Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2009

Maria Teresa Bixirão Neto

O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas

Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
2009

Maria Teresa Bixirão Neto

O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Didáctica, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Ana Breda, Professora Associada com Agregação do Departamento de Matemática e da Professora Doutora Nilza Costa, Professora Catedrática do Departamento de Didáctica e Tecnologia da Universidade de Aveiro

Aos meus filhos

Rui Aristides, Pedro Humberto, Teresa Manuela

O júri

presidente

Reitora da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor **Juan Diaz Godino**
Professor Catedrático da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade de Granada

Prof. Doutor **Angel Contreras de la Fuente**
Professor Catedrático da Universidade de Jaén

Profª Doutora **Nilza Maria Vilhena Nunes da Costa**
Professora Catedrática da Universidade de Aveiro (Co-Orientadora)

Profª Doutora **Ana Maria Reis d´Azevedo Breda**
Professora Associada com Agregação da Universidade de Aveiro (Orientadora)

Prof. Doutor **Jaime Maria Monteiro Carvalho e Silva**
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Profª Doutora **Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto**
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Profª Doutora **Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira**
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Agradecimentos

Devo um primeiro agradecimento às minhas orientadoras Ana Breda e Nilza Costa, pela natureza e qualidade da orientação que levou à concretização deste trabalho.

Ao Professor Juan Godino, pelo interesse e apoio na orientação da estadia científica no Departamento de Didáctica da Matemática -Faculdade de Ciências da Educação, Universidade de Granada.

Aos alunos e colega João Peres que colaboram nesta investigação.

Aos Professores Doutores, António Francisco Cachapuz, Luís Manuel Marques, Ana Isabel Andrade, que integraram Conselhos Directivos do Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, enquanto decorreu este estudo, por me terem facilitado todos os meios, além do estímulo, para o seu desenvolvimento.

Aos meus colegas que integraram o Conselho Directivo da Escola Secundária Doutor Mário Sacramente, em Aveiro, por me terem proporcionado todas as condições para a execução deste trabalho.

A todos os elementos do Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa, em especial, à Aurora Moreira, pelo apoio ao tratamento das gravações áudio.

À minha família, em especial à minha mãe, pelo apoio e compreensão.

À Teresa, ao Pedro e ao Rui, a quem dedico este trabalho, pelos filhos que são…

A investigação apresentada nesta tese doutoral teve o apoio, no ano de 2007, da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, com a atribuição da bolsa de investigação com a referência SFRH/BD/29359/2006, financiada pelo POS_C – Desenvolver Competências – Medida 1.2.

palavras-chave

Didáctica da Matemática, perspectiva ontosemiótica, resolução de problemas, intuição, demonstração, Ensino Secundário

Resumo

Este trabalho, no âmbito da Didáctica da Matemática, foca-se no estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, no sentido de promover níveis estruturados do pensamento matemático. Em particular, as potencialidades do recurso a outros modelos de Geometria Plana (e.g. Geometria Hiperbólica, Geometria do Motorista de Táxi) em relação a este problema serão investigadas.
A opção pelo Ensino Secundário deve-se ao facto de se tratar de um nível de ensino onde se regista uma elevada taxa de insucesso escolar (especialmente no 10º ano) e onde é notório o abismo existente, entre o ensino Secundário e Universitário, no âmbito do raciocínio lógico - dedutivo.

O trabalho a desenvolver pretende aprofundar o estudo de questões ligadas à natureza do conhecimento envolvido que estarão na base de decisões, tais como: Quais os processos que vão ser ensinados? Que processos queremos que os alunos dominem? E, por outro lado, ter em conta que se pretende desenvolver capacidades de ordem superior, significando que o ensino da Matemática deve dirigir-se para níveis elevados de pensamento, tais como: resolução de problemas; comunicar matematicamente; raciocínio e demonstração.
No currículo de matemática para o Ensino Básico e Secundário tem-se negligenciado a demonstração matemática, contribuindo para que exista uma desconformidade entre os graus de ensino, secundário e universitário.
Muitas vezes as abordagens de ensino centram-se na verificação de resultados e desvalorizam a exploração e explicação (Villiers, 1998). Actualmente, assiste-se a uma tendência para retomar o raciocínio lógico - dedutivo.
O principal objectivo desta investigação é analisar ambientes de aprendizagem em que os alunos sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados e, de uma forma mais geral promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. Em particular, a abordagem de problemas de prova num contexto de geometria não Euclidiana, com recurso a artefactos e a software de geometria dinâmica, será investigada.

keywords

Mathematics Education, onto-semiotic approach, Problem solving, Intuition and Proof, Secondary school.

abstract

This work, in the framework of Mathematics Education, focuses on the study of alternative approaches to teaching and learning of Euclidean Geometry at Secondary School, in order to promote structured levels of thought of mathematical thought. Specifically, the potential of resorting to other models of Plane Geometry (e.g. Hyperbolic Geometry, Taxicab Geometry) in relation to this problem will be researched.
The choice of Secondary School is due to the fact that it is a level of teaching where a high failure rate is registered (particularly 10th grade) and where the existing abyss is conspicuous between Secondary School and University teaching in the scope of logic-deductive reasoning
The work to be carried out aims to deepen the study of issues connected to the nature of the knowledge involved that forms the basis for decisions, such as: What processes are to be taught? What processes do we want the students to command? And on the other hand, bear in mind that we want to develop capacities of higher order, meaning that the teaching of Mathematics should be directed at high levels of thought such as: problem solving; communicate mathematically; reasoning and demonstration.
The mathematics syllabus for Primary and Secondary School has neglected mathematical demonstration, thereby contributing towards the existence of inequality between the Secondary School and University stages of teaching.
Very often, teaching approaches are centred on verification of results and do not value exploration and explanation (Villiers, 1998). There is currently a trend to resume the logic-deductive reasoning.
The main goal of this research is to analyse learning environments in which the students are requested to solve proof problems in diversified contexts and in a more general way, promote the development of deductive reasoning and a broader vision of mathematical knowledge. Specifically, the approach of proof problems in a context of non-Euclidean geometry, by resorting to artefacts and dynamic geometry software, will be researched.

O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas

ÍNDICE

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

Índice de Gráficos

INTRODUÇÃO

O problema

No currículo de matemática para o Ensino Secundário, em Portugal, tem-se negligenciado o aspecto dedutivo desta disciplina. No entanto, actualmente, assiste-se a uma tendência para retomar o raciocínio lógico – dedutivo. O actual currículo vincula esta mudança ao contemplar o capítulo transversal "Temas Gerais", que são um conjunto de temas que deverão ser desenvolvidos de forma lateral ao corpo do programa. É o caso do tema "Lógica e Raciocínio Matemático" que, não constituindo um conteúdo, em si mesmo, tem a função de apoiar os alunos na compreensão da demonstração. De acordo com o actual currículo, a escrita simbólica deve surgir naturalmente. Além de que, os conceitos matemáticos e suas propriedades devem ser estimulados intuitivamente, até que os alunos possam trabalhá-los e chegar a formulações matemáticas precisas. Propõe-se, também, o desenvolvimento de diversas formas estruturantes do raciocínio lógico, tais como a noção de teorema, hipótese, tese e demonstração. Devem proporcionar-se situações de abordagem de diversos métodos de demonstração integrados nos diferentes temas contemplados no corpo do programa e os alunos deverão utilizar esses métodos após terem tido contacto com pequenas demonstrações informais. Deve, também, desenvolver-se uma reflexão sobre heurísticas (de Pólya, Schoenfeld, ou outras) da resolução de problemas, para servir de pano de fundo organizacional do pensamento e para que os alunos se apercebam da necessidade de delinear um plano na resolução de problemas.

No documento *Curriculum and Standards for School Mathematics (NCTM),* a resposta à questão "porquê o estudo da geometria não – euclidiana?" é a seguinte:

"...o currículo de matemática, no ensino secundário, deve incluir o estudo continuado da geometria a duas e três dimensões, de modo a que todos os alunos

desenvolvam a compreensão de um sistema axiomático através da comparação e investigação de várias geometrias.”

É, também, nosso entendimento que o estudo de outros sistemas axiomáticos (não previstos no actual currículo do Ensino Secundário) em paralelo com a axiomática de Euclides, trará as seguintes vantagens:

1. A transição de um raciocínio intuitivo para um raciocínio dedutivo;
2. A compreensão do que é um sistema axiomático;
3. Promover a competência argumentativa de alunos do ensino secundário.

Segundo vários investigadores (e.g., Hanna, G., 2000; Hoyles, C., 1998) a demonstração é fundamental para a aprendizagem da matemática e um dos grandes desafios que se coloca aos professores é o de utilizarem a demonstração como um veículo para promover a compreensão matemática dos alunos. Assim, torna-se necessário proceder à investigação de formas activas de realçar o papel da demonstração na sala de aula, no sentido de encontrar metodologias adequadas para induzir nos alunos um raciocínio dessa natureza, contribuindo para a diminuição do abismo entre os graus de ensino, Secundário e Universitário. Pretendemos, assim, com base em sistemas axiomáticos distintos do sistema de Euclides, investigar abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria no Ensino Secundário.

O software utilizado numa abordagem dinâmica da geometria tem estimulado a realização de investigações sobre as concepções revelados pelos alunos acerca do papel da “prova” de conjecturas que podem ser testadas através da utilização desse mesmo software. Constitui, igualmente, uma boa ferramenta para o ensino e aprendizagem da geometria porque permite a testagem de conjecturas e a compreensão e a aprendizagem de conceitos matemáticos e métodos, de forma não tradicional (Gutiérrez, A. et al*.,* 2000). Estas constatações remetem-nos para o recurso a software dinâmico (e.g. The Geometer`s Sketchpad, Cinderella).

A finalidade deste projecto de investigação, no âmbito da didáctica da matemática, é o estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, no sentido de promover níveis elevados de pensamento matemático. Em particular, as potencialidades do recurso a outros modelos de Geometria Plana (e.g.

Geometria Hiperbólica, Geometria do Motorista de Táxi) em relação a este problema serão investigadas.

A opção pelo Ensino Secundário deve-se ao facto de se tratar de um nível de ensino onde se regista uma elevada taxa de insucesso escolar (especialmente no 10º ano) e onde é notório o abismo existente, entre o ensino Secundário e Universitário, no âmbito do raciocínio lógico - dedutivo.

O trabalho a desenvolver pretende aprofundar o estudo de questões ligadas à natureza do conhecimento envolvido que estarão na base de decisões, tais como: Quais os processos que vão ser ensinados? Que processos queremos que os alunos dominem? E, por outro lado, ter em conta que se pretende desenvolver capacidades de ordem superior, significando que o ensino da Matemática deve dirigir-se para níveis elevados de pensamento, tais como: resolução de problemas; comunicar matematicamente; raciocínio e demonstração.

No currículo de matemática para o Ensino Básico e Secundário tem-se negligenciado a demonstração matemática, contribuindo para que exista um abismo entre os graus de ensino, secundário e universitário.

Muitas vezes as abordagens de ensino centram-se na verificação de resultados e desvalorizam a exploração e explicação (Villiers, 1998). Actualmente, assiste-se a uma tendência para retomar o raciocínio lógico-dedutivo.

O principal objectivo desta investigação é analisar ambientes de aprendizagem em que os alunos sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados e, de uma forma mais geral, promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. Em particular, a abordagem de problemas de prova num contexto de geometria não euclidiana, com recurso a artefactos e a software de geometria dinâmica, será investigada.

Antecedentes da investigação

Durante os últimos anos tem-se vindo a realizar investigação considerável no âmbito do ensino e aprendizagem do raciocínio matemático, em especial do raciocínio de natureza dedutiva. Um testemunho deste facto está patente nas publicações, sobre este tópico, nos jornais de educação matemática entre 1990 e 1999. Além de que Nicholas Balacheff tem mantido como Web site, desde 1997, uma Newsletter *–International*

Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematics Proof, a qual tem divulgado estudos teóricos e empíricos sobre este tópico.

No CERME 4 (*Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)* em Espanha, Reid, D. (2005) discutiu, tendo como referência o trabalho de vários investigadores (e.g., Godino & Recio, 2007; Reid, 2001; Balacheff, 2004), os diferentes significados de "demonstração" e "prova" em termos das seguintes dimensões: o conceito de demonstração; o propósito do ensino da demonstração; os tipos de raciocínio envolvidos numa prova, a necessidade de provar e a relação entre demonstração e linguagem.

Um número considerável de investigadores tem vindo a investigar o recurso a ambientes de geometria dinâmica e em particular a seu papel no raciocínio matemático. Um indicador de tal facto é a edição especial do jornal internacional de investigação em educação matemática, *Educational Studies in Mathematics 44 (2000)*.

A referida edição apresenta uma análise da influência do software de geometria dinâmica (DGS) nas concepções dos alunos sobre a demonstração quando confrontados com problemas de geometria envolvendo demonstração em ambientes de geometria dinâmica, proporciona evidências de que a actividade com software de geometria dinâmica permite aos alunos a possibilidade de ter acesso aos aspectos teóricos da matemática e é descrita, por Marrades e Gutiérrez, uma estrutura de análise e de classificação das justificações dos alunos. Os exemplos de sucesso aqui apresentados não aconteceram sem os seguintes elementos: tarefas cuidadosamente preparadas, adequada orientação do professor; criação de oportunidades para os alunos conjecturarem, cometerem erros, reflectirem, interpretarem relações entre objectos e apresentarem explicações matemáticas.

É razoável prever que estes ambientes transformem rapidamente a relação entre o conhecimento matemático e os problemas propostos. Essa mudança ocorrerá devido à natureza dos problemas propostos e aos processos de resolução Mariotti (2000).

Um grande número de estudos tem confirmado a importância do papel do professor na criação de ambientes de debate que conduzam os alunos à identificação da estrutura de uma demonstração, à apresentação de argumentos e à distinção entre os argumentos correctos dos incorrectos, bem como a encorajar a interacção entre os alunos. Além disso, é crucial que o professor ajude os alunos a compreenderem por que é que uma prova é necessária e quando esta é válida (cf. Balacheff. N., 1987; Hanna, G., 1995 cit in Bergen *et al:*2000).

O facto de se ter vindo a reflectir sobre a investigação neste domínio, quer em conferências internacionais quer nas várias publicações (e.g., Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactique dês Mathématiques, La Lettre de la Preuve[1], constitui um sinal de maturidade da investigação no ensino e aprendizagem da "demonstração" e da "prova" matemática.

A investigação neste domínio (e.g., Schalkwijk, L., 2000) documenta que, para alunos do nível do Ensino Secundário, as tarefas que envolvem raciocínio dedutivo constituem tarefas com um grau de dificuldade elevado. Dreyfus (1999) identificou três categories de dificuldades: *a lack of sense of the need for proof*; *a failure to grasp the nature of proof and writing proofs.* Considerando que, de uma forma geral, a prova continua a ter um lugar importante no currículo de matemática, quer nacional quer internacional, os professores de matemática devem ter preocupações relativas a abordagens didácticas de problemas de prova no sentido da promoção, da compreensão matemática e do reconhecimento da prova com um dos aspectos fundamentais da matemática.

Em Portugal, as abordagens de ensino da prova matemática, quer na Educação Básica quer na Educação Secundária, concentram-se frequentemente na verificação de resultados e menos na exploração e explicação. Os indicadores de avaliação, quer aferida quer sumativa, demonstram claramente a necessidade do desenvolvimento de intervenções na educação matemática que promovam o pensamento matemático mais autónomo nos nossos alunos.

Assim, a acessibilidade a ambientes de geometria dinâmica (e.g., Geometer´s Sketchpad, Cabri Géomètre) facilita a realização de tarefas de natureza exploratória, devido ao facto de ter capacidades para os alunos testarem facilmente conjecturas através da exploração de construções feitas ou conjecturarem relações geométricas com base em evidências visuais. De acordo com Hanna, G. (2000), o professor de matemática deve estar consciente de que as representações visuais constituem uma componente essencial nos currículos de matemática na medida em que cria pontes com o aspecto formal da matemática.

---

[1] http://www.lettredelapreuve.it/

O nosso estudo constitui-se como uma pequena peça na agenda de investigação na educação de alunos do Ensino Secundário para a prova matemática. Neste sentido, e de forma atípica, optou-se por abordar problemas de prova num contexto diversificado de Geometria Plana e com recurso a ambientes de geometria dinâmica.

Referencial teórico

Considerando que o presente trabalho é da área da didáctica da matemática e tendo em conta os diversos enfoques que se têm proposto nesta área, parece-nos conveniente clarificar o (s) enfoque (s).

Segundo Font, V. (2002), os diversos enfoques que se têm vindo a propor em didáctica da matemática posicionam-se de forma explícita ou implícita sobre os seguintes aspectos:

- Uma *ontologia geral* – uma teoria da existência relativa à consideração do status do mundo e do que o habita.
- Uma *epistemologia geral* que engloba – (a) Uma teoria da natureza, génesis e validação do conhecimento subjectivo, (b) Uma teoria da natureza, génesis e validação do conhecimento objectivo, (c) Uma teoria do significado e da verdade, implicada pelas teorias sobre o conhecimento subjectivo e objectivo.
- Uma teoria sobre a natureza da matemática.
- Uma teoria sobre a aprendizagem e o ensino que compreende – (a) Uma teoria geral sobre a aprendizagem (como se forma o conhecimento pessoal), (b) Uma teoria específica sobre a aprendizagem da matemática (como se forma o conhecimento matemático pessoal), (c) Uma teoria do ensino (os meios para facilitar a aprendizagem) e (d) Uma teoria do ensino da matemática (os meios para facilitar a aprendizagem da matemática).
- Uma definição do objecto de investigação da didáctica da matemática.
- Uma metodologia de investigação.

Um Enfoque Semiótico

A seguir apresentamos o posicionamento da presente investigação, em didáctica da matemática, em relação a alguns dos aspectos anteriores.

Para Ernest, P. (2006), uma perspectiva semiótica da actividade matemática proporciona uma maneira de problematizar questões ligadas ao ensino e aprendizagem da matemática conduzidas com o seu foco principal nos sinais e no seu uso. Adoptando este ponto de vista, segue-se uma perspectiva alternativa às perspectivas psicológicas, que se focam exclusivamente nas estruturas mentais e suas funções e às perspectivas de avaliação focadas exclusivamente nos comportamentos dos alunos. Esta perspectiva alternativa, além das estruturas mentais e suas funções num indivíduo, considera a apropriação pessoal dos sinais dentro de contextos sociais de aprendizagem. Além do desempenho comportamental, esta perspectiva também se preocupa com padrões de sinais utilizados e produzidos, incluindo a criatividade individual no uso dos sinais e as regras sociais a seguir, contextos e significados do sinal utilizado conforme foi interiorizado e desenvolvido pelos indivíduos. Uma abordagem semiótica junta as dimensões sociais e individuais da actividade matemática, bem como as dimensões pública e privada. Estes pares dicotómicos de ideias são entendidos como aspectos que constituem o ensino e aprendizagem da matemática e que são mutuamente dependentes, em vez de serem entendidos componentes de uma relação mútua de exclusão ou de oposição. A aprendizagem individual é iniciada por participação fazendo parte do social. Efectivamente, o uso público de sinais tem por base a construção privada de significado. Esta é talvez a principal justificação para adoptar uma perspectiva semiótica no ensino e na aprendizagem da matemática. Isto transcende, como já se referiu, os limites das abordagens puramente cognitivas e da psicologia comportamental, considerando uma unidade natural e básica da inteligência de acção, o sinal.

Uma perspectiva semiótica também transcende a dicotomia tradicional subjectivo-objectivo. Os sinais são intersubjectivos, e assim proporcionam as bases para a construção de significados subjectivos, bem como as bases para se comunicar o conhecimento humano, o que pode ser entendido como conhecimento objectivo.

O principal foco de uma perspectiva semiótica, na educação matemática, é a actividade de comunicar matematicamente utilizando sinais. Isto envolve a recepção do sinal e a sua compreensão através de o ouvir ou ler, a produção de sinal através da fala, da escrita ou do desenho. Apesar destas duas direcções de comunicação de um sinal serem conceptualmente diferentes, na prática, estes dois tipos de actividade observam-se mutuamente nas transacções semióticas entre as pessoas em determinado contexto social.

A perspectiva apresentada por Ernest, P. (2006) foca-se nos sistemas de sinais na matemática e no conteúdo matemático, capacidades e competências desenvolvidas e envolvidas durante um processo educacional. Contudo, segundo uma perspectiva semiótica, o sinal e sinais utilizados são entendidos como parte de sistemas mais complexos. Primeiro que tudo, todo o uso de sinal é socialmente localizado e faz parte de uma prática histórica e social. Em segundo lugar, os sinais não são utilizados de forma isolada, os sinais são entendidos como parte de sistemas semióticos, com referência implícita ou explicita a outros sinais.

Segundo Wittgenstein, L. (1998), o uso de sinais compreende "jogos de linguagem"impregnados de "formas de vida" social.

Um enfoque ontosemiótico

Segundo Godino et al. (2006), numa perspectiva ontosemótica, a didáctica da matemática deve ter em consideração e basear-se na natureza dos conteúdos matemáticos, no seu desenvolvimento cultural e pessoal, particularmente no seio das instituições escolares. Assim, a investigação em didáctica da matemática não pode ignorar questões, como por exemplo, e passo a citar: *¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?;¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las matemáticas?;¿Las matemáticas se descubren o inventan?;¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?;¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos matemáticos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?* (Godino et al., 2006, p. 2).

O ponto de partida do enfoque ontosemiótico é a formulação de uma ontologia de objectos matemáticos que tenha em conta os três aspectos da matemática: *como resolução de problemas*, socialmente partilhada, *como linguagem simbólica* e como *sistema conceptual logicamente organizado*. Tomando como noção primitiva a de situação-problema, definem-se os conceitos de *prática*, *objecto* (pessoal e institucional) e *significado*, com o objectivo de tornar visível e operativo, por um lado, o referido triplo carácter da matemática, e por outro, a génesis pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como a sua mútua interdependência.

Na prática matemática[2] intervêm vários tipos de objectos (símbolos, gráficos, diagramas, definições, proposições, etc.) que são representados de forma, escrita, oral, gráfica ou inclusivamente de forma gestual. Dos sistemas de práticas matemáticas operativas e discursivas emergem novos objectos que nos dão indicações sobre a estrutura e organização destes sistemas. Estes objectos emergentes podem ser "objectos institucionais", partilhados por uma instituição, ou "objectos pessoais", os quais incluem construções cognitivas (concepções, esquemas, representações internas, etc.).

Neste seguimento de ideias, Godino e colaboradores referem que para uma análise mais fina da actividade matemática é necessário ter em consideração seis tipos de entidades primárias: *Situação-problema*; *Linguagem* (e.g., termos, expressões, notações, gráficos) nos seus diversos registos (e.g., escrito, oral, gestual); *Conceitos* (abordados através de definições ou descrições); *Proposições* (enunciados sobre conceitos); *Procedimentos* (e.g., algoritmos, operações, técnicas de cálculo); *Argumentos* (enunciados utilizados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, de natureza dedutiva ou de outro tipo). Estes seis objectos relacionam-se formando configurações epistémicas (redes de objectos institucionais) e cognitivas (redes de objectos pessoais). A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta mas sim relativa, visto que se tratam de entidades funcionais em contextos de uso. Os sistemas de práticas e as configurações são propostas pelos mesmos investigadores, como ferramentas teóricas para descrever os conhecimentos matemáticos, na sua dupla versão, pessoal e institucional.

Os atributos contextuais apontados por estes investigadores são: *Pessoal/institucional* – A *cognição pessoal* é o resultado do pensamento e da acção do sujeito individual confrontado com uma classe de problemas, enquanto que a *cognição institucional* é o resultado do diálogo, do entendimento e da regulação no seio de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas; *Ostensivo/não ostensivo* - O atributo ostensivo refere-se à representação de um objecto não ostensivo, isto é de um objecto que não se pode mostrar a outro. A classificação entre ostensivo e não-ostensivo depende dos contextos de uso. Diagrama, gráficos, símbolos são exemplos de objectos com atributos ostensivos, cubos perfurados e secções planas de poliedros são exemplos de

[2] Considere-se prática matemática, de acordo com Godino (2006), *todo o acto ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizado por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas.*

objectos com atributos não-ostensivos; *Expressão/ conteúdo* (antecedente e consequente de qualquer função semiótica) – A relação estabelece-se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (*expressão*, designação ou nome) e um consequente (*conteúdo*, designado ou ente matemático) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com determinado critério ou código de correspondência; *Extensivo/intensivo* (particular/geral) - Esta dualidade utiliza-se para explicar uma das características básicas da actividade matemática, ou seja, a generalização. Esta dualidade permite centrar a atenção na dialéctica entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão chave na construção e aplicação do conhecimento matemático; *Unitário /sistémico* - Em certas circunstâncias os objectos matemáticos participam como entidades unitárias noutras estes devem ser tomados como decomposição de outros para que se possa proceder ao seu estudo.

Raciocínio geométrico

Em relação ao raciocínio geométrico, Duval, R. (1998) refere três espécies de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas - **visualização** (relativo à representação espacial), **construção** (com recurso a ferramentas) e de r**aciocínio** (em particular os *processos discursivos* para alargamento dos processos de conhecimento, para demonstração e para interpretação). Estes processos diferentes podem ser realizados separadamente. Assim, a visualização não depende da construção. Se a construção precede a visualização, os processos de construção dependem apenas das conexões entre as propriedades matemáticas e os constrangimentos técnicos das ferramentas. Por último, se a visualização é uma ajuda intuitiva que é necessária para encontrar uma demonstração, o raciocínio depende exclusivamente do *corpus* das proposições (definições, axiomas, teoremas) que estão disponíveis. E nalguns casos a visualização pode iludir ou ser impossível. Contudo, estas três espécies de processos cognitivos estão intimamente ligados e a sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência em geometria.

Há muitos estudos que se prendem com os processos de como os alunos aprendem a justificar afirmações matemáticas (e.g. Arzarello, e Balacheff, 2002, Harel e Sowder, 1998), Marrades e Gutiérrez (2000) descrevem uma estrutura de análise das justificações dos alunos, a qual engloba duas categorias principais de justificações: as justificações de natureza empírica e as justificações de natureza dedutiva. Esta estrutura conjuntamente com as heurísticas de uma perspectiva ontosemiótica do ensino e da aprendizagem da matemática foram consideradas na análise dos dados do presente estudo.

Objectivos e questão de investigação

O estudo de estratégias de ensino e de aprendizagem para apoiar os alunos na compreensão do processo de demonstração matemática foi a base deste trabalho. Sendo a Geometria o berço dos sistemas axiomáticos modernos, fizemos recair a nossa investigação na análise de alguns resultados em sistemas axiomáticos geométricos não isomorfos nomeadamente nas Geometrias Euclidiana e Hiperbólica.

Esta investigação foi desenvolvida em Portugal com alunos do Ensino Secundário. Na sua concepção teve-se em linha de conta as actuais sugestões curriculares que recomendam a criação, através da proposta de situações problema, de ambientes favoráveis à abordagem de aspectos formais da prova e demonstração.

A actividade de resolução de problemas conduz a aspectos importantes da educação matemática, nomeadamente à discussão de estratégias de resolução, ao desenvolvimento de competências de argumentação, à elaboração de demonstrações com domínio de questões de linguagem matemática, à análise e adequação de resultados, à construção de conceitos. A progressiva aquisição de competências no domínio da resolução de problemas é um dos grandes objectivos de qualquer sistema de Educação Básica e Secundária em matemática.

Pretende-se, através desta investigação:

- Desenvolver tarefas que suscitem o ensino e aprendizagem da Geometria segundo uma abordagem diversificada;

- Analisar as variadas abordagens das tarefas desenvolvidas pelos alunos do Ensino Secundário, em diferentes momentos e a forma como estes alunos mobilizam as suas capacidades, quer ao nível dos conteúdos matemáticos quer ao nível dos processos;

- Conceber e desenvolver abordagens didácticas alternativas de ensino da Geometria Euclidiana, no Ensino Secundário, com recurso a outras geometrias planas;

- Avaliar o impacto dessas abordagens no desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos;

- Estabelecer uma boa relação entre a intuição e o raciocínio dedutivo, ou seja, que a intuição promova a realização de raciocínios dedutivos, assim como o raciocínio dedutivo.

A hipótese da investigação é a seguinte: uma abordagem diversificada da geometria, nomeadamente a familiarização dos alunos com outros modelos de geometria, outros sistemas axiomáticos (não previstos no actual currículo do Ensino Secundário) em paralelo com a axiomática de Euclides, trará as seguintes vantagens: A transição de um raciocínio intuitivo para um raciocínio dedutivo; A compreensão do que é um sistema axiomático; A promoção da competência argumentativa de alunos do ensino secundário.

A investigação realizada consistiu na implementação, em sala de aula, de uma pasta de tarefas de geometria com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: *De que forma é que outros modelos de geometria Plana, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?*

A figura seguinte apresenta uma visão global da investigação.

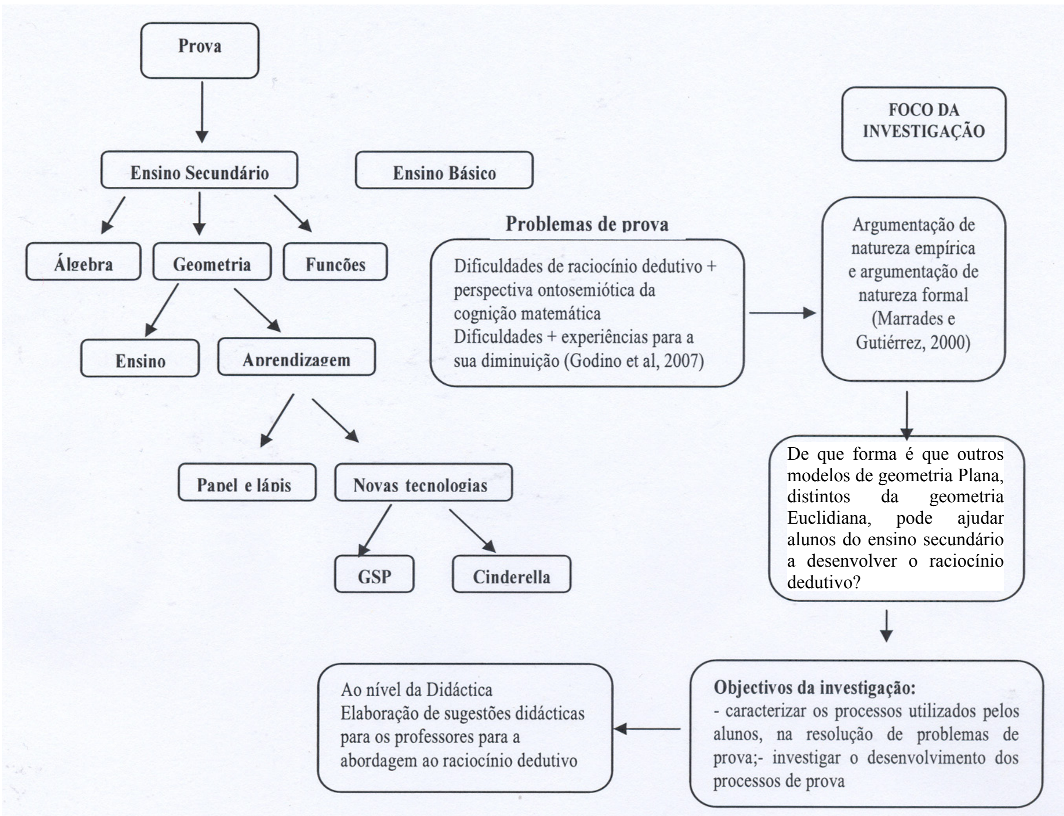


Figura 1 – Visão global da investigação

Organização do estudo

Este estudo está organizado em três partes. A primeira corresponde à explicitação e discussão dos principais referenciais teóricos dos temas centrais deste estudo e a segunda à parte empírica.

A primeira parte inclui os capítulos de 1 a 3. Nos capítulos 1, 2 e 3 abordam-se, respectivamente, os seguintes temas centrais deste estudo: um enfoque ontosemiótico do conhecimento e do ensino e da aprendizagem da matemática; modelos de geometria; argumentação matemática e raciocínio dedutivo.

Na segunda parte do estudo são apresentados o desenho e implementação de uma experiência de ensino e a análise e discussão dos resultados. Inclui os capítulos 4, 5, 6, 7 e 8. No capítulo 4 apresentam-se e justificam-se as opções metodológicas e descrevem-se os procedimentos seguidos. No capítulo 5 faz-se uma descrição da turma participante no estudo, englobando o estudo da avaliação inicial das competências de raciocínio dos alunos. No capítulo 6 descreve-se a pasta de problemas, a trajectória didáctica e elabora-se a avaliação da adequação didáctica do processo de estudo implementado na turma.
Os capítulos 7 e 8 referem-se ao estudo de caso (dois sujeitos). O capítulo 7 apresenta a descrição dos sujeitos participantes no estudo de caso, a organização do estudo e as configurações epistémicas dos problemas propostos. No capítulo 8 é apresentada uma descrição das configurações e trajectórias cognitivas destes dois sujeitos.

E finalmente a terceira parte inclui as reflexões finais.

Parte I – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Capítulo 1

O enfoque ontosemiótico do conhecimento e do ensino da matemática

1.1. Introdução

Neste capítulo é apresentado, de forma sintética, o modelo teórico - *Enfoque ontosemiótico do conhecimento e do ensino da matemática* - que tem vindo a ser desenvolvido, na última década, por Godino e seus colaboradores[3].

Como principais características do referido modelo destacam-se: a articulação das facetas institucionais e pessoais do conhecimento matemático, a atribuição de um papel chave à actividade de resolução de problemas, aos recursos expressivos e à incorporação coerente de pressupostos pragmáticos e realistas sobre o significado dos objectos matemáticos.

A didáctica da matemática, como campo de investigação, tem por finalidade específica o estudo dos factores que condicionam os processos de ensino e aprendizagem da matemática e o desenvolvimento de programas de melhoria destes processos. Godino *et al.* (2006), citando Steiner, referem a necessidade "do desenvolvimento de uma aproximação compreensiva à educação matemática, que deve ser vista, na sua totalidade, como um sistema interactivo que compreende pesquisa, desenvolvimento e prática". Para atingir este objectivo, a didáctica da matemática deve considerar as contribuições de diversas disciplinas como a psicologia, a pedagogia, a filosofia e/ou a sociologia. Além

[3]Parte destes trabalhos estão disponíveis na Internet, URL: http://www.ugr.es/local/jgodino.

disso, deve ter em conta e basear-se numa análise da natureza dos conteúdos matemáticos, seu desenvolvimento cultural e pessoal, particularmente no espaço das instituições escolares. Esta análise ontológica e epistemológica é essencial para a didáctica da matemática, uma vez que é a partir dela que se torna possível estudar os processos de ensino e aprendizagem de objectos difusos e indefinidos.

Neste sentido, a investigação em didáctica da matemática não pode ignorar questões filosóficas, tais como:

• Qual é a natureza dos objectos matemáticos?

• Que papel desempenha a actividade humana e os processos socioculturais no desenvolvimento das ideias matemáticas?

• Os conhecimentos matemáticos são descobertos ou inventados?

• O significado integral dos conceitos está plenamente contemplado através das definições formais e dos enunciados das proposições?

• Qual é o papel que desempenham no significado dos objectos matemáticos, as suas relações com outros objectos, as situações problemáticas nas quais eles são usados como ferramentas e as diversas representações simbólicas?

Os mesmos investigadores referem a emergência relativamente recente da área de conhecimento de didáctica da matemática como explicação para que ainda não exista um paradigma de investigação consolidado e dominante. Referenciando diversos trabalhos de outros investigadores (e.g., Ernest, Sierpinska e Lerman, Gascón, Font), cujo objectivo consistia em realizar propostas de organização dos diferentes programas de investigação em educação matemática, evidenciaram a diversidade de aproximações teóricas que estão em desenvolvimento na actualidade. Em certos momentos, esta diversidade pode ser inevitável, inclusive enriquecedora, porém, o progresso da disciplina exige esforços para identificar o núcleo firme de conceitos e métodos que, ao longo do tempo, se deveriam cristalizar num verdadeiro programa de investigação.

Assim, é necessário articular de forma coerente diversas facetas, entre as quais podemos referir: ontológica (tipos de objectos e sua natureza), epistemológica (acesso ao conhecimento), sociocultural e instruccional (ensino e aprendizagem organizados no âmbito das instituições escolares). Segundo os referidos investigadores é necessário e possível construir um enfoque unificado da cognição e educação matemática que permita superar os dilemas existentes entre os diversos paradigmas: realismo-pragmatismo, cognição individual-institucional, construtivismo-condutismo, entre outros. Para isso, é necessário dispor de algumas ferramentas conceptuais e metodológicas de várias disciplinas, como a semiótica, a antropologia e a ecologia, articuladas de maneira coerente com disciplinas como a psicologia e a pedagogia, que tradicionalmente consistem no ponto de referência imediato para a didáctica da matemática.

1.2. Teorias do significado: realismo *versus* pragmatismo

Godino, J. e Batanero, C. (1994), citando Kutschera e Wittgenstein, apresentam duas grandes categorias de teorias sobre o significado: o realismo versus o pragmatismo. Quanto à primeira, concebe o significado como uma relação convencional entre sinais e entidades concretas ou ideais que existem independentemente dos sinais linguísticos. Assim, *"Según esta conceptión el significado de una expressión linguística no depende de su uso em situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semântica y pragmática." (p. 4)*

Relativamente ao pragmatismo, os mesmos investigadores referenciam Wittgenstein, como defensor de uma concepção pragmática do significado – "*Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística...Hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y acciónales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de eses contextos. El lenguaje pode formar parte de diversas formas de vida; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y acciónales. "* (p. 5)

Considerando as duas tendências da filosofia da matemática, absolutismo e construtivismo social, a teoria realista do significado tem pressupostos ontológicos de uma visão absolutista, platónica, dos objectos matemáticos (conceitos, proposições, teorias,…), segundo a qual, as estruturas matemáticas têm uma existência independente da humanidade, são por isso intemporais e o conhecimento matemático consiste em descobrir as relações preexistentes que ligam esses objectos. Por outro lado, a teoria pragmática do significado tem pressupostos ontológicos do construtivismo social, onde os objectos matemáticos são considerados símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados às actividades de resolução de problemas por certos grupos de pessoas e que vão evoluindo com o tempo. Nesta concepção, o "significado" dos objectos matemáticos está intimamente ligado à natureza dos problemas propostos e à actividade realizada para a sua resolução.

Para Godino e colaboradores, o sentido teórico de significado é o da teoria pragmática de significado e tendo por base trabalhos de outros investigadores (e.g., Vergnaud, 1990) defendem que o significado dos objectos matemáticos tem ligação estreita com a acção (interiorizada ou não) que o sujeito realiza em relação a esses objectos. Como consequência de investigação realizada, apresentam uma dimensão dual para o significado de um objecto matemático - pessoal e institucional.

Analisemos, mais à frente, com mais pormenor, esta dualidade significado pessoal – significado institucional, de um objecto matemático.

Significado Institucional e Pessoal de um Objecto

O ponto de partida da teorização elaborada por Godino et al. (1994) foi a formulação de uma ontologia dos objectos matemáticos que tivesse em conta um triplo aspecto da actividade matemática: a) como resolução de problemas; b) socialmente partilhada; c) como linguagem simbólica e sistema conceptual logicamente organizado. Adoptaram como noção primitiva a noção de situação – problema e definiram os conceitos de prática, objecto (pessoal e institucional) e significado, com o fim de tornar operativo o triplo aspecto da actividade matemática e a génesis pessoal e institucional do conhecimento matemático bem como a sua interdependência.

De seguida, apresentam-se algumas definições, apresentadas por estes investigadores e que ajudam a clarificar as questões que se prendem com o significado pessoal e institucional:

- **A prática pessoal diz-se significativa** (ou que tem sentido) se, para a pessoa, esta prática desempenha uma função para a consecução do objectivo em relação aos processos de resolução de um problema, à comunicação da solução, avaliação da solução e generalização a outros contextos e problemas;

- **Uma instituição** é constituída pelas pessoas envolvidas na mesma classe de situações problemáticas. O compromisso mútuo com a mesma problemática conduz à realização de práticas sociais partilhadas, as quais estão, por seu lado, ligadas à instituição para cuja caracterização contribuem;

- **O objecto institucional** é um objecto emergente do sistema de práticas sociais associadas a um campo de problemas (e.g., definições de objectos, enunciados de proposições, procedimentos, argumentações);

- O objecto pessoal é um objecto emergente do sistema de práticas pessoais significativas associadas a um campo de problemas;

- Significado institucional de um objecto é o sistema de práticas[4] associado ao campo de problemas donde emerge este significado, num momento dado;

- Significado pessoal de um objecto é o sistema de práticas pessoais de uma pessoa para resolver o campo de problemas donde emerge o objecto pessoal, num dado momento.

Esta dualidade de significados (pessoal – institucional) tem lugar em três domínios: no das situações-problema; no das práticas pessoais e institucionais (domínio antropológico) e no das ideias emergentes (domínio cognitivo).

O sistema cognitivo de um sujeito (as suas intuições, os seus conhecimentos conceptuais e procedimentais, representações, esquemas, …) é um todo organizado e complexo. Ao reconhecer esta complexidade, surgem as seguintes questões, no âmbito da avaliação de conhecimentos: Quais são os critérios aplicáveis para a eleição e interpretação dos indicadores empíricos que devemos utilizar para caracterizar o estado cognitivo global (ou parcial), ou seja, o conhecimento de um sujeito sobre um objecto matemático reconhecido como objecto de saber?

O carácter observável das práticas sociais permite, mediante um estudo fenomenológico e epistemológico realizado adequadamente, determinar para um objecto dado o campo de problemas associados, assim como os significados institucionais e pessoais.

[4] Definição 1: Chamamos sistema de práticas a toda a actuação ou manifestação (linguística ou não) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução, validar a solução e generalizá-la a outros contextos e problemas. (Godino, 1994, p.8)

Sobre o campo de problemas associado surge a noção de conflito semiótico. Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão pelos sujeitos (indivíduos ou instituições).

Se a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interacção comunicativa (por exemplo, aluno-aluno, ou professor-aluno) falamos de conflitos (semióticos) interaccionais.

É uma noção mais geral de que a de obstáculo e algo mais específico que "erro" ou "dificuldade" ao sugerir uma origem (semiótica) de tais erros e dificuldades.

Significados e Concepções

Investigação no âmbito da educação matemática tem mostrado que existe uma ligação estreita entre o significado pessoal sobre objectos matemáticos e as concepções sobre esses mesmos objectos (e.g., Artigue, M., 1990).

Segundo Artigue, a noção de concepção responde a duas necessidades distintas: Evidenciar a pluralidade de pontos de vista possíveis sobre o mesmo objecto matemático, diferenciar as representações e modos de tratamento que lhe são associados e; Evidenciar a sua adaptação (mais ou menos adequada) à resolução de distintas classes de problemas.

1.3. Uma aproximação ao enfoque unificado do conhecimento e do ensino da matemática

Em Godino et al. (2003, cap. 2) é feita a descrição detalhada dos antecedentes teóricos nos quais estes investigadores apoiaram o sistema de noções sobre o conhecimento matemático que propõem para o estudo dos problemas do ensino e aprendizagem da matemática. Estas ferramentas foram desenvolvidas em três etapas, nas quais foram refinando progressivamente o objecto de estudo.

Numa primeira etapa, de 1993 a 1998, Godino, J. e Batanero, C. (1994), Godino, J. (1996) e Godino, J. e Batanero, C. (1998) desenvolveram e refinaram progressivamente as noções de "significado institucional e pessoal de um objecto matemático" (entendidos ambos em termos de sistemas de práticas, nos quais o objecto é determinante para sua realização) e sua relação com a noção de compreensão. Estas ideias têm como centro de interesse a investigação dos conhecimentos matemáticos institucionalizados, porém sem perder de vista o sujeito individual a quem é dirigido o esforço educativo.

Numa segunda etapa (a partir de 1998), consideraram necessário elaborar modelos ontológicos e semióticos mais detalhados. Por este motivo, desenvolveram esforços no sentido de elaborar uma ontologia suficientemente rica para descrever a actividade matemática e os processos de comunicação.

Numa primeira fase, propuseram como noção básica para a análise epistémica e cognitiva (dimensões institucional e pessoal do conhecimento matemático) os sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou no âmbito de uma instituição) perante uma classe de situações-problema. No entanto, nos processos de comunicação que têm lugar na educação matemática, não só se tem que interpretar as entidades conceptuais, como também as situações problemáticas e os próprios meios expressivos e argumentativos que desencadeiam processos interpretativos. Isto pressupõe que se conheça os diversos objectos emergentes dos tipos de práticas, assim como a sua estrutura.

Os referidos investigadores realçaram a pertinência de se estudar com mais amplitude e profundidade as relações dialécticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de sinais) e as situações-problema cuja resolução envolve tais recursos. Consequentemente, nesta etapa do trabalho, o objectivo foi progredir no desenvolvimento de uma ontologia e uma semiótica específica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de sinais matemáticos postos em jogo na interacção didáctica.

Em relação a estas questões que aparecem como centrais noutras disciplinas (e.g., a semiótica, a epistemologia), estes investigadores referem de que não se pode falar numa solução clara para as mesmas. E referenciando, Peirce, Saussure e Wittgenstein, afirmam que as respostas dadas são diversas, incompatíveis ou difíceis de compaginar. O interesse pelo uso de noções semióticas em educação matemática é crescente, conforme se pode apreciar no estudo de Anderson et al. (2003) e no número monográfico da revista *Educational Studies in Mathematics* (Sáenz-Ludlow y Presmeg, 2006).

Numa terceira etapa, os investigadores Godino, Contreras e Font (2006) propõem a distinção de seis dimensões, com as suas respectivas trajectórias, num processo de ensino e aprendizagem da matemática: <u>epistémica</u> (relativa ao conhecimento institucional), <u>docente</u> (funções do professor), <u>discente</u> (funções do aluno), <u>mediacional</u> (relativa ao uso de recursos didácticos), <u>cognitiva</u> (génese de significados pessoais) e <u>emocional</u> (que contempla as atitudes, emoções, etc., dos alunos, relativas ao estudo da matemática). O modelo ontológico e semiótico da cognição proporciona critérios para identificar as possíveis trajectórias epistémicas e cognitiva e a adopção da "negociação de significados" como noção chave para a gestão das trajectórias didácticas. A aprendizagem matemática é concebida como o resultado dos padrões de interacção entre os distintos componentes de tais trajectórias.

A estrutura teórica elaborada durante estes três períodos constitui o modelo ontológico-semiótico do qual é apresentada uma síntese nas secções seguintes. Este modelo engloba ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os factores que condicionam o seu desenvolvimento. Além disso, consideram as facetas do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e avançam na direcção de um modelo unificado da cognição e instrução matemática.

1.4. Ferramentas teóricas que compõem o enfoque ontosemiótico

1.4.1. Sistemas de práticas operativas e discursivas ligadas a campos ou tipos de problemas

Uma instituição, como já foi referido anteriormente, é constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problemáticas; o compromisso mútuo com a mesma problemática implica a realização de determinadas práticas sociais que frequentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como das suas regras e modos de funcionamento. No estudo da matemática, mais do que uma prática particular relativa a um problema concreto, interessa considerar os sistemas de práticas (operativas e discursivas) que se tornam evidentes pela actividade dos indivíduos quando confrontados com situações problemáticas.

A relatividade sócio epistémico e cognitiva dos significados, entendidos como sistemas de práticas e sua utilização na análise didáctica, levou à seguinte tipologia básica de significados resumida na figura 1.1 (Godino, 2003, p. 141). Esta figura apresenta, em relação aos significados institucionais, a seguinte tipologia:

- *Implementado*: O sistema de práticas efectivamente implementadas pelo docente, num processo de estudo específico;

- *Avaliado*: O sistema de práticas que utiliza o docente para avaliar a aprendizagem;

- *Pretendido*: O sistema de práticas incluídas na planificação do processo de estudo;

-*Referencial*: O sistema de práticas que se utiliza como referência para a elaboração do significado pretendido. Numa determinada instituição de ensino, este significado de referência será uma parte do significado holístico do objecto matemático. A determinação do referido significado global requer a realização de um estudo histórico-epistemológico sobre a origem e evolução do objecto em questão, assim como considerar a diversidade de contextos de uso onde se coloca em jogo o referido objecto.

