras, para ver en la distribución los valores más probables.

4. *Conceptos y propiedades (elementos conceptuales).* Son los conceptos y propiedades que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema. Ejemplos de ello serían que los estudiantes comprendan el efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad o en la variabilidad, el centro y la forma de las distribuciones muestrales (teorema del limite central).
5. *Argumentaciones (elementos validativos).* Se utilizan para validar, explicar o comunicar las acciones realizadas o los resultados obtenidos. Por ejemplo cuando se explica que la probabilidad de un resultado es mayor en una distribución que en otra como consecuencia del tamaño de la muestra, utilizando para ello una gráfica de ambas distribuciones.

En nuestra investigación centramos nuestra atención en estas unidades primarias como los entes que aportan los elementos de significado en el sistema de prácticas tanto institucionales como personales.

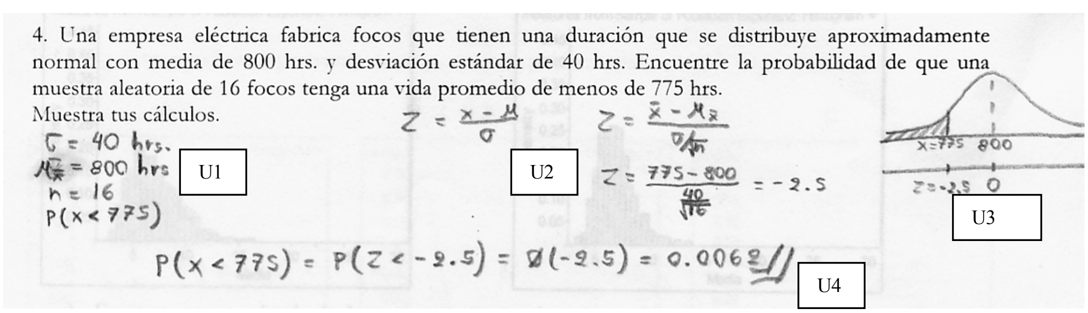
1.2.2 Funciones semióticas entre los elementos de significado

Las entidades primarias o elementos de significado que se han descrito en la sección anterior no aparecen aisladas en la actividad matemática, sino que se interrelacionan y se establecen correspondencias entre ellas durante la misma. Esto es una característica del trabajo matemático, pues las prácticas realizadas para la resolución de problemas pueden verse como una serie de actos y procesos interpretativos relacionados entre sí. Para tener en cuenta estas relaciones entre elementos se introduce en el modelo teórico la noción de *función semiótica.* Esta noción permite describir el razonamiento matemático (estadístico en nuestro caso) como secuencia de funciones semióticas encadenadas.

La noción de función semiótica se concibe como la correspondencia entre un antecedente (expresión) y el consecuente (contenido o significado) establecidas por un sujeto. El papel de expresión-significante y contenido-significado en las funciones semióticas puede ser desempeñado por cualquiera de las 5 entidades primarias descritas. De esta manera, la noción de función semiótica nos permite interpretar el conocimiento y la comprensión que de un objeto matemático, tiene un sujeto, en términos del contenido asignado a una expresión que el sujeto puede establecer en determinadas circunstancias en las cuales se pone en juego al objeto matemático. Cuando la interpretación que hace un alumno no está de acuerdo con lo esperado desde la institución de enseñanza, se produce un *conflicto semiótico* que explica muchas de las dificultades y errores observados en el aprendizaje.

Para ello, se realiza un *análisis semiótico* de un texto o las respuestas de los estudiantes, el cual consiste en descomponerlo en unidades de análisis, identificar las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. Una vez hecho esto, se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos. Estos conflictos semióticos pueden explicar las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensión matemática efectivamente puestas en juego (Godino y Arrieche, 2001).

Para ejemplificar lo anterior, consideremos la respuesta de un estudiante a un cuestionario con fines exploratorios sobre su comprensión acerca de las distribuciones muestrales que se aplicó a un grupo de estudiantes. El problema se ha dividido en cuatro unidades elementales de análisis (U1, U2, U3, U4).



En U1, el estudiante representa simbólicamente los datos del problema (media poblacional, tamaño de muestra, desviación estándar poblacional y el número de horas menor al cual se pide calcular la probabilidad) e identifica correctamente el intervalo en el cual se pide calcular la probabilidad (x<775), pero asigna erróneamente notaciones a la media poblacional ($\mu_{\bar{x}}$ en lugar de μ) y al valor límite a partir del cual se desea calcular la probabilidad (X en lugar de $\bar{X}$), lo que puede considerarse como acciones incorrectas. En U2 representa a la distribución muestral de la media mediante una expresión simbólica estableciendo correctamente los elementos y el orden de las operaciones que se involucran, realiza acciones como sustituir los datos del problema y calcular el valor de Z. En U3, imagina y construye adecuadamente la gráfica de la distribución poblacional teniendo en cuenta información del problema (la media, el valor a partir del cual se pide la probabilidad y la forma de la distribución) y sobre ella establece una correspondencia correcta entre los valores poblacionales y los valores de la distribución muestral estandarizada ($z = 0$ para $x = 800$ y $z = -2.5$ para $x = 775$), realiza acciones como sombrear el área correspondiente a la probabilidad pedida de manera correcta. Finalmente en U4, representa simbólicamente el rango de valores entre los que se pide calcular la probabilidad, estableciendo en ello de nueva cuenta la relación entre valores poblaciones y valores muestrales [$P(x < 775)$ y $P(z < -2.5)$]. Utiliza adecuadamente las tablas de probabilidad para la distribución normal estandarizada ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$), para arribar a la solución correcta del problema.

Como podemos ver, este estudiante ha establecido una serie de correspondencias (funciones semióticas) entre diversas entidades primarias o elemento de significado que puso en juego en la resolución del problema que se le planteó. Sus validaciones estuvieron basadas en el manejo de representaciones gráficas y simbólicas.

En resumen, la noción de función semiótica y la tipología de entidades primarias nos permitirán determinar o caracterizar los significados que los estudiantes ponen en juego en la actividad matemática y en el proceso de enseñanza y aprendizaje donde se involucra a las distribuciones muestrales.

1.2.3 Una agenda de investigación asociada al modelo teórico

En el Godino y Batanero (1998) se define una agenda de investigación para la educación matemática asociada al marco teórico que se propone. En ella, las preguntas de investigación se clasifican de acuerdo a dos dimensiones:

1. *El propósito de la investigación*.

Se distinguen tres categorías: La caracterización de los significados institucionales y personales (semiometría), el estudio de los factores que afectan el significado y el estudio de la interdependencia de los significados (ecología) y el estudio sobre el cambio de los significados a lo largo del tiempo (dinámica).

2. *El enfoque de la investigación.*

Un investigador podría estar interesado en el significado institucional (epistemología), el significado personal (cognición) o la interacción entre ambos (instrucción).

La intersección de las tres categorías del enfoque de investigación con las tres categorías del propósito de la investigación, da lugar a diversas preguntas de investigación, como se muestra en el siguiente cuadro:

	Propósito de la investigación		
Enfoque de la investigación	SEMIOMETRÍA (Medición, descripción)	ECOLOGÍA (Búsqueda de relaciones)	DINÁMICA (Estudio de los cambios)
EPISTEMOLOGÍA ANÁLISIS EPISTÉMICO (Significados institucionales**)**	¿Cuál es el significado institucional de O?	¿Cuáles son las relaciones de O con otros objetos? ¿Qué factores que afectan el significado institucional?	¿Cómo cambia el significado de O a través del tiempo?
COGNICIÓN ANÁLISIS COGNITIVO (Significados personales)	¿Cuál es el significado personal de O? ¿Qué significado personal es aplicado durante un proceso de resolución de problemas?	¿Qué relaciones establece la persona entre O y otros objetos? ¿Qué factores afectan el significado personal?	¿Cómo cambia el significado personal de los objetos en el tiempo como consecuencia de la instrucción?
INSTRUCCIÓN ANÁLISIS INTRUCCIONAL (Interacción entre	¿Cómo es organizada la instrucción de O?	¿Cómo diferentes factores afectan la instrucción? ¿Cómo diseñar la	¿Cómo se desarrolla la instrucción a través del tiempo?

significados institucionales y personales)		enseñanza teniendo en cuenta estos factores?	

Las primeras dos preguntas de investigación que nos hemos planteado en el presente trabajo (ver presentación de la investigación) se ubican en la categoría cognitiva del enfoque de la investigación con intersección en la categoría de semiometría, mientras que la tercer pregunta se ubica en la intersección de la categoría cognitiva con la de dinámica. Es decir, estamos interesados en determinar el significado personal de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales en un ambiente de estadística dinámica y el significado personal aplicado durante el proceso de resolución de problemas (semiometría de la cognición), así como el cambio del significado personal en el tiempo como consecuencia de la instrucción basada en simulación computacional.

De lo anterior se desprende que nuestro interés se centra más en los aspectos cognitivos que en los aspectos epistemológicos y de instrucción. Sin embargo, haremos uso de la categoría epistemológica en su intersección con semiometría cuando determinamos el significado institucional de referencia de las distribuciones muestrales.

1.3 La computadora como herramienta cognitiva

La otra componente del marco teórico que nos permitirá analizar los resultados de nuestra investigación tiene que ver con la forma como la computadora puede ser utilizada en el proceso de enseñanza de las matemáticas, y particularmente de la estadística. Específicamente, nos apoyaremos en un enfoque que considera a las computadoras como herramientas cognitivas, esto es, como medios para promover la actividad cognitiva de los seres humanos.

Pea (1987, p.91) sostiene que la inteligencia no es una cualidad de la mente sola, sino un producto de la relación de la relación entre estructuras mentales y herramientas del intelecto proporcionados por la cultura. Este argumento coincide con la posición de Vygotsky (1978), que ve al desarrollo cognitivo como un juego interrelacionado entre el desarrollo biológico y el ambiente social y cultural en el cual se ubica un individuo. Esto trae como consecuencia, que las experiencias educativas sean mediadas por el contexto del estudiante, el lenguaje de que dispone y la tecnología con la cual está familiarizado.

Para Pea (1987, p. 91) una herramienta cognitiva es cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, en el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. En una tecnología cognitiva se incluyen todos los sistemas de símbolos, como los sistemas de escritura, sistemas de notación matemática, y ahora, los nuevos lenguajes de computadora; pero igualmente una herramienta cognitiva puede ser un lápiz y papel, un pizarrón y un gis o una calculadora. Este autor sostiene que una característica común de las herramientas cognitivas es que vuelven externos, los productos intermedios del pensamiento, los cuales pueden ser analizados y discutidos. Particularmente, en el caso de las computadoras, constituyen una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente; con ellas se pueden operaron no solo números, sino también símbolos, y permiten almacenar y manipular símbolos dinámicamente y permiten interacciones con los usuarios en tiempo real.

Pea (1987) señala que hay una tendencia dominante en educación matemática donde se ve a las computadoras simplemente como *amplificadoras* de las capacidades humanas (metáfora amplificadora). Desde esta perspectiva, las computadoras son consideradas herramientas que permiten realizar tareas de una manera mucho más rápida y precisa, pero sin un cambio cualitativo en lo que antes se hacía. En cambio, sostiene que otra perspectiva consiste en ver a las computadoras como herramientas cognitivas, las cuales, cuando son usadas apropiadamente no sólo permiten amplificar las capacidades humanas, sino que tienen el potencial de provocar cambios estructurales en el sistema cognitivo de los estudiantes (metáfora reorganizadora) a través de una reorganización y transformación de las actividades que ellos realizan.

Apoyado en las ideas de Pea (1987), Dörfler (1993) propone un marco conceptual sobre el uso de la computadora en la educación matemática, el cual se basa en una concepción de la cognición humana que contempla los siguientes aspectos:

1. El proceso cognitivo tiene una base concreta y no está organizada únicamente por reglas formales o generales.
2. La cognición depende en buena medida de las herramientas disponibles y los medios: es vista como un ente distribuido sobre el sistema hecho por el individuo,

su contexto social y varios medios cognitivos disponibles (por ejemplo, los sistemas de símbolos como la escritura y números decimales; sistemas representacionales y herramientas de cálculo como la computadora). El desarrollo cognitivo por consiguiente es entendido no meramente como el desarrollo de la mente del individuo sino además como un desarrollo social de los medios disponibles y herramientas y su adquisición por el individuo a través de actividades estructuradas socialmente.

3. La cognición tiende a ser situada en el contexto en el sentido de que el contexto específico de los objetos, propiedades, relaciones, etc. son usados y explotados y pueden ser vistos como elementos sistémicos y partes del sistema cognitivo. Esto es conocido como cognición situada.

1.3.1 Reorganización cognitiva mediante el uso de herramientas computacionales

Dörfler (1993) identifica diversas formas en las que la introducción de una herramienta computacional en la enseñanza puede provocar una reorganización en el sistema cognitivo de los estudiantes:

1. **Cambio de las actividades a un nivel cognitivo más alto (meta-nivel).**

Cuando se trabaja con una herramienta con potencial para la enseñanza, puede cambiar partes importantes de las actividades, las tareas y los problemas que se abordan, a un nivel cognitivo más alto que el que ocurre en otro tipo de ambientes. Las computadoras apoyan acciones de un nivel cognitivo más alto mediante el resumen y simplificación de procesos complejos mediante entidades fácilmente manipulables. Para que esto ocurra es necesario un profundo conocimiento y experiencia sobre el modo de trabajar con la herramienta. Como ejemplos de actividades meta-nivel se pueden mencionar la escritura de un programa de computadora, pensar sobre los diversos etapas de cálculo que requiere un problema con relación a los cálculos mismos que realiza una máquina en forma automática, decidir sobre el grado de exactitud apropiado de un cálculo, la elección de escalas de una gráfica, comparar varias gráficas, adaptar la gráfica a necesidades especiales, etc.

Para mostrar lo anterior en el contexto de las distribuciones muestrales, ejemplificaremos una característica de Fathom que permite el desarrollo de actividades en meta-nivel.

Fathom requiere de la escritura de pequeños programas -por lo general con uno o dos instrucciones o comandos-, para realizar operaciones como generar la población (en algunos casos), calcular el estadístico en cada muestra y calcular la probabilidad de ciertos valores muestrales. Esta característica permite una comunicación directa del usuario con el software y es capaz de proporcionar retroalimentación de inmediato al usuario cuando se ha cometido un error o cuando el efecto de escribir el programa se refleja en algún resultado gráfico o numérico.

2. **Cambio de objetos con los que se realizan las actividades.**

El uso de herramientas tecnológicas trae consigo un cambio en los objetos con los que se trabaja. Por consiguiente, no solo cambian la estructura y la forma de la actividad, sino también el contenido. Por ejemplo, al utilizar un software estadístico, el conjunto de objetos se amplía y se consideran tablas con datos poblacionales, con datos muestrales, con medidas descriptivas, con valores de estadísticos, así como fórmulas y diferentes tipos de gráficas. Estas representaciones pueden llegar a ser objetos de la actividad cognitiva, al cambiar valores de parámetros, datos y escalas para ver su efecto en otros objetos con los que se encuentran ligados. Esta capacidad del software conlleva una reorganización de la actividad cognitiva y un cambio en el enfoque de atención a un nivel cognitivo más alto.

En Fathom, los objetos como la población, las muestras, el proceso de muestreo y sus resultados tienen un carácter concreto al existir en forma de iconos que muestran los datos dentro de ellos, así como en forma de tablas y gráficas, las cuales pueden ser manipuladas fácilmente para visualizar el efecto de cambiar un parámetro como el tamaño de muestra o la cantidad de muestras, en propiedades de la distribución muestral, como la forma y la variabilidad. Desde luego esto crea un ambiente distinto al que se genera en un ambiente de lápiz y papel, tanto en los objetos con los que se trabaja como en contenido que se aborda.

3. **Enfoca las actividades en transformación y análisis de representaciones**

Procesos que involucran resolución de problemas y otros procesos cognitivos muchas veces pueden ser guiados y organizados de manera exitosa por representaciones concretas, imágenes o modelos de la situación dada. Entonces, los procesos de pensamiento consisten esencialmente de transformaciones y manipulaciones de estas representaciones. Para apoyar este proceso la computadora ofrece una gran variedad de elementos gráficos, numéricos y simbólicos para la construcción y manipulación de representaciones. Por consiguiente el usuario puede construir en la pantalla de la computadora diversas representaciones de muchas situaciones, trabajar con ellas y analizarlas. Esto constituye una ventaja sobre los ambientes de papel y lápiz, incluyendo cambios flexibles e interactivos en las representaciones, como cambiar escalas, editarlas y transformarlas. Fathom permite todas estas operaciones, mencionaré una de ellas. Por ejemplo, se puede representar en un mismo sistema de ejes dos distribuciones para diferentes tamaños de muestra y ver el efecto directamente que esta tiene en la variabilidad de la distribución y en la probabilidad de ciertos resultados muestrales.

4. Apoya la cognición situada y resolución de problemas

El aprendizaje situado postula que un aprendizaje genuino se alcanza en la investigación de las cualidades, relaciones y elementos de situaciones en la que esté inmerso el aprendiz. La computadora puede apoyar tal modo de pensamiento y de resolver problemas a través de su faceta de simulación. Las computadoras pueden ayudar a los estudiantes a tender un puente entre estadística y realidad permitiendo el acceso al modelado de situaciones concretas y datos reales. El diseño de actividades cercanas al interés y conocimiento de los estudiantes, hace que al ser trabajadas con el software, las manipulaciones y los resultados tengan referencia concreta al contexto de la actividad y de esta manera los estudiantes sitúan su conocimiento.

Capítulo 2

ANTECEDENTES

En este capítulo daremos a conocer algunos antecedentes relacionados con el tema de investigación. Primeramente abordaremos aspectos relacionados con la dificultad e importancia de las distribuciones muestrales en la enseñanza de la inferencia estadística y como objeto de investigación, después discutiremos algunos antecedentes de investigación en los que se ha utilizado simulación computacional como recurso de enseñanza.

2.1 Las distribuciones muestrales, su importancia y fuentes de dificultad

La distribución muestral de un estadístico (por ejemplo, la media o la proporción) representa el valor que toma el estadístico en cada una de las muestras de igual tamaño que son posibles de extraer de la misma población. En este sentido, las distribuciones muestrales constituyen un recurso que permite responder la pregunta esencial que caracteriza a la inferencia estadística[1]: ¿Con qué frecuencia este método daría una respuesta

---

[1] Se refiere a la inferencia estadística clásica, también llamada frecuentalista, que consiste en observar el número de veces que se obtiene una respuesta correcta si el método de inferencia se utiliza una gran cantidad de veces en las mismas condiciones.

correcta si lo utilizara muchas veces en las mismas condiciones? (Moore, 1995, p. 234). Las distribuciones muestrales son, por lo tanto, un concepto fundamental para el estudio de la inferencia; como lo señala Lipson (2000):

> En inferencia estadística se requiere que los estudiantes reconozcan que la muestra con la que están trabajando es solo una, del conjunto potencialmente infinito de muestras que podrían ser extraídas de la población. Los estudiantes necesitan apreciar que para hacer una inferencia, la distribución de todas las muestras debe ser conocida o modelada (p. 36).

En este mismo sentido se expresa Biehler (1991):

> Dos aspectos del muestreo aleatorio que son particularmente relevantes son: ¿cómo extraer una muestra aleatoria de una población real? y el conocimiento teórico acerca del comportamiento de varias muestras aleatorias de la misma población . . . . Estos conceptos son difíciles de comprender, especialmente porque contienen la idea fundamental de incluir un solo evento (lo que actualmente está pasando) en un sistema de eventos hipotéticos (lo que podría haber pasado) (p. 106).

Sin embargo, las distribuciones muestrales constituyen un concepto difícil para muchos estudiantes, como lo señalan delMas, Garfield y Chance (1999a):

> Como profesores que hemos impartido cursos introductorios de estadística por muchos años hemos estado particularmente decepcionados de la incapacidad continua de nuestros estudiantes para explicar o aplicar su comprensión de distribuciones muestrales. Encontramos esta falta de comprensión particularmente problemática, ya que vemos el concepto de distribución muestral como crucial para la comprensión de la inferencia estadística (p. 1).

Las fuentes de dificultad asociadas a las distribuciones muestrales son de diversa índole. Por ejemplo, Chance, delMas y Garfield (2004, p. 295) sugieren que la dificultad en su comprensión se debe a que requieren la integración y combinación de muchas ideas de estadística, tales como distribución, muestra, población, variabilidad y muestreo. Lipson (2002), considera por su parte, que la dificultad en su compresión está asociada a la idea de muestra, al proceso de muestreo, así como a la diversidad de representaciones matemáticas y simbólicas que el concepto posee. Mientras que Saldanha y Thompson (2002), consideran problemático que los estudiantes tienden a enfocarse en muestras individuales y resúmenes estadísticos de ellas, en vez de enfocarse en cómo se distribuyen las colecciones de estadísticos muestrales. En este mismo sentido, Cox y Mouw (1992, p. 173) señalan que en su investigación sobre muestreo, la mayoría de sus sujetos de estudio vieron a una muestra como una representación fija y exacta de una población y no tuvieron claridad en ver a un estadístico como un estimador que resulta de una distribución muestral.

Por su parte, Moore (1992a) considera que en el nivel universitario, la estadística es vista más como una rama de las matemáticas que como una ciencia de los datos en contexto, cuyo objetivo es el estudio de la variación. Es por lo tanto frecuente en este nivel observar que los cursos sean más bien cursos de teoría de la probabilidad. En este mismo sentido se expresa Lipson (2002), cuando señala que tradicionalmente la idea de distribuciones muestrales ha sido introducida en los cursos de estadística a través de un enfoque deductivo basado en la teoría de la probabilidad.

Desde nuestra perspectiva, la complejidad y los pobres resultados que obtienen los estudiantes en la comprensión de las de las distribuciones muestrales, radica tanto en los diversos conceptos que se involucran, como en la forma que son abordados en la enseñanza; esto es, utilizando fórmulas de manera mecánica, sustituyendo en ellas los datos y utilizando tablas de probabilidad, sin una adecuada reflexión e interpretación de los resultados obtenidos.

2.2 La simulación computacional como herramienta de enseñanza.

En la literatura de educación estadística (Shaughnessy, 1992; Gordon y Gordon, 1992; Moses, 1992; Tanis, 1992; Moore, 1992b; Rossman, 1997, Batanero, 2001; Scheaffer, et al., 1998; Sánchez, 2002) se sugiere con frecuencia la utilización de simulación computacional para la enseñanza de las distribuciones muestrales, como un recurso que puede contribuir a la superación de dificultades y generar en los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos involucrados. En esta sección abordaremos algunas recomendaciones y los fundamentos que exponen diversos educadores e investigadores.

2.2.1 El significado de simulación computacional

De acuerdo con Gottfried (1984) la simulación es una actividad mediante la cual se pueden extraer conclusiones acerca del comportamiento de un sistema dado, estudiando el comportamiento de un modelo cuyas relaciones de causa y efecto son las mismas (o similares) a las del sistema original. En nuestro caso, nos centraremos en un tipo particular de simulación, como es la *simulación aleatoria*, en la cual el sistema al que se refiere Gottfried, consiste de situaciones que contienen elementos de incertidumbre (situaciones aleatorias).

Estamos interesados en situaciones aleatorias que pueden ser expresadas a través de un modelo matemático que puede ser codificado en lenguaje de computadora para ser experimentado por medio de ella; en tal caso, estaremos hablando de una *simulación computacional.* Este tipo de simulación (computacional y aleatoria) se fundamenta en el comando *random* que genera números en forma aleatoria de acuerdo con una distribución de probabilidad previamente establecida. En este sentido concebimos a la simulación de acuerdo con la metáfora de la caja de herramientas señalada por Sánchez y Yánez (2003), donde para construir modelos relacionados con situaciones aleatorias se ligan situaciones y problemas con comandos de software a través de modelos .

En una simulación, la experimentación siempre se realiza sobre el modelo, por tanto, éste debe ser una versión simplificada e idealizada de la situación que se desea modelar y debe contener las variables más representativas que determinan el comportamiento de la situación, para que sea posible experimentar con él y transferir los resultados en forma válida a la situación que se estudia.

En el caso de la simulación de distribuciones muestrales con Fathom, se puede decir que el proceso de experimentación consta de tres componentes:

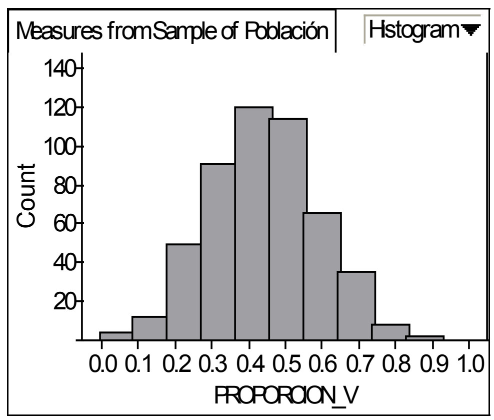
1. Establecer el modelo de la población.
2. Seleccionar una muestra de la población y calcular el estadístico de interés.
3. Tomar muchas muestras de la población y acumular los valores de los estadísticos calculados.

4. Interpretación de resultados.

En el paso 1 se crea una población a través de una representación computacional buscando que contenga las mismas propiedades esenciales de la población real, establecidas a través de parámetros como la tendencia central y la dispersión. En el paso 2, la opción de selección de una muestra, incluye de manera directa el comando *random*, sin necesidad de que sea programado por el usuario, y cuya función es seleccionar los elementos de la muestra en forma aleatoria y uniforme, sin embargo, el cálculo del estadístico, sí requiere introducir una expresión que determine su valor en la muestra seleccionada. En el paso 3, el software dispone de un cuadro de diálogo en el que se introduce la cantidad de muestras a seleccionar. La distribución muestral obtenida puede ser visualizada en una tabla de valores o en una gráfica como se muestra en la siguiente figura:

Measures from Sample of Población

	PROPORCION_V	<ne
493	0.4	
494	0.3	
495	0.5	
496	0.5	
497	0.6	
498	0.4	
499	0.2	
500	0.3	



Distribución muestral de una proporción en versión numérica y gráfica

2.2.2 Ventajas de la simulación computacional en la enseñanza de las distribuciones muestrales

Uno de los aspectos más relevantes en los que la computadora puede ser de gran utilidad para la enseñanza de la probabilidad y la estadística es la simulación de fenómenos aleatorios. A este enfoque se le atribuyen diversas ventajas respecto al enfoque teórico que ha prevalecido en la enseñanza de estas disciplinas, y en particular en tópicos de inferencia estadística como las distribuciones muestrales y el teorema del limite central. Por ejemplo, Krieger y Pinter-Lucke (1992, p. 198) señalan que mediante la simulación computacional se pueden abordar en forma eficiente conceptos como ley de los grandes números y el teorema del limite central, que no son nada intuitivos para los estudiantes. Estos conceptos pueden ser fácilmente ilustrados mediante simulación, porque involucran incrementos en tamaños de muestra y requieren muchas repeticiones antes de que el limite llegue a ser evidente.

Gordon y Gordon (1992, p. 208) señalan que el aprendizaje de la estadística tiene mucho que ver con el reconocimiento de patrones visuales, y en ello, la simulación computacional puede ayudar de forma significativa a mejorar la comprensión de los estudiantes de conceptos y métodos estadísticos. Por ejemplo, los estudiantes podrían predecir cualitativamente las conclusiones del teorema del limite central y las propiedades de la distribución muestral de la media basados exclusivamente en despliegues visuales. Con ayuda de las computadoras, la mayoría de los tópicos críticos en inferencia estadística pueden ser presentados usando simulaciones gráficas las cuales permiten a los estudiantes visualizar la distribución de muestreo y ver como se relaciona con la población de la que proviene.

Por su parte, Moses (1992, p. 107) señala: uno con frecuencia utiliza teoría de la probabilidad para atacar problemas de inferencia estadística, sin embargo, ésta no es la única herramienta útil, la simulación puede ser de mucha utilidad para clarificar el razonamiento analítico.

Biehler (1991, p. 173), señala dos áreas que con las computadoras han tenido un rápido desarrollo en probabilidad y estadística, estas son el análisis de datos y la simulación. Señala que los programas de computadora permiten ampliar los modelos de probabilidad a nuevos dominios vía modelos más complejos y más realísticos; opciones tales como cambiar los supuestos del modelo, hacer experimentos adicionales, cambiar la forma de generar y analizar los datos, solo es únicamente posible en ambientes computacionales. Señala además dos aspectos de la enseñanza de la probabilidad en los que la tecnología computacional con una metodología pedagógica apropiada puede ser de gran apoyo. Estos son la "*carencia de experiencia*" y como "*puente concepto-herramienta*". Respecto a la carencia de experiencia, señala que las computadoras pueden proporcionar mucho más experiencia en el manejo y representación de los datos a como sería posible en forma manual en el mismo período de tiempo. Por lo que se refiere al puente concepto-herramienta, indica que muchos problemas de matemáticas dependen tradicionalmente de la capacidad de cálculo de los estudiantes. Así, la computadora proporciona mediante la simulación una estrategia alternativa para la resolución de problemas y nos permite investigar situaciones más realistas que antes no eran posibles. .

Burrill (1998) por su parte, señala varias razones por las cuales la simulación es una herramienta poderosa en la enseñanza de la probabilidad y la estadística:

- Permite que los estudiantes experimenten con la variabilidad inherente de los fenómenos aleatorios.
- La comparación de diferentes distribuciones muestrales para el mismo estadístico ayuda a los estudiantes a comprender que conforme aumenta el número de repeticiones, la distribución adquiere una forma más regular.
- Permite reconocer cómo las restricciones de una situación, tales como el tamaño de muestra o el número de muestras generadas afecta un modelo de probabilidad.
- Permite explorar la variabilidad en diferentes diseños experimentales de recolección de datos estadísticos.
- Puede jugar un rol importante en la comprensión de técnicas de inferencia estadística como los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis.

Hay que tener en cuenta sin embargo que a pesar que las simulaciones computacionales son útiles en muchas situaciones didácticas, por sí mismas no pueden explicar el fenómeno que se estudia. Por lo tanto, para lograr una comprensión más profunda se requiere hacer uso de herramientas matemáticas que determinen la solución correcta (Bordier y Bergeron, 1998).

En el mismo sentido se expresa Biehler (1991, p. 186), “creemos que las ventajas de los métodos analíticos para explicar los fenómenos pueden ser más claras cuando se utilizan en conexión con la simulación”.

No obstante las ventajas que se le atribuyen a la simulación computacional en la enseñanza de conceptos estadísticos, existe en la literatura muy poca información que de cuenta de la forma como ésta herramienta está siendo utilizada en el salón de clases, ni cómo impacta en la comprensión de los estudiantes con base en resultados de investigación sistemáticos. Con relación a lo anterior, Mills (2002) efectuó una revisión de la literatura publicada de 1983 al 2000, sobre el uso de métodos de simulación computacional en la enseñanza de la estadística, con el propósito de conocer cómo se ha usado esta herramienta en la enseñanza; encontró 178 referencias en diferentes bases de datos usando las palabras "statistics" y "simulation", 18 de las cuales estaban estrictamente relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la estadística mediante métodos de simulación por computadora, y sólo una de ellas proporcionaba resultados empíricos de investigación. Esto demuestra que si bien muchos investigadores alientan el uso de los métodos de simulación en la enseñanza de conceptos estadísticos, son pocos los que aportan resultados acerca de su implementación en el salón de clase.

Los conceptos donde con mayor frecuencia se usa la computadora, encontrados en la investigación de Mills (2002), son el teorema del límite central, distribución t, intervalos de confianza, distribución binomial, análisis de regresión, distribuciones muestrales, prueba de hipótesis y encuestas por muestreo. Entre sus resultados destaca lo siguiente:

1. Los métodos de simulación están siendo usados en todas las áreas de la estadística para ayudar a los estudiantes a comprender conceptos difíciles.
2. El consenso global fue de que los métodos de simulación, ya sea física o con computadora, aparecen para facilitar la comprensión de los estudiantes de conceptos difíciles o abstractos.
3. Una de las mayores desventajas evidentes en la literatura fue la falta de investigación teórica y empírica que apoye tales recomendaciones.

En lo que respecta a distribuciones muestrales Mills señala:

> Los métodos de simulación computacional basados en un enfoque de aprendizaje constructivista son una poderosa técnica que puede proporcionar insight y una comprensión más completa de estadísticos y sus distribuciones. La mayoría de los estudiantes no ve que cada estadístico tiene una distribución de muestreo y usando simulación computacional puede ser una forma concreta para ilustrar esto, además para revelar como otros factores tales como el tamaño de muestra afecta la distribución de muestreo (p.13).

A manera de conclusión, Mills (2002) considera que el uso de estos métodos puede beneficiar a los estudiantes, pero estos deben ser evaluados y empíricamente documentados así como estar fundamentados en una teoría de aprendizaje.

2.3 Antecedentes de investigación sobre distribuciones muestrales y conceptos relacionados.

En este apartado resumiremos algunas investigaciones que se han llevado a cabo en torno a la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las distribuciones muestrales y su relación con la inferencia estadística. Estas investigaciones nos han servido como fuente de reflexión para el planteamiento de nuestro problema de investigación y la forma de llevarlo a cabo. Dichos trabajos se han realizado con estudiantes universitarios y han contemplado en su desarrollo a la simulación computacional, lo cual los ubica precisamente en nuestro núcleo de interés. De igual manera, haremos mención de algunos estudios sobre conceptos importantes que se encuentran estrechamente relacionados con las distribuciones muestrales, como es el caso del muestreo, la distribución normal y el teorema del limite central.

Han sido principalmente dos trabajos sistemáticos que hemos encontrado en una profunda revisión de la literatura efectuada en importantes revistas de educación matemática y estadística, memorias de congresos como ICOTS[1], PME[2], y en la sección de publicaciones y tesis doctorales de la página que la IASE[3] tiene en internet. Uno de ellos –el más citado de todos en la literatura- es el trabajo efectuado por delMas, Garfield y Chance (1999b) sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las distribuciones muestrales; el otro trabajo fue desarrollado por Lipson (2000) y trata sobre papel de las distribuciones muestrales en el desarrollo de la comprensión de la inferencia estadística.

La investigación de delMas y sus colaboradores se centró en la distribución muestral de la media y en aspectos que le relacionan con el teorema del limite central; mientras que el trabajo de Lipson se enfocó en el papel que juegan las distribuciones muestrales en la formación de esquemas de los estudiantes sobre la inferencia estadística y su relación con la

[1] International Conference on Teaching Statistics.
[2] Psychology of Mathematics Education.
[3] International Association Statistics Education (http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/).

comprensión procedimental y conceptual. A continuación daremos mayores detalles sobre cada uno de estos trabajos.

2.3.1 La investigación de delMas, Garfield y Chance

Estos autores señalan que el estudio fue motivado por la búsqueda de una comprensión más profunda de las distribuciones muestrales, ante la evidencia obtenida después de haber impartido muchos cursos bajo un enfoque tradicional, en los cuales los estudiantes desarrollaban una comprensión aislada y superficial de este concepto, y ante la incapacidad de aplicarlo en el razonamiento de conceptos de inferencia estadística. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de tres universidades en Estados Unidos y estuvo centrado en la comprensión de las propiedades de las distribuciones muestrales que las relacionan con el teorema del limite central, es decir, el objetivo era que los estudiantes comprendieran aspectos tales como la forma de la distribución muestral se aproxima a la distribución normal conforme aumenta el tamaño de muestra, la media de la distribución muestral es igual a la media de la población y la variabilidad de la distribución muestral disminuye conforme aumenta el tamaño de muestra.

Para ello desarrollaron materiales de enseñanza y un programa de computadora denominado *Sampling Distributions* (desarrollado por Robert delMas). Las actividades se enfocaban a aumentar gradualmente el tamaño de la muestra y que los estudiantes observaran los cambios producidos en la forma, centro y variabilidad de las distribuciones muestrales. Para evaluar la comprensión de los estudiantes se diseñaron preguntas basadas en gráficas y con énfasis en las medidas de centro y variabilidad.

Hasta cierto punto podemos decir que las simulaciones con el software son pre-construidas, pues las distribuciones poblacionales se eligen –no se construyen- de una lista previa (Fig. 1), se puede variar el tamaño de muestra y correr la simulación para un número grande de muestras de un tamaño dado. La distribución obtenida se puede ver cambiando a la ventana de distribuciones muestrales (Fig. 2). En esta ventana aparecen también medias descriptivas de la distribución muestral y es posible superponer a la distribución empírica la distribución teórica y la distribución de la población. Esto con el objeto de observar la diferencia entre la forma de la población y la distribución muestral, así como la aproximación de la distribución muestral teórica con la distribución empírica.

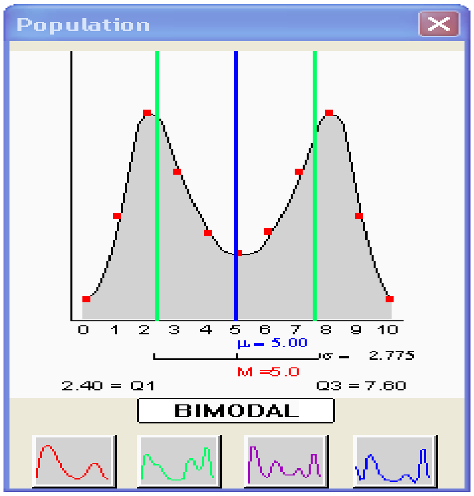


Fig. 1: Ventana de Poblaciones

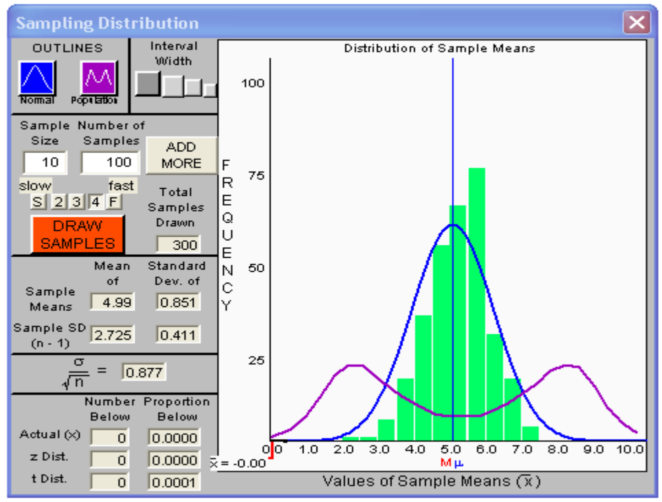


Fig. 2: Ventana de distribuciones muestrales

La investigación se desarrolló en varias versiones, en cada una de las cuales se iban modificando las actividades o el software para tratar de mejorar la comprensión de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales. En la primera de ellas apoyados en un modelo de investigación en salón de clase (investigación acción), los estudiantes fueron instruidos para que construyeran la distribución muestral de la media de diversas poblaciones, incrementando el tamaño de muestra desde 5 hasta 100 y extrayendo cada vez 500 muestras. Los estudiantes registraban la distribución muestral resultante para cada tamaño de muestra, describían su forma, dispersión y centro, relacionando estas observaciones con los parámetros y forma de la población.

Los instrumentos utilizados en esta primera versión fueron un pre-test al iniciar la actividad con la computadora y un pos-test al finalizarla. Cada examen constaba de cinco problemas, en cada uno de los cuales se presentaba el gráfico de la distribución de una población (Fig. 3) y cinco histogramas adicionales que representaban posibles distribuciones de medias muestrales para muestras aleatorias de la población dada (Fig. 4). Estas cinco distribuciones muestrales provenían de una distribución normal, una distribución asimétrica positiva y otra negativa, una distribución simétrica bimodal o trimodal y una distribución irregular. Los estudiantes debían seleccionar en cada problema el histograma que representaba a la distribución muestral correspondiente a la población para el tamaño de muestra dado.

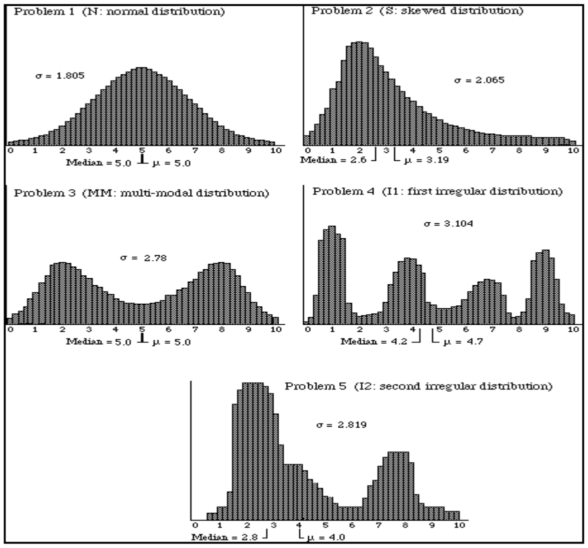


Fig. 3: Distribuciones poblacionales

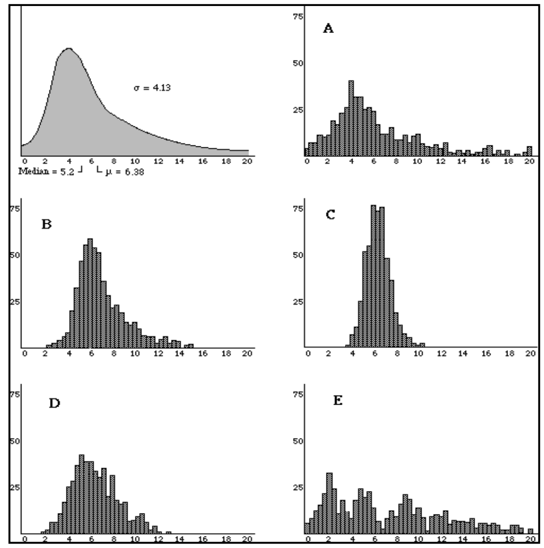


Fig. 4: Ejemplo de un ítem de evaluación

Los resultados de la primera versión mostraron un cambio positivo del pretest al postest, sin embargo un número significativo de estudiantes no pareció comprender las implicaciones básicas del teorema del limite central. Esto motivó a los investigadores a mejorar algunos aspectos del software y realizar una segunda versión basada ahora en un modelo de cambio conceptual que propone que los estudiantes que tengan concepciones erróneas o malos entendidos sobre un concepto necesitan experimentar una evidencia contradictoria antes de cambiar sus concepciones actuales. Las nuevas actividades tuvieron mayor énfasis en comparaciones de forma y dispersión que en el registro de parámetros y estadísticos y requirió que los estudiantes hicieran comparaciones directas de sus predicciones en el pretest con las distribuciones muestrales producidas por el programa. En esta etapa se identificaron por parte de los autores diferentes tipos de razonamiento en los sujetos de estudio:

- *Razonamiento correcto.* Los estudiantes escogieron los dos histogramas correctos de las distribuciones muestrales (para muestras pequeñas y muestras grandes).
- *Buen razonamiento.* Los estudiantes eligieron un histograma que se parecía a la distribución normal para un tamaño de muestra grande y con menor variabilidad que el histograma elegido para el tamaño de muestra pequeño, pero el histograma

elegido para una muestra de tamaño pequeño se parecía más a la población que a la distribución normal.

- *Razonamiento de grande a pequeño.* Los estudiantes eligen un histograma con menor variabilidad para el tamaño de muestra grande, pero eligieron un histograma con variabilidad similar que la de la población para $n > 1$, ó bien, ambos histogramas tenían la forma de la población.
- *Razonamiento de pequeño a grande.* Ocurrió cuando los estudiantes eligieron un histograma con mayor variabilidad para el tamaño de muestra grande.

Los resultados positivos de esta versión se incrementaron notablemente en cuanto a la comprensión conceptual de las distribuciones muestrales y su relación con el teorema del límite central. El promedio de estudiantes con razonamiento correcto ó buen razonamiento cambió de 16% en el pretest a 72% en el postest, comparado con el 22% del pretest al 49% del postest de la primera versión. Sin embargo, a pesar de que hubo un cambio significativo del pretest al postest, y no obstante que las actividades estaban dirigidas a la comprensión de las implicaciones del teorema del límite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales muchos estudiantes siguieron sin comprender esas implicaciones.

En una tercera versión, de nueva cuenta el software fue modificado, agregándole algunos elementos como una "ventana de muestras" que permitiera ver la distribución y el estadístico para cada muestra seleccionada. Esta modificación se hizo con la finalidad de que los alumnos distinguieran la distribución de una sola muestra de una distribución muestral, ya que en las versiones anteriores, muchos parece que aplicaron el conocimiento de las muestras individuales a las distribuciones muestrales. En cuanto a las actividades, estas fueron contextualizadas, ya que en las versiones previas se presentaron distribuciones de poblaciones hipotéticas sin una motivación real sobre lo que las distribuciones representaban. Los resultados de esta versión no fueron mejores a los de la versión anterior. Los autores sugieren que la nueva actividad y el software fueron más complejos y demandaban mucha atención de los estudiantes en nuevos aspectos del software como calculo de estadísticos y hacer comparaciones que en las versiones previas no existían.

La conclusión de los autores es que una presentación sencilla y clara no conduce necesariamente a una sólida comprensión de las distribuciones muestrales, además, mientras un software puede proporcionar los medios para experiencias ricas en el salón de clase, las simulaciones computacionales por sí solas no garantizan el cambio conceptual. Señalan que es necesaria más investigación para avanzar hacia la comprensión de cómo los estudiantes aprenden conceptos estadísticos.

Con relación a este último aspecto que involucra las representaciones del concepto, una dificultad que se puede presentar con el uso de algunos programas de software, es señalada por (Lipson 2002, p.1):

> Las simulaciones computacionales de distribuciones muestrales tienden a dirigirse únicamente a la representación empírica del concepto y deja de lado la conexión de representaciones al usuario, y es precisamente el desarrollo de estas conexiones, un paso crítico para el desarrollo de la comprensión de la inferencia estadística.

Consideramos que el estudio de delMas, Garfield y Chance (1999a, 1999b) presenta algunas limitaciones que señalamos a continuación:

- El enfoque es más hacia una búsqueda en mejorar la enseñanza del concepto para lograr una comprensión más profunda a como sería posible en una enseñanza basada en papel y lápiz; no se plantean por lo tanto preguntas de investigación que el estudio deberá contestar.
- Abordan sólo el concepto de distribución muestral de la media y dejan de lado la distribución muestral de otros estadísticos sumamente importantes (por ejemplo, la proporción).
- La modalidad de su software no permite al estudiante construir por sí mismo las distribuciones poblacionales y las distribuciones muestrales, es decir, el estudiante no tiene acceso a representaciones simbólicas para generar las distribuciones, sólo requiere pulsar ciertos botones para obtener los resultados. Carece además de representaciones tabulares con los resultados empíricos y se centra solo en las medidas descriptivas y representaciones gráficas como los histogramas.

Sin embargo, vemos que el diseño de sus actividades contiene elementos importantes para promover una adecuada comprensión del concepto en los estudiantes, por lo que pretendemos retomar algunos lineamientos de su diseño y adecuarlo a un software más rico en representaciones –como sería el caso de Fathom- y que fomente una mayor actividad en los estudiantes para desarrollar el proceso de construcción de las distribuciones muestrales.

2.3.2 La investigación de Lipson

El trabajo de investigación realizado por Lipson se centró en el papel que juega el concepto de distribuciones muestrales en el desarrollo de la comprensión de la inferencia estadística, apoyándose en actividades basadas en simulación computacional y analizando los esquemas que los estudiantes desarrollaron a lo largo de las actividades de enseñanza. La hipótesis fundamental que guió su investigación fue:

> Los estudiantes cuyos esquemas para distribuciones muestrales tengan conexiones con el proceso de muestreo y cuyos esquemas para inferencia estadística incluyan conexiones con las distribuciones muestrales, pondrán en evidencia la comprensión tanto conceptual como procedimental en inferencia estadística, mientras que aquellos estudiantes que no integren estos conceptos en su estructura cognitiva pueden mostrar altos niveles de comprensión procedimental pero no de comprensión conceptual (p. 7).

Los sujetos de estudio de Lipson fueron estudiantes de nivel de posgrado que tomaban un curso introductorio de estadística y sus antecedentes matemáticos eran pocos o prácticamente nulos. Los paquetes computacionales usados fueron *Sampling Laboratory* (Rubin, 1990) y *Model´s´nData* (Stirling, 1991), los cuales proporcionan representaciones dinámicas ligadas al proceso de muestreo y la formación de distribuciones muestrales. Una pantalla de *Sampling Laboratory* se muestra en la Figura 5.

En este software el usuario no requiere programar y simplemente se introduce alguna información como la estructura de la población, el tamaño de la muestra y la cantidad de muestras a extraer. Se despliegan simultáneamente la forma de la población, la gráfica de la muestra extraída y la distribución muestral que se va construyendo conforme se van extrayendo las muestras. De esta manera, el proceso de muestreo puede ser observado en tiempo real y los estudiantes ven la forma que la distribución muestral va adquiriendo conforme aumentan las muestras.

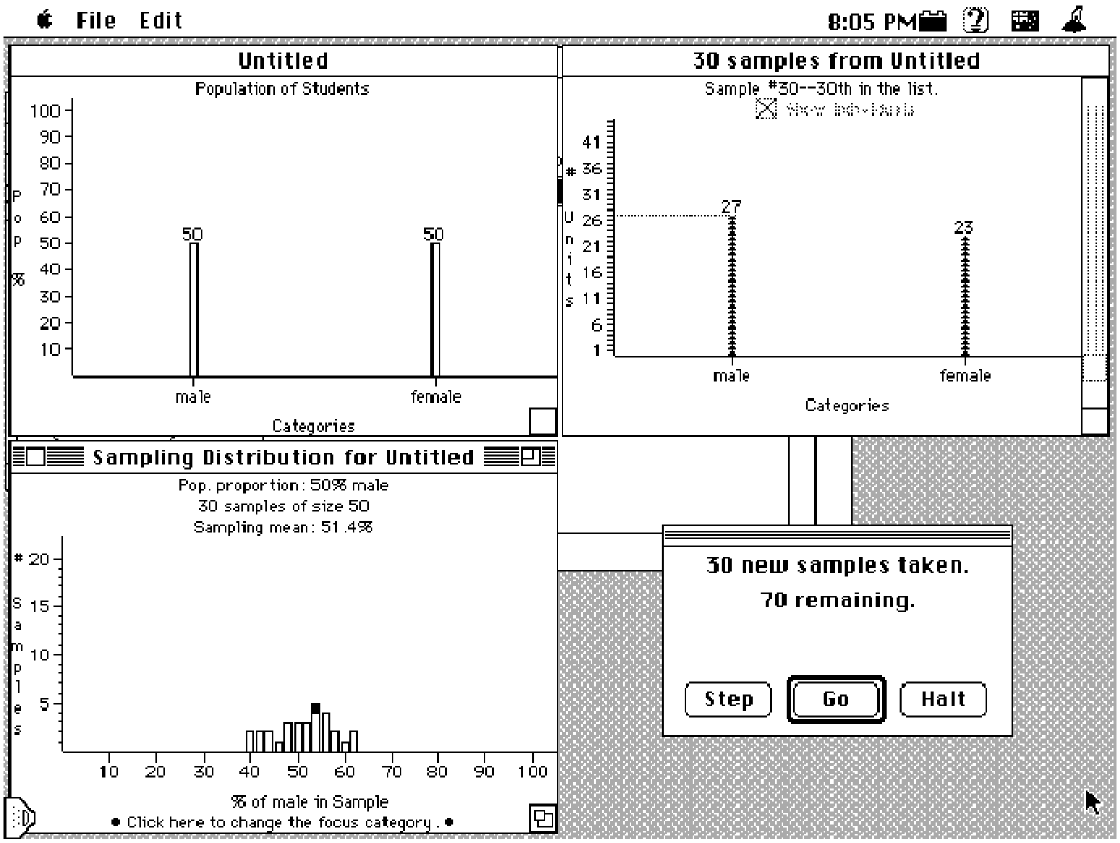


Fig. 5: Pantalla de Sampling Laboratory (tomada de Lipson, 2000)

La evaluación del desarrollo de los esquemas de los estudiantes se llevó a cabo por medio de 6 mapas conceptuales, comparando en cada una de las etapas del experimento de enseñanza los mapas construidos por ellos con mapas "expertos" que contenían los diferentes conceptos y relaciones de lo que debe ser un esquema adecuado; estos fueron construidos previamente por el investigador. La evaluación de los mapas de los estudiantes se hizo con base en el número de proposiciones clave identificadas para cada mapa experto y de acuerdo al investigador son de fundamental importancia para la formación de un esquema adecuado de comprensión, además al final del experimento se evaluó el éxito de los estudiantes en términos de comprensión procedimental y conceptual. Por ejemplo, el mapa conceptual para distribuciones muestrales contenía las siguientes proposiciones:

- Las muestras son seleccionadas de poblaciones

- Las poblaciones (distribuciones) son descritas por parámetros.
- Los parámetros son constantes
- Las muestras son descritas por estadísticos
- Los estadísticos son cantidades variables
- La distribución de un estadístico es conocida como distribución muestral
- La distribución de un estadístico es aproximadamente normal*
- La distribución de un estadístico es caracterizada por su forma, centro y dispersión
- La dispersión de una distribución muestral está relacionada con el tamaño de muestra
- La distribución muestral está centrada en el parámetro poblacional

En los resultados obtenidos en el mapa correspondiente a distribuciones muestrales la mayoría de los estudiantes (87%) entendieron la relación entre poblaciones y muestras, que el parámetro expresa las características de una población (91%), y que las distribuciones muestrales son descritas por estadísticos (83%). Además el 61% identificó correctamente al estadístico como una variable, -un concepto fundamental cuando se construye un esquema para distribuciones muestrales-, y el 48% observó que la distribución muestral estaba caracterizada por la forma, centro y dispersión. En cambio únicamente el 35% relacionó la variabilidad de la distribución muestral con el tamaño de muestra, sólo el 9% notó que la distribución muestral estaba centrada en el parámetro poblacional y sólo el 9% observó que la distribución muestral del estadístico puede ser modelada por una conocida distribución de probabilidad.

Analizando los resultados anteriores observamos que si bien los estudiantes tuvieron claras varias de las proposiciones claves incluidas en el mapa “experto” de distribuciones muestrales, no lograron claridad en varias de las proposiciones fundamentales para la construcción de un esquema adecuado sobre distribuciones muestrales. Al respecto, Lipson (2000) señala:

> La identificación del centro y la variabilidad de la distribución muestral y la relación de esta con la población y el tamaño de muestra, son fundamentales para la aplicación de un modelo

* Esto no siempre es cierto, pero lo será para los estadísticos que consideramos aquí (media y proporción).

> teórico de distribución y la interpretación de los resultados de inferencia. Sin embargo los resultados muestran que muchos estudiantes no entendieron estas ideas (p. 5).

En cuanto a la conexión de las distribuciones muestrales con tópicos de inferencia estadística se tiene que sólo el 30% explicitó la relación entre las distribuciones muestrales y la determinación del p-valor en las pruebas e hipótesis, y sólo el 13% tuvo clara la relación de las distribuciones muestrales en la determinación de los intervalos de confianza. El autor señala que esta falta de conexión de debe a lo inadecuado o incompleto de los esquemas de los estudiantes.

Un análisis cualitativo de los mapas construidos por los estudiantes llevó al autor a la categorización de sus sujetos de estudio en tres grupos:

Grupo 1: Los estudiantes mostraron evidencia del desarrollo del concepto de distribución muestral e integraron este concepto apropiadamente a sus esquemas para inferencia estadística.

Grupo 2: Los estudiantes mostraron evidencia del desarrollo del concepto de distribución muestral pero no relacionaron este a su esquema para inferencia.

Grupo 3: Los estudiantes en ninguna etapa mostraron evidencia del desarrollo del concepto de distribución muestral.

Algunas implicaciones de la investigación para la enseñanza de la estadística destacadas por el autor son las siguientes:

- Existe evidencia de una mejoría en la comprensión, producto de mantener y moverse entre representaciones de un concepto, en este caso la representación teórica y empírica de distribuciones muestrales. Esto sugiere que las estrategias de enseñanza del concepto deben esforzarse por mantener ambas representaciones.
- Se identificaron concepciones erróneas que los estudiantes desarrollaron en relación con la distinción entre la distribución de una muestra (*distribución de la muestra*) y la distribución del estadístico en todas las muestras (*distribución muestral*). Como resultado, se sugiere una estrategia de enseñanza que identifique explícitamente y

discuta las distribuciones de la población, de la muestra y del estadístico muestral.

- Se encontró que muchos estudiantes exhibieron altos niveles de comprensión conceptual con el uso de la tecnología en áreas donde ellos no habían asumido cálculos previamente, lo cual sugiere que la familiaridad con los cálculos no es una etapa importante en el desarrollo del proceso de la comprensión.
- Contrario a la creencia popular, se encontró que la comprensión conceptual no resulta de manera automática de la interacción de los estudiantes con un paquete de software, aún en aquellos diseñados específicamente para apoyar el desarrollo de tal comprensión. Sin embargo, los resultados muestran que algunos estudiantes experimentaron una reorganización cognitiva con tales interacciones y se requiere mas investigación para explorar la naturaleza de tales cambios y cómo se relacionan con las experiencias de enseñanza de los estudiantes.
- El estudio ha confirmado la creencia de muchos educadores estadísticos que la comprensión conceptual no necesariamente va acompañada de comprensión procedimental en inferencia estadística y que son necesarios nuevos instrumentos de evaluación.

El trabajo desarrollado por Lipson tiene algunas similitudes con lo que planteamos en nuestro proyecto de investigación. Para empezar compartimos la misma temática (distribuciones muestrales), mismo nivel (universitario) y el uso de herramientas (simulación computacional) en un ambiente de estadística dinámica. Sin embargo, los objetivos de investigación son diferentes. Lipson se plantea como objetivo mostrar que las distribuciones muestrales es un concepto importante para el desarrollo de la comprensión de conceptos de inferencia estadística, esto a través de la formación de esquemas en los estudiantes. Por su parte nosotros nos planteamos diversas preguntas relacionadas con el significado que los estudiantes le atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional, la forma en que resuelven problemas donde éstas se involucran y si existe una evolución en los significados producto de la interacción con el software. Sin embargo, nos parecen útiles para nuestro trabajo algunos de sus resultados y sugerencias, las cuales las tomaremos en cuenta tanto en el diseño de las actividades como en el desarrollo del estudio. Una lista de ellos la mostramos a continuación:

- Mantener y moverse entre representaciones del concepto, en este caso, la representación teórica y empírica de distribuciones muestrales.
- Incorporar en la estrategia de enseñanza explícitamente las distribuciones de la población, de la muestra y del estadístico muestral, con el fin de evitar confusiones entre ellas.
- Distinguir conceptos que pertenecen al ámbito poblacional de conceptos que pertenecen al ámbito muestral.

2.3.3 Otras investigaciones sobre distribuciones muestrales

Hodgson (1996) llevó a cabo un estudio para conocer más acerca de la influencia de actividades a mano en la comprensión de los estudiantes en conceptos como distribuciones de probabilidad, distribuciones muestrales y el teorema del limite central. Sus sujetos de estudio fueron estudiantes graduados que se encontraban en pre-servicio para ser profesores, incluso algunos de ellos ya habían impartido clases de estadística, sin embargo, el pretest aplicado a los estudiantes reveló que su comprensión conceptual de la estadística era incompleta, ausente y en algunos casos completamente errónea.

Antes de la simulación con computadora en un programa desarrollado por el autor, los estudiantes extrajeron muestras físicamente de una población de pedazos de papel numerados contenidos en un recipiente, empezando con tamaño de muestra pequeños y después con tamaños más grandes, construyeron la distribución muestral de las medias de los números e hicieron inferencias acerca de la media de la población.

El programa permitía seleccionar una población, el tamaño de muestra, calculaba las medias muestrales y graficaba la población y el polígono de frecuencias que representaba a la distribución muestral de medias; de esta forma los estudiantes podían comparar el centro y la dispersión de la distribución muestral con la distribución de la población. Adicionalmente los estudiantes podían variar el tamaño de muestra y observar su efecto en la variabilidad. En teoría, una comprensión del teorema del límite central surgió cuando los estudiantes observaron los resultados generados por muestras de tamaño grande y un gran número de repeticiones.

Los resultados obtenidos en cuanto al concepto de distribuciones muestrales señalan que los estudiantes exhibieron tanto comprensión como malos entendidos. En relación con lo último, muchos estudiantes creyeron que las distribuciones muestrales son empíricas más que distribuciones teóricas de medias muestrales. Hodgson cita la explicación de un alumno como resultado de la influencia de las actividades:

> "Yo aprendí que la distribución muestral de la media es una distribución de medias muestrales, que su centro es la media de la población y que su varianza disminuye conforme el tamaño de muestra se incrementa. La media muestral es un buen estimador de la media, especialmente si el tamaño de muestra es grande......" (p. 244).

Se puede observar en la respuesta de este alumno algunas concepciones correctas acerca de las distribuciones muestrales:

1. Distribuciones muestrales de la media son distribuciones de medias muestrales.
2. Las distribuciones muestrales están centradas en la media poblacional.
3. La varianza de las distribuciones muestrales está inversamente relacionada con el tamaño de muestra.

Por su parte, Meletiou-Mavrtotheris (2004) desarrolló un experimento de enseñanza con el propósito de explorar las capacidades y el potencial un ambiente de estadística dinámica denominado Fathom, -el mismo software que nosotros empleamos en este trabajo- para introducir a los estudiantes a las nociones de distribuciones muestrales e inferencia estadística. El estudio explora las diferentes formas en la cual se puede desarrollar la comprensión de los estudiantes como resultado de interactuar con esta nueva herramienta tecnológica.

La motivación del experimento surgió de un estudio previo con estudiantes de colegio que habían completado un curso introductorio de estadística donde se utilizó el software Minitab, y en el cual, los estudiantes desarrollaron una pobre comprensión de inferencia estadística. En este estudio, las actividades de simulación se proponían estimular a los estudiantes a estudiar el comportamiento y propiedades de las distribuciones muestrales enfocándose en lo que pasa cuando varía el parámetro poblacional, el tamaño de la muestra o ambos. A pesar de ello, los resultados no fueron exitosos en ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender el proceso como se forma una distribución muestral. En opinión de la investigadora, los resultados obtenidos se atribuyen a que el software (Minitab) sigue un enfoque convencional para construir la distribución muestral, en el cual el software es considerado como una "caja negra"; Después de introducir los parámetros, se muestran de inmediato los resultados, dejando al usuario la imaginación del proceso de construcción de la distribución muestral.

El experimento se llevó a cabo con 5 estudiantes universitarios voluntarios que estaban tomando un curso introductorio de estadística y que habían participado en el estudio previo donde se utilizó Minitab. Los resultados de este estudio sugieren que un enfoque informal a la inferencia estadística empleando ambientes de estadística dinámica tales como Fathom, pueden ser más efectivos que ambientes convencionales en este tópico. La autora señala que el uso de este software en la clase de estadística tiene diversas implicaciones, entre las que destaca sus características dinámicas, interface amigable con el usuario, apoyo a visualizaciones, representaciones constructivas.

2.3.4 El teorema del límite central

En relación con la comprensión del teorema del límite central y los diversos conceptos y procedimientos implícitos en él, Méndez (1991) llevó a cabo un estudio sobre la comprensión de este teorema en alumnos universitarios e identifica cuatro propiedades básicas que deben entenderse para lograr una comprensión del teorema:

1. La media de la distribución muestral es igual a la media de la población de donde proviene.
2. La varianza de la distribución muestral es menor que la varianza de la población, cuando el tamaño de muestra es mayor a 1.
3. La forma de la distribución muestral tiende a ser aproximadamente normal a medida que se incrementa el tamaño de muestra, independientemente de la forma de la distribución en la población.

4. La forma de la distribución muestral incrementa su altura y decrece en su anchura a medida que se incrementa el tamaño de muestra.

Para evaluar la comprensión del teorema, usó mapas conceptuales donde representó el conjunto de conocimientos implícito en el teorema del limite central y las cuatros propiedades anteriores como base de un modelo mental de expertos sobre el teorema central del límite. Definió para ello dos niveles de comprensión:

1. El primer nivel está definido por las habilidades y conocimientos requeridos para resolver los ejercicios presentados en los libros de texto.
2. El segundo nivel representa aspectos adicionales de conocimientos que generalmente no están incluidos en los libros de texto.

Señala que la comprensión del teorema se limita al nivel 1 y es excesivamente formal. Los estudiantes no son capaces de dar una explicación intuitiva de su significado o aplicarlo a casos reales.

2.3.5 Prueba de hipótesis

En cuanto al contraste de hipótesis estadísticas, Vallecillos y Batanero (1997) llevaron a cabo un estudio sobre las dificultades de comprensión de estudiantes universitarios sobre algunos conceptos claves del contraste de hipótesis estadísticas tales como nivel de significación, hipótesis nula y alternativa, parámetro y estadístico, así como sobre la lógica global del contraste de hipótesis. La hipótesis planteada en su investigación era que los problemas de aplicaciones incorrectas o interpretaciones erróneas de los resultados del contraste de hipótesis, tienen origen en una deficiente comprensión e interpretación de otros conceptos clave en el contraste de hipótesis y no sólo el nivel de significación. Los resultados que obtuvo se muestran a continuación:

En cuanto a la interpretación del nivel de significación, Vallecillos concluye que son dos las causas principales que influyeron en que los sujetos de estudio interpretaran incorrectamente este concepto:

1. *Concepción del contraste de hipótesis como una prueba probabilística de la hipótesis*, o sea que los alumnos tienen la creencia de que el contraste de hipótesis es un procedimiento que permite el cálculo inductivo de la probabilidad a posteriori de la hipótesis en función de los datos.
2. *La falta de apreciación de la idea de estadístico como variable aleatoria*, de la dependencia de su distribución en función de la hipótesis y de la relación de esta distribución con el nivel de significación.

De acuerdo con las autoras, la última causa genera otras dificultades y confusiones en los estudiantes que se señalan a continuación:

- Creencia de los estudiantes de que una hipótesis puede referirse indistintamente a una población o a una muestra.
- Confusión entre estadístico muestral y parámetro poblacional. Esto posiblemente también a la falta de comprensión del papel de la distribución del estadístico en el proceso.
- Deficiente comprensión de la relación entre la distribución del estadístico como función de la hipótesis nula y la posibilidad de rechazar erróneamente un porcentaje de hipótesis nulas ciertas.

Por lo tanto, *es la falta de apreciación de un estadístico como variable aleatoria, de la dependencia de su distribución en función de la hipótesis y de la relación de esta distribución con el nivel de significación,* lo que mayor interés reviste para nuestro trabajo.

2.3.6 Muestreo

El muestreo es un aspecto importante cuando se desean hacer inferencias sobre parámetros poblacionales, de hecho, determina en buena medida la validez de la inferencia. El concepto de muestreo está inmerso en el concepto de distribuciones muestrales, por lo cual nos ocuparemos de él en esta sección.

Dos nociones importantes aparentemente antagónicas que coexisten en el razonamiento estadístico relacionado con el muestreo y que muchas veces son fuente de dificultades en los estudiantes es la *representatividad muestral* y la *variabilidad muestral* . La representatividad muestral sugiere que una muestra tomada de una población deberá tener características similares a las de la población de donde fue extraída; por su parte, la variabilidad muestral sugiere que no todas las muestras de una misma población son iguales entre sí. Una de las claves para la comprensión de la inferencia estadística es balancear estas dos ideas (Rubin, Bruce y Tenney, 1990, p. 315).

Estos autores realizaron una investigación sobre las concepciones que estudiantes de bachillerato tienen sobre estos conceptos y en sus preguntas relacionaban el muestreo con la inferencia estadística. Las respuestas de los sujetos de estudio indicaron una falta de experiencia *para pensar en términos de distribución de muestras generadas de una población* en particular. En cambio, ellos usaron heurísticas como la de representatividad para juzgar la probabilidad de una muestra particular.

Otros estudios que tienen que ver en parte con concepciones erróneas sobre el muestreo y que son frecuentemente referenciados en la literatura, son los que han desarrollado Kahneman, Slovic y Tversky (1982a). Estos autores atribuyen estos errores al empleo de principios heurísticos que reducen la complejidad de un problema a simples juicios valorativos. Es decir, las personas que hacen uso de heurísticas, simplifican el problema desatendiendo información importante que puede ser relevante para su solución. Aunque estas heurísticas son bastante útiles en general, algunas veces conducen a severos y sistemáticos errores (Tversky y Kahneman, 1982a, p. 3).

De las diferentes heurísticas identificadas por los autores, la heurística de *representatividad* es la que interesa en nuestro caso, por estar ligada al proceso de muestreo e inferencia.

Heurística de representatividad

Para evaluar la probabilidad de obtener un resultado particular en una muestra extraída de una población específica, las personas aplican frecuentemente la heurística de representatividad. Esta heurística consiste en estimar la probabilidad de obtención de una muestra con base en el parecido que posee con la población de la que fue extraída. Las personas que hacen uso de este tipo de razonamiento consideran que la muestra debe reflejar las propiedades de la población. Si bien, esto debe ser cierto para una muestra de tamaño grande, no necesariamente lo será para una muestra de tamaño pequeño. Se crea así un sesgo conocido como *insensibilidad al tamaño de muestra,* y que consiste en tener una excesiva confianza en muestras pequeñas. Esto es, evalúan la probabilidad de un resultado muestral por la similaridad de este resultado con el parámetro correspondiente. Entonces, la probabilidad obtenida para el estadístico será independiente del tamaño de muestra, lo cual conduce a que las personas produzcan distribuciones idénticas.

A propósito de lo anterior, Tversky y Kahneman (1982a) citan un el ejemplo en el cual se les planteó a un grupo de estudiantes que obtener la probabilidad de que la altura media en una muestra aleatoria de 10 hombres sea mayor a 6 pies; los sujetos asignaron la misma probabilidad para muestras de tamaño 10, 100 y 1000 hombres, lo cual es totalmente incorrecto. Estos sujetos fallaron al apreciar el papel del tamaño de muestra a pesar de que este aspecto fue enfatizado en la resolución de este problema, señalan los autores.

Otro sesgo al que conduce el uso de la heurística de representatividad tiene que ver con concepciones erróneas sobre el azar. Las personas esperan que una secuencia de eventos generada por un proceso aleatorio representa las características esenciales del proceso, aún cuando la secuencia sea corta. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda, las personas que hacen uso de la heurística de representatividad consideran que la secuencia A S A S S A es más probable que las secuencias A A A S S S y A A A A S A, pasando por alto, que al nivel de eventos elementales, las 64 secuencias posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir. Entonces, las personas esperan que las características esenciales del proceso se reproduzcan no solo a nivel global sino también localmente en la secuencia.

Un sesgo más que se introduce en el uso de ésta heurística tiene que ver con la representación que los estudiantes tienen sobre secuencias aleatorias. Es común que las personas crean que después de una racha de un mismo resultado al lanzar una moneda debe seguir otra racha del otro resultado para compensar y lograr la simetría. A este tipo de sesgo se le ha llamado *recencia negativa,* comúnmente conocido como *falacia del jugador*, que consiste en esperar intuitivamente en una serie de juegos que aumente la probabilidad del resultado contrario. Estos alumnos pasan por alto la independencia de los ensayos.

Tversky y Kahneman (1982b) señalan que estas concepciones erróneas se presentan incluso en investigadores experimentados. Una investigación con investigadores del área de psicología reveló la persistencia de la creencia en lo que se puede llamar "ley de los pequeños números" de acuerdo con la cual aún muestras pequeñas se consideran altamente representativas de poblaciones de las cuales han sido extraídas. Una excesiva creencia en la "ley de los pequeños números" trae consigo incorrectas intuiciones acerca del nivel de significación, potencia de las pruebas y los intervalos de confianza.

2.3.7 La distribución normal

La distribución normal es otro concepto de suma importancia que está ligado en forma estrecha a las distribuciones muestrales y a la inferencia estadística; su importancia se debe a que muchos fenómenos del mundo real pueden ser adecuadamente modelizados mediante ella. La distribución normal es también una buena aproximación de otras distribuciones, como la binomial, Poisson o t-student, para ciertos valores de sus parámetros.

El teorema del limite central asegura que la media y otros estadísticos que se definen como una suma de variables tienen una distribución aproximadamente normal para muestras de tamaño grande, incluso en poblaciones no normales, y muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación. En la opinión de Batanero, Tauber y Sánchez (en prensa), a pesar de esta importancia, no se ha encontrado un estudio sistemático de los errores y dificultades de aprendizaje referidos a este tema y los antecedentes con relación al aprendizaje de la inferencia estadística en alumnos universitarios son escasos.

Tomando como base lo anterior, Tauber (2001) se plantea como trabajo doctoral una investigación sobre la construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos en un ambiente computacional. El estudio lo lleva a cabo con estudiantes universitarios utilizando para ello el software Statgraphics. Los campos de problemas a los que se enfoca y de los cuales en su resolución surge la idea de distribución normal son:

- Ajuste de una curva al histograma o polígono de frecuencias en una distribución de datos empíricos como modelo teórico aproximado.
- Aproximación de distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores, por ejemplo en la distribución binomial para valores grandes del parámetro *n.*
- Obtención de distribuciones en el muestreo de la media y otros estadísticos de poblaciones no necesariamente normales para muestras grandes (distribuciones asintóticas).
- Estimación por intervalos de confianza.

Tauber (2001) señala que su investigación aporta una primera información sobre cuáles son los elementos de significado que proporcionan mayor dificultad de comprensión para los estudiantes en la distribución normal. Entre estos se destacan los siguientes:

- Interpretación de áreas en histogramas de frecuencia y problemas en el cálculo del área dentro de un intervalo, cuando ello implica el cambio de los extremos de los intervalos.
- Dificultad en discriminar los casos en que una variable cuantitativa discreta puede y no puede ser aproximada por una distribución continua y las implicaciones que esta aproximación tiene.
- Diferenciación entre los tipos de asimetría.
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de interpretación de los coeficientes de asimetría y curtosis.
- Dificultad en recordar y aplicar correctamente los convenios de lectura de los elementos constitutivos de un gráfico estadístico.
- Problemas con el calculo exacto de valores atípicos.
- No diferenciación entre el modelo teórico y los datos empíricos y dificultad en distinguir cuándo el programa de cálculo se refiere a una u otra distribución, así como no discriminación entre los estadísticos y parámetros.
- Dificultad de uso de las opciones del software que pertenecen a un menú secundario y que son, sin embargo esenciales para el análisis.

Entre los resultados de la incorporación de la computadora, se tiene que esta propició cambios en los diferentes elementos de significado de la distribución normal. Por ejemplo, el manejo de las tablas de la distribución y la necesidad previa de estandarización para el cálculo de probabilidades desaparecen; las diversas representaciones del concepto se amplían notablemente, se propicia el trabajo con archivos de datos reales y se introduce una filosofía exploratoria.

2.4 Antecedentes sobre el uso de simulación en otros conceptos

La simulación computacional ha sido explorada como herramienta de enseñanza en otros conceptos de probabilidad y estadística, tal es el caso de Yánez (2003) quien realizó una investigación sobre los efectos que podría tener la adopción del enfoque frecuencial de la probabilidad implementado a través de la simulación computacional, sobre la comprensión de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias, la medida de probabilidad y la probabilidad condicional. Dicho estudio fue realizado con estudiantes universitarios de ingeniería y utilizó el software de estadística dinámica *Fathom* (Finzer, et. al., 2002). Entre los resultados de su investigación, Yánez (2003) destaca los siguientes:

- Los estudiantes no alcanzaron un nivel de comprensión suficientemente claro del concepto de probabilidad frecuencial.
- La simulación computacional de la probabilidad permite superar algunos de los sesgos o malas concepciones que los estudiantes poseían sobre las secuencias aleatorias o sobre el valor de las probabilidades en experimentos compuestos.
- Los estudiantes no lograron desarrollar un concepto de la simulación computacional de probabilidad suficientemente sólido que lo hiciera independiente de los resultados en otras representaciones.
- Aunque los estudiantes resolvieron exitosamente algunos problemas de probabilidad condicional a través de su simulación en el paquete Fathom, incluso respondiendo preguntas que requerían del teorema de Bayes y del teorema de probabilidad total, su uso no fue adoptado consistentemente.

- La simulación computacional en probabilidad se constituyó en un referente que permite generar y justificar algunas expresiones algebraicas que subyacen en las secuencias aleatorias.

No obstante las ventajas que se han señalado sobre el uso de simulación en la enseñanza de conceptos estadísticos, es necesario advertir que su uso no está exento de dificultades; las investigaciones que han llevado a cabo con esta herramienta reportan algunas de ellas. Por ejemplo, Countinho (2001) señala diversas dificultades de sus sujetos de investigación al proponerles situaciones en que debían construir un modelo de urnas para simular ciertas experiencias concretas o juegos probabilísticos:

- Dificultades de manejo de software si el alumno no está familiarizado, por lo que se recomienda usar programas fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad de simulación.
- Resistencia a usar la simulación y la aproximación experimental para resolver un problema de probabilidad en los casos en que es posible resolver el problema mediante calculo directo.
- Dificultad en aceptar datos de simulaciones que no han llevado a cabo personalmente para obtener estimaciones de probabilidad.
- Dificultad en diferenciar la estimación de la probabilidad que proporciona la simulación del verdadero valor teórico de la probabilidad (que sólo es accesible por cálculo cuando es posible).

Por su parte Yánez (2003) identifica las siguientes dificultades:

- La simulación va más allá de la simple trascripción de la simulación física del experimento, ya que exige la creación de nuevos objetos y la definición de acciones sobre ellos.
- La simulación computacional exige procesos de abstracción antes de realizarla, lo cual puede dificultar su realización.
- Para estimar la probabilidad se requiere de registros gráficos para estimar el limite de una sucesión infinita de valores, lo cual puede entorpecer la eficiencia de este enfoque.

2.5 Conclusiones sobre los antecedentes de investigación

La revisión de la literatura, nos ha permitido identificar diferentes fuentes de dificultad que experimentan los estudiantes cuando se enfrentan al concepto de distribuciones muestrales en ambientes computacionales. Estas dificultades sobre la comprensión de las distribuciones muestrales son de diversa naturaleza, sin embargo, podemos agruparlas en dos grandes grupos:

1. Dificultades que tienen que ver con la complejidad de los conceptos que se involucran en las distribuciones muestrales. Por ejemplo, la idea de muestra, población, variabilidad en la población, variabilidad muestral, teorema del limite central, estadístico, parámetro. (DelMas et al., 1999a, 1999b; Saldanha y Thompson, 2002)
2. Dificultades que tienen que ver con el enfoque de enseñanza que ha prevalecido, el cual se apoya en la teoría de la probabilidad y hace un uso extensivo del concepto de variables aleatorias y distribuciones de probabilidad (Lipson, 2002; Moore, 1992a, Cobb y Moore, 1997).

Algunas ideas importantes recogidas de dicha revisión son:

- Utilizar simulación física previa, en los estudios donde se incorpora la simulación computacional, como un recurso para volver menos abstracto el proceso y para dirigir la atención de los estudiantes hacia los aspectos relevantes del problema, al momento de modelarlo en el software (Biehler, 1991; Hodgson, 1996; Gourgey, 2000)
- La comprensión conceptual no resulta de manera automática de la interacción de los estudiantes con un paquete de software, aún en aquellos diseñados específicamente para apoyar el desarrollo de tal comprensión, por lo que el diseño de las actividades juega un papel muy importante para promover dicha comprensión (DelMas et al., 1999a, 1999b).
- Se muestra evidencia que el uso de representaciones de un concepto, así como el tránsito entre ellas, en este caso la representación teórica y empírica de distribuciones muestrales mejora la comprensión de los estudiantes. Esto sugiere

que las estrategias de enseñanza del concepto deben esforzarse por mantener ambas representaciones (Lipson, 2000; 2002).

Entre los resultados que se obtuvieron en los estudios citados, se sugiere que la simulación computacional, -aunque no exenta de dificultades- constituye una herramienta potencial para que los estudiantes desarrollen una mejor comprensión del tema, sin embargo, a pesar de ello, muchos estudiantes no han desarrollado una comprensión adecuada de los conceptos involucrados. Por ello, se requiere más investigación sobre el tema, sobretodo ante el surgimiento de potentes paquetes de software que generan ambientes dinámicos, multi-representacionales e interactivos -como es el caso de Fathom-, que apenas empiezan a ser utilizados en la investigación.

Capítulo 3

DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1 Metodología

De acuerdo con los objetivos que nos hemos fijado, el tipo de investigación que más se adapta para responder las preguntas planteadas, es una investigación de tipo cualitativo (Miles y Huberman, 1994; Denzin y Lincoln, 1994), en tanto lo que interesa es interpretar, describir y comprender los significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica.

Nos interesa profundizar en la comprensión de las relaciones que los estudiantes establecen en la construcción de sus significados, buscar regularidades y categorías en sus argumentaciones, así como el manejo que hacen de los distintos elementos de significado; en lugar de la explicación de los resultados mediante relaciones de causa y efecto, y para ello, un enfoque de tipo cualitativo resulta más apropiado que su contraparte cuantitativa, pues como señala Bisquerra (1989, p. 255): “la investigación cualitativa pretende una comprensión holística, la cual no es traducible a términos matemáticos y pone énfasis en la profundidad”. El método de investigación cualitativa que se ha utilizado es un estudio de casos (Stake, 1999), para estudiar a profundidad por el término de 2 meses, los significados que los estudiantes construyen, y la forma como evolucionan por influencia del enfoque didáctico implementado.

3.2 Organización y fases de la investigación

El diseño de la investigación comprende fundamentalmente tres fases, las cuales se describen a continuación:

- **Análisis del significado institucional de las distribuciones muestrales.**

El objetivo de esta fase ha sido determinar el significado institucional de referencia de las distribuciones muestrales en un curso introductorio de estadística a nivel universitario. Este significado constituye la base para delimitar el tipo de situaciones-problemas que se incorporarán en las actividades y para definir los elementos de significado más representativos que se asignan a las distribuciones muestrales en un curso universitario de estadística. Para determinar dicho significado, recurrimos a la revisión de 8 libros de texto que frecuentemente se utilizan en la enseñanza de la estadística a nivel universitario, especialmente en carreras para estudiantes no matemáticos, como son las carreras de ingeniería, ciencias económicas y administrativas. El significado identificado se describe en el anexo 1.

- **Estudio exploratorio**

Esta etapa constituye una primera inmersión en el campo, la cual es propia de los estudios cualitativos. El objetivo fue explorar e identificar en los estudiantes, los elementos de significado más prototípicos que exhiben cuando se enfrentan con diversas situaciones-problema que involucran a las distribuciones muestrales; esto, con la finalidad de tenerlos en cuenta en el diseño de las actividades de enseñanza. Los resultados obtenidos se describen en el capítulo 4.

- **Desarrollo del estudio implementando simulación computacional**

El estudio donde se implementaron las actividades con simulación tuvo una duración de 30 horas, en un período de 2 meses. En él participaron 11 estudiantes que estaban tomando un curso de inferencia estadística. Se utilizaron diferentes instrumentos de recolección de datos con el propósito de triangular la información e identificar de forma más precisa los significados puestos en juego por los estudiantes.

3.3 Población y muestra

La población objetivo la constituyen estudiantes universitarios que cursan la materia de estadística en carreras como ingeniería, informática, economía y administración, cuya edad oscila entre los 19 y 22 años. De dicha población, se tomó una muestra de 11 estudiantes de la carrera de ingeniería en informática del Instituto Politécnico Nacional que estaban tomando un curso de inferencia estadística, y al momento de iniciar con el estudio ya habían estudiado el tema de distribuciones muestrales.

3.4 Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos de recolección de datos típicos en una investigación de tipo cualitativo son los cuestionarios, las entrevistas, las observaciones y la revisión de documentos. El uso de múltiples instrumentos, también conocido como triangulación metodológica (Stake, 1999) es recomendado como fuente de validación de los resultados (McKnight, et. al., 2000). En nuestro caso, los instrumentos que utilizamos para la recolección de datos en nuestra investigación variaron de acuerdo a la fase de investigación y se describen a continuación:

1. **Muestra de libros de texto de estadística para estudiantes universitarios.**

Para poder implementar el marco teórico seleccionado, se requiere primeramente determinar el significado institucional de referencia de las distribuciones muestrales, esto lo hemos hecho mediante una revisión bibliográfica en una muestra representativa de libros de texto para estudiantes universitarios.

2. **Cuestionarios.**

Se han aplicado en la fase de exploración, antes y después de las actividades de enseñanza, con el propósito de identificar los significados de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales, en diferentes momentos de la investigación.

3. **Diario de observación.**

En el se ha tomado nota de los aspectos más relevantes que tienen que ver con la interacción de los estudiantes con las actividades propuestas, tales como manejo del software, sus dificultades, preguntas, explicaciones, argumentaciones que realizan para validar sus procesos y respuestas.

4. **Hojas de trabajo para las actividades.**

Cada actividad ha sido acompañada con una de hoja de trabajo en la cual los estudiantes anotaron sus respuestas a las tareas y problemas planteados.

5. **Entrevistas.**

Se realizaron entrevistas con algunos estudiantes, con el propósito de efectuar un análisis más detallado y más profundo, que las repuestas que han dado en sus actividades, pues es sabido que los estudiantes saben mucho más de lo que son capaces de expresar en una actividad.

6. **Grabación en video**.

Se grabaron algunas sesiones de trabajo para tener información sobre la forma en que los estudiantes interactúan con el software y las actividades, así como los procesos que siguen al momento de resolverlas.

7. **Disquetes de computadora.**

Cada estudiante entregó diariamente un disquete con las actividades resueltas, con el propósito de complementar la información que se obtendría con las técnicas anteriores.

3.5 Técnicas de análisis de datos

En una investigación de tipo cualitativo los datos están dados más en forma de palabras más que de números. Las palabras están basadas en la observación, entrevistas o revisión de documentos, por lo que requieren de cierto procesamiento para ser analizados y poder extraer conclusiones válidas de ellos.

De acuerdo con la visión del análisis cualitativo de datos de Miles y Huberman (1994), el análisis cualitativo consiste en tres flujos de actividad concurrentes: reducción de datos, despliegue de datos y obtención de conclusiones y verificación. La reducción de datos se refiere al proceso de seleccionar, simplificar y transformar los datos que aparecen en las notas de campo o transcripciones (resumir, codificar, hacer agrupamientos, categorías, etc.).

En nuestro caso, realizaremos primeramente una descripción general del estudio, dando cuenta de los detalles más importantes que se presentaron en cada una de las sesiones y que tuvieron efecto en los significados desarrollados por los estudiantes. Posteriormente centraremos nuestra atención en los conceptos que nos hemos propuesto investigar y el lugar que ocupan en las diferentes etapas del proceso de simulación. El análisis se hará teniendo en cuenta los elementos puestos en juego por los estudiantes en cada una de las actividades.

3.6 Características del proceso de enseñanza

El estudio estuvo conformado por 9 actividades, las cuales se desarrollaron durante 20 sesiones (incluyendo la aplicación de los cuestionarios y las entrevistas), sumando un total de 30 horas de trabajo. Este tuvo lugar en un salón de computo con 11 estudiantes de Informática (19-22 años) que estaban tomando un curso de inferencia estadística en el Instituto Politécnico Nacional, y que al momento de iniciar ya habían estudiado el tema de distribuciones muestrales.

En las actividades se contemplaron diferentes tipos de poblaciones (binomial, uniforme discreta, normal, irregular discreta) y se estimulaba a los estudiantes a variar el tamaño de muestra con el propósito de que entendieran su efecto en la variabilidad muestral, forma, centro y dispersión de las distribuciones muestrales (teorema del límite central), y en el valor de las probabilidades de ciertos resultados muestrales. Se buscaba además, que los estudiantes resolvieran los problemas teóricamente y mediante simulación, con el propósito de que establecieran conexiones entre ambos resultados, que los compararan y ver cual era su opinión sobre la simulación como método para resolver problemas. En las primeras actividades se desarrollaron simulaciones físicas previo a la simulación con Fathom, atendiendo diversas recomendaciones de algunos autores como Gourgey (2000) y Hodgson

(1996), que una simulación manual previa a la simulación computacional hace menos abstractos los diversos conceptos y procesos que hay que considerar en la simulación con computadora, pero después se dependió solamente de la simulación computacional. Algunas actividades fueron resueltas de manera individual por los estudiantes y otras fueron resueltas en parejas. El papel del investigador fue el de un guía que se limitaba a leerles cada actividad hasta que la comprendieran, y solo proporcionaba ayuda cuando era necesario para que pudieran continuar por ellos mismos. Así, en la mayor parte de las actividades, fueron los mismos estudiantes los responsables del proceso de resolución de los problemas mediante simulación.

3.7 Propuesta didáctica apoyada en simulación computacional con Fathom

Como lo señalamos anteriormente Fathom es un software que ha sido diseñado para propósitos de enseñanza, cuya premisa clave es que todos los aspectos de un análisis están ligados entre sí para que los usuarios puedan ver cómo los cambios que se generan en una representación se reflejan en otra. La interface del software contiene los elementos claves de un ambiente de estadística dinámica como "arrastrar y soltar" objetos ya existentes, transformarlos o construir nuevos objetos, de tal forma que los estudiantes puedan investigar conceptos estadísticos.

En cuanto a las distribuciones muestrales concierne, los datos de una población pueden ser introducidos directamente o simulados, a partir de ellos seleccionar muestras de un tamaño específico, calcular estadísticos y desplegar la distribución en forma numérica o gráfica. Veamos a continuación las diversas etapas y los lineamientos que se siguieron en la implementación de las actividades mediante simulación con Fathom:

1. **Generar una población** (introduciéndola directamente o generándola mediante instrucciones del software).

Población Uniforme

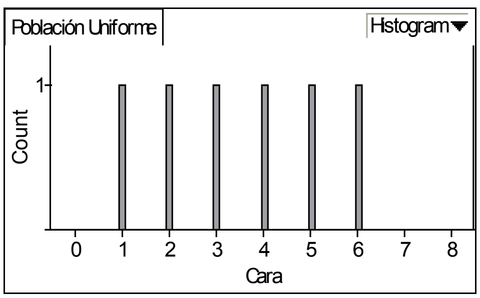
	Cara
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

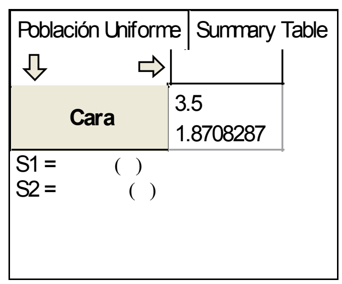
Población normal

	Estaturas
=	randomNormal (1.6, 0.15)
1	1.27978
2	1.89713
3	1.66982
4	1.8928
5	1.72734

Para generar una población Fathom utiliza el comando *random* el cual tiene diversas opciones según sea el tipo de distribución. Por ejemplo, randomNormal(1.6,0.15) genera una población normal con media 1.6 y desviación estándar 0.15.

2. **Calcular las medidas descriptivas de la población y representarla gráficamente**





En las primera actividades se mantuvieron visibles estas representaciones con el fin de que los estudiantes pudieran observar, si sus características cambian o se mantiene constantes, y al final pudieran contrastar la distribución muestral obtenida y sus parámetros, con la distribución de la población.

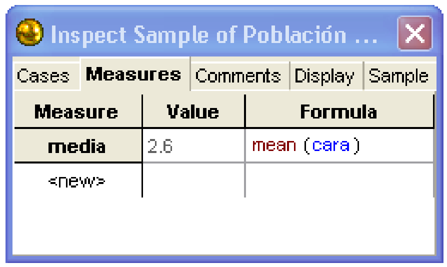
3. **Tomar muestras de la población**

Sample of Población ...

	Cara
1	2
2	4
3	1
4	4
5	2

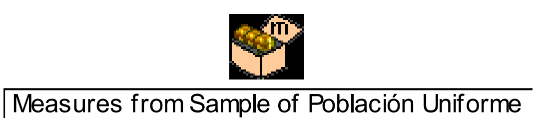
Para tomar una muestra (aleatoria simple) solo se requiere seleccionar la opción correspondiente en uso de los menús del software e indicar el tamaño de muestra que se desea y si habrá reemplazo o no.

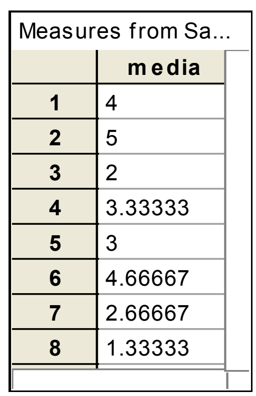
4. **Se define el estadístico que se desea calcular en cada muestra**



En las primeras actividades se procedía a tomar varias muestras con la opción de animación habilitada, para visualizar el proceso de muestreo en forma dinámica, con la idea que los estudiantes observaran la variabilidad muestral. Posteriormente se deshabilitó esta opción y se procedía a tomar un mayor número de muestras y disminuir el tiempo de la actividad.

5. **Calcular el estadístico en muchas muestras hasta lograr una estabilización de los resultados muestrales.**

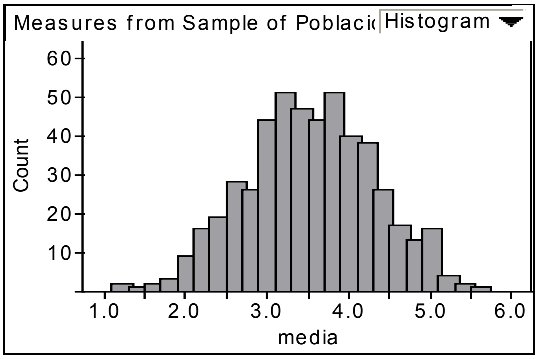


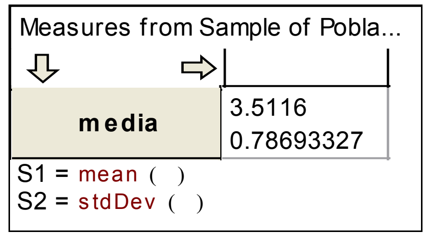

Measures from Sa...

	media
1	4
2	5
3	2
4	3.33333
5	3
6	4.66667
7	2.66667
8	1.33333

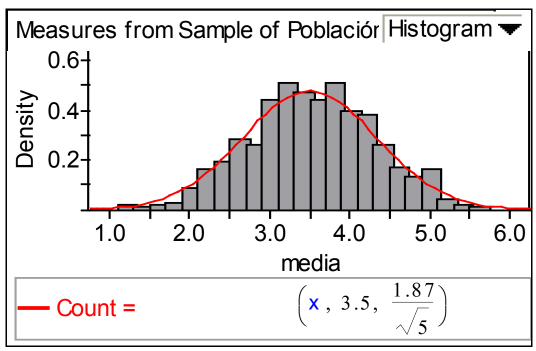
Consideramos que una buena aproximación de la distribución empírica a la distribución teórica se obtiene a partir de 1000 muestras, por lo que ese fue el número que manejaremos en las actividades. Sin embargo, algunos estudiantes llegaron en algunos casos a simular 2000 muestras.

6. Construir una tabla con los valores del estadístico y una representación gráfica de la distribución muestral y sus medidas descriptivas (parámetros).

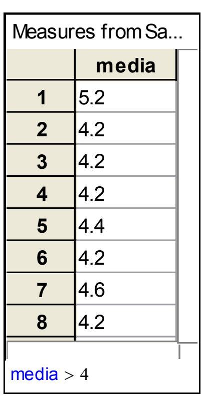


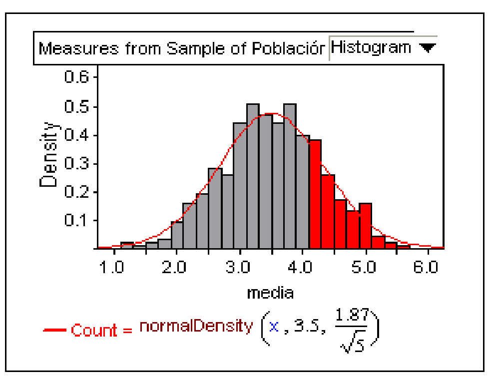


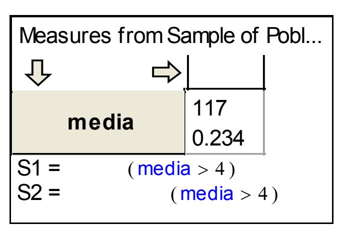
7. Superponer la distribución teórica sobre la distribución muestral obtenida empíricamente



8. Estimar la probabilidad de que se presente algún resultado muestral.







En todo el proceso descrito anteriormente se fue aumentando gradualmente el tamaño de la muestra seleccionada, con el fin de que los estudiantes construyeran significados acerca de las diversas propiedades de las distribuciones muestrales y la resolución de problemas que son función del tamaño de la muestra.

Capítulo 4

ESTUDIO EXPLORATORIO

4.1 Introducción

El objetivo principal que nos planteamos al realizar este estudio, fue explorar los significados más representativos que estudiantes universitarios poseen sobre las distribuciones muestrales una vez que han concluido un curso de inferencia estadística. Para ello, se diseñó un cuestionario que contempla diversas propiedades de las distribuciones muestrales y conceptos estrechamente relacionados, como el teorema del limite central. El cuestionario se aplicó a 31 estudiantes de Ingeniería en Informática en el Instituto Politécnico Nacional, cuya edad oscilaba entre los 19 y 22 años.

En lo que sigue, analizaremos los elementos de significado que nos propusimos explorar en cada una de las situaciones-problema y los contrastaremos con los significados que los estudiantes mostraron al momento de contestar cada situación.

4.2 El cuestionario y sus resultados

1. En una urna se tienen 4 bolas etiquetadas con los números 2, 4, 6 y 8. Se seleccionan muestras de dos bolas al azar simultáneamente y se calcula la media de los números que aparecen en ellas. Describe mediante una tabla ó gráfica la distribución muestral que resulta.

Objetivo:

Investigar el significado que los estudiantes asignan al proceso de construir una distribución muestral a partir de una población pequeña en un esquema de muestreo.

Elementos de significado previstos en la situación:

- *Situación problema (elementos fenomenológicos)*: Problema que implica la construcción de la distribución muestral de la media en un contexto de muestreo repetido de una población pequeña. Este tipo de problemas es representativo cuando se emplea un enfoque de simulación.
- *Lenguaje (elementos representacionales):* Histogramas, polígonos de frecuencias, tablas de frecuencias y de probabilidad, notación simbólica de la media ($\bar{x}$).
- *Acciones (elementos procedimentales):* Determinación del conjunto de muestras posibles para el tamaño dado, cálculo de medias muestrales, cálculo de probabilidades para cada valor de la media a partir de la tabla de frecuencias.
- *Conceptos y propiedades (elementos conceptuales):* Población, muestra, combinaciones, medidas descriptivas (media), frecuencia, probabilidad, distribución muestral, orden de los elementos en las muestras, suma de probabilidades, reemplazo.
- *Argumentos (elementos validativos):* Comprobación del total de muestras posibles, comprobación de suma de probabilidades igual a 1.

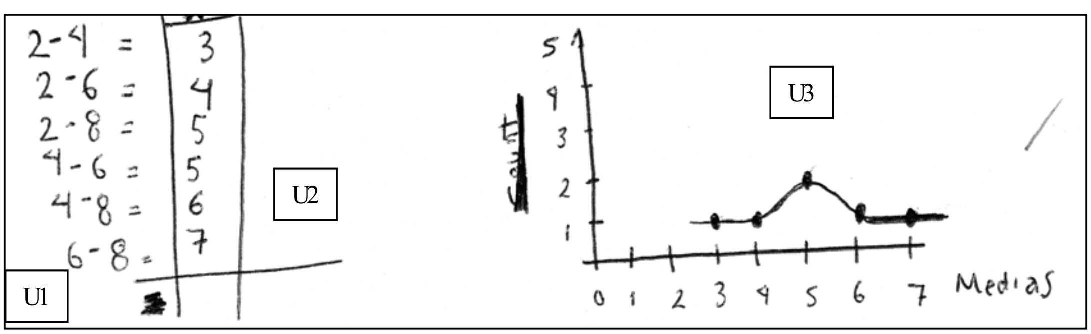
Elementos de significado identificados en las respuestas de los estudiantes.

- *Situación problema*: En esta situación se ha construido una distribución muestral de la media en un contexto de muestreo repetido, que es distinto al tradicional, donde se hace uso de variables aleatorias.
- *Lenguaje:* 7 estudiantes utilizaron correctamente tablas de frecuencias e histogramas para representar y organizar los valores de las medias muestrales obtenidos, algunos incluso, colocaron la notación ($\bar{x}$) en la columna correspondiente. Sin embargo, el resto de los estudiantes no mostró un lenguaje adecuado.