Quanto aos significados pessoais é feita a proposta dos seguintes tipos:

- *Global*: Corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais que o sujeito é capaz de manifestar em relação a um objecto matemático;

-*Declarado*: Refere-se às práticas efectivamente expressadas, incluindo-se tanto as correctas como as incorrectas do ponto de vista institucional;

-*Atingido*: Corresponde às práticas manifestadas que são coerentes com a referência institucional estabelecida.

Na análise da variação dos significados pessoais que têm lugar num processo de estudo, interessa considerar tanto os *significados iniciais* ou *prévios* dos alunos como os que realmente *sejam atingidos* ou *emergem.*

Na parte central da figura 1.1 estão indicadas as relações dialécticas entre o ensino e a aprendizagem, que supõem o acoplamento progressivo entre os significados pessoais e institucionais. Neste sentido, o ensino implica a participação do aluno na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais e na aprendizagem, em última instância, supõe a apropriação pelo aluno dos referidos significados.

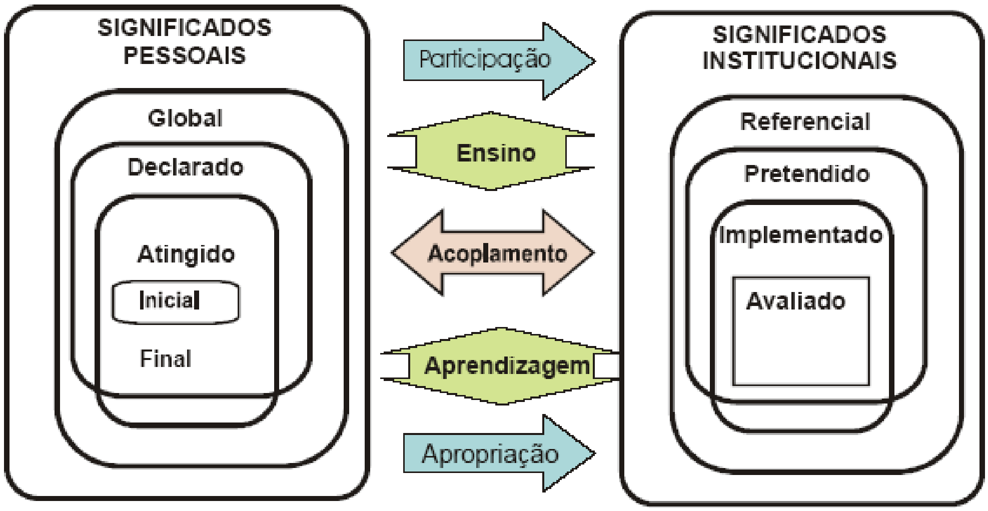


Figura 1.1- Tipos de significados institucionais e pessoais

1.4.2. Objectos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas

Nas práticas matemáticas intervêm objectos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) e não ostensivos (conceitos, proposições, etc.) a que recorremos e que são representados em forma textual, oral e/ou gestual. Dos sistemas de práticas matemáticas operativas e discursivas emergem novos objectos provenientes das mesmas e que revelam a sua organização e estrutura. Para Sfard, citado em Godino, J. (2006), "o discurso matemático e seus objectos são mutuamente constitutivos" (p.7).

Quando os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objectos emergentes são considerados "objectos institucionais"[5] e se os referidos sistemas de práticas correspondem a uma pessoa, considera-se que emergem "objectos pessoais"[6]. A noção de emergência pode ser relacionada, do ponto de vista dos objectos pessoais, com os processos cognitivos que Sfard (1991) descreve como interiorização,

---

[5] Esta formulação dos objectos institucionais é coerente com o modo de conceber os "objectos conceptuais culturais" na semiótica cultural: "Os objectos matemáticos são formas conceptuais de actividade reflexiva mediada histórica, social e culturalmente encarnada." (Radford, 2006, p. 57)

[6] Os "objectos pessoais" incluem os construtos cognitivos, tais como concepções, esquemas, representações internas, etc.

condensação e reedificação e, no plano institucional, relaciona-se com os processos de comunicação e regulação. A emergência dos objectos também está relacionada com a metáfora ontológica (Lakoff e Núñez, 2000) que permite considerar acontecimentos, actividades, ideias, entre outros, como se fossem entidades (objectos, etc.).

No enfoque ontosemiótico (EOS) é proposta a seguinte tipologia de objectos matemáticos primários:

- *Linguagem* (termos, expressões, notações, gráficos,...) nos seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...);
- *Situações-problema* (aplicações extra-matemáticas, exercícios,...);
- *Conceitos-definições* (abordados mediante definições ou descrições);
- *Proposições* (enunciados sobre conceitos,...);
- *Procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...);
- *Argumentos* (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...).

Por sua vez, estes objectos organizam-se em entidades mais complexas: sistemas conceptuais, teorias,...

Para estes investigadores, amplia-se o "triângulo epistemológico" de Steinbring - *signo/símbolo, objecto/contexto de referência, conceito* – por se problematizar a noção de conceito e interpretar o "objecto/contexto de referência" em termos de situações-problema. As situações-problema são a origem ou razão de ser da actividade; a linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a acção; os argumentos justificam os procedimentos e as proposições relacionam os conceitos entre si.

A consideração de uma entidade como primária é uma questão relativa (e não absoluta), visto que se trata de entidades funcionais e relativas aos jogos de linguagem (marcos institucionais e contextos de uso) em que participam; têm também um carácter recursivo, no sentido de que cada objecto, dependendo do nível de análise, poder ser composto por entidades dos demais tipos (por exemplo, um argumento pode colocar em jogo conceitos, proposições, procedimentos, etc.).

Estes seis objectos articulam-se formando configurações epistémicas, figura 1.2.

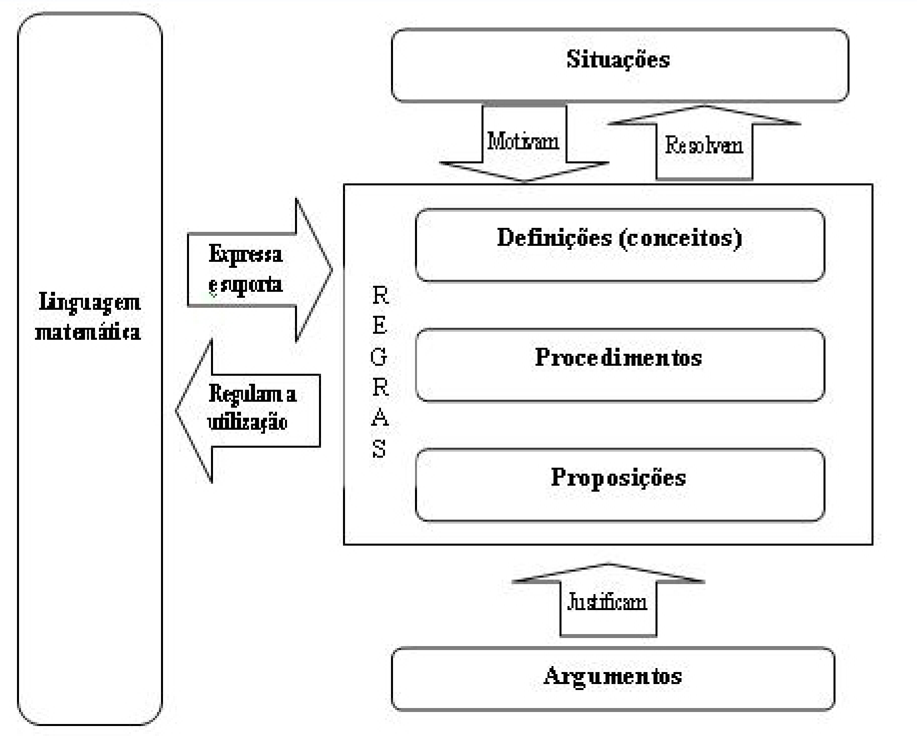


Figura 1.2 -Componentes e relações numa configuração epistémica[7]

1.4.3. Relações entre objectos: função semiótica

Godino, J. et al. (1994) apresentam uma teoria do significado dos objectos matemáticos na qual propõem um condicionamento triplo, para a ideia de significado; institucional, pessoal e temporal. Nesse mesmo trabalho, começam por referenciar vários investigadores (e.g. Brousseau, Balacheff, Sierpinska, Dummet, Brunner) os quais dão um enfoque especial ao papel fundamental que a **ideia de significado** tem para a didáctica da matemática.

Para Balacheff, N. (1990), as questões centrais para a didáctica da matemática são as seguintes:

- Que significado matemático se pode inferir das realizações dos alunos a partir da observação da sua conduta?
- Que significados matemáticos podem construir os alunos num contexto de ensino?

[7] Figura apresentada, por Vicenç Font em 7 de Março de 2007, no fórum virtual teoria -edumat http://es.groups.yahoo.com/group/teoria-edumat/

- Qual é a relação entre o significado do conteúdo a ensinar e do conhecimento matemático eleito como referência?
- Como podemos caracterizar o significado dos conceitos matemáticos?

Para Sierpinska, A. (1990), a ideia de significado está intimamente relacionada com a compreensão: " *Compreender um conceito é concebido como o acto de entender o seu significado. Este acto será provavelmente um acto de generalização e síntese de significados relacionados com elementos particulares da estrutura do conceito (a estrutura é a rede de sentidos das afirmações consideradas). Estes significados particulares têm que ser entendidos como actos de compreensão.*

Godino, J. et al. (2006) adoptam a noção de função semiótica de Hjelmslev e consideram a função semiótica como a dependência entre um texto e suas componentes, assim como entre estas componentes. Trata-se, portanto, das correspondências (relações de dependência ou função) entre um antecedente (expressão, representante) e um consequente (conteúdo, representado), estabelecidas por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um determinado critério ou código de correspondência. Estes códigos podem ser regras (hábitos, acordos) que informam os sujeitos implicados sobre os termos que devem ser colocados em correspondência nas circunstâncias fixadas.

As relações de dependência entre expressão e conteúdo podem ser do tipo representativa (um objecto é colocado no lugar de outro para um determinado propósito), instrumental (um objecto usa o outro ou outros como instrumento) e estrutural (dois ou mais objectos compõem um sistema do qual emergem novos objectos). Desta maneira, as funções semióticas e a ontologia matemática associada têm em consideração a natureza essencialmente relacional da matemática e generalizam, de maneira radical, a noção de representação. Assim, o papel de representação não é exclusivamente assumido pela linguagem; de acordo com a semiótica de Peirce, postula-se que os distintos tipos de objectos (situações-problema, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) podem ser também expressão ou conteúdo das funções semióticas.

O uso das funções semióticas permite um refinamento da análise do significado em termos de práticas. As funções semióticas são um instrumento relacional que facilitam o estudo conjunto da manipulação de ostensivos matemáticos e do pensamento que a acompanha, característica das práticas matemáticas.

1.4.4. Configurações de objectos e processos matemáticos

A noção de "sistema de práticas" é útil para determinadas análises do tipo macro didáctico, particularmente quando tratamos de comparar a forma específica que adoptam os conhecimentos matemáticos em distintos marcos institucionais, contextos de uso ou jogos de linguagem. Para uma análise mais fina da actividade matemática, é necessário introduzir os seis tipos de entidades primárias comentadas anteriormente: situações, linguagens, definições, proposições, procedimentos e argumentos. Em cada situação, estes objectos estarão relacionados entre si formando *configurações,* definidas como redes de objectos intervenientes e emergem dos sistemas de práticas e relações que se estabelecem entre os mesmos. Estas *configurações* podem ser *epistémicas* (redes de objectos institucionais) ou *cognitivas* (redes de objectos pessoais). Os sistemas de práticas e as configurações são propostas como "ferramentas" teóricas para descrever os conhecimentos matemáticos na sua dupla versão, pessoal e institucional.

A constituição destes objectos e relações, tanto na sua faceta pessoal como na institucional, tem lugar ao longo do tempo mediante processos matemáticos, os quais são interpretados como "sequências de práticas". Os objectos matemáticos emergentes constituem a cristalização ou reedificação resultante destes processos.

A maneira de interpretar os processos matemáticos como sequências de práticas, em correspondência com os tipos de objectos matemáticos primários, proporciona critérios para categorizar os processos. A constituição dos objectos linguísticos, problemas, definições, proposições, procedimentos e argumentos têm lugar mediante os respectivos processos matemáticos primários, de comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimentos (realização de algoritmos, rotinas,...) e argumentação.

A *resolução de problema* e, de maneira mais geral, a *modelação* devem ser consideradas como "hiper-processos" matemáticos ao implicar configurações complexas dos processos matemáticos primários (estabelecimento de *conexões* entre os objectos e *generalização* de técnicas, regras e justificações). Além disso, a realização efectiva dos processos de estudo requer a realização de sequências de práticas de planeamento, controle e avaliação (s*upervisão*) que conduzem a processos meta-cognitivos.

1.4.5. Atributos contextuais

A noção de jogo de linguagem (Wittgenstein, 1953) ocupa um lugar importante, ao considerá-la, conjuntamente, com a noção de instituição, como elementos contextuais que relativizam os significados dos objectos matemáticos e lhes atribuem uma natureza funcional. Os objectos matemáticos que intervêm nas práticas matemáticas e os seus emergentes, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados mediante as seguintes facetas ou dimensões duais (Godino, 2002):

• *Pessoal-institucional*. Se os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objectos emergentes são considerados "objectos institucionais"; se estes sistemas são específicos de uma pessoa são considerados como "objectos pessoais" (Godino e Batanero, 1994). A cognição matemática deve contemplar as facetas pessoal e institucional, entre as quais se estabelecem relações dialécticas complexas e cujo estudo é essencial para a educação matemática. A "cognição pessoal" é o resultado do pensamento e da acção do sujeito individual perante uma certa classe de problemas, enquanto a "cognição institucional" é o resultado do diálogo, o acordo e a regulação no âmbito de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas;

• *Ostensivo - não ostensivo.* Entende-se por *ostensivo* qualquer objecto que é público e que, portanto, pode ser mostrado a outro. Os objectos institucionais e pessoais têm uma natureza *não ostensiva* (não perceptíveis por si mesmos). No entanto, qualquer destes objectos é utilizado nas práticas públicas através de seus ostensivos associados (notações, símbolos, gráficos, …). Esta classificação entre ostensivo e não ostensivo é relativa ao jogo de linguagem em que participam, considerando que um objecto ostensivo pode ser também pensado, imaginado por um sujeito ou estar implícito no discurso matemático (por exemplo, o sinal de multiplicar na notação algébrica);

• *Expressão-conteúdo* (Antecedente e consequente de qualquer função semiótica). A actividade matemática e os processos de construção e uso dos objectos matemáticos caracterizam -se por serem essencialmente relacionais. Os distintos objectos não devem ser concebidos como entidades isoladas, mas sim colocados em relação uns com os outros. A relação estabelece - se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um *antecedente* (expressão, significante) e um *consequente* (conteúdo, significado) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um certo critério ou código de correspondência;

• *Extensivo-intensivo (exemplo - classe)*. Um objecto que intervém num jogo de linguagem como um caso particular (um exemplo específico) pode ser apresentado pela função $y = 2x + 1$ e uma classe (por exemplo a família de funções $y = mx + n$). A dualidade extensivo-intensivo é utilizada para explicar uma das características básicas da actividade matemática: o uso de elementos genéricos (Contreras *et al.*, 2005). Esta dualidade permite centrar a atenção na dialéctica entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão-chave na construção e aplicação do conhecimento matemático. "A generalização é essencial porque este é o processo que distingue a criatividade matemática da conduta mecânica ou algorítmica" (Otte, 2003, p. 187);

• *Unitário-sistémico*. Nalgumas circunstâncias, os objectos matemáticos participam como entidades unitárias (que supostamente são conhecidas previamente), enquanto que noutras intervêm como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo. No estudo da adição e subtracção, nos últimos anos do 1º ciclo da educação básica, o sistema de numeração decimal (dezenas, centenas, …) é considerado como algo conhecido e, em consequência, como entidades unitárias (elementares). Estes mesmos objectos, no primeiro ano deste ciclo de estudos, são considerados de maneira sistémica para a sua aprendizagem.

Estas facetas são apresentadas agrupadas em duplas que se complementam de maneira dialéctica. São consideradas como atributos aplicáveis aos distintos objectos primários e secundários, dando lugar a distintas "versões" dos referidos objectos através dos seguintes *processos cognitivos/ epistémicos*:

Institucionalização - personalização;

Generalização - particularização;

Análise/decomposição - síntese/reedificação;

Materialização/concretização - idealização/abstracção;

Expressão/representação - significação.

Na figura 1.3 estão representadas as diferentes noções teóricas anteriormente descritas de maneira sucinta. Nesta perspectiva teórica, o enfoque ontosemiótico da educação matemática, a actividade matemática ocupa o lugar central e a sua modelação ocorre em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Destas práticas, emergem os distintos tipos de objectos matemáticos, que estão relacionados entre si formando configurações. Finalmente, os objectos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados segundo as cinco facetas ou dimensões duais.

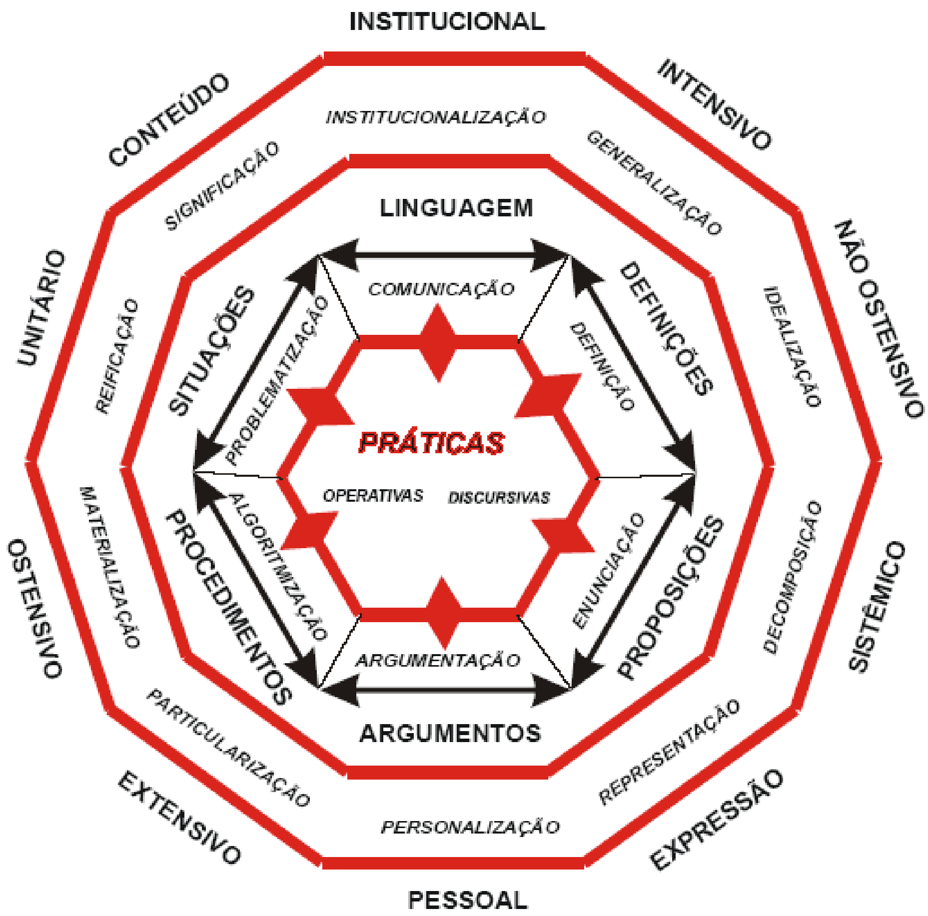


Figura 1.3 - Modelo ontosemiótico do conhecimento matemático

As noções teóricas descritas (sistemas de práticas, instituições, processos, entidades emergentes, configurações, atributos contextuais junto com a noção de função semiótica como entidade relacional básica) constituem uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento matemático.

1.4.6. Compreensão e conhecimento no enfoque ontosemiótico

Basicamente, existem duas maneiras de entender a "compreensão": como processo mental ou como competência (Godino, J., 2000, Font, V., 2001). Estes dois pontos de vista respondem a concepções epistemológicas que, no mínimo, são divergentes, para não dizer que estão claramente opostas. Os enfoques cognitivistas na didáctica da matemática, no fundo, entendem a compreensão como "processo mental". Os posicionamentos pragmatistas do enfoque ontosemiótico, ao contrário, permitem entender de imediato a compreensão, basicamente, como competência e não tanto como processo mental (considera-se que um sujeito compreende um determinado objecto matemático quando o usa de maneira competente em diferentes práticas).

Neste sentido, o facto de se considerar que as funções semióticas têm um papel essencial no processo relacional entre entidades ou grupos de entidades, que ocorrem nas práticas matemáticas (dentro de um determinado jogo de linguagem), permite entender nesta perspectiva teórica a compreensão também em termos de funções semióticas (Godino 2003). Com efeito, podemos interpretar a compreensão de um objecto *O* por parte de um sujeito *X* (seja indivíduo ou instituição) em termos das funções semióticas que *X* pode estabelecer em circunstâncias fixadas, nas quais se colocam em jogo *O* como funtivo (expressão ou conteúdo). Cada função semiótica implica um acto de adequação por um agente interpretante e constitui um conhecimento. Falar de conhecimento equivale a falar de conteúdo de uma ou muitas funções semióticas, resultando numa variedade de tipos de conhecimentos em correspondência com a diversidade de funções semióticas que podem ser estabelecidas entre as diversas entidades introduzidas no modelo.

1.4.7. Problemas, práticas, processos e objectos didácticos

O modelo teórico sobre a cognição que descrevemos pode ser aplicado de maneira geral a outros campos do saber, particularmente aos saberes didácticos. Neste caso, os problemas terão uma natureza distinta:

• Que conteúdo (s) devemos ensinar em determinado contexto?

• Como adequar o tempo para distribuir as distintas componentes e facetas do conteúdo a ser ensinado?

• Que modelo de processo de ensino se deve implementar em cada circunstância?

• Como planear, controlar e avaliar o processo de ensino e aprendizagem?

• Que factores condicionam o ensino e a aprendizagem? Etc.

Neste caso, as acções (práticas didácticas) colocadas em jogo, sua sequência (processos didácticos) e os objectos emergentes de tais sistemas de práticas (objectos didácticos) serão diferentes em relação à solução dos problemas matemáticos.

Na Teoria das Configurações Didácticas (Godino, J., Contreras, A., e Font, V., 2006) sobre a qual estes investigadores têm vindo a trabalhar, é apresentado um modelo de ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático como um processo composto de seis sub-processos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo e emocional), com suas respectivas trajectórias e estados potenciais. Como unidade primária de análise didáctica propuseram a *configuração didáctica*, constituída pelas interacções professor – aluno a propósito de um objecto ou conteúdo matemático e usando recursos didácticos específicos. Esta é concebida como uma realidade organizacional, como um sistema aberto à interacção com outras configurações das trajectórias didácticas das quais fazem parte. Assim, o processo de ensino sobre um conteúdo ou tema matemático desenvolve-se num determinado tempo mediante uma sequência de configurações didácticas.

Uma configuração didáctica está associada a uma *configuração epistémica*, isto é, a uma tarefa, aos procedimentos requeridos para a sua solução, à linguagem matemática utilizada, a conceitos, a proposições e a argumentações, as quais podem estar sob a responsabilidade do professor, dos alunos ou distribuídas entre eles. Associada a uma configuração epistémica existirá uma *configuração de ensino* constituída pela rede de objectos docentes, discentes e mediacionais colocados em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática abordada. A descrição das aprendizagens que vão sendo construídas ao longo do processo realiza-se mediante as *configurações cognitivas*, rede de objectos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas pessoais que se põem em jogo na implementação de uma configuração epistémica.

Estas noções teóricas complementam-se com a formulação de critérios de adequação dos processos de ensino da matemática (Godino, J., Wilhelmi, M. e Bencomo, D., 2005) que podem ajudar no desenho, implementação e avaliação dos referidos processos.

1.4.8. Critérios de adequação didáctica

Segundo Godino, Contreras e Font (2006), a *adequação didáctica* de um processo de ensino é definida como sendo a articulação coerente e sistémica das seguintes componentes:

Adequação epistémica – Refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), em relação ao significado de referência. Por exemplo, o ensino da adição na educação básica (1º ciclo) pode limitar-se à aprendizagem de rotinas e exercícios de aplicação de algoritmos (baixa adequação), ou considerar-se diferentes tipos de situações aditivas e incluir, por exemplo, a justificação dos algoritmos (alta adequação);

Adequação cognitiva – Expressa o grau em que os significados pretendidos/ implementados estão na "zona de desenvolvimento proximal" (Vygotski, 1934) dos alunos, assim como a proximidade destes significados pessoais atingidos aos significados pretendidos/ implementados. Por exemplo, no caso do ensino das operações aritméticas com números de três ou mais algarismos, um processo de ensino e aprendizagem com um alto grau de adequação cognitiva consistiria no professor realizar uma avaliação inicial para conhecer o domínio dos alunos das operações com números de um e dois algarismos e, no caso de não se verificar esse domínio, iniciar o processo de ensino trabalhando com estes números;

Adequação interaccional – Um processo de ensino e aprendizagem terá maior adequação, deste ponto de vista, se as configurações e trajectórias didácticas permitirem, por uma lado, identificar potenciais conflitos semióticos[8] (que podem ser detectados à priori) e, por outro

---

[8] Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade ocorre entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos do tipo epistémico, se a disparidade ocorre ao nível das práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, designamo-los como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade ocorre entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em

lado, resolver conflitos que forem surgindo durante o processo de ensino. Por exemplo, um processo de estudo realizado de acordo com uma sequência de situações de acção, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1997) tem, potencialmente, maior adequação semiótica do que um processo magistral que não tenha em consideração as dificuldades dos alunos;

Adequação mediacional – Consiste no grau de disponibilidade e apropriação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Por exemplo, se o professor e os alunos tivessem à sua disposição meios informáticos pertinentes para o estudo de determinado tema (por exemplo, software de geometria dinâmica para o estudo da geometria plana), o processo de ensino e aprendizagem que se apoiasse nestes recursos teria potencialmente maior adequação mediacional que outro baseado exclusivamente na utilização do quadro, lápis e papel;

Adequação emocional – Envolve o grau de implicação (interesse, motivação, …) do aluno num processo de ensino. A adequação emocional está relacionada com factores que dependem tanto da instituição como do aluno e de sua história escolar prévia. Por exemplo, o recurso a situações-problema que sejam do interesse dos alunos potencia uma alta adequação emocional;

Adequação ecológica – Diz respeito ao grau em que o processo de estudo se ajusta ao projecto educativo da turma e da escola, à sociedade e aos condicionamentos do contexto no qual se desenvolve.

No sentido de se conseguir uma adequação global de determinado processo de ensino e aprendizagem, as várias componentes devem estar integradas e ser consideradas as interacções entre as mesmas. Isto requer falar-se da adequação *didáctica* como critério

interacção comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) interacionais.

sistémico de adequação e pertinência em relação a um projecto educativo global (Godino, Wilhelmi e Bencomo, 2005). No entanto, esta adequação deve ser interpretada como relativa às circunstâncias temporais e contextuais instáveis, o que requer uma atitude de reflexão e investigação por parte do professor e demais agentes que compartilham a responsabilidade de um projecto educativo.

Godinho, J. et al. (2006) consideram a grande utilidade destas noções para a análise de projectos e experiências de ensino. Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta adequação numa das dimensões, por exemplo, a epistémica, pode requerer capacidades cognitivas que os alunos não possuem. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistémica e cognitiva, é necessário que a trajectória didáctica optimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interactuam com as situações-problema, a linguagem, etc.

Na figura 1.4 é apresentado o resumo dos critérios que compõem a adequação didáctica. É representada através de um hexágono regular a adequação correspondente a um processo de ensino pretendido ou programado, onde à priori se supõe o grau máximo para as adequações parcelares. O hexágono irregular inscrito corresponde às adequações efectivamente atingidas na implementação de um processo de ensino e aprendizagem.

As ferramentas descritas podem ser aplicadas à análise de um processo pontual de estudo implementado numa aula, ao planeamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didáctica ou a um nível mais global, por exemplo, o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Também podem ser úteis para analisar aspectos parciais de um processo de estudo, material didáctico, um livro de texto, respostas dos alunos a tarefas específicas, ou “incidentes didácticos” pontuais.

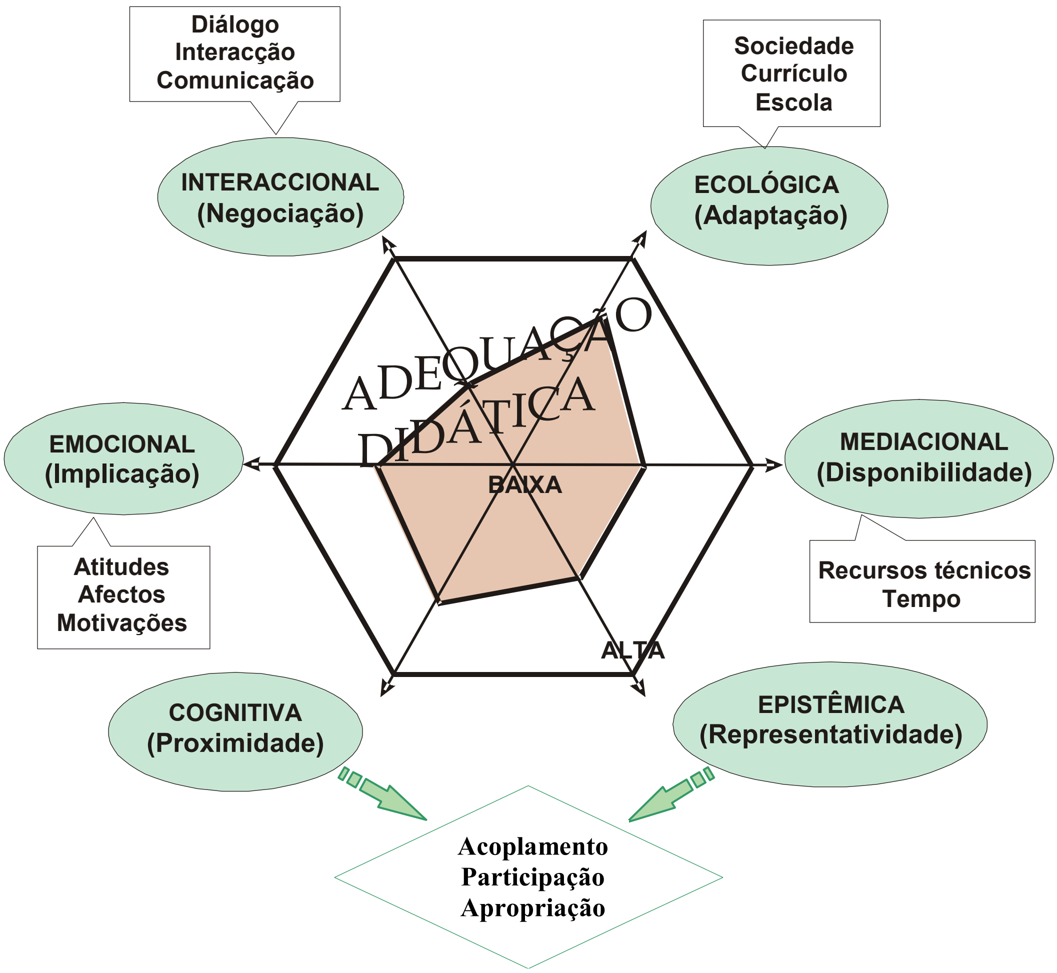


Figura 1.4 - Componentes da adequação didáctica

1.5.Sumário

Considerando que a didáctica da matemática estuda os processos de ensino e de aprendizagem dos saberes matemáticos e que é uma área científica que caracteriza os factores que condicionam tais processos, devem merecer particular interesse os significados que os alunos atribuem aos termos e símbolos matemáticos, aos conceitos e proposições, assim como à construção destes significados como consequência de processos de ensino.

Godino, J. e colaboradores, na investigação mais recente, adoptaram uma epistemologia pragmatista – antropológica, dando enfoque a uma função semiótica, cujo antecedente (significante) é o objecto matemático – ou a expressão que o designa – e o consequente (significado) é um novo construto, que descrevem como o *"sistema de práticas matemáticas realizadas por uma pessoa (ou compartilhada no âmbito de uma instituição) perante uma certa classe de situações-problema"*. Desta maneira, tentam superar a visão parcial e distorcida dos objectos matemáticos dada pela perspectiva conceptualista/ formalista, na qual estes se reduzem às suas definições e relações lógicas com outros objectos.

Assim, com a finalidade de tornar operativas estas noções para descrever a actividade matemática e os processos de comunicação matemática, estes investigadores têm vindo a realizar uma progressiva ampliação da noção de objecto matemático e seu significado. Os objectos matemáticos não equivalem apenas a conceitos, mas a qualquer entidade à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na actividade matemática. Neste sentido, significados não são somente "os sistemas de práticas", mas "o conteúdo de qualquer função semiótica". Com este uso ampliado de "objecto" e "significado", torna-se necessário, em cada circunstância, especificar o tipo de objecto ou de significado referido para que a comunicação possa ser efectiva. Neste contexto, são referidos: objectos emergentes dos sistemas de práticas como resultantes dos processos de definição (definições); argumentação (argumentos,...); objectos relacionais (funções semióticas); objectos pessoais ou institucionais; objectos extensivos ou intensivos, etc.

Por trajectória didáctica entende-se ser qualquer sequência de configurações didácticas.

Mas e o que se entende por uma configuração didáctica? Como unidade primária de análise didáctica propõe-se a configuração didáctica, constituída pelas interacções professor – aluno a propósito de um objecto ou conteúdo matemático e usando recursos materiais específicos.

O processo de ensino sobre um conteúdo matemático desenvolve-se num tempo dado mediante uma sequência de configurações didácticas. Concebe-se como uma realidade organizacional, como um sistema aberto à interacção de outras configurações das trajectórias didácticas de que fazem parte.

Uma configuração didáctica tem associada uma configuração epistémica, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para a sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentos, os quais podem estar a cargo do professor, dos alunos ou distribuídos entre ambos. Associada à configuração epistémica corresponderá uma configuração de ensino constituída por uma rede de objectos, docente, discentes, mediacionais, postos em jogo a propósito do problema ou tarefa matemática abordada.

A descrição das aprendizagens que se vão construindo ao longo do processo realiza-se mediante as *configurações cognitivas*, rede de objectos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas pessoais que se põem em jogo na implementação de uma *configuração epistémica*.

A formulação dos critérios de adequação didáctica tem como pressuposto o seguinte: "*A didáctica da matemática não deve limitar-se a uma mera descrição, mas deve aspirar ao melhoramento das situações, necessita, pois, de critérios de "adequação" que permitam valorar os processos de ensino efectivamente realizados e "orientar" o seu melhoramento" (*fórum virtual teoria –edumat, *22 de Abril, 2007).*

Os referidos investigadores consideram que o enfoque ontosemiótico pode ajudar a comparar os marcos teóricos usados em didáctica da matemática e, em determinada medida, a superar algumas das suas limitações ao nível da análise da cognição e ensino da matemática. Em princípio, trata-se de uma expectativa baseada na generalidade com que se define, neste marco teórico, as noções de problema matemático, prática matemática, instituição, objecto matemático, função semiótica e as dualidades cognitivas (pessoa-instituição; elementar-sistémico; ostensivo-não ostensivo; extensivo-intensivo; expressão-conteúdo). Estas noções permitem-nos estabelecer conexões coerentes entre os programas epistemológicos e cognitivos sobre bases que descrevemos como ontosemióticas.

Os trabalhos desenvolvidos na elaboração do marco teórico – enfoque ontosemiótico do conhecimento e do ensino da matemática - têm tido a preocupação da elaboração de um enfoque unificado do conhecimento e ensino da matemática. Para Godino, J., Batanero, C, Font, V. (2006): *O papel central dado no enfoque ontosemiótico à prática matemática (na sua versão institucional, isto é, relativa a jogos de linguagem e formas de vida) e as características que são atribuídas a esta noção (acção compartilhada, situada, intencional, mediada por recursos linguísticos e materiais)* *permitem, em nossa opinião, uma articulação coerente com outras posições teóricas, como o construtivismo social (Ernest, 1998), a socioepistemologia (Cantoral e Farfán, 2003) e em geral as perspectivas etnomatemáticas e socioculturais em educação matemática (Atweh, Forgasz y Nebres, 2001)* (p. 23).

Capítulo 2
Modelos de geometria plana

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentamos vários modelos de geometria plana numa perspectiva de ensino ao nível do ensino secundário, tendo como referência o livro *Geometry - A Metric Approach with Models*[9].

Na apresentação destes modelos, enfatiza-se a aprendizagem da geometria utilizando o raciocínio dedutivo e a intuição. Neste sentido, as situações colocadas pressupõem que os alunos sejam encorajados à elaboração de uma ***interpretação geométrica*** dos conceitos envolvidos em contextos de geometria dinâmica que lhes permita atribuir sentido a essas mesmas situações matemáticas.

O estudo da geometria, segundo as orientações para o desenvolvimento do currículo ao nível do ensino secundário, deve ser abordado a partir de perspectivas diversificadas: sintética, de transformações e analítica. Assim, os pontos seguintes apresentam orientações de abordagens didácticas de modelos diversificados de geometria plana, distintos do modelo Euclidiano, para servir de contexto a formas de pensamento matemático.

[9] Millmann, R.S. e Parker, G.D. (1991).

2.2. Modelo Geométrico

Uma das formas de compreender o Axioma das Paralelas Euclidiano é confrontá-lo com as versões não Euclidianas apresentando modelos que validem estas versões.

A "escolha" de axiomas é usualmente orientada pelos seguintes princípios:

1º - **Razoabilidade**, diz respeito a imagens intuitivas que temos de algumas propriedades geométricas;

2º - **Utilidade,** refere-se a que os axiomas devem proporcionar uma variedade rica de teoremas e consequentemente uma estrutura matemática rica;

3º - **Consistência,** um axioma não pode ter nenhuma inconsistência interna nem em confronto com os restantes axiomas fazer surgir alguma contradição.

Como conceitos básicos (primitivos) de um sistema axiomático para uma geometria plana temos o ponto e a recta. Estes, dependendo do tipo de geometria, estão relacionados através de uma colecção de axiomas ou de princípios base.

Um modelo para um sistema axiomático é uma interpretação dos termos primitivos do sistema para que os axiomas lidos à luz desta interpretação se convertam em proposições verdadeiras (Breda, A., 1995).

É frequente tentar provar um teorema, uma proposição ou resolver um problema recorrendo a um desenho. Millman, R. e Parker, G.(1991) referem que podemos utilizar um desenho para intuir, mas a prova final de um determinado resultado não pode depender de um desenho. No processo de prova, este não deve depender de uma ideia pré-concebida sobre o assunto em causa, devem apenas ser utilizados elementos (axiomas, propriedades, teoremas, etc.) do sistema em consideração.

Neste capítulo, e de uma forma geral, sempre que nos referirmos a Geometria estamos apenas a referirmo-nos a Geometrias Planas.

2.3. Geometria Abstracta: Modelos

Por **Geometria Abstracta** pretendemos significar um sistema axiomático em que os termos e relações primitivos são: *ponto*, *recta* e incidência e em que os axiomas são:

(i) Para quaisquer dois pontos A, B, existe uma recta *l* tal que A e B incidem sobre *l*;

(ii) Toda a recta tem pelo menos dois pontos incidentes sobre ela.

Numa Geometria Abstracta, quando o ponto P incide sobre a recta l dizemos que P *está sobre a recta l* ou que a recta *l passa por P*.

São exemplos de modelos de Geometria Abstracta o par A = (P, L) onde:

1. Os termos primitivos são interpretados do modo seguinte:

Ponto $\longrightarrow$ elemento do conjunto $\mathcal{P} = R^2 = \{(x, y) \in R^2 | \, x, y \in R \}$

Recta $\longrightarrow$ elemento do conjunto $\mathcal{L}_E = \{L\,a, \, Lm{,}b\!: \, a, m, b \in R \}$, onde

$L\,a = \{ (x, y) \in R^2 \mid x = a \}$ e $L\,m{,}b = \{ (x, y) \in R^2 \mid y = mx+b\}$;

Incidir sobre $\longrightarrow$ pertencer a

O modelo $\mathcal{E} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}_E)$ é designado de **Plano Cartesiano.**

Nos modelos seguintes a interpretação é do mesmo tipo apenas variando o conjunto de pontos e o conjunto das rectas.

2. $\mathcal{P} = H = \{(x, y) \in R^2 | \, y > 0\}$ e $\mathcal{L}_H = \{ {}_aL, \, {}_cL_r : a, c, r \in R, \, r>0\}$, sendo ${}_aL =$

$\{(x, y) \in H \mid x = a\}$ e ${}_cL_r = \{ (x, y) \in H \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2 \}$.

O modelo $\mathcal{H} = (H, \mathcal{L}_H)$ é designado de **Semi -Plano de Poincaré.**

Outro modelo, de Geometria Abstracta, é a **Esfera de Riemann.**

A esfera de Riemann toma para conjunto de pontos o subconjunto de R^3 definido por $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e para conjunto de rectas o conjunto dos grandes círculos.

Um grande círculo, $\mathcal{G}$, é a designação da intersecção da esfera S^2 com um plano que passa pela origem do referencial. Ou seja, $\mathcal{G}$ é um conjunto de pontos definido por,

$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid ax + by + cz = 0\}$, sendo a, b, c $\in R$ e não simultaneamente nulos.

Este contexto parece-nos ser oportuno para analisar a questão da unicidade de uma recta que passa por dois pontos distintos. No caso da esfera de Riemann, ao considerar-se dois pontos distintos, P e Q antípodas, facilmente se reconhece que por estes pontos passa uma infinidade de grandes círculos. No entanto, esta situação já não ocorre quando P e Q não são antípodas.

A abordagem do conceito de Geometria Abstracta, com alunos do ensino secundário, pode ser proporcionada através de modelos de geometria criados por um número finito de pontos - geometrias finitas. Vejamos um exemplo, sendo $\mathcal{P}$ = {P, Q, R} e $\mathcal{L}$ = {{P, Q}, {P, R}, {Q, R}}, o conjunto {$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$} é um modelo de Geometria Abstracta. O diagrama seguinte ilustra esta situação.

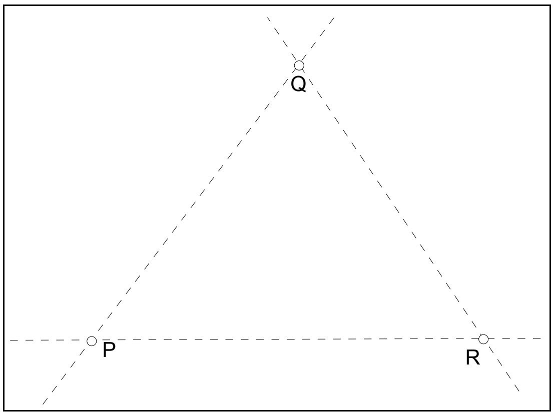
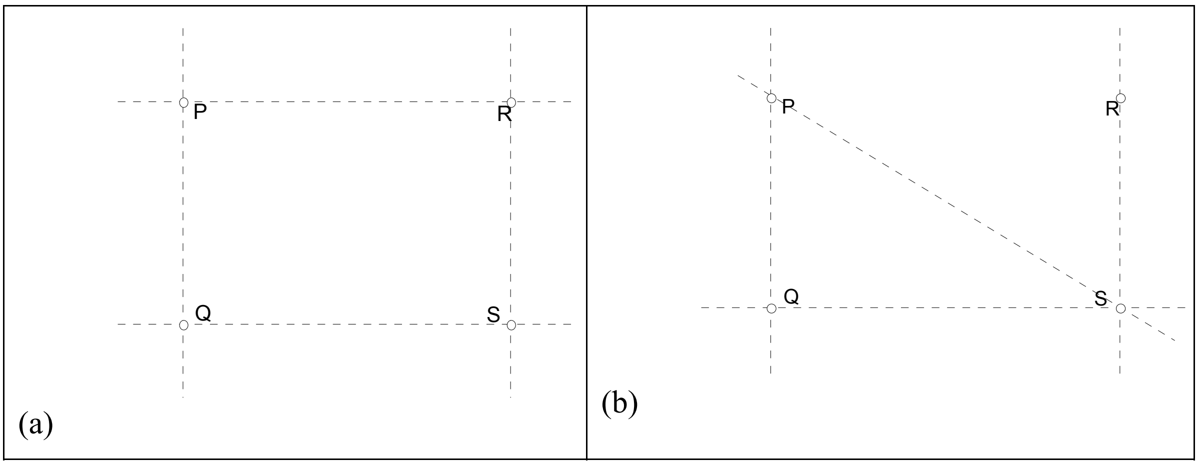


Figura 2.1 – Geometria tri - pontual

Deverão dar-se exemplos de geometrias finitas que não são abstractas. Na figura 2.2 estão definidas de forma pictórica mais exemplos (tal como no exemplo ilustrado na figura 2.1, geometria tri –pontual).



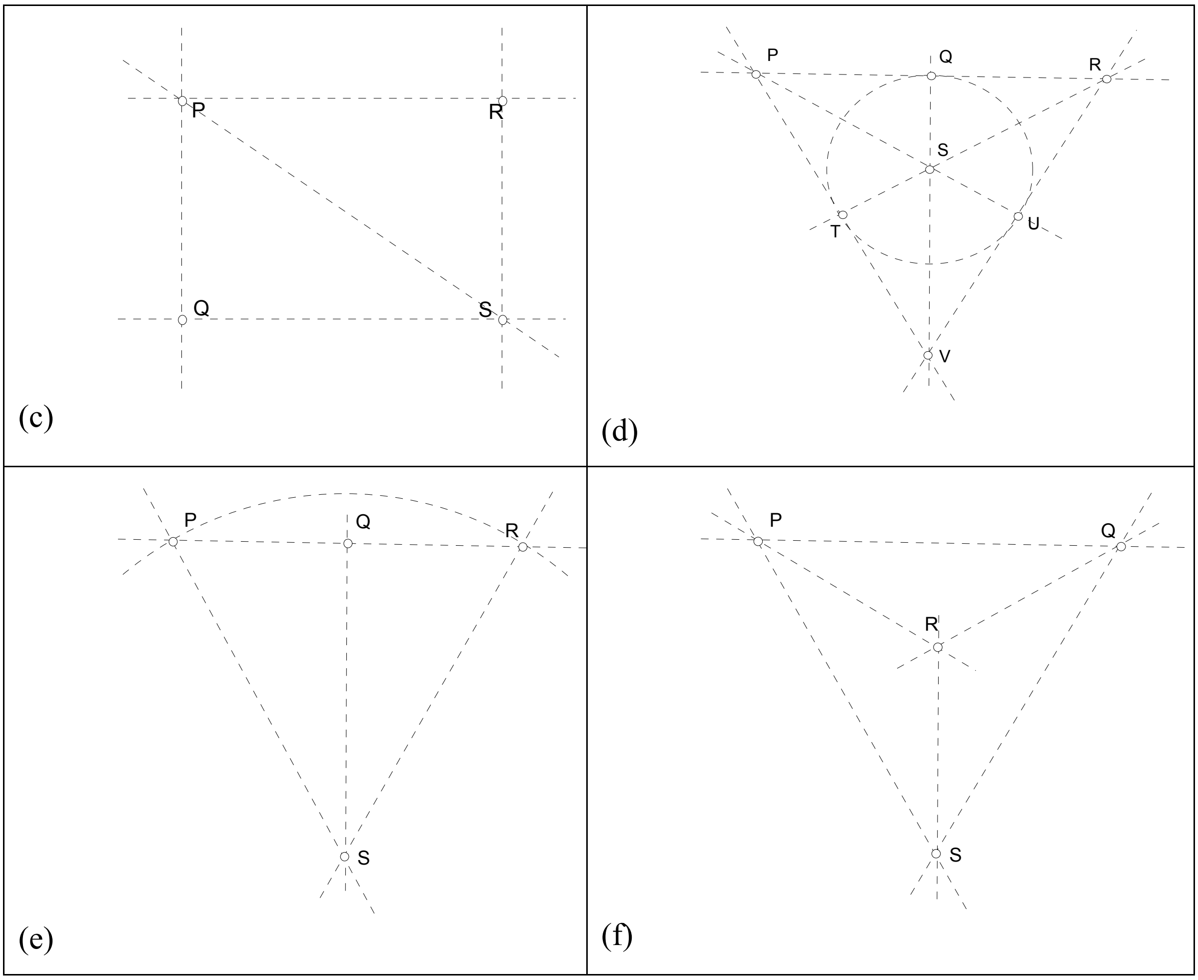


Figura 2.2 – Geometrias finitas - exemplos

Atendendo à definição de Geometria Abstracta, apenas os exemplos apresentados em (d), (e) e (f) são modelos de Geometria Abstracta.