- *Acciones:* Los alumnos que más avanzaron en el problema realizaron acciones como seleccionar correctamente las muestras y calcular sus medias, sin embargo sólo uno concluyó el problema calculando la frecuencia relativa para cada valor muestral. Identificamos algunas acciones incorrectas como sumar los números en lugar de calcular la media, determinar más muestras de las correctas al considerar el orden de los elementos.
- *Conceptos y propiedades*: Observamos que algunos estudiantes no tuvieron en cuenta, propiedades del muestreo, como es el hecho de considerar el orden en los elementos de las muestras, lo cual lo condujo a seleccionar más muestras de las que realmente eran. No se observó que los estudiantes usaran en forma explicita la fórmula para determinar las combinaciones posibles.
- *Argumentos:* Se observó que muchos estudiantes generalizan la propiedad de normalidad en las distribuciones muestrales aún para poblaciones no normales y con pequeños tamaños de muestra.

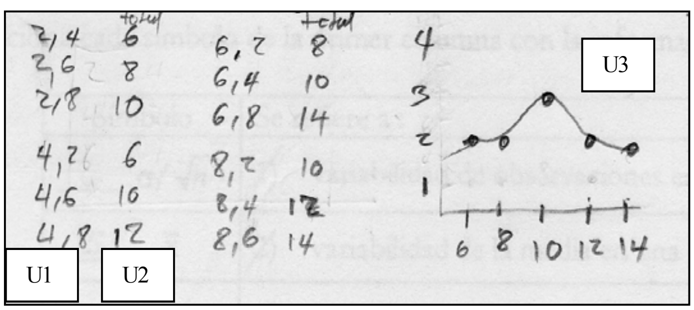
En cuanto a la generalización de la normalidad en las distribuciones muestrales para casos en los cuales no es válida, conjeturamos que se deba a que el significado institucional local implementado por el profesor (observado a través de sus notas) ponía énfasis en distribuciones muestrales normales.

A continuación haremos un análisis semiótico global de la respuesta de Emmanuel, el único estudiante que contestó bien este problema.



Podemos considerar tres unidades elementales de análisis (U1, U2 y U3). En todas las unidades Emmanuel hizo uso del *lenguaje* (simbólico) para *representar* sus resultados, realizó *acciones* para resolver el problema y tuvo en cuenta *propiedades* de los conceptos involucrados. Emmanuel interpreta correctamente el problema, por ejemplo en $\overline{\text{U1}}$ representó mediante arreglos de dos números a las muestras de tamaño 2 que eran posibles de la población, realizó *acciones* para seleccionar las posibles muestras como *combinar* sistemáticamente cada número con el siguiente sin llegar a considerar la misma muestra dos veces mediante el cambio de orden de los números, mostrando conocimiento de una *propiedad* del muestreo. En U2, representa a las medias mediante el símbolo ($\bar{x}$) en la parte superior de la tabla, maneja *conceptos* y realiza acciones como *calcular* la media en cada muestra y representarlas mediante un número; mientras que en U3 *grafica* la distribución de las medias, realizando acciones como *colocar* adecuadamente en los ejes los valores de las medias y su frecuencia. Por último, el alumno a través de elementos ostensivos del lenguaje (gráficas) nos proporciona información acerca de elementos no ostensivos (ideas, concepciones) como es el caso de suavizar la distribución muestral como si fuera una distribución normal. Consideramos finalmente que este alumno *describió* correctamente el *concepto* de distribución muestral ya que los elementos de significado que exhibió coinciden con los elementos previstos en el significado de referencia.

Otro estudiante (Andrés) contestó de la siguiente manera:

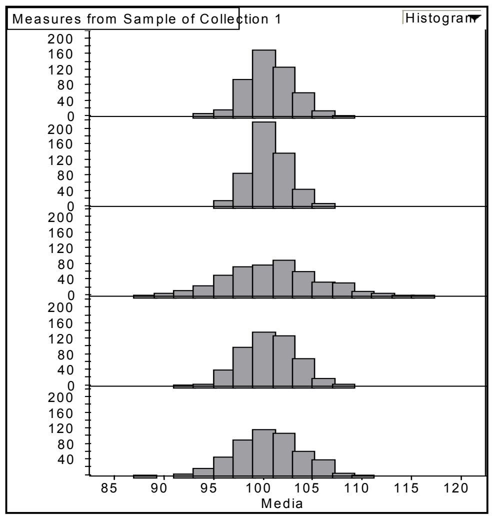


Andrés realiza varias *acciones* incorrectas en la búsqueda de la solución del problema. En primer lugar, la forma en que selecciona las muestras no es la adecuada ya que no es consciente de una *propiedad* del muestreo (el orden no es importante) lo que lo lleva a repetir alguna de ellas. En segundo lugar, calcula la suma de puntos en vez de la media de la muestra y aunque grafica correctamente los valores obtenidos, los errores previos lo llevan a graficar una distribución de manera incorrecta.

Concluimos que el *significado personal* de Andrés no contempla de manera correcta conceptos y propiedades que intervienen en el problema planteado, como es el caso del cálculo de la media.

2. De una población con distribución normal se extrajeron 500 muestras aleatorias de cada tamaño (5, 10, 15, 20 y 25). Se calculó la media de cada muestra y los resultados se dibujaron en los histogramas que se muestran en la siguiente figura.

a) Coloca a un lado de cada histograma, el tamaño de la muestra que corresponda.



b) Explica las consideraciones que tomaste en cuenta para llevar a cabo la asignación de los tamaños de muestra a los histogramas**.**

c) ¿Cuál es el valor de la media de la población de donde se extrajeron las muestras?

Objetivo:

Investigar si los estudiantes comprenden propiedades importantes que ligan a las distribuciones muestrales con el teorema del limite central.

Elementos de significado previstos en la situación:

- *Situación problema (elementos fenomenológicos)*: Problema que implica la identificación correcta de la variabilidad de la distribución muestral en función del tamaño de la muestra y la identificación de que la media poblacional es igual a la media de la distribución muestral.
- *Lenguaje (elementos representacionales):* Símbolo de la media poblacional y muestral, expresión de la desviación estándar ó la varianza de la distribución muestral.

- *Acciones (elementos procedimentales):* Asignar el tamaño de muestra al histograma correspondiente, determinar la media de la población por inspección de la media de la distribución muestral.
- *Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)*: Variabilidad, media, tamaño de muestra, la media de la distribución muestral es igual a la media poblacional y no depende del tamaño de la muestra, la variabilidad de la distribución muestral está en función del tamaño de la muestra y es mayor entre menor sea el tamaño.
- *Argumentos (elementos validativos):* Validar las propiedades anteriores explicando la forma como el tamaño de muestra interviene en ellas o utilizando expresiones como $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $\mu_{\bar{x}} = \mu$ o expresiones verbales que expresen la relación anterior.

Elementos de significado identificados en las respuestas de los estudiantes

- *Situación problema*: Problema que implica la asignación correcta del tamaño de la muestra, teniendo en cuenta que conforme aumenta el tamaño de la muestra la variabilidad de la distribución muestral disminuye, o viceversa, así como identificar que la distribución muestral está centrada en la media poblacional.
- *Lenguaje:* Ningún alumno utilizó los elementos de lenguaje previstos, sólo asignaron los tamaños de muestra y determinaron la media de la población sin usar la simbología correspondiente.
- *Acciones:* Asignaron los tamaños de muestra en función de diversos criterios como centrarse en la altura y el número de barras del histograma, pero sin tener en cuenta la dispersión, como es lo correcto.
- *Conceptos y propiedades*: No relacionaron la variabilidad y el centro de las distribuciones muestrales en función del tamaño de la muestra como se había previsto y sólo 8 estudiantes identificaron correctamente que la media de la distribución muestral es igual a la media de la distribución poblacional.
- *Argumentos:* En los argumentos de los estudiantes para la asignación de los tamaños de muestra no contemplaron las propiedades anteriormente citadas, sino que recurrieron a otro tipo de argumentaciones. Por ejemplo, un grupo de ellos se fijó en la altura de la barra más alta para asignar el tamaño de muestra más grande, y

así sucesivamente hasta a asignar el tamaño más pequeño al histograma con la barra más pequeña. Esto, si bien los llevó a una asignación correcta, el razonamiento involucrado no tiene en cuenta el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de la distribución. Algunas respuestas de estudiantes de este grupo se señalan a continuación:

> "Consideré la altura del rectángulo más alto en cada histograma".
> "La altura tiene que ver con el tamaño de la muestra"
> "Me apoyé en la altura para asignar los tamaños de muestra"

Mientras que otro grupo de estudiantes se fijaron en el número de barras del histograma. Algunas de sus respuestas se señalan a continuación:

> "Entre más pequeño sea el tamaño de muestra el histograma saldrá con menos barras"
> "Debido a que el tamaño aumenta, los intervalos de igual forma aumentan".

Consideramos que en este ítem se contemplan dos importantes propiedades de las distribuciones muestrales, que tienen que ver con los efectos del tamaño de muestra en su centro y su variabilidad, y en las cuales se establece una relación entre distribución poblacional y distribución muestral, sin embargo, los significados de los estudiantes sobre estas propiedades muestran que no contemplan los elementos correctos.

3.Relaciona cada símbolo de la primer columna con la información correcta de la segunda columna.

Símbolo	Se refiere a:
____ $\sigma/\sqrt{n}$	1) variabilidad de observaciones en una muestra
____ $\bar{x}$	2) variabilidad de la media en una distribución muestral
____ μ	3) variabilidad de las observaciones en una población
____ s	4) centro de las observaciones en una población
____ σ	5) centro de las observaciones en una muestra

Objetivo

Investigar si los estudiantes manejan correctamente la simbología y las notaciones de los elementos que intervienen en las distribuciones muestrales, y distinguen el ámbito muestral del poblacional a nivel simbólico.

Elementos de significado previstos en la situación:

- *Situación problema (elementos fenomenológicos)*: La presente situación implica la identificación de elementos de lenguaje para representar conceptos que intervienen el ámbito de las distribuciones muestrales.
- *Lenguaje (elementos representacionales):* Notaciones para la media muestral y poblacional, la desviación estándar muestral y poblacional y la variabilidad de la distribución muestral.
- *Acciones (elementos procedimentales):* Identificar la notación correspondiente a cada unos de los conceptos.
- *Conceptos y propiedades:* media de la población, media de la muestra, desviación estándar de la población, desviación estándar de la muestra, desviación estándar de la distribución muestral.

Elementos de significado identificados

Los elementos identificados solo tienen que ver con el lenguaje. La mayor parte de los estudiantes confunde las notaciones de la desviación estándar de una muestra y la de una población (entre s y σ), y en menor medida confunden los símbolos de la media de una muestra y la de una población (entre $\bar{x}$ y μ).

4. Marca con una cruz en la celda que corresponda para cada símbolo de acuerdo con la información de los encabezados.

	Sólo se calcula en una muestra	Sólo se calcula en una población	Representa un parámetro	Representa un estadístico	Es una constante	Varía de una muestra a otra
s						
μ						
$\bar{x}$						
σ						

Objetivo

Investigar los significados que los estudiantes tienen sobre las diferentes propiedades y conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales y el ámbito de participación (muestral o poblacional).

Elementos de significado previstos en la situación:

- *Situación problema*: La presente situación implica la identificación de propiedades y conceptos que intervienen el ámbito tanto muestral como poblacional de las distribuciones muestrales.
- *Acciones:* Identificar la propiedad para cada uno de los conceptos previstos.
- *Conceptos y propiedades:* población, muestra, media de la población, media de la muestra, desviación estándar de la población, desviación estándar de la muestra, parámetro, estadístico, variabilidad muestral.

Elementos de significado identificados en las respuestas de los estudiantes

Los elementos identificados solo tienen que ver con propiedades de los conceptos implicados. Se identificó que muchos estudiantes no tienen en cuenta las propiedades del carácter constante de los parámetros y el carácter variable de los estadísticos, así como tampoco tiene claro en el ámbito que participan.

5. Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye aproximadamente normal con media de 800 horas y una desviación estándar de 40 horas. Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 16 focos tenga una vida promedio de menos 775 horas. Muestra tus cálculos.

Objetivo:

Investigar los elementos de significado que los estudiantes asignan al proceso de resolver un problema prototípico de distribuciones muestrales.

Elementos de significado previstos en la situación:

- *Situación problema*: Problema que involucra a la distribución muestral de la media, en el cual se requiere calcular la probabilidad de un resultado muestral.

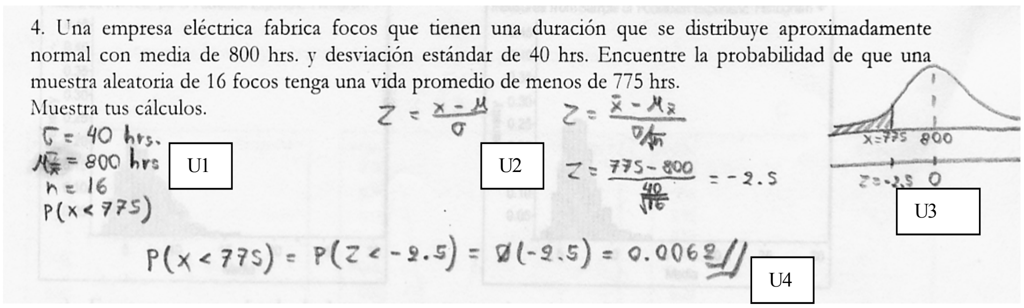
- *Lenguaje:* Expresión para estandarizar la distribución muestral $\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$, gráfica de la distribución normal, representación del área sombreada bajo la curva de la distribución normal, notaciones de la media muestral $\bar{x}$, media poblacional μ, desviación estándar poblacional σ, tamaño de la muestra n, expresión en forma de desigualdad que indica la probabilidad a calcular $P(X < a)$, $P(z < a)$.
- *Acciones:* Estandarizar la distribución muestral y sustituir los datos, dibujar la distribución muestral y sombrear el área correspondiente, usar las tablas de la distribución normal estandarizada para calcular la probabilidad.
- *Conceptos y propiedades:* distribución normal estandarizada, media muestral, media poblacional, desviación estándar poblacional, tamaño de muestra.
- *Argumentos:* Uso de simetría para calcular probabilidades, correspondencia entre valores de la distribución real y la distribución estandarizada (entre x y z), estandarizar para poder usar tablas de probabilidad, sombrear cola izquierda por que la probabilidad que se pide es del tipo $P(X < a)$.

Elementos de significado identificados en las respuestas de los estudiantes:

- *Situación problema*: En esta situación se ha resuelto un problema de distribuciones muestrales más prototípicos, donde se pide calcular la probabilidad de que ocurra un resultado muestral.
- *Lenguaje:* La mayoría de los estudiantes tuvo un manejo aceptable de las distintas notaciones, pero fueron muy pocos los que utilizaron la representación gráfica de la distribución normal y su respectiva área sombreada, hubo manejo aceptable de la fórmula de estandarización, hubo incluso algunos estudiantes que hicieron un manejo pulcro de todo el proceso.
- *Acciones:* La mayor parte de los estudiantes estandarizó bien la distribución pero mucho se quedaron a ese nivel, siendo pocos los que calcularon la probabilidad correctamente.
- *Conceptos y propiedades*: La estandarización comprende la mayor parte de los conceptos involucrados y hubo un buen desempeño en su ejecución.

- *Argumentos:* Un reducido número de estudiantes utilizó todos los argumentos previstos.

A continuación haremos un análisis de la respuesta de Eduardo, un estudiante que mostró la mayor parte de los elementos de significado previstos en el problema. Podemos considerar cuatro unidades elementales de análisis (U1, U2, U3, U4).



En U1, Eduardo comete dos errores en las notaciones de los datos del problema, al representar la media poblacional mediante $\mu_{\bar{x}}$ en lugar de μ y a la media $\bar{X}$, mediante X; en U2, escribe primeramente la fórmula para estandarizar una distribución, posteriormente la ajusta al caso de distribuciones muestrales considerando en forma adecuada los conceptos que en ella intervienen, sustituye los datos y calcula el valor de z; en U3, construye la gráfica de la distribución poblacional (distribución normal) y sobre ella localiza los valores del centro y el valor de la media a partir de cual debe calcular la probabilidad, sombrea además, el área correspondiente. Es importante señalar que el estudiante establece en la misma gráfica una correspondencia con los valores de la distribución normal estandarizada (z=0 para x=800 y z= -2.5 para x=775), finalmente en U4, expresa mediante el lenguaje adecuado la probabilidad que se le ha pedido P(x<775) y su correspondiente notación para usar la distribución estandarizada P(z<-2.5). En resumen, Eduardo ha mostrado los elementos de significado previstos en la resolución del problema, ha utilizado el lenguaje adecuado, realiza las acciones correctas, tiene en cuenta los conceptos y las propiedades involucradas y ha realizado las argumentaciones previstas.

4.3 Conclusiones

De acuerdo con el modelo teórico en que se fundamenta nuestra investigación, se dice que un estudiante comprende un concepto matemático, cuando éste se ha apropiado de los diferentes elementos de significado que componen el significado institucional previsto. Esto es posible observarlo a través del sistema de prácticas que los estudiantes desarrollan para resolver una situación-problema.

No obstante, que para determinar con mayor precisión la comprensión que los estudiantes han desarrollado sobre el concepto, se requiere de diversos instrumentos de recolección de datos como cuestionarios, entrevistas, etc., es posible en este caso, advertir que los estudiantes han desarrollado después de un curso de inferencia estadística un significado de las distribuciones muestrales que carece de diversos elementos importantes que señalamos a continuación:

- Manejo muy pobre del lenguaje, es decir, no hacen uso de muchas representaciones y notaciones disponibles y confunden la simbología que se utiliza para representar a los diversos conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales.
- En cuanto a las acciones que se requieren para enfrentar las situaciones planteadas, en donde mejor desempeño tuvieron los estudiantes fue en el problema de cálculo de probabilidades; al parecer se hizo énfasis en este tipo problemas durante el curso. En cuanto a la construcción de una distribución muestral en un ambiente de muestreo repetido -la cual no se aborda comúnmente en una enseñanza tradicional-, fueron pocos los estudiantes que realizaron las acciones apropiadas.
- En lo relativo a conceptos y propiedades que se involucraban en las actividades, no mostraron evidencia que comprendieran el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad y en el centro de la distribución muestral, el carácter constante de un parámetro y el carácter variable de un estadístico, propiedades muy importantes de las distribuciones muestrales.
- En las argumentaciones, podemos decir que los estudiantes aplicaron pocos elementos de este tipo, por lo general daban sus respuestas, pero sus validaciones no estaban bien fundamentadas.

Entonces, como conclusión final podemos señalar que el enfoque de enseñanza a que han estado sujetos estos estudiantes, el cual ha hecho énfasis en el uso de fórmulas y procedimientos para resolver problemas, ha desatendido elementos conceptuales importantes para una comprensión adecuada de las distribuciones muestrales. De esta manera el significado de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales suele estar muy ligado a representaciones simbólicas y procesos algorítmicos, y sus argumentos para comunicar o validar resultados dependen en buena medida de este tipo de representaciones. Podemos decir, por lo tanto que el significado de los estudiantes es parcial respecto al significado institucional de referencia.

Capítulo 5

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL ESTUDIO

5.1 Introducción

En el presente capítulo realizaremos una descripción general de los hechos y aspectos más relevantes que se presentaron en la fase de estudio con los estudiantes participantes. Entre otros aspectos, se efectuará la justificación de cada una de las actividades y sesiones que conformaron el estudio, se analizarán las características y objetivos de los cuestionarios previo y posterior a la enseñanza, la organización de las sesiones, el tipo de ayuda que recibieron los estudiantes de parte del investigador cuando ésta fue requerida, la forma de trabajo entre los estudiantes, la cantidad de alumnos o equipos que arribaron a la solución correcta, así como las principales dificultades a que se enfrentaron al resolver las actividades planteadas.

El estudio contempló la aplicación de dos cuestionarios –uno previo y otro posterior a la enseñanza-, una fase de familiarización con el software, el desarrollo de 9 actividades diseñadas para explorar el significado de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación, así como algunas entrevistas al final de la fase de estudio. Para ello, se requirió de un total de 20 sesiones que sumaron un total de 30 horas de trabajo. Las primeras 3 actividades contemplaron una simulación física previa a la simulación con computadora, con el propósito de volver más concreto el proceso de simulación con el software, sin embargo, en el resto de las actividades se dependió solo de la simulación computacional para resolver los incisos planteados.

En las primeras dos actividades -que consideramos introductorias-, se planteó sólo la exploración de conceptos relacionados con las distribuciones muestrales, como es el caso de la variabilidad muestral y el teorema del limite central; en las actividades 3, 4, 5 y 9 se planteó tanto la exploración de tales conceptos como la resolución del problema (cálculo de probabilidades de muestras), mientras que en las actividades 6, 7 y 8 sólo se pidió calcular las probabilidades de ciertos resultados muestrales. A excepción de las actividades 4 y 5, donde los datos de la población se proporcionaron mediante un archivo de computadora, el resto requería la formulación del modelo de la población para iniciar con la simulación. Una descripción más detallada sobre las características de las actividades se encuentra en el capítulo 6.

Respecto a la disponibilidad de equipo de cómputo, cada estudiante dispuso de una computadora, pero en algunas actividades se formaron equipos de dos estudiantes para trabajar con una computadora, con el fin de observar la interacción entre ellos.

5.2 Análisis de las sesiones de trabajo

En lo que sigue, describiremos cada una de las sesiones y los aspectos que consideramos más relevantes para ser tomados en cuenta en el análisis y reporte de los resultados que se proporcionan en los siguientes tres capítulos.

- ***Primer sesión. Aplicación del cuestionario diagnóstico:***

Antes de iniciar propiamente con la experimentación de las actividades de enseñanza, se aplicó un examen diagnóstico de 14 ítems a 30 estudiantes que cursaban la materia de Estadística en la Licenciatura en Informática de UPICSA en el Instituto Politécnico

Nacional, en la cual se contempla el tema de distribuciones muestrales, que fue el tema de nuestra investigación. Al momento de aplicar el examen, los estudiantes ya habían cubierto la unidad de estadística descriptiva y distribuciones muestrales, por lo que consideramos que era el momento adecuado para investigar sobre los significados que sobre el tema habían construido en la enseñanza recibida. La duración del examen fue de aproximadamente 1 hora.

De los 30 estudiantes que contestaron el cuestionario se seleccionaron 11 de ellos, que reunieron varias características, como el hecho de haber contestado el cuestionario completo, eran estudiantes con asistencia regular –de acuerdo con información proporcionada por el profesor- y mostraron voluntad y compromiso para a asistir a todas las sesiones del estudio. Se les informó que su desempeño en el estudio sería tomado en cuenta en la evaluación final de la materia.

Los conceptos que nos propusimos investigar en el cuestionario fueron: variabilidad de una distribución, variabilidad muestral, efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales y las implicaciones del teorema del limite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales. Estos conceptos que están estrechamente relacionados y consideramos que deben ser construidos en un curso de distribuciones muestrales.

Los resultados del cuestionario mostraron que muchos estudiantes no comprendían muchos de los conceptos y propiedades involucrados, como se podrá observar en el capítulo 7, donde se analiza la evolución de los significados de los estudiantes, como resultado de la implementación del enfoque de simulación computacional. El cuestionario completo se puede consultar en el anexo III de este documento.

- ***Segunda y tercera sesión. Familiarización con el software.***

Otra tarea previa al inicio formal de la experimentación, fue la familiarización mínima que los estudiantes deben tener con el software para poder trabajar en las actividades que se les propusieron. Para apoyar esta tarea, se elaboró un pequeño manual con los elementos básicos de Fathom para abordar el tema de distribuciones muestrales. El tiempo que se dedicó a la familiarización fueron dos sesiones de 1.5 horas cada una. Los comandos y acciones que se mostraron a los estudiantes fueron los siguientes:

- Crear o generar una distribución poblacional. (New collection, New Case Table, New Cases, Edit Formula, Random Numbers).
- Tomar muestras de la población. (Sample cases, Inspect Sample Cases).
- Definir el estadístico que se desea calcular en cada muestra (Measures).
- Seleccionar un número grande de muestras y calcular el estadístico en cada una de ellas (Collect Measures).
- Construir una tabla con los valores de las medias y un histograma o diagrama de puntos (Case Table, New Graph).
- Calcular medidas descriptivas de la distribución muestral como la media y la desviación estándar (Summary Table, Add Basic Statistics).
- Superponer la distribución muestral teórica a la distribución empírica obtenida como un medio de validar los resultados (Edit Formula, Plot Function).
- Calcular la proporción de casos que caen dentro de cierto intervalo como una estimación de la probabilidad (New Filter, Add Formula).

En la segunda sesión se abordó la distribución muestral de medias, mientras que en la tercer sesión se trabajó con la distribución muestral de una proporción. Durante estas sesiones de familiarización observamos que los estudiantes mostraron habilidad para el manejo del software y siguieron sin dificultad las acciones indicadas por el investigador.

- ***Cuarta sesión. Primera parte de la actividad 1.***

En esta sesión iniciamos con la primera parte de la actividad 1, la cual era de carácter exploratorio, y consistió en una simulación física apoyada en el lanzamiento de monedas. Esta actividad se trabajó en forma individual y se acumularon los resultados de los 11 estudiantes para lograr un mayor número de muestras. Los registros de los datos, sus gráficas y sus observaciones los realizaron sobre sus hojas de trabajo.

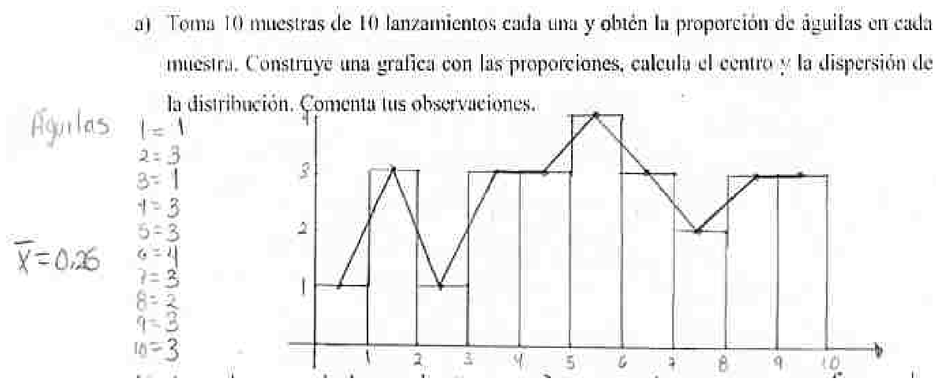
Actividad 1
Considera la población que se compone de todos los resultados que obtendríamos si lanzáramos una moneda al aire un número infinito de veces. Si la moneda es justa se espera que la proporción de águilas de esta población sea igual a 0.5

Primera parte

a) Toma 10 muestras de 10 lanzamientos cada una y obtén la proporción de águilas en cada muestra. Construye una gráfica con las proporciones, calcula el centro y la dispersión de la distribución. Comenta tus observaciones.

b) Acumula tus resultados con los tus compañeros y construye una nueva grafica con los valores de las proporciones. Centra tu atención en el centro, la dispersión y la forma de la distribución. Comenta tus observaciones.

Un hecho que llamó la atención del investigador fue el error que todos los estudiantes cometieron al graficar los 10 valores de las proporciones obtenidas. El error consistió en colocar en forma temporal a como fueron sucediendo los valores de las proporciones, sin tener que en cuenta la frecuencia con que aparecían. Un ejemplo de ello es la gráfica hecha por Denis.



Gráfica realizada por Denis

Una vez señalado el error por parte del investigador, los estudiantes procedieron a corregirlo y no lo repitieron en la parte donde se acumularon los resultados.

No obstante que el propósito principal de la primera parte de la actividad (simulación física) eran volver más concreto el proceso de simulación con Fathom, y ante los pocos datos de que disponían, los estudiantes tuvieron un primer acercamiento con propiedades importantes que nos proponíamos investigar con mayor detalle en la parte de simulación computacional. Algunas observaciones fueron las siguientes:

- La media de la distribución coincide con el parámetro poblacional.
- La forma de la distribución muestral tiende a ser acampanada cuando se tienen muchas muestras.

- Como consecuencia de lo anterior, los valores más frecuentes de las medias muestrales se encuentran alrededor del centro de la distribución muestral. Otra manera de decirlo sería que los valores extremos son menos frecuentes.

- ***Quinta sesión: Segunda parte de la actividad 1 .***

En esta sesión abordamos la segunda parte de la actividad 1 (simulación con Fathom).

Segunda parte

c) Utiliza Fathom para simular el proceso de muestreo, considerando muestras de tamaño 10, 20 y 30. Registra tus resultados en el cuadro que se te proporciona.

d) Calcula el centro y la dispersión de las distribuciones muestrales teóricas y compara los resultados con los de las distribuciones muestrales obtenidas por simulación.

En esta parte, se pedía a los estudiantes calcularan las medidas descriptivas de la distribución muestral teórica y la distribución empírica obtenida mediante simulación. La hoja de trabajo incluía un cuadro donde se debían colocar la forma de la distribución, su media y su dispersión. Se pretendía que comparan los resultados obtenidos para los diferentes tamaños de muestra e identificaran patrones, además de que compararan los resultados teóricos con los resultados de la simulación. Esta idea de dibujar la forma de la distribución, fue desechada en las siguientes actividades, pues los estudiantes invirtieron mucho tiempo en ello y finalmente la calidad de los dibujos no permitieron hacer una comparación entre ellas. Se optó entonces por hacer la comparación directamente de la pantalla de la computadora.

En esta parte de la actividad los estudiantes tuvieron algunas dificultades con el manejo del software, dado que era su primer actividad y aún no estaban lo suficientemente familiarizados con él. Las principales dificultades que se observaron fueron las siguientes:

- Dificultades para definir la población
- Dificultades para tomar las muestras. Confundían la cantidad de muestras con el tamaño de la muestra.
- Dificultad para introducir la fórmula del estadístico en forma correcta.

En el capitulo 6 daremos mayores detalles de estas dificultades.

Debido a los problemas que se presentaron con el manejo del software y después recibir la ayuda del investigador para resolver dichas dificultades, solo 7 estudiantes lograron construir la distribución muestral para el tamaño de muestra 10, en el tiempo de la sesión, mientras que el resto no logró terminar el trabajo. Se quedó en el acuerdo que la siguiente sesión se continuaría con las muestras de tamaño 20 y 30 aprovechando la estructura del programa para la muestra de tamaño 10.

- ***Sexta sesión. Continuación con la segunda parte de la actividad 1.***

La quinta sesión se inició corrigiendo los errores de algunos estudiantes que no lograron construir la distribución muestral para el tamaño de muestra 10 en la sesión anterior. Posteriormente construyeron las distribuciones para los tamaños de muestra 20 y 30. En esta sesión se tuvieron menos dificultades en el manejo del software. Una vez concluida la construcción de las tres distribuciones, los estudiantes anotaron sus observaciones y conclusiones centrando su atención en la forma, el centro y la dispersión de las distribuciones en relación con el tamaño de la muestra.

Observamos que muchos estudiantes mostraban cierta comprensión de las propiedades de las distribuciones muestrales aunque sin un manejo adecuado del lenguaje, y centraban su atención en aspectos poco relevantes como son las milésimas de las medidas y en las alturas de las distribuciones en lugar de la dispersión.

- ***Séptima sesión. Primera parte de la actividad 2***

En esta sesión iniciamos con la primera parte de la actividad 2, la cual consistió en una simulación física apoyada en bolsas de chocolate de la marca M&M´s. A esta actividad, igual que la anterior le dimos el carácter de introductoria y fue trabajada en forma individual, para posteriormente acumular los resultados de todos.

Actividad 2
En las bolsas de chocolates de la marca M&M´s en su presentación de chocolate con leche (bolsa café) aparecen chocolates de diversos colores. Según la compañía, el 30% de ellos son de color café.

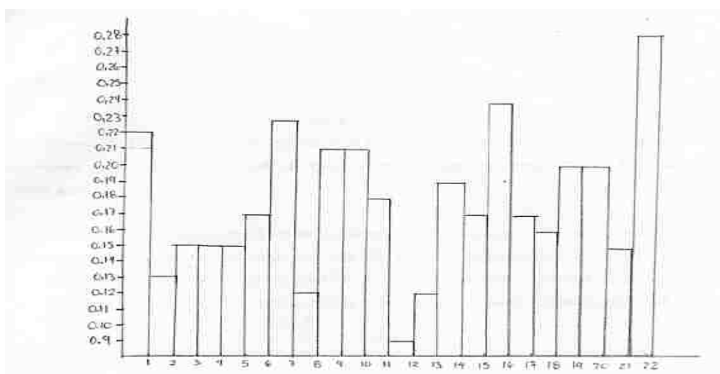
Primera parte

a) Selecciona dos bolsas de chocolates y determina la proporción de chocolates color café en cada una. Acumula tus resultados con los de tus compañeros y construye una gráfica. Determina el centro y la dispersión de la distribución. Comenta tus observaciones centrado tu atención en la forma, centro y dispersión de la distribución muestral.

b) Determina la proporción de chocolates de color amarillo en cada bolsa y reúne tus resultados con los de tus compañeros. ¿Cuál sería tu estimación de la proporción de amarillos en la población de M&M´s?

A cada estudiante se le proporcionaron dos bolsas de chocolates en su presentación Milk, que de acuerdo con la página de internet de la empresa, el 30% de la producción es de color café. La idea de esta actividad fue tomar muestras físicamente una población con distribución binomial con parámetro $p = 0.3$, a diferencia de la anterior actividad donde se abordó una población con distribución binomial con parámetro $p = 0.5$.

De nueva cuenta, varios alumnos cometieron errores al graficar la distribución de las proporciones, a pesar de la advertencia que se les hizo en la actividad anterior. Tal es el caso de Denis, que por segunda ocasión realizó más su gráfica.



Grafica de Denis

En la gráfica puede verse como Denis dibuja cada valor muestral conforme fue apareciendo en el transcurso del tiempo.

Los alumnos señalan en sus observaciones que no creen que la compañía llene los sobres con el 30% de chocolates café, pues la media de 22 bolsas (muestras) fue de 18 chocolates café y sólo una bolsa se acercó al valor del parámetro que fue de 28%. Este resultado es poco probable, pero sin embargo ocurrió. Nos hubiera gustado obtener más bolsas con más del 30% de chocolates café para que la distribución de muestras hubiera estado más centrada en el valor del parámetro; pero lo importante es que los alumnos desconfían de la declaración, que en promedio el 30% de los chocolates son café, dado que 22 muestras arrojan un valor mucho menor.

- ***Octava sesión. Segunda parte de la actividad 2***

Segunda parte

c) Simula el proceso anterior mediante Fathom, tomando muestras de tamaño 5, 15 y 30. Registra tus resultados en el cuadro que se te proporciona.

d) Compara los resultados teóricos con los que obtuviste mediante simulación.

En esta sesión iniciamos con la simulación computacional del problema. Previo a esta actividad ya se había simulado un población binomial (lanzamiento de una moneda) con parámetro $p = 0.5$, por lo que esperábamos que los estudiantes transfirieran su aprendizaje a la nueva situación (binomial con $p = 0.3$). Sin embargo, estábamos conscientes que el hecho que hubiera 6 colores diferentes de chocolates y de los cuales sólo se sabía que el 30% era color café, les iba a representar problemas a los estudiantes para modelar la población, y efectivamente así ocurrió.

Se observó que los estudiantes hacían esfuerzos por establecer el modelo para la población y no lo lograban; algunos lo hicieron incorrectamente y continuaron con el proceso, sin embargo, en las siguientes etapas se percataban que algo andaba mal. Otros no lograban pasar de la modelación y llamaban al investigador para que les ayudara. Se les pidió que hicieran un poco más de esfuerzo por resolver la situación y que de no lograrlo se les ayudaría a saltar este obstáculo. En el momento que todos habían modelado la población, ya sea correcta o incorrectamente se les pidió que guardaran su trabajo para tener evidencia de lo que hicieron. También se les pidió que mediante la opción de texto que dispone Fathom dieran una explicación del porque habían modelado la población de la forma como lo hicieron. La ayuda fue individual y siempre promoviendo la reflexión para que ellos mismos modelaran la población y que no fuera el profesor quien les diera la solución. Cabe aclarar que sólo 2 estudiantes (Libnia y Edgar) lograron modelar la población sin ayuda. La mayor parte de la sesión se invirtió en formular el modelo de la población y apenas se empezó a construir la distribución muestral para el tamaño de muestra igual a 5.

A manera de conclusión de esta parte de la actividad podemos señalar que el paso de la lectura del problema a la modelación en Fathom ha sido difícil para los estudiantes. Parece ser que la simulación física previa con los chocolates poco ayudó a identificar las variables relevantes para modelar la población. Se observó además que algunos estudiantes incurrieron en el sesgo de equiprobabilidad al colocar todos los colores en la misma proporción, mientras que otros asignaban arbitrariamente los colores en distinta proporción. En el capítulo 6 se proporcionan todos los detalles de estas dificultades. En cuanto al manejo del software se observaron menos errores que en la actividad anterior, solo 2 alumnos cometieron errores de sintaxis al introducir la fórmula del estadístico, pero una vez corregidos lograron construir la distribución sin mayor dificultad.

- ***Novena sesión. Continuación con la segunda parte de la actividad 2.***

En esta sesión se les pidió a los estudiantes que concluyeran las distribuciones muestrales que habían empezado y que escribieran sus conclusiones sobre el comportamiento de las distribuciones, teniendo en cuenta el centro, la forma y la dispersión. Observamos que al comparar los resultados teóricos con los que proporciona Fathom, los estudiantes centran su atención en la mínima diferencia que resulta en ocasiones y no observan la convergencia de los resultados empíricos a los teóricos. En esta sesión también se resolvió el inciso b, que pide una estimación de los chocolates amarillos que hay en la población, con base en las 22 bolsas que se examinaron. Los resultados fueron que algunos estudiantes no utilizan la media de las proporciones muestrales para estimar la proporción poblacional.

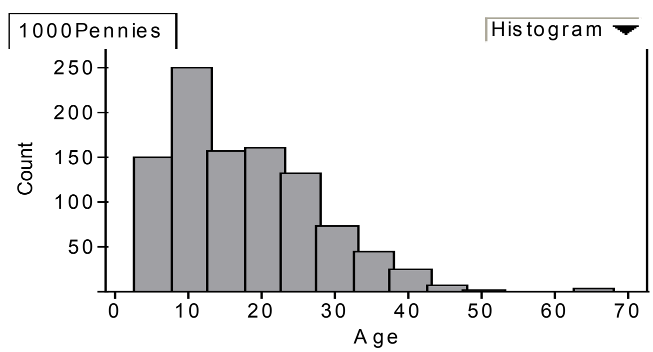
- ***Décima sesión. Actividad 3 y Actividad 4.***

La primer media hora se dedicó a que los estudiantes concluyeran la actividad 3 que se les había dejado de tarea. Sin embargo, no se obtuvieron los resultados que se esperaban, pues muchos no la concluyeron por lo que nos se reportan los resultados de esta actividad en el documento. En la segunda parte de la sesión se inició con la actividad 4, la cual no contemplaba simulación física, solo con Fathom; además, esta actividad no requería formular el modelo de la población, ya que esta se les proporcionó mediante una colección datos a través de un archivo, y era la primer actividad que además de explorar conceptos se pedía el calculo de probabilidades. La idea de esto, es que pensamos en una población con un comportamiento irregular y la forma más fácil de hacerlo era de esta manera, por lo que no se presentaron en este caso los problemas con la formulación de la población que se presentaron en las actividades anteriores.

Además, es importante señalar que se hicieron algunas modificaciones a la actividad a como había sido concebida originalmente, con el propósito de enfocar más la atención de los estudiantes a los conceptos y propiedades que nos interesaba investigar, ya que en las actividades anteriores no se habían centrado en los aspectos de nuestro interés. En particular se les pidió que enfocarán su atención en las cuatro distribuciones obtenidas mediante simulación para que identificaran patrones, hicieran la comparación la población y tuvieran en cuenta el efecto del cambio en el tamaño de muestra, de igual forma se pidió que calcularan en forma teórica la distribución muestral y compararan los resultados con los obtenidos mediante simulación.

Actividad 4

Se han recolectado 1000 monedas y se observó su fecha de fabricación y su edad al presente año. Los datos han almacenado en un archivo de Fathom denominado *Monedas.ftm*.



Considera las 1000 monedas como una población.

a) Determina el centro y la dispersión de la población.
b) Utiliza Fathom para construir distribuciones muestrales de la población anterior para muestras de tamaño 5, 10, 15 y 30. Registra los resultados en el cuadro que se te proporciona a continuación:
c) Compara entre sí el centro y la dispersión de las cuatro distribuciones muestrales y saca tus conclusiones.
d) Compara el centro y la dispersión de las cuatro distribuciones muestrales con el centro y la dispersión de la población. Saca tus conclusiones.
e) Compara la forma de las distribuciones muestrales con la forma de la población. ¿Qué pasa cuando el tamaño de la muestra se incrementa?
f) Calcula el centro y la dispersión de las cuatro distribuciones muestrales utilizando las fórmulas que conoces y concentra los resultados en el cuadro siguiente:

g) Compara los resultados que obtuviste mediante simulación con los que dan las fórmulas. Saca tus conclusiones.
h) Intenta enunciar en la forma más precisa posible, las propiedades (forma, centro y dispersión) de las distribuciones muestrales que has observado.
i) Ahora, ¿Cuál será la probabilidad que si se toma una muestra de tamaño 30, la edad promedio de las monedas sea mayor de 10 años? . Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como con Fathom.

Consideramos que fue una actividad muy productiva, pues los estudiantes empezaron a enfocarse e identificar conceptos y propiedades, como es el caso del teorema del limite central y el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad. Además, pudieron apreciar que la proximidad entre resultados teóricos y empíricos.

A estas alturas, eran cada vez menos los problemas con el software y era prácticamente una alumna la que seguía presentando dificultades para introducir correctamente la formula para la media de la muestra. Otro aspecto que es fuente de dificultad y que se observó por primera vez, es cuando los estudiantes hacen el ajuste de la distribución teórica con la empírica, pues confundían las medidas de la distribución muestral y las medidas de la población.

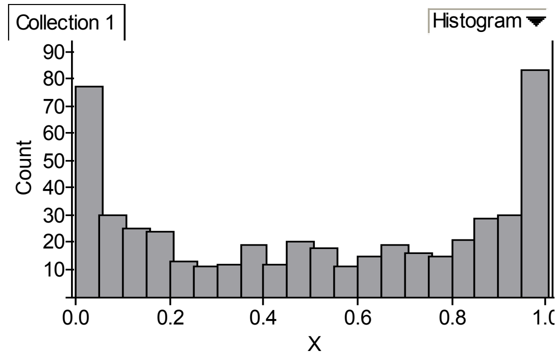
Sesión 11. Actividad 5.

Al igual que la actividad anterior, la actividad 5 tampoco requería formular el modelo poblacional, ya que esta fue proporcionada mediante una colección de datos. Seguimos el mismo lineamiento de modificar la actividad para enfocar más la atención de los estudiantes y que comparar resultados entre distribuciones y entre resultados teóricos y empíricos.

Cabe señalar, que ambas actividades fueron desarrolladas sin mayor contratiempo, pues los estudiantes ya había aprendido a utilizar el software y se había apropiado de los pasos requeridos para el proceso de simulación.

Actividad 5

Consideremos los siguientes 500 datos como una población cuya forma se muestra en la siguiente gráfica:



Los datos se han almacenado en un archivo de Fathom cuyo nombre es *Beta.ftm*

a) Determina el centro y la dispersión de la población.
b) Utiliza Fathom para construir distribuciones muestrales de la población anterior para muestras de tamaño 1, 10, 20 y 30. Registra los resultados en el cuadro que se te proporciona a continuación:
c) Compara entre el centro y la dispersión de las cuatro distribuciones muestrales entre sí, y con el centro y la dispersión de la población. Saca tus conclusiones.
d) Compara la forma de las distribuciones muestrales con la forma de la población.
e) Calcula el centro y la dispersión de las cuatro distribuciones muestrales utilizando las fórmulas que conoces y concentra los resultados en el cuadro siguiente:
f) Compara los resultados que obtuviste mediante simulación con los que dan las fórmulas. Saca tus conclusiones.
g) Intenta enunciar en la forma más precisa posible, las propiedades (forma, centro y dispersión) de las distribuciones muestrales que has observado.
h) Ahora, ¿Cuál será la probabilidad que si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 30, la media sea menor a 0.3? Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como por simulación. Comenta tus conclusiones.
i) ¿Cuál será la probabilidad que si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 20, la media sea menor a 0.3? Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como por simulación. Comenta tus conclusiones.

Sesión 12. Repaso de contenidos vistos.

Esta sesión se dedicó a dar un repaso de los contenidos vistos, pues se estaba regresando de un período de dos semanas de inactividad, ya que los estudiantes estuvieron en un período de exámenes que el IPN aplica a la mitad de cada semestre. El instructor tomó uno de los ejemplos ya vistos y lo trabajó paso a paso, explicando a los alumnos y pidiendo su participación en la explicación del porqué de ciertas propiedades y resultados en los ejercicios tratados. Se hizo énfasis en que vieran la variabilidad muestral como una variable que está en función del tamaño de la muestra, igualmente la forma y la dispersión de la distribución muestral. Se empezó con un tamaño de muestra de 10 y se pidió que observaran el rango de variación de la media muestra y lo compararan con la media poblacional. Se les pidió entonces que dieran una opción para disminuir la variabilidad y que la media muestral estuviera más cercana a la poblacional, solo dos estudiantes dijeron que aumentado el tamaño muestral. Esto no hace reflexionar que no ha sido fácil que ellos capten el efecto del tamaño de muestra en la variación de los resultados. Aunque en los ejercicios lo han mencionado ha sido porque observan como el valor de la desviación estándar disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra. Pero en el repaso se abordó de otra manera, tomando muestras una a una y viendo directamente la variación de la media muestral y no con la desviación estándar. Respecto a la forma se dan cuenta de inmediato de la normalidad de la distribución, pero no atienden que la población puede tener forma muy distinta y a pesar de eso la distribución muestral tiende a la normalidad.

En las sesiones se han percatado de la relación entre tamaño de muestra y dispersión observando como varían los valores de la desviación estándar, pero en el repaso se les pidió que vieran la relación observando los histogramas y no centran su atención en la variabilidad o dispersión, sino en las irregularidades del histograma. No les resulta fácil decir que a mayor tamaño de muestra, menor variabilidad observando las graficas.

Sesión 13. Actividad 7.

En esta sesión iniciamos con la actividad 7, en lugar de la actividad 6, que la trasladamos para la siguiente sesión. La actividad trató de una máquina embotelladora de refrescos, cuyo volumen sigue una distribución normal y solo se centraba en calcular probabilidad de resultados muestrales. Esta fue la primera y única actividad que contemplaba una distribución continua, lo que de entrada causó dificultad a los alumnos para generar la población, pues las actividades previas consistían de distribuciones discretas y la forma de introducir la población difiere según el tipo de variable. Con el propósito de que fueran ellos mismos los que encontraran la solución, se les pidió que revisaran su manual de Fathom, donde aparecía un ejemplo similar, sin mayor problema entonces, generaron la población.

Actividad 7:
Una máquina de refrescos se ajusta para que la cantidad de bebida que sirve promedie 240 ml con una desviación estándar de 5 ml. La máquina se verifica periódicamente tomando una muestra de 40 bebidas y se calcula el contenido promedio (media).

- ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra seleccionada al azar se tenga un contenido promedio menor que 239ml.?

- ¿Si la máquina se ajusta cuando el contenido promedio de la muestra sea menor a 239 ml y mayor a 241 ml. ¿Qué proporción será ajustada la máquina?

a) Construye con Fathom la distribución muestral de la media para muestras de tamaño 40 y contesta los incisos anteriores.
b) Resuelve teóricamente los incisos y compáralos con los resultados de la simulación.
c) Si en lugar de tomar una muestra de 40 bebidas, se toma una muestra de 20 bebidas. ¿Qué pasa con la proporción de veces que la máquina es ajustada?

Un error que llamó la atención del investigador, debido a que lo cometieron la mayor parte de los alumnos, fue que con una sola muestra pretendían responder los incisos que se les plantearon, en lugar de hacerlo con la distribución muestral. Esta situación no se había presentado en las actividades anteriores donde los estudiantes ya habían adquirido la rutina de seleccionar muchas muestras, por lo que atribuimos a las dos semanas de receso por exámenes el olvido del proceso. Esta dificultad ha sido reportada por Saldanha y Thompson (2002), donde los estudiantes no consideran la distribución de las muestras y en cambio utilizan solo una de ellas para calcular probabilidades de resultados muestrales. Es decir, los estudiantes confunden la distribución de una muestra con la distribución muestral, sobre todo porque en poblaciones normales, y con tamaños grandes de muestra, ambas son muy parecidas en forma (acampanada).

Sesión 14. Continuación de la actividad 7.

En esta sesión se continuó con el problema de los refrescos, de hecho decidimos volver a iniciarlo de nuevo, dado que en la sesión anterior se cometieron algunos errores. Observamos que sin mayor dificultad los alumnos resolvieron el problema, salvo al momento de calcular las probabilidades algunos tuvieron problemas para introducir el código adecuado, sobre todo con los signos de desigualdad. Sin embargo, cuando compararon los resultados teóricos con los de la simulación se dieron cuenta que eran bastante diferentes. Entonces los alumnos, con la certeza que habían hecho bien el procedimiento con Fathom, pensaron que el error podría estar en los cálculos con las fórmulas o en el manejo de las tablas. Se dieron a la tarea de revisar su procedimiento una y otra vez, sin encontrar error alguno, entonces de nueva cuenta generaron la distribución muestral en Fathom llegando a los mismos resultados que tenían anteriormente. Estos resultados desconcertaron al mismo investigador que al revisar el problema se dio cuenta que los alumnos estaban bien en todo el proceso de simulación, solo que la población de

1000 refrescos para el caso de una variable continua resultaba insuficiente para dar los mismos resultados que en el caso teórico, aumentó a 2000 refrescos y los resultados coincidieron. En la próxima sesión se plantea que los estudiantes corrijan de nuevo esa situación y terminen el problema.

Sesión 15. Terminación de la actividad 7.

En esta sesión se terminó la actividad 7 después de 2 sesiones de trabajo con ella. El desarrollo de la actividad transcurrió sin mayores problemas en los equipos, excepto con el equipo de Mónica y Coral que tuvieron errores en el manejo de tablas, lo que provocó que no coincidieran sus resultados teóricos con los de la simulación.

Para calcular las probabilidades pedidas, se podían utilizar diferentes alternativas. Una de ellas consiste en introducir una fórmula en la tabla resumen, otra es utilizar un filtro con los casos deseados y determinar con una calculadora la proporción de casos filtrados. La última opción tiene mucha utilidad si se complementa con el sombreado de los casos filtrados sobre la distribución muestral. Sin embargo, muchos estudiantes solo filtraban pero no sombreaban.