A visualização de diagramas, ilustrativos de modelos de geometria finita, parece ser um veículo através do qual os alunos elaborarão raciocínios em relação à identificação de exemplos de Geometria Abstracta.

2.4. Geometria Incidente: Modelos

Por **Geometria Incidente** designamos uma Geometria Abstracta $\mathcal{A}= \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ que satisfaz os axiomas:

(i) Quaisquer dois pontos de $\mathcal{P}$ estão sobre uma única recta.

(ii) Existem três pontos A, B, C $\in \mathcal{P}$ que não estão todos sobre uma mesma recta.

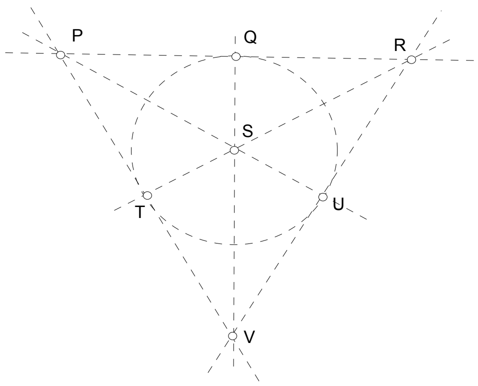
O segundo axioma da definição de geometria incidente pode ser enunciado em termos do conceito de conjunto colinear. Um conjunto de pontos $\mathcal{P}$ diz–se colinear se existe uma recta ℓ tal que $\mathcal{P} \subset \ell$. No caso de um conjunto de pontos $\mathcal{P}$ não ser colinear, $\mathcal{P}$ diz-se não colinear. Assim, o axioma (ii) pode ter o seguinte enunciado:

- Existe um conjunto de três pontos não colinear.

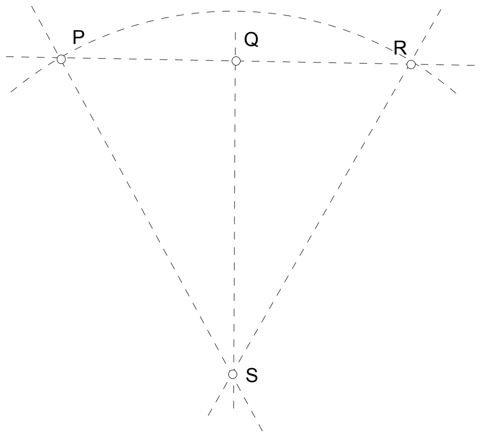
A noção de conjunto colinear, por vezes e abusivamente, em vez de conjunto de pontos colinear falamos em pontos colineares, é uma noção que é abordada na escolaridade básica e que ao nível de um ensino secundário é estudada numa variedade de situações, numa variedade de modelos de geometria.

São exemplos de modelos de Geometria Incidente: O Plano Cartesiano $\mathcal{C}$ e o Semi -Plano de Poincaré $\mathcal{H}$. A esfera de Riemann é um exemplo de uma geometria abstracta que não é incidente.

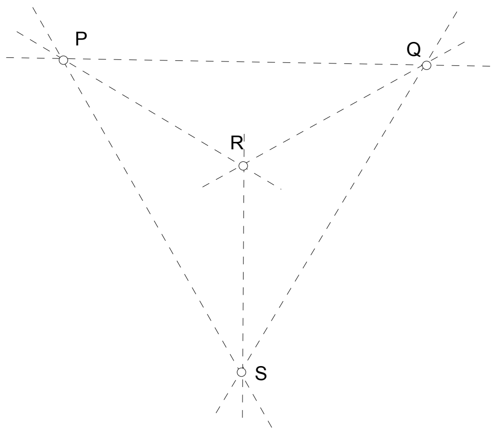
Novamente o recurso a geometrias finitas pode constituir um bom cenário para a exploração de mais exemplos (apresentados na tabela 2.1).

 (a)	Geometria finita formada por sete pontos e sete rectas[10], em que **P, Q, R, S, T, U, V são os únicos pontos** e **{P, Q, R}, {P, T, V}, {R, U, V}, {P, S, U}, {Q, S, V}, {T, S, R}, {T, U, Q} são as únicas rectas.** *É uma geometria incidente.*

[10] Plano de Fano.

<table>
<tr>
<td>

(b)</td>
<td>Geometria finita formada por quatro pontos e cinco rectas. Em que P, Q, R, S são os únicos pontos e {P, R}, {P, S}, {S, R}, {Q, S}, {P, Q, R} são as únicas rectas.

Não é uma geometria incidente.</td>
</tr>
<tr>
<td>

(c)</td>
<td>Geometria finita formada por quatro pontos e seis rectas em que P, Q, R, S são os únicos pontos e {P, S}, {P, Q}, {Q, S}, {P, R}, {Q, R}, {R, S} são as únicas rectas.

É uma geometria incidente.</td>
</tr>
</table>

Tabela 2.1 – Exemplos de geometrias finitas

Numa geometria abstracta, duas rectas ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas e escrevemos $\ell_1 \,||\, \ell_2$ se não existir nenhum ponto incidente simultaneamente às duas rectas. No contexto dos modelos com que iremos trabalhar, esta noção pode ler-se do modo seguinte: Duas rectas são paralelas se $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$.

Afim de facilitar a leitura, a partir deste momento e apesar de estarmos a trabalhar em modelos de geometrias, referir-nos-emos a estes como geometrias.

Um dos teoremas a propor aos alunos poderia ser o seguinte:

Teorema: Sejam ℓ_1 e ℓ_2 rectas de uma Geometria Incidente. Se $\ell_1 \cap \ell_2$ tem dois ou mais pontos então $\ell_1 = \ell_2$.

Deste teorema deduz-se de imediato o seguinte corolário,

Corolário: Numa Geometria Incidente, duas rectas são paralelas ou se intersectam num único ponto.

Como exemplos de situação-problema, sobre "relação de paralelismo", poderão considerar-se:

Problema: No Plano Cartesiano, encontre (caso seja possível) todas as rectas paralelas à recta vertical L_6 e que passam pelo ponto de coordenadas (0,1).

Problema: No Semi-Plano de Poincaré, encontre (caso seja possível) todas as rectas paralelas à recta ${}_6L$ que passam pelo ponto de coordenadas (0,1).

2.5. Geometria Métrica: Modelos

Após a exploração de modelos de Geometria Incidente, poderá seguir-se para o estudo de uma outra estrutura de geometria plana, a Geometria Métrica.

Será pois necessário recorrer à noção de função distância.

Definição: Uma função $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to R$, sendo $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ uma Geometria Incidente, diz-se uma função distância se satisfaz:

(i) $d(P,Q) \geq 0$,

(ii) $d(P,Q) = 0$, se e só se $P = Q$;

(iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$.

Pode provar-se que as funções,

(1) $d_E : R^2 \text{x} R^2 \to R$

$((x,y), (u, v)) \to d_E = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$

(2) $d_T : R^2 \text{x} R^2 \to R$

$((x,y), (u, v)) \to d_T = |x-u| + |y-v|$

e

(3) $d_H : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$((x,y),(u,v)) \to d_H = \left|\ln\left(\frac{y}{u}\right)\right| \text{ se } x = u \text{ ou } d_H = \left|\ln\left(\frac{\frac{x-c+r}{y}}{\frac{u-c+r}{v}}\right)\right| \text{ se } x \neq u$$

São funções distância respectivamente, no Plano Cartesiano (os casos (1) e (2)) e no Semi – Plano de Poincaré (caso (3)). A estas funções dá-se a designação, respectivamente, de distância Euclidiana, distância do Motorista de Táxi e distância hiperbólica.

O conceito de *Régua* numa Geometria Métrica

Consideremos uma Geometria Incidente $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ e suponhamos que existe uma função distância d em $\mathcal{P}$. A função f: $\ell \to R$ diz-se uma régua para ℓ se:

(i) f é uma bijecção;

(ii) Para cada par de pontos P e Q em ℓ, $|f(P) - f(Q)| = d$ (P,Q).

Esta equação designa-se de **Equação da Régua** e f (P) designa-se a *coordenada* de P em relação a f e à recta ℓ.

Esta altura seria ideal para se propor aos alunos problemas envolvendo o conceito de régua. Vejamos um exemplo.

Problema: Sendo $L_{2,3}$ uma recta não vertical do Plano Cartesiano com a distância Euclidiana, mostre que f: $L_{2,3} \to R$ com f(x, y) $= \sqrt{5}\,x$ é uma régua para ℓ e encontre a coordenada de R = (1, 5) em relação a f e à recta $L_{2,3}$.

Dizemos que uma Geometria satisfaz o **Postulado da régua** se toda a recta dessa geometria possuir uma régua.

Segundo o Postulado da Régua, os pontos de uma recta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, isto é:

(i) A cada ponto da recta corresponde exactamente um número real;

(ii) A cada número real corresponde exactamente um ponto da recta;

(iii) A distância entre dois pontos quaisquer é definida como sendo o valor absoluto da diferença das suas coordenadas.

Uma **Geometria Métrica** $\mathcal{M}$ é uma geometria incidente munida de uma função distância que satisfaz o Postulado da Régua.

Pode mostrar-se que as funções,

$f_a : L_a \to R$; $g_{m,b} : L_{m,b} \to R$

$P(a, y) \to y$ $P(x, y) \to x\sqrt{1+m^2}$

Constituem réguas no Plano Cartesiano ditas réguas *standard*.

Deve referir-se, exemplificando, que um ponto pode pertencer a mais do que uma recta e poderá ter diferentes "coordenadas" (dependendo das várias réguas utilizadas).

São exemplos de Geometria Métrica, o Plano Cartesiano com a distância Euclidiana d_E, o Plano Cartesiano com a distância do Motorista de Táxi d_T e o Semi–Plano de Poincaré com a distância d_H.

A constatação de que partindo de uma mesma Geometria Incidente (Plano Cartesiano) e tomando duas funções distâncias diferentes se obtêm geometrias métricas diferentes, tem por objectivo permitir aos alunos a familiarização com uma diversidade de modelos de geometria em contraponto com o estudo de apenas um modelo de geometria (o modelo Euclidiano).

Em síntese, apresente-se a tabela seguinte,

Modelo	Tipo de recta	Régua standard
Plano Euclidiano	$L_a = \{(a, y) \mid y \in R\}$ $L_{m,b} = \{(x, y) \in R^2 \mid y = mx + b\}$	$f((a, y)) = y$ $f((x, y)) = x\sqrt{1+m^2}$
Semi- Plano de Poincaré	$_aL = \{(a, y) \in H \mid y>0\}$ $_cL_r = \{(x, y) \in H \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2\}$	$f(a,y) = \ln y$ $f(x, y) = \ln\left(\frac{x-c+r}{y}\right)$
Plano do Motorista de Táxi	$L_a = \{(a, y) \mid y \in R\}$ $L_{m,b} = \{(x, y) \in R^2 \mid y = mx + b\}$	$f((a, y)) = y$ $f((x, y)) = (1 + \lvert m\rvert)\, x$

Tabela 2.2 – Modelos de geometria métrica

Parece oportuno referir que a abordagem do conceito de função distância facilita a apresentação da definição de *estar entre*[11].

Sendo {A, B, C} um conjunto colinear de pontos duma geometria métrica {P, L, *d*}, se $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, diz-se que o ponto B ***está entre*** os pontos A e C e escrevemos A –B –C .

Relativamente ao conceito de *estar entre,* deve referir-se que este requer que os três pontos pertençam à mesma recta. Este requisito pode ser explorado, pedindo aos alunos para, na geometria do Motorista de Táxi, indicarem pontos não colineares que satisfaçam a igualdade d_T(A, C) = d_T(A, B)+ d_T(B, C).

Nesta altura, seria importante frisar que nem todas as Geometrias Incidentes são Métricas. Por exemplo, qualquer geometria finita incidente não é Métrica.

2.6. Geometria de Pasch: Modelos

Dando continuidade à mesma metodologia de trabalho, pode fazer-se referência a outras geometrias planas com a anexação de novos axiomas. Vamos agora considerar o Axioma da Separação do Plano (ASP), o qual reflecte a ideia intuitiva de toda a recta ter "dois lados".

Sejam $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ uma geometria métrica e $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$. O conjunto $\mathcal{P}_1$ diz-se *convexo* se para quaisquer pontos P e Q $\in \mathcal{P}_1$ o segmento [PQ] é um subconjunto de $\mathcal{P}_1$.

O conceito de convexidade é um conceito familiar aos alunos desde a escolaridade básica envolve a noção de segmento, o conceito de *estar entre* e o conceito de distância.

Uma geometria métrica $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ satisfaz o **Axioma da Separação do Plano** (ASP) se para cada recta $\ell \in \mathcal{L}$ existem dois subconjuntos H_1 e H_2 de $\mathcal{P}$ (designados de *semi – planos* determinados por ℓ) tal que

(i) $\mathcal{P} - \ell = H_1 \cup H_2$.

(ii) H_1 e H_2 são disjuntos e cada um é um subconjunto convexo.

(iii) Se $A \in H_1$ e $B \in H_2$ então $[AB] \cap l \neq \varnothing$, onde *[AB]* designa segmento de recta de extremos *A* e *B*.

---

[11] O matemático alemão Pash (1882) elaborou a axiomática do referido conceito (Millmann e Parker, 1991)

Dizemos então que a recta ℓ tem dois lados (H_1 e H_2*), ambos convexos.* Além de que, por (iii), não se pode "passar" de um dos lados de ℓ para o outro sem intersectar ℓ.

Como exemplos de modelos de geometria plana que satisfazem o Axioma da Separação do Plano, devem referir-se: O Plano Euclidiano, o Semi-Plano de Poincaré e o Plano do Motorista de Táxi.

Pode mostrar-se que o Axioma da Separação do Plano é equivalente ao Postulado de Pasch, que pode ser enunciado do seguinte modo: Para qualquer recta ℓ, qualquer triângulo Δ[ABC] e qualquer ponto D $\in$ ℓ, tal que A – D – B, $\ell \cap [AC] \neq \emptyset$ ou $\ell \cap [BC] \neq \emptyset$.

Relativamente à consideração deste novo axioma, ASP, pode definir-se uma nova estrutura de geometria, a geometria de **Pasch**.

Uma geometria de **Pasch** é uma geometria métrica que satisfaz o Postulado de Pasch ou seja o Axioma da Separação do Plano.

Após a apresentação de uma nova estrutura de geometria plana, discute-se a existência de modelos. Assim, deve referir-se que existem modelos de geometria métrica onde o Axioma da Separação do Plano, ASP, não se verifica. Como exemplo, tem-se o denominado *Plano da Faixa Perdida*.

O *Plano da Faixa Perdida* é uma geometria métrica $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ onde:

$\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 \mid x < 0 \text{ ou } 1 \leq x\}$

$\mathcal{L} = \{\ell \cap \mathcal{P} \in R^2 \mid \ell \text{ é uma recta cartesiana e } \ell \cap \mathcal{P} \neq \emptyset\}$

$d: \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$ é a distância Euclidiana para quaisquer dois pontos que pertençam a uma recta vertical e, no caso dos dois pontos pertencerem a uma recta não vertical, a distância é dada por:

$$d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = |g_l(x_1, y_1) - g_l(x_2, y_2)|$$

Com $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \ell$ e a função g_l definida, a partir da régua standard f_l do plano Euclidiano, por

$$g_l(x, y) = ((f_l\ (x, y) \text{ se } x < 0) \vee (f_l\ (x, y) - \sqrt{1+m^2} \text{ se } x \geq 1))$$

2.7. Geometria do Transferidor: Modelos

A orientação que tem sido dada, neste capítulo, caracteriza-se por se ter partido de uma estrutura de geometria abstracta e se ir adicionando de forma gradual axiomas de forma a construir novas geometrias que herdam todas as propriedades das antecedentes. Dando-lhe seguimento, pode conduzir-se os alunos à adição da medida angular.

Esta secção pressupõe o conhecimento da noção de ângulo e de interior de um ângulo, começando por abordar o conceito de medida angular.

Numa geometria de Pasch, a **medida angular** (ou **transferidor**), tendo por base r_0 (com r_0 um número real positivo) é uma função m definida do conjunto $\mathcal{A}$ de todos os ângulos, para o conjunto dos números reais, tal que:

(i) Se $\angle$ ABC $\in \mathcal{A}$, então $0 < m(\angle \text{ABC}) < r_0$;

(ii) Seja $\overset{\circ}{B}C$ uma semi-recta e seja θ um número real (com $0 < \theta < r_0$), existe uma única semi-recta $\overset{\circ}{B}A$ com $m(\angle \text{ABC}) = \theta$;

(iii) Se D $\in$ int ($\angle$ ABC) então $m(\angle \text{ABD}) + m(\angle \text{DBC}) = m(\angle \text{ABC})$.

Uma **Geometria de Transferidor**, $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m\}$, é uma geometria de Pash $\{\mathcal{P}, \mathcal{L}, d\}$ com uma medida angular *m.*

A definição de medida angular nos vários exemplos de modelos que têm vindo a ser referidos - Semi–Plano de Poincaré, Plano do Motorista de Táxi - é feita com base na definição de medida angular Euclidiana.

Nesta altura, deve referir-se modelos de geometria plana, em que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo não é igual a 180^0. Com este propósito, pode mencionar-se o Semi-Plano de Poincaré (em que a soma das medidas dos ângulos de um qualquer triângulo ser inferior a 180^0) e o Plano de Moulton[12] (em que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo <u>poder ser</u> superior a 180^0).

Repare-se que a definição de Plano de Moulton envolve terminologia que já deve ser familiar a alunos do ensino secundário.

Os pontos do plano de Moulton são pontos de R^2, mas o conjunto das rectas não são $\mathcal{L}_E$.

Para m>0 designemos por:

$M_{m,b}$ = {(x,y) ∈ | (y = mx+b se x ≤ 0) ∨ (y = $\frac{1}{2}$ m + b se x > 0)}.

O modelo $\mathcal{M}$ = { R^2, $\mathcal{L}_M$, d_M } em que, $\mathcal{L}_M$ = {L a ∈ $\mathcal{L}_E$} ∪ { L m,b ∈ $\mathcal{L}_E$} ∪ { $M_{m,b}$ |

$m > 0$} e a distância d_M entre dois pontos P = (x_1, y_1) e Q = (x_2, y_2) de R^2 é dada por,

$$d_M(\mathrm{P,Q}) = \begin{cases} \mathrm{d}_{\mathrm{E}}((\mathrm{P},(0,\mathrm{b})) + \mathrm{d}_{\mathrm{E}}((0,\mathrm{b}),\mathrm{Q}) \text{ para P, Q} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,b}} \text{, com } \mathrm{x}_1 . \mathrm{x}_2 \text{ negativo} \\ \mathrm{d}_{\mathrm{E}}(P,Q) \text{ para os restantes casos} \end{cases}$$

É oportuno chamar a atenção para a definição de distância d_M ter repercussões nos resultados geométricos que se obtém, como por exemplo, não satisfazer a desigualdade triangular[13]. Este resultado deve ser abordado através da proposta do seguinte problema.

Problema: Mostre que d_M não satisfaz a desigualdade triangular.

Para a resolução deste problema poderá dar-se a seguinte orientação: Considere o triângulo [ABC] com A = (-1. 0), B = (2, 2) e C = (0, $\frac{1}{2}$) e verifique que d_M(A, B)≤ d_M(A, C) + d_M(B, C) é falsa, ou seja, não se verifica a desigualdade triangular.

A referência ao Plano de Moulton permite confrontar os alunos com resultados que lhes são familiares na geometria Euclidiana com uma formulação contrária. Como exemplos disto, temos a desigualdade triangular, já referida, e a soma dos ângulos internos de um triângulo poder ser superior a 180^0. Em relação a este último exemplo, deverá ser proposto um problema, em analogia com o que tem vindo a ser sugerido. No entanto deve,

---

[12] Este modelo de geometria foi introduzido pelo matemático americano Forest Moulton(1902).

[13] Numa geometria métrica {$\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, d }, diz-se que d satisfaz a **desigualdade triangular** se d satisfaz a seguinte condição, $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$,quaisquer que sejam $A, B, C \in \mathcal{P}$.

recorrendo a cenários visuais, apresentar-se a definição de medida angular no Plano de Moulton, a qual vai ter por base, de forma natural, a definição de medida angular Euclidiana.

Dado um ângulo $\angle$ ABC e se B não está na recta L_0, podemos escolher A′$\in$ int(BA) e C′$\in$ int(BC) tal que A′, B e C′ estejam todos do mesmo lado de L_0. Então podemos escrever que m_M ($\angle$ ABC) = m_E ($\angle$ A′BC′) (ver figura 2.3).

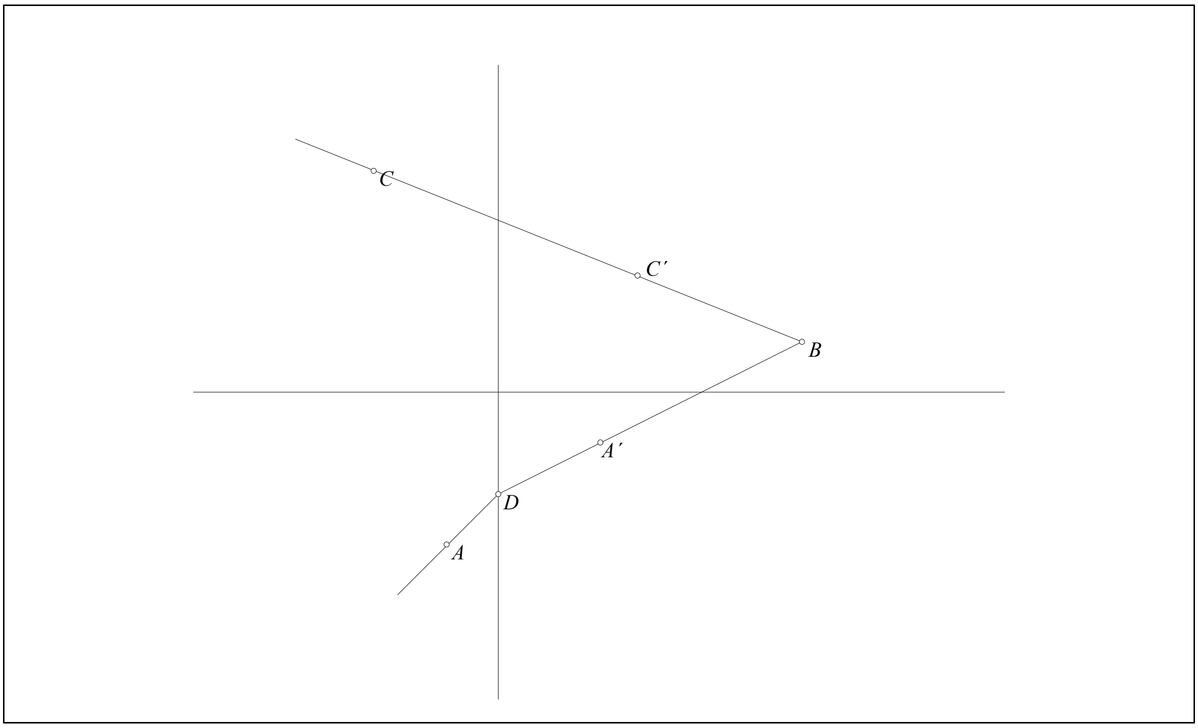


Figura 2.3 – Representação m_M ($\angle$ ABC) = m_E ($\angle$ A′BC′)

No caso de B $\in$ L_0, para cada b $\in$ R e cada P = (x, y) seja,

P_b = [(x, 2y-b) se x > 0 e y > b] $\vee$ [(x, y) se x $\leq$ 0 ou y $\leq$ b]. Então se B = (0, b) $\in$ L_0, m_M ($\angle$ ABC) = m_E ($\angle$ A_b B C_b) (ver figura 2.4).

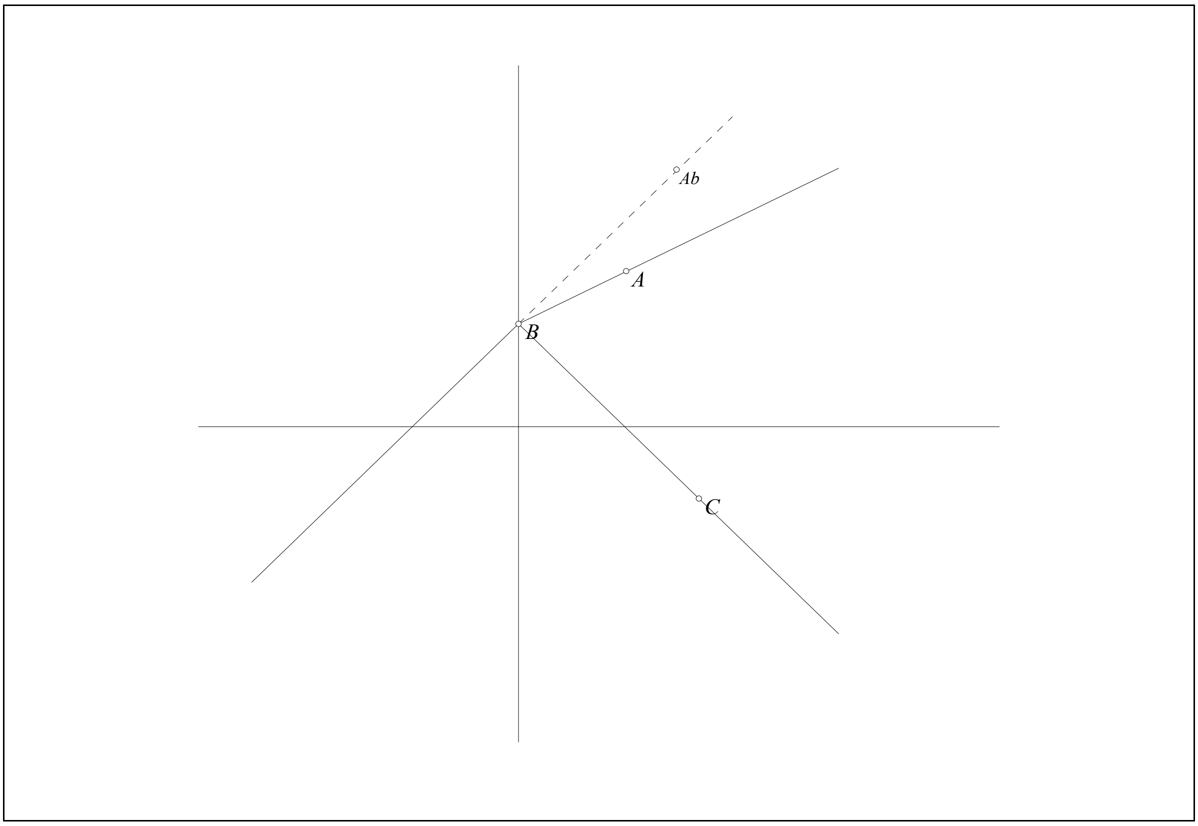


Figura 2.4 – Representação m_M (∠ ABC) = m_E (∠ A´BC´), no caso de B ∈ L_0

Após a definição de medida angular no Plano de Moulton poderá ser sugerida a resolução do seguinte problema, com recurso ao GSP.

Problema: No Plano de Moulton, considere os pontos A = (0, 5), B = (2, 6) e C =(5,0). Determine a soma das medidas dos ângulos internos do $\Delta[ABC]$.

O recurso ao GSP permite aos alunos a elaboração da construção da figura 2.5 assim como, a determinação da soma dos ângulos internos do triângulo em causa.

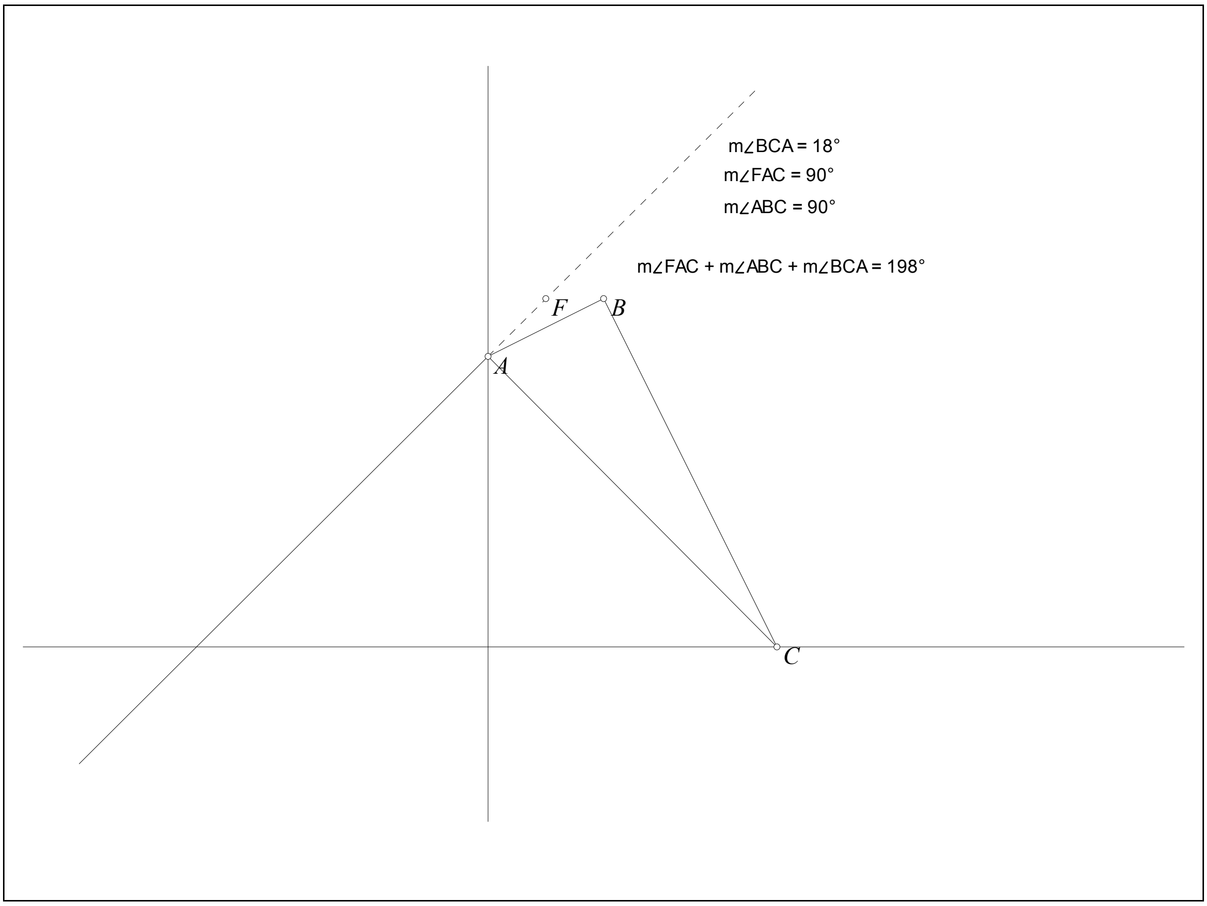


Figura 2.5 – Construção do triângulo [ABC] e determinação da soma das medidas dos ângulos internos através do GSP- menu *Measure*

O conjunto $\{ R^2, \pounds_M, d_M, m_M \}$ é uma geometria de Transferidor.

2.8. Geometria Neutra: Modelos

Considere-se uma geometria de Transferidor com um novo axioma, o axioma com a designação de Lado–Ângulo-Lado (LAL). Diz-se que uma geometria de **Transferidor** satisfaz o axioma Lado-Ângulo-Lado (LAL) se dados dois triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$, com $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ então $\Delta[ABC] \cong \Delta[DEF]$.

Este axioma é familiar a alunos desde a escolaridade básica. A ideia que têm de duas figuras geométricas serem congruentes é a destas coincidirem ponto por ponto. É habitual, na escolaridade básica, fazer-se referência a que Euclides utilizou o "método de sobreposição".

Uma **geometria Neutra**[14] (ou **geometria absoluta**) é uma geometria de ***Transferidor*** que satisfaz o axioma *LAL*.

São exemplos de Geometria Neutra: O Plano Euclidiano e o Semi-Plano de Poincaré.

A geometria do Motorista de Táxi não satisfaz o axioma – LAL, não é, portanto, uma Geometria Neutra.

Nesta altura, pode propor-se aos alunos a resolução do seguinte problema.

Problema: Considere em R^2 os pontos A = (1, 1), B = (0, 0), C = (-1, 1), E = (0, 0), X = (3, 0) e os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[DEF]$. Mostre que os dois triângulos são congruentes na geometria Euclidiana, mas não o são na geometria do Motorista de Táxi.

2.9. Sumário

As actuais orientações curriculares do estudo da geometria, ao nível do ensino secundário, como já foi referido, vão no sentido de uma abordagem diversificada que contribua para a compreensão de um sistema axiomático. No entanto, o que é actualmente preconizado talvez não seja suficientemente rico para abranger aspectos importantes da compreensão do que é um sistema axiomático, bem como aspectos relativos ao desenvolvimento do raciocínio matemático (e.g., o sentido dado a situações familiares em modelos de geometria plana diversos).

Assim, o principal objectivo do estudo de vários modelos de geometria plana é surpreender os alunos com resultados que se verificam num determinado modelo de geometria plana mas que não se verificam noutro(s) modelo(s). Por exemplo: a desigualdade triangular verifica-se no plano Euclidiano mas não se verifica no plano de Moulton.

Outra forma de tirar partido da abordagem de vários modelos de geometria plana, da forma que é sugerida neste capítulo, é implementar a noção de sistema axiomático, sem privilegiar uma orientação segundo "axiomáticas locais", onde se começa por definir uma

[14] A designação de geometria "neutra" foi introduzida por Prenowitz e Jordan (1965). Esta terminologia significa que estamos a adoptar um percurso "neutro" em relação ao *Axioma das Paralelas.*

figura e daí surja uma lista organizada de axiomas, definições, sequência de teoremas, etc. e se privilegie uma abordagem menos localizada, partindo de axiomas, definições, etc., concretizando e dando sentido a esses conceitos através de construções e explorações, recorrendo a ambientes de geometria dinâmica, dessas mesmas construções. Por exemplo, o modelo do Semi-Plano de Poincaré exibe claramente, a alunos do ensino secundário, que a negação do 5º postulado de Euclides conduz a um outro sistema axiomático.

Neste capítulo fomos construindo vários modelos de geometria plana: Começamos por uma geometria abstracta, acrescentamos os axiomas de incidência, o postulado da régua, o axioma da separação do plano e a medida angular.

A figura seguinte sintetiza os diversos tipos de geometria plana que foram sendo apresentados, enfatizando a relação entre eles. Em cada uma das geometrias apresentadas é indicado pelo menos um modelo.

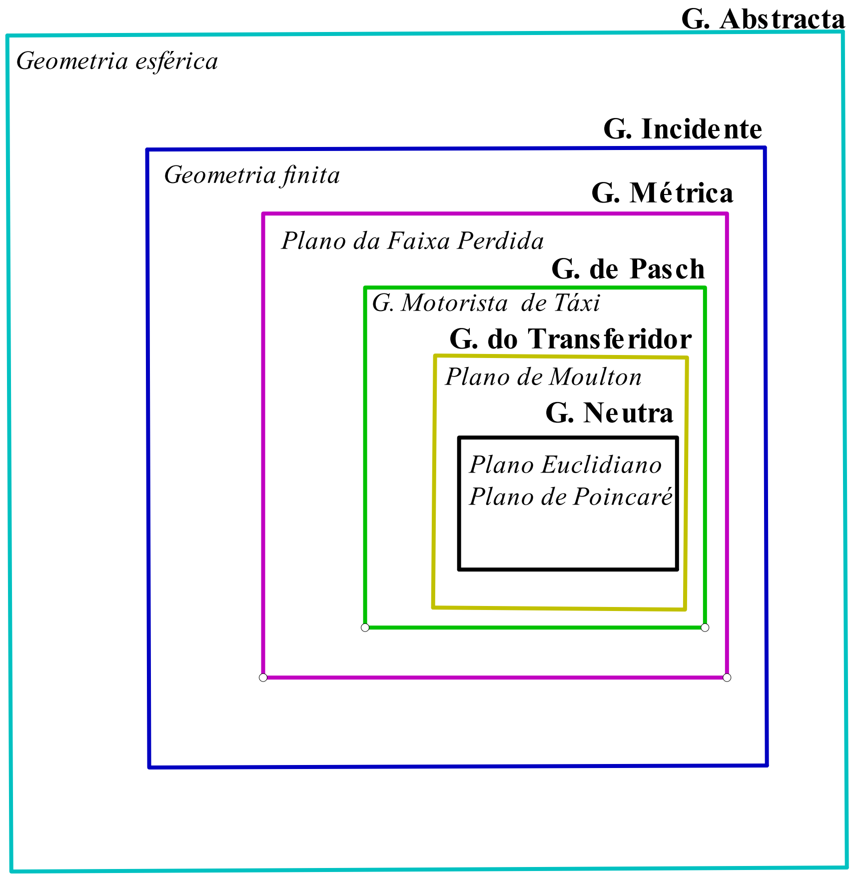


Figura 2.6 – Relação entre modelos de geometria plana

Capítulo 3

Intuição e demonstração

3.1. Introdução

O objectivo deste trabalho é o estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da geometria, no sentido de promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo estabelecendo uma boa relação com a intuição, ou seja, que a intuição promova a realização de raciocínios dedutivos, assim como o raciocínio dedutivo eduque a intuição.

Neste capítulo, é realizada uma revisão da literatura segundo as seguintes vertentes: (i) o método axiomático - Exposição da tese de Robert Blanché; (ii) o raciocínio matemático e intuição; (iii) a resolução de problemas: exploração, argumentação, demonstração; (iv) a natureza das justificações dos alunos.

3.2. O método axiomático – Exposição da tese de Robert Blanché

O filósofo Robert Blanché (1978), no seu livro L´axiomatique, apresenta e desenvolve ideias relativas à filosofia do conhecimento, com especial destaque para o papel da axiomática e algumas delas merecem especial destaque para este trabalho.

A oposição entre razão e experiência (as ideias e os factos, o pensamento e as "coisas", o conhecimento e o ser, o inteligível e o sensível, o abstracto e o concreto, etc.) é uma das múltiplas formas, segundo este filósofo citando Whewell, de manifesto da "antítese fundamental da filosofia".

A questão *"Qual a ligação entre o lógico e o intuitivo?"* conduz a um tema de reflexão filosófica – *o método axiomático*. O método axiomático não é apenas um procedimento técnico dos matemáticos, nele poderemos encontrar uma ilustração, particularmente sugestiva, de como se processa o pensamento científico. Ao aplicar-se as noções que a axiomática utiliza revela-se um modelo de operações cognitivas sobre o qual se pode experimentar uma leitura abstracta. Assim, não se pode dar um sentido absoluto aos termos da antítese – concreto e abstracto – considerando que os seus limites mudam constantemente.

Não é somente no interior da geometria que se observa uma certa ruptura entre o racional e o experimental, a lógica e o intuitivo. O desdobramento criado pela axiomática acontece em todas as ciências ou pelo menos em todas suficientemente avançadas para apresentar uma organização dedutiva.

Para um axiomático, a geometria clássica revela-se intuitiva, enquanto que para os alunos aparece como uma criação da razão. Os dois termos da antítese – concreto e abstracto – só são entendidos na sua relação, ou seja, têm um sentido de par com uma tensão característica entre dois pólos opostos.

Da geometria de Hilbert pode ir-se para a de Euclides e desta para outras mais primitivas, indo na direcção do concreto. No entanto, nunca atingiremos o concreto puro privado de toda ou qualquer conceitualização. Um qualquer fenómeno concreto (concreto puro) não é mais do que uma sensação passiva. Neste aspecto, a crítica das ciências está em concordância com a crítica da psicologia, qualquer conhecimento abstracto só o é provisoriamente, ele nunca é pensado sozinho, nunca é apresentado ao indivíduo da mesma forma que é apresentado um "quadro". Surge como uma realização dentro de um modelo simbólico. Blanché refere alguns exemplos: para pensar, efectivamente, sobre o vazio é preciso representá-lo por qualquer símbolo (e.g., $\{\ \}$, $\varnothing$, nada); para pensar uma estrutura abstracta é preciso dar-lhe, no papel, alguma forma concreta. O pensamento transcende o sistema de símbolos, situa-se acima dele para o "agarrar" como tal, como um sistema de símbolos. Mas sem ele perde-se na indeterminação. Esta tensão bipolar, que é a condição de todo o conhecimento, surge com uma particular precisão no pensamento axiomático.

As noções um pouco vagas da teoria do conhecimento (e.g., conceito e intuição) são definidas na correlação estabelecida entre a estrutura abstracta e a realização concreta entre esquema e modelo. Este movimento, tendo em consideração a sua correspondência; esclarece-as mutuamente, permitindo a circulação entre dois planos - elevar-se do *facto* à *ideia* e descer da *ideia* ao *facto*, esclarecer com a regra e ilustrar com o exemplo.

Para Blanché, é neste duplo movimento que se resume todo o conhecimento e onde a axiomática nos traz, precisamente, um dos exemplos onde melhor se percebe a regra.

A filosofia do conhecimento que é sugerida pela axiomática é um racionalismo que não se ousa chamar empírico, uma vez que estas designações são habitualmente consideradas opostas, mas que pelo menos se poderá qualificar de indutivo ou experimental.

Para o matemático Poincaré, a intuição é falível, uma súbita iluminação que esteja na base de uma descoberta matemática pode tornar-se falsa quando submetida a um exame lógico. Assim, na construção das leis matemáticas, a intuição e a lógica interactuam, uma no processo de invenção e outra na sua verificação.

Para o matemático estruturalista Dieudonné, J., o método de validação de proposições matemáticas é certamente uma prova dedutiva. Neste sentido, a base para se aceitar uma proposição está nos axiomas aceites. Estes ajudam a reorganizar o conhecimento matemático e desempenham um papel importante na compreensão e no desenvolvimento das intuições.

Segundo Wittgenstein (1998), as proposições matemáticas devem entender-se como "ferramentas", como regras de transformação. Por exemplo, os teoremas geométricos são regras para enquadrar descrições de formas de objectos, das suas relações espaciais e para se fazer inferências sobre elas. Este filósofo argumenta que deveríamos entender a linguagem matemática como uma "ferramenta" e deveríamos considerar as palavras como ferramentas e clarificar o seu uso nos nossos jogos de linguagem.

3.3. Raciocínio matemático e intuição

O trabalho de Efraim Fischbein, E. (1999) constitui um dos exemplos de estudos realizados que marcam a crescente preocupação, na educação matemática, com questões relativas à ligação entre a intuição e o raciocínio matemático:

"*As intuições são definidas como conhecimentos que aparecem subjectivamente por serem auto-evidências, imediatas, certas, globais, coercivas. Os esquemas estruturais são planos behavioristas-intelectuais que tornam possível a apropriação e interpretação da informação e as adequadas reacções a vários estímulos. Os esquemas estruturais são caracterizados pela sua relevância para um comportamento adaptado"* (ibid., p.11).

A principal tese presente no trabalho deste investigador é a de que as intuições são, de uma forma geral, baseadas em esquemas estruturais e de que a transição destes últimos para as intuições é conseguido através de um processo particular de compreensão. Sobre a natureza intuitiva do conhecimento, refere a posição de vários filósofos. Vejamos alguns exemplos. Para Descartes (1967) e Spinoza (1967), a intuição é apresentada como uma espécie genuína de conhecimento verdadeiro; Kant (1980) distingue intuição de compreensão. A intuição é descrita como a faculdade através da qual os objectos são directamente conhecidos e a compreensão conduz ao conhecimento conceptual.

O mesmo investigador refere que a intuição[15], sendo uma espécie de conhecimento directo, auto – evidente, é a propriedade mais saliente do conhecimento intuitivo.

3.3.1. Características gerais do conhecimento intuitivo

No sentido de promover a compreensão do seu papel no processo de raciocínio matemático, Fischbein, E. (1999) descreve as seguintes características gerais do conhecimento intuitivo:

- *Directo, auto-evidente.*Significa que é aceite sem o sentimento de ser necessário um exame mais detalhado ou uma demonstração.

[15] Para Fischbein, E. (1999), o termo intuição" é utilizado da mesma forma como utilizamos termos matemáticos primitivos, tais como, ponto, linha, etc., ….O significado de intuição é associado a auto – evidência que é oposto a um processo lógico – dedutivo (p.12).

- *Certeza intrínseca*. O conhecimento intuitivo é usualmente associado ao sentimento de certeza, de convicção intrínseca (não requer suporte externo para se ter esta espécie de convicção – formal ou empírica).

- *Coercivo*. As intuições exercem um efeito coercivo quer nas estratégias de raciocínio de um indivíduo quer na selecção de hipóteses e soluções. Isto significa que um indivíduo tem tendência a rejeitar interpretações alternativas que contradigam as suas intuições.

- *Estendível.* Uma importante propriedade do conhecimento intuitivo é a sua capacidade de extrapolar para além de qualquer suporte empírico. Por exemplo, a afirmação “ Por um ponto exterior a uma linha recta, passa uma e uma só recta paralela à dada” expressa a capacidade de extrapolar, pois, esta afirmação não é suportada por nenhuma demonstração.

- *Globalidade.* O conhecimento intuitivo é global em oposição ao conhecimento logicamente conseguido, o qual é sequencial e analítico.

Ao analisar, com base no legado de Fischbein, E., o tópico *intuição e demonstração,* Mariotti, M. (1998) considera que, da mesma forma que é impossível conceber uma teoria vazia de significado intuitivo, também é impossível conceber a matemática sem uma organização teórica. Axiomas, definições e teoremas tais como modelos e ideias constituem a matemática. No entanto, a intuição e a teoria podem estar distantes e até em dois pólos que conflituam e serem de difícil conciliação.

Esta investigadora, reflectindo sobre a relação entre uma abordagem intuitiva e uma abordagem teórica, procede a uma análise das relações existentes entre teoremas (enunciado, demonstração e teoria) e a intuição reconhecendo duas direcções opostas:

- *O enunciado de um teorema expressa as relações implícitas entre os princípios assumidos na teoria, as condições estabelecidas por hipótese e a tese do teorema. Fazendo estas relações, que são implícitas, explícitas a um nível intuitivo, constitui o primeiro passo da construção de uma argumentação, o qual, enquadrado por uma teoria, pode constituir uma demonstração.*

- *Por outro lado, um teorema representa uma peça de conhecimento e como tal deve ser apropriado pelos alunos, ou seja, um teorema deve adquirir o status de uma intuição, no sentido de ser utilizado por um raciocínio produtivo. Mas isto só pode ocorrer se for estabelecida uma unidade entre o enunciado do teorema e a sua demonstração. Citando*

Fischbein, E. (1982), o enunciado e a demonstração, de um teorema, devem estar condensados num conhecimento intuitivo. (p.2)

A intuição envolvida no estabelecer do enunciado ou na realização da demonstração é diferente e pode ser entendida a vários níveis:"(i) *a verdade de um enunciado; (ii) a estrutura da demonstração: a necessidade de uma articulação lógica entre as etapas da demonstração; (iii) a validade (generalidade) de um enunciado como uma necessidade imposta pela demonstração"* (ibid. p.3).

A articulação entre o primeiro e o segundo nível representa um ponto crucial na elaboração da demonstração: a incerteza pode comprometer a exploração de motivações e o início de um processo de argumentação. O segundo nível é a junção do primeiro com o terceiro. De facto, tendo em consideração que a estrutura numa demonstração corresponde a colocar o enunciado do teorema dentro de um quadro de referência de intuições coerente, que possa garantir a sua evidência, necessidade e completa acessibilidade. Isto conduz ao *status* de "*crença cognitiva".* Finalmente, isto conduz um teorema a uma unidade do enunciado e da demonstração, concentrado numa nova intuição e torna-se um instrumento intelectual produtivo:

"*…The logical form of necessity which characterises the strictly deductive concatenation of mathematics proof can be joined by an internal structural form of necessity which is characteristic of an intuitive acceptance"* (Fischbein, E., 1982, p.15).

3.3.2. Conceito de *esquema*

As intuições são resistentes à mudança e a principal razão é que as intuições dizem respeito a sistemas bem estruturados do nosso comportamento cognitivo, da nossa actividade adaptativa. Por esta razão, uma intuição não pode ser mudada como uma "ferramenta" mental isolada.

Para Fischbein, E. (1999), as intuições mudam juntamente com o sistema adaptativo ao qual elas pertencem. O mesmo autor identifica duas principais interpretações do significado de sistema adaptativo[16], nomeadamente, e a mais usual, uma espécie de

[16] O sistema adaptativo refere-se, na literatura cognitiva, a *esquema.*

representação condensada, simplificada, de uma classe de objectos ou procedimentos e uma segunda interpretação, a designação de *esquema* expressa o ponto de vista de Piaget, no que toca ao comportamento adaptado de um organismo. De acordo com Piaget, um comportamento adaptado consegue-se através de dois aspectos básicos constitutivos: acomodação e assimilação.

A principal diferença entre as duas interpretações é a de que, na primeira, um esquema é, limitado, específico, é uma "ferramenta" de decisão, enquanto na segunda interpretação, desempenha uma função adaptativa nos nossos comportamentos cognitivos. Nesta segunda interpretação, um *esquema* representa uma pré condição, dependendo da forma como um indivíduo é capaz de integrar informação e responder adequadamente a uma classe de estímulos. Desta forma, um *esquema* depende quer da maturação intelectual do indivíduo quer de uma quantidade suficiente de treino.

Fischbein, E. (1999), tendo por base vários significados que a designação de *esquema* pode assumir, apresentou a seguinte definição, tentando sintetizar essa variedade de significados:

"*Um esquema é um programa que permite ao indivíduo: a) verificar (demonstrar), desenvolver, organizar e integrar mentalmente informação; b) reagir de forma significativa e eficiente ao estímulo do meio envolvente* " (p. 39).

Na definição anterior, o conceito de *programa* implica que o esquema consiste numa sequência de passos que conduzem a um determinado objectivo. Por exemplo, uma estratégia para resolver determinado problema constitui um *esquema*, porque é um *programa* que permite ao indivíduo "lidar" de forma eficiente com determinada situação.

Um esquema estrutural unifica um princípio com um programa de acção. (Por exemplo: esquema de classificação, relação de ordem, demonstração, …).

Um esquema específico, também designado por *esquema de acção,* tem uma natureza sequencial onde a seguimento das acções é mais evidente. Por exemplo: a sequência adoptada em determinado cálculo numérico; a sequência de procedimentos para resolver uma certa classe de problemas; os processos mentais através dos quais identificamos um objecto matemático – figura geométrica, uma equação, uma função, ….

O *esquema*, de acordo com o referido, é um programa de interpretação e de acção. O que estas duas categorias cognitivas têm em comum é o seu papel essencial nos processos adaptativos, as suas profundas ligações com as capacidades estruturais de um indivíduo.

O fenómeno de compressão parece ter um papel fundamental nos mecanismos de intuição. Podemos assumir que, de uma forma geral, a transição de um *esquema*, que é um processo sequencial, para uma intuição, que é global, aparentemente rápida, é conseguida por um processo de compressão[17], um processo de síntese.

Este autor, a propósito do processo de compressão, citando Thurston, escreve:

" A Matemática é incrivelmente sintética: podemos trabalhar durante um certo tempo, passo a passo e segundo várias abordagens, um determinado tema ou processo mas até o termos compreendido e termos uma visão dele como um todo existe uma tremenda compressão mental." (p. 48)

Esta compressão, esta síntese, não conduz, necessariamente, a uma intuição: símbolos, fórmulas, teoremas, representam entidades matemáticas comprimidas que, usualmente, não têm um significado intuitivo. Por outro lado, uma intuição é, geralmente, o efeito de uma compressão, se um esquema estrutural está por detrás deste conhecimento.

De acordo com o que acabámos de ver, um esquema estrutural pode não ser o adequado. O processo de compressão para o qual o esquema é o objecto pode conduzir a uma intuição, mas não significa que seja à correcta.

3.3.3. Raciocínio geométrico

Duval, R. (1998) refere que a geometria envolve três espécies de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas:

- Processos **de visualização** tendo em consideração a *representação espacial* para a ilustração e demonstração, para a exploração heurística de uma situação complexa, para uma vista de olhos sinóptica, ou para uma verificação subjectiva;

[17] Tradução de compression process.

- Processos **de construção** com recurso a ferramentas: construção e configuração podem funcionar como um *modelo* em que as acções representativas e os resultados observados estão relacionados com os objectos matemáticos que estão representados;
- Processos de **raciocínio** em relação aos *processos discursivos* para alargamento dos processos de conhecimento, para demonstração e para interpretação.

Estes processos diferentes podem ser realizados separadamente. Assim, a visualização não depende da construção, isto é, aceder a figuras qualquer que seja o seu modo de construção. E mesmo se a construção precede a visualização, os processos de construção dependem apenas das conexões entre as propriedades matemáticas e os constrangimentos técnicos das ferramentas. Por último, se a visualização é uma ajuda intuitiva que é necessária para encontrar uma demonstração, o raciocínio depende exclusivamente do corpus das proposições (definições, axiomas, teoremas) que estão disponíveis. E nalguns casos a visualização pode iludir ou ser impossível.

Contudo, estas três espécies de processos cognitivos estão intimamente ligados e a sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência na geometria.

Na figura seguinte, cada seta representa o modo como uma espécie de processo cognitivo pode suportar outra espécie em qualquer tarefa. A seta 2 está tracejada porque nem sempre a visualização ajuda o raciocínio. A seta 5(B) dá ênfase a que o raciocínio B se pode desenvolver de forma independente.

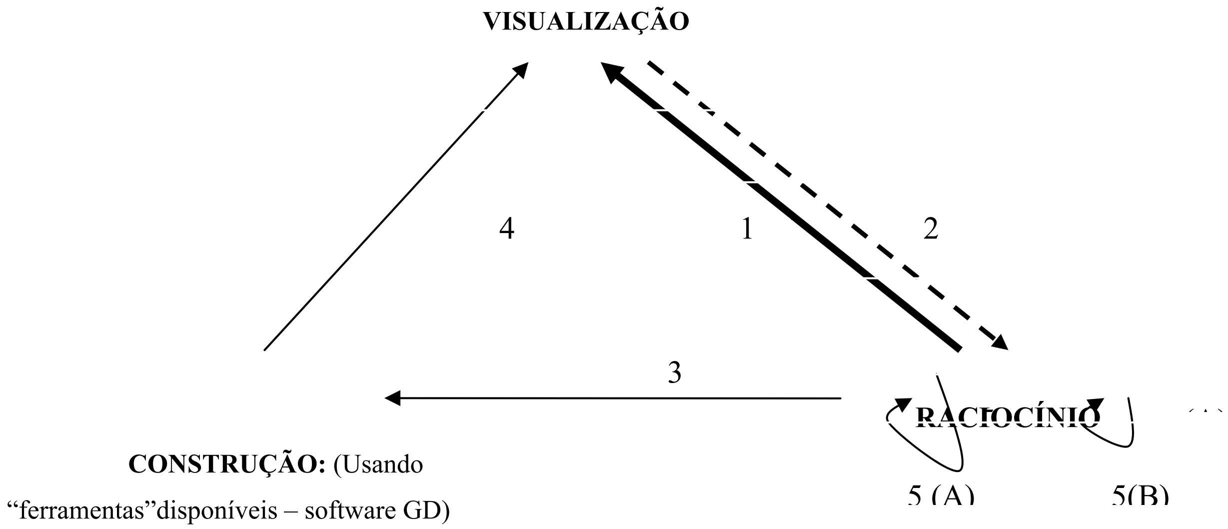
Em muitas situações, pode verificar-se um circuito bem longo. Por exemplo: 2-5(B)-3 pode representar o modo da descoberta da ordem de construção de uma dada figura; 4-2-5(A) ou 5(B) pode representar modos de descrever uma certa ordem de construção.

A investigação de Duval, R. permitiu identificar os seguintes aspectos:

1. As três espécies de processos devem desenvolver-se separadamente;
2. Trabalhar de forma diferenciada entre os diferentes processos de visualização e entre os diferentes processos de raciocínio é necessário no currículo, porque há diferentes maneiras de ver uma figura, da mesma maneira que há várias espécies de raciocínio.

A coordenação destas três espécies de processos podem realmente ocorrer depois deste trabalho de diferenciação.

Identificação de gestalts (formas ou figuras no seu todo) e configurações em 2D ou 3D. Esta identificação depende de leis particulares que são independentes do modo de construção ou do discurso



(A) Discurso natural (interno e externo) para nomear, descrever ou argumentar
(B) Organização dedutiva do discurso (recurso a proposições, definições, teoremas, …)

Figura 3.1- As interacções cognitivas fundamentais envolvidas na actividade geométrica

3.3.4. Implicações ao nível da didáctica

Ao analisar a relação entre intuição e demonstração e suas implicações ao nível didáctico, Mariotti (1998) considera que a natureza da demonstração contrasta com o procedimento de aceitação de um determinado enunciado, com base na verificação factual. Segunda esta investigadora, as práticas escolares desvalorizam as dificuldades relacionadas com a discrepância entre um procedimento prático e teórico. Esta discrepância pode ser atribuída, em parte, ao facto dos alunos serem confrontados com tarefas onde lhes é solicitada a reprodução e/ou seguimento da demonstração de um enunciado (teorema, propriedade, …), ou a demonstração de um enunciado que para eles é auto evidente, em que não sentem a necessidade de o justificar.

Numa linha de trabalho semelhante, Fischbein, E. (1999) afirma que os alunos dificilmente reconhecem que um resultado aceite intuitivamente tenha de ser formalmente justificado.

Este investigador introduz a ideia da intuição poder constituir um obstáculo, quando a auto evidência, o sentimento de certeza, de determinado enunciado inibe a elaboração de uma estrutura analítica " passo a passo", uma demonstração.

Mariotti (1998), ao comentar resultados de investigação, refere que as situações problema que preferencialmente envolvem a elaboração de conjecturas, por parte dos alunos, são um contexto favorável à abordagem da demonstração e escreve:

" O processo de elaboração de conjecturas é essencial para iniciar os alunos nas práticas de argumentação. Mas, isto não é suficiente, a unidade entre o enunciado, a demonstração e a teoria não deve ser quebrada, o que requer a construção de redes complexas entre princípios estabelecidos e suas consequências. A preservação desta unidade, mantém a ligação com o nível intuitivo, condição básica para a produção autónoma de teoremas e o seu uso no raciocínio matemático." (p. 4)

Mais recentemente, tem vindo a desenvolver-se uma série de estudos que procuram identificar as potencialidades dos ambientes computacionais na familiarização dos alunos com a natureza formal da matemática (e.g., Laborde, C., 1998, Duval, R., 1998, Tall, D., 2000). Na sua maioria, estes estudos procuram relacionar o recurso à tecnologia (e.g., programas de geometria dinâmica) com o desenvolvimento cognitivo dos alunos e com o pensamento matemático estruturado.

No campo da educação matemática, a este propósito, identificam-se duas visões. Enquanto que alguns educadores matemáticos defendem que a nova tecnologia traz novos objectivos e novo currículo outros, por seu lado, não consideram a relação do currículo de geometria e o computador. De acordo com a primeira visão, os computadores são vistos como constituintes de uma nova cultura, envolvendo novos modos de trabalho e de vida, o que apela à sua integração nas escolas. E como as capacidades gráficas se tornam mais acessíveis e poderosas, os alunos "fazem" geometria de forma diferente, confiando profundamente nas figuras e nos gráficos.

Partindo da ideia de que "*o computador pode constituir um valioso meio para a visualização de situações geométricas, através das suas capacidades de animação de figuras e de construção*", Osta, I. (1998) refere que estas funções transformativas (demonstrativas) conduzem a uma ênfase no papel funcional do computador como ferramenta exploratória, considerando a intuição, a construção, e o sentido espacial, factores muito importantes, mas também proporcionando maneiras de ligar estes factores aos aspectos teóricos.

Em relação à questão: *Como poderá o status da demonstração geométrica ser afectada pela evidência visual?* Parece existir, segundo o mesmo autor, de uma forma geral, entre os matemáticos, a opinião consensual de que a demonstração formal deve ser a "espinha dorsal" da matemática. Contudo, enquanto alguns deles pensam que o computador pode criar obstáculos a este objectivo, na medida em que a evidência visual pode contribuir para os alunos não apreciarem a demonstração formal. Outros defendem que, até certos níveis da escolaridade, a demonstração pode ser abordada de forma mais informal, com níveis inferiores de rigor, preparando o aluno para demonstrações mais formais de grau mais elevado de rigor.

Krantz, S. (1994), no seu artigo intitulado *"The immortality of proof"* faz o seguinte apelo:

"Num prazo de dez a quinze anos, é possível, ou não, que tenhamos abandonado as demonstrações e deixemos os computadores dizer-nos o que é provavelmente válido. Mas dentro de dez a quinze anos pode ser tarde demais para decidirmos sobre o que queremos. Temos que decidir hoje." (p.13)

Este tipo de preocupações tem reflexos ao nível da educação matemática e adquire expressão na generalidade dos currículos de matemática, quer ao nível do Ensino Básico quer ao nível do Ensino Secundário. O trabalho de Waring (2001) constitui um dos exemplos dos estudos realizados, no início do nosso século, que marcam o crescendo de preocupação em relação às questões relativas ao ensino e aprendizagem da demonstração. Nesse estudo, Waring investigou os efeitos de incorporar a demonstração no currículo de matemática do Ensino secundário. Neste estudo, a investigadora apresenta uma categorização, por níveis (desde o nível 0 até ao nível 5), da compreensão e percepção da demonstração matemática por parte dos alunos. As conclusões apontam para a ideia de que se os alunos devem saber realizar demonstrações então questões relativas ao raciocínio e demonstração devem ser contempladas nos actuais currículos de matemática e não serem entendidas como abordagens alternativas, como componentes adicionais que requerem tempo extra.

3.4. Resolução de problemas: Exploração, argumentação, demonstração

Polya (1957) discutiu com algum detalhe o papel do raciocínio dedutivo na exploração e na resolução de problemas. Ele defendeu que resolver um problema é estabelecer a ligação entre os dados e o desconhecido e para isso devemos utilizar o que ele designa de "heuristic syllogism", uma espécie de raciocínio que usa dedução.

Em segundo lugar, é um facto simples de que, enquanto a exploração e a demonstração são actividades separadas, elas são complementares e reforçam-se uma à outra. Não só fazem ambas parte da resolução de problemas em geral, elas são ambas necessárias para o sucesso na matemática em particular. A exploração leva à descoberta, enquanto que a demonstração leva à confirmação. A exploração de um problema pode-nos permitir "agarrar" a sua estrutura e as suas ramificações, mas não nos conduz a uma compreensão explícita de todas as ligações. Assim, a exploração pode levar a conclusões que, apesar de formuladas com precisão, podem ficar apenas como uma tentativa.

Considerando que a validade de uma proposição pode parecer aparente a partir da exploração, é necessário, como defende Giaquinto (1994) levar a cabo, "demonstrable justification". As orientações metodológicas ao nível da sala de aula vão no sentido de se recorrer à exploração para motivar os alunos à produção da prova, ou pelo menos para fazerem um esforço em seguir uma demonstração já feita. Uma das razões para ir para este patamar é a de que a matemática aspira a um grau de certeza que apenas pode ser atingido através da demonstração.

Alguns educadores matemáticos acreditam que devem fazer uma escolha entre desenvolver capacidades de natureza investigativa e resolução de problemas (que segundo eles, fazem a matemática parecer "útil", "divertida" e mais uma "actividade humana"), ou prestarem atenção às capacidades necessárias para a construção de demonstrações. Poderão entender a demonstração como um trabalho "miúdo" e um impedimento para a compreensão, em vez de ser um caminho para tal.

Simpson (1995) diferenciou "proof through logic", enfatizando o formal, e "proof through reasoning", envolvendo investigações. Na visão do autor, a primeira é estranha e difícil para os alunos desde que não haja ligações com as estruturas mentais já existentes e, assim, podem apenas ser compreendidas por uma minoria de alunos. Ele acredita que o recurso a um argumento heurístico, por parte dos alunos, se torna acessível a um maior número de alunos.

Educadores matemáticos, expressando a visão de que a demonstração (prova dedutiva) precisa de um tempo longo para ser ensinada, focaram-se não só no raciocínio, mas também na argumentação apresentada, acreditando que as técnicas heurísticas são mais úteis do que a demonstração no desenvolvimento de capacidades de pensamento de nível mais estruturado. Estes reconhecem um papel educacional mais significativo às explorações, às justificações informais, as quais fazem uso da intuição, promovendo *insight* matemático e até fluência técnica. Assim, irão cultivar a percepção da matemática como uma ciência que salienta heurísticas e uma abordagem indutiva. Esta visão teve expressão nos Standards NCTM (1989), no British National Curriculum (Noss, 1994) e tem reflexo no actual currículo de matemática do ensino secundário.

Uma questão chave foi levantada pela intensificação dos estudos ligados à visualização – as representações visuais podem ser utilizadas não só como evidência para uma proposição matemática mas sim na sua justificação. Diagramas e outros recursos visuais têm sido utilizados para facilitar a compreensão. Eles são bem vindos como heurísticas acompanhantes da demonstração. Neste sentido, é bem aceite que o diagrama é uma componente legítima da argumentação matemática. Todos os educadores matemáticos sabem que diagramas e outras representações visuais são também uma componente essencial no desenvolvimento do currículo de matemática, quando elas podem proporcionar *insight* tal como os conhecimentos.

3.5. Natureza das justificações dos alunos

O conceito de justificação é muito amplo e, por isso, é muito natural que se encontrem justificações muito distintas as quais, muitas vezes, utilizam processos de argumentação totalmente diferentes. A análise das justificações dos alunos pode ser utilizada para avaliar o progresso de um aluno durante determinado período de aprendizagem, a influência de um determinado processo de ensino e aprendizagem, etc. Ao discutirem esta questão, Marrades e Gutiérrez (2000) elaboraram uma classificação das justificações[18] dos alunos e apresentaram uma perspectiva histórica.

Assim, as primeiras classificações foram elaboradas por Bell (1976). Este investigador classificou as justificações dos alunos consoante estes usavam exemplos, *justificações empíricas,* ou raciocínios dedutivos para provar o que pretendiam, *justificações dedutivas.* Dividiu, ainda, as justificações empíricas e dedutivas em várias categorias consoante estas estivessem mais ou menos completas.

Balacheff (1987), deu também muita importância ao facto dos alunos recorrerem ou não a exemplos nas suas justificações. As justificações que envolviam o uso de exemplos também eram classificadas consoante os critérios usados na selecção desses mesmos exemplos. Apresentou a seguinte categorização para a classificação de uma justificação:

- *Pragmática*: Baseada em exemplos, ou em acções ou em ilustrações. Esta categoria inclui três tipos de argumentação; *Empírica naíve* – a afirmação a ser provada é testada nalguns exemplos; Experiência *crucial* - a afirmação é testada com exemplos cuidadosamente seleccionados; *Exemplo genérico* – em que a justificação é baseada em operações ou transformações num exemplo seleccionado como sendo o representante de uma classe.
- *Conceptual*: Baseada na formulação de propriedades e de relações entre elas. Esta categoria inclui *experiência pensada*, em que as acções são interiorizadas e dissociadas dos exemplos específicos considerados e *cálculo simbólico*, em que não

[18] Uma justificação é um conjunto de argumentos que são utilizados com o objectivo de convencer alguém (Marrades e Gutiérrez, 2000, p.89).

existe experimentação e a justificação é baseada na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

Harel e Sowder (1996) não atribuíram tanta importância ao uso e à escolha dos exemplos mas sim à forma como os alunos elaboravam a sua justificação e aos raciocínios que utilizavam. Nesta perspectiva, apresentaram as seguintes categorias de justificações: *Empíricas; Analíticas ou Teóricas* – do tipo transformacional ou do tipo estrutural.

Marrades, R. e Gutiérrez, A. (2000) basearam-se nestes estudos e apresentaram um trabalho onde descrevem uma estrutura analítica, que proporciona um modo de analisar e classificar a forma como os alunos produzem justificações, ao mesmo tempo que se analisa e classifica as próprias justificações.

Estes investigadores diferenciaram duas categorias principais de justificações: as *justificações empíricas* e as *justificações dedutivas.*

❖ As justificações empíricas são caracterizadas pelo uso de exemplos como principal (e talvez único) elemento de convicção. Os alunos elaboram conjecturas depois de terem observado regularidades num ou em mais exemplos; usam os exemplos ou as relações observadas entre eles para justificar a verdade da sua conjectura. Dentro das justificações empíricas distinguem-se três classes dependendo do modo como os exemplos são seleccionados.

▪ *Empirismo simples,* quando a conjectura é justificada mostrando que é verdadeira num ou em vários exemplos, normalmente seleccionados sem um critério específico. A verificação pode envolver:

- Somente percepção visual ou táctil – *tipo perceptual*;

- O uso de exemplos matemáticos ou as relações encontradas nos exemplos – *tipo indutivo.*

▪ *Experimentação crucial*, quando a conjectura é justificada mostrando que é verdade num exemplo específico, cuidadosamente seleccionado. Os alunos estão conscientes da necessidade de generalização, por isso, escolhem o exemplo não particular mas possível. Eles partem do princípio que a conjectura é sempre verdadeira se for verdadeira no exemplo. Distinguem-se vários tipos de justificações por experimentação crucial, dependendo do modo como o exemplo crucial é usado;

- *Baseada em exemplos*, quando a justificação só mostra a existência de um exemplo ou a falta de contra - exemplos;

- *Construtiva*, quando as justificações se focam na maneira de obter o exemplo;

-*Analítica*, quando a justificação é baseada em propriedades observadas empiricamente no exemplo ou em elementos auxiliares;

- *Intelectual*, quando a justificação é baseada na observação empírica do exemplo, mas usa principalmente propriedades aceites ou relações entre elementos do exemplo.

- *Exemplo genérico*, quando a justificação é baseada num exemplo específico, representativo da sua classe. Esta refere-se a propriedades abstractas e aos elementos de uma família, mas é claramente baseada no exemplo. Nas descrições de como o exemplo genérico é usado na justificação estão também presentes os quatro tipos de justificações definidas para a experimentação crucial: *Baseada em exemplos; Construtiva*; *Analítica*; *Intelectual*.

Ainda dentro das justificações empíricas considera-se:

- *Resposta errada*, quando os alunos usam estratégias empíricas para resolver um problema de prova[19], mas não conseguem elaborar uma conjectura correcta, ou mesmo que a elaborem, não conseguem produzir uma justificação.

❖ As *justificações dedutivas* são caracterizadas pela não contextualização dos argumentos usados, baseadas em aspectos genéricos do problema, operações mentais e deduções lógicas. Os exemplos, quando usados, são uma ajuda para organizar argumentos, mas as características particulares de um exemplo não são consideradas na justificação. Dentro das justificações dedutivas distinguem-se três classes.

- *Experimentação pensada*, quando um exemplo específico é usado para ajudar a organizar as justificações. Podemos encontrar dois tipos de experimentações pensadas, dependendo do estilo da justificação:

[19] A designação de *problema de prova* refere-se aos problemas em que é pedida uma justificação para determinada asserção. Esta, pode estar explícita no enunciado do problema ou ser induzida pelos alunos, constituindo-se como a primeira parte da solução do problema (Marrades e Gutiérrez, 2000, p.121).

- As *justificações transformativas*, baseiam-se em operações mentais que produzem uma transformação do problema inicial noutro equivalente. O papel dos exemplos é ajudar a prever que transformações são convenientes. As transformações podem ser baseadas em imagens mentais espaciais, manipulações simbólicas ou construção de objectos;

- As *justificações estruturais* são sequências de deduções lógicas que derivam do conjunto de dados do problema, de axiomas, de definições ou de teoremas aceites. O papel dos exemplos é ajudar a organizar os passos de dedução.

- *Dedução formal*, quando a justificação é baseada em operações mentais, sem a ajuda de exemplos específicos. Numa dedução formal só os aspectos genéricos do problema são mencionados. É, por isso, o tipo de demonstração matemática formal, que se encontra no mundo dos investigadores matemáticos. Na dedução formal também podemos encontrar os dois tipos de justificações, já definidas para a experimentação pensada: *justificações transformativas*; *justificações estruturais*;
- *Errada* quando os alunos usam estratégias dedutivas para resolver problemas de prova, mas não conseguem elaborar uma conjectura correcta ou elaboram uma conjectura correcta, mas falham na produção de uma justificação.

A figura seguinte sumaria os tipos de justificações. A referência às justificações erradas é necessária para completar a classificação, porque as capacidades de desempenho e demonstração dos alunos não podem ser associadas apenas à resolução correcta dos problemas.

Para além de classificar as respostas dos alunos, esta estrutura é igualmente útil para avaliar a mudança de capacidades dos alunos para produzir justificações, num determinado período de aprendizagem.

Os mesmos investigadores referem que, durante a resolução de um problema, muitos alunos começam por usar uma verificação empírica e quando percebem o problema e a maneira de justificar a hipótese continuam a escrever uma justificação dedutiva. É também usual fazerem vários "saltos" entre métodos dedutivos e empíricos durante a resolução de um problema.

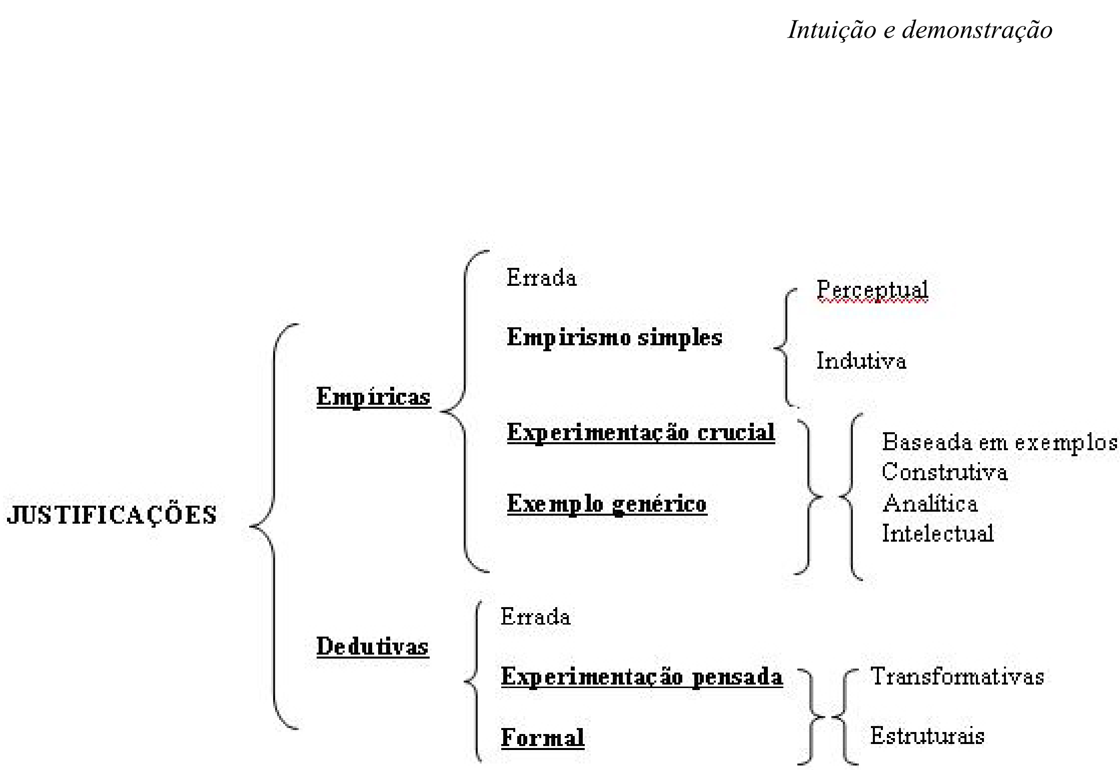


Figura 3.2- Tipos de justificações - Identificação de uma estrutura analítica

Arzarello et al. (1998) citados no estudo anteriormente apresentado, consideraram estes casos, prestando especial atenção ao momento em que o aluno ao resolver o problema passa:

- De uma *fase ascendente*, caracterizada por uma actividade empírica numa tentativa de melhor perceber o problema, elaborar ou verificar uma conjectura;
- Para uma *fase descendente*, em que o aluno tenta produzir uma justificação dedutiva (tenta validar a conjectura formulada).

Na resolução de problemas de prova mais complexos os alunos andam, muitas vezes, para trás e para a frente entre ambas as fases e estas fases podem não estar ambas presentes e/ou podem aparecer de forma alternada várias vezes dento da mesma solução. Segundo os investigadores referenciados, é um facto que os alunos, muitas vezes, ignoram a fase descendente do processo de justificação por falta de consciência da sua importância.

Combinando o modelo proposto por Azarello com o esquema descrito anteriormente, Marrades e Gutiérrez (2000) sugerem uma estrutura, segundo dois pontos de vista, para analisar a solução de problemas de prova, em que uma delas corresponde a tipos de justificações produzidas pelos alunos e a outra à maneira de trabalhar entre métodos de dedução empírica e dedutiva. Desta forma, quer a resolução do problema quer o processo de descobrir a solução são analisados conjuntamente.

3.6. Sumário

A revisão da literatura apresentada neste capítulo facultou a discussão de ideias chave que sustentam este projecto de investigação. O trabalho de Fischbein, E. (1999) constitui um dos exemplos dos estudos realizados no final dos anos noventa, reflexo da crescente preocupação em relação ao raciocínio dedutivo na educação matemática, com especial ênfase no papel da intuição no processo da demonstração. Os estudos de natureza histórica e epistemológica (e.g. Balacheff, N. 2004; Hanna, G. 1997) mostraram que a demonstração matemática desempenhou e continua a desempenhar um papel crucial na educação matemática. Num contexto de resolução de problemas, a relação entre exploração, argumentação e demonstração foi discutida. Desta discussão emerge, entre outros aspectos, que a exploração e demonstração são actividades que se completam e reforçam.

A intensificação de estudos ligados à visualização (e.g. Duval, R., 1998) revela a grande potencialidade dos ambientes de software dinâmico na familiarização dos alunos com a natureza formal da matemática. O mesmo investigador, sobre os processos de visualização, construção e raciocínio, concluiu que estes processos estão intimamente ligados e a sua sinergia é necessária para a competência geométrica.

Hanna, G. e Barbeau, E. (2008) ao abordarem a questão "*Porque é que demonstramos teoremas?"* apresentam o seguinte argumento: "*Proofs could be accorded a major role in secondary-school classroom precisely because of their potential to convey to students important elements of mathematical elements such as strategies and methods." (p.352)*

Esta ideia teve o seu reflexo neste trabalho e que é visível, por exemplo, na escolha da estrutura analítica das justificações dos alunos, proposta por Marrades, R. e Gutiérrez, A. (2000), que contempla o tipo de tais justificações produzidas pelos alunos e a passagem entre métodos de dedução empírica e dedutiva.

Para concluir, apesar da demonstração ser fundamental na educação matemática, as dificuldades que os alunos sentem quando desenvolvem actividade desta natureza devem merecer uma atenção especial. Consequentemente, existe uma necessidade evidente de apoiar os alunos neste tipo de actividade e de se incentivar estudos que procurem relacionar o recurso à tecnologia, com o desenvolvimento cognitivo dos alunos e com o pensamento estruturado.

Parte II – ESTUDO EMPÍRICO

Capítulo 4
Metodologia

4.1. Introdução

Esta investigação teve como objectivo essencial o estudo de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da geometria Euclidiana, no ensino secundário, no sentido de promover níveis elevados de pensamento matemático. Em particular, pretendia-se descrever e analisar situações que decorram da implementação de uma pasta de problemas de prova, num contexto diversificado de modelos de geometria Plana, com o objectivo de compreender a evolução das alunas relativamente às capacidades de argumentação matemática.

Neste capítulo, descreve-se a metodologia adoptada fazendo-se referência à fase piloto, às opções metodológicas, aos participantes e aos métodos de recolha e análise de dados.

4.2. A fase piloto

No delineamento deste estudo, foi considerado vantajoso realizar uma fase piloto com os seguintes objectivos:

- Experimentar no terreno a proposta pedagógica de envolvimento dos alunos em actividade de resolução de problemas de prova em vários modelos de geometria Plana;

- Aperfeiçoar o processo de recolha de dados;

- Realizar observações e registos, quer escritos quer em vídeo, no sentido de identificar situações relevantes para o estudo, tentando trazer novas dimensões ao estudo.

Os alunos que participaram no estudo piloto foram quatro alunos do 10 º ano do Ensino Secundário, de Matemática A, da Escola Secundária Jaime Magalhães Lima – Esgueira (zona limítrofe da cidade de Aveiro). Participaram, de forma voluntária, no desenvolvimento de várias tarefas, em período extra-aula, às terças-feiras, das 12horas às 13 horas, durante seis semanas seguidas, no espaço do laboratório de matemática da referida escola.

A professora destes alunos foi contactada por mim, em Setembro de 2003. Mostrou-se bastante interessada em reflectir ao nível do novo currículo de matemática para o 10º ano do ensino secundário, o que apontou para a possibilidade de um trabalho em conjunto movido por interesses convergentes durante todo o estudo a desenvolver.

A opção por este nível é justificada pelas seguintes razões:

- O programa de Matemática A dá relevância à realização de actividades que promovam o desenvolvimento do raciocínio dedutivo;

- O primeiro capítulo do programa do 10º ano, Matemática A, é sobre resolução de problemas.

Antes do trabalho com os alunos, clarifiquei junto da professora os objectivos do estudo e apresentei-lhe a pasta de tarefas a propor aos alunos.

Durante o período da fase piloto do estudo, a investigadora observou os quatro alunos participantes neste trabalho em seis sessões. Estas observações tinham como objectivo a recolha de notas acerca do envolvimento e dificuldades dos alunos aos problemas propostos. Foram feitos registos em vídeo de duas destas sessões.

Esta experiência possibilitou:

- Verificar não ser fácil a articulação entre as outras tarefas desenvolvidas pelos alunos nas aulas de matemática habituais e nas sessões paralelas. Foi notória, por parte da professora da turma, a preocupação em cumprir os conteúdos curriculares.

- Constactar que esta questão não apareceu independente da avaliação e classificação dos alunos. Por vezes adiaram-se sessões de trabalho, com os alunos participantes no estudo piloto, devido ao facto de ser conveniente estarem nas aulas de revisão para o teste de matemática.

- Identificar dificuldades de implementação da proposta de computadores na aula de matemática, e sugerir formas de as atenuar.

A experiência permitiu ainda desenvolver e aperfeiçoar:

- Um conjunto de situações–problema envolvendo conteúdos matemáticos curriculares ao nível do 10º ano do ensino secundário;
- Materiais de apoio à actividade dos alunos;
- O dispositivo de recolha de dados através de gravação de imagem e de som.

4.3. Opções metodológicas

A necessidade de compreender a complexidade envolvida no processo de argumentação matemática e a preocupação de obter explicações para o que acontece neste processo conduziram a uma metodologia qualitativa, quer na recolha de dados quer na sua análise. As cinco principais características de uma investigação qualitativa são: a fonte directa de dados é o ambiente natural; os dados recolhidos são na sua essência descritivos; interessa mais o processo do que simplesmente os produtos; os dados tendem a ser analisados de forma indutiva e é dada especial importância ao ponto de vista dos participantes (Bogdan & Biklen, 2006). Estas características estiveram presentes neste estudo. Em primeiro lugar, o objecto de estudo foi um processo e não um produto e o foco da investigação foi a compreensão de como este processo ocorre. No sentido de descrever o processo de argumentação matemática, tornava-se necessário proceder à sua observação no ambiente natural de ocorrência, " *Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado"* (Bogdan & Biklen, 2006, p.48). O investigador tem um papel chave em relação à recolha de dados, aos materiais registados, sendo " o entendimento que o investigador tem deles o instrumento – chave de análise" (Bogdan & Biklen, 2006, p.48). Como evidências externas do desenvolvimento do processo de argumentação, a natureza dos dados necessários para investigar o processo de argumentação matemática assumia a forma descritiva:

"Para um investigador qualitativo que planeia elaborar uma teoria sobre o seu objecto de estudo, a direcção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar de tempo com os sujeitos. Não se trata de montar um quebra-cabeças cuja forma final conhecemos de antemão. Está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes….O investigador qualitativo planeia

utilizar parte do estudo para perceber quais as questões mais importantes" (Bogdan & Biklen, 2006, p.50).

Dentro de uma metodologia de investigação qualitativa, a tarefa de compreender e explicar a complexidade envolvida na argumentação matemática produzida pelos alunos, quando confrontados com problemas de prova, requer a observação e análise minuciosa quer das produções escritas dos alunos quer das interacções estabelecidas, em especial entre os alunos. Assim, foi adoptado um estudo de caso visto esta metodologia ser especialmente adequada quando *"as questões de como e porquê são fundamentais, quando o investigador tem muito pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o foco do estudo é um fenómeno que se passa num contexto real"* (Yin, 1984, p.13).

4.4. Participantes

O estudo incidiu sobre os processos de argumentação de alunos do ensino secundário. A opção por este nível de ensino é justificada pelas seguintes razões:

- O actual currículo do ensino secundário contempla o raciocínio lógico-dedutivo. Nos "Temas Gerais", que são um conjunto de temas que deverão ser desenvolvidos de forma lateral ao corpo do programa, o tema "Lógica e Raciocínio Matemático" tem a função de apoiar os alunos na compreensão da demonstração. De acordo com o actual currículo, a escrita simbólica deve surgir naturalmente. Além de que, os conceitos matemáticos e suas propriedades devem ser estimulados intuitivamente até que os alunos possam trabalhá-los e chegar a formulações matemáticas precisas. Propõe-se, também, o desenvolvimento de diversas formas estruturantes do raciocínio lógico, tais como a noção de teorema, hipótese, tese e demonstração;

- É notório o "abismo" existente entre o ensino secundário e universitário no âmbito do raciocínio lógico - dedutivo.

- Relativamente à investigadora, a experiência profissional como professora deste nível de ensino, durante 14 anos, apontava para a importância de reflectir e aprofundar questões ligadas à abordagem didáctica da resolução de problemas de prova.

Delinearam-se dois níveis de concretização deste trabalho. Um primeiro, situado em ambiente de sala de aula com uma turma de 20 alunos (15-16 anos de idade) do 10º ano do ensino secundário, da área sócio-económica, no ano lectivo 2004/2005. Um segundo, situado no estudo das trajectórias cognitivas individuais, de duas alunas (16 anos de idade), da referida turma, durante a frequência do 11º ano (no ano lectivo 2005/2006) que, embora incidindo sobre as mesmas questões definidas para a turma, permitiu um nível de análise mais detalhado. O estudo empírico, nesta segunda fase do estudo, foi desenvolvido extra aula em sessões de pequenos grupos de trabalho que decorriam paralelamente à aula de matemática. Esses grupos já tinham sido constituídos desde o início do 10 º ano e todos os elementos, além das alunas-caso, participaram voluntariamente.

A escolha da turma obedeceu à disponibilidade do professor responsável pela turma. Entre os professores do grupo de matemática da escola secundária a que a turma pertencia, Escola Secundária Doutor Mário Sacramento, de Aveiro, apenas este professor, do grupo de professores de matemática que leccionavam o 10º ano de escolaridade, mostrou interesse e disponibilidade em participar no estudo.

Quanto ao segundo nível de concretização do estudo em causa, foi necessário seleccionar alguns dos 20 alunos da turma. Assim, tendo em conta as características do estudo a realizar e a dimensão de trabalho envolvida, decidiu-se estudar dois casos individuais. A selecção dos casos, duas alunas, foi feita com base nos seguintes critérios:

- Aproveitamento escolar, durante o percurso escolar do 10º ano, diferente e existiram indicadores, da primeira fase do estudo e do professor da turma, no sentido de se esperar alguma diversidade de percursos ao nível dos processos de argumentação;

- Gosto por resolver problemas;

- Bom informador (este aspecto foi muito importante face aos propósitos da investigação, devido ao facto da análise se basear no que é "visível"no processo, e o discurso oral é um meio para tornar "visível" processos de raciocínio);

- Disponibilidade e vontade para participar no estudo.

Durante o 1º período escolar do ano lectivo de 2004/2005, a estreita colaboração entre a Escola Secundária Doutor Mário Sacramento e a Universidade de Aveiro proporcionou que a turma, participante no estudo, desenvolvesse sessões em ambiente laboratorial com apoio de software de geometria dinâmica.

Estas sessões decorreram, durante o período lectivo das aulas de matemática, no Laboratório de Educação em Matemática – LEM@tic (Departamento de Didáctica e

Tecnologia Educativa). Os alunos foram transportados em autocarro da Escola para a Universidade e os custos foram suportados pela Universidade.

4.5. Recolha de dados

No âmbito de estudos qualitativos, os instrumentos e métodos de recolha de dados são definidos. Nesta sessão descrevem-se os métodos de recolha de dados que consideramos apropriados aos objectivos de investigação.

Os objectivos de investigação solicitaram a análise dos processos de argumentações produzidos pelos alunos. Esses processos foram identificados na actividade dos alunos, quer através da expressão oral (discussões em grupo) quer através da expressão escrita (construção de figuras geométrica, expressões algébricas, etc.) e nos processos de raciocínio, os quais foram inferidos com base nas observações.

Utilizaram-se as seguintes fontes de dados: gravações áudio e vídeo, notas de campo, documentos escritos e entrevistas –"*Alguns estudos qualitativos baseiam-se exclusivamente num tipo de dados, transcrições de entrevistas, por exemplo, mas a maior parte usa uma variedade de fontes de dados. Embora discutamos diferentes tipos de dados separadamente, é importante salientar que eles raramente se encontram isolados na pesquisa"* (Bogdan & Biklen, 2006, p.149).

4.5.1. Gravações áudio e vídeo

Todas as sessões de trabalho com o grupo turma foram registadas em vídeo. As interacções ocorridas foram analisadas, quer através dos dados recolhidos em áudio quer através dos dados recolhidos em vídeo. Na gravação em vídeo, nem sempre se conseguiu captar a actividade individual dos alunos. Os diálogos gravados, nalgumas situações, ajudaram a construir o que não era visível.

As sessões de trabalho com as alunas-caso foram gravadas em áudio, no sentido de não se comprometer a naturalidade. As alunas ofereceram resistência à gravação em vídeo.

4.5.2. Notas de campo

Após cada sessão de trabalho, a investigadora fez uma descrição escrita dos acontecimentos, actividades e diálogos estabelecidos. Além disto, fez o registo das ideias, estratégias adoptadas e reflexões.

Estas notas de campo foram sendo complementadas com as informações obtidas quer nos documentos escritos quer através de gravação áudio e ou vídeo.

4.5.3. Documentos escritos

Todos os documentos produzidos pelos alunos foram recolhidos. Cada aluno tinha um dossier onde reuniu todas as tarefas propostas e sua resolução. Este dossier, além de dar uma ideia da reacção dos alunos às tarefas propostas, serviu de base a uma revisão do desenvolvimento e das aquisições dos alunos permitindo, com a concordância do professor da turma: identificar aquisições e necessidades de acordo com os objectivos previstos; auxiliar a selecção das tarefas a propor e orientar a aprendizagem dos alunos.

4.5.4. Entrevistas

A utilização da entrevista é sugerida como uma solução apropriada para a obtenção de dados do tipo pretendido no estudo. No início do 10 º ano, após a realização do teste de avaliação das competências de raciocínio dos alunos, realizou-se uma pequena entrevista a alguns dos alunos. Nestas entrevistas procurou-se saber o porquê de algumas respostas dadas a algumas questões do referido teste. Estas entrevistas foram registadas em áudio e a sua duração variou entre 15 a 30 minutos.

As entrevistas foram realizadas pela investigadora na Escola numa pequena sala, da sala dos alunos, apenas com a presença da investigadora e do entrevistado.

4.5.5. Questionários

Aplicaram-se dois questionários à turma participante no estudo em dois momentos diferentes. Antes e após a intervenção com foco na resolução de problemas de prova.

O primeiro questionário constou de um conjunto de questões cuja aplicação teve como objectivo identificar as *Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem* (Anexo 2). As questões estavam distribuídas por quatro partes designadas, respectivamente, por: *I. O que pensas relativamente a cada uma das seguintes afirmações [...]; II. A disciplina de Matemática é para ti [...]; III. Diz por palavras tuas o que entendes por – exercício, problema, teorema, uma prova, uma conjectura; IV Pensa nas tuas aulas de Matemática, da escolaridade básica (7º, 8º e 9º anos), e enuncia três aspectos de que mais gostaste e três aspectos de que menos gostaste*. O referido questionário foi aplicada a toda a turma em Novembro de 2004.

O segundo questionário (Anexo 3), com a mesma estrutura, foi aplicado à turma em Novembro de 2005. Teve por objectivo identificar alterações da visão dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem. As partes do questionário, eram as mesmas com excepção da IV parte, que foi substituída por - *No 10º ano participaste em 15 sessões* *de resolução de problemas de prova e/ou tarefas de natureza exploratória. Consulta o teu dossier, com os trabalhos realizados nessas sessões, e escreve um relato da actividade desenvolvida nessas sessões, especificando: 1 - O interesse do conteúdo; 2 - A utilidade para a tua aprendizagem; 3 - O grau de dificuldade; 4- Outros comentários.*

4.5.6. O papel da investigadora

Tendo em conta o problema do estudo e as características do trabalho, justificou-se que a observação participante tenha sido um instrumento de recolha de dados fundamental e procuraram-se criar condições para que a investigadora, estivesse naturalmente envolvida com a actividade dos alunos. Para isso, a familiarização com a turma desde o início do 10º ano contribui para que a intervenção da investigadora no desenvolvimento do trabalho fosse entendida de forma natural.

Desde o início do estudo, deparei-me com a questão de qual seria o meu grau de intervenção na investigação a realizar. E após apresentação, ao professor da turma, das tarefas a propor aos alunos, tornou-se claro que seria eu que iria dinamizar essas sessões. No entanto, durante a intervenção do estudo que decorreu no 10 º ano, com toda a turma, o professor acompanhou todas as sessões de trabalho e participou na orientação das mesmas. Durante o 11º ano desta turma, apenas eu dinamizei as sessões de trabalho que decorreram em pequenos grupos, numa sala da escola, paralelamente à aula de matemática.

4.5.7. O papel do professor

O professor do ensino básico e secundário da Escola Secundária Doutor Mário Sacramento – Aveiro, João Peres, dava aulas há 22 anos. Foi o único professor, do grupo de professores de matemática que leccionavam o 10º ano de escolaridade da referida escola, que demonstrou interesse em colaborar na investigação. Para além do aspecto *formativo*, o Peres (assim designado pelos colegas) considerou importante o desenvolvimento da resolução de problemas de prova de forma mais sistemática, dando uma maior expressão às orientações teóricas. De facto, este professor salientou, em reuniões no final do 10 º ano, que a colaboração neste estudo permitiu resolver problemas em ambiente de geometria dinâmica, de acordo com as orientações teóricas. De outro modo, sozinho, com a falta de um computador para dois alunos na aula de matemática, com a pressão do trabalho diário, seria muito difícil cumprir essas orientações.

É de referir que toda a experiência foi conduzida de modo cooperativo entre o professor da turma e eu. A escolha e/ou concepção dos problemas foi realizada pelas investigadoras. A resolução dos problemas, as decisões relativas à gestão da implementação dos problemas e o apoio prestado aos alunos eram preparados e discutidos em conjunto.

A disponibilidade do professor ao nível da informação prestada aos alunos e encarregados de educação foi determinante para a realização do estudo. As principais características da intervenção foi-lhes explicadas logo no início, em Outubro de 2004, e tanto os alunos como encarregados de educação mostraram-se bastante receptivos ao trabalho que se pretendia desenvolver. Os encarregados de educação deram autorização para que os seus educandos fossem entrevistados, participassem em sessões gravadas em vídeo e áudio, que se deslocassem à Universidade e que participassem nas actividades desenvolvidas.

4.5.8. A importância de descrever o desempenho dos alunos em contexto

Actualmente, ter-se em consideração o contexto em que se desenvolve a actividade dos alunos, quando confrontados com tarefas diversas, é uma condição necessária para compreender o desempenho dos mesmos. É assumido que os alunos que participam numa proposta de trabalho trazem com eles experiências, conhecimentos, concepções, atitudes, emoções e conhecimentos. Assim, torna-se conveniente não só reconhecer a existência destes factores mas também estudá-los e descrevê-los da melhor forma possível. Miles e Huberman (1994), referenciando Shulman, recomendam uma descrição detalhada no sentido de uma melhor compreensão dos fenómenos em causa. Os investigadores matemáticos que estudam a resolução de problemas têm vindo a reconhecer a importância de consolidar os seus estudos em contexto.