Los resultados con el software y teóricos fueron similares, por lo que señalan que el software si es confiable. Hacen un buen manejo teórico y de las tablas. Señalan que la probabilidad aumenta cuando disminuye el tamaño de la muestra (correcto) y que a mayor tamaño de muestra el error es menor (correcto).

Mónica y Coral, después de correr dos veces la simulación encuentran resultados diferentes con los teóricos, pues están manejando mal las tablas. Utilizan dos distribuciones muestrales para resolver cada inciso, cuando lo pueden hacer solo en una y utilizan la opción de filtro al igual que Viridiana y Denis.

Jorge y Omar realizaron bien la simulación y encontraron resultados similares con los teóricos, después de haber aprendido a manejar bien las tablas, pues al principio no lo hacían. Hicieron un manejo bastante eficiente del software pues agregaban la distribución muestral teórica a la empírica aunque de manera incorrecta, pues no establecían las conexiones apropiadas entre ellas. En un principio tenían problemas con el conectivo, pues utilizaban *and* en lugar de *or*, lo que se derivó de un error de redacción en la pregunta de la actividad.

Sesión 16. Actividad 6.

En esta sesión se inició con la actividad 6 que trataba de una población discreta con distribución binomial y fue la primer actividad donde se video grabó a una pareja de estudiantes (Libnia y Edgar) y el resto trabajó en forma en parejas.

Actividad 6
En una fábrica de cojinetes para automóvil se ha desajustado una máquina y el 30% de su producción está saliendo defectuosa.

- Si se toma una muestra de tamaño 80. ¿Cuántos cojinetes defectuosos esperarías en la muestra?
- ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 80 existan 30 ó más defectuosos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan 20 o menos defectuosos en la muestra de tamaño 80?

a) Utiliza Fathom para construir la distribución muestral de la proporción de defectuosos.
b) Contesta los incisos del problema con los resultados de la simulación.
c) ¿Cómo podrías verificar que los resultados de la simulación están correctos?.
d) Realiza la verificación

En esta actividad se presentó un problema cuando los estudiantes estaban resolviendo la actividad. El problema consistió en que la información sobre los cojinetes defectuosos se da en porcentaje, mientras que las probabilidades que se piden están en cifras absolutas. Todos los estudiantes calcularon proporciones como lo habían venido haciendo en las actividades anteriores, pero al calcular la probabilidad se dieron cuenta que debían cambiar desde un principio la fórmula de la proporción de defectuosos en las muestras por la cifra absoluta. Lo comentaron con el investigador y ellos mismos procedieron hacer la corrección.

Sesión 17. Actividad 8.

Actividad 8
Una tienda departamental ha decidido premiar la preferencia de sus clientes; para ello, dispone de una tómbola con 500 esferas, todas con premio y en igual proporción. Las esferas están marcadas con premios que van desde 1000 hasta 15000 pesos. El cliente selecciona de manera aleatoria 3 esferas y su premio consiste en la media de las cantidades seleccionadas. Después se regresan las esferas a la tómbola para que un nuevo cliente haga su selección.
Utiliza Fathom para contestar lo siguiente:

1. Construye la distribución muestral de la media.
2. ¿Cuál crees que sea la ganancia media esperada de los clientes?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el premio de una persona sea menor a 10000 pesos?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que el premio de una persona se encuentre entre 3000 y 10000 pesos?
5. Interpreta los resultados. Explica que significan.
6. Comprueba teóricamente los resultados usando Fathom o papel y lápiz.

Se observó de nueva cuenta que los estudiantes tuvieron dificultades para formular el modelo de la población, de hecho hicieron muchos intentos hasta que lograron formularla. En sus primeros intentos, trataban de utilizar la distribución normal, posteriormente y dado que el problema señala que existe igual proporción de premios buscaron la opción *random* en su versión *randominteger*, sin embargo tampoco obtenían los resultados deseados. Algunos les resultaban decimales y a otros enteros, pero se trataba que los premios eran múltiplos de 1000. Algunos recordaron el parecido del problema con el de los chocolates y empezaron a introducir la población directamente, a otros se les tuvo que hacer la sugerencia.

En esta sesión se videograbó a Gerardo y Jorge y los detalles de su proceso se muestran en la transcripción.

Sesión 18. Actividad 9.

Se dio inicio a la última actividad. Se video grabó a Omar y Ana Lilia, el resto de los alumnos trabajó en parejas. En esta ocasión no se tuvo mayor dificultad en la formulación del modelo, pues se trataba de un ejemplo sencillo que ha había sido abordado en la familiarización del software. Se observó que los alumnos se habían apropiado del procedimiento para resolver problemas, ya que cuando lograban pasar la etapa de modelación no tienen mayor problema.

Para este momento, hemos observado en las hojas de trabajo de los estudiantes que han identificado importantes propiedades de las distribuciones muestrales y han resuelto el problema correctamente. Esto ha sido producto de un proceso continuo y progresivo donde se han ido aproximando cada vez mas a los conceptos y producto de haberse familiarizado con la herramienta.

Sesion 19. Entrevistas.

Esta sesión la dedicamos a entrevistar algunos estudiantes para conocer a un mayor nivel de profundidad los significados que construyeron sobre los conceptos involucrados.

Sesión 20. Cuestionario posterior a las actividades.

En esta sesión aplicamos un cuestionario que fue diseñado teniendo en cuenta los mismos conceptos que el cuestionario diagnóstico, como son, el teorema del limite central, la variabilidad muestral, cálculo de probabilidades y el efecto del tamaño de muestra en el valor de las probabilidades.

Los resultados indican que los significados que los estudiantes tenían de las distribuciones muestrales han evolucionado producto de las actividades y el ambiente de simulación en que trabajaron. La evolución se ha dado no solo en términos cuantitativos, ya que fueron más los estudiantes que contestaron correctamente después de la enseñanza, sino también en términos cualitativos, al mostrar que han sido conscientes de diversas propiedades y las relaciones entre ellas. El análisis completo del cuestionario se presenta en el capítulo 8.

Capítulo 6

SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES EN UN AMBIENTE DE SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

6.1 Introducción

En este capítulo daremos respuesta a una de las principales preguntas que motivaron esta investigación: *¿Qué significados atribuyen los estudiantes a las distribuciones muestrales como resultado de una enseñanza basada en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica?*. La pregunta anterior ha surgido después de hacer un análisis profundo de la literatura sobre la utilización de herramientas computacionales en la educación estadística. Algunas investigaciones (por ejemplo, Lipson, 2000; Meletiou-Mavrotheris, 2004) sugieren que cuando éstas herramientas son diseñadas y utilizadas en forma adecuada en el salón de clases, poseen el potencial de ayudar a los estudiantes a que construyan y desarrollen ideas e intuiciones correctas sobre conceptos estadísticos, que difícilmente podrían desarrollar en un ambiente tradicional de lápiz y papel.

Una forma de emplear la tecnología, sugerida en diversos trabajos de investigación en educación estadística (por ejemplo, Behrens, 1997; Lipson, 1997; Moore, 1990; Biehler, 1991; Shaughnessy, 1992; Tanis, 1992 y Ben-Zvi, 2000) para ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión de las distribuciones muestrales, es a través de la simulación computacional. En muchos de estos trabajos se resalta la idea de que la simulación computacional permite a los estudiantes construir por ellos mismos la distribución muestral de un estadístico, enfocándose tanto en el proceso de construcción, como en el resultado final.

Recientemente han surgido paquetes de software educativos que permiten la simulación de distribuciones muestrales en un ambiente de estadística dinámica. El software que hemos utilizado en este trabajo (Fathom), pertenece a esta moderna línea de software dinámico que permite ligar los diversos conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales por medio de representaciones múltiples (gráficas, tablas, fórmulas) en forma simultánea, de tal manera que el cambio de datos o parámetros en una representación puede ser visualizado de inmediato en las demás representaciones. Pea (1987, p. 96) señala que un software con estas características contribuye a que los estudiantes accedan de una forma más inmediata a una comprensión intuitiva de las interrelaciones entre gráficas, fórmulas y otras representaciones de un concepto.

Nos hemos interesado entonces, por investigar el efecto que puede tener la herramienta de simulación computacional en un ambiente de estadística dinámica -como el que proporciona Fathom-, en los significados que los estudiantes atribuyen a las distribuciones muestrales.

En los siguientes apartados, dichos significados serán descritos de acuerdo con el marco teórico que guía esta investigación; esto es, por el sistema de prácticas matemáticas (representaciones, acciones, conceptos, propiedades, argumentaciones) que los estudiantes utilizan al resolver las situaciones-problema a las que se enfrentaron en las actividades de enseñanza, y la forma como el software influyó en la construcción de dichos significados.

De manera breve podemos adelantar que los significados construidos por los estudiantes, distan mucho de los significados que habían construido en la enseñanza tradicional que recibieron en el curso, antes de las actividades. El ambiente de simulación propició que hicieran uso de diversas representaciones de los conceptos involucrados, principalmente representaciones gráficas y numéricas. Sus acciones y procedimientos se enfocaron a construir la distribución muestral por ellos mismos, explorar conceptos, propiedades y calcular probabilidades, a diferencia del ambiente tradicional donde se enfatiza mucho en el uso de representaciones simbólicas y procedimientos rutinarios basados en fórmulas y tablas de probabilidad.

La herramienta computacional ha traído consigo que algunos procedimientos que son clave en el ambiente tradicional se vuelvan triviales, o ni siquiera se requieran en el ambiente de simulación como es la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad.

6.2 Marco de análisis de los resultados

El análisis de los significados se hará teniendo en cuenta los diferentes instrumentos de recopilación de información que se utilizaron en el estudio, como son las hojas de trabajo que los estudiantes utilizaron en cada actividad, el trabajo realizado con el software por cada estudiante y que diariamente fue entregado y guardado en un archivo de computadora, las entrevistas que se realizaron con algunos estudiantes y el examen posterior a las actividades donde fueron incluidos diversos conceptos y propiedades estrechamente relacionadas con las distribuciones muestrales.

El marco de análisis tendrá en cuenta las diferentes etapas que se requieren en el proceso de simulación de la distribución muestral de un estadístico y su aplicación a la resolución de un problema. Estas etapas son:

1. Formular el modelo de la población.
2. Construir la distribución muestral.
    a) Seleccionar una muestra de un tamaño dado de la población y definir sobre ella el estadístico de interés.
    b) Repetir el proceso de selección de muestras muchas veces y formar una colección con los estadísticos calculados, para dar lugar a la distribución muestral, tanto en versión tabular como en versión gráfica.

3. Seccionar o dividir la colección de estadísticos (distribución muestral) para determinar qué proporción (probabilidad empírica) de estadísticos están mas allá de un valor o entre dos valores dados.

La razón de utilizar este marco de análisis, es que en las etapas mencionadas del proceso de construcción e interpretación de las distribuciones muestrales, intervienen diversos conceptos y propiedades que son producto de diferentes acciones e interacciones con el software, y son de nuestro interés analizarlos por separado. En cada una de las etapas del proceso de simulación haremos un análisis cualitativo de los elementos puestos en juego por los estudiantes, así como un análisis semiótico de algunas de sus respuestas, para interpretar de manera más precisa sus significados. A su vez, en cada etapa se hará un análisis del papel que jugó la herramienta computacional en la construcción de los significados.

De acuerdo con el modelo teórico que guía el trabajo, los elementos que componen el significado de un concepto son:

- <u>Situaciones-problema (elementos fenomenológicos).</u> Campo de problemas o situaciones de las que emerge el concepto en estudio.
- <u>Lenguaje (elementos representacionales)</u>. Cualquier representación verbal o escrita que se utiliza para referirse o representar a los conceptos y propiedades que intervienen en un problema. Por ejemplo, notaciones, símbolos, tablas, gráficas, fórmulas.
- <u>Acciones (elementos procedimentales)</u>. Procedimientos o estrategias que se utilizan para resolver los problemas. Por ejemplo, definir el modelo de la población, calcular el valor del estadístico en cada muestra, acumularlos en una tabla.
- <u>Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)</u>. Conceptos, propiedades y sus relaciones con otros conceptos que se ponen en juego cuando se resuelve un problema. Por ejemplo, el teorema del límite central y su efecto en el comportamiento de las distribuciones muestrales.
- <u>Argumentaciones (elementos validativos)</u>. Argumentos o validaciones que se utilizan para obtener un resultado, comunicarlo a otros o convencerse a sí mismo de su validez. Por ejemplo, señalar que la variabilidad de una distribución disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra, apoyándose en que el denominador de

la fórmula contiene la raíz cuadrada del tamaño de la muestra, es un recurso validativo.

6.3 Situaciones-problema (elementos fenomenológicos)

En el significado institucional de las distribuciones muestrales (ver anexo 1), se observa que el campo de problemas del que emergen las distribuciones muestrales es bastante amplio para considerarlo en su totalidad en un estudio de esta naturaleza, en el cual se dispone de un tiempo y espacio limitado. Así que nos hemos restringido a una parte importante del campo de problemas que tiene que ver con hacer predicciones sobre las muestras seleccionadas de una población. Este tipo de situaciones es muy común en todos los libros de texto y se abordan previo al estudio de los métodos de inferencia. En ellas, se suponen conocidas, la distribución de la población y sus parámetros, o bien, el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande como para aplicar el teorema del límite central y suponer normalidad en la distribución muestral. Por ejemplo, la actividad 6 trata de lo siguiente:

En una fábrica de cojinetes para automóvil se ha desajustado una máquina y el 30% de su producción está saliendo defectuosa. Si se toma una muestra de tamaño 80.

a. ¿Cuántos cojinetes defectuosos esperarías en la muestra?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 80 existan 30 ó más defectuosos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan 20 o menos defectuosos en la muestra de tamaño 80?

Evidentemente el problema anterior trata de una población binomial con parámetro $p = 0.3$ y lo que interesa es conocer la probabilidad de que se presenten ciertos resultados en una muestra de tamaño 80. En este tipo de problemas se aplica un enfoque deductivo, dado que a partir de la población cuya distribución es conocida, se desea conocer información de las muestras seleccionadas.

En los contextos de aplicación que hemos identificado son muy comunes las situaciones de control de calidad, en especial las de inspección de productos de la industria suelen ser muy utilizadas en la enseñanza, probablemente porque en esas situaciones no es difícil suponer características en la distribución y realizar muestreos aleatorios. Otras situaciones familiares son la de sondeos de preferencias electorales, estudios de mercado y estudios que tienen que ver con medidas relacionadas con los seres humanos, como estaturas, calificaciones y coeficientes de inteligencia. Se considera que esas situaciones tienen sentido para los estudiantes, le proporcionan la posibilidad de imaginar de donde surgen los parámetros y de interpretar el sentido de los resultados.

En el siguiente cuadro se muestran las diferentes actividades y situaciones-problema que conforman el estudio, sus objetivos y algunas de sus características.

Actividad	Objetivo	Tipo de distribución poblacional	Etapas que se requieren*
1	Explorar conceptos y propiedades.	Discreta. Binomial con p=0.5	1, 2
2	Explorar conceptos y propiedades	Discreta. Binomial con p=0.3	1, 2
3	Explorar conceptos y propiedades. Resolver problema. Cálculo de probabilidades.	Discreta Uniforme.	1, 2 y 3
4	Explorar conceptos y propiedades. Resolver problema. Cálculo de probabilidades.	Discreta con forma irregular	2 y 3
5	Explorar conceptos y propiedades. Resolver problema. Cálculo de probabilidades.	Discreta con forma irregular	2 y 3
6	Resolver problema. Cálculo de probabilidades	Discreta. Binomial con p=0.3	1, 2 y 3
7	Resolver problema. Cálculo de probabilidades	Continua con distribución normal	1, 2 y 3
8	Resolver problema. Cálculo de probabilidades	Discreta Uniforme	1, 2 y 3
9	Explorar conceptos y propiedades. Resolver problema. Cálculo de probabilidades.	Discreta Uniforme	1, 2 y 3

En el caso de las actividades 4 y 5 no se requiere formular el modelo, pues la población fue proporcionada a través de una colección de datos.

6.4 Formulación del modelo de la población

* Se refiere a las etapas del proceso de construcción de la distribución muestral, señaladas en párrafos anteriores.

Definir el modelo de la población implica identificar y abstraer propiedades relevantes de la población, como el tipo de variable y el valor de sus parámetros, para plasmarlas a través de los recursos del software, de tal forma que su comportamiento en la representación computacional sea lo más similar posible al comportamiento que tiene en la realidad. En Fathom, el modelo consiste de una colección finita de casos que se introducen o generan mediante alguna instrucción en una tabla de datos. Sin embargo, la opción de reemplazo permite generar poblaciones hipotéticamente infinitas y constituye un recurso para lograr que los parámetros de la población se mantengan constantes en el proceso de muestreo.

El tipo de variable de la población influye en la forma de plantear el modelo. Si la variable es discreta, el modelo de la población se puede formular como un modelo de urna en el que se introducen directamente los elementos de la población hipotética, de acuerdo con el valor del parámetro (ver Fig. 1). Si la variable es continua, se requiere seleccionar una función del editor de fórmulas e introducir los parámetros que permitan reproducir las características de la población (ver Fig. 2).

En las diferentes actividades que conformaron el estudio, se pueden distinguir poblaciones discretas y poblaciones continuas. Entre las poblaciones discretas se encuentran de tipo binomial, uniformes e irregulares, mientras que en las poblaciones continuas se encuentra una población con distribución normal.

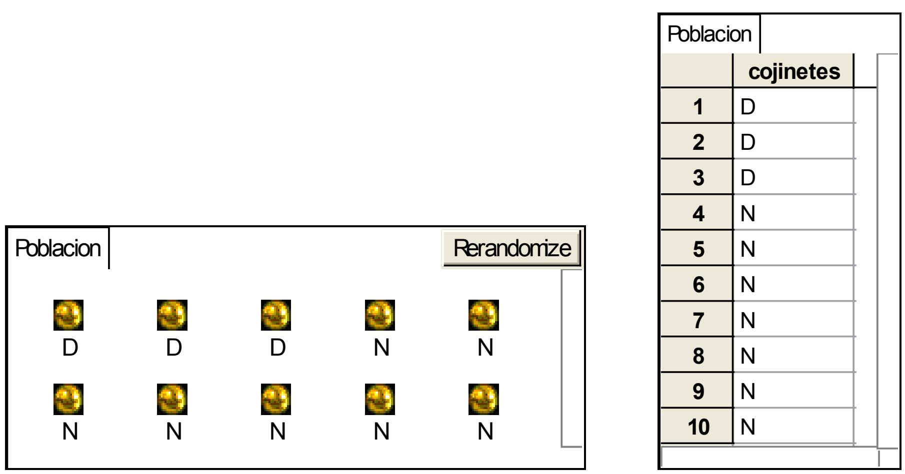


Fig. 1: Representación icónica y tabular de una población hipotética con distribución binomial con parámetro 30% defectuosos (D).

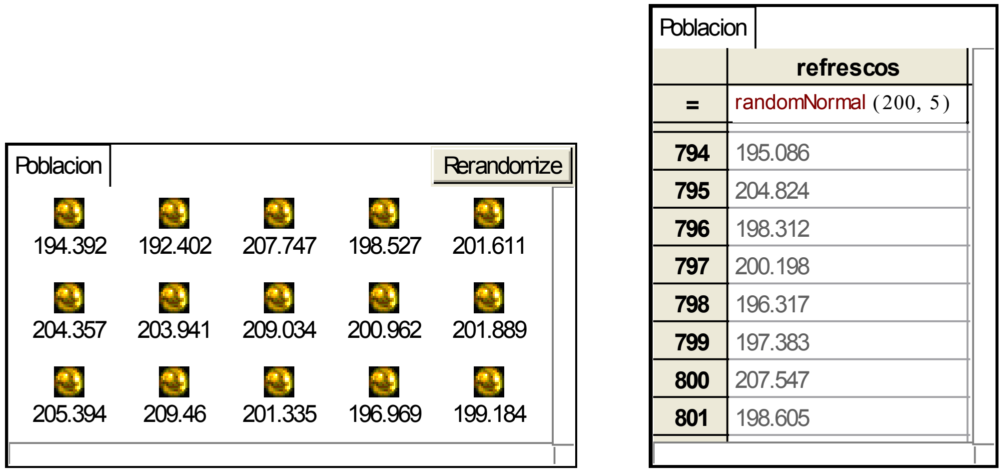


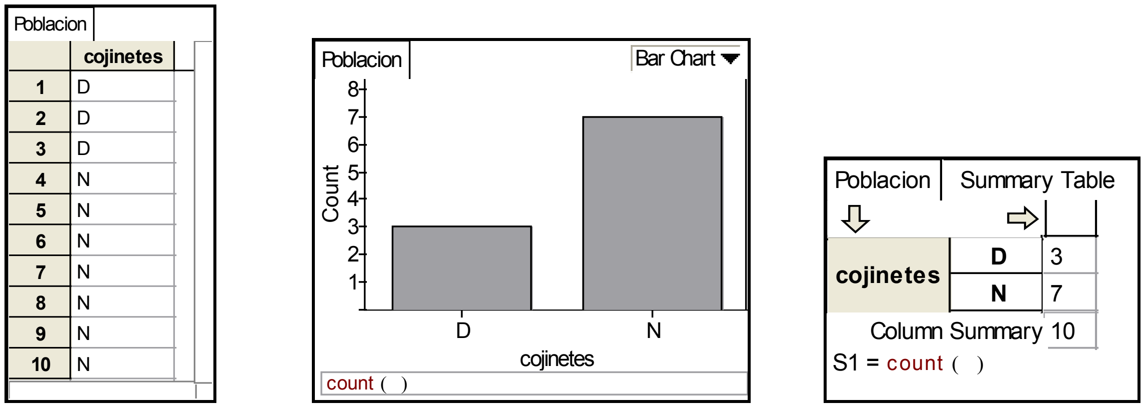
Fig. 2: Representación icónica, tabular y simbólica de una población con distribución normal con media 200 y desviación estándar 5.

6.4.1 Lenguaje (elementos representacionales)

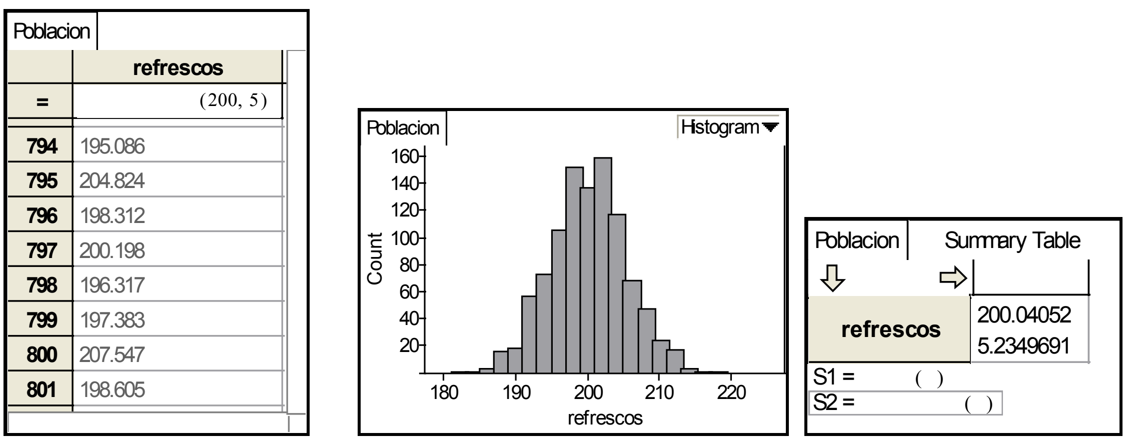
Las representaciones utilizadas en esta etapa fueron tabla de casos, para el caso de variables discretas; fórmulas para generar la población y tablas de casos, en el caso de variables continuas. En ambos casos se utilizaron gráficas para representar a la población y tablas resumen para calcular algunas de sus medidas descriptivas (Fig. 3).

Un elemento importante para una formulación correcta de la población tiene que ver con la selección de la representación adecuada. Si la población es discreta los elementos hipotéticos se escriben en una tabla de casos, si la población es continua los elementos se generan mediante una fórmula. Este criterio no fue atendido por la mayoría de los estudiantes en casi todas las actividades, a excepción de la última, donde todos los estudiantes establecieron el modelo sin ayuda del investigador. Mayores detalles de estas dificultades se proporcionan en el apartado de acciones y procedimientos.

Es importante señalar que en el caso discreto, el software permite una representación exacta de la población, colocando los diferentes elementos que la integran en la tabla de casos en la proporción indicada por el parámetro y con la opción de reemplazo activada. No así, en el caso de las poblaciones continuas, donde se requiere generar una gran cantidad de elementos para poder tener una buena aproximación a la población teórica. En la actividad donde se trabajó con este tipo de población, se generaron 2000 casos, pues se presentó la situación que con 1000 casos, los resultados teóricos con coincidían con los resultados de la simulación.



Caso discreto



Caso continuo

Fig. 3: Diferentes elementos representacionales en la formulación de la población

De todas las representaciones, la más utilizada fue la tabla de casos (numérica) pues su uso es obligado para formular la población. La tabla resumen con medidas descriptivas y la gráfica de la población no fueron utilizadas en todas las actividades, mientras que la fórmula (simbólica) para generar una población sólo fue requerida en la actividad 7, que trataba de una población continua. La representación icónica que permite ver a la población como una urna con bolas doradas dentro de ella (ver figuras 1y 2) no fue utilizada.

6.4.2 Acciones (elementos procedimentales)

Los procedimientos y estrategias que utilizaron los estudiantes en la formulación del modelo fueron: crear la población mediante una tabla de casos en el caso discreto, y generar la población mediante una fórmula en el caso continuo. En algunos casos, se construyeron gráficas y calcularon medidas descriptivas de la población. Sin embargo, lo que más dificultad presentó a los estudiantes fue formular el modelo de la población. Por ejemplo, en la actividad 1 (introductoria) que consistía de una población de resultados de una moneda cuando es lanzada un número indefinido de veces, sólo dos estudiantes (Ana Lilia y Edgar), lograron formular el modelo correctamente en el primer intento. Ana Lilia define 10 casos, en los que 5 eran águilas y 5 soles, mientras que Edgar define una población con 2 casos, 1 águila y 1 sol (Fig. 4).

MONEDA

	TABLA
1	S
2	S
3	S
4	S
5	S
6	A
7	A
8	A
9	A
10	A

Volado

	Aguilas
1	aguila
2	sol

Fig. 4: Poblaciones definidas por Ana Lilia y Edgar.

En el caso de Ana Lilia, aunque se dispuso de 10 elementos sin que hubiera necesidad de ello, tuvo en cuenta la equiprobabilidad de los resultados, mientras que Edgar solo introdujo los 2 resultados elementales que se pueden obtener al lanzar una moneda. El resto de los estudiantes no entendió cuáles eran los elementos que integran la población y escribieron resultados numéricos relacionados con las proporciones que ellos esperaban, en lugar introducir los resultados posibles en la población (ver figura 5). Una causa probable para que estos estudiantes hayan escrito los valores de las proporciones esperadas, en lugar de los elementos de la población, es que en la simulación física que previamente realizaron con monedas, se pedía que tomaran 10 muestras de 10 lanzamientos.

En la actividad 2 (población binomial con $p = 0.3$), esperábamos que los estudiantes transfirieran su aprendizaje de la actividad 1 (población binomial con $p = 0.5$) a la nueva situación, pues se trataba del mismo tipo de población, aunque con parámetro diferente, pero no fue así. En esta actividad, la principal dificultad radicó en que no identificaban que el parámetro poblacional era la proporción de chocolates café y el resto de colores no importaba en qué proporción apareciera, así que el hecho de que había 6 colores diferentes de chocolates les representó dificultad para plantear el modelo correctamente.

Collection 1

	moneda
1	0.5
2	0.5
3	0.5
4	0.5
5	0.5
6	0.5
7	0.5
8	0.5
9	0.5
10	0.5

Collection 1

	MONEDAS
1	0.4
2	0.5
3	0.3
4	0.5
5	0.6
6	0.7
7	0.5
8	0.6
9	0.4
10	0.5

Fig. 5. Modelos incorrectos de la población desarrollados por algunos estudiantes

En esta ocasión, sólo Edgar logró modelar correctamente el problema, al generar una colección con 10 casos en los que 3 son café y los demás son de otro color (Fig. 6). Obsérvese que Edgar no tuvo dificultad con los otros colores al etiquetarlos con la letra "o" y tuvo claro el valor del parámetro que era 30% de chocolates café, a los que etiqueta con la letra "c". Sin embargo el resto de los estudiantes tuvo diversos problemas en identificar el parámetro de interés.

Entre los diferentes modelos que se plantearon podemos identificar tres categorías:

1. <u>Formulación correcta</u>. Se identifica correctamente el valor del parámetro (chocolates café) y no se tienen en cuenta los demás colores. (caso de Edgar).
2. <u>Formulación parcialmente correcta.</u> Se identifica correctamente el valor del parámetro (30% de chocolates café) pero se involucra a los demás colores (Fig. 7).

M&MS

	Cafe
1	c
2	c
3	c
4	o
5	o
6	o
7	o
8	o
9	o
10	o

Fig. 6: Modelo de Edgar para la población de chocolates con 30% color café.

Por ejemplo, en los primeros tres modelos se utilizaron 10 casos, en los que 3 son café y el resto se asigna de manera arbitraria. Mientras que en el cuarto caso, que corresponde al modelo de Jorge, se utilizaron 100 casos, donde 30 corresponden a café y el resto se coloca de manera arbitraria.

Collection 1

	chocolate
1	CA
2	CA
3	CA
4	AM
5	AM
6	VE
7	VE
8	AZ
9	AZ
10	NA

Collection 1

	CAFE
1	C
2	C
3	C
4	A
5	R
6	A
7	R
8	R
9	A
10	R

Collection 1

	cafes
1	AMA
2	AZU
3	CAF
4	ROJ
5	AMA
6	AZU
7	CAFE
8	CAFE
9	ROJ
10	ROJ

M&Ms

	Cho_color
26	Cafe
27	Cafe
28	Cafe
29	Cafe
30	Cafe
31	Azul
32	Azul
33	Azul
34	Azul
35	Azul

Fig. 7: Diferentes modelos poblacionales desarrollados por los estudiantes.

3. Formulación incorrecta. Se consideran que todos los colores son equiprobables, por lo que no se identifica correctamente el valor del parámetro (Fig. 8).

M&M

	chcolates
1	cafe
2	amarillo
3	rojo
4	azul
5	naranja

Luneta

	cafe
1	r
2	c
3	m
4	z
5	n
6	v

Fig. 8: Modelos poblacionales incorrectos

Este tipo de dificultades persistió en las siguientes actividades. Por ejemplo en la actividad 6 (la actividad 3 no se reporta porque se dejó de tarea y no aportó resultados, mientras que las actividades 4 y 5 no requerían la formulación del modelo poblacional), que trataba de una población binomial con el 30% de cojinetes defectuosos, los estudiantes siguieron teniendo dificultades con la modelación, pues en la clase anterior habían trabajado con un problema de distribuciones muestrales de medias (caso continuo) y pretendían hacerlo de la misma manera, incluso algunos estudiantes argumentaban que hacían falta datos. Fue hasta que vieron que el problema se parecía al de los chocolates (actividad 2) cuando lo pudieron formular, después de varios intentos fallidos. Para tener una idea de las dificultades que se enfrentaron en esta actividad, veamos un extracto de la conversación entre dos estudiantes Libnia (L) y Edgar (E) que fueron video grabados en esta actividad.

> L: Primero vamos a generar la población cojinetes. Supongo que es la media [se refiere al tipo de distribución muestral que hay que construir]. Tengo una duda aquí, para generar la población forzosamente necesitamos algo.
> E: Generamos una población de 10 con 3 [acertadamente señala Edgar].
> L: Pero para generar la población necesitamos una fórmula. [en la clase anterior se trabajó un problema que requería de una fórmula para generar la población, en este caso no].
> L: Te acuerdas, entonces, que fórmula ponemos, ¿la de la media?
> E: ¿Randomnormal?
> [. . .]
> L: Ahora sí, la fórmula, randomnormal, ¿qué datos?
> E: ¿Qué le poníamos?, la desviación estándar.
> L: Los datos que nos daban, pero aquí, ¿qué datos nos dan?, nada más que el 30% de la producción se desajusta.
> E: No sé, en el otro nos daban la media
> L: Aquí no nos dan nada, ni media ni desviación. Nos dan un dato pero no es lo suficiente como para obtenerlo por nosotros
> E: Porque eso sería como que *p*, esto sería *p*

L: Sería 0.70
E: O uno menos 0.30
L: La media era p por q
E: ¿p por q?
L: Aja.
E: ¿0.30 por 0.70?
L: Si la fórmula de la media sería así, y la desviación estándar era n por p por q [continúan haciendo cálculos sobre el papel].
[. . .]
I: Yo recuerdo que Edgar al empezar el problema dijo algo que estaba muy acertado, no se si lo recordarás Edgar. [Edgar de inmediato toma el teclado y empieza a escribir correctamente la población].
E: 7 bien, 3 mal, esa es nuestra población.
L: ¡Ah! como las primeras que usábamos.
I: ¿Qué significa la *b*?
L: *b* son bien y *m* son mal, si tenemos la proporción del 30% bien y 70% mal, en la población de 10, 3 van a estar mal y 7 van a estar bien. (ver Fig. 9).

cojinetes

	poblacion
1	b
2	b
3	b
4	b
5	b
6	b
7	b
8	m
9	m
10	m

Fig. 9: Modelo establecido por Edgar en la actividad 6

Como vemos en la transcripción anterior, el proceso de formulación del modelo no fue sencillo para los estudiantes. Al empezar el problema abrían y cerraban cuadros sin estar convencidos de lo que estaban haciendo, tenían en mente el problema anterior que se trató de una distribución muestral de medias e intentaban hacerlo de igual manera, pero en este caso de trataba de una distribución muestral de proporciones y la información de la que disponían les generaba conflicto con el esquema del problema previo, pues consideraban que les hacían falta datos. Edgar llegó incluso a pensar en una aproximación a la distribución normal cuando señala que la media es igual a *n* por *p*, pues en el enfoque tradicional, en algunas situaciones se acostumbra aproximar una distribución binomial a una distribución normal, cuyos parámetros son $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$. Este estudiante había concebido desde un inicio correctamente el modelo de la población al señalar que debía contener 3 defectuosos de 10, pero se dejó llevar por las ideas de Libnia. Es hasta que el investigador decide señalarle que él había planteado algo correctamente desde el principio, cuando toma la iniciativa para formular el modelo. La principal dificultad en el problema era que Libnia no atendió el tipo de representación adecuado que era una tabla de casos, e insistía en modelarlo como una variable continua a través de una fórmula.

Por su parte, la actividad 7 trataba de una máquina que embotella refrescos con un volumen medio de 240 ml. y una desviación estándar de 5 ml. Este problema era el primero que trataba de una variable continua, por lo que el proceso para construir el modelo de la población es diferente a cuando la variable es discreta. En este caso se requiere seleccionar una función del editor de fórmulas, que genere una población con las características especificadas en el enunciado del problema. Sin embargo, los estudiantes intentaron generar la población como si se tratara de una variable discreta, pasando por alto que ahora se trataba de una variable continua con distribución normal. Fue hasta que se les pidió que revisaran un pequeño manual para uso del software que se les proporcionó cuando por sí solos pudieron formular el modelo.

En la actividad 8 se planteó un problema de una tómbola con esferas cuya distribución poblacional era discreta uniforme, e igualmente los estudiantes tardaron mucho tiempo en entender como formular el modelo. De nueva cuenta el proceso de formulación transcurrió con grandes dificultades para los estudiantes, hasta que el investigador sugirió la solución. Los estudiantes intentaron formular la población con una generación de números aleatorios con distribución normal, posteriormente buscaron otras alternativas en el editor de fórmulas y la mayoría lo intentó con el comando *randominteger* (ver figura 10). Este era un comando que no se había utilizado, pero les pareció apropiado para modelar la población, sin embargo, no cumplía las condiciones del problema, ya que se trataba de 15 esferas con premios múltiplos de 1000, desde 1000 a 15000 pesos y el comando proporciona resultados enteros como los que se muestran en la tabla de la figura 8.

Una información que causó conflicto a los estudiantes fue el tamaño de la población. En el problema se señalaba que la tómbola contenía 500 esferas y que al tomar una y ver el premio, esta se volvía a regresar a la urna, de tal manera que las características de la población permanecían constantes. Los estudiantes consideraban que el modelo de la población debería contener 500 datos, uno por cada esfera. Esta situación no se presentó en el caso de los chocolates y los cojinetes porque no se habló en ellas, del total de la población, solo de las proporciones en que participaban los elementos.

Sorteo

	esferas
490	6871
491	4462
492	9387
493	10155
494	2113
495	12519
496	9627
497	1810
498	12633
499	2245
500	7195

Fig. 10: Una propuesta de modelación para el problema de la actividad 8.

En la actividad 9 se trataba de un dado, y a diferencia del problema de la moneda con el que se iniciaron las actividades que también era un problema sencillo, en este caso no hubo ningún problema para formular el modelo. Al parecer a estas alturas de la experimentación, los estudiantes empezaron identificar los elementos esenciales de la población para poder plantear su modelo en forma exitosa. Un ejemplo de lo anterior, lo observamos en una entrevista con Omar (O) al terminar las actividades de enseñanza, cuando se le pidió que explicara una serie de preguntas en torno al proceso de construcción de una distribución muestral a través de simulación:

> I: Omar, ¿me muestras tu población?, ¿Cómo le hiciste para construirla?.
> O: Pues, lo que nos decía el problema era que solo el 30% de la población era los que salían defectuosos, entonces lo que hice fue tomar una población de 10 y poner el 30% defectuosos y aquí están. Cojines defectuosos, si y no, 7 no son defectuosos.
> I: ¿Por qué escogiste 10?
> O: Porque se me hizo más fácil
> I: ¿Qué otra cantidad podías haber escogido?
> O: Cualquier cantidad, solamente calculando el 30% que fueran defectuosos
> I: ¿Solo que se mantuviera el 30%?
> O: El 30%

Como puede verse, al final del estudio Omar ya había desarrollado cierta habilidad para identificar los elementos clave para formular la población. Él señala que escogió 10 elementos por facilidad, pero independientemente de la cantidad de elementos, hay que buscar que se mantenga el valor del parámetro.

6.4.3 Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)

En la formulación del modelo se requería que los estudiantes identificaran propiedades esenciales de la población para plasmarlas en el software a través de sus comandos. Dos propiedades importantes eran: el tipo de variable de los datos de la población y los parámetros poblacionales, como son la proporción de elementos de interés en el caso de las poblaciones discretas, la media y desviación estándar en el caso de las poblaciones continuas (solo se trató el caso de la normal). Sin embargo, dichas propiedades no fueron identificadas de manera sistemática por los estudiantes, lo que les hubiera ayudado en buena medida a la formulación del modelo.

Por ejemplo, la actividad 1 se trataba de una distribución binomial con parámetro $p = 0.5$, por lo que los resultados son equiprobables. Sólo dos estudiantes tuvieron en cuenta esta propiedad y modelaron la población correctamente. Por su parte en la actividad 2, sólo un estudiante logró modelar correctamente la población, al tener en cuenta que el parámetro de interés era el 30% de chocolates café, y que el color del resto de chocolates, no importaba. Por su parte en la actividad 6 que trataba con una población similar a la de la actividad 2, solo un estudiante (Edgar) tuvo en cuenta el valor del parámetro e identificó los dos posibles resultados de interés: los cojinetes defectuosos (30%) y los no defectuosos (70%). Mientras que en la actividad 7, que fue la única con distribución continua, los estudiantes no identificaron de nueva cuenta el tipo de variable y trataron de formular la población como si fuera discreta. En la actividad 8, los premios de la tómbola existían en igual proporción, sin embargo, los estudiantes con la idea de generar los datos mediante el comando *randominteger* tardaron un rato en identificar la propiedad.

6.4.4 Argumentos (elementos validativos)

Las pocas validaciones que se presentaron en esta etapa fueron de tipo verbal, de hecho la actividad 2, fue la única donde se pidió a los estudiantes expresaron las razones que los llevaron a plantear el modelo de la forma que lo hicieron, y utilizaron la componente de texto de Fathom para escribirlas. Por ejemplo, Ana Lilia y Mónica fueron casos representativos del grupo de estudiantes que consideraron equiprobables todos los colores. Ana Lilia argumentó:

> Yo escribi los seis colores que existen en una bolsa de M&M,
> r=rojo
> c=cafe
> m=amarillo
> z=azul
> n=anaranjado
> v=verde
>
> utilizando la segunda letra de los que comienzan con "a" y con ello calcular la proporcion que puede existir de lunetas color cafe en una bolsa.

Mientras que Mónica escribió:

> Decidi poner cafe, amarillo, rojo, azul y naranja por que son todas las opciones que tenemos en la bolsita de chocolates, como en el ejemplo del dado que tenia 6 caras la bolsita de chocolates tiene 5 sabores, es por eso que seleccione esa población.

Por su parte, Edgar que fue el único estudiante que contestó correctamente de primera intención argumentó:

> Observaciones: La poblacion fue definida por dos elementos, los chocolates Cafes "c" (objeto de nuestro estudio) y Otros "o", los chocolates cafes segun la M&M, su proporcion de la produccion total del los chocolates de bolsa cafe es del 30%, esto quiere decir que el 70% es de otro color de chocolates.
>
> Por lo tanto 0.70 + 0.30= 1.0, la poblacion total siempre es igual a uno. asi que hice equivalente el 30% y el 70%, en base a 10.
>
> Dejando como resultado el 30% de "c" y el 70% de otros.
>
> 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
> c c c o o o o o o o

En las argumentaciones de Edgar, se observa que tuvo perfectamente claro cual era el parámetro de interés y los posibles resultados de la población. No interfirió en el planteamiento de su modelo, el color de los demás chocolates. Aplica muy bien propiedades de un experimento Bernoulli (dos resultados posibles en cada ensayo) como el que involucraba el problema. Por su parte Omar pertenece al grupo de los estudiantes que asignaron correctamente el 30% de los chocolates café pero tuvieron en cuenta los colores restantes, asignándolos a su criterio.

La poblacion la elegi de esa forma, devido a que los chocolates eran de seis colores en cada muestra, ademas la probabilidad de los chocolates de color cafe es de 30%, por lo tanto, tome 10 chocolates (colores), de los cuales seleccione tres veces el color cafe, y las otras siete de colores distintos segun los chocolates.

En una entrevista con todos los estudiantes al final de las actividades donde se les cuestionó sobre diversos aspectos relacionados el proceso de simulación de las distribuciones muestrales, casi todos coincidieron en que la formulación del modelo fue la etapa más difícil de todo el proceso. En el siguiente cuadro se muestras sus respuestas.

Tabla 1: Respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Qué etapa del proceso de simulación te causó mas problemas?

Alumno	Respuesta
Edgar	La definición de la población y la definición de la fórmula para recolectar las muestras.
Omar	Muchas veces las condiciones de mayor o igual, menor o igual, cuando quiero meter una fórmula.
Jorge	A veces la creación de la población. Otras veces era la fórmula para la recolección de muestras, no siempre me quedaba bien.
Denis	Me confundo mucho cuando quiero generar cierta cantidad y tenemos que tomar muestras
Donovan	La parte intermedia (la recolección y poner la fórmula), que es donde nos pide hacer las fórmulas y ya de ahí se puede desarrollar con mas facilidad.
Coral	Al definir la población.
Mónica	En la parte del Fathom, obtener la población, definirla.
Viridiana	Por simulación es a veces sacar la población.
Ana Lilia	En simulación, al principio, la colección de medidas.

6.5 Construcción de la distribución muestral

A diferencia de la distribución muestral teórica, la cual es exacta y contempla los valores del estadístico en todas las posibles muestras aleatorias de igual tamaño seleccionadas de una población, la distribución muestral empírica obtenida por simulación, contempla los valores que toma el estadístico en muchas muestras, pero quizá no en todas, por lo que se considera una aproximación a la distribución muestral teórica. Dicha aproximación es mayor entre más muestras se toman de la población, lo cual es una tarea muy sencilla en un ambiente como el que proporciona Fathom.

Una vez que se ha definido el modelo de la población, los pasos siguientes en el proceso de simulación son seleccionar una muestra, calcular el estadístico en la muestra (por ejemplo, la media o la proporción de ciertos casos de interés), repetir el proceso de muestreo una gran cantidad de veces y acumular los valores del estadístico, para dar origen a la distribución muestral. En este proceso vamos a distinguir dos niveles que Fathom impone de manera natural:

1) Seleccionar una muestra de un tamaño dado de la población y definir el estadístico de interés a calcular en ella.
2) Repetir el proceso de selección de muestras muchas veces y acumular los valores obtenidos del estadístico (en una tabla y en una gráfica).

6.5.1 Lenguaje (elementos representacionales)

En las primeras actividades se pidió a los alumnos que tomaran muestras una y otra vez desplegando los resultados en una tabla de casos, una gráfica y una tabla resumen con la media y la desviación estándar. El objetivo de ello era que visualizaran la variabilidad muestral y el efecto que sobre ella tiene el tamaño de la muestra, así como que compararan los estadísticos obtenidos con el valor de los parámetros poblacionales (figura 11).

Sin embargo, en actividades posteriores ya no se hizo énfasis en este proceso, porque el interés se centró en el proceso de construcción de la distribución muestral para estudiar el efecto del tamaño de muestra y la distribución de la población en sus propiedades de forma, centro y variabilidad, así como en el cálculo de probabilidades.

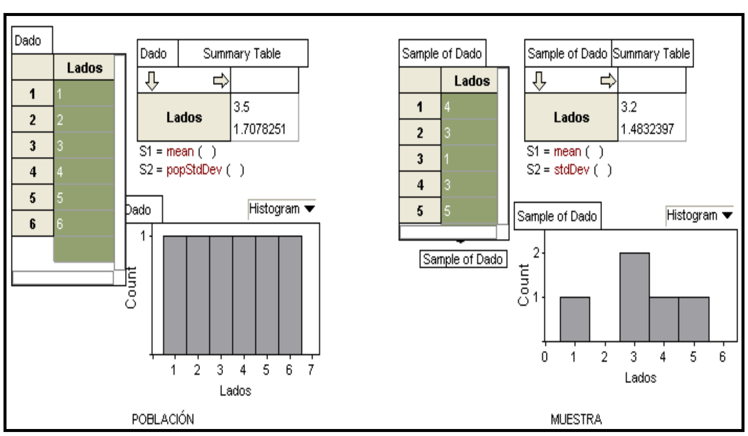
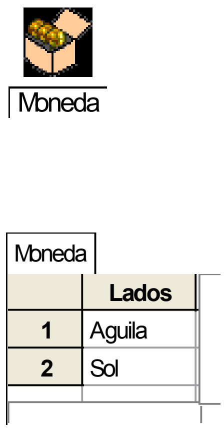
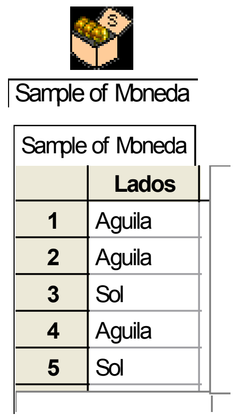


Fig. 11: Esquema multi-representacional del muestreo

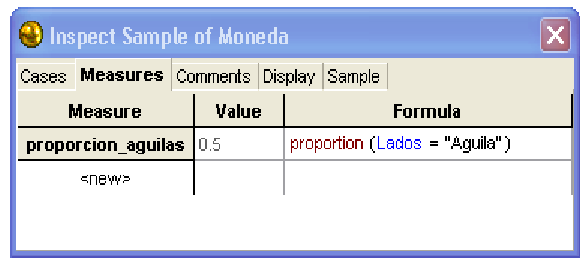
Así, el siguiente paso consistió en tomar una muestra de la población y definir el estadístico a calcular. El elemento representacional de mayor peso en esta etapa fue la fórmula que le indica al software el cálculo que debe realizar, como se muestran en la siguiente figura:



Población



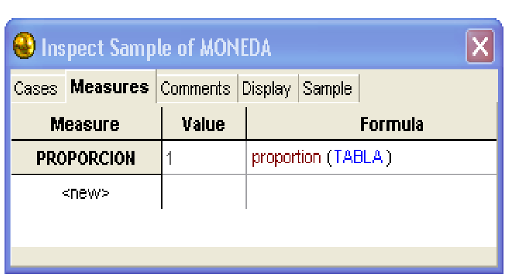
Muestra

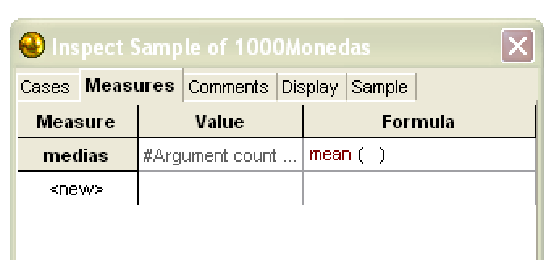


Inspector con la fórmula para calcular el estadístico

Muchos alumnos tuvieron dificultades en esta parte de la simulación, al escribir la fórmula del estadístico, sobre todo en las primeras actividades. En una entrevista con todos los estudiantes al final de las actividades, muchos de ellos señalaron que después de la formulación del modelo de la población, esta parte fue la que más dificultades les presentó (ver Tabla 1 en la sección anterior).

Por ejemplo, veamos el caso de Ana Lilia, que cometió varios errores en el uso de esta representación. En el primer caso comete un error al introducir la fórmula, ya que le falta indicar a qué resultado de "TABLA" le interesa calcular la proporción, por ello el software despliega el valor 1. En el segundo caso, el error consiste en que no coloca el argumento de la función y el software le despliega un error. Mientras que en el tercer caso, le hace falta indicar el atributo de la función (ver figura 12).





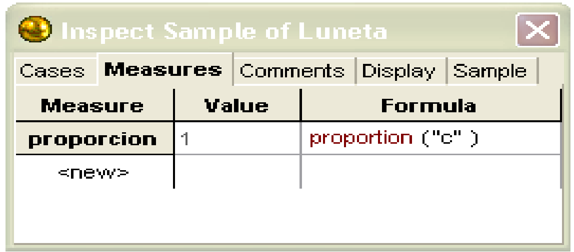


Fig. 12: Diversos errores en la escritura de la fórmula del estadístico

En la segunda parte del proceso de construcción de una distribución muestral, se procede a seleccionar muestras en forma repetida y se acumulan los valores del estadístico en una colección en forma de tabla, -el software hace la acumulación de manera automática- . Los resultados pueden ser graficados para dar lugar a la distribución muestral (ver figura 13).