Apontava-se, assim, para a necessidade de recolha de informação no contexto turma com a intenção de interpretar de forma mais consistente sobre o papel de modelos variados de geometria plana no desenvolvimento das competências argumentativas de alunos do ensino secundário. Segundo Bogdan & Biklen (2006), na maioria dos estudos desta natureza, a recolha de dados assemelha-se a um funil. Primeiramente recolhe-se os dados de uma forma mais ampla, escolhendo vários sujeitos para obter uma compreensão mais alargada dos parâmetros do contexto. Depois, baseado tanto naquilo que é possível realizar como naquilo que lhe interessa, estreita –se o âmbito da recolha de dados.

4.6. Análise dos dados

A recolha e análise de dados não corresponderam a fases distintas da investigação. De facto, seguindo a recomendação de Bogdan e Biklen (2006), foi feita uma análise como parte integrante da recolha de dados e seguiu-se as seguintes sugestões: a*)Tomada de decisões que estreitem o âmbito do estudo; b)Desenvolver questões analíticas; c)Planificar as sessões de recolha de dados à luz daquilo que se detectou em observações prévias.*

O primeiro momento de análise decorreu ao longo da recolha de dados na turma e foi essencialmente realizado a partir dos documentos escritos produzidos pelos alunos, das gravações vídeo e áudio e das notas de campo das aulas. Permitiu a tomada de decisões nomeadamente, ao nível da sequência de problemas a propor, ao nível da sua abordagem didáctica e serviu de base à selecção das alunas-caso. Esta análise foi realizada com base num enquadramento teórico preliminar (ver secção 4.7). Iniciou-se o processo de análise vendo as gravações vídeo, ouvindo as gravações e procedendo às transcrições das gravações. De seguida procedeu-se às transcrições das gravações em áudio, clarificando alguns aspectos com as gravações vídeo –"*A redução de dados refere-se ao processo de seleccionar, focar, simplificar, abstrair, e transformar os dados que aparecem nas notas de campo ou transcrições"* (Miles e Huberman, 1994, p.10).

Outro momento de análise decorreu ao longo da recolha de dados com as alunas-caso. Esta análise foi essencialmente realizada a partir das produções escritas das alunas e das gravações áudio das sessões de resolução de problemas. O método de análise utilizado, nesta altura do estudo, esteve estritamente ligado aos objectivos do estudo: informar acerca da forma como os alunos mobilizam as suas capacidades argumentativas.

Os registos efectuados sobre as duas alunas foram visionados a primeira vez, logo após a recolha. Nesta análise foi utilizado, além do modelo de Schoenfeld, o sistema de categorias das justificações matemáticas definido por Marrades e Gutiérrez (ver capítulo 3). Este sistema inicial de análise foi ampliado por uma perspectiva ontosemiótica da actividade matemática, desenvolvida por Godino e colaboradores (ver capítulo 1).

Assim, a análise destes dados centrou-se, essencialmente, nos documentos escritos produzidos pelas alunas-caso e nas gravações áudio. Esta análise foi organizada de uma forma geral em três etapas: pré-análise, codificação e interpretação e discussão de resultados.

Com os dados recolhidos acerca de cada uma das alunas-caso pretendia-se traçar um quadro interpretativo tão completo quanto possível com o qual se procurou elaborar acerca da argumentação subjacente ao discurso, presente nas soluções aos problemas propostos, e aos comportamentos registados.

A análise das configurações cognitivas finais das alunas – caso relativamente à argumentação matemática foi realizada segundo dois níveis de análise com enfoque, respectivamente, nos objectos matemáticos e suas relações primárias (*situação – problema, linguagem, conceitos, proposições e procedimentos)* e suas relações secundárias (*ostensivo - não ostensivo, extensivo-intensivo, pessoal-institucional, unitári sistémico, expressão-conteúdo).*

4.7. O enquadramento teórico preliminar

Considerando que a intervenção na turma consistiu numa proposta de resolução de problemas de prova, o ponto de partida para a análise dos dados foi o modelo desenvolvido por Schoenfeld (1992). O esquema de análise de protocolos apresentada por este investigador tem por objectivo uma análise detalhada, compreensão e a codificação do desempenho dos alunos a um nível tácito.

Na análise dos protocolos da resolução de problemas aplicou-se o esquema de análise desenvolvido por Schoenfeld (1985). O referido esquema consiste em dividir cada protocolo em seis tipos de episódios[20]: *leitura, análise, exploração, planificação, implementação, verificação e transição*.

Esta análise preliminar dos dados teve em atenção, em cada um dos episódios, as questões sugeridas pelo investigador. Assim, iniciei a decomposição dos protocolos da resolução de problemas em episódios e apercebi-me de que a categorização adoptada à partida não era suficiente para se analisar a argumentação apresentada pelos alunos nas soluções apresentadas aos problemas.

[20] A descrição de cada um destes episódios consta no Anexo 8.

Capítulo 5
A turma

5.1. Introdução

Esta investigação pretendeu estudar de que forma é que outros modelos de geometria plana, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo.

Este capítulo apresenta uma caracterização da turma, fazendo referência às percepções dos alunos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática e ao domínio de conhecimentos ao nível da geometria.

Apesar de ter sido no 11º ano que se desenvolveu o estudo com duas alunas – caso, ao longo do 10 º ano, principalmente no 1º período, foram desenvolvidas com a turma, a que pertenciam as alunas - caso, situações problema, envolvendo o recurso a ambientes de geometria dinâmica e a modelos diversificados de geometria plana. Foi também ao longo deste ano lectivo, 2004/2005, que se começaram a esboçar algumas das características do ambiente de aprendizagem, nomeadamente no que se refere à importância dada ao trabalho em ambiente laboratorial. Por isso, considera-se pertinente começar por uma breve apresentação e discussão dos dados recolhidos no início e ao longo do 10 º ano. Uma vez que o estudo das alunas - caso incidiu sobre o processo de estudo desenvolvido no 11º ano, é importante perceber algumas das características da turma no início deste ano lectivo.

Em seguida descreve-se a pasta de problemas, parte integrante do processo de estudo.

5.2. Questionário: características e expectativas

A turma era composta por 20 alunos, 15 raparigas e 5 rapazes que tinham, na sua maioria, 15 anos de idade (apenas duas alunas tinham 16 anos) e frequentavam o 1º ano do ensino secundário (10 º ano), da área sócio-económica da Escola Secundária Doutor Mário Sacramento, Aveiro.

Dos 20 alunos que constituíam a turma, 18 preencheram o questionário em Novembro de 2004 (Anexo 2). Ao nível das percepções destes alunos sobre a matemática e a sua aprendizagem, as tabelas seguintes realçam os seguintes aspectos*: a matemática é uma disciplina difícil, que ensina a pensar, onde se descobrem novos resultados, útil e que prepara.* Em relação à resolução de problemas, a maioria considerou uma tarefa resolvida em mais do que dez minutos, com várias maneiras de resolução e encontrar uma resposta correcta é menos importante do que saber a razão para tal acontecer. No entanto, em relação à afirmação - *Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta* – a maioria de alunos concordou.

I. O que pensas relativamente a cada uma das seguintes afirmações:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem conc. nem disc.	Concordo	Concordo totalmente
Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta.	2	3	2	9	2
Os problemas de Matemática são sempre resolvidos em menos de 10 minutos.	8	9	1	2	0
Há apenas uma maneira correcta de resolver um problema de Matemática.	6	10	2	0	0
Encontrar uma resposta correcta de um problema é mais importante do que saber porque é que a resposta é correcta.	5	11	1	1	0
Aprender Matemática é, fundament., memorizar.	4	12	1	1	0
A Matemática é uma actividade solitária.	2	8	8	0	0
A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real.	2	13	3	0	0

Tabela 5.1 – Respostas apresentadas pelos alunos à questão *I* do 1º questionário

II. A disciplina de Matemática é para ti:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem conc. nem disc.	Concordo	Concordo totalmente
Uma disciplina difícil.	0	2	5	11	0
Uma disciplina que me ajuda a compreender e interpretar o mundo que nos rodeia.	0	1	5	12	0
Uma disciplina que me ensina a pensar.	0	1	4	9	4
Uma disciplina que me ajuda a preparar para a minha profissão futura.	0	0	1	13	4
Uma disciplina onde descubro resultados novos.	0	0	0	15	1
Uma disciplina que me ajuda para a minha formação global como cidadão na sociedade de hoje.	0	1	1	15	1
Uma disciplina útil para outras disciplinas que tenho.	0	1	6	7	4
Uma disciplina que me obriga a estudar muito.	0	0	2	11	3

Tabela 5.2 – Respostas apresentadas pelos alunos à questão *II* do 1º questionário

Quanto ao entendimento destes alunos sobre exercício, problema, teorema, demonstração e conjectura, registou-se grande disparidade de respostas (Anexo 5).

Refira-se que, em relação ao entendimento sobre conjectura, a maioria não respondeu.

Ao enunciarem aspectos das aulas de matemática de que gostaram mais, a grande maioria centrou-se em tópicos de ensino. Os mais referenciados foram, estatística e equações.

5.3. Avaliação das competências de raciocínio dos alunos: teste diagnóstico: análise dos resultados

Sobre geometria no plano e sobre geometria no espaço, os conteúdos estabelecidos nesta avaliação (Anexo 1) foram os seguintes:

- Concorrência e paralelismo de rectas no plano Euclidiano, requerendo o reconhecimento da posição relativa de rectas no plano, com base em diagrama e sem diagrama, recorrendo às propriedades de alguns polígonos.

- Quadriláteros, classificação e propriedades, envolvendo a utilização de conceitos sobre quadriláteros.

- Geometria finita - exemplo, relacionando -se com a capacidade do aluno utilizar informação para interpretar de forma adequada situações originais, ou seja, distinguir se uma dada afirmação é ou não adequada a determinada geometria.

- Resolução de problemas de demonstração, no plano Euclidiano, envolvendo a capacidade do aluno na construção de argumentos, requerendo conhecimentos sobre congruência de triângulos e/ou sobre paralelismo de rectas no plano e tendo como base um diagrama.

- Intersecção de planos, estabelecendo relações espaciais e requerendo que se "imagine" a intersecção de dois planos e de família de planos numa mesma recta.

O teste diagnóstico é constituído por vários tipos de itens, itens de resposta curta e itens de resposta mais extensa. Todas as respostas são classificadas através de códigos que correspondem aos diversos desempenhos dos alunos (Anexo 1).

Os níveis V, F de codificação correspondem, respectivamente, a respostas correctas e a respostas completamente erradas ou irrelevantes. Este tipo de codificação, codificação com dois símbolos, pretende revelar concepções erradas que impediram o aluno de chegar à solução correcta e, assim, ser útil na compreensão do pensamento do aluno e na determinação do seu grau de domínio de capacidades mentais de nível mais elevado. O primeiro símbolo, V ou F, indica se o aluno responde, ou não, de forma correcta, o número visa fornecer informação sobre o tipo de abordagem utilizado pelo aluno, sobre os modelos de erro ou as concepções erradas que caracterizam o seu trabalho. O símbolo *, acrescentado ao código, indica que o aluno recorreu a um diagrama. O código X é atribuído sempre que o aluno não desenvolva qualquer tipo de trabalho para responder à questão.

As questões 1 e 2 tinham por objectivo avaliar a proficiência dos alunos no tema posição relativa de rectas no plano, no âmbito da Geometria Euclidiana Plana.

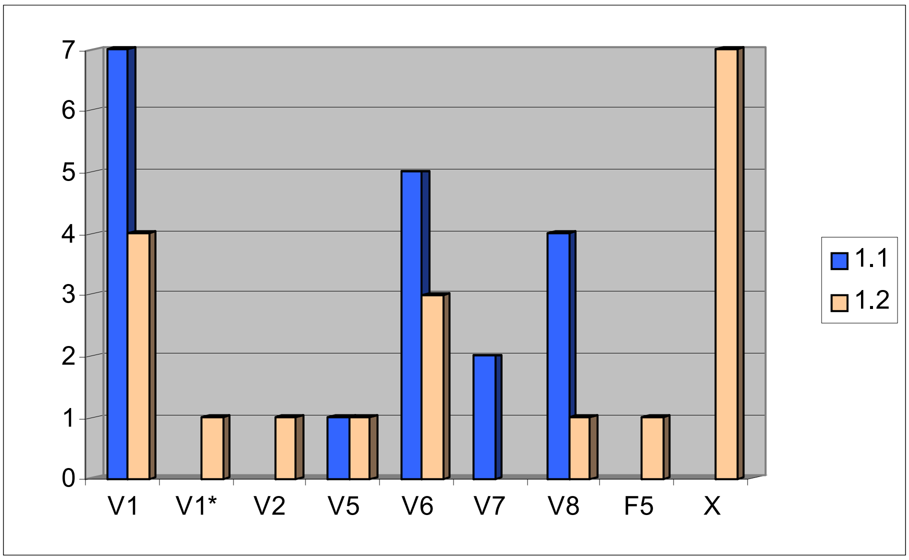


Gráfico 5.1 – Desempenho dos alunos na questão 1.1 e 1.2

Através da leitura do gráfico, que traduz o desempenho dos alunos na questão 1.1, verifica-se que os alunos identificam, por observação de uma figura, rectas paralelas. No entanto, dos 19 alunos que responderam ao teste:

- ✓ 7 - Respondem correctamente e apresentam justificação revelando o domínio do conceito de rectas paralelas no plano;
- ✓ 5 - Respondem correctamente e tentam justificar copiando partes do enunciado;
- ✓ 4 - Respondem correctamente sem justificação;

e

- ✓ 3 - Apresentam resposta correcta, com uma justificação incompreensível e/ou com justificação errada revelando concepções erróneas dos conceitos envolvidos;

Em relação à questão 1.2,

- ✓ Apenas 5, dos 19 alunos, respondem correctamente com justificação revelando o domínio dos conceitos envolvidos;
- ✓ 3 respondem correctamente e tentam justificar;
- ✓ 7 dos 19 alunos não desenvolveu qualquer tipo de trabalho.

É notória a diferença entre as produções dos alunos às questões 1.1 e 1.2.

Em termos de enunciado, são muito semelhantes. No entanto a 1.1 tem um diagrama associado, favorecendo o raciocínio visual[21], enquanto a 1.2 pelo facto de não ter diagrama exige um maior grau de abstracção, pois os alunos devem criar objectos, imagens gráficas, que os ajudem a dar resposta.

Em relação à questão 2 observe-se o seguinte gráfico:

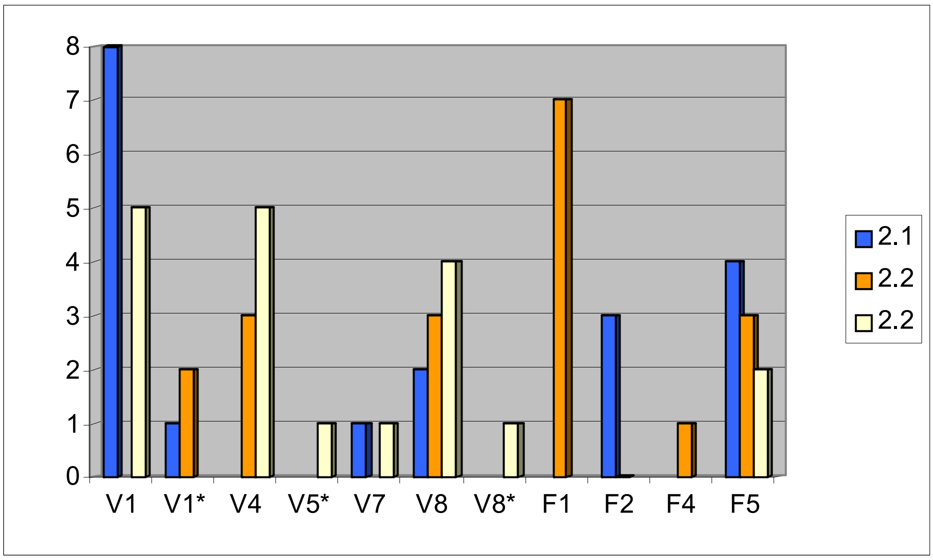


Gráfico 5.2 - Desempenho dos alunos na questão 2

A questão 2.2 foi a que apresentou um nível de desempenho mais baixo (11 respostas erradas), seguida da questão 2.1 (7 respostas erradas) e 2.3 (apenas duas respostas erradas). Note-se que 7 das 11 respostas erradas, à questão 2.2, apresentam justificação a qual revela que estes alunos ou identificam os lados do rectângulo como sendo apenas os lados consecutivos ou os lados opostos (exemplos: "*São sempre paralelas pois os lados opostos do rectângulo são sempre paralelos."; "Sempre paralelas pois a distância entre uma e outra vai diminuindo até se intersectarem"; " Nunca são paralelas porque estas rectas vão intersectar com outras rectas para formar a figura geométrica").*

A questão 3 tinha por objectivo avaliar a competência dos alunos na justificação de uma afirmação do tipo "se…então…" e ainda sobre o mesmo tema das questões 1 e 2.

---

[21] O termo "raciocínio visual" refere-se a raciocínios baseados na análise de um diagrama. Este tipo de raciocínio é muitas vezes analítico na medida em que analisa se imagens visuais e se reflecte sobre elas. (Dreyfus, 1999)

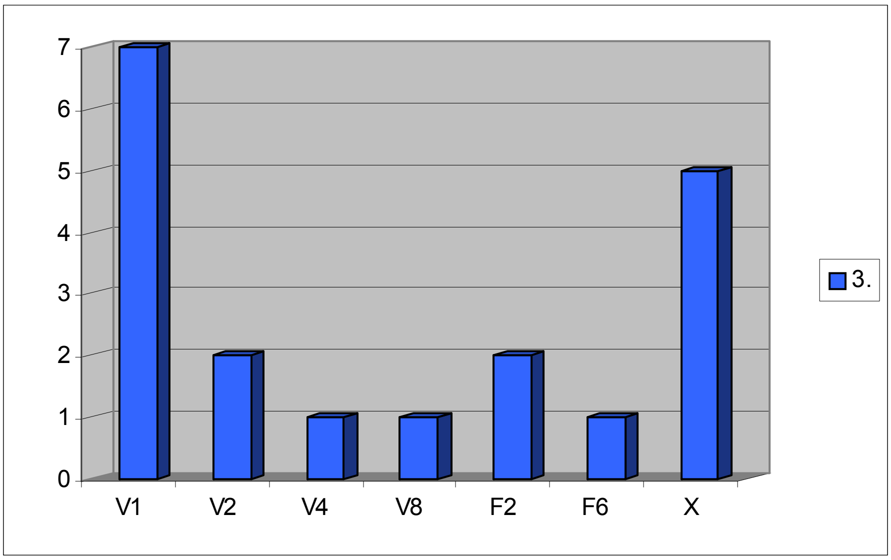


Gráfico 5.3 - Desempenho dos alunos na questão 3

Dos 8 alunos que não respondem de forma correcta, 5 não desenvolvem qualquer tipo de trabalho. Dos outros três alunos, dois deles respondem de forma errada, com justificação onde é visível uma certa confusão de conceitos. Por exemplo, a terminologia "rectas que se cruzam" está associada a "rectas perpendiculares" (Verdadeira *porque rectas secantes são aquelas que se cruzam logo são perpendiculares).*

Os alunos para responderem correctamente à questão 4 tinham que dominar a classificação de quadriláteros.

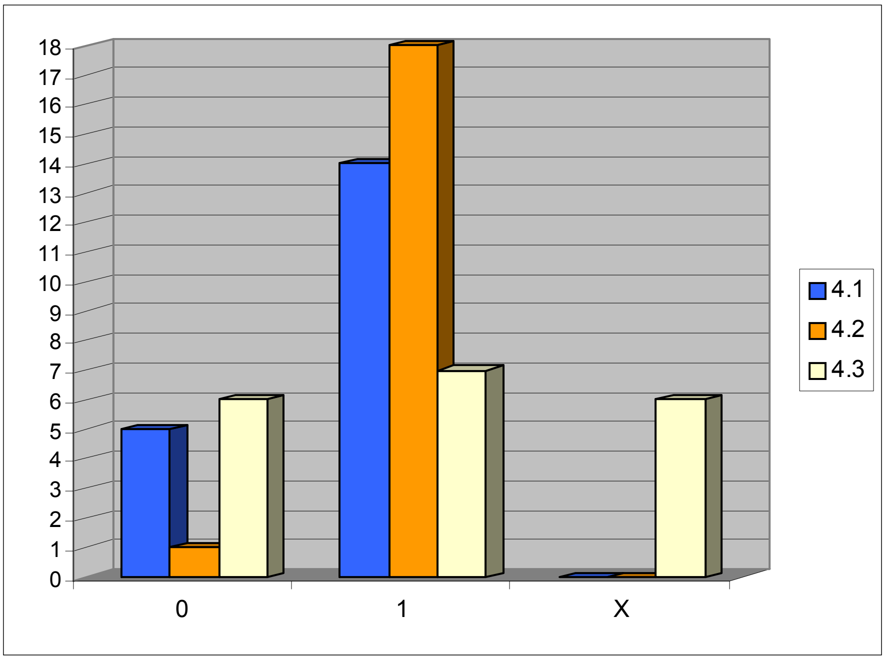


Gráfico 5.4 - Desempenho dos alunos à questão 4

Através da observação do gráfico 5.4, dos 19 alunos que realizaram o teste diagnóstico:

- 18 - Indicam os pontos, vértices de um losango;
- 14 - Indicam os pontos, vértices de um quadrado; e
- 5 - Indicam os vértices de um rectângulo como sendo os vértices de um quadrado.

Em relação à indicação dos vértices de um trapézio, 5 dos 19 alunos não desenvolveu qualquer tipo de trabalho e apenas 6 indicam correctamente os 4 pontos que constituem os vértices de um trapézio.

Relativamente à questão 5, sobre a classificação de quadriláteros, apenas 9 alunos respondem correctamente. Desses 9, 4 tiveram necessidade de elaborar um diagrama para servir de base à justificação, quer completa quer incompleta, apresentada.

O facto de 8 dos 19 alunos não desenvolver qualquer tipo de trabalho, para responder à questão, constitui um sinal de que esta questão apresenta dificuldade elevada.

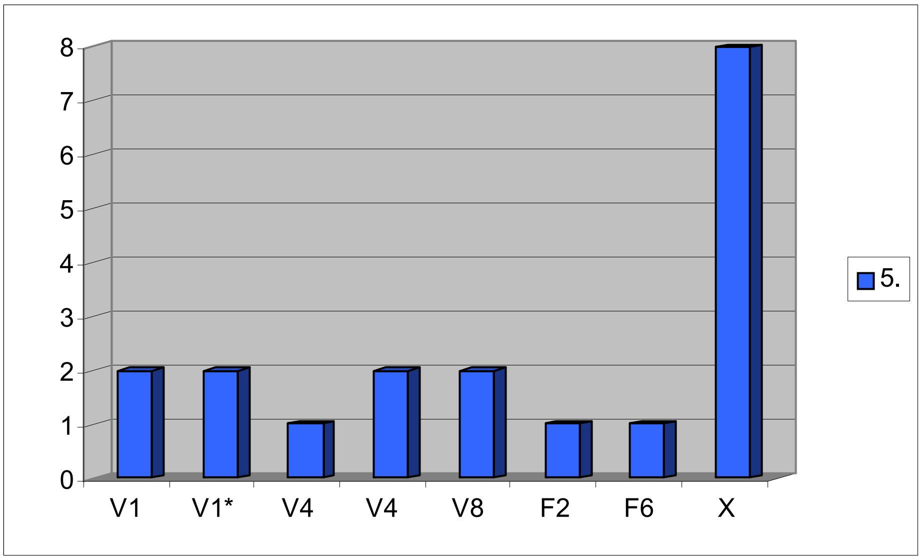


Gráfico 5.5 - Desempenho dos alunos à questão 5

Na questão 6, apenas 5 alunos responde de forma correcta. Desses 5 alunos, 4 recorrem a um contra-exemplo.

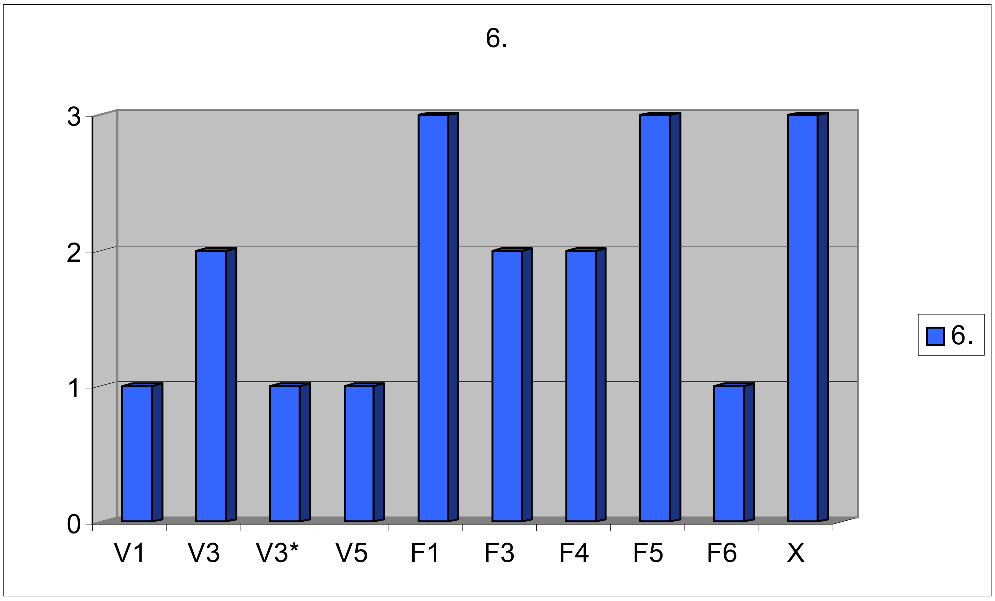


Gráfico 5.6 - Desempenho dos alunos à questão 6

As questões 7 e 8 tinham por objectivo avaliar a capacidade dos alunos na construção de argumentos, com base num diagrama, requerendo conhecimentos sobre paralelismo de rectas no plano (questão 7) e sobre congruência de triângulos (questão 8).

Através da observação dos gráficos seguintes, verifica-se que nenhum dos alunos respondeu de forma correcta à questão 7 e à questão 8 apenas 4 alunos respondeu de forma correcta. Destae 4 alunos, apenas um deles apresentou argumentação completa.

De uma forma geral, os alunos que apresentam argumentação, quer nas respostas correctas quer nas respostas incorrectas, desenvolvem comunicações curtas que, na sua maioria, revelam apenas algum domínio dos conceitos envolvidos e/ou revelam confusão ao nível conceptual.

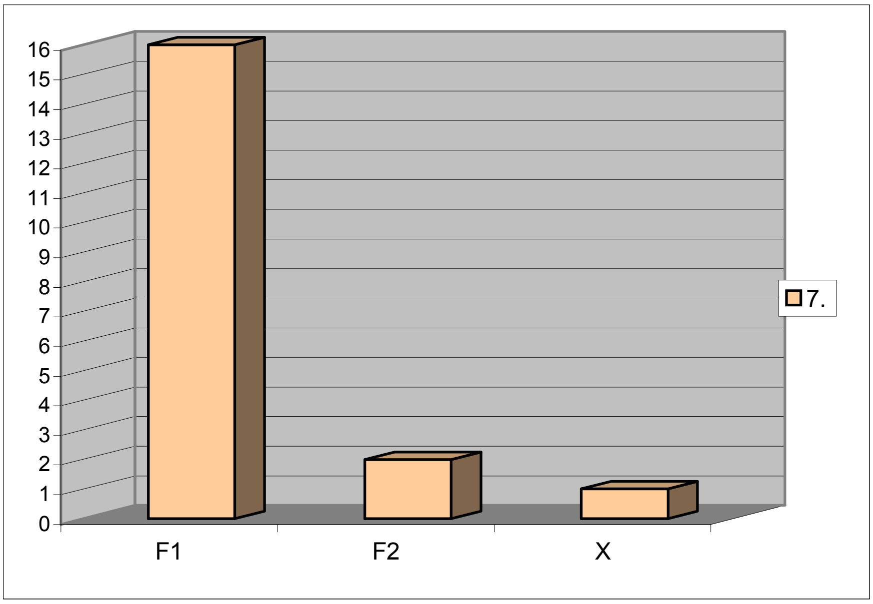


Gráfico 5.7 - Desempenho dos alunos à questão 7

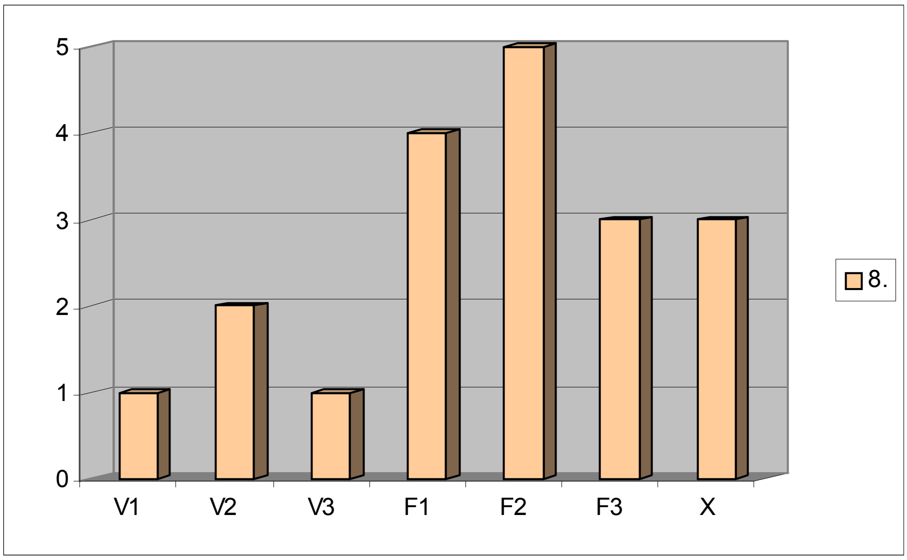


Gráfico 5.8 - Desempenho dos alunos à questão 8

À questão 9, apenas uma aluna respondeu correctamente. Tal facto permitiu elaborar a conjectura de que a questão, que envolve um cenário completamente novo para a aluna, teve significado para ela. No entanto, ao testar-se esta conjectura, através de uma entrevista, confrontando a referida aluna com as respostas apresentadas, confirmou-se que as respostas não foram dadas de forma segura e inclusivamente, no momento da entrevista, a aluna já responderia de forma errada.

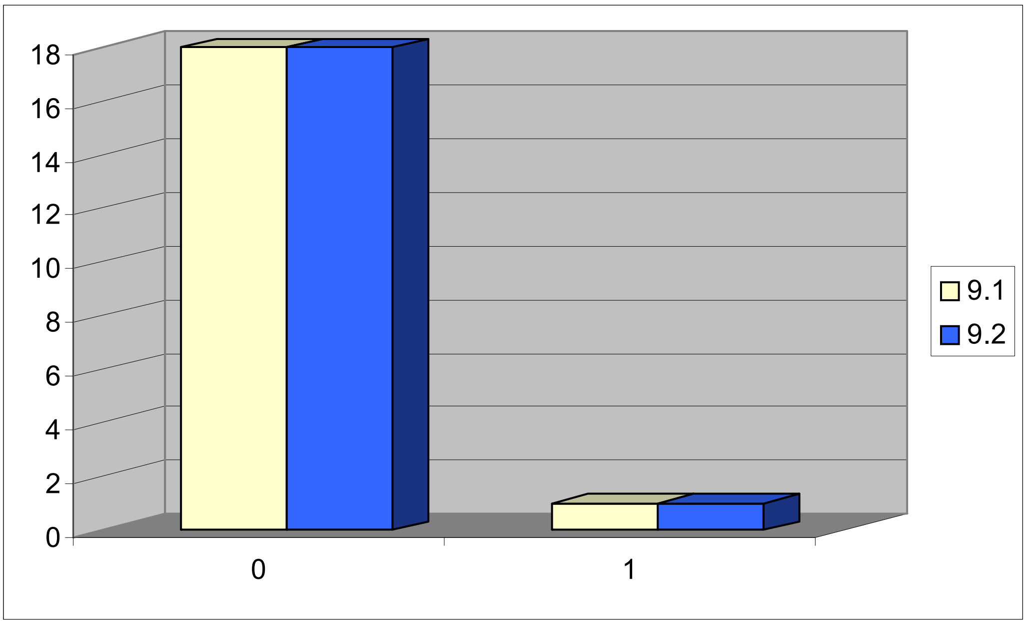


Gráfico 5.9 - Desempenho dos alunos à questão 9

Relativamente às questões 10, 11 e 12, os alunos revelaram grandes falhas conceptuais. Situação compreensível considerando que os conceitos abordados, nestas questões, vão ter um desenvolvimento mais profundo no currículo do 10º ano.

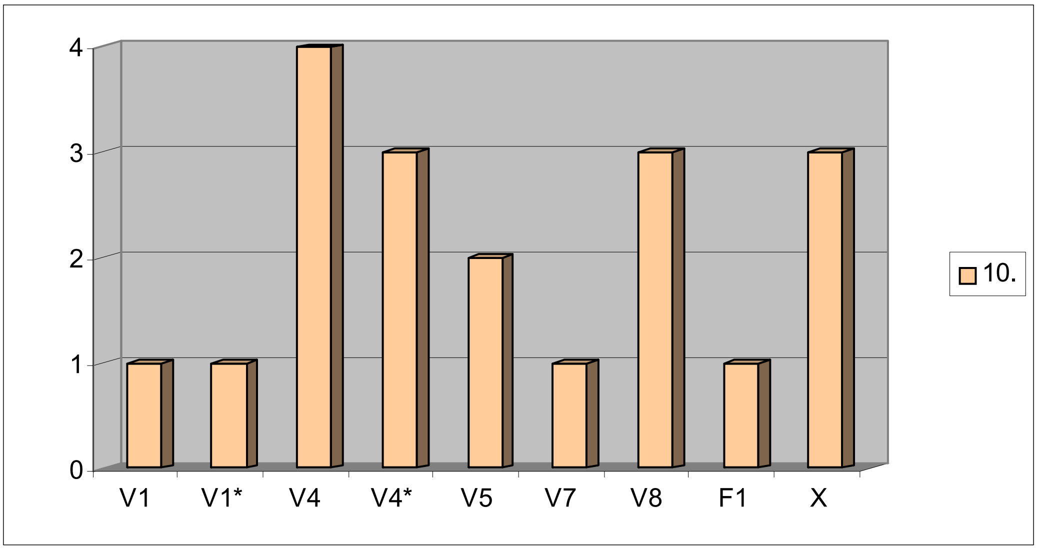


Gráfico 5.10 - Desempenho dos alunos à questão 10

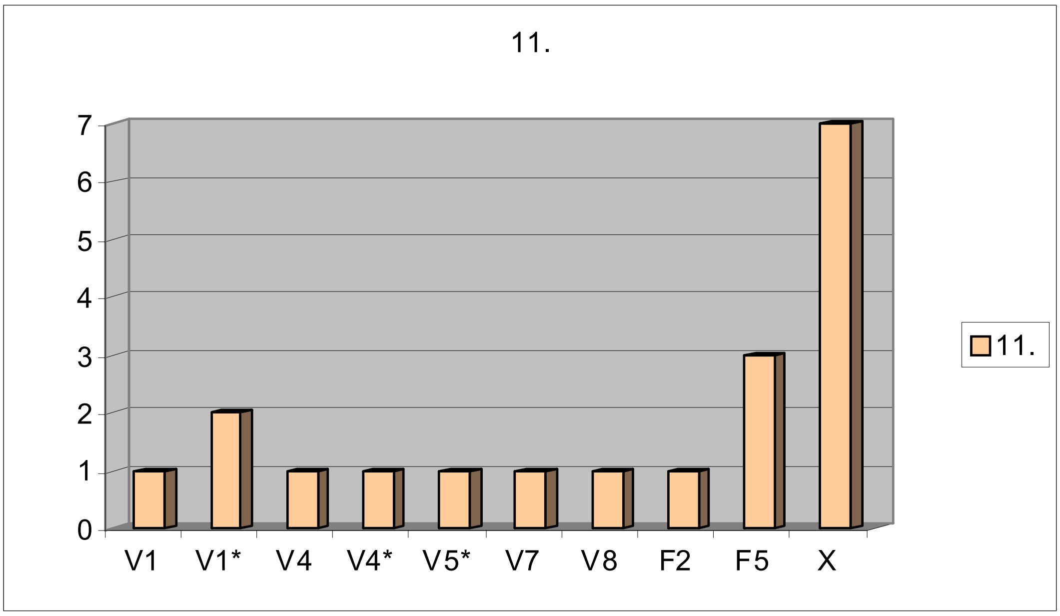


Gráfico 5.11 - Desempenho dos alunos à questão 11

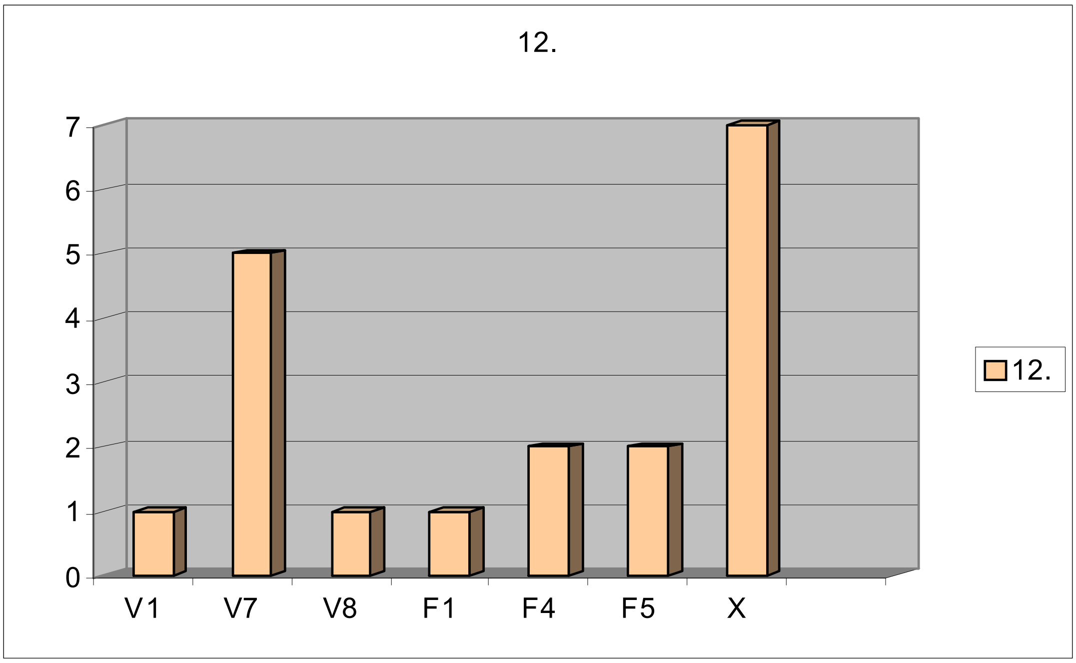


Gráfico 5.12 - Desempenho dos alunos à questão 12

A análise dos testes diagnósticos conduz aos seguintes comentários:

- Os alunos não dominam alguns dos conceitos fundamentais da Escolaridade Básica, nomeadamente, classificação de quadriláteros e congruência de triângulos;

- Os alunos apresentam um melhor desempenho nas questões em que toda a informação relevante é dada através de um diagrama;

- De uma forma geral, os alunos que apresentam argumentação, quer nas respostas correctas quer nas respostas incorrectas, desenvolvem comunicações curtas que na sua maioria, ou revelam apenas algum domínio dos conceitos envolvidos e/ou revelam confusão ao nível conceptual.

- Os alunos que respondem de forma correcta, recorrem frequentemente ao apoio de esboço de diagramas, principalmente nas questões em que não são exibidos diagramas no enunciado.

5.4 Questionário: características e expectativas

Após um ano, estes mesmos alunos foram confrontados com um questionário (Anexo 3) idêntico ao questionário inicial. Apercebemo-nos de alterações significativas, nomeadamente ao nível do entendimento de teorema, conjectura e demonstração (Anexo 6).

De seguida, apresentam-se algumas reacções, solicitadas por escrito, destes alunos após a realização desta experiência.

"*Se eu tivesse que falar a outras pessoas sobre diferentes tipos de geometria eu, de facto, diria que existe mais que um tipo de geometria. Qualquer um destes tipos se rege por diferentes regras e o que numa geometria pode ser é completamente impossível noutra".*

"*Foi uma experiência útil para a minha aprendizagem, pois, fiquei a conhecer outros tipos de geometria e aprendi a resolver problemas pelo Modelo de Pólya, o que torna essa tarefa mais fácil de realizar. Foi importante o recurso aos computadores e a todos os outros materiais que usámos para nos ajudarem a resolver os problemas*".

"*Aprendemos um novo método de resolução de problemas e trabalhamos numa geometria hiperbólica, quando só sabemos trabalhar na Euclidiana*".

"*Antes de começar com as sessões, sabia apenas da existência da Geometria Euclidiana, a partir daí fiquei a conhecer mais uma, a Geometria Hiperbólica*".

"*Não me lembro muito bem das sessões, mas gostei de trabalhar no computador. Era uma maneira diferente de perceber as outras geometrias. O Modelo de Pólya não me ajudou muito, mas apliquei-o em algumas situações*".

"*Não me lembro muito bem das sessões, mas gostei de trabalhar com o computador, com materiais relacionados com os problemas, apesar de achar muito difícil a sua resolução. Quando tive dificuldades, recorri a esquemas e desenhos. Os problemas que mais gostei foram: o problema do Pentágono e o Losango dentro de um cubo. Sinto que aprendi mais sem o computador*".

"*No início, não gostei muito das sessões, mas agora acho que são importantes! Já as vejo com outros olhos*".

5.5. A pasta de problemas

Das tarefas matemáticas actualmente previstas no currículo do ensino secundário, têm especial enfoque as investigações matemáticas.

No livro sob o título -***Investigações matemático na sala de aula*** (Ponte, J. et al. 2003) estes investigadores referem:

"O conceito de investigação matemática, como actividade de ensino - aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da actividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor" (p. 23).

A turma foi confrontada com uma pasta de problemas que fez parte integrante da planificação anual prevista para esta turma. Os problemas foram, na sua grande maioria, resolvidos no 1º período do 10 º ano. A pasta de problemas delineada para a experiência de ensino e aprendizagem engloba, de uma forma geral, situações em que os alunos têm que desenvolver actividade de natureza exploratória e apresentar argumentação para as soluções apresentadas.

A tabela seguinte apresenta as fases de desenvolvimento da pasta de problemas, que será descrita com mais detalhe nos capítulos seguintes.

• **Fase1**[22]: Familiarização dos alunos com software de Geometria Dinâmica (GSP); módulo de lógica - noções básicas de lógica (e.g. Modus Ponens); actividades com o postulado das paralelas em distintos modelos de geometria (Euclidiana e não Euclidiana)
• **Fase 2**: Actividades envolvendo problemas de prova em geometrias incidentes.
• **Fase 3**: Exploração de teoremas, propriedades, etc.

Tabela 5.3 – Estrutura da pasta de problemas – Fases de desenvolvimento

[22] Esta fase foi desenvolvida com toda a turma.

Capítulo 6
Pasta de problemas. Trajectória didáctica

6.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se as situações problema propostas no contexto da turma e descreve-se a respectiva trajectória didáctica.

Apresentam-se os sub-capítulos sequenciais: Os primeiros problemas – Recurso ao Geometer´s Sketchpad (GSP), envolvendo conteúdos de geometria plana do 3º Ciclo do ensino básico; O módulo de lógica; Situações problema num contexto diversificado de geometria plana e, finalmente, é apresentada a avaliação da adequação didáctica da experiência de ensino implementada.

Em relação a alguns dos problemas faz-se o registo de episódios ocorridos na sua resolução, com especial atenção aos conflitos cognitivos registados.

6.2. Os primeiros problemas. Recurso ao Geometer´s Sketchpad.

6.2.1. Características e o modo como foram abordados

A configuração didáctica destes primeiros problemas foi elaborada tendo em consideração as orientações curriculares para o ensino secundário, nomeadamente para o 10º ano de escolaridade. Assim, a implementação destes problemas em sala de aula é feita no contexto do módulo de Resolução de Problemas, previsto para o início do 10º ano, em que um dos objectivos é o de rever conceitos estruturantes previstos no currículo do ciclo de estudos da escolaridade básica.

A tabela seguinte apresenta, sequencialmente, as sessões dinamizadas na turma. Neste sub-capítulo vamos focar a nossa atenção nas 5 primeiras.

SESSÕES/DATA	PROBLEMAS
1ª - 09/Nov. /2004	Polígonos e polígonos inscritos – razão das áreas
2ª - 16/Nov./2004	Conclusão da tarefa da aula anterior
3ª - 23/Nov./2004	Problema do pentágono
4ª - 30/Nov./2004	Problema (provar que determinada secção produzida num cubo é um losango)
5ª - 07/Dez./2004	Problema – "Os náufragos"
6ª - 14/Dez./2004	Enunciados da forma *"se...então"*
7ª - 04/Jan./2005	Enunciados Recíprocos
8ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
9ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
10ª - 25/Jan./2005	Vários modelos de geometria plana
11ª - 11/Fev./2005	Vários modelos de geometria plana
12ª - 08/Mar./2005	Vários modelos de geometria plana
13ª - 12/Abr./2005	Problema (Técnica de redução ao absurdo)
14ª - 26/Abr./2005	Problema
15ª 26/Maio/2005	Problema de cortes num cubo

Tabela 6.1 – Pasta de problemas

Refira-se os principais objectivos destas sessões:

-Promover a construção, visualização e análise de figuras planas obedecendo a determinadas condições;

- Encorajar a elaboração de conjecturas, tirando partido de um programa de GD (Geometria Dinâmica) e a explicação lógica das observações feitas;

-Promover a "dúvida" sobre conjecturas elaboradas com base, apenas, em figuras (e.g., Problema do pentágono);

-Facilitar a tomada de consciência de que a verdade matemática não deve ser fundamentada através de exemplos, apesar dos exemplos poderem promover a compreensão;

- Promover a elaboração de justificações escritas.

Além dos objectivos específicos mencionados anteriormente, com estas sessões pretendia-se:

- Rever conteúdos estruturantes da escolaridade básica;

- Familiarizar os alunos com heurísticas da resolução de problemas (modelo de Pólya e modelo de Schoenfeld) e ambientes de geometria dinâmica.

A tabela seguinte apresenta, de forma sintética, os conteúdos abordados em cada problema e os recursos utilizados.

Problema	Conteúdos	Recursos
Polígonos e Polígonos Inscritos – Razão entre as suas áreas [23]	-Semelhança de triângulos; -Decomposição de polígonos.	Geometer´s Sketchpad
Problema do Pentágono[24]	-Definição de distância entre dois pontos; -Propriedade fundamental das proporções; -Operações com radicais.	Geometer´s Sketchpad
Problema - Provar que determinada sessão produzida num cubo é um losango.	-Classificação de quadriláteros	Cubos de acrílico; Zometool
Problema – Os náufragos	-Triângulo equilátero; linhas e pontos notáveis de um triângulo. -Decomposição de polígonos.	Geometer´s Sketchpad

Tabela 6.2 – Conteúdos abordados e os recursos utilizados nos primeiros problemas

Estas sessões decorreram no laboratório de educação matemática, Lem@Tic, do Departamento de Didáctica e Tecnologia da Universidade de Aveiro. Os alunos trabalharam organizados em grupos de dois elementos e tinham à sua disposição, em todas as sessões, os recursos mencionados na tabela anterior. A dinamização das sessões era, no

---

[23] Tarefa adaptada de De Villiers, M.," A Sketchpad Discovery Involving Areas Of Inscribed Polygons", *Mathematics in Scholl, March 1999.*
[24] Tarefa adaptada de – The Pentagon Problem: Geometric Reasoning with Technology", THE MATHEMATICS TEACHER, Vol.89, Nº 2, February 1996

geral, assumida pela investigadora, mas a supervisão da actividade desenvolvida pelos alunos era da responsabilidade quer da investigadora quer do professor da turma.

No início de cada sessão, era dado o enunciado do problema e, após a leitura do mesmo, era realizado um ponto da situação com a turma, no sentido de ficar claro o que era dado e pretendido no problema. No final de cada sessão, cada aluno arquivava o seu trabalho escrito num dossier de grupo. O tempo dispendido na compreensão e exploração da situação dada era demasiado em detrimento da planificação, resolução e avaliação da solução do problema.

Assim, mostrou-se pertinente contabilizar os tempos dispendidos no processo de resolução de um problema e, para tal, recorreu-se ao modelo de Schoenfeld (Anexo 8).

A utilização do modelo de Schoenfeld

O recurso ao modelo serviu de apoio à reflexão da actividade desenvolvida pelos alunos nas cinco primeiras sessões e ajudou a fazer uma avaliação mais objectiva das atitudes e comportamentos dos alunos. Na dinamização das sessões passou-se a dar orientações no sentido de uma leitura e análise da situação-problema mais demorada, bem como na avaliação da solução.

6.2.2. Argumentação e prova

Vamos apresentar alguns exemplos de solução destes primeiros problemas.

Problema - Polígonos e Polígonos Inscritos – Razão entre as suas áreas

- Constrói dois triângulos, em que os vértices de um deles (triângulo inscrito) são os pontos médios dos lados do outro triângulo. Qual a razão entre as áreas destes dois triângulos? Justifica.

- Constrói dois quadriláteros em que os vértices de um deles (quadrilátero inscrito) são os pontos médios do outro. Qual a razão entre as suas áreas? Justifica.

- Prevê o que acontece no caso de considerares pentágonos e, comprova a tua previsão procedendo de forma análoga à seguida nos pontos anteriores. Qual a razão entre as áreas dos pentágonos? Justifica.

Os alunos, distribuídos dois a dois por computador, depois de lerem o enunciado da tarefa procederam à construção das figuras (triângulos e quadriláteros).

Na questão 1, depois de darem animação à figura (arrastando um dos vértices com o rato), facilmente indicaram a razão das áreas.

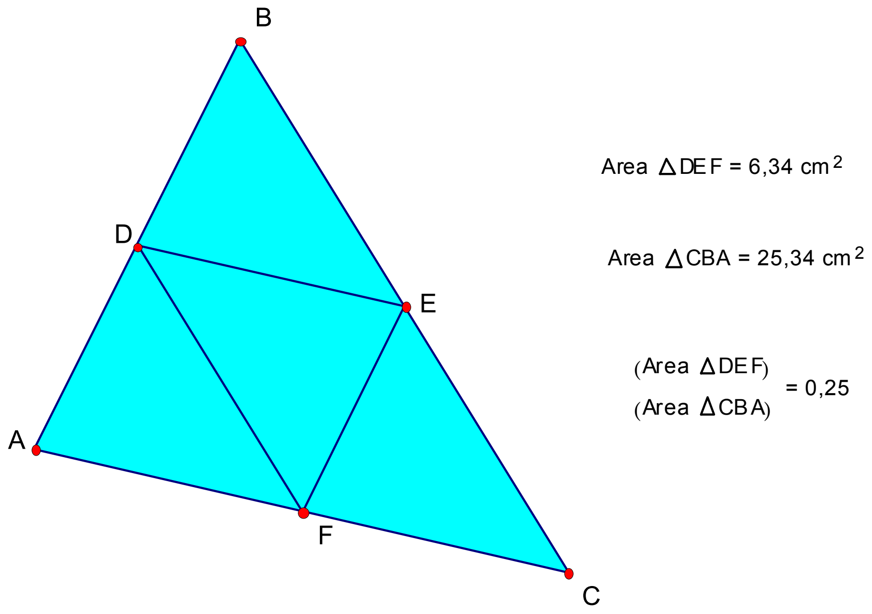


Figura 6.1 – Sketch associado à questão 1. Problema-Polígono e Polígonos inscritos

E elaboraram a conjectura de que a razão entre as áreas é 0,25 (a razão da área do triângulo interior para a área do triângulo exterior).

Confrontados com a questão "Qual a justificação para esta conjectura?" – os alunos argumentaram com a figura, apontando no ecrã do computador e afirmando que tinham quatro triângulos todos iguais. A figura, só por si, convenceu-os de que a razão era 0,25 para quaisquer triângulos.

Face às dificuldades reveladas pelos alunos em elaborar uma justificação sem recorrer ao diagrama, foi feita a revisão de semelhança de triângulos (com referência aos casos de semelhança de triângulos). Mesmo assim, os alunos foram orientados nas justificações apresentadas.

Na questão 2, procederam de forma análoga. Indicaram a razão entre as áreas dos polígonos em causa e tentaram justificar a partir da observação de vários Sketchs. Mas neste os diagramas não se revelaram tão convincentes. Não houve tempo para a elaboração da justificação nesta sessão.

Iniciou-se a 2ª sessão com a elaboração de uma síntese, elaborada oralmente com a colaboração dos alunos, da actividade desenvolvida na sessão anterior. Fez-se referência à definição de problema e do modelo de resolução de problemas (segundo George Pólya) e distribui-se material de apoio (a incluir no dossier de cada aluno).

Apesar da justificação à questão 2 ter sido muito orientada e as produções dos alunos parecidas, as figuras que serviram de suporte à justificação foram diferentes. As mais frequentes assemelhavam-se a rectângulos, seguidas de outras que se assemelhavam a trapézios e a não trapézios, ilustrado de seguida através de algumas produções de alunos.

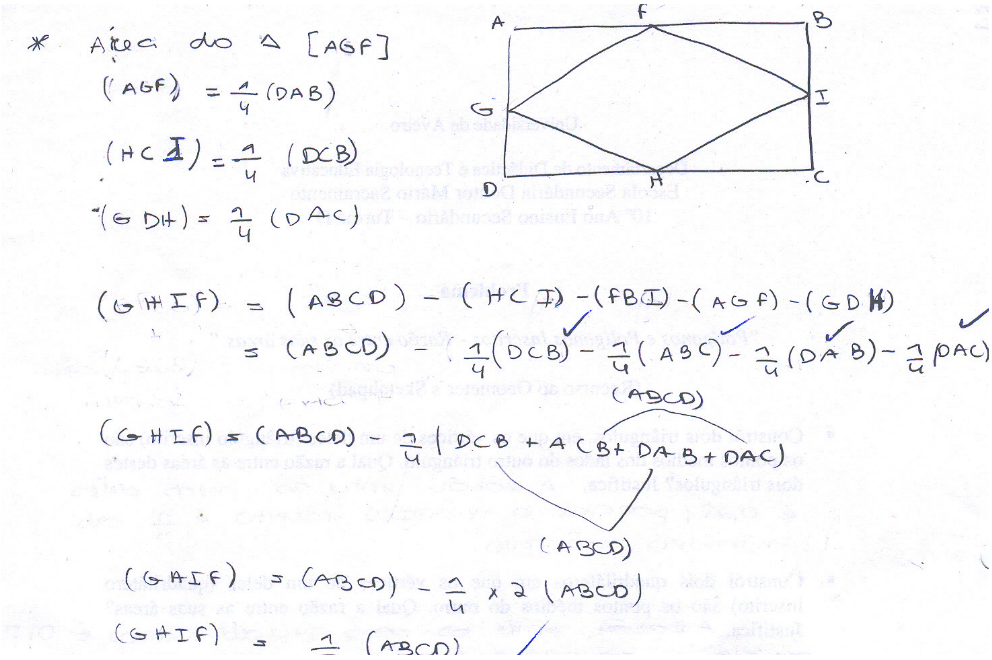


Figura 6.2 – Solução apresentada à questão 2 do problema 1

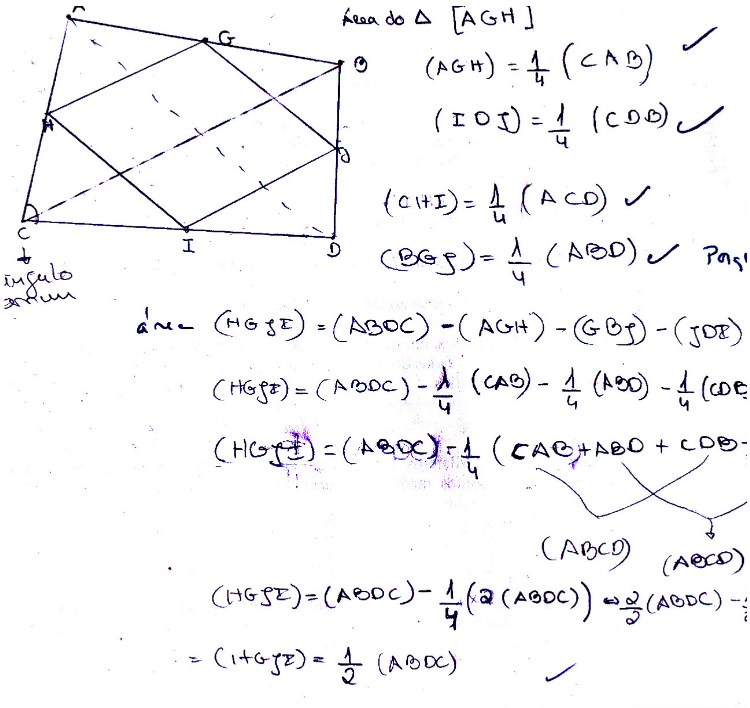


Figura 6.3 – Solução apresentada à questão 2 do problema 1

As justificações, segundo uma abordagem sintética, foram feitas com base em diagramas. Essas justificações, no geral, estão incompletas e apresentam falhas ao nível simbólico.

Apesar de alguns alunos terem observado que a mesma razão de áreas também parecia verificar-se para quadriláteros côncavos, apenas fizeram as justificações para quadriláteros convexos e seguiram a justificação elaborada pela investigadora para quadriláteros côncavos.

Em relação à questão 3, a conjectura elaborada foi a de que a razão também seria constante mas, na elaboração da justificação e ao recorrerem à construção de figuras nas condições do enunciado, facilmente conseguiram contra-exemplos.

Das notas de campo relativas a estas sessões parece importante referir:

- Os alunos não aplicaram de forma autónoma conhecimentos significativos da escolaridade básica (semelhança de triângulos);

- Os vários cenários produzidos com recurso ao programa Geometer´s Sketchpad, só por si, convenceram os alunos de que as respostas apresentadas às questões (e.g., a razão de área entre dois triângulos é 0,25) estavam correctas;

- Para a justificação pedida, os alunos revelaram pouca autonomia pedindo apoio de forma insistente;

- Os alunos aderiram muito bem ao programa Geometer´s Sketchpad (foi a primeira vez que tiveram contacto com um programa de Geometria Dinâmica) e conseguiram de forma quase autónoma realizar as várias construções;

- A questão 2 ofereceu mais dificuldades - Ao nível da justificação nenhum aluno arriscou uma argumentação, com base no diagrama, como aconteceu na questão 1;

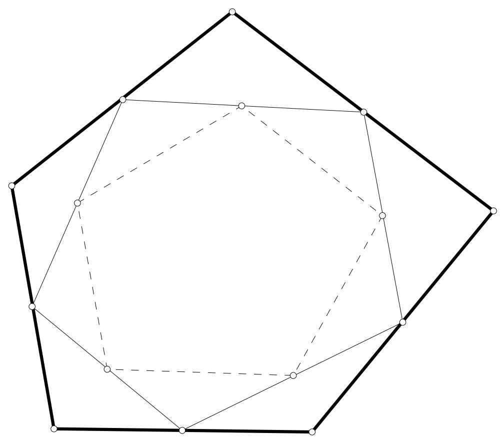
- Foi-lhes dada a orientação, na questão 2, para decomporem as figuras segundo as diagonais do quadrilétero inicial e a seguir aplicarem conhecimentos de semelhança de triângulos mas, apesar destas orientações, subsistiram as dúvidas e não conseguiram elaborar a justificação escrita;

- Só depois de uma nova leitura dos materiais de apoio sobre semelhança de triângulos (Anexo 9) e através da visualização das figuras construídas é que os alunos iniciaram de forma mais autónoma a justificação da conjectura estabelecida para a questão 2;

- Os vários diagramas que serviram de base à elaboração das justificações eram diferentes, na medida em que os alunos, arrastando um dos vértices, geraram cenários diferentes (trapézios, não trapézios e trapézios rectângulos). No entanto, nove alunos (em 19 alunos) elaboram a justificação com base em quadriláteros "parecidos" com rectângulos.

Problema do pentágono

Considera três pentágonos, como mostra a figura, em que o segundo se obtém unindo os pontos médios dos lados do pentágono inicial e o terceiro pentágono obtém-se unindo os pontos médios do segundo pentágono.



Consulta o Sketch "pentágono"que está no ambiente de trabalho, "arrasta" um dos vértices do pentágono inicial e elabora uma conjectura sobre a razão entre os perímetros de um dos pentágonos e do seu pentágono inscrito.

Consideras a tua conjectura verdadeira? Porquê?

Após a leitura do enunciado do problema, foi sentida a necessidade de clarificar o significado de conjectura (foi apresentada a definição que consta no "Lello Universal" – *Conjectura, opinião com fundamento incerto; suposição; hipótese*). Atendendo ao facto de um dos alunos ter referido a designação axioma, foram dadas definições[25].

25

Axioma – Verdade evidente por si própria e que não carece de demonstração;

Teorema – Proposição que precisa de ser demonstrada para se tornar evidente (Lello Universal).

Após este diálogo, os alunos foram convidados a recorrer ao Sketch que tinham no ambiente de trabalho, mostrando três pentágonos (o primeiro P_1, o exterior, de cor azul, o intermédio P_2, de cor verde claro, obtido por união dos pontos médios dos lados do pentágono exterior e, finalmente, o pentágono verde P3, obtido por união dos lados do pentágono intermédio). Os alunos, ao arrastarem um dos vértices do pentágono exterior, geravam vários valores (aproximação às décimas) para os respectivos perímetros. Ao estabelecerem as razões $\frac{P_2}{P_1}$ e $\frac{P_3}{P_2}$ elaboraram a conjectura: " nas condições do problema a razão entre os perímetros era igual, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2}$, independentemente da forma e do tamanho dos pentágonos.

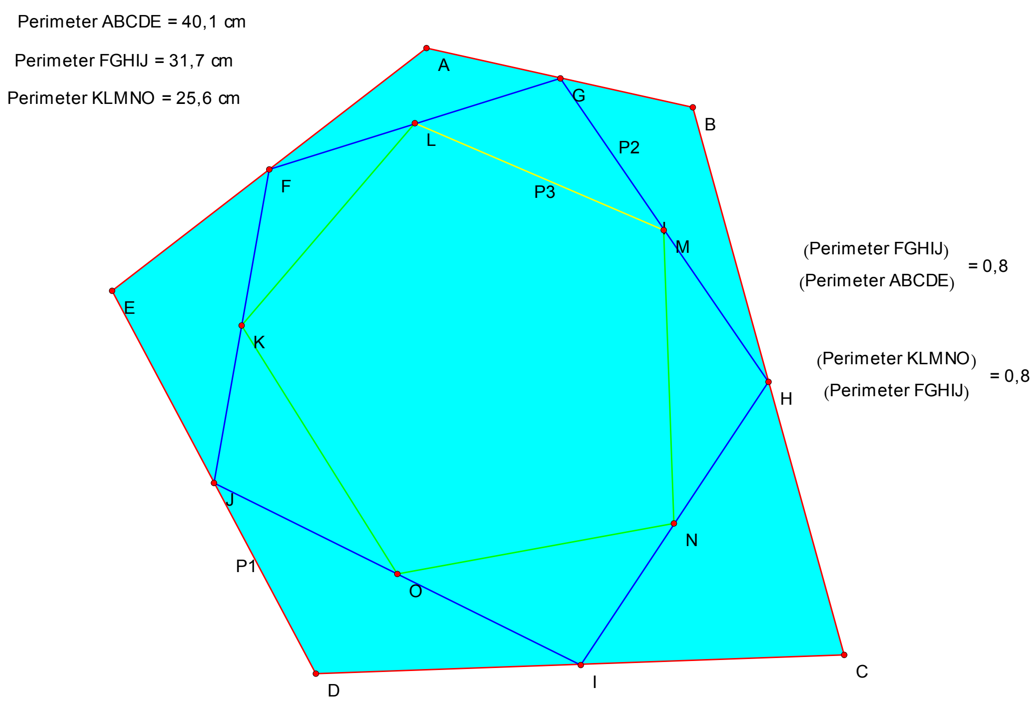


Figura 6.4 – Razão entre os perímetros dos pentágonos (aproximação às décimas)

Confrontados com a questão: "A conjectura que elaboraram será válida?", os alunos, arrastando um dos vértices do pentágono exterior, reafirmaram a conjectura.

Para os alunos procederem à avaliação da conjectura elaborada, foi feita a sugestão da seguinte abordagem: Recurso à opção *Preferences* do Geometer´s Sketchpad e adoptarem diferentes aproximações para os valores dos perímetros dos pentágonos.

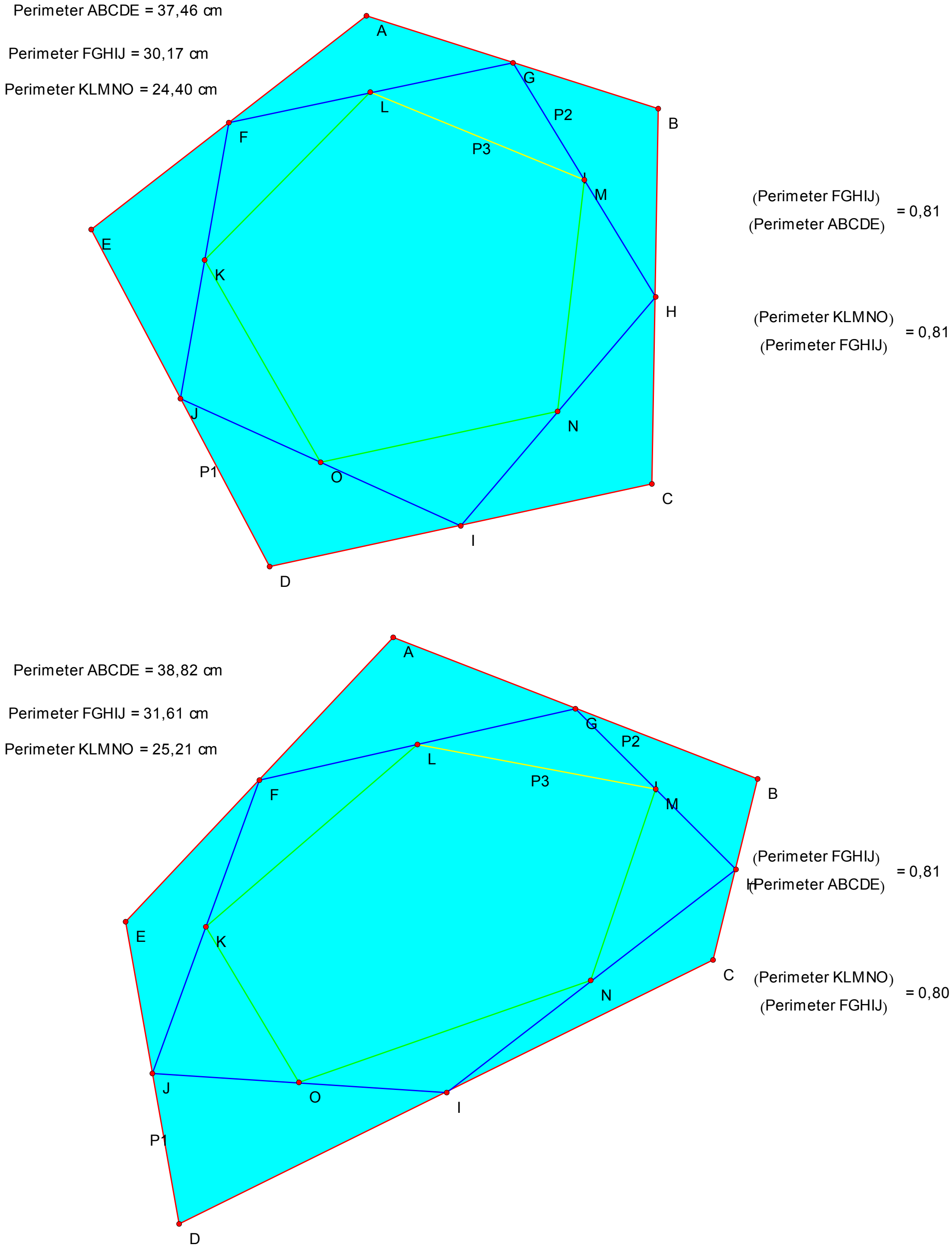


Figura 6.5 – Razão entre os perímetros dos pentágonos (aproximação às centésimas)

Perante este caso, uns alunos diziam que a conjectura era verdadeira outros diziam que era falsa. Enfim, uma grande insegurança no juízo elaborado dado que os diferentes valores obtidos para a razão entre os perímetros não "suportavam" a conjectura elaborada.

Uma 2ª abordagem foi desenvolvida com recurso à geometria analítica. Considerando que os alunos tinham dado, nas duas aulas anteriores, a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano, foi sugerido um exemplo, com atribuição de coordenadas aos vértices dos pentágonos e, assim, depois de determinados os perímetros e as razões avaliarem a veracidade da conjectura. Na síntese da actividade desenvolvida, fez-se referência à importância de elaborar justificações que vão além do recurso a exemplos concretos. Inicialmente, foi elaborada uma conjectura plausível mas veio a verificar-se que era falsa, através do recurso a contra-exemplo.

6.2.3. Síntese

Das notas de campo, parece importante salientar que:

- Os alunos aderiram bem à 1ª abordagem;
- A 2ª abordagem revelou-se maçadora e os alunos demonstraram dificuldades ao nível do cálculo, pedindo apoio com frequência;
- Os alunos com domínio do cálculo da distância entre dois pontos, mais facilmente conseguiram concluir que a conjectura inicial era falsa.

Relativamente à sessão 4, na qual se propôs o problema (Anexo 10) – "Consideremos o cubo com 4 cm de aresta representado na figura. Sabendo que os pontos I e J são pontos médios das arestas [AE] e [CG], respectivamente, prova que a secção produzida no cubo pelo plano IDJ é um losango", os alunos não tinham presente o que era um losango e teve que ser feita a revisão da classificação de quadriláteros. Para apoio à visualização da secção de corte no cubo, houve o recurso a cubos de acrílico (os quais tinham água colorida para apoiar a visualização da secção de corte) e ao Zometool.

Os alunos conseguiram estruturar a prova, mas com orientação. Registaram-se soluções segundo duas abordagens distintas: sintética e analítica. O professor destes alunos referiu que, mais tarde, iriam resolver o mesmo problema utilizando uma outra abordagem, a vectorial.

Relativamente à sessão 5, foi proposto o problema – "Dois náufragos vão ter a uma ilha com a forma de um triângulo equilátero e querem escolher o local para construírem uma cabana. A ilha está coberta de árvores e têm de abrir caminhos para irem às três praias da ilha, que são os lados do triângulo. Qual o local, da ilha, onde devem construir a cabana para que o comprimento total dos caminhos seja mínimo". Alguns alunos referiram que o centro de gravidade do triângulo (modelo da situação) seria o lugar ideal para a localização da cabana. Após a "manipulação" da figura construída com o GSP, elaboraram a conjectura de que a cabana podia ser construída em qualquer ponto da ilha. No entanto, os alunos que tinham mencionado o baricentro do triângulo, mostraram admiração. Foi sugerida a decomposição da figura em triângulos e através da fórmula do cálculo da área de um triângulo escreveram as expressões, para um caso genérico, das áreas dos vários triângulos em causa. Não conseguiram elaborar a justificação de forma autónoma.

6.3. O módulo de lógica

6.3.1. Noções elementares de lógica: Abordagem didáctica

Nas sessões 6, 7 e 8 procedeu-se ao estudo de noções elementares de lógica. O principal objectivo destas sessões era familiarizar os alunos com heurísticas para elaborar e interpretar argumentos, compreendendo a sua consistência interna.

Recorreu-se à ficha de apoio (Anexo 9) a qual foi desenvolvida ao longo destas sessões. Referiu-se a importância deste módulo para "aprender a demonstrar" e, após um diálogo com a turma sobre o significado dado à palavra "demonstrar", apresentou-se a seguinte definição - Demonstrar significa estabelecer a veracidade de uma determinada afirmação a partir de outras dadas no enunciado e de afirmações demonstradas anteriormente.

A tabela seguinte apresenta, sequencialmente, as sessões dinamizadas na turma. Neste sub-capítulo vamos focar a nossa atenção nas sessões 6, 7, 8 e 9.

SESSÕES/DATA	PROBLEMAS
1ª - 09/Nov./2004	Polígonos e polígonos inscritos – razão das áreas
2ª - 16/Nov./2004	Conclusão da tarefa da aula anterior
3ª - 23/Nov./2004	Problema do pentágono
4ª - 30/Nov./2004	Problema (cortes num cubo)
5ª - 07/Dez./2004	Problema – "Os náufragos"
6ª - 14/Dez./2004	Enunciados da forma *"se...então"*

7ª - 04/Jan./2005	Enunciados Recíprocos
8ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
9ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
10ª - 25/Jan./2005	Vários modelos de geometria…
11ª - 11/Fev./2005	Vários modelos de geometria…
12ª - 08/Mar./2005	Vários modelos de geometria
13ª - 12/Abr./2005	Problema (Técnica de redução ao absurdo)
14ª - 26/Abr./2005	Problema
15ª 26/Maio/2005	Problema de cortes num cubo

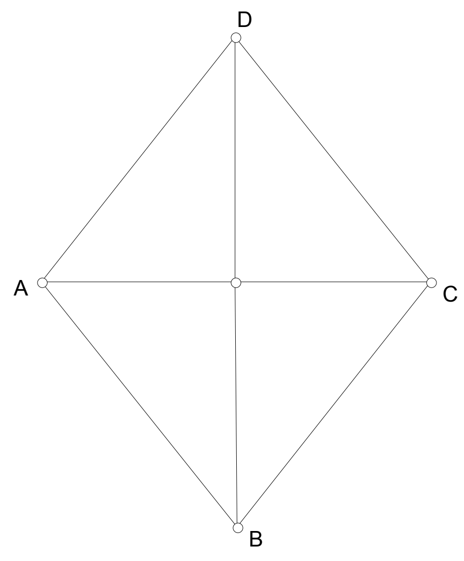
Tabela 6.3 – Pasta de problemas

Num primeiro momento, foi solicitada a exploração do exemplo 1 da ficha de apoio “Aprender a demonstrar”.

Exemplo 1: Se [ABCD] é um losango então as suas diagonais são perpendiculares

Os alunos começaram por elaborar a construção (construção demorada) do losango através do recurso ao G. Sketchpad (GSP). Através das potencialidades do GSP, tendo como base a figura construída, os alunos afirmaram que a proposição era verdadeira. Neste momento, elaborei questões no sentido de lhes suscitar dúvidas, criando analogias com o *problema do pentágono*. Os cenários do Sketch, com uma aproximação às unidades e/ou às décimas, dava indicações “visuais” de que uma conjectura era verdadeira e, de facto, com outra aproximação e outra abordagem, os alunos concluíram que a conjectura inicial era falsa. Após este diálogo, os alunos provaram a validade da proposição. Alguns tentaram aplicar o teorema de Pitágoras, mas não conseguiram realizar a prova com sucesso.

Este exemplo serviu de contexto para familiarizar os alunos com enunciados da forma *“se...então”*.



Designemos por:

p: “[ABCD] é um losango”

q: “as suas diagonais são perpendiculares”

Abreviadamente, podemos escrever $p \Rightarrow q$

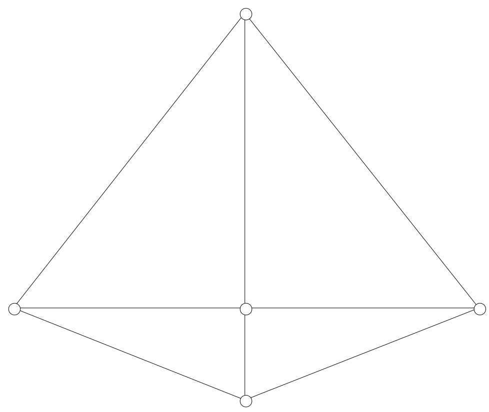
Considerando que seria importante a construção da tabela de verdade da operação lógica "$\Rightarrow$" implicação, foi elaborada a questão - Quando é que a afirmação dada é falsa?

Hipótese e Tese

No exemplo anterior, referiu-se que a afirmação "[ABCD] é um losango" é designada de hipótese e que a afirmação "as suas diagonais são perpendiculares" é designada por tese.

Foi feita a chamada de atenção, aos alunos, para não se fazer confusão entre "hipótese" e "tese".

No seguimento do exemplo anterior, referiu-se, exemplificando com um diagrama, de que existem quadriláteros que têm as diagonais perpendiculares sem serem losangos.



Enunciados Recíprocos

A este propósito, foi dada a informação de que, a partir de uma frase do tipo "se…então" podemos formar outra frase "invertendo" a hipótese e a tese. A frase obtida é designada recíproca da primeira.

Definição: O enunciado "se p então q"é recíproco do enunciado " se q então p".

Notação: Enunciado directo $p \Rightarrow q$; Enunciado recíproco $q \Rightarrow p$

Foram dados alguns exemplos.

Exemplo 1

Enunciado: Se um quadrilátero [ABCD] tem diagonais que se intersectam no ponto médio, então [ABCD] é um paralelogramo.

Enunciado recíproco: Se [ABCD] é um paralelogramo, então as suas diagonais [AC] e [BD] intersectam-se no ponto médio.

Exemplo 2

Enunciado: Se um triângulo [ABC] é rectângulo em A então $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Enunciado recíproco: Se $BC^2 = AB^2 + AC^2$, então o triângulo [ABC] é rectângulo em A.

Nesta altura, pareceu importante proceder a uma chamada de atenção dando exemplos.

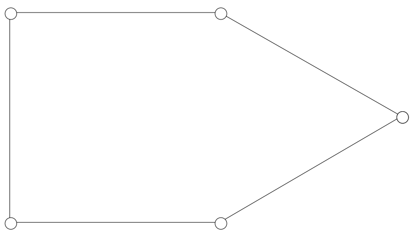
Atenção: Se um enunciado é verdadeiro, o seu enunciado recíproco não é forçosamente verdadeiro.

Exemplos

1) É verdade que "se duas rectas são perpendiculares então elas são secantes", mas é falso dizer que "se duas rectas são secantes, então elas são perpendiculares"

2) É verdade que "se um polígono é regular, então os seus lados têm a mesma medida de comprimento", mas é falso afirmar que "se um polígono tem os lados com a mesma medida de comprimento, então ele é regular"

Para mostrar que esta segunda frase é falsa, é suficiente dar um "contra-exemplo". O diagrama seguinte mostra um pentágono não regular em que os cinco lados têm a mesma medida de comprimento.



Enunciados Equivalentes

No seguimento da referência a enunciados e seus recíprocos, procedeu-se à seguinte explicação de enunciados equivalentes. Frequentemente, em matemática, queremos dizer que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ são ambas verdadeiras. É, assim, conveniente introduzir um novo símbolo "$\Leftrightarrow$".

Para expressar tal facto, podes pensar no símbolo $p \Leftrightarrow q$ como sendo uma maneira abreviada de escrever ($p \Rightarrow q$) e ($q \Rightarrow p$).

Exemplo:

p: Se [ABCD] é um paralelogramo com $\overline{AB} = \overline{AD}$, então [ABCD] é um losango

q: Se [ABCD] é um losango, então [ABCD] é um paralelogramo com $\overline{AB} = \overline{AD}$

A construção da tabela de verdade para a operação lógica"$\Leftrightarrow$" foi construída pelos alunos com base em exemplos familiares.

6.3.2. Conflitos observados

Das notas de campo registadas nestas sessões, parece importante salientar que:

- A construção do losango foi demorada e, segundo o professor destes alunos, provocou perdas de tempo (alguns alunos revelaram dificuldades na construção do losango);
- A reflexão realizada pela investigadora e pelo professor da turma levou à elaboração da conjectura que estes alunos estavam mais habituados a raciocinar sobre figuras feitas e menos à sua construção. Através de entrevista, confirmou-se esta suposição;
- A afirmação de que "se um polígono tem os lados com o mesmo comprimento, então ele é regular" nem sempre é verdadeira, criou conflitos cognitivos. Os alunos referindo-se ao que tinham aprendido na escolaridade básica afirmaram que "se um polígono tem os lados com o mesmo comprimento, então ele é regular" era sempre verdadeira. Só a exploração de um contra exemplo os convenceu do contrário;
- A construção das tabelas de verdade das operações lógicas revelou-se difícil e teve que ser muito apoiada por exemplos.

6.3.3. Síntese

Estas sessões de estudo de noções elementares de lógica constituiram uma novidade para estes alunos. Estes mesmos alunos iriam ter oportunidade DE estudar as *noções básicas de lógica* na disciplina de Filosofia, na 1ª unidade do 11º ano.

No entanto, segundo Epp, S. (1994), a lógica deve ser estudada à medida que seja necessária e não desenvolver o tema num só período temporal (por exemplo durante um trimestre). Assim, apesar da construção das tabelas de verdade ter sido demorada, foi feita pelos alunos com base em situações já trabalhadas no 3º ciclo do ensino básico e com recurso ao GSP.

6.4. Os Problemas em vários modelos de geometria plana

6.4.1. Características e o modo como foram abordados

A configuração didáctica dos problemas em vários modelos de geometria foi elaborada tendo em consideração as orientações curriculares para o ensino secundário, de que deve ser feita uma abordagem de geometria de forma diversificada e de que os alunos devem entender o que é um sistema axiomático.

A tabela seguinte apresenta, sequencialmente, as sessões dinamizadas na turma. Neste sub-capítulo vamos focar a nossa atenção nas últimas sessões.

SESSÕES/DATA	PROBLEMAS
1ª - 09/Nov./2004	Polígonos e polígonos inscritos – razão das áreas
2ª - 16/Nov./2004	Conclusão da tarefa da aula anterior
3ª - 23/Nov./2004	Problema do pentágono
4ª - 30/Nov./2004	Problema (cortes num cubo)
5ª - 07/Dez./2004	Problema – "Os náufragos"
6ª - 14/Dez./2004	Enunciados da forma *"se...então"*
7ª - 04/Jan./2005	Enunciados Recíprocos
8ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
9ª - 11/Jan./2005	Enunciados Equivalentes
10ª - 25/Jan./2005	Vários modelos de geometria…
11ª - 11/Fev./2005	Vários modelos de geometria…
12ª - 08/Mar./2005	Vários modelos de geometria
13ª - 12/Abr./2005	Problema (Técnica de redução ao absurdo)
14ª - 26/Abr./2005	Problema
15ª 26/Maio/2005	Problema de cortes num cubo

Tabela 6.4 – Pasta de problemas

Os principais objectivos destas últimas sessões eram:

- Criar oportunidades para que os alunos identificassem, recorrendo a objectos físicos, a curvatura de uma superfície;

- Preparar os alunos para "coisas" diferentes;

- Favorecer a intuição e o raciocínio dedutivo;

- Explorar situações que promovessem a compreensão da seguinte afirmação - " *Na geometria Euclidiana, os teoremas que requerem o axioma das paralelas serão falsos na geometria Hiperbólica"*.

A introdução de modelos de geometria distintos do modelo Euclidiano foi feita através do recurso a artefactos (instrumento de percussão, esfera de acrílico, balões de borracha,…) e scripts do GSP (*half-plane model: hy_line.gss; hy_seg.gss; hyp_angl.gss*).

De acordo com Mariott (2001), a possibilidade de uma abordagem de estudo de um tema através de artefactos parece rica e promissora, contribuindo para a construção de significados.

Nas sessões 10 e 11, foi proposto à turma o manuseamento de objectos físicos cuja superfície envolvente apresentava diferentes curvaturas e foi solicitado, recorrendo a fios, que visualizassem linhas dessas superfícies.

A figura seguinte ilustra duas alunas a executarem esta tarefa.

Figura 6.6 – Recurso a artefactos – Exercícios de visualização

De seguida, apresenta-se o registo, de uma das alunas, da forma da linha representada pelo fio sobre uma parte do instrumento de música e da esfera de acrílico. Note-se que, ao trabalharem com a esfera de acrílico, os alunos aperceberam-se que apenas conseguiam "segurar" a esfera se o fio contornasse um grande círculo.

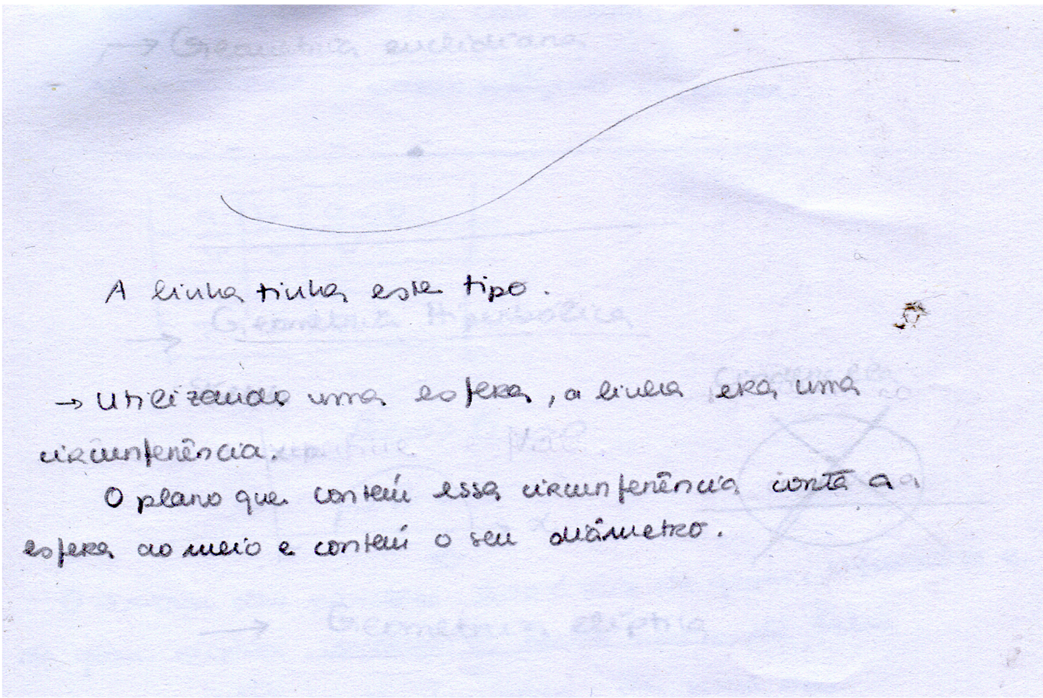


Figura 6.7 – Descrição de linhas visualizadas em superfícies de curvatura negativa

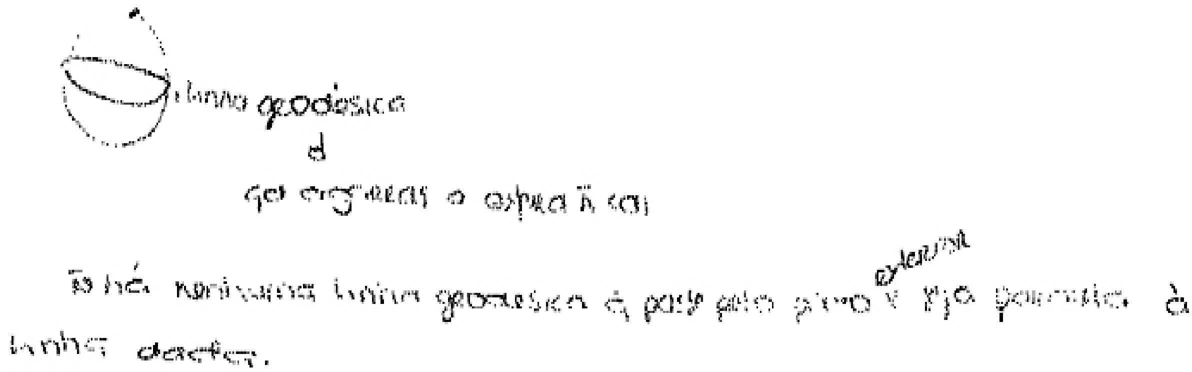


Figura 6.8 – Descrição de linhas visualizadas em superfícies de curvatura positiva

A exploração no GSP do semi-plano de Poincaré, recorrendo ao script *hy_line.gss* permitiu a representação de várias linhas hiperbólicas.

De seguida, explorou-se o axioma das paralelas, realizando uma actividade (Anexo 10) e recorrendo ao GSP e ao programa Cinderella. Como síntese, foi feita a referência a outros modelos de geometria, além do Euclidiano e a referência histórica ao trabalho de Lobachevsky e ao trabalho de Riemann, com ilustrações constantes quer em manuais escolares do 10 º ano de escolaridade quer em cenários de computador.

No final destas sessões, os alunos preencheram um questionário (Anexo 11) e levaram um texto para leitura sobre "Curvatura de uma superfície".

Não querendo perder de vista que este capítulo pretende ser uma síntese da pasta de problemas e sua implementação, parece-me importante apresentar dois exemplos de resposta ao referido questionário. As respostas às questões, *o interesse do conteúdo*, *a utilidade para a tua aprendizagem*, *o grau de dificuldade*, foram respectivamente:

<u>Aluno A</u>

"*Acho que o conteúdo desta sessão foi interessante pois permitiu-nos conhecer outros métodos sobre as linhas paralelas.*"

"Conclui que afinal depende do método com que estejamos a trabalhar para saber quantas rectas paralelas a outras rectas dada passam por um ponto."

"Aquilo das rectas não foi muito difícil. Mas aquilo da cela do cavalo já era mais complicado."

<u>Aluno B</u>

"Acho que esta sessão teve algum interesse para mim visto eu gostar de trabalhar com rectas curvas. [...]."

"Acho que teve uma grande utilidade na minha aprendizagem, porque aprendi mais alguma coisa sobre rectas curvas."

"Acho que o grau de dificuldade foi um bocadinho alto. Acho que tudo o que aprendi sobre rectas curvas era relativamente fácil."

Nas sessões 12 e 13 a situação-problema proposta foi a seguinte:

Prove que, na geometria Euclidiana, o axioma das paralelas é equivalente à proposição: a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180^0.

O enunciado mostrou alguma complexidade e então foi reformulado da seguinte forma.

> Dadas as proposições:
>
> A – Por um ponto exterior a uma recta é possível fazer passar uma recta paralela à dada e só uma.
>
> B – A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso.
>
> Prova que as afirmações anteriores são equivalentes, ou seja, $A \Leftrightarrow B$

A prova de que $A \Rightarrow B$ (modus ponens) foi realizada, de uma forma geral, de forma autónoma pelos alunos.

A prova de que de $B \Rightarrow A$ foi feita com recurso a cenários visuais, produzidos no programa GSP, e de forma muito guiada. Foi mais fácil a prova de $A \Rightarrow B$ (recurso ao modus ponens) do que de $B \Rightarrow A$ (recurso à prova por redução ao absurdo).

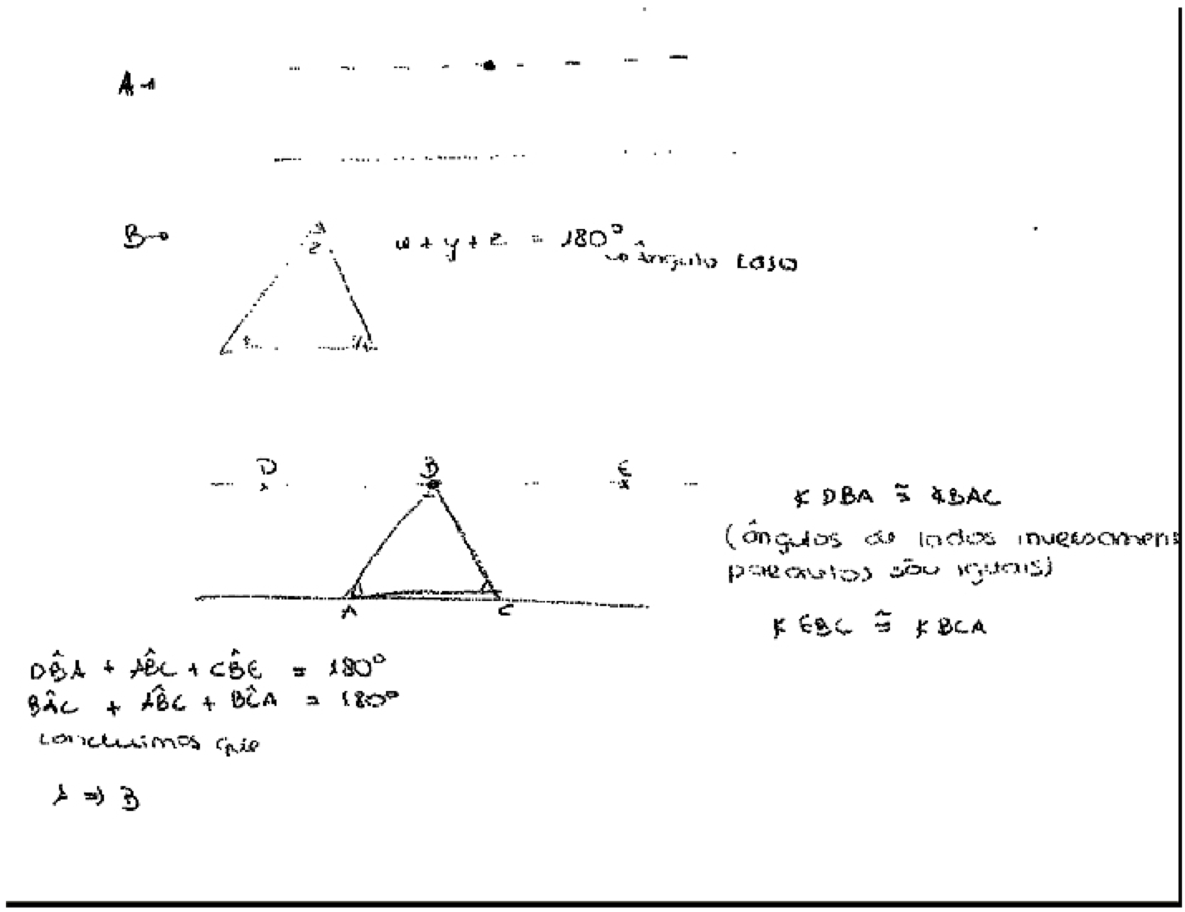


Figura 6.9 – Solução parcial apresentada por um aluno ao problema anterior

A situação-problema colocada na sessão seguinte continuou a explorar o conceito de proposições equivalentes – o caso particular de a negação da proposição *B* ser equivalente à negação da proposição *A*.

> Se não é verificado o axioma das paralelas então também não se verifica a afirmação seguinte: *a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é 180*^{0}.
>
> Então a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior ou superior a 180 graus? E em que modelo de geometria?

Após os alunos terem elaborado uma conjectura (conjecturas variadas) foram solicitados a confirmar ou a refutar a conjectura estabelecida através do recurso ao GSP (*half-plane model: hy_seg.gss; hy_angle.gss)* e a balões de borracha para a visualização de um triângulo numa superfície esférica.

6.4.2. Argumentação e prova

Todo o desenvolvimento destas últimas 6 sessões constituiu uma experiência nova para estes alunos. Apenas uma aluna tinha já ouvido falar, no 9º ano, a propósito do valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, noutros valores para essa soma (mas de uma forma informativa e não tinha feito qualquer tipo de exploração dessas situações).

A discussão entre os elementos dos grupos foi sempre uma constante e o recurso aos cenários de computador era muitas vezes a argumentação apresentada. A prova das conjecturas estabelecidas foi sempre feita por "imposição" externa e não por uma necessidade sentida pelos alunos. No entanto, houve melhorias significativas ao nível dos procedimentos adoptados na resolução de problemas de prova.

Os alunos, de uma forma geral, apresentaram melhorias significativas na identificação da hipótese e da tese, assim como na avaliação das soluções apresentadas. As estratégias adoptadas pautaram-se pelo recurso a diagramas comprovando ou refutando as conjecturas estabelecidas, mesmo depois de terem sido confrontados com situações em que os cenários visuais podiam induzir em erro.

6.4.3. Síntese

O recurso a ambientes de geometria dinâmica permitiu: elaborar construções geométricas com precisão; identificar o significado de proposições geométricas; elaborar e testar conjecturas; explorar propriedades; "descobrir" novas propriedades.

Os alunos estudaram conceitos de geometria Euclidiana da escolaridade básica, negaram o axioma das paralelas e exploraram outros modelos de geometria. Estabeleceram ligações entre esses modelos, por exemplo, aplicaram o conceito de medida angular na geometria Euclidiana a estes outros modelos de geometria e exploraram situações de triângulos em que a soma dos ângulos internos ou era inferior ou superior à medida da amplitude de um ângulo raso.