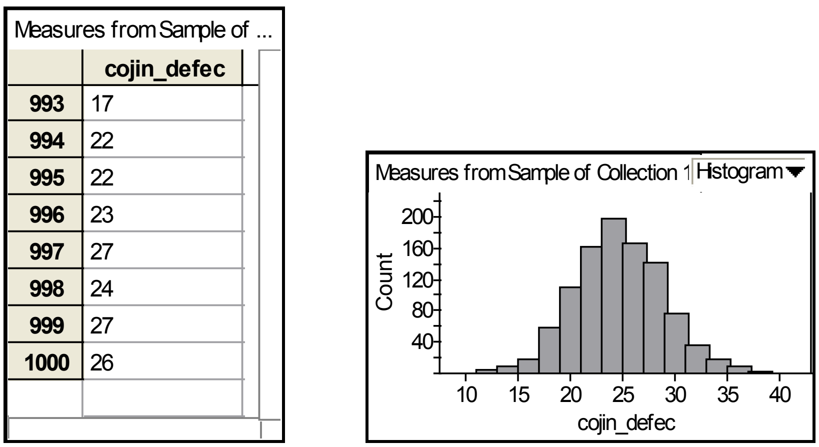
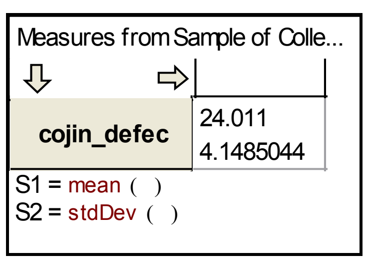


Fig. 13: Representación icónica, tabular y gráfica de una distribución muestral con 1000 estadísticos

Otro tipo de representaciones que se utilizaron para acompañar la gráfica de la distribución muestral fueron las tablas resumen con algunas medidas descriptivas como la media y la desviación estándar (error estándar).



En las primeras actividades este proceso se desarrolló tomando pocas muestras y poco a poco se fue aumentando el número de ellas, para observar los efectos tanto del tamaño de muestra como la cantidad de ellas, en la forma y las medidas de la distribución muestral (ver figura 14). En actividades posteriores el proceso de simulación fue más directo e incluso se desactivó la opción de animación de muestras, dado que el interés se centró en el cálculo de probabilidades.

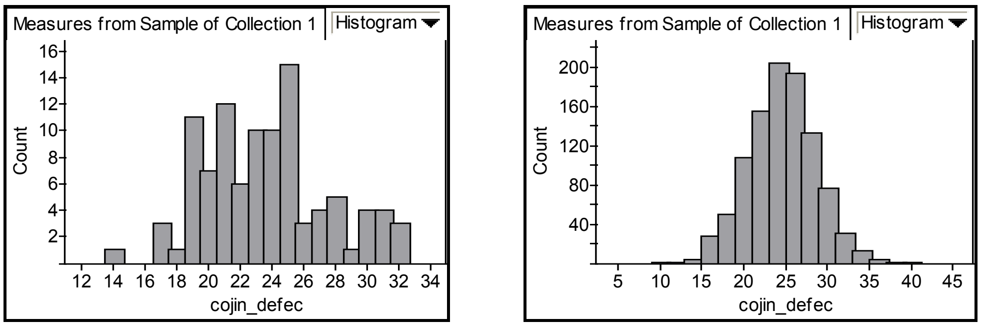


Fig. 14: Distribuciones muestrales para 100 y 1000 muestras respectivamente

6.5.2 Acciones (elementos procedimentales)

Las acciones principales que los estudiantes desarrollaron en esta etapa consistieron en tomar una muestra de la población, definir el estadístico a calcular en la muestra, repetir el proceso de muestreo muchas veces acumulando los valores del estadístico, desplegar la tabla de estadísticos, construir la gráfica de la distribución muestral y una tabla resumen con sus medidas descriptivas. En las primeras actividades se empezó tomando muestras poco a poco para que los estudiantes visualizaran el proceso de construcción de las distribuciones muestrales y la forma que iba adquiriendo la distribución conforme aumentaba el tamaño y número de muestras.

Una dificultad que se observó en algunos estudiantes -sobre todo en las primeras actividades-, consistió en utilizar la opción *Sample cases* para repetir el proceso de muestreo, en lugar de utilizar *Collect measures*, que era lo correcto. Esto dio lugar a tener muchas muestras de una muestra, en lugar de tener muchas muestras de una población. La diferencia entre las dos opciones es que *Sample cases* sirve para tomar muestras de la población; pero una vez que se ha tomado una muestra y se ha definido el estadístico a calcular, la opción *Collect measures* permite repetir el proceso de muestreo con solo indicar la cantidad de muestras deseada. En la figura 15 se muestra el caso de Denise, una estudiante que cometió este error.

Sample of Sample of Collection 1

	MONEDAS	<new>
992	A	
993	S	
994	A	
995	A	
996	A	
997	S	
998	S	
999	A	
1000	S	

Measures from Sample of Collectio...

	PROPS	<new>
991	0.7	
992	0.5	
993	0.4	
994	0.4	
995	0.3	
996	0.7	
997	0.5	
998	0.7	
999	0.5	
1000	0.3	

Fig. 15:

Resultados de 1000 muestras de una muestra   Resultados de 1000 muestras de una población

Obsérvese la diferencia entre las dos tablas. En la primera se tienen los elementos poblaciones que fueron seleccionados en un proceso de doble muestreo, mientras que en el segundo caso se tienen las proporciones que aparecieron en cada una de las 1000 muestras que fueron tomadas (la distribución muestral). Otra dificultad de mayor envergadura, que se observó en las primeras actividades, es que cuando se les pedía que tomaron 1000 muestras de tamaño 10, muchos estudiantes tomaban una muestra de tamaño 1000 (ver figura 16).

Este error tiene que ver con la dificultad de pasar de los resultados de una muestra a los resultados de una distribución de muestras, es decir, estos estudiantes tuvieron problemas para ver los resultados desde una perspectiva distribucional. Saldanha y Thompson (2000) reportan esta dificultad en su estudio con estudiantes de bachillerato, y la definen como un paso complicado para adquirir un buen razonamiento e interpretación de los resultados de distribuciones muestrales. Señalan que como consecuencia de lo anterior, los estudiantes tienden a confundir distribución muestral con distribución de una sola muestra, lo que trae consigo que los estudiantes malinterpreten los resultados de la simulación, como un porcentaje de casos en lugar de un porcentaje de proporciones muestrales.

6.5.3 Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)

En esta etapa se pusieron en juegos diversos conceptos y propiedades, como son la variabilidad muestral de un estadístico y las implicaciones del teorema del limite central en la forma, centro y variabilidad de las distribuciones muestrales. En las primeras actividades se hizo énfasis en la variabilidad muestral de un estadístico, permitiendo que los estudiantes visualizaran el proceso de muestreo a través de diversas representaciones ligadas en forma dinámica entre población y muestras (ver figura 11).

Sample of MONEDA

	TABLA
992	A
993	A
994	S
995	S
996	S
997	A
998	A
999	S
1000	A

Sample of Poblacion_1

	Cara_de_la_moneda
993	Aguila
994	Aguila
995	Aguila
996	Aguila
997	Sol
998	Sol
999	Sol
1000	Aguila

Fig. 16: Tablas con los resultados de Ana Lilia y Omar

Este juego dinámico entre representaciones de la población y las muestras –una característica que promueve la actividad cognitiva- tuvo repercusiones importantes en la comprensión de la variabilidad y representatividad muestral de algunos estudiantes. Veamos el caso de Mónica en una entrevista con el investigador posterior a las actividades.

I: ¿Qué observas Mónica?
M: Obviamente la media y la desviación estándar varían.
I: ¿Qué harías para que la variación fuera menor?
M: Tomar más muestras
I: ¿Más muestras o aumentar el tamaño de muestra?
M: Si, si, aumentar el tamaño de muestra
I: Aumenta a 10.
M: Está más cerca la media muestral a la media poblacional
I: Aumenta a 50
M: La media varía mucho menos y la desviación estándar es casi igual. Posiblemente contando todos los decimales que tienen de 3.5 y 1.70 [los parámetros poblacionales].
I: ¿Qué conclusión puedes obtener de ello?
M: Que entre más grande sea la muestra más se acercan a la población.
I: ¿Con respecto a la forma de la población que me puedes decir?
M: Que la forma de la población está pareja [se trata de una distribución uniforme] y la de la muestra no, en la de la muestra hay variaciones por lo mismo que no toma la misma cantidad de datos
I: ¿Crees que en algún momento la forma de la muestra se llegue a parecer a la forma de la población?
M: Si

I: ¿Cuándo, en que momento?
M: Cuando tome casi toda la cantidad de datos que tiene la población.
I: Ahora aumenta a 1000, ¿qué pasa con las medidas descriptivas?
M: Son casi exactas y la forma es casi igual a la poblacional.
I: Aumenta a 2000
M: Se acerca todavía mucho más. Yo creo que entre más grande sea la muestra mucho mas se va acercar a los datos que tenemos en la población. Pienso que no va haber tanta variabilidad en los datos.

Mónica ha tenido claras varias propiedades involucradas, como es el caso de que las muestras y sus medidas descriptivas varían al seleccionarse de la población, que la variabilidad de la muestra disminuye conforme aumenta el tamaño de ésta y que la media muestral se acerca más a la media poblacional, por lo que muestras más grandes son más representativas. Por su parte, Omar respondió de la siguiente manera, cuando se le cuestionó sobre los mismos aspectos que a Mónica:

I: Te voy a pedir que tomes una muestra de tamaño 10.
I: Ok. junto a eso agrega una tabla resumen y una gráfica también.
I: Muy bien ahora toma varias muestras, pero que se vea el proceso. Observa que es lo que está sucediendo con la proporción de defectuosos?
O: No pasa del 30%
I: Como no, ahí tienes 5, 5 ya es la mitad, es el 50%
O: No se aleja mucho de 3
I: ¿Porqué crees que no se aleja mucho de 3?
O: Pues porque nos dice que en promedio el 30% son los que salen defectuosos
I: ¿Te parece lógico lo que está sucediendo?
O: Si
I: ¿Cómo esperarías que variara esa proporción?, ¿la variación que hay en el número de defectuosos cómo es?,
O: Pues
I: De donde a donde, donde más o donde menos
O: Que no fuera muy mayor a 3 ni muy menor a 3
I: Por ejemplo, dame ciertos límites que tu crees que podrían . . .
O: Pues casi siempre va a salir entre 2 y 4 mas o menos
I: ¿La mayoría de las veces?
O: Aha
I: Esta muestra, cada vez que tomas una muestra crees que sea representativa de la población?
I: Pues si
I: ¿Por qué?
O: Porque se está tomando de la población. Obviamente entre mayor sea la muestra mas va a ser representativa.
I: Muy bien. Pero en este caso la muestra es de tamaño 10.
O: pero por lo mismo, de que mi población es de 10. En este caso si sería representativa.
I: Pero, ¿tu crees que es de 10 la población?
O: Pues aquí la tengo de 10

I: Ahora, observa como es la proporción de defectuosos cada vez que tomas una muestra y compárala con la proporción de defectuosos en la población. ¿Hay alguna similitud o algo?
O: En este caso estaría coincidiendo con la población.
I: Toma otra
O: Ya aumentó la proporción de defectuosos
I: ¿tu crees que haya alguna relación entre la proporción muestral y la proporción poblacional?
O: Pues de cierta forma, porque la proporción poblacional es ahora si que la proporción real y la muestral no nos sale exactamente igual porque no estamos tomando toda la población, simplemente es una muestra.
I: ¿Pero?
O: Pues, obviamente la de la muestra va a ser diferente a la de la población
I: Pero ¿qué tan diferente?
O: Pues no muy, Bueno, va a ser, entre menor sea (la muestra) puede ser más diferente a la población. Obviamente entre mayor sea la muestra mas se va acercar a la real.

De lo anterior, podemos deducir que Omar tiene una idea correcta de la variabilidad de la proporción alrededor del parámetro poblacional al señalar que la mayoría de las veces la proporción muestral caerá entre 2 y 4 defectuosos, igualmente considera que entre mayor sea la muestra, será más representativa de la población. Sin embargo, erróneamente considera que la población es de tamaño 10 –no tiene en cuenta el efecto del reemplazo-, por lo que para él la muestra es representativa ya que es igual al tamaño de la población.

En el examen diagnóstico antes de las actividades, Omar mostró dificultades para comprender la variabilidad muestral, como se muestra en el siguiente item:

3. Si una moneda bien fabricada es lanzada una gran cantidad de veces, la proporción de águilas que aparecerá será muy cercana a 0.5. Supongamos que tomas 5 muestras de 10 lanzamientos cada una. Escribe cuántas águilas esperarías que aparecieran en cada una de las 5 muestras.

N° de águilas en la muestra 1: 5
N° de águilas en la muestra 2: 5
N° de águilas en la muestra 3: 5
N° de águilas en la muestra 4: 5
N° de águilas en la muestra 5: 5

Explica por qué.
Porque la probabilidad no cambia.

En cuanto a las implicaciones del teorema del límite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales, las actividades contemplaron diferentes formas poblacionales y se hizo variar el tamaño de la muestra para que los estudiantes investigaran el efecto de estos factores. En las actividades que nos propusimos explorar estas propiedades se incluía un cuadro para que los estudiantes dibujaran la forma de la distribución, colocaran su centro y su dispersión (ver tabla 2).

Tabla 2: Cuadro para capturar información sobre el comportamiento de distribuciones muestrales

Tamaño de muestra	Forma de la distribución muestral	Centro (Media)	Dispersión (Desviación estándar)
n=10			
n=20			
n=30			

Sin embargo, la idea de dibujar la forma de la distribución fue desechada en la siguiente actividad y se optó por hacer la comparación directamente de la pantalla de la computadora (ver figura 17).

En las primeras actividades nos dimos cuenta que no era sencillo que los estudiantes tuvieran una comprensión inmediata de las implicaciones del teorema del límite central en las distribuciones muestrales, con solo variar la población y el tamaño de muestra. Si bien algunos estudiantes señalaban algunos rasgos de comportamiento, otros centraban su atención en situaciones triviales como el grosor de las barras de los histogramas o en los decimales de las medidas descriptivas. Veamos algunas respuestas que dieron algunos estudiantes en la actividad 1, sobre las propiedades que observaron:

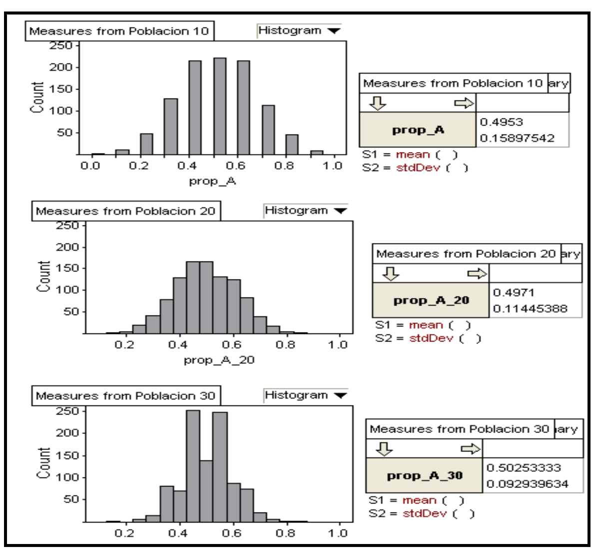


Fig. 17: Esquema de comparación entre diferentes distribuciones muestrales (Omar)

> Nos damos cuenta que conforme se aumenta el tamaño de la muestra la desviación (dispersión) disminuye, es decir tiende a cero. También entre mayor sea la muestra, el centro (media) tiende a 0.5 (Omar).
>
> Forma: Las gráficas son similares, en el centro hay más proporción de águilas, tiende a haber un parecido global y aumentar el tamaño de las barras centrales. Centro o media: va aumentando milésimamente conforme aumenta el tamaño de la muestra, acercándose a la media poblacional. Dispersión: Contrario a la media, esta va disminuyendo según aumenta "n" (Jorge).
>
> Es la misma forma en las tres graficas y la dispersión si cambia, en 10 es más ancha que en 20 y 30; el centro es casi el mismo. La media se podría decir que gira alrededor de 0.5 en las tres muestras y esa es la media de nuestra población, no hay gran variabilidad (Mónica).

En las respuestas de estos estudiantes observamos que hay una comprensión intuitiva de las propiedades de las distribuciones muestrales -a pesar de que se trata de la primer actividad introductoria-, sobre todo en la respuesta de Mónica, quien ha identificado que la media no se ve afectada por el tamaño de la muestra y que coincide además con la media de la población. La dispersión aumenta cuando es menor el tamaño de la muestra y la forma se mantiene en los tres casos. Sin embargo el resto de los estudiantes se centra en aspectos que no son relevantes, tomando en consideración lo que se pretendía explorar. Por ejemplo:

> Sobre la forma de la gráfica en los 3 casos no varía mucho, conserva la misma forma básicamente, el grosor de las barras varía de acuerdo al tamaño de muestra. Las medias realmente no varían mucho, se mantienen en el rango, la desviación estándar varía un poco más que las medias, pero comparada con la de la población varía enormemente (Libnia).
>
> La media en los tres casos no varía mucho, cambia por milésimas pero la dispersión varía en decimales. En cuanto a la forma, cambia en la proporción de la altura en los tres casos (Edgar).

Estos estudiantes señalan que la media y la desviación varían, pero no relacionan la variación con el tamaño de la muestra, además se centran en aspectos irrelevantes como el grosor de las barras y los decimales de las medidas descriptivas.

En la actividad 2, se observó que los estudiantes se centraron con más detalle en las propiedades de interés y tuvieron una mayor aproximación a ellas, además, abundaron más en sus explicaciones. Por ejemplo:

> Nos damos cuenta que entre mayor sea la muestra, se acercará a la media dada que es del 30%, así mismo la dispersión tiende a cero (Omar).
>
> Mis resultados fueron casi exactamente los mismos que obtuve con Fathom y los que obtuve teóricamente. La media se mantuvo constante en las 4 muestras y la dispersión si varía. En la muestra de tamaño 1 fue mayor a la muestra de tamaño 30, o sea fue disminuyendo (Mónica).
>
> El centro se mantuvo similar en los diferentes tamaños de muestra, así mismo, la dispersión tiende a disminuir conforme va aumentado la muestra, no sé si sea una regla general o no, pero así parece (Jorge).
> La media de las distintas muestras [quiere decir distribuciones muestrales] no varía mucho, a lo mas una centésima, pero la desviación estándar si varía mucho mientras más grande se hace el tamaño de muestra más pequeña es la desviación (Libnia).
> Entre más grande es la muestra se apega mas al centro que es 0.3 y con la muestra de 30, si se redondea 0.2997 da 0.3. En cuanto a la dispersión cada vez que se aumenta la muestra la dispersión disminuye (Gerardo).
>
> Cuando aumenta la muestra la media se acerca con diferencia de décimas y centésimas a la media esperada y la dispersión disminuye gradualmente (Edgar).
>
> El centro en cada una de las muestras no cambia mucho solo una cuantas milésimas, aunque en la muestra de tamaño 5 dio exacto (Denise).

En esta actividad hemos observado que los estudiantes se han aproximado más a algunas propiedades de las distribuciones muestrales que están en función del tamaño de la muestra. Por ejemplo, identifican que la media de las tres distribuciones permanece más o menos constante, pero a algunos les hace falta relacionarla con la media poblacional y ver que son iguales. En cuanto a la desviación estándar han observado correctamente que esta varía conforme aumenta el tamaño de la muestra. Finalmente, en cuanto al efecto del tamaño de muestra en la forma de la distribución señala la mayoría que la forma se mantiene. Esto por que la población es simétrica y la normalidad se alcanza desde pequeños tamaños de muestra.

Hemos observado que los decimales que resultan de la simulación constituyen un obstáculo para que los estudiantes señalen con mayor precisión algunas propiedades, como que las medias muestrales son iguales entre sí e igual a la media poblacional. Por ejemplo, las distribuciones de Gerardo tuvieron las siguientes medias: 0.497, 0.499 y 0.503, si aplica un redondeo a dos decimales, en los tres casos le hubiera resultado 0.5, que es la proporción poblacional. Él señaló que *la media se acerca muchísimo al 0.5.* Un caso similar es el de Coral que obtuvo las medias: 0.4961, 0.4997, 0.4963, y señala *"El centro es similar para los tres casos, se desvía por centésimas"*. Por su parte Mónica señaló "*La media se podría decir que gira alrededor de 0.5 en las 3 muestras y es la media de nuestra población".*

No obstante que en esta actividad, los estudiantes han mostrado una comprensión intuitiva de las propiedades de las distribuciones muestrales, en las siguientes actividades (4 y 5) se rediseñaron las preguntas para enfocar más la atención de los estudiantes en aspectos relevantes a las propiedades que se estaban investigando, como es el caso de comparar las medidas descriptivas entre distribuciones muestrales y respecto a las medidas poblacionales, así como comparar los resultados de la simulación con los resultados teóricos. El objetivo se logró, ya que algunos estudiantes que no habían apreciado correctamente las propiedades en las actividades anteriores, en este caso si lo hicieron. Veamos algunas respuestas de las actividades 4 y 5.

> Realmente el centro no es muy variable, está entre 17. 2 y 17. 4 sin importar el tamaño de la muestra, pero la dispersión si es muy variable, entre mayor sea el tamaño de la muestra menor será la dispersión . . . . Entre más se incremente el tamaño de muestra la distribución toma la forma de distribución normal (Viridiana).

> En el centro la cantidad no varía mucho y se encuentra entre 17.09 y 17.33 y me di cuenta que conforme aumenta el tamaño de muestra la dispersión disminuye. . . . el

> resultado de los centros [muestral y poblacional] es muy parecido, no varía mucho. . . conforme cambia el tamaño de muestra hay mejor distribución en las barras (Denise)
>
> No importa el tamaño de la muestra, la media es casi igual, solo es diferente por decimales, en cambio la desviación si afecta, entre mayor sea el número más pequeña es la desviación . . .El centro tanto en las muestras como en la población es igual con diferencia en decimales, pero la dispersión si varía e influye el tamaño de muestra. . . Cuando la muestra se incrementa hay un mayor ajuste en la curva de la distribución normal (Ana Lilia).
>
> Si redondeamos el centro de la población es igual al centro de cada una de las distribuciones, mientras que la dispersión tiende a disminuir cada vez que aumenta el tamaño de la muestra. . . . Las barras se adelgazan mientras el tamaño de la muestra aumenta (Jorge).
>
> El centro de la población y las muestras [se refiere a las distribuciones muestrales] es el mismo, en la dispersión solo es igual al de la población con la muestra de 1, pero a partir de la muestra de 10 va disminuyendo. . . . La distribución de la población y la muestra son parecidas, a partir de la muestra 10 empieza a tomar una distribución normal, existiendo un mejor ajuste en la muestra de 30 (Ana Lilia)

Los últimos dos casos corresponden a la actividad 5, en la cual se agregó un tamaño de muestra igual a 1. Es de observarse la respuesta que dio Ana Lilia que fue una estudiante que tuvo diversos problemas con el proceso de simulación. Nos parece que se ha percatado de rasgos importantes de las propiedades de las distribuciones muestrales.

En la última actividad, la cual estaba enfocada a resolver un problema de distribuciones muestrales principalmente, se colocó una parte exploratoria sobre estas propiedades que ya se habían abordado en las actividades intermedias, y observamos que la mayoría de los estudiantes tuvo un mayor acercamiento a las implicaciones del teorema del límite central. En esta ocasión se hizo uso de una opción que proporciona Fathom donde se colocan sobre el mismo sistema de ejes coordenados las distribuciones muestrales (Fig. 18).

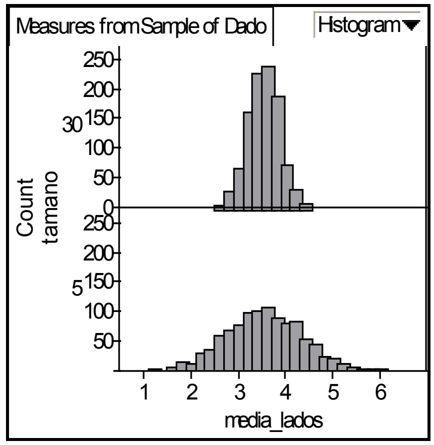


Fig. 18: Distribuciones muestrales para n=5 y n=30 sobre un mismo sistema de ejes

Veamos la respuesta que dio Gerardo, como un ejemplo de ello:

> La media no varía en nada a comparación de la media poblacional, se mantuvo en 3.50, en cuanto a la desviación pues disminuye conforme el tamaño de la muestra se va incrementando. . . En la gráfica de tamaño 5 los valores son muy dispersos y varían de 1 a 6, mientras que la gráfica de tamaño 30, los valores están mas cerca de la media. . . . Los resultados con Fathom y los resultados de forma teórica son los mismos, en los 2 casos el resultado es idéntico (Gerardo).

Gerardo es un estudiante que en las respuestas de las actividades anteriores no se había enfocado en las propiedades, sin embargo, en esta actividad revela que ha comprendido el efecto del tamaño de muestra en el centro y la dispersión de las distribuciones muestrales.

En una entrevista sobre los conceptos involucrados en esta etapa, la cual tuvo lugar al final de las actividades, Mónica contestó lo siguiente:

> I: Si en lugar esta forma uniforme de la población se tuviera una población como columpio, ¿crees que eso repercutiría en al forma de la distribución muestral?
> M: No, por lo regular la forma de la distribución muestral siempre nos da así, normal.
> I: Independientemente de la forma de la población?
> M: Si.
> [. . . .]
> I: ¿Qué pasa con la media de la distribución muestral comparada con la media de la población?
> M: La media por lo general siempre se acerca a la media poblacional.
> I: ¿Cómo le harías para que se acercara mas?
> M: Tomando más.

I: ¿Mas muestras?
M: O tomar la muestra más grande o sea aumentar el tamaño de la muestra.
I: ¿Que pasa con la desviación estándar?
M: La desviación estándar es la que si varía, por lo regular se hace más pequeña.
I: ¿Qué mide la desviación estándar?
M: Es el ancho de las columnitas
I: ¿De cada columnita?
M: Aja. No sé que sea exactamente la desviación estándar. Lo que sé que entre mas disminuye más chiquitas se hacen las columnitas.
I: Ahora toma 1000 muestras de tamaño 15 y construye su distribución muestral. Compara las dos distribuciones con la misma escala para que sean comparables. Fijate en los valores que tienes en las tablas resumen, ¿qué pasa con la media?
[. . . .]
M: La media es casi la misma, es casi exacta. Es casi igual a la de la población.
I: ¿Qué pasa con la desviación estándar de la de tamaño 5 y la de tamaño 15.
M: Es más pequeña la de la muestra de 15.
I: pero me decías que no sabías que te medía la desviación estándar.
M: Aja
I: ¿qué diferencias encuentras entre las dos gráficas?
M: El ancho. Es mayor en la de la muestra de tamaño 5 a la de la muestra de 15. Entonces mide el ancho de la gráfica.

Observamos que Mónica tiene claro que la forma de la población no repercute en la forma de la distribución muestral cuando el tamaño dela muestra aumenta, la media de la distribución muestral se acerca o es igual a la media poblacional y la desviación estándar se vuelve más pequeña conforme aumenta el tamaño de la muestra. Sin embargo, en la entrevista identificamos una idea errónea de Mónica acerca de lo que mide la desviación estándar; para ella esta mide el ancho de las barras del histograma. Cuando esta alumna fue expuesta a dos distribuciones muestrales de diferente tamaño de muestra y se le pidió que comparará las medias y las desviaciones estándar superó dicha confusión y logró entender que la desviación estándar mide el ancho de la gráfica (dispersión).

6.5.4 Argumentaciones (elementos validativos)

Una de las aportaciones de los ambientes dinámicos de estadística es que permiten que los estudiantes se apropien de mecanismos de control, validación y corrección de sus soluciones, sin que dependan totalmente de la presencia o aprobación del maestro. En este caso, las validaciones que los estudiantes utilizaron en esta etapa, estuvieron mediadas en buena medida por los recursos propios del software y por la comparación de los resultados de la simulación con los obtenidos en forma teórica. Uno de los recursos de validación que utilizaron los estudiantes cuando introducían la fórmula para calcular el estadístico, fue el inspector de fórmulas. Este recurso, los alerta al cometer errores de sintaxis, de tal manera que los estudiantes podían corregir el error antes de continuar. Por ejemplo, en la actividad 1, Ana Lilia cometió un error al introducir la fórmula de la proporción (ver figura 18) y se percató cuando tomó 1000 muestras y todas le dieron 1 como resultado.

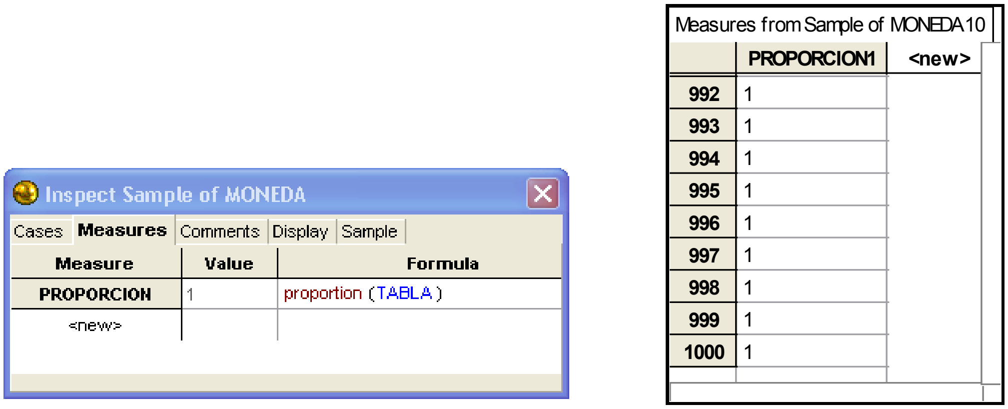
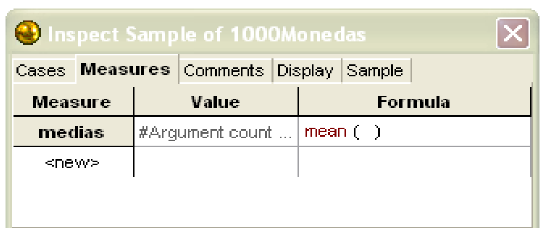


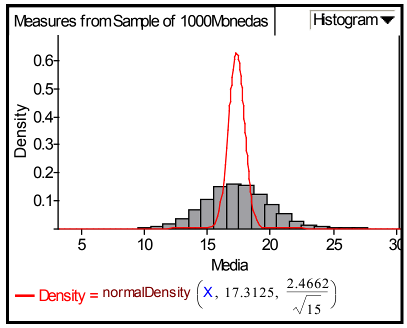
Fig. 18: Inspector de fórmulas como recurso de validación

Otro error de sintaxis que cometió Ana Lilia consistió en lo siguiente:



En este caso el software desplegó un error de argumento, que de inmediato fue observado por la estudiante y la obligó a corregirlo.

Otro recurso de validación que utilizaron algunos estudiantes fue superponer la distribución teórica a la distribución empírica para medir el grado de ajuste. Sin embargo, este recurso de validación no fue sencillo para muchos estudiantes, ya que requiere que combinen adecuadamente en la fórmula, información poblacional con información muestral. A saber, que la media de la distribución muestral es igual a la media de la población y que la desviación estándar de la distribución muestral es igual a la desviación estándar poblacional dividida por la raíz cuadrada del tamaño de muestra, esto es $(\mu_{\bar{x}} = \mu \text{ y } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Por ejemplo, Gerardo obtuvo la siguiente gráfica en la actividad 4.



Gerardo llama al investigador para preguntarle por qué la curva teórica no se ajustaba a la distribución empírica. El estudiante se percató que algo andaba mal, pero no sabía que, así que el investigador revisó sus cálculos y encontró que los parámetros de la distribución teórica no eran los correctos, que él estaba introduciendo la media y la desviación estándar de la distribución muestral empírica, en lugar de introducir sus correspondientes valores poblacionales. Cuando se le señaló su error sin mayor problema lo corrige, como se muestra en la figura 19.

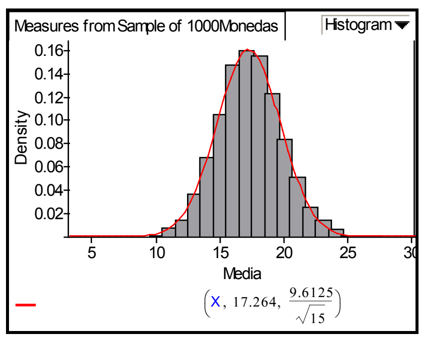


Fig. 19: Distribuciones teórica y empírica obtenidas por Gerardo

Entonces, la confusión entre medidas de la distribución muestral y las medidas de la población condujo a muchos estudiantes a obtener distribuciones teóricas y empíricas que no se ajustaban.

Otros elementos validativos que se utilizaron a lo largo de las diversas actividades fueron las gráficas y las tablas con medidas descriptivas que les permitieron hacer comparaciones para enunciar propiedades y validar resultados. Igualmente fue utilizada la comparación de los resultados obtenidos mediante simulación con los obtenidos de manera teórica.

6.6 Seccionar la distribución muestral para calcular probabilidades de valores muestrales

El proceso de construcción de una distribución muestral concluye en la etapa anterior, con la representación numérica y gráfica de la colección de estadísticos. Sin embargo, resta la etapa de cálculo de probabilidades de valores muestrales, que es la aplicación que se le da a las distribuciones muestrales en el campo de problemas al que nos hemos limitado en este estudio. En lo que sigue, analizaremos los diferentes elementos de significado que los estudiantes pusieron en juego en el proceso de cálculo e interpretación de probabilidades.

6.6.1 Lenguaje (elementos representacionales)

Para calcular la probabilidad de algunos resultados muestrales, se requiere de la representación tabular y gráfica de la distribución muestral construida en la etapa anterior. La representación típica para ello en esta etapa, es una tabla resumen, donde se introduce una expresión con el intervalo en el cual interesa calcular la proporción de casos (probabilidad empírica). Un recurso adicional consiste en utilizar una fórmula para filtrar en la representación tabular de la distribución muestral, los valores del estadístico que caen en el intervalo deseado. La ventaja de esta representación es que permite sombrear el área respectiva en la representación gráfica de la distribución muestral, con lo cual los estudiantes pueden establecer una correspondencia entre el área sombreada y el valor obtenido de la probabilidad. Sólo un par de estudiantes (Mónica y Coral) hicieron un uso sistemático de ambos tipos de representaciones cuando calcularon probabilidades (Figura 20).

En la actividad 7, estas estudiantes trabajaron en equipo y usaron una fórmula para filtrar los casos en los que la media del volumen de los refrescos era superior a 239 e inferior a 241 y calcularon la proporción en una tabla resumen adicional (ver figura 21).

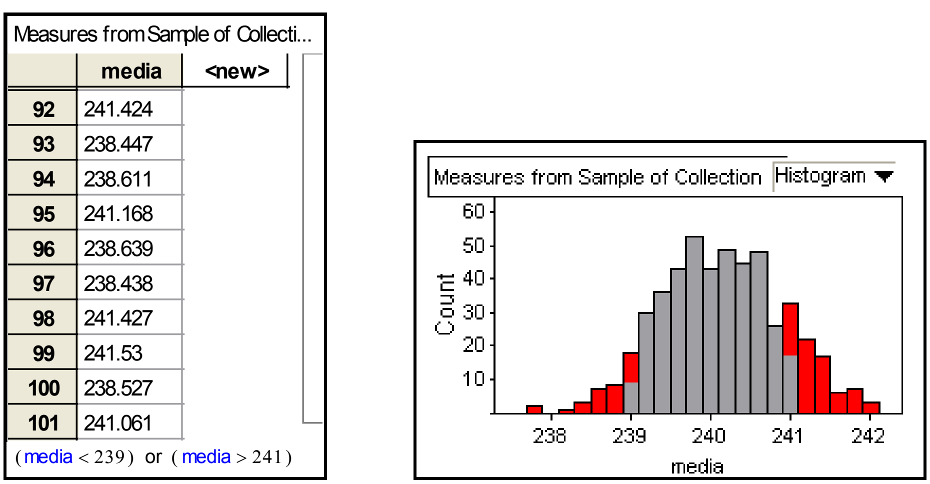


Fig. 20: Opción de filtrado y sombreado en una distribución muestral

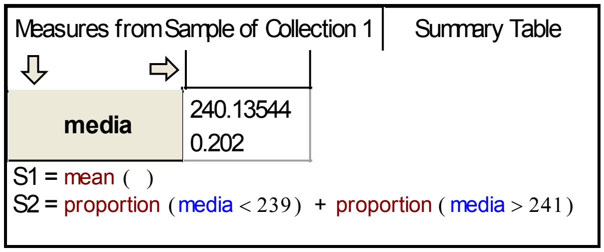


Fig. 21: Tabla resumen con la fórmula para calcular la probabilidad

Lo ideal sería complementar estos dos tipos de representaciones, así cuando se comete un error en el filtro o en la fórmula para calcular la probabilidad en la tabla resumen, el estudiante podría darse cuenta de ello, al no coincidir la representación gráfica del área sombreada con la representación establecida en la fórmula. Por ejemplo, Jorge y Omar tuvieron diversos problemas en esta actividad para establecer los límites del intervalo en el que deseaban calcular la probabilidad (ver figura 23). Si ellos hubieran utilizado la representación de filtro y sombreado posiblemente ellos mismos se hubieran percatado del error sin la ayuda del profesor, dado que este constituye un recurso de control y validación que proporciona el software. Otros estudiantes que eventualmente utilizaron este juego de tres representaciones fueron Gerardo y Ana Lilia, pero sin sacarle el provecho del sombreado, ya que este no es automático al introducir el filtro, por lo que finalmente dependían sólo de la tabla resumen (ver figura 22).

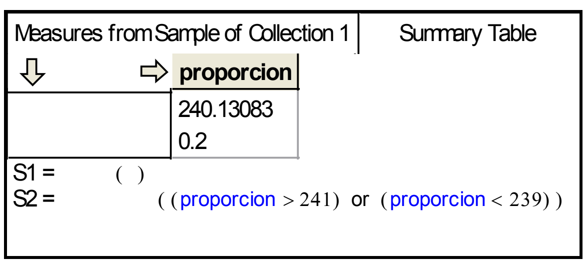
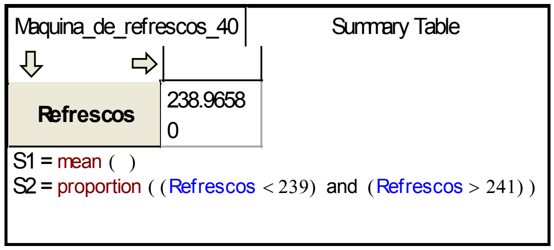


Fig. 22: Tabla resumen construida por Gerardo y Ana Lilia en la actividad 7

Obsérvese la diferencia entre la fórmula de Mónica y Coral con la fórmula de Gerardo y Ana Lilia. Mientras que Mónica y Coral usaron el símbolo + para suma ambos resultados, Gerardo y Ana Lilia utilizaron el conectivo *or*.

Las principales dificultades que se tuvieron con el manejo de representaciones en etapa consistieron en el uso de los conectivos *or* y *and*, y con los signos de desigualdad. Tal es el caso de Jorge y Omar que en la actividad 7 utilizaron *and* en lugar de *or*.



Estos alumnos también tuvieron problemas con el sentido de las desigualdades e hicieron varios intentos antes de lograr escribirlos correctamente (ver figura 23).

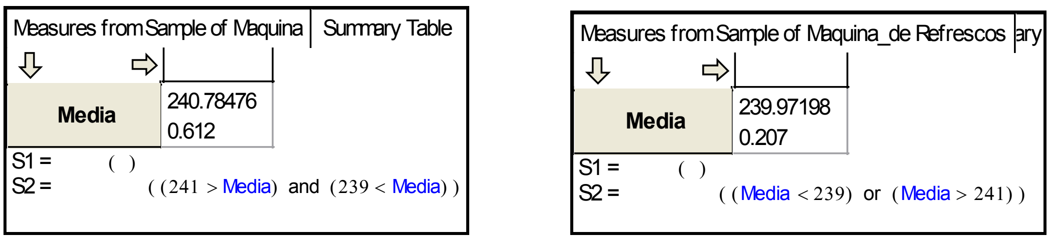
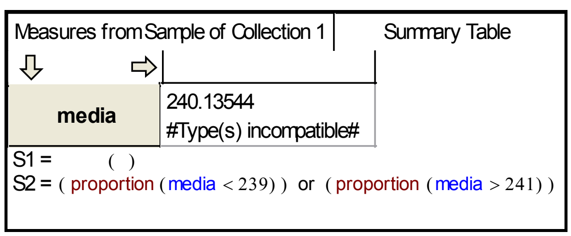


Fig. 23: Dificultades de Jorge y Omar en la introducción de la fórmula para calcular la probabilidad

También Mónica y Coral cometieron errores al escribir la fórmula. En este caso fue un error de incompatibilidad.



Sin duda el elemento representacional más utilizado en esta sección fue la tabla resumen con la fórmula para calcular la probabilidad. Su uso no estuvo exento de dificultades para muchos estudiantes, ya que tuvieron problemas con los conectivos *or* y *and,* así como con los símbolos > y <, para introducir el intervalo en el que deseaban calcular las probabilidades. La opción de filtro y sombreado que era deseable complementar con la tabla resumen fue poco utilizada.

6.6.2 Acciones (elementos procedimentales)

Las acciones de los estudiantes en esta etapa consistieron en introducir una fórmula en la tabla resumen para calcular la probabilidad pedida, y en algunos casos, el uso de fórmulas para filtrar y sombrear los resultados de interés.

Un error que llama la atención debido a que lo cometieron la mayor parte de los alumnos en una de las actividades (actividad 7) fue el considerar una sola muestra para calcular la probabilidad que les pedía, en lugar de utilizar la distribución muestral. Un ejemplo de ello lo tomamos del trabajo conjunto de Jorge y Gerardo. En la figura 24, se observa que estos estudiantes tomaron una muestra de 40 refrescos y utilizaron la opción *proportion* para calcular la probabilidad de que la media de refrescos fuera menor a 239 en el primer caso y mayor a 241 en el segundo caso.

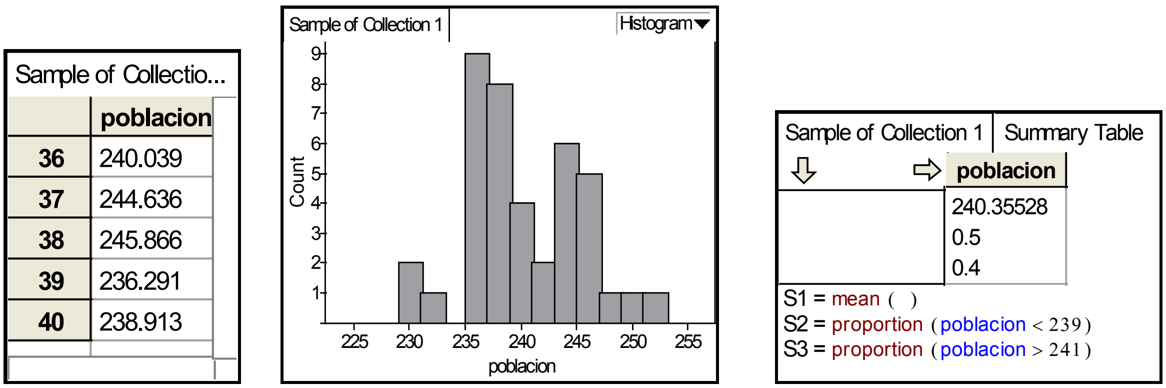


Fig. 24: Acciones realizadas por Jorge y Gerardo en la actividad 7 para calcular la probabilidad

Es importante hacer la observación que los datos que se encuentran en la muestra son valores tomados directamente de la población –son volúmenes de refrescos- y no son medias de una muestra de refrescos como las que aparecen en una distribución muestral, por lo que calcular la probabilidad de esta manera, es totalmente incorrecto. Esto implica que los estudiantes estarían calculando la probabilidad de que un intervalo de volúmenes se presentara en una muestra, en lugar de calcular la probabilidad de un intervalo de volúmenes se presentara en un conjunto de muestras. Este error ha sido reportado también en el trabajo de Saldanha y Thompson (2002), el cual lo atribuyen los autores a una dificultad de los estudiantes en pasar de los resultados de una muestra a los resultados de una distribución de muestras.

Un ejemplo adicional de este tipo de dificultad lo observamos en la video-grabación del trabajo de Libnia y Edgar en la actividad 6, que trataba de una población con un 30% de cojinetes defectuosos. Cuando se les pide a estos estudiantes calcular la probabilidad de que en una muestra de tamaño 80 existan 30 o más cojinetes defectuosos, quisieron utilizar una muestra de las 1000 que habían tomado (la última muestra con sus datos, siempre queda registrada cuando concluye el proceso de construcción de la distribución) (ver figura 25).

Sample of cojinetes		Summary Table
poblacion	b	0
	m	24
	Column Summary	24

S1 = count (poblacion = "m")

Measures from Sample ...	formula
991	18
992	24
993	30
994	24
995	25
996	28
997	19
998	21
999	18
1000	24

Fig. 25. Tabla resumen con los conteos de una muestra y distribución de los conteos en 1000 muestras.

Su argumentación se basaba en que el enunciado dice "la probabilidad de que en una muestra . . .", por lo que se advierte que están teniendo problemas de interpretación, pues de lo que se trata es de una muestra, pero de cualquiera de las 1000 que fueron tomadas vistas como un conjunto o distribución. Veamos un extracto de su conversación:

> E: Ahora lee el inciso b. [Es el inciso al que nos referimos, donde se pide la probabilidad de que existan más de 30 defectuosos en una muestra de tamaño 80].
> E: Pues ninguna, pues son 24.
> E: Faltan las 1000 muestras de tamaño 80 [Acertadamente opina Edgar].
> L: Me confunde, aquí me está usted pidiendo una muestra de tamaño 80. Esta es una muestra de tamaño 80. [Señala la muestra que aparece en la pantalla].
> E: Exacto.
> L: Si yo trabajo sobre las 1000 muestras de tamaño 80 no va a ser lo mismo, no voy a contestar lo que usted me está pidiendo, entonces que onda, ¿trabajamos sobre la muestra de tamaño 80 o sobre las 1000 muestras de tamaño 80?. Porque, es que aquí dice que trabaje sobre la muestra de tamaño 80, y la muestra de tamaño 80 es esta.
> I: Entonces, ¿con cual muestra trabajarías?
> L: Apegándome estrictamente al texto, con la muestra de tamaño 80.
> I: ¿El problema ya estaría de esa manera?
> L: Prácticamente, el inciso b también

De lo anterior, podemos ver nuevamente que Edgar tiene una idea correcta de lo que se debe hacer para calcular la probabilidad –tener en cuenta las 100 muestras de tamaño 80-, pero Libnia impone su opinión y lo hace dudar.

6.6.3 Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)

Los principales conceptos y propiedades que se pusieron en juego en esta etapa fue el cálculo de probabilidades y el efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad. Para ello, en algunas actividades se hizo énfasis en variar el tamaño de muestra y observar lo que sucedía con el valor de la probabilidad. Por ejemplo, en la actividad 5 se les pidió a los estudiantes la probabilidad de que la media fuera mayor a 0.3, tanto en una muestra de tamaño 20, como en una muestra de tamaño 30 y que explicaran la diferencia. Todos los estudiantes hicieron los cálculos pero muy pocos dieron la explicación. Algunas explicaciones fueron:

> Se incrementa el tamaño de la probabilidad cuando es menor el tamaño de muestra, esa es la diferencia (Omar).
>
> Supongo que la diferencia de resultados en los dos incisos se debe al tamaño de la muestra, ya que fue lo único que varió (Jorge).
>
> La diferencia existe porque la probabilidad aumenta cuando la muestra es más grande hay mayor precisión (Ana Lilia).

Tanto Jorge como Omar explican adecuadamente la diferencia en los resultados, no así Ana Lilia quien considera que entre más grande es la muestra, mayor es la probabilidad.

Por su parte en la actividad 7, se cambió el término desviación estándar por error estándar que es como se maneja en muchos libros de texto, y se les pidió que explicaran el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad en el error estándar. En esta ocasión casi todos los estudiantes explicaron sus resultados.

> Cuando la muestra es pequeña el error es grande y cuando crece la muestra el error disminuye (Ana Lilia).
>
> El error estándar aumenta cuando la muestra es menor (Libnia).
>
> El error aumenta al disminuir el tamaño de la muestra (Edgar).
>
> El error tiende a disminuir cuando el tamaño de la muestra aumenta (Jorge).

Finalmente en la última actividad (actividad 9), se les planteó de nuevo que explicaran la diferencia entre las probabilidades de que la media fuera mayor a 3, para tamaños de muestra 5 y 30. En esta actividad se les planteó a los estudiantes que construyeran sobre un mismo sistema de ejes las dos distribuciones muestrales (ver figura 26) como un apoyo adicional a la tabla resumen y los resultados teóricos que habían hasta entonces habían sido el recurso en el que se habían basado para contestar.

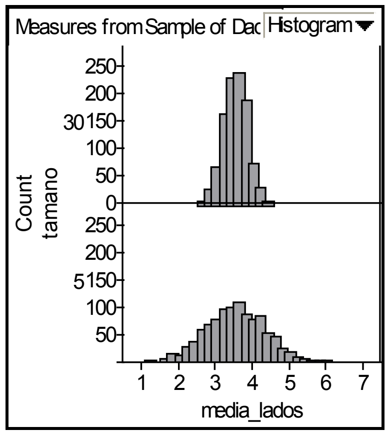


Fig. 26: Distribuciones muestrales sobre un mismo sistema de ejes

En esta actividad se pedía la probabilidad de una cola derecha a partir de un valor que está detrás de la media, por lo que la probabilidad debe ser mayor cuando el tamaño de muestra sea más grande, a diferencia de la actividad 5, donde se pedía la probabilidad de una cola derecha de un valor que está delante de la media, por lo que la mayor probabilidad se tiene cuando la muestra es menor. Todos los estudiantes identificaron adecuadamente el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad. Muchos de ellos se apoyaron en los resultados, mientras que otros se apoyaron en la gráfica. Algunas repuestas fueron.

> Mientras sea más grande la muestra el resultado va a ser mayor (Gerardo).
>
> A que el tamaño de la muestra 30 tiene una media 3.5, por lo tanto hay mayor posibilidad de que la media de puntos tienda a ser mayor a 3 (Jorge).
>
> Se la atribuyo al tamaño de muestra, pues al tener 30 en lugar de 5 es más probable encontrar puntos mayores a 3. Mientras mayor sea la muestra, mayor será la probabilidad (Edgar).