O estudo das noções elementares de lógica antes dos problemas em vários modelos de geometria plana foi apropriado para a trajectória da pasta de problemas. Nenhum aluno contestou a afirmação proferida de que - *Se não é verificado o axioma das paralelas então também não se verifica a afirmação seguinte: a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo é* 180^0.

6.5 Avaliação da adequação didáctica da pasta de problemas

Considera-se que a pasta de problemas teve uma **adequação epistémica** elevada. Além de não nos limitarmos a desenvolver meras rotinas e exercícios, as situações-problema propostas não se limitaram ao contexto da geometria Euclidiana e foram formulados em vários modelos de geometria plana.

Relativamente à **adequação cognitiva,** sabia-se à partida das dificuldades sentidas pelos alunos do ensino secundário na resolução de problemas de prova, na elaboração de raciocínios de natureza dedutiva. No entanto, foram propostas situações para promover o raciocínio dedutivo. Os alunos seguiram a sequência cognitiva, ***construção– visualização – raciocínio*** e o raciocínio visual mostrou ser mais do que uma etapa preliminar intuitiva dos processos de raciocínio. O recurso a modelos físicos em combinação com modelos virtuais contribuiu para a compreensão do significado das situações-problema e alguma compreensão do papel da prova matemática.

Nestas sessões proporcionou-se trabalho em pequenos grupos. Assim, em grupo, os alunos puderam planear e resolver as situações-problema, comunicar entre si as soluções, discutir e validá-las. Nas primeiras sessões, foi identificada uma dinamização muito orientada e o tempo das explicações da investigadora, às solicitações frequentes dos alunos, era prejudicial à autonomia dos alunos na resolução de problemas. Após a identificação deste problema, através das gravações áudio e vídeo das sessões, foram tomadas medidas concretas, nomeadamente a nível das regras e tempos de intervenção. A **adequação interaccional** mostra algumas fragilidades.

Quanto à **adequação mediacional**, os recursos materiais revelaram-se adequados, apesar da actividade desenvolvida nos cinco primeiros problemas ter registado mais tempo do que o previsto, pois os alunos tiveram que se familiarizar com o software de geometria dinâmica. O Zometool, os cubos de acrílico, etc., potenciaram a visualização. Por último, em relação à **adequação ecológica**, os pais apoiaram a participação dos filhos em todo o processo, bem como o conselho de turma, o conselho directivo e o grupo de professores de matemática da Escola Secundária Doutor Mário Sacramento. A pasta de problemas foi desenhada em conformidade com a planificação elaborada pelo grupo de matemática.

Capítulo 7
Estudo de caso. Desenho e implementação

7.1. Introdução

O objectivo deste trabalho é promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e uma visão mais alargada do conhecimento matemático. Pretendemos, assim, com base em sistemas axiomáticos distintos do sistema de Euclides, investigar abordagens alternativas de ensino e aprendizagem da Geometria no ensino secundário.

Assim, procedeu-se à elaboração e implementação de uma pasta de problemas já apresentada no capítulo 6. Os problemas em questão ofereceram oportunidades para os alunos reverem ideias relativas à geometria Euclidiana, estudada na escolaridade básica, bem como encorajar os alunos a lidarem com novas ideias e a explorarem geometrias distintas da Euclidiana.

Neste capítulo, vamos analisar os conhecimentos (tipos de objectos e suas relações) postos em jogo na solução (correcta) produzida por um aluno ideal, do 11º ano do ensino secundário. No âmbito de uma abordagem ontosemiótica, isto equivale à elaboração da *configuração epistémica* associada à resolução destes problemas. Estas configurações servirão como referência para o estudo das *configurações cognitivas* dos alunos participantes no estudo de caso.

A análise epistémica é realizada segundo dois níveis distintos e complementares (Godino et al*.,* 2006). Num primeiro nível, identificam-se os objectos e relações primárias:

- *Situação-problema,* a qual promove e contextualiza a actividade a desenvolver;
- *Linguagem* (e.g., termos, expressões, notações, simbologia pictórica, nos seus diversos registos (e.g., escrito, oral, gestual), que representa as outras identidades e serve como "ferramenta" para a acção;

- *Conceitos* (abordados através de definições ou descrições);
- *Proposições* (enunciados sobre conceitos);
- *Procedimentos* (e.g., algoritmos, operações, técnicas de cálculo);
- *Argumentos*, enunciados utilizados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, de natureza dedutiva ou de outro tipo.

Num segundo nível de análise, no sentido de procedermos a uma análise mais fina e com o foco de atenção nos argumentos, vamos considerar os atributos contextuais:

- *Pessoal/institucional* – A *cognição pessoal* é o resultado do pensamento e da acção do sujeito individual confrontado com uma classe de problemas, enquanto que a *cognição institucional* e o resultado do diálogo, do entendimento e da regulação no seio de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de práticas;
- *Ostensivo/não ostensivo* – O atributo ostensivo refere-se à representação de um objecto não ostensivo, isto é, de um objecto que não se pode mostrar a outro. A classificação entre ostensivo e não-ostensivo depende dos contextos de uso. Diagrama, gráficos, símbolos são exemplos de objectos com atributos ostensivos, cubos perfurados e secções planas de poliedros são exemplos de objectos com atributos não-ostensivos;
- *Extensivo/intensivo* (particular/geral) – Esta dualidade utiliza-se para explicar uma das características básicas da actividade matemática, ou seja, a generalização. Esta dualidade permite centrar a atenção na dialéctica entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão chave na construção e aplicação do conhecimento matemático;
- *Unitário/sistémico* – Em certas circunstâncias os objectos matemáticos participam como entidades unitárias noutras estes devem ser tomados como decomposição de outros para que se possa proceder ao seu estudo;
- *Expressão/conteúdo (antecedente* e consequente de qualquer função semiótica) – A relação estabelece-se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (*expressão*, designação ou nome) e um consequente (*conteúdo*, designado ou ente matemático) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com determinado critério ou código de correspondência.

Segundo (Godino et al., 2007), estes objectos estão organizados em entidades mais complexas, tais como sistemas conceptuais, teorias, etc. Estes seis tipos de objectos primários quebram a tradicional distinção entre entidades conceptuais e processuais, as quais se revelam insuficientes para descrever os objectos que intervêm e emergem da actividade matemática. As entidades, situação–problema, linguagem e argumentos, devem ser consideradas como funcionais e relativas a "jogos de linguagem" (contexto institucional e contextos de uso) nos quais elas participam. Por outro lado, elas têm um carácter recursivo, no sentido de que cada objecto pode ser considerado por várias entidades, dependendo do nível de análise. Por exemplo, os argumentos podem envolver conceitos, propriedades, operações, etc.

Na análise dos argumentos, que justificam a solução dos problemas, vai ser adoptada a estrutura analítica descrita por Marrades e Gutiérrez (2000), a qual proporciona um modo de analisar e classificar a forma como os alunos produzem justificações, ao mesmo tempo que se analisa e classifica as próprias justificações.

Os problemas 1, 3 e 4 motivam conceitos/definições e propriedades/proposições relativas ao paralelismo e, ao nível dos procedimentos, motivam a construção de figuras, a visualização e algumas técnicas de demonstração (e.g. técnica de redução ao absurdo). O problema 2, motiva conceitos/definições e propriedades/proposições relativas à distância entre dois pontos no plano (quer na geometria Euclidiana quer na geometria do Motorista de Táxi).

A ligação entre o intuitivo e o conhecimento formal esteve presente na formulação dos problemas propostos. O facto de se utilizar modelos de outras geometrias teve por objectivo mostrar outros modelos para além do modelo Euclidiano. Os problemas propostos cumprem algumas das características apontadas por Fischbein, E. (1999)[26]. Relativamente à relação entre o conhecimento intuitivo e formal, faz uma distinção entre afirmações que: (a) São aceites intuitivamente não carecendo de prova; (b) São intuitivamente aceites, mas é pedida a sua prova matemática (coincidência entre a aceitação intuitiva e a conclusão baseada num raciocínio lógico); (d) Provocam conflitos entre uma interpretação intuitiva e uma argumentação formal; (e) Provocam conflitos entre duas interpretações intuitivas.

Este capítulo está dividido em duas partes. A primeira apresenta a descrição dos sujeitos participantes no estudo de caso e a organização do estudo. A segunda parte

[26] Fischbein, E., E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematics Reasoning. *Educational Studies in Mathematics* 38:11-50.

apresenta as configurações epistémicas de cada problema, organizadas segundo dois níveis de análise: 1º) Dos objectos matemáticos e suas relações primárias; 2º) Das relações secundárias estabelecidas entre os objectos matemáticos com foco na natureza da argumentação e elaboração de conjecturas sobre o surgimento de possíveis conflitos cognitivos.

Finalmente, são apresentadas, em sumário, algumas reflexões no sentido de tentar responder às questões: *Qual a pertinência dos problemas para motivar os conteúdos emergentes? Qual a natureza da argumentação apresentada? Que conflitos cognitivos foram suscitados pelo recurso à geometria hiperbólica?*

7.2. Descrição dos sujeitos e organização do estudo

No âmbito dos procedimentos de carácter metodológico, adoptou-se o critério sequencial[27] e a opção por dois sujeitos, participantes no estudo de caso, tem por objectivo uma análise mais fina da natureza dos argumentos apresentados, como justificação para uma situação-problema. A escolha dos dois sujeitos obedeceu a critérios de natureza teórica e a critérios de natureza prática. Riding & Rayner (1997) desenvolveram investigação sobre a ligação entre a(s) estratégia(s) adoptadas na abordagem de uma tarefa e as características de determinado estilo de aprendizagem. Assim, sugerem que os alunos diferem segundo duas principais dimensões:

- *"wholist-analytical";* os primeiros preferem ter uma visão global de determinada informação e os segundos têm tendência a decompor a informação em partes;
- *"verbaliser-imager"*; os primeiros têm tendência a apresentar a informação por palavras, enquanto que os segundos têm tendência a apresentar a informação de forma pictórica.

Pretendíamos ter a possibilidade de observar estes sujeitos em ambiente de sala de aula, durante a actividade de resolução de problemas de prova mas, ao mesmo tempo era necessário criar situações em que o processo de prova fosse *observável de forma transparente* (Eisenhardt, 2002, p.13). Assim, os sujeitos (duas alunas) foram seleccionados tendo em conta os seguintes aspectos:

- Estilo de aprendizagem;
- Gosto por resolver problemas;

[27] O critério sequencial caracteriza-se pela selecção dos casos a estudar ser realizada no decurso da recolha de dados (LeCompte,1984).

• Bom informador (este aspecto é muito importante face aos propósitos da investigação, devido ao facto da análise se basear no que é "visível" no processo e o discurso oral é um meio para tornar "visível" processos de raciocínio);
• Disponibilidade e vontade para participar no estudo.

As alunas participantes no estudo (designadas por X e Y) tinham 16 anos e frequentavam o 2º ano do ensino secundário (11 º ano), da área sócio-económica, e estavam inseridas na mesma turma do 10 º ano (onde foi desenvolvida uma pasta de problemas – capítulo 6). Elas adoptaram estratégias diferentes de abordagem das situações–problema. Enquanto a aluna X apresentava, preferencialmente, as soluções dos problemas através de textos escritos envolvendo explicações detalhadas, a aluna Y recorria frequentemente a diagramas, no geral, associados a breves explicações escritas.

A aluna X nunca repetiu um ano da escolaridade básica e teve sempre nível 5 na disciplina de matemática. No questionário sobre – *Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem* (anexo 2), preenchido no início do seu 10 º ano, - discordou das afirmações "os problemas de matemática têm uma e uma só resposta correcta", "os problemas de matemática são sempre resolvidos em menos de 10 minutos", há apenas uma maneira correcta de resolver um problema de matemática", "saber como resolver um problema é menos importante do que encontrar a resposta correcta", "aprender matemática é fundamentalmente memorizar", "a matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real"; concordou com as afirmações, "uma disciplina que me ajuda a compreender e interpretar o mundo que nos rodeia", "uma disciplina que me ensina a pensar", "uma disciplina que me ajuda a preparar para a minha profissão futura", "uma disciplina onde descubro resultados novos", " uma disciplina útil para outras disciplinas que tenho"; nem concordou nem discordou da matemática ser, " uma disciplina difícil" e "uma disciplina que me obriga a estudar muito". Sobre as aulas de matemática, tidas no 3º ciclo da sua escolaridade básica, o aspecto de que mais tinha gostado era "resolver bastantes exercícios para consolidar a matéria" e questionada sobre o aspecto que tinha gostado menos afirmou "não gosto muito de geometria". No mesmo questionário, a aluna expressou o que entendia por, exercício, problema, teorema, prova e conjectura da seguinte forma: "Exercício, *algo que nos ajuda a praticar sobre determinado tema"*; "Problema, *questão prática que muitas vezes nos pode reflectir o real*"; "Teorema, *fórmula* *básica que nos ajuda a resolver problemas/exercícios por exemplo o teorema de Pitágoras*"; "*Prova, acto de comprovar algo*"; "Conjectura, *não sei*".

A aluna Y nunca repetiu um ano da escolaridade básica e teve sempre níveis 4 e 5 na disciplina de matemática. No questionário, preenchido no início do seu 10 º ano, sobre – *Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem* (anexo 2) - discordou totalmente das afirmações , "os problemas de matemática são sempre resolvidos em menos de 10 minutos"," há apenas uma maneira correcta de resolver um problema de matemática"; discordou das afirmações, "os problemas de matemática têm uma e uma só resposta correcta", "saber como resolver um problema é menos importante do que encontrar a resposta correcta", "aprender matemática é fundamentalmente memorizar", "a matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real"; concordou totalmente com a afirmação, "uma disciplina que me ensina a pensar", concordou com as afirmações, "uma disciplina que me ajuda a compreender e interpretar o mundo que nos rodeia", "uma disciplina que me ajuda a preparar para a minha profissão futura", "uma disciplina onde descubro resultados novos", " uma disciplina útil para outras disciplinas que tenho", "uma disciplina que me obriga a estudar muito"; nem concordou nem discordou da matemática ser, " uma disciplina difícil". Sobre as aulas de matemática do 3º ciclo da sua escolaridade básica a aluna afirmou que gostava de todo o tipo de aulas "*matemática é matemática, é a minha disciplina preferida",* com excepção das aulas de correcção dos testes. No mesmo questionário a aluna expressou o que entendia por, exercício, problema, teorema, prova e conjectura da seguinte forma: "Exercício, *resolvemos e calculamos com os dados que nos dão";* "Problema, *exercício que resolvemos através do raciocínio"*; "Teorema, *uma teoria que me ajuda a resolver exercícios"*; Prova, não apresentou resposta"; "Conjectura, *não sei*".

Ambas as alunas revelaram sempre boa vontade em marcar as sessões extra-aula, onde eram resolvidos os problemas e esforçaram-se por verbalizar os argumentos que acompanhavam as resoluções escritas dos problemas propostos.

A organização do estudo foi concebida em três momentos cumulativos, ou seja, cada momento foi construído com base na análise do momento anterior. Uma visão dos três momentos é apresentada na tabela 7.1.

1º Momento	Questionário sobre – *Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem* (anexo 3).
2º Momento	Actividades envolvendo problemas de prova em geometrias incidentes.
3º Momento	Exploração de teoremas, propriedades, etc.

Tabela 7.1 – Momentos do estudo

O modelo de Lester e Kroll (1990) para a avaliação da resolução de problemas contempla as seguintes componentes: (a) Aspectos afectivos e concepções; (b) Desempenho; (c) Características do problema. Assim, considerando os aspectos afectivos e concepções, num primeiro momento do estudo foi pedido às alunas que preenchessem um questionário *(*anexo 3) composto de duas partes. Uma primeira parte tinha as questões I, II e III, do questionário já anteriormente preenchido sobre "*Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e a sua aprendizagem"* e uma segunda parte contemplava a avaliação da pasta de problemas desenvolvida, na turma a que pertenciam, no ano lectivo 2004/2005. O segundo momento centrou-se na resolução de problemas de prova em geometrias incidentes. E finalmente num terceiro momento, as alunas exploraram situações no sentido de compreenderem, por exemplo, o significado da proposição *"Teoremas na geometria Euclidiana que requeiram o Axioma das Paralelas serão falsos na geometria Hiperbólica"*.

Sublinhando o que já foi referido no capítulo 6, estas alunas participantes neste estudo de caso participaram numa primeira fase, desenvolvida em ambiente da sala de aula com uma turma de 20 alunos do 10 º ano do ensino secundário, da área sócio- económica no ano lectivo 2004/2005. Esta fase, consistiu na resolução de uma pasta de problemas seguindo a seguinte trajectória didáctica: módulo de resolução de problemas[28] de geometria Euclidiana; módulo de lógica; módulo de problemas de geometria Euclidiana e não - Euclidiana com recurso a ambientes de geometria dinâmica.

A parte empírica nesta segunda fase do estudo foi desenvolvida extra aula, durante a frequência do 11º ano do ensino secundário. De seguida, apresentam-se as configurações epistémicas dos quatro problemas propostos nesta fase.

7.3. Configurações epistémicas: Problemas

[28] Módulo inicial, 10 º Ano - Programa de Matemática do Ensino Secundário (p.23).

7.3.1. Problema 1: enunciado e solução

PROBLEMA: 1ª Parte - Define, no semi-plano de Poincaré, a linha que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3). Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. (A mesma questão foi formulada para a geometria Euclidiana).
2ª Parte - Sejam l_1 e l_2 linhas no semi-plano de Poincaré. Se $l_1 \cap l_2$ tem dois ou mais pontos então $l_1$coincide com l_2. Justifica.

Solução: 1) 1ª Parte: Na primeira parte do problema é pedida, no semi-plano de Poncaré, a linha hiperbólica que passa pelos pontos A e B. Essa expressão é da forma $(x-c)^2+y^2=r^2 \wedge y>0$, em que (c,0) é o centro da semi-circunferência de raio r ou da forma x=a. **2)** Atendendo aos dados do problema, ou seja que a linha hiperbólica passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3), a expressão algébrica que a define só pode ser da forma $(x-c)^2+y^2=r^2 \wedge y> 0$. Trata-se, então, de definir no plano Euclidiano a semi-circunferência de centro (c, 0), raio r e que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3). A mediatriz à corda [AB] contém o centro da semi-circunferência. (recurso a um diagrama).

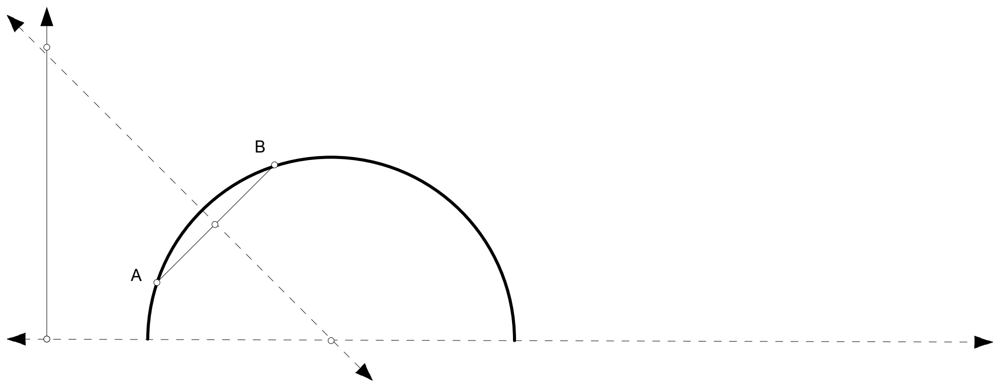


Figura 7.1 – Gráfico cartesiano (Recurso ao sript Hyp_line)

- Cálculo algébrico: A expressão algébrica da linha hiperbólica que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3), só pode ser da forma $(x-c)^2+y^2=r^2 \wedge y> 0$.

Definir a semi-circunferência de centro (c, 0), raio r e que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3).

Ponto médio de [AB]: M =(2,2)

Declive da mediatriz: -1

A condição que define a mediatriz de [AB] é da forma, y = -x+b

Considerando que (2,2) pertence à mediatriz temos que 2 = -2+ b e a mediatriz de [AB] é definida por y = -x + 4.

O centro da circunferência tem coordenadas (4, 0), pois satisfaz a condição, $y = -x + 4 \wedge y = 0$.

O raio será dado pela distância entre, por exemplo, os pontos C e A, (o que também se pode verificar graficamente). Donde a linha hiperbólica, do semi-plano de Poincaré, que passa por A e B é dada pela expressão algébrica $(x-4)^2 + y^2 = 10 \wedge y>0$.

Em síntese, a mediatriz m é y=-x+4 (o que se pode confirmar graficamente). O centro da semi-circunferência é o ponto de intersecção da recta m e do eixo dos x, ou seja, o ponto C (4,0). O raio será dado pela distância entre, por exemplo, os pontos C e A, (o que também se pode verificar graficamente). Donde a linha hiperbólica, do semi-plano de Poincaré, que passa por A e B é dada pela expressão algébrica $(x-4)^2+y^2=10 \wedge y>0$. Em relação à segunda parte da questão: *Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta.* Devemos mostrar que dois pontos distintos estão sobre uma única linha. Vamos supor que A e B pertencem a duas linhas distintas; $(x-c)^2+y^2 = r^2 \wedge y>0$ (Semi-circunferência de centro (c,0) e raio r); $(x-s)^2+y^2=d^2 \wedge y>0$ (Semi-circunferência de centro (s,0) e raio d) que já sabemos terem de ser do tipo acima descrito. Então temos que, $(1-c)^2+1^2=r^2$ e $(3-c)^2+3^2=r^2$, ou seja $(1-c)^2+1^2= (3-c)^2+3^2$. Efectuando os cálculos temos que c=4. Mas considerando que A e B também pertencem à outra linha, temos também que;$(1-s)^2+1^2=d^2$ e $(3-s)^2+3^2=d^2$, ou seja $(1-s)^2+1^2=(3-s)^2+3^2$, pelo que s= 4. Isto é, c = s =4. Substituindo nas equações iniciais temos que $(1-4)^2 + 1^2= r^2$ e $(3-4)^2 + 3^2= r^2$; $9+1 = r^2$ e $4+1= r^2$. Donde $r^2=d^2=10$, ou seja r=d, contrariando a hipótese dos pontos A e B pertencerem a duas linhas distintas. A mesma questão foi formulada para o modelo Cartesiano para a geometria Euclidiana e para o modelo Esférico para a geometria de Riemann.

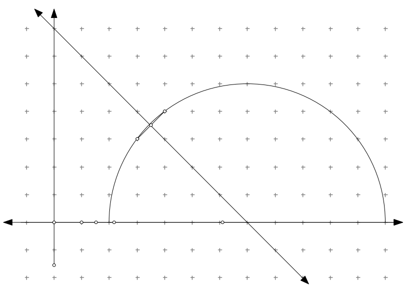
2ª Parte: Ao considerar-se esta questão, pretendia-se que a solução incluísse uma justificação de natureza dedutiva, ou seja, considerando a proposição emergente da 1ª parte -A geometria hiperbólica é uma geometria incidente – pode concluir-se que se l1 e l2 forem duas quaisquer linhas no semi-plano de Poincaré cuja intersecção tenha dois ou mais pontos então elas são coincidentes.

Objectos e relações primárias

Observemos os objectos matemáticos que intervêm na solução do problema e suas relações primárias, apresentados na tabela 7.2.

LINGUAGENS:

- Termos e expressões: Semi-plano de Poincaré, linha hiperbólica, "Define, no semi-plano de Poincaré, a linha que passa por dois pontos distintos", linhas distintas, plano Euclidiano, circunferência (centro e raio), corda de uma circunferência, mediatriz de um segmento de recta, ponto médio, declive de uma recta.
- Diagrama: Definir a semi-circunferência de centro (c, 0), raio r e que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3). A mediatriz à corda [AB] contém o centro da semi-circunferência. (construção de uma figura, recurso ao sript Hyp_line do Geometer´s Sketchpad)



- Cálculo algébrico: A expressão algébrica da linha hiperbólica que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3), só pode ser da forma $(x-c)^2 + y^2 = r^2 \wedge y > 0$.

Definir a semi-circunferência de centro (c, 0), raio r e que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3).

A linha hiperbólica, do semi-plano de Poincaré, que passa por A e B é dada pela expressão algébrica $(x-4)^2 + y^2 = 10 \wedge y > 0$.

Expressa

SITUAÇÃO-PROBLEMA: 1ª Parte - Define, no semi-plano de Poincaré, a linha que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3). Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. (A mesma questão foi formulada para a geometria Euclidiana).

2ª Parte - Sejam l1 e l2 linhas no semi-plano de Poincaré. Se $l1 \cap l2$ tem dois ou mais pontos então l1 coincide com l2. Justifica.

Motivação

Resolução

Ajuda a

CONCEITOS/ DEFINIÇÕES:

Prévios: Definição de plano Euclidiano, recta, circunferência, definição de distância entre dois pontos, ponto médio e mediatriz de um segmento de recta, declive de uma recta; Definição de semi-plano de Poincaré e de linha hiperbólica.

Emergentes: Definição de geometria incidente - Por dois quaisquer pontos passa uma e uma só linha.

PROPRIEDADES/ PROPOSIÇÕES:

Prévios: No plano Euclidiano, a mediatriz de uma corda de circunferência contém o seu centro - Condição que define uma circunferência dado o centro e o raio.

Emergentes:

Proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente.

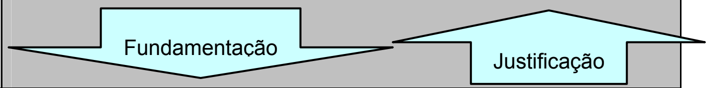
		PROCEDIMENTOS: - Construção de uma figura, recurso ao sript Hyp_line do Geometer´s Sketchpad. construção ⟶ visualização ⟶ raciocínio - Raciocínio, com recurso a um discurso natural ou a um discurso organizado de forma dedutiva (proposições, definições, teoremas,...)
		
		ARGUMENTOS: Construção da linha hiperbólica a passar pelos pontos A e B, constitui um apoio visual para ajudar a definir a linha hiperbólica pedida. <u>Raciocínio pelo método de redução ao absurdo</u>. Suponhamos que A e B pertencem a duas linhas hiperbólicas distintas, ou seja pertencem a l: $(x-c)^2+y^2= r^2 \wedge y>0$ (Semi-circunferência de centro (c,0) e raio r) e a m: $(x-s)^2+y^2=d^2 \wedge y>0$ (Semi-circunferência de centro (s,0) e raio d). Efectuando os cálculos, vem que c = s =4, r =d. Existe, assim, uma contradição: o valor de c não é diferente do valor de s, nem o valor de r é diferente do valor de d. Considerando que não são praticados erros de cálculo (feita a verificação), somos levados a concluir que a nossa suposição inicial era falsa. *Justificação de natureza Dedutiva (quer na utilização do método por redução ao absurdo, quer na justificação à 2ª parte da situação-problema).*

Tabela 7.2 - Objectos e relações primárias do problema 1

A situação-problema induz a familiarização dos alunos com os seguintes termos e expressões - Semi-plano de Poincaré, linha hiperbólica, "Define, no semi-plano de Poincaré, a linha que passa por dois pontos distintos", linhas distintas, plano Euclidiano, circunferência (centro e raio), corda de uma circunferência, mediatriz de um segmento de recta, ponto médio, declive de uma recta.

As linguagens utilizadas no problema são a representação geométrica (diagrama) e a algébrica (cálculo algébrico). Estas devem constituir uma <u>ajuda</u> para a compreensão da situação – problema, a elaboração e implementação de um plano de resolução e para a avaliação da solução encontrada (através da verificação geométrica).

É de referir que a situação - problema motiva a abordagem de, conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos, já conhecidos da escolaridade básica (ponto médio e mediatriz de um segmento de recta, propriedades da mediatriz, cálculo algébrico, …) segundo uma perspectiva sintética e que foram retomados no 10ºano, segundo uma perspectiva analítica. Motiva, também, o estudo de forma explícita de conceitos/definições, propriedades/proposições, já abordados de forma implícita na escolaridade básica, como por exemplo a definição de geometria incidente e as proposições 1 e 2. No entanto o domínio de conceitos/definições e propriedades/proposições, por parte do aluno, vai permitir resolver o problema.

No âmbito do raciocínio geométrico e seguindo a perspectiva de Duval, R. (1998), o raciocínio geométrico envolve, satisfazendo funções epistemológicas específicas e que podem ser desenvolvidos separadamente, três processos cognitivos distintos: **visualização** (referente à representação espacial), **construção** (recurso a instrumentos de desenho ou a software de geometria dinâmica) e **raciocínio** (em particular os processos discursivos de justificação, de prova). A ligação estabelecida entre estes processos pode ser variada.

Na situação colocada, a ligação entre estes procedimentos cognitivos pode seguir, em alternativa, uma das seguintes sequências: (a) construção $\longrightarrow$visualização$\longrightarrow$raciocínio; (b) realização de raciocínio de forma independente dos processos de construção ou de visualização.

Estes procedimentos fundamentam os argumentos apresentados, os quais por sua vez justificam os procedimentos adoptados. A construção geométrica de apenas uma linha a passar pelos dois pontos dados (recurso a um exemplo concreto) quer no plano Euclidiano quer no semi-plano de Poincaré, exemplifica as proposições 1 e proposição 2. No entanto pretende-se a passagem deste procedimento que envolve um conhecimento matemático intuitivo para um procedimento que envolva um conhecimento matemático formal, através da elaboração de um raciocínio lógico com base em definições e proposições. Mas será que os alunos, após a justificação pedida para um caso particular sentir-se-ão motivados para elaborar a justificação para o caso geral? E qual a sequência de procedimentos adoptada?

Argumentação – Objectos e relações secundárias

A argumentação prevista para a situação pode ser de natureza diferente. Seguindo a categorização mencionada por Gutiérrez e Marrades (2000), pode ser uma argumentação: (a) *Empírica* – baseada na ilustração através de exemplos (*Naíve empirismo)* acção de exibir a linha nas condições da situação - problema; (b) *Dedutiva – experimentação pensada,* o exemplo específico é utilizado para ajudar a formulação abstracta de propriedades, nas relações entre estas e no cálculo algébrico (cálculo *simbólico*).

<u>Ostensivo – não-ostensivo</u>: Quer numa argumentação de natureza empírica e /ou numa argumentação de natureza dedutiva, tem ostensivos associados que são, respectivamente, diagramas de semi-circunferências e/ou linguagem algébrica.

A linha hiperbólica é um objecto não ostensivo, que se torna ostensivo através de uma semi-circunferência e/ou através da respectiva expressão algébrica que a define. No entanto, o aluno reconhece o objecto não-ostensivo implicado na situação?

O facto do aluno elaborar uma argumentação com base em transformações algébricas, significa que reconhece os objectos não-ostensivos implicados na situação (linha hiperbólica, proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente, …)?

Que objectos ostensivos mobilizam os alunos na apresentação da solução ao problema?

<u>Extensivo – intensivo (particular - geral)</u>: A definição de linhas hiperbólicas no semi-plano de Poincaré e a adaptação ao caso particular de querermos definir a linha hiperbólica que passa pelos pontos A e B, facilita a construção do diagrama que apoia o processo de visualização que, por sua vez, pode servir de base ao raciocínio para a resolução do problema. A representação da linha hiperbólica, no plano de Poincaré, tem um carácter unitário, no entanto a definição algébrica da mesma é sistémica.

Na segunda parte do problema - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. (A mesma questão foi formulada para a geometria Euclidiana), numa argumentação de natureza *pragmática*, a impossibilidade da representação gráfica de mais de uma linha hiperbólica a passar pelos dois pontos dados, constitui justificação para a resposta de existir apenas uma linha hiperbólica, $(x-4)^2+y^2=10 \wedge y>0$, que contém os pontos dados A e B. Numa argumentação de natureza *conceptual*, o objecto extensivo, $(x-4)^2+y^2=10 \wedge y>0$, é utilizado como um exemplo específico, caso particular, de uma classe, $(x\text{-}a)^2 + y^2 = r \wedge y>0$ (linha hiperbólica de centro (a,0) e raio r, sendo a um número real e r um número real positivo).

Rodd, M. (2000) refere que a visualização pode ser um meio de descobrir a verdade de uma proposição. Assim, na segunda parte da situação-problema, o recurso à construção de diagrama pode ser um meio escolhido para apresentar argumentos para a resposta dada, no entanto pretende-se, também, a sua justificação (coincidência entre a aceitação intuitiva e a conclusão baseada num raciocínio lógico) através da utilização de argumentos dedutivos, técnica de redução ao absurdo, com base na algebrização do problema.

O pedido de uma justificação de natureza *conceptual* e a extensão a outros modelos de geometria constitui um factor de dificuldade?

Institucional – pessoal: De acordo com Recio e Godino (2001), a partir de uma perspectiva antropológica, o conhecimento matemático é desenvolvido no seio de instituições e, sendo assim, deve ser considerado como um produto sócio-cultural. Os indivíduos são sempre membros de várias instituições e partilham as suas maneiras colectivas de pensar e de raciocinar. As suas experiências são condicionadas pelo contexto institucional - a linguagem aí utilizada e o tipo de interacções sociais que aí ocorrem. Assim, a natureza da argumentação matemática apresentada pelos alunos deve ter em consideração que os alunos são sujeitos de diferentes instituições (da vida real, das aulas de matemática, das aulas de filosofia, etc.), onde têm lugar diferentes esquemas de argumentação. Esta relação estabelece-se em dois sentidos:

(i) Os esquemas pessoais podem ser influenciados pelo significado da prova nas instituições, das quais os alunos fazem parte;

(ii) Por outro lado, os significados institucionais da prova matemática emergem dos esquemas pessoais que prevalecem nestas instituições.

Na primeira parte da situação-problema tem lugar uma argumentação de natureza empírica através do recurso a um exemplo (*Naïve empirismo)* e a um exemplo representativo de uma classe (*Exemplo genérico)*. Este tipo de argumentação é muito frequente nas aulas de matemática.

A segunda parte da situação-problema já requer uma argumentação de natureza *dedutiva*, incluindo experiência pensada, em que as acções sejam interiorizadas a partir de exemplos específicos, bem como o recurso a operações lógicas, abordadas quer nas aulas de matemática quer nas aulas de filosofia (11º ano).

Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências foram na geometria Euclidiana, que tipo de conflitos ao nível da *cognição pessoal* pode originar este problema?

Unitário – sistémico: A noção de incidência é considerada ser previamente conhecida para o caso do plano cartesiano (geometria Euclidiana). Neste caso este objecto matemático é utilizado como uma entidade unitária, enquanto que a noção de geometria incidente é vista como um sistema do qual existem exemplos (e.g., o semi-plano de Poincaré) e conta-exemplos (e.g., esfera de Riemann).

Expressão – conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, o estudo de novos significados, mais ricos e profundos, de objectos da geometria Euclidiana. Em que medida o aluno estabelece esta relação semiótica?

Em relação à expressão, neste caso, é algébrica, gráfica e/ ou mista. A expressão algébrica é utilizada sem dificuldades? Os argumentos de natureza dedutiva que tipo de conflitos cria? A técnica de redução ao absurdo que tipo de conflitos cria?

7.3.2. Problema 2: enunciado e solução

Enunciado: Considera uma Geometria, no plano, em que os pontos e as linhas têm as mesmas propriedades da Geometria Euclidiana Plana, mas a definição de distância entre dois pontos P (x_1, y_1) e Q (x_2, y_2) é dada por $d_t = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$[29].

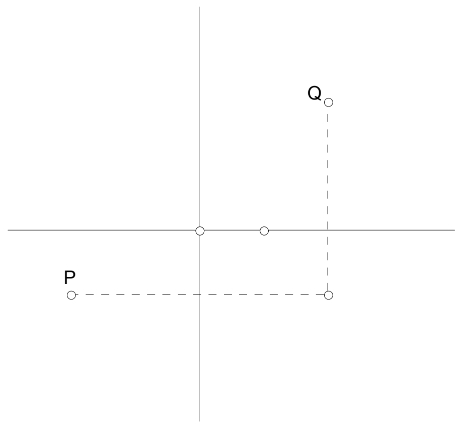


Figura 7.2 – A distância que o motorista de táxi percorre de P para Q

[29] Esta Geometria tem a designação de Geometria do Motorista de Táxi.

Recorda que a circunferência é o conjunto de pontos, do plano, cuja distância a um ponto fixo é constante.

Investiga a forma da circunferência nesta nova Geometria. A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?

Solução: É dada a definição de distância entre dois pontos na geometria do Motorista de Táxi. Os alunos poderão ter necessidade de rever a definição de distância Euclidiana entre dois pontos.

A exploração da forma da circunferência nesta nova Geometria leva-os a verificar que $d_t \neq d_e$. As distâncias, Euclidiana e do Motorista de Táxi, entre dois pontos são iguais quando os pontos estão alinhados na horizontal ou na vertical.

Os alunos devem construir um argumento com base num diagrama. Podem indicar, por exemplo, que a hipotenusa de um triângulo rectângulo é menor que a soma das medidas de comprimento dos catetos.

Deverão, também, ser encorajados a uma abordagem algébrica e a verificarem que $d_t > d_e$, excepto quando as abcissas ou as ordenadas dos pontos são as mesmas.

Para os pontos de coordenadas (a, c) e (b, d) temos,

$$\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2} = |a-b| + |c-d|$$

Elevando ao quadrado ambos os membros obtemos,

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = (|a-b| + |c-d|)^2$$

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = (a-b)^2 + (c-d)^2 + 2|a-b||c-d|$$

Assim, quando a=b ou c=d, o termo 2 $|a-b||c-d|$=0 e as distâncias são iguais.

Os alunos devem ser encorajados a recorrer à definição de circunferência e à definição de distância entre dois pontos na geometria do Motorista de Táxi.

Os diagramas apresentados podem ser variados. A figura seguinte apresenta alguns exemplos de possíveis diagramas de circunferências na geometria do Motorista de Táxi.

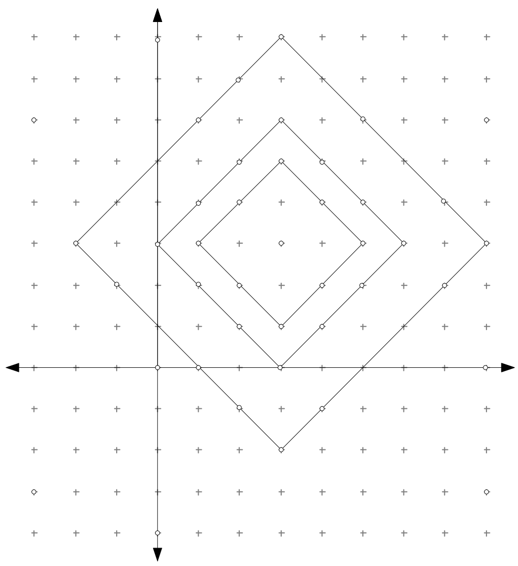


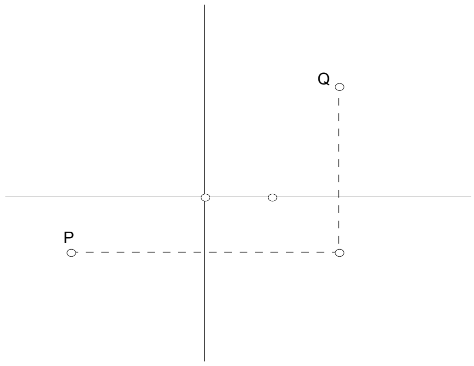
Figura 7.3 –. Circunferências na geometria do Motorista de Táxi

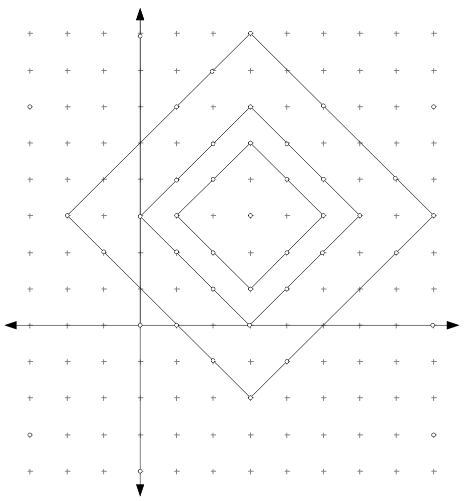
Em relação à questão: *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?*

Os alunos devem ser encorajados ao recurso a um exemplo genérico e, através da realização de cálculos algébricos, concluirão que a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante e igual a 4, ou seja não é π.

Objectos e relações primárias

Observemos os objectos matemáticos que intervêm na solução do problema e suas relações primárias, apresentados na tabela 7.3.

<table>
<tr>
<td rowspan="7">LINGUAGENS:
- <u>Termos e expressões</u>: Definição de distância na geometria Euclidiana, definição de distância na geometria do Motorista de Táxi.
-<u>Diagrama</u>: A figura seguinte é dada no enunciado. A construção foi feita com recurso ao Geometer´s Sketchpad).


- As repostas podem ser variadas, o diagrama seguinte ilustra exemplos de circunferências do Motorista de Táxi.

- Abordagem algébrica: A razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e igual a 4. Logo não é π.</td>
<td rowspan="7">Expressa

Ajuda</td>
<td>SITUAÇÃO/ PROBLEMA: Enunciado do problema.</td>
</tr>
<tr><td>Motivação   Resolução</td></tr>
<tr><td>CONCEITOS/ DEFINIÇÕES:
<u>Prévios</u>: Distância Euclidiana e definição de circunferência.
<u>Emergentes</u>: Na geometria do Motorista de Táxi, definição de distância entre dois pontos e definição de circunferência.</td></tr>
<tr><td>PROPRIEDADES / PROPOSIÇÕES:
<u>Prévios</u>: Desigualdade triangular na geometria Euclidiana.
<u>Emergentes</u>: Desigualdade triangular na geometria do Motorista de Táxi (dados três pontos quaisquer no plano verifica-se, $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$.</td></tr>
<tr><td>PROCEDIMENTOS:
Construção $\longrightarrow$ visualização $\longrightarrow$ raciocínio
Os alunos devem elaborar um argumento com base no diagrama.</td></tr>
<tr><td>Fundamentação   Justificação</td></tr>
<tr><td>ARGUMENTOS:
Justificações de natureza *empírica – experimentação crucial, do tipo intelectual* e, na segunda parte da situação – problema, de natureza *dedutiva-experimentação pensada, do tipo estrutural.*</td></tr>
</table>

Tabela 7.3 - Objectos e relações primárias do problema 2

As linguagens utilizadas no problema são a geométrica e a algébrica. Na geométrica, a construção do diagrama constitui uma ajuda para a compreensão da definição de distância e para a exploração da propriedade *desigualdade triangular.*

A sequência de procedimentos a adoptar é a seguinte:

Construção $\longrightarrow$visualização$\longrightarrow$raciocínio.

Na primeira parte, a justificação prevista é de natureza *empírica – experimentação crucial* e na segunda parte é *do tipo intelectual de na*tureza *dedutiva-experimentação pensada, do tipo estrutural.*

Argumentação – Objectos e relações secundárias

De seguida, ir-se-á continuar a análise do problema centrando-nos na argumentação e aplicando os atributos contextuais.

Ostensivo – não-ostensivo: Sendo a argumentação de natureza empírica, o recurso a objectos ostensivos deve ser observado durante a actividade dos alunos. A circunferência é um objecto não-ostensivo ao qual é associado, desde o início da escolaridade, um atributo ostensivo (um diagrama). Considerando que se trata de alunos do 11ºano, estes reconhecem o objecto não-ostensivo, circunferência na geometria Euclidiana, mencionado na situação.

No entanto, na geometria do Motorista de Táxi, com uma definição de distância entre dois pontos diferente da definida na geometria Euclidiana, os alunos reconhecem os objectos não-ostensivos representados na situação?

A solução à segunda parte do problema – *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? E essa constante é* π *?* - É de natureza dedutiva, onde os exemplos podem ser utilizados para organizar os argumentos, mas as características particulares do exemplo não devem ser consideradas na justificação. Por isso, os alunos devem ser encorajados a recorrer a uma abordagem algébrica, ao cálculo algébrico (atributos ostensivos) que deriva dos dados do problema, de definições, de teoremas aceites (atributos não – ostensivos).

Que objectos ostensivos mobilizam os alunos na apresentação da solução ao problema?

Extensivo – intensivo (particular / geral): Uma parte da justificação apresentada na solução da situação-problema é de natureza *empírica*, a qual é caracterizada pelo uso de exemplos para a elaboração de uma hipótese (e.g., a representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar da geometria Euclidiana) a qual é justificada mostrando a sua veracidade num exemplo específico – *experimentação crucial.* Assim, um objecto extensivo é utilizado como um caso particular (exemplos específicos de "circunferências" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo.

Quanto às justificações de natureza *dedutiva,* os alunos são encorajados a uma abordagem algébrica, recurso ao objecto *intensivo*. No entanto, a dualidade intensivo/extensivo pode ter expressão no caso dos alunos sentirem necessidade de determinar a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência (na geometria do Motorista de Táxi), num exemplo específico.

<u>Pessoal – institucional</u>: A situação-problema motiva argumentos quer de natureza empírica quer de natureza dedutiva regulados pela definição de função distância quer na geometria Euclidiana quer na geometria do Motorista de Táxi (*cognição institucional).* Millman e Parker (1991), apesar de reconhecerem a importância do recurso a figuras como ajuda para a intuição, afirmam que numa *prova é crucialmente importante utilizar apenas axiomas e teoremas derivados destes e não depender de qualquer ideia ou figura preconcebida.* Do ponto de vista da *cognição pessoal*, a actividade desenvolvida pelos alunos pode apoiar e promover o entendimento do papel chave da definição de distância entre dois pontos, na geometria do Motorista de Táxi e não a figura de circunferência na geometria Euclidiana.

A formulação da questão – *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em* π *?* - Proporciona contexto para a formulação da questão. Será que a letra π é apenas a designação de um número irracional ou poderá ser a designação de outra coisa, ou seja, entendida como tendo uma natureza funcional?

<u>Unitário – sistémico</u>: As noções de circunferência e de distância entre dois pontos são consideradas previamente conhecidas para o caso do plano Cartesiano, para a geometria Euclidiana e, neste caso, este objecto matemático é utilizado como uma entidade unitária. Enquanto que a mesma noção abordada noutros modelos de geometria (e.g., na geometria do Motorista de Táxi) é entendida como um objecto mais complexo a ser aprendido.

Expressão - conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz) a exploração de conceitos (circunferência, …) no plano, em que os pontos e as linhas têm as mesmas propriedades da geometria Euclidiana Plana mas a definição de distância entre dois pontos P (x_1, y_1) e Q (x_2, y_2) é a distância da geometria do Motorista de Táxi ($d_t = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$).

A relação entre um antecedente e um consequente estabelecido pelos alunos é feita de acordo com os critérios estabelecidos na situação-problema?

Que tipo de conflitos cria a definição de distância entre dois pontos na geometria do Motorista de Táxi, apresentada na situação-problema?

7.3.3. Problema 3: enunciado e solução

Enunciado: Imagina uma geometria finita formada por sete pontos e sete linhas[30]. Em que **A, B, C, D, E, F, G são os únicos pontos, {A, B, C}, {A, E, G}, {C, F, G}, {A, D, F}, {B, D, G}, {E, D, C}** e **{E, F, B} são as únicas linhas.**

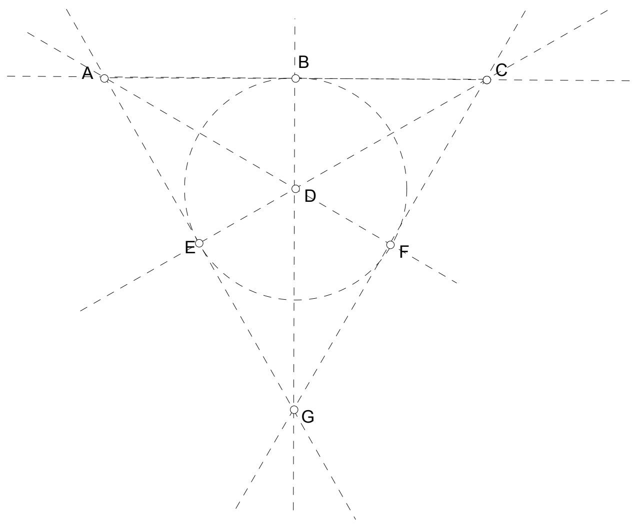


Figura 7.4 – Plano de Fano

Averigua, justificando, a validade da seguinte afirmação:

“Dada uma linha e um ponto exterior a essa linha, por esse ponto passa uma linha paralela à dada.”