Podemos observar que conforme se fue avanzando en el desarrollo de las actividades y cuando se incorporó una representación gráfica simultánea de las dos distribuciones, los estudiantes comprendieron más fácilmente el efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad. Veamos un fragmento de la entrevista que se realizó con Mónica al final de las actividades, sobre los conceptos involucrados en esta etapa:

> I: ¿En cual de las dos distribuciones es más probable que aparezca una media de 4 o más?
> M: En la de tamaño 5
> I: ¿Porqué?
> M: Porque en la de 5 tenemos mas datos. [parece que no entendió la pregunta].
> I: ¿En la de 5 tienes más datos?, creo que tienes los mismos 1000. Observa bien la gráfica.
> M: Ah, ya le entendí, en la de tamaño 5.
> I: ¿Porqué?
> M: Porque tenemos muchos mas valores hacia acá. Hacia la derecha de 4, en la otra tenemos poquitos.
> I: Si se tratara de hacer apuestas, ¿a qué valores le apostarías? Para tener mas confianza de ganar. Dame un rango de valores a los que estarías apostando en la distribución de n=5.
> M: Entre 3 y 4
> I: ¿Crees que entre esos valores tienes mas probabilidades de ganar?, ¿porqué?
> M: Porque es el centro.
> I: y si te dijera que aumentes tu probabilidad de ganar.
> M: Entonces elegiría entre el 2 y el 5
> I: Así siempre estarías ganando?, ¿cuándo estarías perdiendo?
> M: Cuando cayera fuera de 2 y 5.
> I: Ahora si se trata de tener mas precisión, ¿cual de las dos escogerías?, con cual muestras te gustaría jugar con muestras de tamaño 5 o tamaño 15, apostando al mismo rango entre 2 y 5. O sea tener menos probabilidades de perder.
> M: Con 5
> I: ¿Por que?. Fíjate bien en las graficas.
> M: Si porque quedarían muy pocos datos fuera y en la otra quedan mas datos todavía.
> I: ¿Segura?
> M: Ah, entre 2 y 5, entonces escojo la de tamaño 15, porque todos los datos están entre 2 y 5 y nunca perdería. Entonces me conviene escoger el tamaño de muestra mayor.

Observamos en las respuestas de Mónica que tiene claras muchas ideas relacionadas con el efecto del tamaño de muestra en el cálculo de probabilidades y predicción de resultados. Por ejemplo, expresa que es más probable un valor mayor a 4, en la distribución con menor tamaño de muestra, porque es más variable, lo cual es correcto. En otra parte de la entrevista, cuando se le pide un intervalo para tener una buena probabilidad de ganar, Mónica establece un intervalo razonable alrededor de la media, el cual amplía cuando se le cuestiona sobre el intervalo para tener una mayor probabilidad. Podemos decir entonces, que Mónica ha identificado de manera correcta la relación que existe entre tamaño de muestra, probabilidad de un resultado muestral y variabilidad de la distribución, lo cual es muy importante en inferencia estadística. Por su parte, Omar contesta lo siguiente en la entrevista:

> I: Que es lo que hay adentro de esa grafica [de la distribución muestral] o como la podrías describir?
> O: Pues en esta grafica están contenidos todos los números o todos los cojines en este caso defectuosos que aparecieron en cada una de las muestras
> I: Entre que valores está la mayor parte de los cojines defectuosos? Viendo la gráfica.
> O: Entre 2 y 4
> I: Cuales son los valores con menos cojines defectuosos?
> O: El 8 y el 9, bueno el 0

Puede verse que Omar no tiene dificultades para interpretar los resultados de una distribución muestral cuando señala que representa a todos los cojinetes defectuosos que hay en cada una de las muestras seleccionadas, además explica bien sobre los valores más probables. Igualmente sucedió con Libnia y Edgar cuando fueron video grabados en el problema de los cojinetes:

> I: ¿Qué significan esos números de la colección?
> L: Significan, como ya le había dicho, de estas 1000 muestras de tamaño 80, todos los defectuosos de esa muestra, de cada muestra de tamaño 80.
> I: Me lo vuelve a repetir
> L: Las 1000 muestras de las muestras de tamaño 80, todos los defectuosos de cada muestra. O sea esta es una muestra de tamaño 80.
> I: Por ejemplo, en la muestra 1, ¿cuántos defectuosos tuvo?
> L: 29
> I: La segunda,
> L: 28
> I: La tercera
> L: 24 y así sucesivamente.

Libnia ha mostrado que para ella la distribución muestral representa el conjunto de defectuosos en cada una de las muestras.

6.6.4 Argumentos (elementos validativos)

Los principales elementos validativos que se emplearon en esta etapa fueron la comparación de resultados de simulación con los resultados teóricos, los cálculos de probabilidades en las tablas resumen para los diferentes tamaños de muestra, la representación simultánea de las distribuciones muestrales en una gráfica, y en menor medida, el sombreado de áreas.

En cuanto a los resultados teóricos como elemento de validación, cabe señalar que frecuentemente fue fuente de confusión, dado que los estudiantes cometían diversos errores al emplear las fórmulas y utilizar las tablas de probabilidad. En estos casos no sabían dónde se encontraba el error, si en la simulación o en el uso de las fórmulas. Así, que este recurso de validación no fue muy eficiente en algunas ocasiones.

6.7 Conclusiones

Los estudiantes han abordado el concepto de distribuciones muestrales desde un enfoque completamente distinto al que se adopta en un ambiente de lápiz y papel. El ambiente de simulación computacional les ha permitido participar activamente en el proceso de construcción de una distribución muestral: definiendo la población, extrayendo muestras en forma repetida, calculando estadísticos en cada una de ellas, acumulándolos para formar la distribución y calculando proporciones (probabilidades empíricas) de ciertos resultados muestrales. En dicho proceso, han puesto en juego diversos elementos de significado para resolver las situaciones planteadas.

Sin duda, un elemento que sobresale sobre los demás fue el uso abundante de representaciones (numéricas, gráficas y simbólicas) para visualizar conceptos y propiedades. Los estudiantes hicieron uso de ellas desde la formulación misma del modelo poblacional hasta el cálculo de probabilidades. En la segunda y tercer etapa del proceso de simulación, algunas representaciones jugaron un papel importante para que los estudiantes desarrollaran intuiciones e ideas correctas de diversos conceptos, como es caso de colocar sobre una misma gráfica varias distribuciones para distintos tamaños de muestra, lo que ayudó a deducir propiedades de forma, centro y dispersión, así como el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales.

Los diversos conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales, así como las relaciones entre ellos, pudieron ser explorados gracias a las características del ambiente dinámico de simulación proporcionado por Fathom. Así, los estudiantes pudieron visualizar propiedades como la variabilidad muestral y el efecto que sobre ella tiene el tamaño de muestra, y las repercusiones del teorema del limite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales.

De esta manera, consideramos que el significado construido por los estudiantes es más amplio que el significado que ellos habían construido en el ambiente tradicional de lápiz y papel antes de participar en el estudio, en el cual se utilizan en forma predominante las representaciones simbólicas y tablas de probabilidad (numéricas). Sin embargo, el proceso de simulación no estuvo exento de dificultades, incluso algunas de ellas persistieron a lo largo de todo el estudio, como es el caso de la formulación del modelo poblacional, pues en la mayoría de las actividades que lo requerían, fueron a cuando más dos estudiantes que lograron plantearlo correctamente. La definición de la expresión para calcular el estadístico en las muestras y las expresiones para calcular las proporciones de casos, fueron dificultades de menor frecuencia que se presentaron sobre todo a principios del estudio. Surgieron además algunas concepciones erróneas como es el caso de confundir la distribución de una muestra y la distribución muestral de un estadístico y algunos estudiantes tuvieron problemas para ver las muestras como una distribución.

Sin duda, la herramienta computacional tuvo impacto en los significados de los estudiantes, ya que requirió de otro tipo de acciones y procesos, representaciones, validaciones, y posibilitó una exploración de conceptos y propiedades de una forma que no es posible en un ambiente de lápiz y papel. Por ejemplo, en el caso de la población, en un ambiente de lápiz y papel, típicamente se parte del enunciado que señala que la población y sus parámetros son conocidos, sin ninguna referencia concreta sobre el concepto, de tal manera que la población existe para los estudiantes sólo como un concepto abstracto que aparece en el enunciado del problema. En cambio, en el ambiente de simulación, los estudiantes se vieron obligados a construir la población y la pudieron visualizar a través de un ícono y una tabla de casos con los elementos poblacionales hipotéticos, llegando en algunos casos a complementarla con una gráfica y sus medidas descriptivas. De esta manera, el objeto "población" se volvió visible y más concreto para los estudiantes. Esto sin duda condujo a los estudiantes tareas de mayor nivel cognitivo que el que ocurre en una enseñanza tradicional basada en fórmulas y procesos rutinarios, al permitírsele a ellos mismos construir la población.

En un ambiente de lápiz y papel la distribución muestral se construye a través de un proceso matemático y cuando el estudiante se enfrenta a alguna aplicación, solo selecciona la distribución muestral correspondiente, sustituye la información, estandariza la distribución y calcula la probabilidad mediante tablas. Ningún indicio de exploración de conceptos y propiedades aparece desde esta perspectiva. En cambio, en el ambiente de simulación, los estudiantes tomaron muestras de un tamaño dado repetidamente de la población y acumularon los estadísticos calculados para dar lugar a la distribución muestral, sin necesidad de recurrir a formalismos matemáticos. Las probabilidades fueron obtenidas como proporciones de casos de interés en el total de casos, llegando en ocasiones a filtrarlos y sombrearlos, para separarlos del resto de casos, lo que volvió más concreto el cálculo de probabilidades.

Como consecuencia de este cambio en los objetos de enseñanza, las actividades realizadas por los estudiantes fueron de mayor nivel cognitivo (meta-nivel). Esto fue posible observarlo a través de la transformación y análisis de representaciones que frecuentemente realizaron los estudiantes a lo largo del proceso de simulación. Superponer una distribución teórica a una distribución empírica, sombrear áreas correspondientes a la probabilidad calculada, comunicarse con la máquina mediante la introducción de una fórmula y recibir retroalimentación de los posibles errores, son ejemplos del nivel cognitivo en que se movieron los estudiantes y que no está presente en las actividades que realizan en un ambiente tradicional, donde la actividad se resume al empleo de fórmulas y tablas de probabilidad.

Sin duda, un ambiente de estadística dinámica vuelve obvios y triviales muchos procedimientos tediosos típicos en las aplicaciones de las distribuciones muestrales, como fue el caso de la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad, los cuales son fuente de diversos errores al resolver problemas, y en este caso, no fueron requeridos. En este sentido podemos decir que amplifica las capacidades mentales de los estudiantes y permite que los estudiantes construyan por sí mismos el proceso y que a su vez observen el resultado.

Podemos señalar entonces que el significado personal que los estudiantes han construido en el ambiente de estadística dinámica y simulación computacional, se acerca más al significado institucional que se ha obtenido del análisis de libros de texto, ya que incorpora conceptos y propiedades que no lograron desarrollar en su enseñanza tradicional.

Tabla 3: Resumen de los elementos de significado puestos en juego durante el proceso de simulación de las distribuciones muestrales

ETAPAS DEL PROCESO DE SIMULACIÓN	**ELEMENTOS DE SIGNIFICADO**			
	Representaciones	**Acciones y procedimientos**	**Conceptos y propiedades**	**Argumentaciones y validaciones**
Formulación del modelo	*Numéricas*: Tablas de casos (todos los alumnos), tablas resumen con medidas descriptivas (en algunos casos). *Simbólicas:* Fórmula para generar la población (sólo actividad 7). *Gráficas*: Histogramas (en menor medida).	*Caso discreto:* Crear una colección (población) introduciendo los elementos. *Caso continuo:* Generar una colección mediante una fórmula. Graficar y calcular medidas descriptivas en algunos casos.	Población, parámetros poblacionales (proporción, media, desviación estándar), equiprobabilidad de elementos.	Síntesis de propiedades de la población.
Construcción de la distribución muestral	*Numéricas:* tabla de casos muestrales (Sample cases), tabla resumen con medidas descriptivas (Summary table), tablas de estadísticos (Collect measures). *Simbólicas:* Fórmula para calcular el estadístico de interés. *Graficas:* Histograma para la distribución muestral.	Tomar una muestra, definir el estadístico, repetir proceso de muestreo muchas veces, formar una colección con estadísticos calculados, desplegar la tabla de estadísticos y graficar la colección de estadísticos (distribución muestral), construir tabla resumen con medidas descriptivas de la distribución muestral.	Muestreo, variabilidad muestral, teorema del límite central.	Inspector de fórmulas, superposición de distribución teórica con distribución empírica, resultados teóricos.
Cálculo de probabilidades	*Numéricas:* Tabla resumen con medidas descriptivas (Summary table), tablas de estadísticos (Collect measures). *Simbólicas:* Fórmulas para calcular probabilidad y filtrar resultados de interés. *Graficas:* Histograma para distribución muestral, sombreado de áreas.	Introducción de fórmulas para calcular probabilidades, para filtrar resultados y sombreado.	Cálculo de probabilidades y efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad.	Comparar resultados de simulación con teóricos, calculo de probabilidad para diferentes tamaños de muestra y sombreado de áreas.

Capítulo 7

LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL COMO MÉTODO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DISTRIBUCIONES MUESTRALES

7.1 Introducción

Este capítulo gira alrededor de la segunda pregunta de investigación que nos hemos planteado: *¿En qué medida el uso de la simulación computacional constituye un método que permite a los estudiantes resolver problemas que involucran distribuciones muestrales?*.

El enfoque tradicional de resolución de problemas que involucran distribuciones muestrales e inferencia estadística, se apoya en los conceptos de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad. Sin embargo, como lo señala Lipson (2002), este enfoque no está relacionado directamente con el proceso real de toma de muestras y cálculo de estadísticos, como es característico en un problema real de inferencia, requiere además de un buen manejo de recursos matemáticos que no siempre están al alcance de muchos estudiantes. En literatura de educación estadística (por ejemplo, Lipson, 2000; Meletiou-Mavrotheris, 2004), con frecuencia se sugiere que un enfoque de simulación computacional en un contexto de estadística dinámica, puede ayudar a que los estudiantes encuentren mayor sentido a los problemas que resuelven, en tanto este enfoque permite relacionar el proceso de resolución con el proceso real en que se suscita un problema, además que puede ayudar a comprender relaciones importantes entre los diversos conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales.

Por su parte Biehler (1991), resalta el hecho que la simulación computacional puede constituir un recurso para la resolución de problemas, y no solamente para explorar y construir conceptos como frecuentemente se piensa. Sin embargo, considera que aún se requiere investigar sobre los diferentes roles, objetivos y perspectivas pedagógicas de la simulación en la resolución de problemas. Entre los puntos favorables de la simulación computacional en la resolución de problemas, Biehler (1991), señala los siguientes:

1. *Aspecto representacional*. Los estudiantes piensan y formulan modelos en términos concretos como urnas o ruletas, no hay necesidad de expresar modelos simbólicamente en términos de espacios de probabilidad.
2. *Aspecto computacional*. Procesar los datos generados para estimar una probabilidad desconocida puede ser más fácil para los estudiantes que utilizar métodos analíticos y combinatorios, puede además, ser la única forma de incluir problemas de probabilidad más complejos y reales en el currículum.
3. *Aspecto concepto de modelo*. Para resolver un problema de probabilidad por simulación se requiere diseñar un escenario experimental y pensar en un modelo primeramente en lugar de empezar con cálculos.

Es por ello, estamos interesados en investigar cuál es el papel que juega la simulación computacional cómo método para resolver este tipo de problemas, las dificultades que enfrentan los estudiantes al utilizar esta herramienta y si es posible arribar a soluciones aceptables en comparación con las soluciones que se obtienen teóricamente.

De manera breve podemos adelantar que los estudiantes lograron calcular probabilidades de resultados muestrales y aceptaron la solución como válida respecto al resultado teórico, dada la proximidad entre ambos resultados. Esto, una vez que lograron superar todos las dificultades que implicó la modelación de la población en algunas actividades. Consideran que el método de simulación tiene varias ventajas respecto al método teórico, ya que les permitió explorar los conceptos y calcular las probabilidades como parte de todo el proceso en que participaron.

7.2 Análisis de los resultados

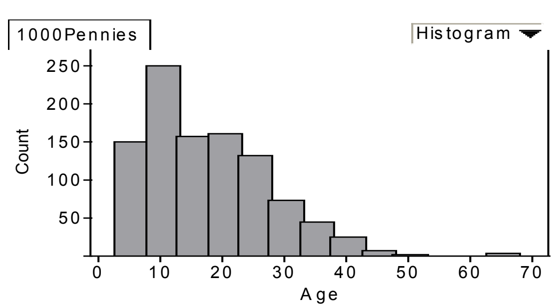
Entre las actividades planteadas a los estudiantes existen algunas que fueron diseñadas con el propósito de explorar conceptos y propiedades, otras con el propósito de resolver un problema (calcular probabilidades de resultados muestrales), y algunas contemplaban ambas situaciones. En este capítulo abordaremos solamente las actividades que involucraron resolución de problemas.

En la mayoría de las situaciones planteadas buscamos que los estudiantes establezcan la conexión entre los resultados teóricos y los resultados obtenidos mediante simulación, atendiendo la recomendación de Biehler (1991, p. 186), en el sentido de combinar el enfoque teórico y el experimental en lugar de establecer la preponderancia de un enfoque sobre otro. Cada problema fue resuelto primeramente por simulación y después teóricamente.

La información con la que haremos el análisis proviene de las hojas de trabajo donde los estudiantes plasmaron sus soluciones teóricas, de los archivos de computadora donde los estudiantes resolvieron los problemas mediante simulación y de las respuestas que dieron a una entrevista final sobre su concepción sobre la simulación cómo método para resolver problemas de distribuciones muestrales.

Actividad 4:

Se han recolectado 1000 monedas y se observó su fecha de fabricación y su edad al presente año. Los datos han almacenado en un archivo de Fathom denominado *Monedas.ftm*.



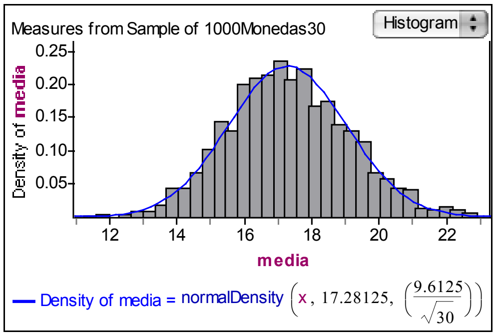
¿Cuál será la probabilidad que si se toma una muestra de tamaño 30, la edad promedio de las monedas sea mayor de 20 años?. Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como con Fathom.

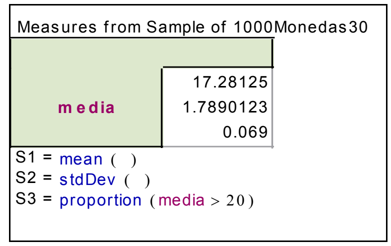
En esta actividad y en la siguiente no se requería plantear el modelo de la población, ya que ésta se dio directamente a los estudiantes mediante una colección de datos, así que no se presentaron las dificultades que ya se describieron en el capítulo anterior sobre la formulación del modelo. En el siguiente cuadro se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes.

Estudiante	**Solución teórica**	**Solución con simulación**
Jorge	0.054	0.062
Donovan	0.061	0.056
Libnia	0.059	0.065
Omar	0.061	0.059
Edgar	0.065	0.069
Gerardo	Incompleta	0.060
Mónica	Incompleta	Incompleta
Coral	Incompleta	Incompleta
Ana Lilia	Incompleta	Incompleta
Denis	Incompleta	0.061
Viridiana	Incompleta	0.061

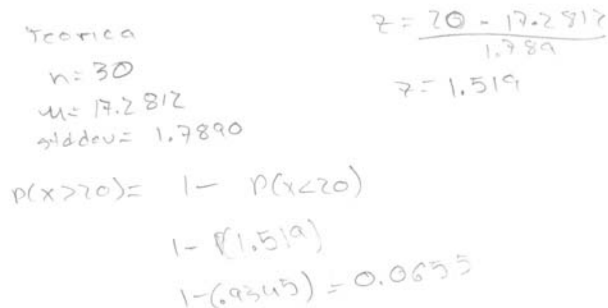
La solución teórica es: $P(\bar{x} > 20) = 0.061$ y la solución con simulación se obtuvo tomando 2000 muestras de la población. Como puede verse de la tabla anterior, fueron más los estudiantes que resolvieron el problema correctamente mediante simulación que mediante el enfoque teórico, y quienes dejaron incompleto el problema con simulación, llegaron hasta la construcción de la distribución muestral, faltándoles solamente calcular la proporción.

La solución mediante simulación estuvo muy cercana y en algunos casos coincidió con la solución teórica. Ilustremos el caso de un estudiante (Edgar) que resolvió correctamente el problema mediante los dos métodos.





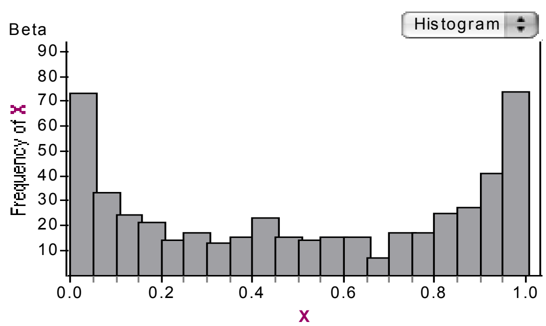
Solución con simulación computacional



Solución teórica

Actividad 5:

Consideremos los siguientes 500 datos como una población cuya forma se muestra en la siguiente gráfica:



a) ¿ Cuál es la probabilidad de que si se selecciona una muestra aleatoria de tamaño 30, la media sea menor a 0.3? Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como por simulación.

b) ¿Cuál será la probabilidad que si selecciona una muestra de tamaño 20, la media sea menor a 0.3?. Calcula dicha probabilidad tanto en forma teórica como por simulación.

Estudiante	**Inciso a**		**Inciso b**	
	Sol. teórica	**Sol. simulación**	**Sol. teórica**	**Sol. simulación**
Jorge	0.0004	0.0005	0.006	0.005

Libnia	0.0013	0.0015	0.0089	0.009
Omar	0.0006	0	0.0039	0.004
Edgar	0.0007	0.0005	0.0049	0.003
Gerardo	0.0021	0.0025	0.010	0.0145
Mónica	X	Incompleto	X	Incompleto
Coral	X	Incompleto	X	Incompleto
Ana Lilia	0.003	0.002	0.015	0.014
Denis	0.0013	0.001	0.0075	0.0065
Viridiana	0.001	0	0.007	Incompleto

Es importante aclarar que las diferencias en las soluciones teóricas se deben al manejo de decimales que hicieron los estudiantes. Aparentemente las respuestas suelen ser muy diferentes pero estamos a nivel de milésimas y diezmilésimas partes de enteros. Lo mismo sucede con las soluciones por simulación, pues se trata una pequeña parte de la cola izquierda ($\bar{x} < 0.3$) como se ve en la gráfica de la distribución muestral (ver figura 1), que en algunos casos cuando el tamaño de muestra es de 30, resultó ser cero inclusive. Debemos tener en cuenta también que la población tiene una forma de columpio, por lo que la distribución muestral de la media no es tan aproximada a una normal y suele presentar pequeñas fluctuaciones en tamaño de muestra de 20 y 30.

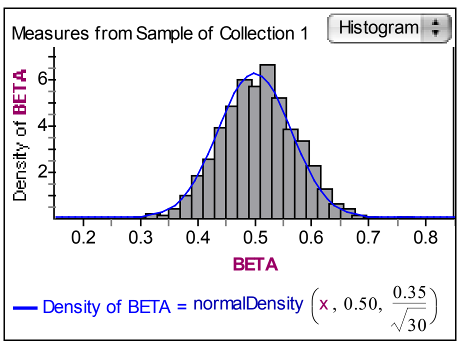
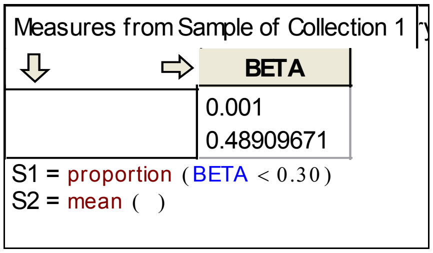
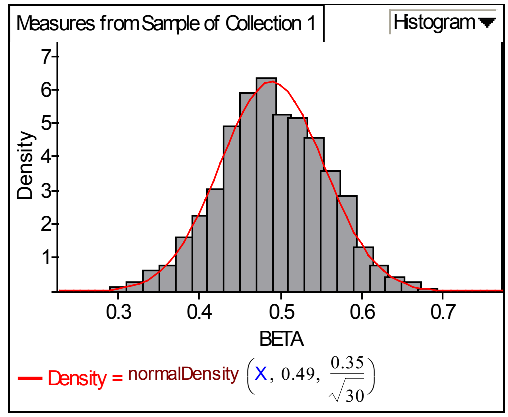


Fig. 1: Distribución muestral de la media en 2000 muestras

La mayoría logró resolver el problema mediante simulación y sólo dos estudiantes dejaron el proceso incompleto. La solución de Denis se muestra a continuación:

Inciso a)





Con simulación (2000 muestras de tamaño 30)

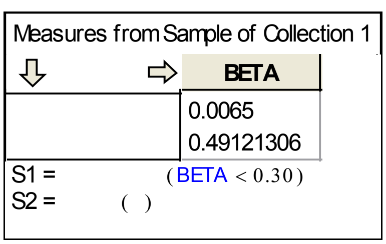
$$z = \frac{0.3 - 0.49}{0.35/\sqrt{30}} = -3.01$$

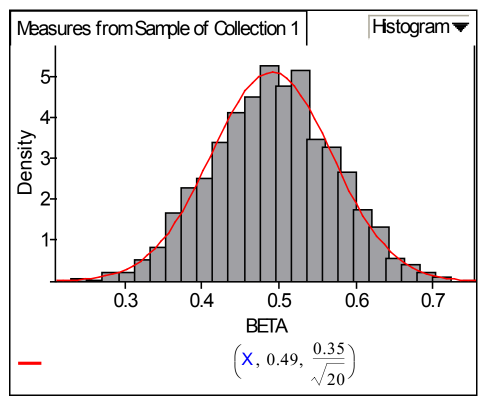
Fathom:
Proportion $= 0.001$

$$P(z < -3.01) = 0.0013$$

Solución Teórica

Inciso b)





Con simulación (2000 muestras de tamaño 20)

$$z = \frac{0.3 - 0.49}{0.35/\sqrt{20}} = -2.43$$

Fathom:
Proportion $= 0.0065$

$$P(z < -2.43) = 0.0075$$

Teóricamente

Actividad 6

En una fábrica de cojinetes para automóvil se ha desajustado una máquina y el 30% de su producción está saliendo defectuosa.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 80 existan 30 ó más defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan 20 o menos defectuosos en la muestra de tamaño 80?

Como se describió en el capítulo anterior, este problema requiere de la formulación del modelo de la población, lo que fue complicado para los estudiantes. Este problema lo resolvieron en parejas, veamos las soluciones obtenidas.

Parejas	Inciso a		Inciso b	
	Sol. teórica	**Sol. simulación**	**Sol. teórica**	**Sol. simulación**
Jorge y Omar	0.072	0.081	0.166	0.195
Libnia y Edgar	X	0.074	X	0.199
Gerardo y Ana Lilia	0.07	0.093	0.17	0.188
Mónica y Coral	0.072	0.087	0.166	0.20
Denis y Viridiana	0.07	0.08	0.17	0.20

Obsérvese que todos los estudiantes lograron resolver el problema mediante simulación y que la solución obtenida es muy cercana a la solución teórica. Veamos como ejemplo, la solución de Gerardo y Ana Lilia:

a) $\hat{p} = \frac{30}{80} = 0.375$

$z = \frac{.375 - 0.3}{\sqrt{\frac{(0.3 * .07)}{80}}}$

$z = 1.46$

a) $P(\hat{p} \geq 30) = P(z > 1.46) = \underline{0.07}$

con fothom es $\underline{0.093}$

b) $\hat{p} = \frac{20}{80} = 0.25$

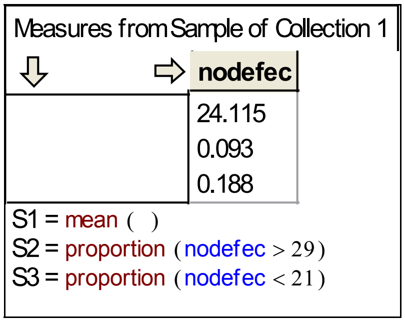
$z = \frac{0.25 - 0.3}{\sqrt{\frac{(0.3 * 0.7)}{80}}}$

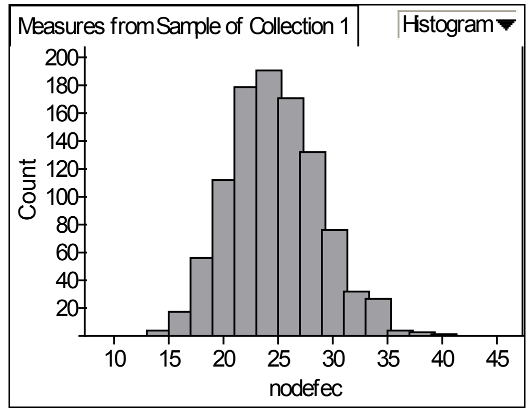
$z = -0.98$

b) $P(\hat{p} \leq 20) = P(z < -0.98) = 0.17$

fothom es $\underline{0.188}$

Teóricamente





Por simulación (2000 muestras)

Actividad 7:
Una máquina de refrescos se ajusta para que la cantidad de bebida que sirve promedie 240 ml con una desviación estándar de 5 ml. La máquina se verifica periódicamente tomando una muestra de 40 bebidas y se calcula el contenido promedio (media).

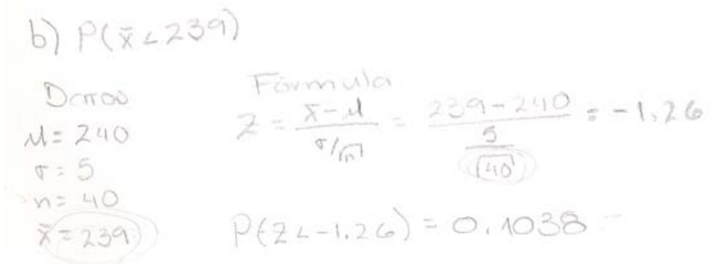
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra seleccionada al azar se tenga un contenido promedio menor que 239ml.?

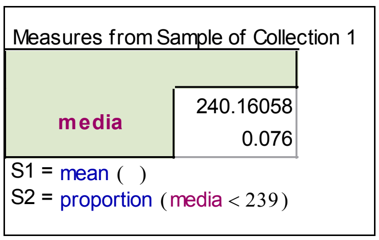
b) ¿Si la máquina se ajusta cuando el contenido promedio de la muestra sea menor a 239 ml y mayor a 241 ml ¿Qué proporción será ajustada la máquina?

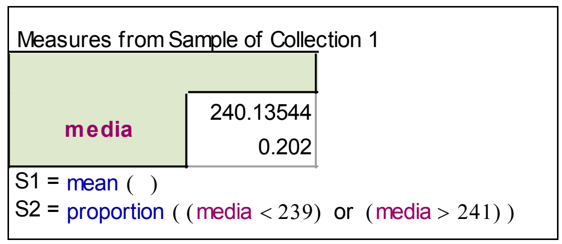
De la misma manera que el problema anterior, esta actividad fue abordada en parejas y la solución mediante simulación requirió de formular el modelo de la población.

Parejas	**Inciso a**		**Inciso b**	
	Sol. teórica	**Sol. simulación**	**Sol. teórica**	**Sol. simulación**
Jorge y Omar	0.103	0.106	0.207	0.207
Libnia y Edgar	0.103	0.10	0.207	0.215
Ana Lilia y Donovan	0.103	0.127	X	0.208
Mónica y Coral	0.103	0.076	X	0.202
Denis y Viridiana	0.103	0.102	0.207	0.21

Obsérvese que en este problema las soluciones teóricas estuvieron muy cercanas a las soluciones obtenidas por simulación. Esto se debe a que las muestras son de tamaño 40 y la población es normal. De acuerdo con el teorema del limite central, la distribución muestral de la media debe ser normal. Veamos la solución de Mónica y Coral:







Actividad 8:
Una tienda departamental ha decidido premiar la preferencia de sus clientes; para ello, dispone de una tómbola con 500 esferas, todas con premio y en igual proporción. Las esferas están marcadas con premios que van desde 1000 hasta 15000 pesos. El cliente selecciona de manera aleatoria 3 esferas y su premio consiste en la media de las cantidades seleccionadas. Después se regresan las esferas a la tómbola para que un nuevo cliente haga su selección.
Utiliza Fathom para contestar lo siguiente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el premio de una persona sea menor a 10000 pesos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el premio de una persona se encuentre entre 3000 y 10000 pesos?

En este problema solo se pidió resolver el problema por simulación, se pidió además que interpretaran los resultados obtenidos. La solución teórica del problema es:

a) $P(\bar{x} < 10000) = 0.788$

b) $P(3000 < \bar{x} < 10000) = 0.765$

Parejas	**Inciso a**	**Inciso b**
Jorge y Omar	0.782	0.751
Libnia y Edgar	0.772	0.755
Ana Lilia y Gerardo	0.782	0.751
Mónica y Coral	0.761	0.737
Denis y Viridiana	0.778	0.754

Al igual que en el problema anterior, en este caso se obtuvieron soluciones muy cercanas a la teórica, solo que ahora los estudiantes no pudieron hacer las comparaciones, porque solo lo resolvieron mediante simulación. Veamos como ejemplo las soluciones encontradas por Jorge y Omar.

Measures from Sample of Collection 1	Summary Table
	media
	7898
	0.782
	0.751

S1 = mean ( )
S2 = proportion (media < 10000)
S3 = proportion ((media > 3000) and (media < 10000))

La interpretación que hicieron estos dos alumnos de los resultados obtenidos fue la siguiente:

> En el inciso c representa la probabilidad de que una persona gane un premio menor a 10000 que es igual a .782 y en el caso de que se seleccionen 100 personas, ganarian 78 personas un premio menor a 10000
>
> En el inciso D muestra la probabilidad de que una persona gane mas de 3000 y menos de 10000 y esto es .751 y en el caso de que se seleccionen 100 personas, ganarian 75 personas un premio entre ese rango.

Observamos en las respuestas anteriores una adecuada interpretación de las probabilidades calculadas, sin embargo, los demás equipos se limitaron a calcular las probabilidades, más no dieron una interpretación de ellas.

Actividad 9

Considera como una población a los posibles resultados que pueden aparecer al lanzar una dado.

a) Si se toma una muestra de tamaño 30 de la población, ¿cuál será la probabilidad de que la media de puntos sea mayor a 3?
b) Si se toma una muestra de tamaño 5 de la población, ¿cuál será la probabilidad de que la media de puntos sea mayor a 3?
c) Si se toma una muestra de tamaño 30 de la población. ¿Cuál será la probabilidad de que la media de puntos sea mayor a 4?
d) Si se toma una muestra de tamaño 5 de la población. ¿Cuál será la probabilidad de que la media de puntos sea mayor a 4?

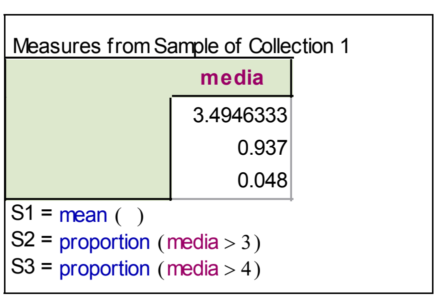
Este problema se resolvió sólo por simulación y de manera individual por cada uno de los estudiantes. La solución teórica está dada por:

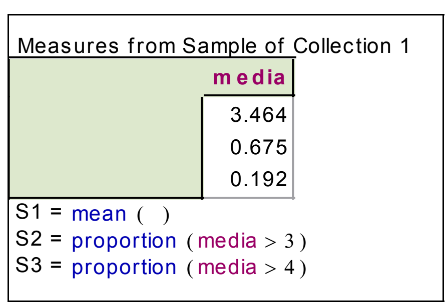
a) 0.946
b) 0.742
c) 0.053
d) 0.257

Estudiantes	Inciso a	Inciso b	Inciso c	Inciso d
Jorge	0.941	0.685	0.059	0.197
Libnia	0.928	0.704	0.046	0.217
Edgar	0.917	0.689	0.042	0.20
Gerardo	0.937	0.675	0.048	0.192
Mónica	0.933	0.696	0.057	0.22
Coral	0.931	0.692	0.058	0.215
Denis	0.927	0.706	0.055	0.206
Donovan	0.94	0.68	0.052	0.239

Haciendo un análisis de los resultados anteriores observamos que en los incisos a y c todos los resultados están muy cercanos de los valores teóricos, incluso algunos coinciden con ellos, no así en el inciso b y d, donde todos se quedan por debajo del valor teórico. Nuestra respuesta a lo anterior se debe a que el tamaño de muestra es más pequeño (n=5) en estos incisos que en los otros (n=30). Esta explicación está relacionada con el teorema del limite central que señala que a mayor tamaño de muestra la distribución muestral se aproxima más a la distribución normal. La diferencia se explica porque teóricamente utilizamos la distribución normal mientras que por simulación no requerimos hacer este supuesto.

Otro factor que repercute en la precisión de los resultados obtenidos mediante simulación, es la cantidad de muestras tomadas de la población. Por ejemplo, Gerardo, Jorge, Coral y Mónica construyeron su distribución muestral con 1000 muestras, en tanto que Libnia la construyó con 500 muestras. Por eso Libnia siempre se quedó por debajo de los valores teóricos. El resto de los estudiantes utilizó 2000 muestras. Veamos como ejemplo las soluciones de Gerardo:





7.3 Análisis del proceso de solución

En el capítulo anterior se hizo una descripción detallada de los elementos de significado que los estudiantes desarrollaron en cada una de las etapas del proceso de simulación y las principales dificultades a las que se enfrentaron los estudiantes al resolver los problemas. Haremos un recuento de ellas en este capítulo.

1. La formulación del modelo.

Esta etapa ha sido sin duda el principal obstáculo en el proceso de simulación de una distribución muestral y la resolución de los problemas. Esto se debió a que los estudiantes no adoptaron una estrategia que relacionara el tipo de variable del problema y el valor de los parámetros con las acciones a realizar. Sin embargo, en la última actividad los estudiantes pudieron formular por sí solos el modelo de la población. Es decir, conforme fueron transcurriendo las actividades los estudiantes pudieron finalmente identificar la estrategia adecuada para formular la población.

2. Definir la fórmula para calcular el estadístico en las muestras.

Esta acción también presentó dificultades para muchos estudiantes, sobre todo en las primeras actividades, pero posteriormente conforme se fueron familiarizando con el software, ya no tuvieron mayores problemas. Las dificultades consistieron en escribir el comando sin indicar el atributo, o bien, indicar el atributo pero sin señalar el valor sobre el que había que realizar la operación. Los comandos principales que se utilizaron fueron los relacionados con medias, proporciones y conteos.

3. Definir la fórmula para calcular las proporciones de casos (probabilidades empíricas).

Fueron pocos los estudiantes que tuvieron dificultades en esta parte, y éstas consistieron básicamente en el manejo de los operadores *or* y *and,* principalmente cuando se les pedía calcular la probabilidad de un intervalo central de la distribución.

Al final del estudio, se entrevistó a los estudiantes sobre la opinión que tenían de la forma de resolver los problemas mediante el enfoque teórico y simulación, así como veían los resultados obtenidos. El siguiente cuadro muestra sus respuestas.

	¿Es diferente la forma como resuelves un problema con simulación y el enfoque teórico?	**¿Cómo ves los resultados que obtienes con ambos enfoques?**
Edgar	Si, con el software es un poco más fácil tal vez, porque creas tus muestras y le puedes dar 100 muestras, 200 o las que creas convenientes para trabajar con ellas, en cambio en el enfoque teórico pues ya te especifican lo que tienes que ir haciendo y no puedes aumentar el valor de las muestras	Considero que es más exacto Fathom, por la cantidad de muestras que podemos tomar, pero en la teórica no es tan exacto porque no podemos utilizar 1000, a lo mas podemos utilizar 30 y eso ya sería bastante laborioso.
Jorge	Si, mucho, muy diferente. Aquí es un poco más rápido y más fácil y tienes nivel de exactitud, es más fácil de tomar en muestras más grandes.	Muy similares
Denis	Si, cuando utilizamos Fathom realmente es muchísimo mas práctico, realizar, o sea generar la población y calcular la distribución a cuando lo hacemos teóricamente. Teóricamente si se nos complica un poco mas acerca que fórmula vamos aplicar o si estamos bien, consultar tablas y todo eso.	Son similares, se acercan mucho.
Donovan	La operación tal vez sea la misma, pero al ver las cosas como se llevan a cabo es de diferente forma	Con el de simulación nos ayuda a aprender a usar el sistema y desarrollarlos. El teórico me serviría para comprobar y obtener las cantidades, y ya en este se simularon con mayor exactitud. Porque en el teórico no tenemos cantidades exactas sino cercanas.
Coral	Si, mucho muy diferente, aquí se tiene que saber lo que es una colección de datos, un measures que sigue de la colección de datos, y sin embargo cuando uno hace teórico todas esas cosas, nunca saca una colección de datos, siempre los datos que nos dan son mínimos, además los problemas nos dice, ¿cuál es la probabilidad de que la media sea menor a 1.5, y aquí no nos lo da, uno tiene que estar resolviendo el problema desde que no lo dan. Con pocos datos tu sácame la muestra que es lo más difícil que se me ha hecho, el	Hasta ahora han sido cercanos. A fuerza tienen que coincidir unos con otros, porque se supone que el Fathom que es el sistema pues nos da los datos más precisos que los teóricos.

	sacar la población. Y voy armando todo el problema paso a paso y cuando es teórico no, la definición del problema ya nos la da. Utilizas fórmulas y es como si hicieras pasos mecánicos.	
Mónica	Si, bueno a mi se me hace más fácil utilizar fathom, bueno, hasta cierto punto, lo que se me complica mas en fathom es sacar la población, porque hay que ponerle mucha atención al ejercicio y hay que saber exactamente que es lo que nos están pidiendo para poder definir la población. Ya obteniendo la población pues ya lo demás es más fácil. Y en el aspecto como lo hacíamos con fórmulas, pues prácticamente en el enunciado nos daban todos los datos, ya lo único que se requería era aplicar la fórmula y lo que se me complicaba ahí era el manejo de las tablas.	A mi se me hace que fathom es mucho más preciso, porque por decir, a lo mejor teóricamente podemos sacar casi exactamente los mismos resultados, pero teóricamente no utilizamos todos los decimales que se deberían utilizar y posiblemente fathom por ser un software pues si utiliza todos los decimales y se obtiene un resultado mucho más aproximado
Viridiana		Realmente se parecen mucho, nada mas que con el software siempre es más exacto
Ana Lilia	Si, porque cuando usas la computadora como en este caso, me muestra la gráfica, de que aumente o disminuya la proporción, como afecta una población, como afecta una muestra. En cambio teóricamente, a lo mejor los números varían pero no me dicen mucho.	A veces salen un poquito diferentes, me imagino yo porque lo teórico. Bueno mas bien la máquina utiliza números más grandes, cuando lo hacemos teórico utilizamos calculadora y los resultados son más pequeños, menos precisos. Es mas preciso en la computadora
Libnia	Si, en papel y lápiz lo único que hago es sacar los datos y se me hace más difícil teórico, y así se me hace más fácil porque puedo sacar mis muestras, puedo poner las gráficas, puedo jugar con el software y eso me ayuda a mi a entender mejor	Finalmente tienen que ser prácticamente iguales. Siempre se acercan mucho, varían por décimas o centésimas.

Obsérvese que las opiniones acerca de resolver los problemas mediante simulación giran en torno a que es más fácil, más práctico, más rápido y más exacto. Esto último no necesariamente es cierto, pero ellos señalan que proporciona más decimales que el teórico y por la cantidad de muestra que pueden tomar. Otra consideración importante que tienen en cuenta, es que mediante simulación ellos mismos se encargan de todo el proceso, mientras que teóricamente, se les especifica lo que tienen que ir haciendo y los pasos son mecánicos, elegir la fórmula, sustituir los datos y usar las tablas para calcular la probabilidad. Respecto a la validez de los resultados, la mayoría de los estudiantes los considera muy cercanos a los teóricos y los aceptan como válidos.

Otro aspecto que hay que resaltar de la resolución de problemas mediante simulación, es que no aparecen varias acciones que son cruciales en el enfoque tradicional, como son las siguientes:

- La distribución muestral obtenida no requiere estandarización y sobre ella se calculan las probabilidades de los valores muestrales de interés.
- No se requiere el uso de tablas de probabilidad, el valor se encuentra directamente como un subconjunto del total.

7.4 Conclusiones

La conclusión a la que hemos llegado es que los estudiantes pudieron resolver problemas de distribuciones muestrales, a pesar de los diferentes errores y dificultades que se presentaron en el proceso, con la ayuda del investigador sólo cuando fue necesario para poder continuar con el trabajo, y sobre todo en la etapa de formulación del modelo de la población .

Entre las ventajas que observamos al resolver problemas mediante simulación podemos mencionar las siguientes:

- Los estudiantes fueron participes de todo el proceso, desde la formulación de la población hasta el cálculo de probabilidades, utilizando para ello diversas representaciones (aspecto representacional, que señala Biehler, 1991) que estuvieron a su alcance su la mayoría de los casos. Esto permitió a los estudiantes enfocarse en el proceso y también en el resultado, a diferencia del ambiente tradicional, donde usualmente el énfasis se centra en los resultados.
- La facilidad con la que los estudiantes pudieron calcular e interpretar las probabilidades de resultados muestrales, como proporciones de casos de interés en un total de casos observados y que ellos mismos generaron mediante la toma de

muestras, ayudados sobre todo por las características del software, el cual les permitió calcular los resultados mediante una expresión definida por ellos mismos, y en algunos casos filtrarlos y hasta sombrearlos.

- El ambiente de simulación volvió triviales y en algunos casos hizo innecesarios (aspecto computacional, que señala Biehler, 1991), procesos que son laboriosos y complicados en un ambiente de lápiz y papel, como es la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad, los cuales son fuente de diversos errores al resolver los problemas.

Observamos además, que los estudiantes le encuentran sentido a la resolución de problemas de distribuciones muestrales mediante simulación, ya que han construido por ellos mismos las distribuciones, generando las poblaciones, tomando muestras, definiendo estadísticos y calculado sus probabilidades como proporciones de casos que se han presentado, situación que no sucede en el ambiente tradicional de lápiz y papel, donde usualmente se enfatiza demasiado en representaciones simbólicas y tablas de probabilidad, como recurso para calcular las probabilidades, y donde la comprensión de los resultados obtenidos no siempre es lograda por los estudiantes.

En cuanto a la aceptación de los resultados mediante simulación, estos fueron considerados válidos por los estudiantes, dada la cercanía de la solución por simulación con la solución teórica sobre todo en los casos que las distribuciones poblacionales no eran muy asimétricas.

Podemos decir entonces, que los estudiantes pudieron resolver problemas de distribuciones muestrales mediante simulación computacional, una vez que se apropiaron de los recursos del software y después de haber abordado algunas actividades. Cuando se cuenta con la guía del profesor se facilita más el proceso, pues hay que recordar que en el estudio, los estudiantes solo recibieron ayuda cuando no podían avanzar en el proceso de solución.

Capítulo 8

EVOLUCIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

8.1 Introducción

En este capítulo nos proponemos dar respuesta a la pregunta: *¿Cómo evolucionan los significados de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales cuando trabajan en un ambiente de simulación computacional respecto al ambiente de lápiz y papel?*. La pregunta que nos hemos planteado obedece al propósito de estudiar los cambios que ha sufrido el significado -sí es que éste ha ocurrido-, como consecuencia de una enseñanza basada en simulación computacional como la que se implementó en las actividades de enseñanza.

De acuerdo con la agenda de investigación para educación matemática que plantean Godino y Batanero (1998) y que fue descrita en el marco teórico, nuestra pregunta la ubicamos en la intersección de la categoría cognitiva (significados personales) con la componente dinámica (estudio de los cambios). Específicamente, la pregunta planteada por los autores es ¿cómo cambian los significados personales de los estudiantes en el tiempo o como consecuencia de la enseñanza?

Como fundamento para el estudio de los significados, diseñamos un proceso de aprendizaje donde se planteó que fuera el mismo estudiante con su acción sobre los problemas propuestos el que construyera significados sobre los conceptos involucrados. Cada problema involucraba diferente distribución poblacional y se tomaban muestras de diferente tamaño para construir diferentes distribuciones, con el propósito de que los estudiantes descubrieran propiedades y construyeran conceptos. Los resultados teóricos siempre fueron un referente de los estudiantes para evaluar la precisión de los resultados de la simulación.

Para el análisis de la evolución de los significados de los estudiantes hemos tenido en cuenta diversos instrumentos de recolección de información como son: un examen teórico sobre distribuciones muestrales que se aplicó antes de iniciar la investigación, un cuestionario previo y otro posterior, así como entrevistas con algunos estudiantes al final del estudio.

8.2 Análisis del significado de los estudiantes en el examen teórico

El examen teórico se aplicó días antes de empezar con el estudio y formó parte de la evaluación de la unidad de distribuciones muestrales. El examen consistió de 5 problemas en los que se incluían distribuciones muestrales de medias, de proporciones, de diferencias de medias y diferencias de proporciones. Sin embargo, el análisis que haremos se reducirá a las distribuciones de la media y la proporción, por ser los estadísticos a los que hemos limitado nuestro estudio.

8.2.1 Situaciones-problema

El campo de problemas contemplados en el examen corresponde a una categoría que denominamos deductiva, la cual se reporta en el significado institucional de referencia (ver anexo 1). En este tipo de problemas, se puede asumir que la distribución muestral del estadístico es normal o aproximadamente normal, ya sea porque la distribución de la población es normal o porque el tamaño de muestra es lo suficientemente grande para aplicar el teorema del limite central. Lo que usualmente se busca es conocer o hacer predicciones sobre la ocurrencia de ciertos resultados muestrales. Los problemas considerados en el examen son los siguientes:

Problema 1:

La cantidad de dinero en efectivo que llevan consigo los estudiantes de una escuela es de 85 pesos con una desviación estándar de 8.5 pesos. Si se toma una muestra aleatoria de 36 alumnos de dicha escuela. Encontrar la probabilidad de que el total de dinero en efectivo que traen entre ellos sea:

a) Menor de 3100
b) Entre 2900 y3100 pesos

Problema 2:

La duración media del producto de un fabricante es de 5 años con una desviación estándar de 1 año. Suponiendo que la duración de estos productos sigue una distribución normal. Obtener la probabilidad de que una muestra aleatoria de 9 de tales productos tenga una media:

a) entre 5.1 y 5.5 años
b) menor a 5.2 años

Problema 3:

Supongamos que se sabe que en cierta población de personas, el 8% de sus habitantes son daltónicos. Si se selecciona una muestra aleatoria de 150 personas de dicha población, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de daltónicos en la muestra sea:

a) mayor a 0.11
b) mayor a 0.04 y menor a 0.13?

8.2.2 Representaciones

Las representaciones típicas más frecuentes que se utilizan en la resolución de problemas de distribuciones muestrales en un ambiente tradicional de enseñanza son las siguientes:

1. *Representaciones simbólicas:*

- Representación de la distribución muestral en su versión estandarizada.

a) Distribución muestral de la media: $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$, donde $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b) Distribución muestral de la proporción: $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}}$, donde $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.

- Representación de las probabilidades que desean calcular.

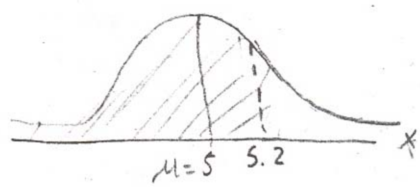
a) Intervalo de cola izquierda**:** $P(\bar{X} < a)$, $P(\hat{p} < a)$

b) Intervalo central: $P(a < \bar{X} < b)$, $P(a < \hat{p} < b)$

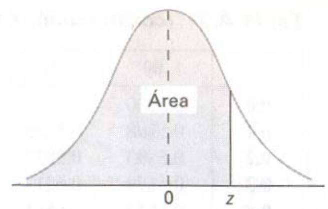
c) Intervalo de cola derecha: $P(\bar{X} > a)$, $P(\hat{p} > a)$

2. *Representaciones gráficas*

- Gráfica con el área sombreada correspondiente a la probabilidad que se desea calcular tanto en versión de datos reales como versión estandarizada.



Gráfica con datos reales



Gráfica estandarizada

3. *Representaciones numéricas*

Tablas de probabilidad de la distribución normal estandarizada.

Tabla A.3 Áreas bajo la curva normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010

De los 11 alumnos que participaron en el estudio se dispuso del examen de 9 de ellos. Veamos el tipo de representaciones que utilizaron:

Representaciones simbólicas:

Todos los estudiantes identificaron correctamente el tipo de estadístico y la fórmula correspondiente. Cuando se trataba de proporciones elegían la distribución de la proporción y cuando se trataba de la media seleccionaban la distribución de la media. Sin embargo 5 de los 9 estudiantes, cometieron errores en el manejo de la fórmula de Z (distribución muestral estandarizada), ya sea en la sustitución o en las operaciones. En cuanto a la representación simbólica del intervalo que deseaban calcular se observó que algunos estudiantes no establecen la diferencia cuando trabajan en el ámbito de datos reales y cuando trabajan con datos estandarizados, por lo que usan indiscriminadamente valores de Z y valores de $\bar{x}$ y $\hat{p}$. Por ejemplo, Gerardo identifica que se trata de la distribución muestral de una proporción y hace un manejo simbólico correcto de todo el proceso (ver figura 1); mientras que Viridiana comete diversos errores, como simbolizar mediante Z el intervalo de probabilidades, cuando debió hacerlo utilizando $\hat{p}$, ya Z se refiere a valores estandarizados, sustituye 0.8 en lugar de 0.08 y no logra identificar el valor de q (ver figura 2).

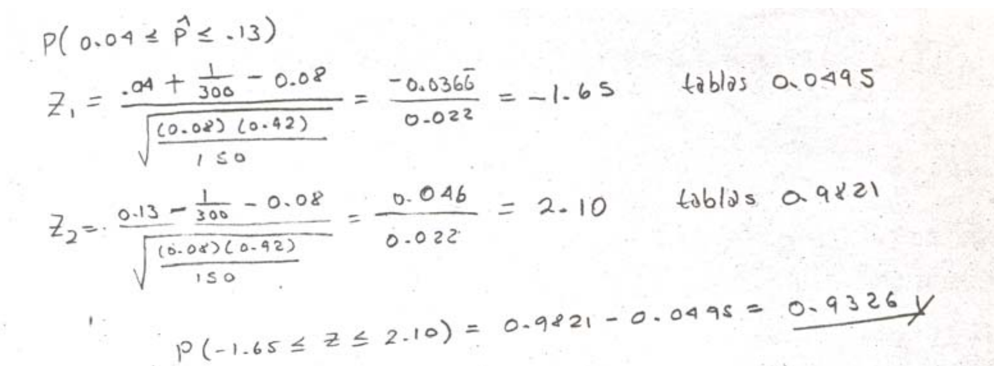


Fig. 1: Problema resuelto por Gerardo

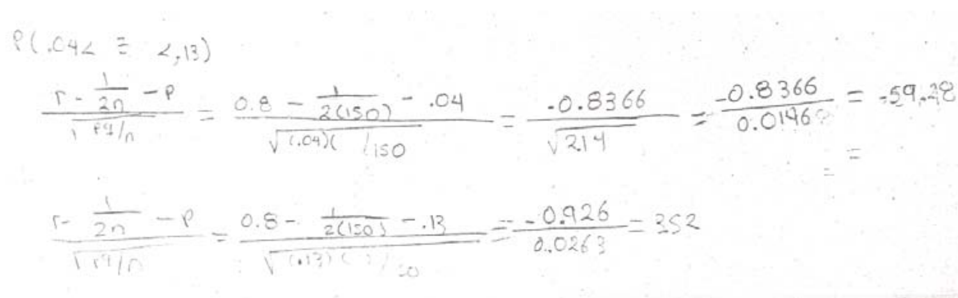


Fig. 2: Problema resuelto por Viridiana

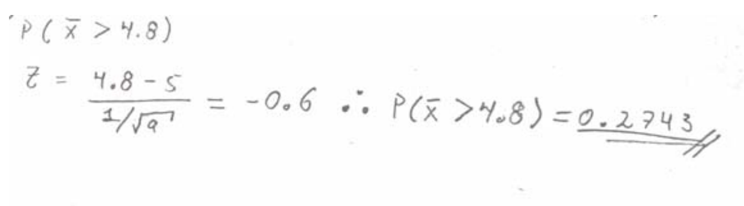
Representaciones numéricas

La única representación numérica fue la tabla de la distribución normal estandarizada. Todos los alumnos tuvieron al menos un error en el manejo de tablas, a excepción de Mónica. Los errores consistieron en:

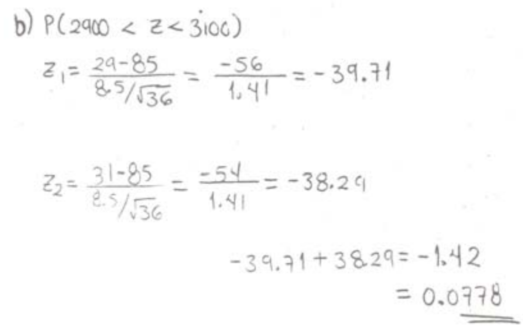
1. Cuando se pide una probabilidad de cola derecha no se resta el valor obtenido del área total, que es igual a 1. Esto es necesario dado que las tablas dan valores de cola izquierda.

2. Cuando se pide la probabilidad de un intervalo central, en vez de restar las probabilidades algunos estudiantes restan los valores de Z .

Por ejemplo, Omar comete el error de cola derecha al querer calcular la probabilidad de que la media sea mayor a 4.8. El valor que obtuvo es de la cola izquierda $P(\bar{x} < 4.8)$, por lo que le hizo falta restar el valor encontrado de la probabilidad total que es igual a 1, para obtener la cola derecha.

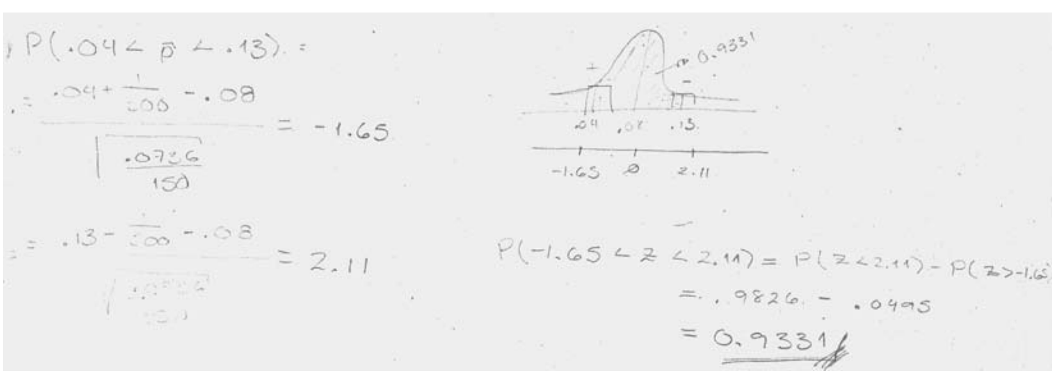


Por su parte Denise comete el error de restar Z en lugar de restar probabilidades.



Representaciones gráficas

Estas representaciones son muy útiles en el cálculo de probabilidades. Sin embargo, muchos estudiantes (5) no hicieron uso de ellas.



Una tabla resumen con el manejo de representaciones se muestra a continuación:

Alumno	Utiliza correctamente representaciones simbólicas	Utiliza correctamente representaciones numéricas	Utiliza representaciones gráficas	Número de incisos resueltos correctamente
Omar	Si	Si	No	5 de 6
Mónica	Si	Si	Si	6 de 6
Viridiana	No	No	No	0 de 6
Denis	2 de 6 veces	3 de 6 veces	No	2 de 6
Coral	4 de 6 veces	2 de 6 veces	Si	4 de 6
Gerardo	Si	5 de 6 veces	No	5 de 6
Ana Lilia	2 de 6 veces	1 de 6 veces	Si	1 de 6
Donovan	4 de 6 veces	4 de 6 veces	Si	4 de 6
Libnia	No	No	No	0 de 6
Total			4	27 de 54

8.2.3 Acciones y procedimientos

Las acciones y procedimientos que se requieren para resolver un problema desde este enfoque son:

1. Identificar la información relevante del problema, como los *parámetros* de la población, el *tamaño de la muestra* y los *valores* entre los cuales hay que determinar alguna probabilidad o proporción de valores muestrales.
2. Elegir la fórmula según el *tipo de distribución muestral* y sustituir la información del problema para determinar el valor de Z.
3. Hacer un dibujo de la distribución muestral y sombrear el área correspondiente a la probabilidad solicitada.
4. Utilizar las tablas de la distribución normal estandarizada para calcular la probabilidad de los valores muestrales.

Las principales dificultades en torno a sus acciones y procedimientos que siguieron los estudiantes tuvieron que ver con el poco uso de representaciones gráficas y errores en el uso de tablas para calcular probabilidades.

8.2.4 Conceptos y propiedades

En una enseñanza tradicional basada en el uso de fórmulas y tablas como a la que estuvieron expuestos los estudiantes, el manejo de los diversos conceptos que intervienen en las distribuciones muestrales se realiza de manera superficial o aparece oculto en la mayoría de los casos. Por ejemplo, la variabilidad muestral, que es un concepto intrínseco a las distribuciones muestrales, el efecto del tamaño de la muestra en dicha variabilidad y en el valor de las probabilidades, ni las implicaciones del teorema del limite central se examinaron en la evaluación realizada a través del examen. El énfasis se centró principalmente en la manipulación de fórmulas y la obtención de resultados. Por lo que podemos decir que el principal concepto que se puso en juego fue el cálculo de probabilidades mediante procesos algorítmicos.

8.2.5 Argumentaciones y validaciones

Las pocas argumentaciones y validaciones que se realizaron se basan en el uso de fórmulas y tablas de probabilidad. Poco uso se hace de las representaciones gráficas como medio par validar resultados.

8.2.6 Conclusiones sobre el examen teórico.

Si tomamos el examen como referencia de la enseñanza que los alumnos recibieron, podemos concluir que el significado que éstos desarrollaron sobre las distribuciones muestrales, está marcado por un fuerte énfasis en el uso de representaciones simbólicas y procedimientos para calcular probabilidades. Se ha hecho poco uso de representaciones gráficas, se cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, se realiza un manejo superficial del amplio recurso conceptual y propiedades que subyacen a las distribuciones muestrales y se presentan pocos elementos argumentativos. Esto conduce a que los estudiantes desarrollen un significado parcial de las distribuciones muestrales y una visión procedimental de ellas.

8.3 Análisis del significado de los estudiantes en el cuestionario diagnóstico.

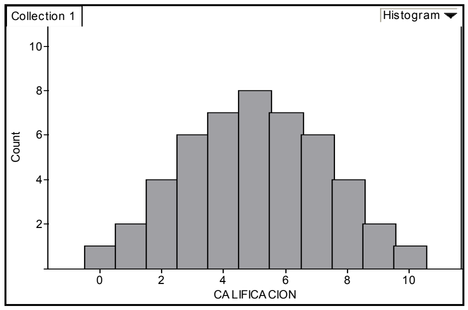
El cuestionario diagnóstico se aplicó a un total de 27 alumnos, de los cuales se seleccionaron a los 11 que participaron en el estudio. El propósito fue investigar los significados que los estudiantes tenían sobre las distribuciones muestrales, poniendo especial énfasis en la variabilidad muestral y las implicaciones del teorema del limite central. Específicamente, los conceptos y los objetivos contemplados fueron:

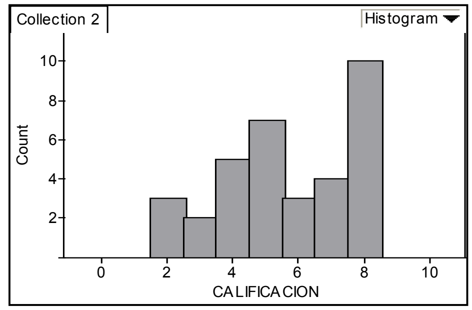
1. *Variabilidad de un conjunto de datos desde un punto de vista gráfico.*
   a) Dadas dos distribuciones de datos, decidir cuál tiene mayor variabilidad.
   b) Dadas tres distribuciones y sus correspondientes desviaciones estándar, asignar la desviación correcta a cada distribución.
2. *Variabilidad muestral*
   a) Predecir posibles resultados atendiendo la variabilidad en muestras.
   b) Identificar la variación del estadístico alrededor del parámetro poblacional.
3. *Efecto del tamaño de muestra en la variabilidad, centro y forma de la distribución muestra (teorema del limite central).*
   a) Dadas diferentes distribuciones muestrales y diferentes tamaños de muestra, asignar correctamente el tamaño a la distribución correspondiente.
   b) Dada una población y dos distribuciones muestrales, asignar correctamente el tamaño de muestra a cada distribución mediante la identificación de variabilidad y forma.
4. *Efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales.*
5. *Resolver un problema de distribuciones muestrales.*

Como puede verse, a diferencia del examen teórico que sólo enfatizaba en el uso de fórmulas y selección de procedimientos para resolver problemas, en este cuestionario se busca conocer la comprensión de los estudiantes sobre los diversos conceptos que subyacen e involucran a las distribuciones muestrales. Los resultados de este cuestionario y el examen teórico nos servirán de base para realizar el análisis de la evolución de los significados después de la implementación de las actividades con simulación computacional.

A continuación haremos un análisis cualitativo y daremos algunas descripciones cuantitativas de los resultados que se obtuvieron en cada uno de los ítems del cuestionario.

1. Marca con una X la distribución de datos que tiene más variabilidad (dispersión).





Explica con todo detalle las razones de tu elección.

El propósito de este ítem fue investigar las ideas de los estudiantes sobre la variabilidad o dispersión de una distribución de datos representada gráficamente. Los resultados en el grupo de 11 estudiantes fueron:

Resultado	Frecuencia
Respuesta correcta	**3**
Respuesta incorrecta	8
Total	11

Cabe señalar que aunque tres estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, sólo la explicación de uno de ellos (Omar) contiene los elementos que muestran una comprensión adecuada de la variabilidad.

"Porque la gráfica ocupa un mayor rango en el evento a las calificaciones, por lo tanto es más variable".

Denis también selecciona la respuesta correcta, pero su explicación no es tan clara como en el caso de Omar:

"Para mí la primera tiene mas dispersión ya que tiene mayor número de calificaciones y está contando de 0 a 10".

Mientras que Libnia contesta:

"La seleccioné porque tiene más barras en el histograma".

Los últimos dos estudiantes relacionan la variabilidad con un mayor número de datos o barras del histograma, lo cual es incorrecto. Como veremos posteriormente, esta idea de la variabilidad la exhibieron varios estudiantes aún después de las actividades con la simulación.

Por su parte, las respuestas de la mayoría de los estudiantes que seleccionaron la opción incorrecta, se centran en la diferencia entre las alturas de las barras (irregularidad) del histograma. Veamos algunos casos:

> *"Por mostrar los resultados en diferentes niveles" (Ana Lilia).*
>
> *"Porque hay mas diferencia entre las alturas de las barras" (Edgar).*
>
> *"La segunda tiene más variabilidad ya que las barras del histograma suben y bajan en diferente proporción a comparación del primero" (Gerardo).*

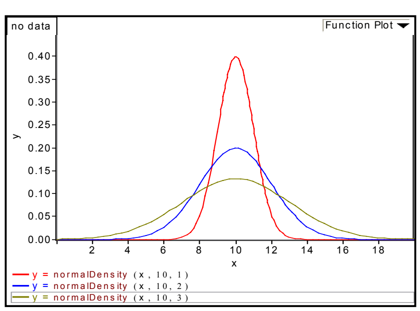
Se presentó el caso de un estudiante (Jorge) que no seleccionó ninguna de las dos opciones, y mostró las dos concepciones anteriores.

> "*Si el número de variables son las barras del histograma, la que tiene mas variabilidad es la distribución 1, pero si la variabilidad es el tamaño o la diferencia que tienen las barras, entonces el histograma 2 tiene mas variabilidad".*

Entonces, como resultado del análisis de este ítem, podemos señalar que surgieron dos concepciones equivocadas de la variabilidad de un conjunto de datos:

1. A mayor cantidad de datos o barras hay más variabilidad.
2. A mayor diferencia entre la altura de las barras de un histograma (irregularidad) hay mayor variabilidad.

2. En las siguiente grafica aparecen tres distribuciones poblacionales cuya media es $\mu = 10$ y sus desviaciones estándar son $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ y $\sigma = 3$ respectivamente. Coloca sobre cada una de ellas la desviación estándar que le corresponde.



El propósito de este ítem fue el de investigar si los estudiantes relacionan en forma correcta la desviación estándar con la variabilidad de una distribución. Los resultados fueron los siguientes:

Resultado	Frecuencia
Respuesta correcta	**8**
Respuesta incorrecta	3
Total	11

Como en el caso anterior, no todos los que contestan correctamente, argumentan bien su respuesta. En este caso 2 de los 8 estudiantes que asignaron correctamente las desviaciones no dan argumentos correctos. Los otros 6 estudiantes hacen referencia a las alturas a al ancho de las distribuciones. Veamos algunos casos de estos:

> *"Porque la desviación estándar se encuentra más cerca de la media" (Mónica).*
>
> *"Entre más pequeña es la desviación, la curva es más alta" (Gerardo).*
>
> *"Porque entre más alta es la desviación la curva se va ampliando" (Donovan).*
>
> *"Entre mayor es la desviación estándar mas aplanada es la curva" (Ana Lilia).*

Por su parte los estudiantes que asignaron incorrectamente las desviaciones consideran que a mayor altura en las distribuciones existe mayor desviación.

> *"La altura determina la desviación" (Jorge).*
>
> *"Porque entre menor sea la desviación menor será la curva en la grafica" (Omar).*

Como conclusión de este ítem, podemos señalar que existe la idea incorrecta de algunos estudiantes de una relación directamente proporcional entre altura de una distribución y su desviación estándar, cuando en realidad es lo contrario. Comprender la desviación estándar como una medida de la variabilidad de una distribución es un elemento importante que se pone en juego en el estudio de las distribuciones muestrales, sin embargo, muchos estudiantes no mostraron comprensión de ello. Esto constituye un ejemplo de que la ejecución de procedimientos no siempre conduce a la comprensión de los conceptos, pues estudiantes que tuvieron éxito en resolver problemas del examen donde se contemplaba el uso de la desviación estándar, fallaron cuando se les cuestionó sobre el significado en un escenario diferente, lo que refuerza el señalamiento que hicimos en la sección anterior sobre el manejo superficial de conceptos y propiedades que se presenta en un enfoque basado en fórmulas y procedimientos.

3. Si una moneda bien fabricada es lanzada una gran cantidad de veces, la proporción de águilas que aparecerá será muy cercana a 0.5. Supongamos que tomas 5 muestras de 10 lanzamientos cada una. Escribe cuántas águilas esperarías que aparecieran en cada una de las 5 muestras.
N° de águilas en la muestra 1: ____
N° de águilas en la muestra 2: ____
N° de águilas en la muestra 3: ____
N° de águilas en la muestra 4: ____
N° de águilas en la muestra 5: ____
Explica por qué.

El propósito de este ítem fue investigar las ideas de los estudiantes sobre la variabilidad muestral. La clasificación de las respuestas para los 11 estudiantes del estudio fue:

Resultado	Frecuencia
Apreciación correcta de la variabilidad	**6**
Apreciación incorrecta de la variabilidad	5
Total	11

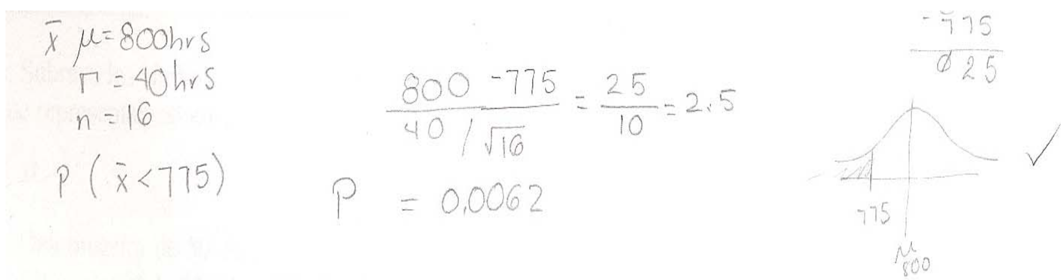
Los 6 estudiantes que apreciaron correctamente la variabilidad de las muestras escribieron resultados alrededor de 5 águilas, como: 5, 2, 2, 3, 0; 4, 6, 3, 4, 5. Sin embargo, pocos argumentos normativos se dieron como explicación. Mientras que quienes contestaron incorrectamente escribieron 5, 5, 5, 5, 5; 1, 1, 1, 1, 1. Los argumentos que se dieron en este tipo de respuestas contienen elementos de probabilidad. Por ejemplo:

> *"Porque la proporción de águilas y soles es equiprobable en 0.5, por lo tanto en cada lanzamiento se espera la misma probabilidad" (Jorge).*
>
> *"Porque la probabilidad no cambia" (Omar).*

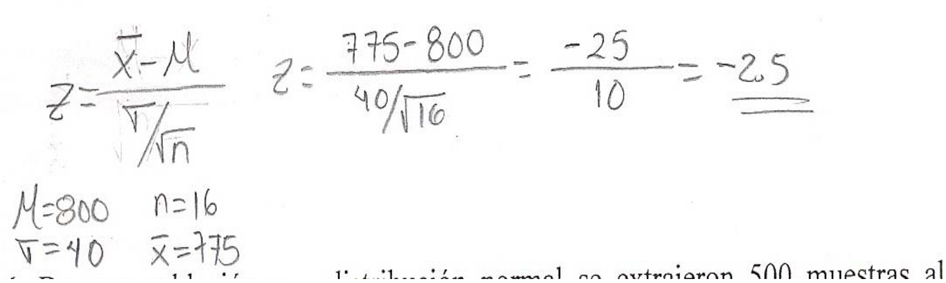
De lo anterior podemos expresar que muchos estudiantes no apreciaron correctamente la variabilidad muestral y que en su lugar optaron por los resultados más probables. Quienes la apreciaron correctamente no fueron capaces de proporcionar argumentos normativos.

4. Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye aproximadamente normal con media de 800 hrs. y una desviación estándar de 40 hrs. Si se toma una muestra de 16 focos, ¿Cuál será la proporción de focos con una vida promedio menor a 775 horas? Muestra todos tus cálculos.

El propósito de este problema fue investigar si los estudiantes podían resolver un problema de distribuciones muestrales y el tipo de dificultades que se presentaban en su resolución. Esperábamos una tasa alta de respuestas correctas, pues este tipo de problemas fue frecuente en la enseñanza que recibieron antes de aplicar el cuestionario. Sin embargo, sólo 4 estudiantes lograron resolver el problema correctamente, 2 llegaron hasta calcular el valor de la distribución estandarizada (Z), 4 cometieron errores en la estandarización y 1 de ellos no lo contestó. Por ejemplo, Coral contestó correctamente el problema.



Pero Denis no lo concluyó:

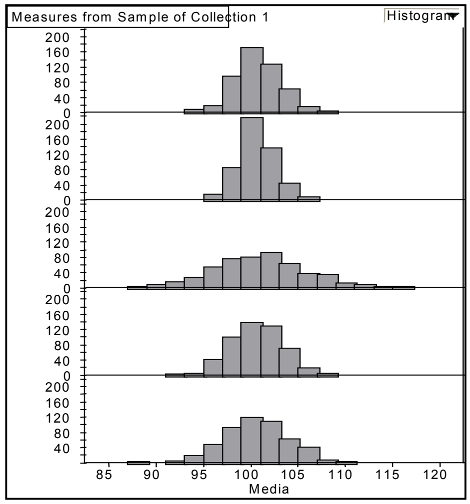


Como podemos ver, la mayoría de los alumnos tuvo dificultades para resolver un problema representativo de las situaciones que fueron enfatizadas en su enseñanza previa, lo que nos indica que aún, la comprensión a nivel procedimental no les resultó sencilla.

6. De una población con distribución normal se extrajeron 500 muestras aleatorias de cada tamaño (5, 10, 15, 20 y 25). Se calculó la media de cada muestra y los resultados se dibujaron en los histogramas que se muestran en la siguiente figura.

a) Coloca a un lado de cada histograma, el tamaño de la muestra que corresponda.

   Explica la razón de tu asignación



El propósito de este ítem fue el de investigar si los estudiantes relacionan en forma correcta el tamaño de la muestra con la variabilidad de la distribución muestral y si identifican que la distribución muestral está centrada en el parámetro poblacional.

Resultado	Frecuencia
Respuesta correcta	**2**
Respuesta incorrecta	9
Total	11

Ninguna de las argumentaciones que dieron los dos estudiantes que contestaron correctamente se puede considerar adecuada, por lo que podemos decir que ningún estudiante tuvo claro el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de las distribuciones muestrales. Por su parte las respuestas de los que contestaron incorrectamente fueron confusas y poco claras.

b) ¿Cuál es el valor de la media de la población de donde se extrajeron las muestras?. Explica por qué.

Sólo 4 estudiantes identificaron que la población de las que se extrajeron las muestras tiene uuna media igual a 100. El resto proporcionó otros valores o no contestó. Como resultado de este ítem, podemos concluir que los estudiantes fallaron en identificar propiedades de suma importancia que se deben enfatizar en la enseñanza de las distribuciones muestrales como son el efecto del tamaño de muestra en su centro y variabilidad.

6. Una muestra de 50 datos es seleccionada de una población de temperaturas obteniéndose una media muestral de 20 °C. ¿Cuál sería tu mejor estimación de la media poblacional μ?
   a) Sería exactamente 20 °
   b) Sería cercana a 20 °
   c) No sería posible hacer una estimación, pues μ es un parámetro desconocido y la información que se tiene se refiere sólo a una muestra.
   d) Otra respuesta

El propósito de este ítem fue el de investigar si los estudiantes son conscientes que la variabilidad muestral conlleva un error de muestreo al momento de hacer una estimación.

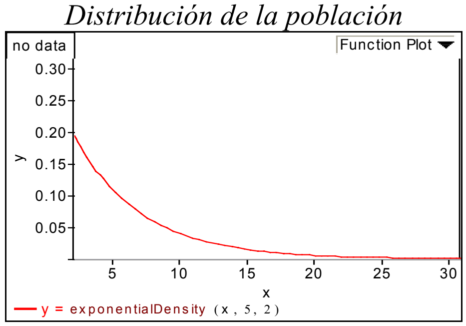
Resultado	Frecuencia
Sería exactamente 20 °	1
Sería cercana a 20°	**3**
No es posible hace una estimación	5
Otra respuesta	2
Total	11

Solo tres estudiantes contestaron correctamente que la estimación sería cercana al parámetro poblacional, mientras que 5 estudiantes consideran que no es posible hacer una estimación con base en los resultados de una muestra.

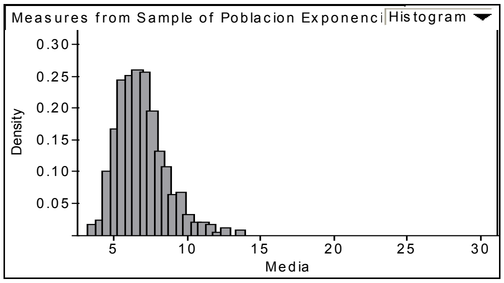
7. En la figura se muestra la distribución de una población y dos distribuciones muestrales para muestras de tamaño 2 y 15. Coloca el tamaño de muestra a la distribución que corresponda. Nota: se tomaron 500 muestras en cada caso.

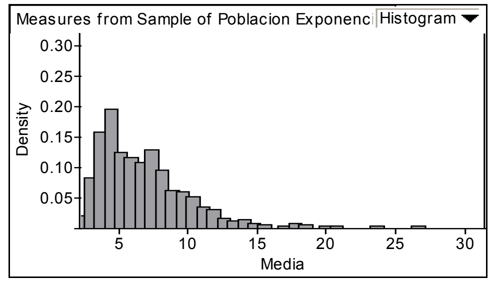
El propósito de este ítem fue ver si los estudiantes comprenden las implicaciones del teorema del limite central en la forma y la variabilidad de las distribuciones muestrales.

Distribución de la población



Distribuciones muestrales





n = _________ n =__________

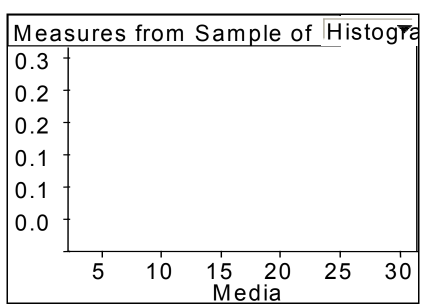
Explica las razones de tu asignación

Respuesta	Frecuencia
Respuesta correcta	**3**
Respuesta incorrecta	8
Total	1

Sólo 3 estudiantes asignaron correctamente los tamaños de muestra a las distribuciones muestrales, por lo que podemos decir que la mayoría no tuvo en cuenta la forma correcta cómo el tamaño de la muestra afecta la variabilidad y la forma de las distribuciones muestrales. Ahora, quienes contestan correctamente lo hacen de forma casual ya que en sus explicaciones no tienen en cuenta las propiedades correctas. Veamos algunos de estos casos:

> *"Porque en el primer histograma tenemos más valores grandes de la media que en el segundo histograma" (Gerardo).*
>
> *"Porque en muestras más grandes hay mayor variabilidad en los datos" (Mónica).*

8. En relación con el ítem anterior. Si la muestra fuera de tamaño 30, dibuja la forma que podría adoptar la distribución muestral.



Este ítem es una continuación del anterior. El propósito era investigar si los estudiantes eran conscientes que para un tamaño de muestra de 30, la distribución muestral debe ser muy semejante a la distribución normal a pesar de que la población es de tipo exponencial. Sin embargo, ningún estudiante dibujó una distribución muestral normal. 2 estudiantes dibujaron una distribución parecida a la de tamaño 15 del inciso anterior, acampanada pero muy sesgada hacia la derecha. Por su parte 5 estudiantes dibujaron una distribución semejante a la de tamaño 2 en el inciso anterior y 4 estudiantes no contestaron el ítem.

Como consecuencia del análisis de los dos ítems anteriores, concluimos que los estudiantes no comprenden las repercusiones del teorema del limite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales. De ahí que su utilización en la resolución de problemas se realiza en forma de receta, "para muestras grandes, generalmente mayores a 30, la distribución muestral es aproximadamente normal".

9. Consideremos como una población una gran urna que contiene el 70% de bolas rojas. Si se selecciona una muestra aleatoria de la población ¿Qué consideras que sea más probable de ocurrir?

a) 7 bolas rojas en una muestra de tamaño 10.
b) 70 bolas rojas en una muestra de tamaño 100.
c) Ambos casos se tiene la misma probabilidad de ocurrir

Explica.

Respuesta	Frecuencia
7 bolas rojas en una muestra de tamaño 10	**1**
70 bolas rojas en una muestra de tamaño 100	0
Ambos casos se tiene la misma probabilidad de ocurrir	10
Total	11

El propósito de incluir este ítem fue el de verificar si los estudiantes consideran el efecto que el tamaño de muestra tiene en el valor de las probabilidades de un resultado muestral. Como puede verse, casi todos los estudiantes consideran que son igualmente probables los dos eventos presentados, al fijarse sólo en los valores de las proporciones, por lo que no están considerando el efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad.

10. La compañía de chocolates M&M´s señala que el 30% de los chocolates que vienen en la presentación de bolsa amarilla, son de color café. Se tomó una muestra de 10 bolsas y se resultó que la proporción de chocolates café era de 25%.

a) ¿Cómo explicas el resultado anterior?

En este ítem nos proponíamos investigar si los estudiantes podían explicar el resultado muestral como una causa de la variabilidad.

Respuesta	Frecuencia
Porque varían los resultados de las muestras	**4**
Porque el tamaño de la muestra fue pequeño	**3**
Está equivocada la compañía	1
No contestó	3

Los estudiantes que se ubican en las primeras dos respuestas, tienen en cuenta elementos adecuados para la validación del resultado, ciertamente los resultados varían y en pocas bolsas existe la posibilidad de que no se reproduzcan las características de la población. Observamos que en este contexto, la mayoría de los estudiantes tuvieron un razonamiento adecuado acerca de la variabilidad muestral, lo que no sucedió en otros contextos como el de las monedas en el que también nos proponíamos investigar sobre la variabilidad muestral.

b) ¿Cuál es el estadístico y cuál es el parámetro en el problema anterior?

El propósito de este inciso fue ver si los estudiantes establecen correctamente la diferencia entre estadístico y parámetro.

Respuesta	Frecuencia
El estadístico es el 25% y el parámetro es 30%	**5**
Otra respuesta	4
No contestó	2

11. Bajo condiciones similares, tres compañías encuestadoras han realizado un estudio para determinar la opinión de los ciudadanos sobre el desempeño del presidente de la república. ¿Esperarías que obtuvieran el mismo resultado? Explica tu respuesta.

De nueva cuenta, este ítem obedece al propósito de investigar sobre las ideas de variabilidad muestral de los estudiantes, solo que ahora en un contexto de encuestas, que se supone son familiares a la mayoría de los ciudadanos actualmente.

Respuesta	Frecuencia
No esperarían el mismo resultado	**7**
Sí esperarían el mismo resultado	3
Dieron otras respuestas	1
Total	11

Del cuadro podemos observar que la mayoría (7) no esperarían el mismo resultado, lo cual es correcto. Veamos algunas de sus explicaciones:

> *"No, porque no sería la misma sección de la población" (Libnia).*
>
> *"No, porque todos tenemos diferentes tipo de vista u opinión" (Denis).*
>
> *"No, porque las medias muestrales tienen un parámetro de variación con respecto a las medias poblacionales" (Jorge).*
>
> *"No, porque no son los mismos ciudadanos y cada uno piensa diferente" (Mónica).*

Como puede verse, las respuestas de los estudiantes atienden la variación de los resultados de una muestra a otra, pero por distintas causas. Mientras que las respuestas de Libnia y Jorge atienden la variabilidad muestral como resultado de que solo se considera una parte de la población, Denis y Mónica consideran a la variabilidad por otras causas, como el que las personas piensan diferente.

Entre los que respondieron que sí esperarían el mismo resultado está Ana Lilia cuya explicación fue la siguiente:

> *"Si, pues se supone que van a encuestar a personas de la misma edad, mismo nivel de estudios y con preferencias similares".*

8.3.1 Conclusiones sobre el cuestionario diagnóstico

El cuestionario abordó diversos conceptos que se consideran importantes para una comprensión adecuada de las distribuciones muestrales, como es el caso de la variabilidad muestral, las implicaciones del teorema del límite central y el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales. Consideramos que los resultados obtenidos están muy por debajo de las expectativas que se pueden tener para alumnos que recién han concluido el tema de distribuciones muestrales.

A continuación haremos un resumen de los principales conceptos que se abordaron y las dificultades que tuvieron los estudiantes en su manejo:

1. Se identificaron dos concepciones equivocadas de la variabilidad de un conjunto de datos:
   a) A mayor cantidad de datos hay más variabilidad.
   b) A mayor diferencia entre la altura de las barras de un histograma (irregularidad) hay mayor variabilidad.
2. Existe confusión en muchos estudiantes sobre la desviación estándar como medida de variabilidad. Algunos consideran que existe una relación directamente proporcional entre altura de una distribución y su desviación estándar cuando en realidad es lo contrario.
3. Muchos estudiantes no aprecian la variabilidad muestral en ciertos contextos, mientras que en otros se desenvuelven mejor. El principal obstáculo para muchos es que consideran los valores más probables como el único resultado que puede ocurrir.
4. A pesar de que en sus clases se fomentó la resolución de problemas mediante fórmula y tablas de probabilidad, un problema típico de la distribución muestral de la media solo pudo ser resuelto completamente por 4 de 11 estudiantes, lo que significa que ni siquiera a nivel procedimental han desarrollado la habilidad de resolver problemas.
5. Desconocen por completo las implicaciones del teorema del limite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales, por lo que se limitan a aplicarlo en la resolución de problemas en forma “ciega” como una receta.
6. No mostraron comprender el efecto del tamaño de la muestra en el valor de la probabilidad de algunos resultados muestrales.

En nuestra opinión, existen al menos dos razones para explicar los bajos resultados obtenidos:

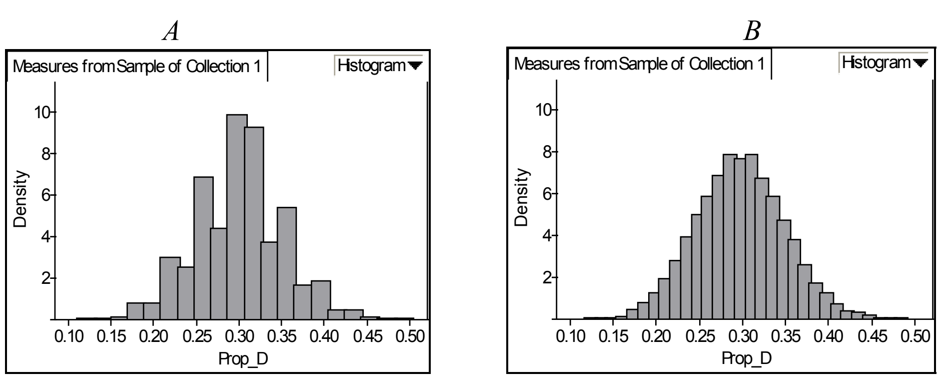
1. La complejidad del concepto de distribuciones muestrales y las múltiples relaciones entre los conceptos que se involucran en ellas, como el tamaño de la muestra, la variabilidad de la población, la variabilidad de la distribución muestral, estadísticos, parámetros, etc.
2. El enfoque de enseñanza implementado poco contribuye a la comprensión adecuada de estos conceptos, pues el énfasis se centra en seleccionar fórmulas, sustituirlas y usar tablas de probabilidad, sin profundizar en la compresión de conceptos y propiedades que intervienen y la forma como afectan el resultado.

En resumen, podemos concluir que los estudiantes mostraron un significado muy superficial y restringido de las distribuciones muestrales, sus argumentaciones no contemplan, en la mayoría de los casos, la relación correcta entre conceptos y propiedades que se involucran en las distribuciones muestrales. Su lenguaje ha sido insuficiente en algunos casos para explicar correctamente muchos de los resultados.

8.4 Análisis del significado de los estudiantes en el cuestionario posterior a las actividades de enseñanza.

Este cuestionario se aplicó un día después que concluyeron las actividades con simulación computacional. Su propósito fue investigar el efecto que pudo haber tenido el ambiente de simulación computacional sobre las ideas y concepciones de los estudiantes acerca de los conceptos investigados. Conforme vayamos analizando cada ítem, haremos algunas reflexiones en torno a los resultados obtenidos en el cuestionario diagnóstico, para ver si hubo alguna evolución en el pensamiento de los estudiantes sobre los conceptos involucrados.

1. Observa las siguientes distribuciones muestrales y subraya la opción que consideres correcta.



a) La distribución A tiene mayor variabilidad que la distribución B.
b) La distribución B tiene mayor variabilidad que la distribución A.
c) Ambas distribuciones tienen la misma variabilidad.

Explica con todo detalle las razones de tu elección.

El propósito de este ítem fue investigar si los estudiantes tienen una idea correcta de la variabilidad de una distribución de datos desde el punto de vista gráfico. Como antecedente, sabíamos que algunos estudiantes consideran que la variabilidad de una distribución está relacionada con la irregularidad de su forma ya que en el cuestionario diagnóstico varios estudiantes exhibieron esa idea. Los resultados fueron los siguientes:

Respuesta	Frecuencia
a) La distribución A tiene mayor variabilidad que la distribución B	2
b) La distribución B tiene mayor variabilidad que la distribución A	4
c) Ambas distribuciones tienen la misma variabilidad.	**5**

En el cuestionario diagnóstico, 3 estudiantes contestaron correctamente pero sólo 1 mostró evidencia que realmente comprendía el significado de la variabilidad de una distribución de datos. Así en términos cuantitativos hubo una ligera mejoría en este cuestionario al pasar a 5 alumnos que contestaron correctamente el ítem; pero además, sus explicaciones estuvieron bien fundamentadas por lo que podemos hablar también de un cambio cualitativo en sus respuestas. Algunos argumentos se muestran a continuación:

> *"Porque en Prop. D, ambas distribuciones se encuentran en el mismo rango de 0.10 a 0.50" (Mónica).*
>
> *"Aunque se ve con un mayor número de resultados en la B, pero el rango de los valores es el mismo" (Ana Lilia).*
>
> *"Tienen la misma variabilidad ya que las dos tienen el mismo rango hacia la derecha e izquierda de la media" (Omar).*

Omar fue el único estudiante que en el cuestionario diagnóstico contestó y fundamentó correctamente su respuesta y lo confirmó en el cuestionario posterior, los otros 4 estudiantes cambiaron sus concepciones incorrectas de variabilidad de una distribución que habían mostrado en el diagnóstico a una concepción de variabilidad que contempla el rango de la distribución. No hubo ningún estudiante que retrocediera del diagnóstico al posterior.

Por su parte, en las argumentaciones de los estudiantes que consideran que A tiene mayor variabilidad que B (inciso a) se hace con frecuencia referencia a la irregularidad de las distribuciones. Por ejemplo:

> *"El histograma de la distribución A tiene más resultados diferentes, arriba y abajo, tiene más variables los resultados" (Jorge).*
>
> *"A tiene mayor variabilidad en la longitud de las barras, es decir, no es tan uniforme como en la gráfica B, la grafica A tiene mayor inconsistencia y no es tan normalizada como la gráfica B" (Edgar).*

Estos dos estudiantes mostraron la misma concepción de variabilidad en el cuestionario diagnóstico y persistieron en ella después de las actividades.

En cuanto a los estudiantes que consideran que hay mayor variabilidad en B que en A, señalan que se debe a que hay más datos en la distribución B que en la distribución A. Sin embargo, esto no es cierto, ya que se trata de la misma distribución pero fue transformada para que tuviera una forma más regular. Estos estudiantes mostraron una concepción incorrecta de la variabilidad, donde se considera que ésta está en función proporcional al número de datos.

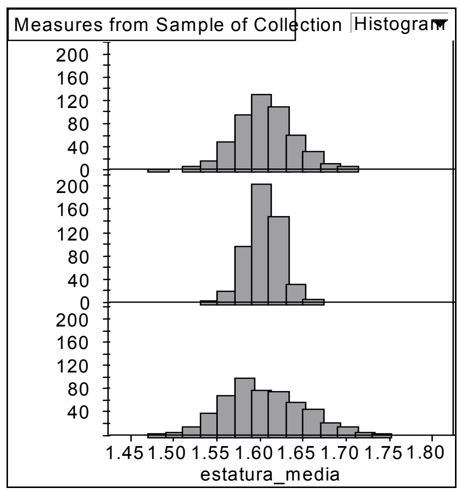
> *"Que en la gráfica B se tiene un mayor número de muestras y por eso la gráfica tiene más datos que la A, hay más variabilidad en los resultados" (Gerardo).*
>
> *"Porque la distribución B tiene mas elementos que la distribución A" (Libnia).*
>
> *"En la B hay una distribución más exacta que en la A" (Donovan).*
>
> *"B tiene mayor variabilidad, esto quiere decir que es una muestra más grande que la A" (Viridiana).*

Al igual que en el cuestionario diagnóstico se identifican dos formas incorrectas de concebir la variabilidad de distribución gráfica de datos:

1. Entre más irregular sea la gráfica de una distribución será más variable.
2. Una distribución es más variable que otra si tiene mayor número de datos.

A manera de resumen acerca del significado que los estudiantes mostraron sobre la variabilidad de un conjunto de datos desde el punto de vista gráfico, podemos decir que se atribuye tanto al uso del software como a las actividades implementadas el cambio tanto cuantitativo como cualitativo en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, son muchos los estudiantes que no lograron desarrollar un significado correcto del concepto aún después de trabajar con la herramienta de simulación computacional. Una posible causa que se sugiere para explicar esto, es que en las actividades de enseñanza se hizo mayor énfasis en la comparación de distribuciones mediante sus medidas descriptivas (media y desviación estándar) que en la comparación gráfica en la cual está basada este ítem.

2. A continuación se muestran tres distribuciones muestrales de la media (para muestras de tamaño n = 5, n = 10 y n = 30), las cuales se han construido tomando 500 muestras de una misma población.



a) Coloca sobre cada una de ellas el tamaño de muestra que le corresponde. Explica con todo detalle las razones de tu asignación.

El propósito de este ítem fue investigar la comprensión de los estudiantes sobre el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de las distribuciones muestrales. Las respuestas fueron las siguientes:

Respuesta	Frecuencia
Secuencia 10-30-5 (de arriba hacia abajo)	**4**
Secuencia 10-5-30 (de arriba hacia abajo)	5
Secuencia 30-5-10 (de arriba hacia abajo)	2

La secuencia 10-30-5 es la correcta e indica que los estudiantes colocaron el tamaño de muestra 10 al histograma de arriba, 30 al histograma de en medio y 5 al histograma de abajo. Solo 4 estudiantes asignaron esta secuencia. Sus razonamientos señalan que a mayor tamaño de muestra hay menor variabilidad en la distribución, lo cual quiere decir que su respuesta está bien fundamentada. Veamos algunos de los argumentos de estos estudiantes:

> *"Porque hay mayor dispersión en la grafica 3 . . . . En la primer grafica hay menor dispersión que en la tercera . . . ." (Ana Lilia).*
>
> *"En muestras de tamaño 5 existe una mayor dispersión en la grafica y por el contrario en muestras de valores mayores, las graficas toman una forma mas alargada" (Denis).*
>
> *"Entre más pequeña sea la muestra existe mucho mayor variabilidad en los datos, por lo mismo, de que son menos" (Mónica).*
>
> *"Porque entre menor sea la muestra mayor será la dispersión y entre mayor sea la muestra será menor la desviación" (Omar).*

En un ítem similar en el examen diagnóstico solo 2 estudiantes hicieron la asignación correcta pero en sus argumentaciones mostraron que no comprendían realmente la relación entre el tamaño de muestra y la variabilidad de la distribución, por lo que podemos considerar que ningún estudiante entendía la relación antes de las actividades.

Por su parte, 5 estudiantes asignaron la secuencia (10-5-30). Sus argumentos tienen en cuenta la cantidad datos y el número de barras en relación directa con el tamaño de muestra. Nuevamente se presenta la idea que a mayor cantidad de datos existe mayor dispersión.

> *"Los coloqué de acuerdo a la gráfica, si la gráfica tenía más elementos, la muestra es mayor" (Libnia).*
>
> *"El tamaño de la muestra indica la cantidad acumulada, mientras la muestra sea menor la gráfica será más angosta, al aumentar el tamaño de muestra la gráfica se ensancha" (Jorge).*

Mientras que sólo 2 estudiantes asignaron la secuencia (30-5-10). Estos estudiantes dieron argumentos donde tienen en cuenta la forma de la distribución.

> *"Porque tiene una forma más normalizada de campana, mas definida que otras . . . Por la diferencia entre la longitud de las barras e indica pocos elementos con que trabajar . . ." (Edgar).*
>
> *"La primera es 30 porque la forma de la distribución muestral es más exacta, la segunda es 5 porque no está bien definida la forma . . . . y la tercera es 10 porque empieza a tomar la forma de la distribución muestral" (Viridiana).*

Observamos que estos estudiantes ven a la primer distribución más normal y por ello le asignan 30. Podemos decir que la incorrecta percepción de la forma (pues las tres son normales) los llevó a cometer errores de asignación. En el curso ellos vieron que conforme las muestras aumentan de tamaño las distribuciones muestrales tienden a ser normales.

No obstante que hubo una mejoría el número de estudiantes que comprenden el efecto del tamaño de muestra en la variabilidad, muchos estudiantes continúan sin tener claro esta importante propiedad de las distribuciones muestrales.

Del análisis de las argumentaciones de los estudiantes conjeturamos que los estudiantes que tienen una idea correcta de la variabilidad de una distribución gráfica de datos, no tuvieron obstáculos para identificar el efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad de la distribución muestral, mientras que los alumnos que tienen una idea incorrecta de la variabilidad de los datos en distribuciones graficas no pudieron identificar el efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad de la distribución muestral. De ahí la importancia de tener una idea correcta de la variabilidad de una distribución.

b) Sobre la gráfica de las distribuciones, coloca 1 a la distribución de menor dispersión y 2 a la distribución de mayor dispersión. Explica con todo detalle las razones de tu asignación.

El propósito de este ítem fue investigar de nueva cuenta las ideas de los estudiantes sobre la variabilidad de una distribución gráfica como sucedió en el ítem 1, pero incorporando ahora el término dispersión en lugar de variabilidad. Esto porque tanto dispersión y variabilidad son dos términos que se utilizan frecuentemente en la literatura como sinónimos, pero para los estudiantes pueden no serlo. Los resultados fueron los siguientes:

Respuesta	Frecuencia
Secuencia ___ 1 _ 2 (de arriba hacia abajo)	**6**
Secuencia ___ 2 _ 1 (de arriba hacia abajo)	3
Secuencia 1 _ 2 ___ (de arriba hacia abajo)	2

La secuencia ___ 1 _ 2 es la correcta e indica que los estudiantes dejaron en blanco la primer distribución, asignaron 1 a la segunda y 2 a la tercera distribución. 6 estudiantes asignaron esta secuencia. Algunos de ellos argumentaron lo siguiente:

"Entre menor sea la dispersión mas se acercará a la media" (Omar).

"Porque hay una mayor cantidad de valores a la izquierda y a la derecha de la media por ello puse a la gráfica 3 con mayor dispersión" (Ana Lilia).

"Es mayor la dispersión cuando hay más muestras y la gráfica es más ancha" (Jorge).

Nos propusimos entonces ver si había algunas relaciones entre las respuestas del problema 1 y el inciso b del problema 2, dado que se trataba de lo mismo pero con diferente terminología. Por ejemplo, Jorge consideró que en el problema 1, "A tiene mayor variabilidad que B" (incorrecto); argumenta que se debe a que A tiene más diferencia entre las barras del histograma; pero ahora, contesta correctamente señalando que hay mayor dispersión cuando la gráfica es más ancha. Podemos ver en sus respuestas que para él variabilidad significa una cosa y dispersión significa otra.

En el caso de Edgar, al igual que Jorge, contesta "A tiene mayor variabilidad que B", argumentando que se debe a la diferencia entre la longitud de las barras del histograma (incorrecto), y en este inciso sostiene lo mismo al contestar que la dispersión es la diferencia entre las alturas de las barras. Es decir, para Edgar, variabilidad y dispersión significan lo mismo, aunque tiene una idea incorrecta de ellas. Esto lo conduce a que conteste erróneamente ambos casos.

Por su parte, 3 estudiantes siguieron una secuencia (___ 2 _ 1). Mónica se encuentre en este grupo, y contesta:

"La asignación la hice porque la dispersión es el ancho de las columnitas y en el 1 son más delgadas que en el 2".

Para Mónica no es lo mismo dispersión y variabilidad pues en el ítem 1 contestó correctamente, cuando se le preguntó sobre variabilidad, si hubiera aplicado el mismo criterio hubiera contestado correctamente este ítem.

c) ¿Cuál será la media de la población de la que se extrajeron las muestras?. Explica.

El propósito de este inciso era ver si los estudiantes percibían que la media de la distribución muestral es igual a la media poblacional, una importante propiedad de las distribuciones muestrales. Veamos los resultados.

Resultado	Frecuencia
La media poblacional es aproximadamente a 1.60 cm. o 1.62 cm.	**9**
La media poblacional es iguala 250 cm.	1
La media poblacional es igual a 1.20 cm.	1

En este ítem tuvieron un buen desempeño los estudiantes al identificar la mayoría de ellos que la distribución muestral está centrada en la media poblacional. En el cuestionario diagnóstico, 5 estudiantes contestaron correctamente este ítem, ahora lo hicieron 9 estudiantes y sus explicaciones fueron mucho más consistentes.

d) ¿En cuál de las tres distribuciones será más probable obtener una media mayor a 1.65 cm.? (Obsérvese que los datos son estaturas). Explica en forma detallada.

El propósito de este ítem fue ver si los estudiantes leían adecuadamente las distribuciones muestrales en una gráfica y el efecto que tiene el tamaño de muestra en el cálculo de probabilidades. Los resultados fueron:

Resultado	Frecuencia
En la tercer grafica	**7**
En la primer grafica	3
En la segunda grafica	1

Como puede verse, la mayoría apreció adecuadamente el efecto del tamaño de muestra y la dispersión de la distribución en el valor de la probabilidad. Veamos algunos de sus argumentos:

"En la tercer grafica, porque en ella hay mas valores mayores a la media" (Jorge).

"En la tres, porque existe mayor variabilidad en los datos" (Mónica).

"En la de tamaño, porque existe mayor rango de dispersión" (Omar).

"En la muestra de tamaño 5, porque existe una mayor dispersión de valores a la izquierda y derecha de la media" (Ana Lilia).

Obsérvese la respuesta de Mónica, que cuando maneja el concepto de variabilidad contesta correctamente, así lo hizo también el ítem 1, más no en el inciso 2, que se le cuestionó sobre la dispersión. En un ítem que se proponía investigar lo mismo en el diagnóstico, solo 1 estudiante contestó correctamente pero no fundamentó su respuesta adecuadamente.

Concluyendo sobre los resultados de este ítem, podemos decir que se trató de un ítem muy completo en el que se abordaron diversos elementos importantes en la teoría de las distribuciones muestrales. Pudimos comprobar que dispersión y variabilidad no significan lo mismo para todos los estudiantes por lo que es conveniente aclarar en la enseñanza que ambos términos son sinónimos. En cuanto al efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de las distribuciones muestrales hubo mejoría en cuanto a la cantidad de estudiantes que contestaron correctamente y en cuando a las propiedades en las que fundamentan sus argumentos. En un ítem similar en el diagnóstico ningún estudiante pudo establecer un razonamiento válido al explicar la relación entre tamaño de muestra y variabilidad y en este caso los hicieron 4 estudiantes. Sin embargo, son muchos los estudiantes continúan sin comprender esta importante propiedad. En lo que respecta a que la media de una distribución muestral coincide con la media poblacional, hubo una identificación adecuada por la mayoría de los estudiantes, igual que en el caso del efecto de la dispersión y el tamaño de muestra en la probabilidad de un resultado muestral.

4. La compañía M&M´s dice que el 30% de sus chocolates en la presentación Milk son color café. Antes de ser empacados en bolsas los chocolates se encuentran en un gran depósito donde son mezclados de manera uniforme. Si se seleccionan de forma independiente 5 muestras de tamaño 10, una tras otra. ¿Cuántos chocolates café esperarías en cada muestra?

N° de chocolates café en la premier muestra: ____
N° de chocolates café en la segunda muestra: ____
N° de chocolates café en la tercer muestra: ____
N° de chocolates café en la cuarta muestra: ____
N° de chocolates café en la quinta muestra: ____

El propósito de este ítem fue el de investigar si los estudiantes tienen una idea correcta de la variabilidad alrededor del parámetro en un contexto de muestreo.

Resultado	Frecuencia
Las respuestas están centradas alrededor de 3	**5**
Las respuestas son 3, 3, 3, 3, 3	5
Otras respuestas	1

5 estudiantes apreciaron correctamente la variabilidad alrededor del parámetro colocando valores tanto por debajo de 3 como por encima de 3. Algunas respuestas fueron: 3, 2, 3, 2, 4; 3, 4, 2, 3, 4; 3, 3, 3, 2, 4; 3, 4, 2, 2, 4. Otros 5 estudiantes respondieron (3, 3, 3, 3, 3). En un ítem semejante del examen diagnóstico, fueron 6 los estudiantes que apreciaron correctamente la variabilidad alrededor del parámetro, pero sin argumentos que tuvieran en cuenta los elementos que rigen la variabilidad. En este caso los argumentos estuvieron más fundamentados:

> *"Diferentes números pero sin llegar a ser más de 5 ni menos de 2" (Coral).*
>
> *"Se observa que la media es 0.30 pues solo tratamos de satisfacer esa media con valores probables" (Edgar).*
>
> *"Realmente varía pero se acerca al 30%" (Viridiana).*

Por su parte las argumentaciones de los estudiantes que no apreciaron correctamente la variabilidad están las siguientes:

> *"Porque siempre aparecen el 30% de chocolates café" (Omar).*
>
> *"Porque la empresa asegura que el 30% del contenido son café" (Libnia).*
>
> *"Porque en cada muestra el 30% son café" (Gerardo).*

5. Imagina que lanzas un dado 60 veces. Muestra en la tabla siguiente el número de veces que esperas que aparezca cada número.

Numero en el dado	Número de veces que se espera aparezca el número
1	
2	
3	
4	

5	
6	
Total	

Explica las razones de tu asignación:

Con el mismo propósito que en el caso anterior, pero en un contexto probabilístico se planeó este ítem.

Resultado	Frecuencia
Las respuestas están centradas alrededor de 10	**3**
Las respuestas son 10, 10, 10, 10, 10, 10 o equivalentes	8

Los estudiantes que centraron sus respuestas alrededor de 10 se preocuparon porque la suma fuera 60. Podemos decir que perciben correctamente la variabilidad y como observación también apreciaron la variabilidad de manera correcta en el problema anterior. Por su parte, 2 estudiantes que apreciaron la variabilidad en el problema anterior, no lo hicieron en este. En cuanto a los estudiantes que no aprecian la variabilidad todos dan argumentos probabilísticos en sus respuestas.

Con base en los resultados de los dos ítems anteriores podemos señalar que el concepto de variabilidad ha resultado difícil para la mayoría de los estudiantes ya que la mayoría de ellos no la han apreciado correctamente, y menos aún cuando esta se da en contextos probabilísticos.

6. Se midió la estatura a una muestra aleatoria de 100 estudiantes de la población del IPN y se encontró que la media era de 160 cm. ¿Cuál sería tu estimación de la media poblacional?

   e) Sería exactamente 160 cm.
   f) Sería cercana a 160 cm.
   g) No sería posible hacer una estimación, pues la información obtenida se refiere sólo a una muestra.
   h) Otra respuesta.

El propósito de este ítem fue explorar si los estudiantes son conscientes de la variabilidad y el error muestral que se presenta cuando se hacen inferencias acerca de una población con solo estudiar una muestra.

Respuesta	Frecuencia
Sería exactamente 160 cm.	2
Sería cercana a 160 cm.	**9**
No sería posible hacer una estimación, pues la información obtenida se refiere sólo a una muestra	0

En este ítem la mayoría de los estudiantes identificó la variabilidad y el error muestral que conlleva en una inferencia. Algunos argumentos son los siguientes:

"Porque la media poblacional debe ser cercana a la media de la muestra, pudiendo variar hacia arriba o hacia abajo" (Gerardo).

"Porque en todos los ejercicios que realizamos la media muestral siempre nos salía muy próxima a la media poblacional"(Mónica).

"Porque la media de la muestra tiene que ser similar a la de la población" (Omar).

Los dos estudiantes que contestan que la media muestral debe ser exactamente igual a 160, dan el argumento que la media muestral es igual a la media poblacional. Estos estudiantes son conscientes de una propiedad importante de las distribuciones muestrales, pero no son conscientes de que el tamaño de muestra de 100 es considerado pequeño para la convergencia de la media muestral a la poblacional.

"Porque la media muestral es igual a la media poblacional" (Libnia).

En un ítem similar en el diagnóstico, solamente 3 estudiantes contestaron correctamente, en este caso lo hicieron 9 estudiantes, por lo que hubo una notable mejoría en la identificación de la variabilidad en este contexto.

7. Otra persona hizo lo mismo, tomó una muestra aleatoria de 100 estudiantes del IPN y encontró que la media era 157 cm. ¿Cómo podrías explicar la diferencia de resultados?

Este ítem es una continuación del anterior y su propósito fue investigar si los estudiantes son conscientes de la variabilidad muestral. Todos los estudiantes apreciaron correctamente la variabilidad en este contexto, aún quienes no lo hicieron en el problema anterior.

"Las medias serán similares, cercanas y rara vez iguales . . ." (Jorge).

"No eran los mismos 100 estudiantes . . . ." (Edgar).

"Porque la media varía dependiendo la muestra, pero siempre se acercará a la poblacional . . ." (Omar).

"Los resultados pueden variar ya que no son los mismos 100 estudiantes" (Denis).

8. Si aumentamos a 200 el número de estudiantes en el problema anterior (tamaño de muestra). ¿Qué esperarías?:

a) La estimación estuviera más cercana a la media poblacional que cuando la muestra es de 100.
b) La estimación estuviera más lejana a la media poblacional que cuando la muestra es de 100.
c) La estimación estuviera a igual distancia de la media poblacional que cuando la muestra es de 100.

Explica

Continuando con el mismo contexto, el propósito de este ítem fue investigar si los estudiantes tenían en cuenta de manera adecuada el efecto del tamaño de muestra en una estimación.

Respuesta	Frecuencia
a) La estimación estuviera más cercana a la media poblacional que cuando la muestra es de 100.	**9**
b) La estimación estuviera más lejana a la media poblacional que cuando la muestra es de 100.	1
c) La estimación estuviera a igual distancia de la media poblacional que cuando la muestra es de 100.	1

Los estudiantes mostraron evidencia que comprendieron el efecto del tamaño de la muestra en una estimación al contestar correctamente 9 de ellos. Algunas respuestas de estos alumnos fueron:

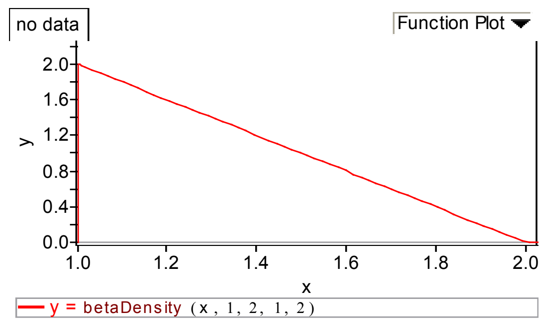
"Al aumentar el tamaño de la muestra siempre disminuye el error o la diferencia entre las medias poblacionales y muestrales, aunque la fórmula indique que la media muestral es igual a la poblacional" (Jorge).

"Mientras mayor es la muestra, mas aumenta su exactitud y disminuye la dispersión" (Edgar).

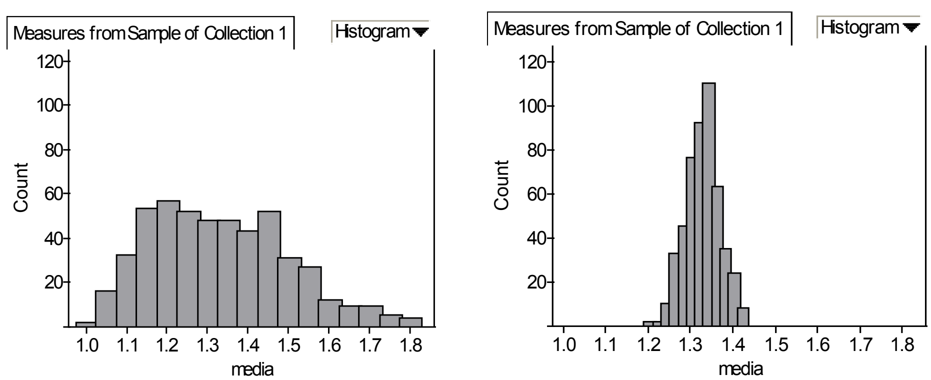
"Porque entre mayor es la muestra disminuye la dispersión por lo tanto la media muestral se tiene que acercar a la poblacional" (Omar).

9. En la figura se muestra la distribución de una población y dos distribuciones muestrales de medias para muestras de tamaño 2 y 30. Coloca el tamaño de muestra a la distribución que corresponda.

Distribución de la población



Distribuciones muestrales



n = __________ n = ___________

Explica las razones de tu asignación.

El propósito de esta pregunta fue explorar si los estudiantes tienen una idea correcta el efecto del tamaño de la muestra en la forma y la variabilidad de las distribuciones muestrales.

Respuesta	Frecuencia
Contestaron correctamente	7
Contestaron incorrectamente	4

De los 7 estudiantes que contestaron correctamente, 5 de ellos dan argumentaciones que involucran a la variabilidad en forma correcta, es decir, señalan que muestras más grandes generan distribuciones menos dispersas o más angostas o más cercanas a la media. Ninguno hizo referencia a la forma, que era otra propiedad a la que se podía hacer alusión, pues la muestra más grande genera una distribución más normal que en la muestra pequeña.

> *"En la gráfica 1 hay mayor dispersión" (Ana Lilia).*
>
> *"Existe una mayor dispersión en la gráfica 1" (Denis).*

Los 4 que contestaron incorrectamente dan argumentos que contemplan el numero de datos, dicen que en la más grande (se refieren a la primera) hay mas datos y por su parecido con la población entre mayor sea la muestra. Estos estudiantes han mostrado en diversos ítems esa idea incorrecta que a mayor número de datos hay mas variabilidad, además, han leído en forma incorrecta las graficas señalando que hay mas datos en una que en otra.

> *"La gráfica 1 se acerca más en forma y proporción a la distribución poblacional, sin dejar de mencionar el importante indicador que es la dispersión en la gráfica, que es mayor en la 2 que en la 1" (Edgar).*
>
> *"Por el número de elementos en las gráficas" (Libnia)*

En un ítem similar en este mismo cuestionario pero que contenía tres distribuciones muestrales 4 estudiantes asignaron correctamente el tamaño de muestra, por lo que en este ítem se obtuvo una notable mejoría en las respuestas de los estudiantes.

10. En una población de estudiantes el peso promedio es de 60 Kg y una desviación estándar de 5 Kg. Si se seleccionan dos muestras aleatorias de dicha población, una de tamaño 10 y otra de tamaño 100 en cual consideras que sea más probable obtener una media muestral menor a 55 Kg.?

d) En la muestra de tamaño 10.
e) En la muestra de tamaño 100.
f) En ambos muestras se tiene la misma probabilidad.

Explica.

Este problema fue incorporado al cuestionario con el propósito de ver que idea tienen los estudiantes sobre el tamaño de muestra en la probabilidad que ocurran ciertos resultados muestrales.

Respuesta	Frecuencia
En la de tamaño 10	**8**
En la de tamaño 100	3

Como puede verse 8 estudiantes apreciaron correctamente el efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad. Algunos de los que contestaron correctamente argumentan:

> *"Porque hay más datos esparcidos, y en una de 100, por lo general los resultados se centrarían más en la media de 60" (Gerardo).*
>
> *"En la muestra de 10, por tener mayor dispersión que la muestra de tamaño 100" (Ana Lilia).*
>
> *"Puesto que tiene más variabilidad en los datos, las media muestral se aleja mas de la poblacional" (Mónica).*
>
> *"Porque la dispersión es mayor, por lo tanto los posibles resultados se pueden alejar mas de la media" (Omar).*

En un ítem similar en este mismo cuestionario 7 estudiantes habían mostrado comprensión del efecto del tamaño de muestra en el valor de la probabilidad.

11. Una empresa eléctrica fabrica focos que tienen una duración que se distribuye aproximadamente normal con media de 700 hrs. y una desviación estándar de 32 hrs. Se ha tomado una muestra de 16 focos y se encontró que la duración media fue de 684 hrs.

El propósito de este problema fue ver si los estudiantes se mostraban conscientes de la variabilidad muestral desde un contexto diferente al que se había explorado, y el método que empleaban para resolver el problema después de las actividades de enseñanza. Se les dio la opción de resolver el problema con simulación o empleando las fórmulas y las tablas de probabilidad.

a) Basado en los resultados obtenidos, ¿podrías concluir que la empresa está mintiendo sobre la duración de los focos?. Explica tu respuesta (puedes realizar cálculos si lo deseas).

Veamos primeramente a los que consideran que la empresa no miente:

> *"No, porque la muestra es muy pequeña y si se toma una muestra mayor se acercará la media muestral a la poblacional" (Omar).*
>
> *"La media se aproxima pero no lo suficiente ya que la muestra es solo de 16, número muy bajo, si se aumenta la muestra más cercana sería la media esperada" (Edgar).*

Estos dos estudiantes reconocen correctamente que la diferencia se debe al tamaño de muestra, que es muy pequeño, y que en la medida que se incremente, la variabilidad se reducirá.

Quienes consideran que mienten señalan:

> *"Está mintiendo porque se debe de acercar a la media de 700 y no estar demasiado lejos" (Gerardo).*
>
> *"Si miente porque al tomar una muestra tan pequeña los resultados son variables al haber una dispersión mayor, la probabilidad de que sea un número menor a la media es mas alta" (Ana Lilia).*

b) ¿Crees que si se toma una muestra de tamaño 100, la duración media seguirá siendo de 684 hrs.?. Explica.

> *"No, se pegará más a 700 que es la media . . ." (Gerardo)*
>
> *"No, porque aumenta el tamaño de muestra, los valores tienden a estar más cercanos a la media" (Ana Lilia).*
>
> *"Si, porque es la misma media, posiblemente varíe en decimales" (Mónica).*
>
> *"No, la media se acercará mas a 700, porque disminuye la dispersión" (Omar).*

Atinadamente opinan estos estudiantes que la dispersión disminuirá al aumentar el tamaño de muestra y que la estimación deberá ser más cercana al parámetro poblacional.

c) Tomando en cuenta la información de la población, ¿Cuál será la proporción de focos con una vida promedio menor a 708 horas?. Resuelve el problema con el método que te parezca más conveniente (simulación con Fathom o de manera teórica).

La respuesta teórica es $P(\bar{x} < 708) = 0.84$ y sólo tres estudiantes encontraron correctamente la solución, 2 utilizando tanto el enfoque teórico y como simulación con Fathom y 1 de ellos sólo mediante simulación. Del resto de los estudiantes, 5 utilizaron simulación pero no resolvieron correctamente el problema, los otros 3 emplearon el enfoque teórico. Entonces en resumen, 7 utilizaron simulación con Fathom y 4 utilizaron el enfoque teórico. Lo que más sobresale de este hecho es que la mayoría intentó resolver el problema con simulación computacional.

Como conclusión de este problema podemos decir que muchos estudiantes han identificado correctamente la variabilidad y los efectos que en ella tiene el tamaño de la muestra y la forma como se afectan las estimaciones. Consideramos una buena señal que la mayoría de los estudiantes hayan intentado resolver el problema mediante simulación computacional, lo que es un indicador de la confianza que le tomaron, en el poco tiempo de trabajar con ella. Sin embargo, fueron pocos los estudiantes que lograron resolver el problema correctamente.

8.5 Conclusiones

El análisis del examen teórico y el cuestionario diagnóstico nos ha mostrado que los estudiantes asignan un significado muy restringido y superficial a las distribuciones muestrales, como consecuencia de una enseñanza que enfatiza casi de forma exclusiva en representaciones simbólicas y procedimientos para calcular probabilidades, y en la cual se presta poca importancia a la exploración de conceptos y propiedades que son de suma importancia para comprender las distribuciones muestrales.

Dicho análisis nos muestra que la mayoría de los estudiantes desconocía conceptos y propiedades importantes que se involucran en el estudio de las distribuciones muestrales. Muestra además, que los estudiantes tenían muchas concepciones erróneas sobre diversos conceptos entre las cuales podemos mencionar las siguientes:

1. Concepciones equivocadas de la variabilidad de un conjunto de datos:
   a) A mayor cantidad de datos hay más variabilidad.
   b) A mayor diferencia entre la altura de las barras de un histograma (irregularidad) hay mayor variabilidad.
3. Existe confusión sobre la desviación estándar como medida de variabilidad. Algunos estudiantes consideran que existe una relación directamente proporcional entre altura de una distribución y su desviación estándar cuando en realidad es lo contrario.
4. Muchos estudiantes no aprecian la variabilidad muestral en ciertos contextos, mientras que en otros se desenvuelven mejor. El principal obstáculo para muchos es que consideran los valores más probables como el único resultado que puede ocurrir.
5. Desconocen las implicaciones del teorema del limite central en el comportamiento de las distribuciones muestrales, por lo que se limitan a aplicarlo en la resolución de problemas en forma "ciega" como una receta.

6. No mostraron comprender el efecto del tamaño de la muestra en el valor de la probabilidad de algunos resultados muestrales.

El análisis del cuestionario posterior y las entrevistas con algunos estudiantes nos muestra que se ha presentado cierta evolución en los significados de los estudiantes, aunque de forma diferenciada, llegando a obtener muy buenos resultados en algunos ítems, mientras que en otros, un incremento apenas notable en las respuestas correctas y sus argumentaciones. Dicho cambio lo atribuimos al diseño de las actividades y al ambiente de simulación en el cual se resolvieron.

De interés especial son los cambios cualitativos en las respuestas de los estudiantes, las cuales incorporan argumentos más sólidos que tienen en cuenta las relaciones correctas entre los conceptos y las propiedades que fueron objeto de estudio. Sin embargo, muchos estudiantes continuaron sin comprender adecuadamente muchos conceptos que son importantes en la teoría de las distribuciones muestrales, a pesar de que a lo largo de todo el estudio se hizo énfasis en ellos.

Muchos de las conceptos y propiedades que se ignoraban en el examen diagnóstico, así como las concepciones erróneas que se presentaron fueron superadas por algunos estudiantes, sin embargo, otras fueron más resistentes al cambio a pesar de la enseñanza. Por ejemplo, la variabilidad resultó ser un concepto difícil para muchos estudiantes, ya que a pesar de que se enfatizó sobre ella a lo largo del estudio, muchos estudiantes continuaron mostrando ideas incorrectas, sobre todo cuando se da en contextos probabilísticos. Ciertamente, las respuestas correctas que abordaban el concepto de variabilidad se incrementaron del cuestionario diagnóstico al posterior, sin embargo, muchos estudiantes siguieron mostrando las mismas ideas incorrectas que mostraron en el examen diagnóstico, lo que nos da una idea de la complejidad del concepto.

En cuanto al efecto del tamaño de muestra en el comportamiento de las distribuciones muestrales y en el valor de las probabilidades, cabe hacer notar que los estudiantes lograron una buena mejoría, al incrementar sus respuestas en forma notable del cuestionario diagnóstico al posterior, y además fundamentar adecuadamente sus respuestas. Las entrevistas con algunos estudiantes, también dan cuenta de ello.

El siguiente cuadro muestra la evolución de las respuestas correctas del cuestionario previo al cuestionario posterior al estudio:

Cuadro 1: Respuestas correctas en los cuestionarios previo y posterior al estudio

Concepto o propiedad investigado	*Pretest (respuestas correctas)*	*Postest (respuestas correctas)*
Variabilidad de un conjunto de datos en una gráfica.	3	5
Variabilidad muestral.	5	5
Efecto del tamaño de muestra en la variabilidad de una distribución muestral.	2	4
	3	7
La media de la distribución muestral está centrada en la media de la población.	4	9
La diferencia entre la media muestral y la media poblacional puede deberse a la variabilidad muestral.	3	9
	4	9
Efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de un resultado muestral.	1	8
Efecto del tamaño de muestra en la forma de la distribución muestral.	2	5

Para complementar el análisis sobre la evolución de los significados, al final de las actividades se les planteó la pregunta si consideraban que había evolucionado su significado de las distribuciones muestrales. El siguiente cuadro muestra las respuestas de cada uno de ellos.

	¿Tú crees que ha cambiado el significado que tenías de las distribuciones muestrales antes de utilizar el software a ahora que ya lo has utilizado?
Libnia	Si. Antes no entendía que era una distribución muestral, me daban los datos, me decían esto es una distribución muestral, y yo lo veía como que

	nomás que veo que es una media y una desviación . . . . y aquí en el software está mas representado, le digo, para mí es más fácil entenderlo, ¡ah, la gráfica me representa todo lo anterior. ¡Ah! entonces ya entiendo.
Edgar	Si considero que ha cambiado, porque antes yo pensaba que nada más era tomar una muestra de una población, pero aquí hemos visto que es la muestra de la muestra de la población, y es bastante diferente en cuanto a exactitud.
Omar	Sí, como que antes no tenía la noción muy clara de que era una distribución muestral, y ahora por lo mismo de que vas viendo la gráfica como va cambiando, conforme vas tomando las muestras, de que puedes jugar con el tamaño de la muestra, como que se hace mas entendible. Porque de la otra forma nada mas era hacer tus cálculos, checar en tus tablitas pero no encontrabas una forma en si de saber bien, no se si quisieras graficarla o tomar otra muestra más grande.
Jorge	Si, aquí realmente se ve donde están los resultados concentrados, porque tiene esa forma y donde se concentran mas los resultados y de cierta forma el porqué están así concentrados y toman esa forma.
Denis	Si ha cambiado bastante porque con el software es más practico y le entiendo mejor a teóricamente.
Donovan	Pues en parte, porque yo tenía una idea de que iba a ser pura operación matemática, manual, y ahora con esto nos mostraron como se hacen las cosas, como va detallado con gráficas y todo.
Coral	Si porque ahora nos damos cuenta, por ejemplo en la grafica nos damos cuenta que esa parte es la que cumple con el filtro que ponemos en la tabla, pero cuando lo hacemos teórico no hacemos una grafica tan detallada y no se ve muy bien, a lo mejor por eso el problema con las tablas
Mónica	Yo siento que sí, por ejemplo aquí te vas dando cuenta de se va obteniendo de una muestra, teóricamente solo utilizábamos las formulas y las aplicábamos, pero no sabíamos que se obtenían de las muestras. Con simulación a mi me gusta porque es como si lo estuviéramos haciendo en campo donde se les estuviera haciendo encuestas a personas.
Viridiana	Si, es que es mucho más interactivo con el software, te das cuenta de lo que está sucediendo si cambia la población o las muestras.
Ana Lilia	La comprensión si cambió porque es más dinámico en la computadora y teóricamente veíamos el dibujo pero no veíamos los cambios. En simulación, un cambio que hagamos se refleja en una gráfica.

Como puede observarse en la tabla anterior, todos los estudiantes consideran que el enfoque con que se abordaron las distribuciones muestrales les ha cambiado el significado que tenían de las distribuciones muestrales.

CONCLUSIONES GENERALES

El presente trabajo ha tenido como objetivo principal investigar los significados que estudiantes universitarios construyen sobre las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica como el que proporciona Fathom, un software que ha sido diseñado para la enseñanza de la estadística y la probabilidad. El interés del estudio se enfocó en identificar los diferentes elementos de significado puestos en juego por los estudiantes, su evolución como consecuencia del ambiente de simulación y el efecto de dicho ambiente en la resolución de problemas de carácter deductivo que van de la población a la muestra.

Los principales conceptos abordados en el estudio fueron la variabilidad muestral, el efecto del tamaño de muestra en las propiedades de las distribuciones muestrales, como son la forma (teorema del limite central), el centro, la variabilidad, y el cálculo de probabilidades de resultados muestrales. Todos ellos en el ámbito de distribuciones muestrales de medias y proporciones.

Para alcanzar los objetivos planteados, nos plantemos tres preguntas de investigación, cuyas respuestas se han dado en los tres capítulos anteriores y nos apoyaremos en sus conclusiones parciales de cada capítulo, para obtener las conclusiones generales del estudio.

Primer pregunta

Significados desarrollados por los estudiantes sobre las distribuciones muestrales.

El análisis de los diversos instrumentos de recolección de información no muestra que los significados construidos por los estudiantes en el ambiente de simulación incorporan muchos más elementos de significado que los que mostraron en el cuestionario diagnóstico, producto de la enseñanza tradicional que recibieron antes del estudio.

El ambiente de simulación proporcionado por Fathom, les proveyó los medios para que utilizaran diversas representaciones de los conceptos involucrados y los relacionaran entre en sí de forma dinámica y simultánea. Dichas representaciones fueron claves en algunas etapas del proceso de simulación para que los estudiantes desarrollaran intuiciones e ideas correctas de diversos conceptos y propiedades; como el hecho de colocar sobre una misma gráfica varias distribuciones para distintos tamaños de muestra, lo que ayudó a que comprendieran propiedades de forma, centro y dispersión de las distribuciones, así como el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de resultados muestrales.

Sus acciones y procedimientos se orientaron a la construcción de las distribuciones muestrales, generando las poblaciones, extrayendo muestras y calculando estadísticos, para finalmente calcular probabilidades de resultados muestrales. Esto les permitió enfocarse tanto en el proceso como en el resultado final, al resolver las actividades.

El ambiente proporcionado por el software, proveyó de diversos elementos de validación que los estudiantes utilizaron para resolver un problema y convencerse que los resultados obtenidos eran correctos, como es el caso del ajuste de distribuciones teóricas con distribuciones empíricas, validación de fórmulas enviando un mensaje cuando se comete un error entre otros.

Las probabilidades fueron obtenidas como proporciones de casos de interés en un total de casos generados por ellos mismos, llegando algunas veces a filtrarlos y sombrearlos para separarlos del resto, en lugar del número abstracto que proporcionan las tablas de probabilidad.

Sin embargo, el proceso de simulación no estuvo exento de dificultades, y a lo largo del él los estudiantes tuvieron diversas dificultades y mostraron algunas concepciones erróneas. Entre las dificultades más sobresalientes que se presentaron en el proceso podemos mencionar las siguientes:

1. Formulación del modelo poblacional
2. Definición de la expresión para calcular el estadístico en las muestras
3. Definición de las expresiones para calcular las proporciones de casos.
4. Confundir distribución de una muestra con distribución muestral.
5. Tendencia a ver a las muestras en forma aislada, en lugar de verla en forma de distribuciones.

De todas ellas, cabe mencionar que la formulación del modelo de la población fue la etapa más crítica en el proceso de simulación, la cual solo fue desarrollada correctamente a lo más por dos estudiantes en cada una de las actividades. En la mayoría de ellas, requirió de la intervención del investigador para poder continuar con el proceso de solución.

De acuerdo con lo anterior, la actividad de los estudiantes al explorar y resolver los problemas, fue cualitativamente diferente a la actividad requerida en un enfoque tradicional basado en el uso de distribuciones teóricas de probabilidad, como consecuencia del ambiente computacional.

La herramienta computacional tuvo un impacto en los significados de los estudiantes, ya que requirió de otro tipo de acciones y procesos, representaciones, validaciones, y posibilitó una exploración de conceptos y propiedades de tal forma que no es posible en un ambiente de lápiz y papel. Incluso, algunos procesos que son clave en el ambiente de lápiz y papel se volvieron innecesarios en el ambiente de simulación, como fue el caso de la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad.

Por ejemplo, en el enfoque tradicional de distribuciones de probabilidad, la población se define mediante de un enunciado que señala el tipo de distribución y sus parámetros, sin ninguna referencia concreta sobre el concepto, de tal forma que la población existe para los estudiantes como un ente abstracto que solo aparece en el enunciado del problema. En cambio, en el ambiente de simulación, los estudiantes se vieron obligados a construir la población y visualizarla por medio de representaciones menos abstractas como es una tabla con los elementos poblacionales hipotéticos, complementándola en algunas actividades con una gráfica y sus medidas descriptivas. De esta manera, el objeto "población" se volvió visible y más concreto para los estudiantes.

Como consecuencia de este cambio en los objetos de enseñanza, las actividades realizadas por los estudiantes fueron de mayor nivel cognitivo. Esto fue posible observarlo a través de la transformación y análisis de representaciones que frecuentemente realizaron los estudiantes a lo largo del proceso de simulación. Superponer una distribución teórica a una distribución empírica, sombrear áreas correspondientes a la probabilidad calculada, comunicarse con la máquina mediante la introducción de una fórmula y recibir retroalimentación de los posibles errores, son ejemplos del nivel cognitivo en que se movieron los estudiantes y que no está presente en las actividades que realizan en un ambiente tradicional, donde la actividad se resume al empleo y sustitución de fórmulas y manejo de tablas de probabilidad.

Consideramos que los significados que los estudiantes atribuyen a las distribuciones muestrales después de la experiencia de enseñanza con simulación, les puede ayudar comprender más fácilmente procedimientos inferenciales. Por ejemplo, el hecho de entender cuáles son las valores más probables de ciertos resultados muestrales y alrededor de que valor se encuentran, es importante en los procesos de estimación. Así como entender que cuando la variabilidad muestral rebasa ciertos límites, puede deberse a causas no atribuibles al azar, lo que es importante en procesos de prueba de hipótesis.

Segunda pregunta

La simulación computacional y la resolución de problemas de distribuciones muestrales.

El objetivo que nos plateamos con esta pregunta era investigar si los problemas de tipo

deductivo donde se involucra a las distribuciones muestrales y que son clásicos en los libros de texto previo al estudio de la inferencia estadística, podían ser resueltos de manera satisfactoria con Fathom.
La principal conclusión a la que hemos llegado en torno a esta pregunta es que a pesar de las diferentes dificultades y errores que se han descrito, fue posible que los estudiantes resolvieran las actividades planteadas mediante simulación, ayudados por el investigador solo en los casos que era necesario para poder continuar con el proceso de simulación.

Como ya se ha mencionado, las principales dificultades estuvieron ligadas al uso de representaciones simbólicas del software, principalmente a la definición del modelo de población, lo que representó un verdadero reto para la mayoría de los estudiantes.

En cuanto a los resultados obtenidos mediante simulación, que era otra inquietud que nos planteábamos al inicio e la investigación, estos fueron aceptados como válidos por los estudiantes, dada la cercanía con los resultados teóricos.

Entre las ventajas que observamos al resolver problemas mediante simulación podemos mencionar las siguientes:

- Los estudiantes fueron participes de todo el proceso, desde la formulación de la población hasta el cálculo de probabilidades, utilizando para ello diversas representaciones (aspecto representacional, que señala Biehler, 1991) que estuvieron a su alcance su la mayoría de los casos. Esto permitió a los estudiantes enfocarse en el proceso y también en el resultado, a diferencia del ambiente tradicional, donde usualmente el énfasis se centra en los resultados.
- La facilidad con la que los estudiantes pudieron calcular e interpretar las probabilidades de resultados muestrales, como proporciones de casos de interés en un total de casos observados y que ellos mismos generaron mediante la toma de muestras, ayudados sobre todo por las características del software, el cual les permitió calcular los resultados mediante una expresión definida por ellos mismos, y en algunos casos filtrarlos y hasta sombrearlos.
- El ambiente de simulación volvió triviales y en algunos casos hizo innecesarios

(aspecto computacional, que señala Biehler, 1991), procesos que son laboriosos y complicados en un ambiente de lápiz y papel, como es la estandarización de la distribución muestral y el uso de tablas de probabilidad, los cuales son fuente de diversos errores al resolver los problemas.

Observamos además, que los estudiantes le encuentran sentido a la resolución de problemas de distribuciones muestrales mediante simulación, ya que han construido por ellos mismos las distribuciones, generando las poblaciones, tomando muestras, definiendo estadísticos y calculado sus probabilidades como proporciones de casos que se han presentado.

Podemos concluir entonces, que los estudiantes pudieron resolver problemas de distribuciones muestrales mediante simulación computacional, una vez que se apropiaron de los recursos del software y después de haber abordado algunas actividades.

Tercer pregunta

¿Cómo evolucionan los significados de los estudiantes sobre las distribuciones muestrales cuando trabajan en un ambiente de simulación computacional respecto al ambiente de lápiz y papel?.

El análisis del examen teórico y el cuestionario diagnóstico nos ha mostrado que antes de iniciar el estudio, los estudiantes tenían un significado parcial y superficial de las distribuciones muestrales, muy ligado al uso de procedimientos y representaciones simbólicas. Esto como consecuencia de un ambiente de enseñanza donde se enfatiza en el uso de fórmulas y tablas de probabilidad y se relega la exploración de conceptos y propiedades que son de suma importancia para comprender las distribuciones muestrales. Dicho análisis nos muestra además, algunas concepciones erróneas sobre diversos conceptos importantes, como la variabilidad muestral.

El análisis del cuestionario posterior y las entrevistas con algunos estudiantes nos muestra que se ha presentado cierta evolución en los significados de los estudiantes, aunque de forma diferenciada, llegando a obtener muy buenos resultados en algunos ítems, mientras que en otros, un incremento apenas notable en las respuestas correctas y sus argumentaciones. Dicho cambio lo atribuimos al diseño de las actividades y al ambiente de simulación en el cual se resolvieron.

Las notas mismas tomadas por el investigador en la bitácora que día a día se llevó a lo largo del estudio, muestra que los significados de los estudiantes fueron evolucionando conforme avanzaba el estudio, refinando gradualmente sus estrategias, centrado su atención cada vez más en aspectos conceptuales y disminuyendo el número de errores.

La evolución se ha presentado no solo en términos cuantitativos, al incrementarse el número de respuestas correctas sobre los diferentes conceptos estudiados del cuestionario diagnóstico al cuestionario posterior, sino también en forma cualitativa, al incluir los estudiantes argumentaciones más normativas y bien fundamentadas que en el diagnóstico

Sin embargo, cabe señalar que muchos estudiantes continuaron sin comprender adecuadamente muchos conceptos que son importantes en la teoría de las distribuciones muestrales, a pesar de que a lo largo de todo el estudio se hizo énfasis en ellos. Por ejemplo, la variabilidad resultó ser un concepto difícil para muchos estudiantes, ya que a pesar de que se enfatizó sobre ella a lo largo del estudio, muchos estudiantes continuaron mostrando ideas incorrectas, sobre todo cuando se da en contextos probabilísticos.

En cuanto al efecto del tamaño de muestra en el comportamiento de las distribuciones muestrales y en el valor de las probabilidades, cabe hacer notar que los estudiantes lograron una buena mejoría, al incrementar sus respuestas en forma notable del cuestionario diagnóstico al posterior, y además fundamentar adecuadamente sus respuestas. Las entrevistas con algunos estudiantes, también dan cuenta de ello.

Por todo ello, los resultados sugieren que es importante que antes de que los estudiantes se inicien en el estudio de la inferencia estadística, tengan experiencias de enseñanza donde exploren el concepto de distribuciones muestrales y sus propiedades, el teorema del limite central y el efecto del tamaño de muestra en la probabilidad de un determinado resultado muestral; un ambiente de estadística dinámica, apoyado en representaciones múltiples, parece ser apropiado para ello.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España.

Batanero, C., Tauber, L. & Sánchez, V. (en prensa). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. [en línea]. Recuperable en http://www.ugr.es/~batanero

Behrens, J. T. (1997). Toward a Theory and Practice of Using Interactive Graphics in Statistical Education. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*. Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference. University of Granada, Spain

Ben-Zvi, D. (2000). Toward Understanding the Role of Technological Tools in Statistical Learning. *Mathematical Thinking and Learning,* 2(2), 127-155. Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives,* 169-212. Dordrecht: Kluwer.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa.* España: Ediciones CEAC.

Bordier, J. y Bergeron, A. (1998). Simulation and formal manipulations: complementary approaches for studying random events with computers. En L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistics Institute.

Burrill, G. (1998). Beyond Data Analysis: Statistical Inference. En L. Pereira-Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistics Institute.

Chance, B., delMas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about Sampling Distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.* 295-323. Kluwer Academic Publishers.

Countinho, C. (2001). *Introduction aus situations aléatories dés le Cxollége : de la modélisation á la simulation d´experiences de Bernoulli dans l´environment informatique Cabri-géométre-II.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de

Grenoble, Francia.

Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly,* 801-823.

Cox, C. & Mouw, J. (1992). Disruption of the representativeness heuristic: Can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 163-178.

DelMas, R., Garfield, J. & Chance, B. (1999a). Exploring the Role of Computer Simulations in Developing Understanding of Sampling Distributions. *Artículo presentado en la Reunión Anual de AERA (American Educational Research Asociation).*

DelMas, R., Garfield, J. & Chance, B. L. (1999b). A Model of Classroom Research in Action: Developing Simulation Activities to Improve Students´ Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education,* 7(3).

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). Entering the Field of Qualitative Research. En N. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research,* 1-18. Sage Publications.

Dörfler, W. (1993). Computer Use and Views of the Mind. En Ch. Keitel & K. Ruthven (Eds.). *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology.* Springer Verlag.

Finzer, W., Erickson, T. & Binker, J. (2002). Fathom Dynamic Statistics Software. Key Curriculum Press Technologies.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. y Arrieche, M. (2001). El análisis semiótico como una técnica para determinar significados. *Memorias* del *V Simposio de la SEIEM*, Almería, España. [en línea]. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14(3). 325-355.

Godino, J. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objets as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a research domain: A search for identity,* 177-

195. Dordrecht Kluwer.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 22.

Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. [en línea]. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino

Gordon, F. y Gordon, S. (1992). Sampling + Simulation = Statistical Understanding Computer Graphics Simulations of Sampling Distributions. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.) *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes (26). The Mathematical Association of América.

Gottfried, B. (1984). *Elements of Stochastic Process Simulation.* New Jersey: Prentice Hall.

Gourgey, A. (2000). A classroom simulation based on political polling to help students understand Sampling Distributions. *Journal of Statistics Education* 8(3). [en línea]. Recuperable en http://www.amstat.org/publications/jse/v8n3/gourgey.html

Hines y Montgomery (1993). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Administración.* Tercera edición. Editorial CECSA, México.

Hodgson, T. (1996). The influence of hands-on activities on student´s understanding of selected statistical concepts. En E. Jacubowski, D. Watkins & H. Biske (Eds.), *Proceedings of Eighteenth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education. Panamá City Florida,* 241-246.

Johnson, R. A. (1997). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros de Miller y Freund.* Quinta edición. Editorial Prentice Hall, México

Kahneman, D.; Slovic, P. & Tversky, A. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge University Press.

Kazmier, (1998). *Estadística Aplicada a la Administración y a la Economía.* Tercera edición. Editorial Mc Graw Hill, México.

Krieger, H. y Pinter-Lucke, J. (1992). Computer Graphics and Simulations in Teaching Statistics. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.) *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes (26). The Mathematical Association of América.

Lipson, K. (1997). What Do Students Gain From Computer Simulation Exercises? An

Evaluation of Activities to Develop an Understanding of the Sampling Distribution of a Proportion. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*. Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference. University of Granada, Spain

Lipson, K. (2000). The Role of the Sampling Distribution in Developing Understanding of Statistical Inference. Tesis doctoral no publicada. University of Technology of Swinburne, Australia.

Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

Lock, R. (2002). Using Fathom to promote interactive explorations of statistical concepts. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

Mariotti, M. A. (2002). The Influence of Technological Advances on Students´ Mathematics Learning. En L. Englisn (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education.*

McKnight, C., Magid, A., Murphy, T. J. & McKnight M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* American Mathematical Society. Rhode Island. USA.

Meletiou-Mavrotheris, M. (2004). Technological tools in the introductory statistics classroom: Effects on student understanding of Inferential Statistics. *Educational Studies in Mathematics.* 8, 265-297. Kluwer Academic Publishers. Netherlands

Mendenhall, Wakerly, Scheaffer. (1994). *Estadística Matemática con Aplicaciones.* Segunda edición. Editorial Iberoamérica, México.

Mendenhall, Beaver y Beaver (2002). *Introducción a la Probabilidad y Estadística.* Primera edición. International Thompson Editores. México.

Méndez, H. (1991). *Understanding the Central Limit Theorem.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de California, Santa Bárbara. USA.

Mills, J. D. (2002). Using Computer Simulation Methods to Teach Statistics: A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education* 10(1). [en línea] Recuperable en http://www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html.

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis.* Second Edition. SAGE Publications.

Mochón. S. (2000). *Modelos matemáticos para todos los niveles.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Montgomery y Runger (2003). *Probabilidad y Estadística aplicada a la Ingeniería.* Segunda edición. Editorial Limusa, México.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy. pp. 95-137.* USA: National Academy Press.

Moore, D. S. (1995). *Estadística aplicada básica.* España: Antoni Bosch Editor

Moore, D. S. (1992a). Teaching Statistics as a Respectable Subject. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.) *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes (26). Mathematical Association of América.

Moore, D. S. (1992b). What is Statistics?. En D. Hoaglin & D. Moore (Eds.). *Perspectives on Contemporary Statistics.* MAA Notes (21). Mathematical Association of America.

Moses, L. E. (1992). The Reasoning of Statistical Inference. En D. Hoaglin & D. Moore (Eds.). *Perspectives on Contemporary Statistics.* MAA Notes (21). Mathematical Association of America.

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers

Rossman, A. (1997). Workshop Statistics: Using Technology to Promote Learning by Self-Discovery. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics*. Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference. University of Granada, Spain

Rubin, A. (1990). Sampling Laboratory, Software computacional. No publicado.

Rubin, A., Bruce, B. y Tenney, Y. (1990). Learning about Sampling: Trouble at the core of Statistics. *Proceedings of Third International Conference of Teaching Statistics,* 314-319. Dunedin: University of Otago.

Saldanha, L. & Thompson, P. (2002). Student´s Scheme-based Conceptions of Sampling and its Relationship to Statistical Inference. En Meuborn D., Sztajn P., White D., Wiegel H & Nooney K. (Eds.). *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psycholoy of Mathematics Education,* 1305-1316. Athens, Georgia.

Sánchez. E. (2002). Teachers´ beliefs about usefulness of simulation with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

Sánchez. E. & Yañez, G. (2003). Computational Simulation and Conditional Probability Problem Solving. *En Proceedings of the International Association of Statistical Education. Satellite Conference on Statistics Education: Statistics Education and the Internet.* Berlin [CD-ROM], Voorburg Netherlands. International Statistics Institute.

Scheaffer, R. L. (1992). Data, Discernment and Decisions: An Empirical Approach to Introductory Statistics. En F. Gordon & S. Gordon (Eds.) *Statistics for the Twenty-First Century*. MAA Notes (26). 69-82. Mathematical Association of América.

Scheaffer, R. L., Watkins, A. N. & Landwehr, J. M. (1998). What Every High-School Graduate Should Know About Statistics. En S. Lajoie (Ed.). *Reflections on Statistics: Learning, Teaching and Assesment in Grades K-12,* pp. 3-31. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En Grouws, D. A.(Editor). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. Macmillan Publishing Company, 465-494.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata. Madrid España.

Stirling, D. (1991). *Models´n´Data* (Versión 1), Software computacional. Santa Bárbara USA.

Tanis, E. (1992). Computer Simulations to Motivate Understanding. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.) *Statistics for the Twenty-First Century.* The Mathematical Association of America. MAA Notes, No. 26. pp. 217-225.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Sevilla España.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Editores). *Judgment under uncertainty: Hueristics and biases* Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). Belief in the law of small numbers. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Editores). *Judgment under uncertainty: Hueristics and biases*. Cambridge University Press.

Vallecillos, A. & Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(1), 30-48.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press

Walpole, R., Myers, R. y Myers, S. (1999). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Sexta edición. México: Editorial Prentice Hall.

Yañez, G. (2003). Estudios sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.