[30] Plano de Fano.

Solução: É apresentada uma geometria finita formada por sete pontos e sete linhas e definida pictoricamente pela figura 7.4. A afirmação é falsa porque dada uma linha qualquer do plano de Fano e um ponto exterior a esta, por esse ponto passa uma linha que intersecta a dada.

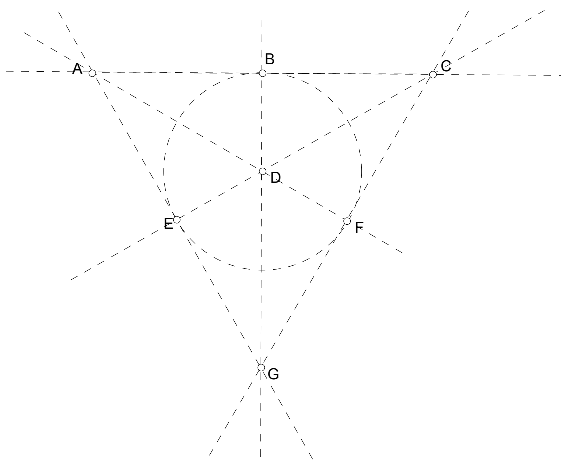
Objectos e relações primárias

Observemos os objectos matemáticos que intervêm na solução do problema e suas relações primárias, apresentados na tabela 7.4.

LINGUAGENS:

- Termos e expressões: Geometria finita, Plano de Fano…

-Diagrama: A figura seguinte é dada no enunciado. A construção foi feita com recurso ao Geometer´s Sketchpad).



Expressa

Ajuda

SITUAÇÃO/ PROBLEMA: Enunciado do problema.

Motivação

Resolução

CONCEITOS/ DEFINIÇÕES:

Prévios: Geometria incidente. Conjunto de pontos colineares na geometria Euclidiana.

Emergentes: Geometria não incidente.

PROPRIEDADES / PROPOSIÇÕES:

Prévios: O plano cartesiano é uma geometria incidente.

No plano cartesiano, a relação de paralelismo é transitiva.

Emergentes: O plano de Fano é uma geometria incidente.

PROCEDIMENTOS:

Visualização $\longrightarrow$ raciocínio

Os alunos devem elaborar um argumento com base no diagrama e na definição de plano de Fano.

Fundamentação

Justificação

ARGUMENTOS:

Justificações de natureza *empírica – crucial, do tipo intelectual, a justificação é baseada no exemplo específico de geometria finita (plano de Fano) mas utiliza as relações entre os elementos do exemplo.*

Tabela 7.4 – Objectos e relações primárias do problema 3

Argumentação – Objectos e relações secundárias

De seguida ir-se-á continuar a análise da solução do problema, com especial atenção na argumentação, aplicando os atributos contextuais.

<u>Ostensivo – não-ostensivo</u>: Neste caso, a visualização é um meio a privilegiar para apresentar a argumentação, baseada na definição de linhas paralelas e na definição de plano de Fano. O enunciado do problema associa atributos ostensivos (diagrama - figura 7.4) a linhas do plano de Fano, objectos não-ostensivos.

Será que os alunos irão identificar os objectos **{A, B, C}**, **{A, E, G}**, **{C, F, G}**, **{A, D, F}**, **{B, D, G}**, **{E, D, C}** e **{E, F, B}**, como ostensivos de linhas?

<u>Extensivo – intensivo (particular/geral)</u>: O plano de Fano é aqui apresentado como um exemplo de geometria finita. Note-se que estes alunos já tinham sido familiarizados com um exemplo de geometria finita, uma geometria de quatro pontos.

A ligação entre os dois exemplos deve ser estabelecida. Será que esta ligação se verifica? E de que forma?

<u>Institucional – pessoal</u>: Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências na aula de matemática são com exemplos de linhas "traçadas" no plano cartesiano e/ou no plano de Poincaré, na situação de uma geometria Finita, em que a linha contém apenas alguns pontos, poderá criar conflitos ao nível da *cognição pessoal.* Que tipo de conflitos serão esses?

<u>Unitário – sistémico</u>: Neste caso, os objectos matemáticos são utilizados como entidades unitárias. No entanto, esta situação pode ser entendida como um caso particular de geometrias finitas.

<u>Expressão – conteúdo</u>: A situação-problema induz, ao nível do conteúdo, a abordagem de proposições já abordadas em situações anteriores (Proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente). Induz, também, a noção de geometria não incidente.

Considerando que as experiências anteriores são num contexto de geometria incidente, as expressões, **{A, B, C}**, **{A, E, G}**, **{C, F, G}**, **{A, D, F}**, **{B, D, G}**, **{E, D, C}**, **{E, F, B}** deverão criar conflitos com expressões do tipo y=mx+b e /ou x=a (com a, b e m, valores reais).

7.3.4. Problema 4: enunciado e solução

Enunciado: Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n e k)** no Semi-Plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições:

l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$

m: $(x - 6{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25 \wedge y > 0$

n: $(x - 3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$

k: $x = 11 \wedge y > 0$

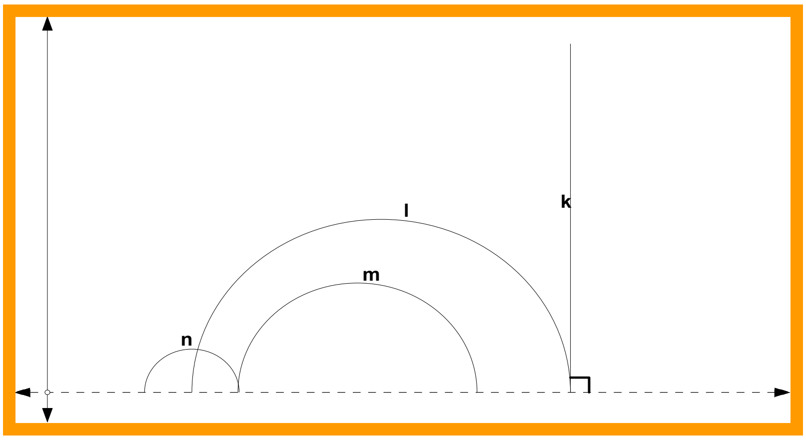


Figura 7.5 – Linhas hiperbólicas (l, m, n e k) no semi- plano de Poincaré

Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Solução: É pedida a indicação, com justificação, de duas linhas paralelas e duas linhas não paralelas. **1)** Através de um processo de visualização e com base na definição de linhas paralelas, a indicação das linhas l e n para exemplo de duas linhas não paralelas e a indicação de l e m para exemplo de duas linhas paralelas parece ser evidente. O mesmo não se passa com as linhas l e k, ou n e m, como exemplos de linhas paralelas. De facto, nestes casos, a justificação deve ter também em consideração a definição de semi-plano de Poincaré. Porque em relação às linhas l e k, o ponto de intersecção seria (11, 0) que não é um ponto do semi-plano de Poincaré. Então, as linhas l e k são linhas paralelas. **2)** Através da algebrização do problema, transforma-se o problema num problema de cálculo algébrico, através da resolução de sistemas de duas equações (condições que definem as linhas dadas na figura). Recorrendo a conhecimentos já adquiridos na escolaridade básica, o sistema pode ser possível determinado (com uma solução, em que essa solução é o ponto de intersecção das duas linhas hiperbólicas) ou impossível (sem solução, em que a não existência de solução significa que as linhas hiperbólicas respectivas não se intersectam). Assim, a indicação e justificação de duas linhas não paralelas e duas linhas paralelas surge através da resolução de sistemas.

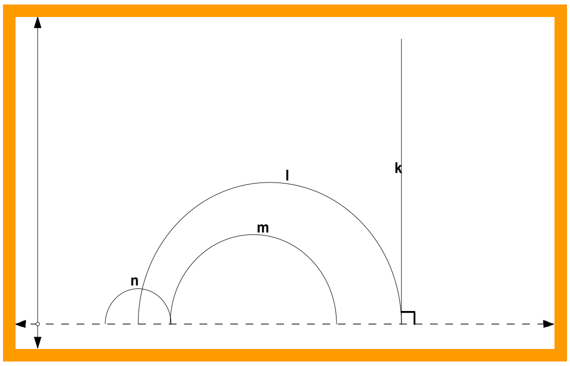
Objectos e relações primárias

Observemos os objectos matemáticos que intervêm na solução do problema e suas relações primárias, apresentados na tabela 7.5.

LINGUAGENS:

- Termos e expressões: Semi-plano de Poincaré, linha hiperbólica, linhas paralelas.

-Diagrama: A figura seguinte é dada no enunciado. A construção foi feita com recurso ao sript Hyp_line do Geometer´s Sketchpad)



Se um ponto de coordenadas (x,y) pertencesse e l e a k, então x=11 e $(x - 7)^2 + y^2 = 16$. Mas isto implicaria que y=0 o que não é verdadeiro para um ponto (x,y) do semi-plano de Poincaré.

- Cálculo algébrico (resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas). Por exemplo, o sistema das equações que definem as linhas k e l tem como solução o ponto (x, y) = (11,0) e sendo y=0 não é um ponto do semi-plano de Poincaré.

Expressa

Ajuda

SITUAÇÃO/ PROBLEMA: Enunciado do problema.

Motivação — Resolução

CONCEITOS/ DEFINIÇÕES:

Prévios: Definição de semi-plano de Poincaré; Definição de linhas paralelas na geometria Euclidiana.

Emergentes: Definição de linhas paralelas numa geometria abstracta.

PROPRIEDADES / PROPOSIÇÕES:

Prévios: No plano cartesiano, a relação de paralelismo é transitiva.

Emergentes: No plano de Poincaré, a relação de paralelismo é transitiva.

PROCEDIMENTOS: Processo de visualização.

Visualização ⟶ raciocínio

Cálculo algébrico. Resolução de sistemas.

Fundamentação — Justificação

ARGUMENTOS:

Justificações do tipo conceptual, baseada na definição de linhas paralelas e de semi-plano de Poincaré.

Nota: A justificação pode consistir na resolução de sistemas, de duas equações a duas incógnitas, ou seja na algebrização do problema.

Tabela 7.5 - Objectos e relações primárias do problema 4

As linguagens utilizadas no problema são a geométrica e a algébrica. A geométrica constitui uma ajuda para se identificar linhas paralelas e não paralelas.

A situação colocada tinha como objectivo potenciar a visualização e valorizar o papel da definição de semi-plano de Poincaré na justificação da indicação de linhas paralelas e de linhas não paralelas.

A linguagem algébrica ajuda a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Por exemplo das linhas l e k. A situação-problema motiva a abordagem de conceitos/definições e propriedades/proposições (e.g., definição de linhas paralelas numa geometria abstracta, …).

A sequência de procedimentos a adoptar é a seguinte, visualização $\longrightarrow$ raciocínio.

Mas será que, neste caso, a visualização induz raciocínios errados?

A justificação prevista é do tipo conceptual, fundamentada quer nas definições de semi-plano de Poincaré e de linhas paralelas quer nas propriedades da relação de paralelismo no plano cartesiano.

Argumentação – Objectos e relações secundárias

Adoptando a categorização de Balacheff mencionada por Gutiérrez e Marrades (2000), a argumentação é de natureza *Conceptual* – baseada na definição de linhas paralelas na geometria abstracta (exemplo de uma geometria abstracta), formulação de propriedades (Propriedades da relação de paralelismo) e no cálculo algébrico (cálculo *simbólico*). No *cálculo simbólico* não existe experimentação e a justificação é baseada na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas e na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

De seguida, ir-se-á continuar a análise do problema centrando-nos nos argumentos e aplicando os atributos contextuais.

Ostensivo – não-ostensivo: Neste caso, a visualização é um meio a privilegiar para apresentar a argumentação, baseada na definição de linhas paralelas e na definição de semi-plano de Poinacaré. O enunciado do problema associa atributos ostensivos (notação algébrica, gráficos – figura 7.5) a linhas hiperbólicas, objectos não – ostensivos.

Os alunos reconhecem os objectos não-ostensivos representados na situação?

A visualização da figura 7.5 pode facilitar a argumentação, do tipo conceptual, baseada na definição de linhas paralelas e de semi-plano de Poincaré.

A argumentação com base na resolução de sistemas (de duas equações com duas incógnitas) utiliza os ostensivos associados (notação algébrica) para as linhas hiperbólicas na apresentação da solução ao problema.

Que objectos ostensivos mobilizam os alunos na apresentação da solução ao problema?

Extensivo – intensivo (particular/geral): Um objecto extensivo é utilizado como um caso particular (um exemplo específico, a linha hiperbólica l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$) de um caso mais geral (isto é, da linha hiperbólica do tipo l: $(x - c)^2 + y^2 = r^2 \wedge y > 0$) que é um objecto intensivo. Segundo Contreras et al. (2007), esta dualidade extensivo/intensivo é utilizada para explicar um procedimento básico da actividade matemática: o uso de exemplos genéricos. No problema, pode-se pensar na definição de linhas paralelas para o caso geral de linhas hiperbólicas e estabelecer a ligação com o enunciado do problema, que utiliza objectos extensivos.

Institucional – pessoal: A situação-problema pode originar uma dialéctica entre o institucional e o pessoal. Se, por um lado, a visualização se revela um meio para dar a solução ao problema, por outro, as experiências mais recentes destes alunos no âmbito do paralelismo de linhas, na geometria Euclidiana, foi feita segundo uma abordagem analítica e através do recurso à resolução de sistemas de equações.

Considerando que, ao nível da *cognição institucional*, as experiências na aula de matemática com o paralelismo de linhas foram feitas num contexto de geometria Euclidiana, recorrendo-se à resolução de sistemas, que tipo de conflitos ao nível da *cognição pessoal* pode originar este problema?

Unitário – sistémico: A noção de paralelismo é considerada previamente conhecida para o caso do plano cartesiano, para a geometria Euclidiana e, neste caso, este objecto matemático é utilizado como uma entidade unitária. Enquanto que a mesma noção abordada noutros modelos de geometria (e.g., o semi-plano de Poincaré) é entendida como um objecto mais complexo a ser aprendido.

Expressão – conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas numa geometria abstracta.

Quer a figura 7.5 quer as expressões algébricas constantes no enunciado do problema podem ajudar a visualização do problema e a apresentação da justificação.

As expressões algébricas que definem as linhas hiperbólicas são conectadas à respectiva representação gráfica, sem dificuldades? Em que medida o aluno estabelece esta relação semiótica?

Segundo Fischbein, E. (1999), Lobachevsky e Bolyai, Riemann mostraram a existência de outras geometrias logicamente possíveis. Estas geometrias provocam conflitos com as nossas imagens naturais e aparente auto evidência do mundo real e das suas propriedades espaciais. Assim, que tipo de conflitos cria o enunciado do problema com as imagens prévias, dos alunos, de linhas paralelas na geometria Euclidiana?

7.4. Sumário e potenciais conflitos cognitivos

Este capítulo apresenta a descrição dos sujeitos participantes no estudo, a organização do estudo e a configuração epistémica de quatro problemas de geometria.

Os problemas 1 e 4 focam a relação de paralelismo no semi-plano de Poincaré. O problema 3 foca a relação de paralelismo numa geometria finita, no plano de Fano. O problema 2 cria oportunidades para a exploração de noções básicas, já trabalhada desde a escolaridade básica, na geometria do Motorista de Táxi.

Esta investigação teve preocupações relativas ao desenvolvimento das competências argumentativas dos alunos, isto é, a partir de níveis inferiores de rigor de argumentação, preparar o aluno para demonstrações mais formais, para processos cognitivos de ordem superior. Assim, com o foco na argumentação, no papel que ela desempenha na justificação de procedimentos, procedeu-se a uma análise das justificações envolvidas nas soluções dos referidos problemas segundo duas perspectivas:

- A perspectiva analítica e classificativa de Marrades e Gutiérrez (2000);
- A perspectiva ontosemiótia do conhecimento e educação matemática de Godino et al. (2006).

O enfoque nos argumentos matemáticos, apresentados nas soluções dos problemas propostos, segundo as perspectivas anteriores, conduz a uma configuração complexa. Com a finalidade de se analisar a complexidade ontosemiótica dos objectos matemáticos e as suas relações com a natureza do raciocínio matemático, num primeiro nível de análise, os argumentos estão conectados com os objectos primários e, num segundo nível de análise, estes são descritos segundo as seguintes facetas ou dimensões duais: *Ostensivo – não-*

ostensivo; Extensivo – intensivo (particular/geral); Pessoal – institucional; Unitário – sistémico: Expressão – conteúdo.

A referida análise ajudou a formular conjecturas sobre conflitos cognitivos a serem comprovadas ou não no capítulo seguinte, capítulo 8, e que a seguir se apresentam:

- A ruptura com o plano Cartesiano, para a resolução de problemas da geometria Euclidiana e a adopção do semi-plano de Poincaré para a resolução de problemas na geometria Hiperbólica (situação atípica à luz do currículo de matemática para o ensino secundário português) poderá criar conflitos ao nível da dimensão ostensivo–não ostensivo, como por exemplo, o ostensivo de linha hiperbólica ser entendido como linha recta (Euclidiana);

- A transição de se considerar as características particulares de um exemplo nas justificações apresentadas na solução de um problema para a adopção de argumentos baseados em aspectos genéricos, ou seja, a relação dialéctica entre o extensivo- intensivo e unitário-sistémico, poderá criar problemas ao nível da utilização de uma linguagem algébrica e a manipulações simbólicas (que servem de base, com frequência, a argumentos de natureza dedutiva).

- O facto das experiências de visualização terem sido implementadas num contexto de geometria Euclidiana poderá ser inibidor da elaboração de raciocínios geométricos e da compreensão de sistemas axiomáticos diferentes do Euclidiano. Segundo Fischbein, E. (1999), as geometrias não Euclidianas são logicamente possíveis, mas criam conflitos com as nossas imagens naturais, e com o aparente auto evidência do mundo real e das suas propriedades espaciais.

Neste processo, é nosso entendimento que a intuição promove a realização de raciocínios dedutivos, assim como o raciocínio dedutivo deve apurar a intuição.

Capítulo 8

Configurações e trajectórias cognitivas de dois sujeitos

8.1. Introdução

Este capítulo descreve configurações e trajectórias cognitivas de dois casos (as alunas designadas por X e Y) quando confrontados com problemas de geometrias planas.

O capítulo está dividido em três secções. A primeira apresenta as configurações cognitivas iniciais das duas alunas. Nas secções seguintes apresentam-se, respectivamente, as configurações cognitivas, englobando relações primárias e relações secundárias postas em jogo nas argumentações elaboradas a quatro problemas e as configurações cognitivas finais das duas alunas.

Uma análise dos protocolos da solução de quatro problemas é feita com base no método de análise de protocolos de resolução de problemas, sugerido por Schoenfeld (1985). Assim, o protocolo é "dividido" em episódios (períodos de tempo em que o aluno adopta um conjunto de acções – leitura, análise, exploração, elaboração de plano, implementação desse plano, ou verificação).

Finalmente, em sumário, são apresentados os elementos chave da análise dos casos.

8.2. Configurações cognitivas iniciais das duas alunas

As alunas X e Y realizaram um teste de diagnóstico de conhecimentos de geometria, em Novembro de 2004, no 1º período lectivo do seu 10 º ano do ensino secundário. Nessa altura, estas alunas tinham 15 anos de idade e, além de terem tido aproveitamento na sua escolaridade básica, tinham sempre tido um nível de aproveitamento elevado na disciplina de matemática.

Em relação ao teste diagnóstico, apresenta-se a seguir a descrição sumária do desempenho destas alunas nos respectivos conteúdos:

- Concorrência e paralelismo de rectas no plano Euclidiano, requerendo o reconhecimento da posição relativa de rectas no plano, com base em diagrama e sem diagrama e, recorrendo às propriedades de alguns polígonos – ambas as alunas apresentaram respostas correctas, com justificação revelando domínio dos conceitos envolvidos;
- Quadriláteros - classificação e propriedades, envolvendo a utilização de conceitos sobre quadriláteros – a aluna X apresentou respostas correctas, com justificação baseada no recurso ao contra-exemplo e a aluna Y elaborou respostas correctas com justificação incompleta. No entanto, revelou algum domínio conceptual;
- Geometria finita - exemplo, relacionando -se com a capacidade do aluno utilizar informação para interpretar de forma adequada situações originais, ou seja, distinguir se uma dada afirmação é ou não adequada a determinada geometria – ambas as alunas apresentaram resposta errada;
- Resolução de problemas de demonstração, no plano Euclidiano, requerendo conhecimentos sobre congruência de triângulos e/ou sobre paralelismo de rectas no plano e tendo como base um diagrama – a aluna X apresentou respostas correctas, com justificação incompleta, revelando domínio conceptual e a aluna Y apresentou respostas correctas com tentativa de justificação copiando partes do enunciado e ilustrando com recurso a diagramas;
- Intersecção de planos, estabelecendo relações espaciais e requerendo que se "imagine" a intersecção de dois planos – a aluna X apresentou resposta correcta justificando com exemplos (diagramas) e a aluna Y apresentou resposta errada.

No início do estudo, estas alunas revelaram indicadores de estar num estádio de desenvolvimento do reconhecimento da importância das definições, dos axiomas, dos teoremas, na resolução de problemas de prova de nível zero (Waring, 2000) pois as definições eram lidas de forma diagonal e não se apercebiam do seu papel chave na elaboração de justificações. Nos primeiros problemas propostos, o raciocínio identificado nestas alunas, assim como nos restantes colegas de turma, caracterizava-se por ser um raciocínio instantâneo e não um pensamento estruturado (Alcock, 2001).

Na tabela 8.1 apresentam-se as respostas das alunas X e Y a uma das questões do questionário sobre "Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e sua aprendizagem" (Anexo 2).

Questão: Diz por palavras tuas o que entendes por:	
Exercício	Aluna **X**: *Algo que nos ajuda a praticar sobre determinado tema.* Aluna **Y**: *Algo que resolvemos e calculamos com os dados que nos dão.*
Problema	Aluna **X**: *Questão prática que muitas vezes nos pode reflectir o real.* Aluna **Y**: *Exercício que resolvemos através do raciocínio.*
Teorema	Aluna **X**: *Fórmula básica que nos ajuda a resolver problemas/exercícios*[31]. Aluna **Y**: *Uma teoria que me ajuda a resolver exercícios*.
Prova	Aluna **X**: *Elemento de avaliação para onde transmitimos os nossos conhecimentos*. Aluna **Y**: *Não responde*
Conjectura	Aluna **X**: *Não sei.* Aluna **Y**: *Não sei.*

Tabela 8.1 - Registo das respostas das alunas à parte III do questionário (Anexo2)

Passado sensivelmente um ano, no 1º momento do estudo de caso, quando estas alunas frequentavam o 11º ano, as respostas apresentadas por estas alunas à mesma questão foram as seguintes:

Questão: Diz por palavras tuas o que entendes por:	
Exercício	Aluna **X**: *Algo que nos é proposto para nós tentarmos resolver e assim praticarmos e treinarmos a nossa memória.* Aluna **Y**: *É algo que resolvemos sem termos que recorrer a grandes raciocínios, é praticamente de resposta quase directa.*
Problema	Aluna **X**: *Praticarmos a nossa mente a resolver desafios que se colocam frequentemente.* Aluna **Y**: *É algo que para resolvermos temos que fazer um raciocínio.*
Teorema	Aluna **X**: *Regras que servem para provar determinadas situações, podendo ser aplicada de diversas formas.* Aluna **Y**: *É como uma regra que se constata através de exercícios e problemas*.
Prov	Aluna **X**: *Explicar em que consistem determinadas afirmações, provando se são*

[31] A aluna associou o termo teorema ao Teorema de Pitágoras.

a	*verdadeiras ou falsas.* Aluna **Y**: *É uma maneira de provar na prática o que dizemos em teoria.*
Conjectura	Aluna **X**: *É uma afirmação sobre o que nos parece que é uma coisa mas que ainda temos de testar para provar se é verdade.* Aluna **Y**: *É quando levantamos uma hipótese (verdadeira/falsa) que depois temos que constatar.*

Tabela 8.2 – Registo das respostas das alunas à parte III do questionário (Anexo3)

As respostas obtidas são significativamente diferentes: no início do 10º ano estas alunas não conseguiram elaborar qualquer registo sobre o que entendiam por conjectura, enquanto que, no início do 11º ano, após a primeira fase do estudo, já conseguiram expressar por escrito o entendimento que tinham de conjectura. É ainda de salientar as diferenças de discursos sobre os termos teorema e prova, salientando-se a grande diferença no registo da aluna Y, relativamente ao termo prova.

Quando lhes foi pedido que elaborassem uma avaliação sobre as 15 sessões de resolução de problemas realizadas no 10 º Ano (Anexo 3), as alunas X e Y apresentaram as respostas constantes na tabela 8.3.

No 10º ano participaste em 15 sessões de resolução de problemas de prova e/ou tarefas de natureza exploratória. Consulta o teu dossier, com os trabalhos realizados nessas sessões, e escreve um relato da actividade desenvolvida nessas sessões, especificando: 1- O interesse do conteúdo; 2 - A utilidade para a tua aprendizagem; 3 - O grau de dificuldade; 4- Outros comentários.
Aluna X 4 – *Se eu tivesse que falar a outras pessoas sobre diferentes tipos de geometria eu, de facto, diria que existe mais que um tipo de geometria. Qualquer um destes tipos se rege por diferentes regras e o que numa geometria pode ser verdadeiro, noutra pode ser completamente impossível. Existem três tipos de geometria: Hiperbólica, Esférica e Euclidiana, sendo esta última a mais conhecida e utilizada no ensino Básico e também Secundário…*
Aluna Y 1 – *É interessante, não só para resolvermos problemas, mas também para aplicarmos em experiências do dia-a-dia.* 2 – *Foi bastante útil pois aprendi a resolver problemas pelo modelo de Pólya, o que se torna mais fácil.*

3 – *O grau de dificuldade não foi nem demasiado baixo, nem elevado.*   4 – *Foi uma experiência útil para a minha aprendizagem, pois fiquei a conhecer outros tipos de geometria e aprendi a resolver problemas pelo Modelo de Pólya, o que torna essa tarefa mais fácil de realizar. Foi importante o recurso aos computadores e a todos os outros materiais que usámos para nos ajudar a resolver os problemas.*

Tabela 8.3 – Registo da avaliação feita pelas alunas X e Y na parte IV do questionário (Anexo 3)

8.3. Trajectória cognitiva de dois sujeitos

Esta secção apresenta a descrição dos processos de solução adoptados pelas alunas X e Y na resolução de quatro problemas propostos, divididos em episódios que dizem respeito à actividade desenvolvida durante a resolução de um problema. Os *episódios 1, 2, 3 e 4* dizem respeito, respectivamente, à *leitura e análise do enunciado* da situação – problema, à *exploração, elaboração de plano/implementação e verificação e/ou extensão ao problema.*

O discurso das alunas é feito em *itálico.* As soluções dos problemas são apresentadas nas várias figuras que vão surgindo no texto.

A análise da forma como estas alunas elaboram as justificações é feita segundo a estrutura analítica descrita por Marrades e Gutiérrez (2000) e baseada num enfoque ontosemiótico da educação matemática desenvolvido por Godino et al. (2006).

Ao analisarmos os argumentos constantes nas justificações elaboradas por estas alunas, entramos numa "configuração" complexa visto os argumentos estarem ligados com os seguintes objectos matemáticos: *linguagem; situação-problema; conceitos; proposições; procedimentos.* E associados a estes objectos primários temos as seguintes dimensões duais: *ostensivo – não-ostensivo (materialização-idealização); extensivo-intensivo (particularização-generalização); institucional-pessoal; unitário-sistémico (análise - síntese); expressão -conteúdo.*

A actividade das alunas foi desenvolvida em grupo. No entanto a constituição dos grupos foi variando devido a razões que se prendem com a disponibilidade e motivação dos alunos participantes. Assim, refira-se que: O problema 1 foi desenvolvido pela aluna X em parceria com a aluna designada por C e pela aluna Y em parceria com a aluna T; O problema 2 foi desenvolvido em grupo de quatro elementos, com os alunos designados por X, C, J e Y; O problema 3 foi desenvolvido pelas alunas X e Y; e o problema 4 foi desenvolvido pela aluna X com o aluno J e a aluna Y desenvolveu o problema sozinha.

A aluna X nem sempre trabalhou com a(o) mesma(o) colega. No entanto, era ela a líder incontestada do grupo: marcava o ritmo de trabalho, decidia sobre o apoio que deveriam pedir ou não e não aceitava de forma geral as sugestões da (o) colega de grupo.

A aluna Y, ao contrário da aluna X, não se assumia como líder do grupo: aceitava que a colega liderasse o trabalho, discordava frequentemente das opiniões da colega e dava grandes explicações sobre as soluções dos problemas.

Nas subsecções seguintes apresentam-se as descrições dos processos de solução adoptados por estas alunas, durante a resolução dos quatro problemas referidos no capítulo anterior.

8.3.1. O Processo de argumentação das alunas X e Y ao problema 1

PROBLEMA 1: 1ª Parte - Define, no semi-plano de Poincaré, a linha que passa pelos pontos A (1,1) e B (3,3). Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. (A mesma questão foi formulada para a geometria Euclidiana).

2ª Parte - Sejam l_1 e l_2 linhas no semi-plano de Poincaré. Se $l_1 \cap l_2$ tem dois ou mais pontos então l_1 coincide com l_2. Justifica.

SOLUÇÃO (Elaborada pela aluna X com a aluna C)

<u>Episódio 1: Leitura e análise da situação-problema</u>

(Tempo: 00.03.10- 00.05.25)

Os primeiros dois minutos foram dedicados à leitura do enunciado e à sua análise. A aluna consultou as suas notas de aulas anteriores e fez o registo apresentado na figura 8.1.

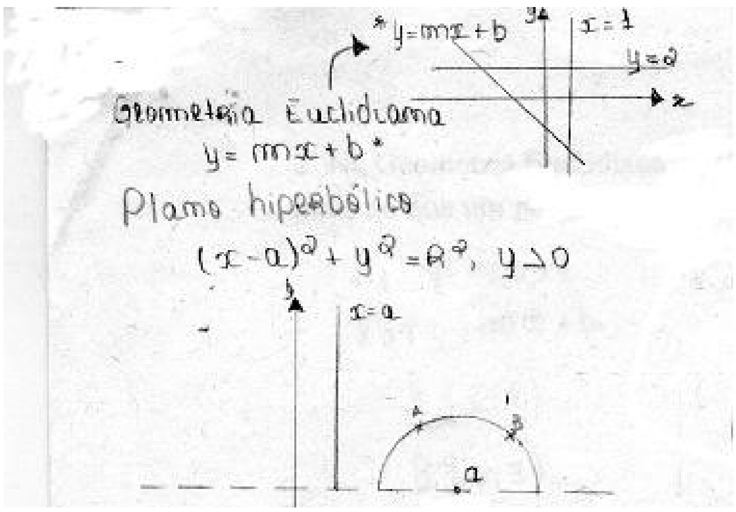


Figura 8.1 – Solução à 1ª parte do problema 1

Episódio 2: Exploração, elaboração e implementação de plano

(Tempo: 00.09.05- 00.45.10)

Após a construção da figura 8.1, a aluna procedeu à exploração da situação-problema.

X.: *A linha hiperbólica tem os pontos A e B* (assinalou os pontos na figura anterior)... E p*ara definirmos a semi-circunferência precisamos de ter o centro e o raio…Vamos fazer outro desenho (*deram início à construção da figura 8.2).

C.*: E como fazemos?* (alunas permaneceram caladas…).

X.: *Stora não conseguimos ...*

Professora: A situação é esta. Conhecidos dois pontos de uma semi-circunferência, como determinar o centro?

A aluna X riscando o esquema afirmou,

X.: *A mediatriz (da corda [AB]) contém o centro…*

Professora: Muito bem…

A professora deixou as alunas sozinhas e entretanto a aluna X tinha elaborado o diagrama da figura 8.2.

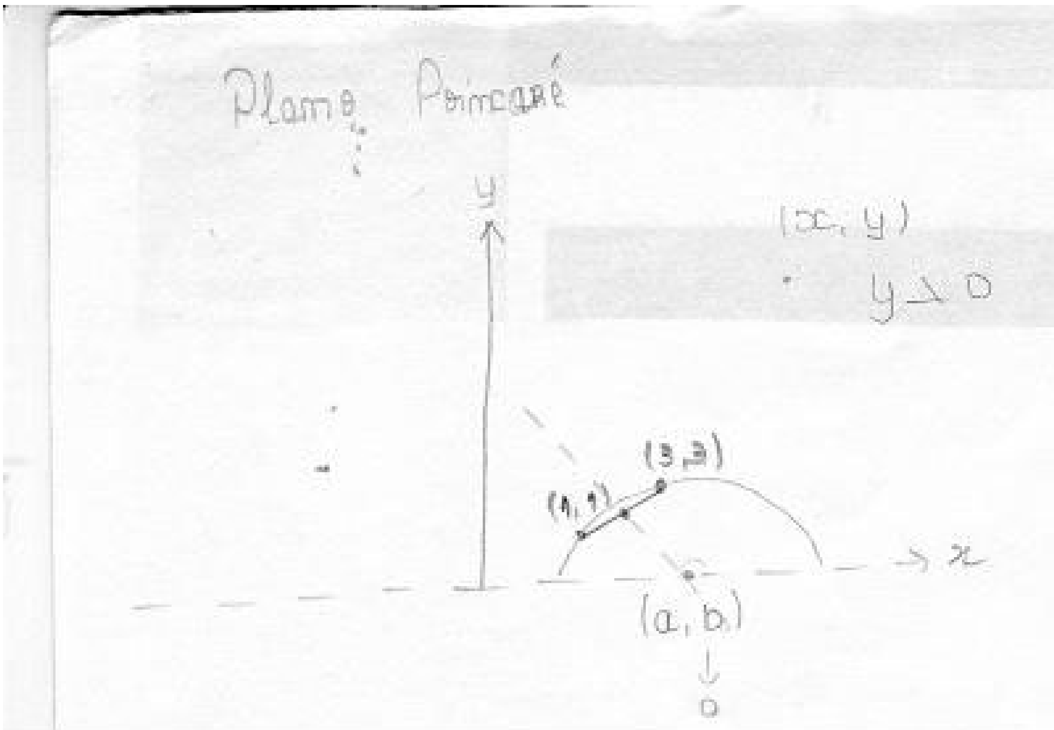


Figura 8.2 – Diagrama elaborado pela aluna X

A aluna deu início à determinação do centro e do raio da semi-circunferência a passar por A e B. (ver figura 8.2)

C. *Pois ...pois…Sabes fazer?*

X. *A mediatriz é perpendicular a AB…e a linha hiperbólica é x menos um a ao quadrado mais y menos um b ao quadrado, igual a r ao quadrado…Mas neste caso o b é zero…(a aluna em simultâneo fez o registo escrito).*

C. *Percebi/*

X.*O declive da mediatriz é menos um e fica/*

C. *Menos um?*

X. *Pois, a perpendicular a y=x é y=-x, lembras-te?*

C. *Ah…pois*

X. *Fica y igual a menos x mais um b…(alunas em silêncio e entretanto a aluna C. questiona a Professora)*

C. *Professora, como é que determino b?*

Professora*: A figura não vos ajuda?*

X. *s* (mediatriz de [AB]) *passa no ponto médio da corda [AB],*

C. *Mas não queremos o centro?*

X. *E chegas lá…olha (aluna efectuou os cálculos) o ponto dois, dois pertence à mediatriz e assim b é quatro e o centro é quatro.*

C. *Ah?!*

X. *Então…a mediatriz corta o eixo (dos x) no ponto quatro, zero…e agora o raio é fácil…*

De seguida as alunas determinaram o valor do raio.

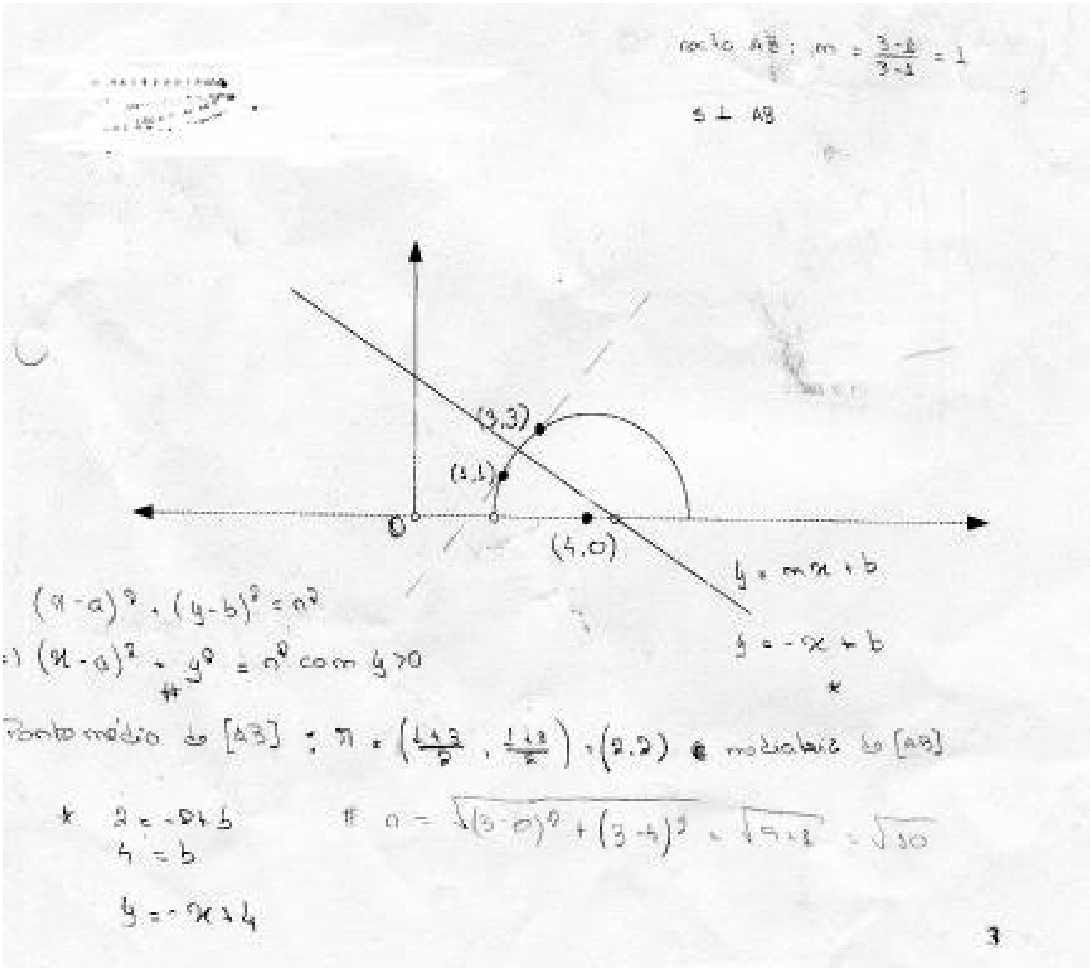


Figura 8.3 – Solução escrita da aluna X

Professora: Então qual é a linha pedida?

As alunas, depois de definirem a expressão algébrica que define a linha pedida, foram incentivadas a recorrer novamente ao programa, GSP, para verificarem por via geométrica os valores encontrados para o centro e o raio.

__**Episódio 3: Verificação**__

(Tempo: 00.35.00 – 00.45.23)

As alunas recorreram ao script **hyp_line.gss** e marcaram a linha a passar por A (1,1) e B (3,3) (figura 8.4). Quando a aluna X tentou marcar o centro da semi-circunferência, ponto de coordenadas (4,0), não conseguiu. E como consequência também não conseguiu marcar o segmento de recta correspondente ao raio.

Nesta altura ocorreu o seguinte diálogo:

X. Stora…não consigo marcar o centro. O que se passa?

Professora: Porque será?

C. Mas o centro é 4. Estás a ver? (Apontando para o écran)

X. Mas temos que marcar como os outros pontos…Oh! stora não consigo…

Professora: Qual é a definição de semi-plano de Poincaré?

X. As linhas são semi rectas ou semi círculos. Não é?

Professora: E isso chega?

X. Deixa ver… (a aluna foi consultar os apontamentos de aulas anteriores) Ah! Já sei o y tem que ser positivo…por isso é que não dá…

C. *Pergunta à professora.*

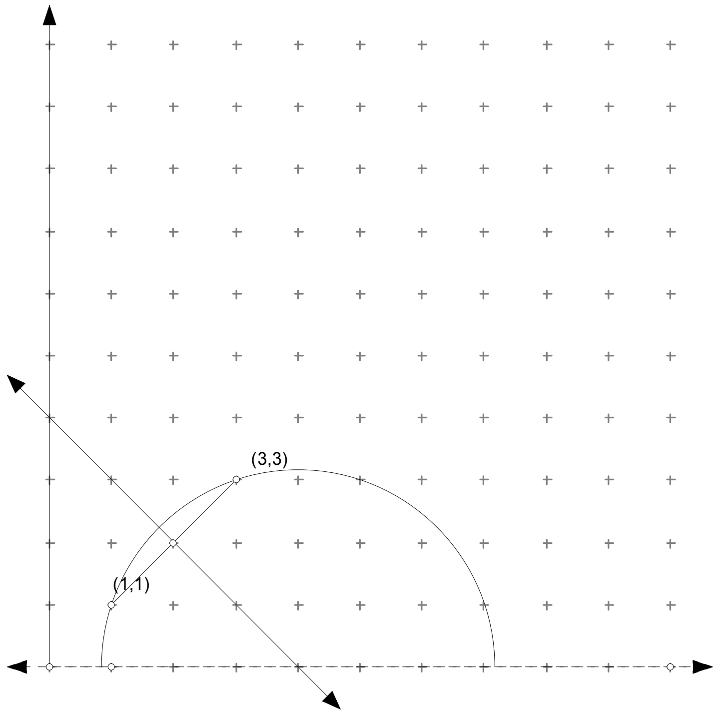


Figura 8.4 – Construção realizada pela aluna X com recurso script hyp_line.gss

Esta experiência, num cenário de geometria dinâmica, permitiu através de simbologia pictórica, tornar perceptível a definição de semi-plano de Poincaré.

Episódio 4: Extensão à situação-problema

(Tempo:00.45.25 – 00.65.12)

Quanto à questão - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. - Registou-se o seguinte episódio após as alunas recorrerem ao script **hyp_line.gss** para o traçado de "linhas" hiperbólicas a passar por A e B.

X. *Passa uma só linha hiperbólica por estes dois pontos… passam só uma.*

C. *Só uma?*

X. *Passa só uma. Por um é que passam várias…mas temos que justificar!*

Nesta altura, as alunas pediram apoio para a realização da justificação e foi-lhes explicado o método de demonstração por redução ao absurdo recorrendo-se a experiências anteriores (e.g. a prova de que raiz quadrada de 2 é um irracional).

De seguida e de forma autónoma a aluna ***X*** apresentou o trabalho escrito ilustrado

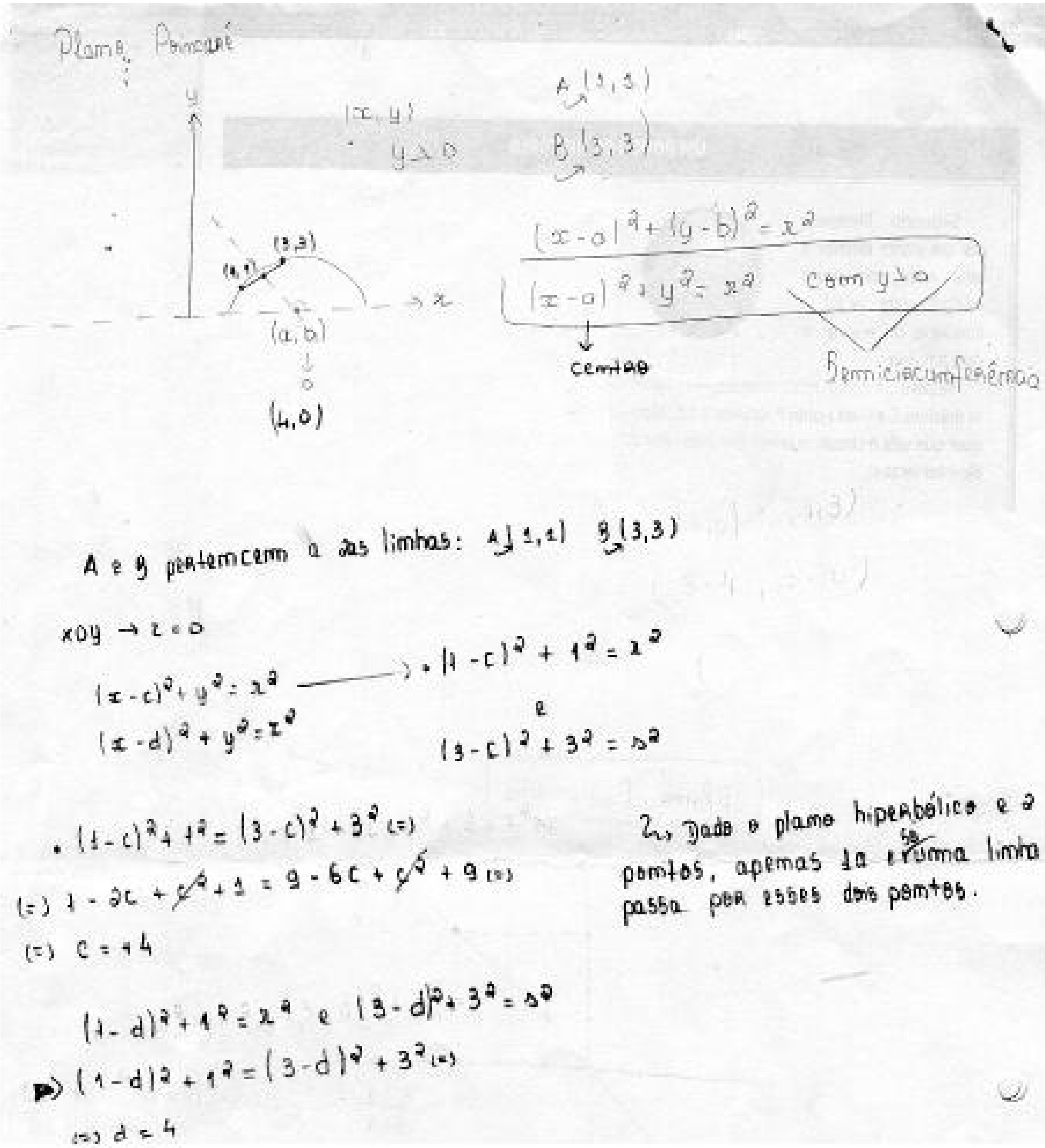


Figura 8.5 – Solução da aluna X à 2ª parte do problema 1

Na 2ª parte da situação-problema a aluna apresentou a resposta seguinte.

Centro (4,0) Raio = 2

$A \in l_1$

$A(2,4)$ $B(3,5)$

Se $(2,4) \in l_1$

$l_1: (x-a)^2 + y^2 = R^2 \rightarrow (2-a)^2 + 4^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$y \geq 0$

$\Leftrightarrow 2^2 - 4a + a^2 + 4^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 + 16 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + 16 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 20 = R^2$

$(3-a)^2 + 5^2 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^2 - 6a + a^2 + 25 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 34 = R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 34 = R^2$

$l_2: (x-b)^2 + y^2 = R^2, \; y \geq 0$

$$\begin{cases} (2-a)^2 + 4^2 = R^2 \\ (3-a)^2 + 5^2 = R^2 \end{cases} \Longrightarrow (2-a)^2 + 4^2 = (3-a)^2 + 5^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4 - 4a + a^2 + 16 = 9 - 6a + a^2 + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{a^2} - 4a + 20 = \cancel{a^2} - 6a + 34 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{14}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 7$

$$\begin{cases} (2-7)^2 + 4^2 = R^2 \Leftrightarrow 25 + 16 = R^2 \Leftrightarrow 41 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{41} \\ (3-7)^2 + 5^2 = R^2 \Leftrightarrow 16 + 25 = R^2 \Leftrightarrow 41 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{41} \end{cases}$$

$l_1: (x-7)^2 + y^2 = 41, \; y \geq 0$

$l_2: (x-7)^2 + y^2 = 41, \; y \geq 0$

R: As rectas são coimcidemtes uma vez que as suas expressões são iguais e se substituirmos os pontos mumma recta e moutra vão dar coordemadas iguais.

Figura 8.6 – Solução da aluna X .

De seguida fizeram o mesmo raciocínio para o plano cartesiano.

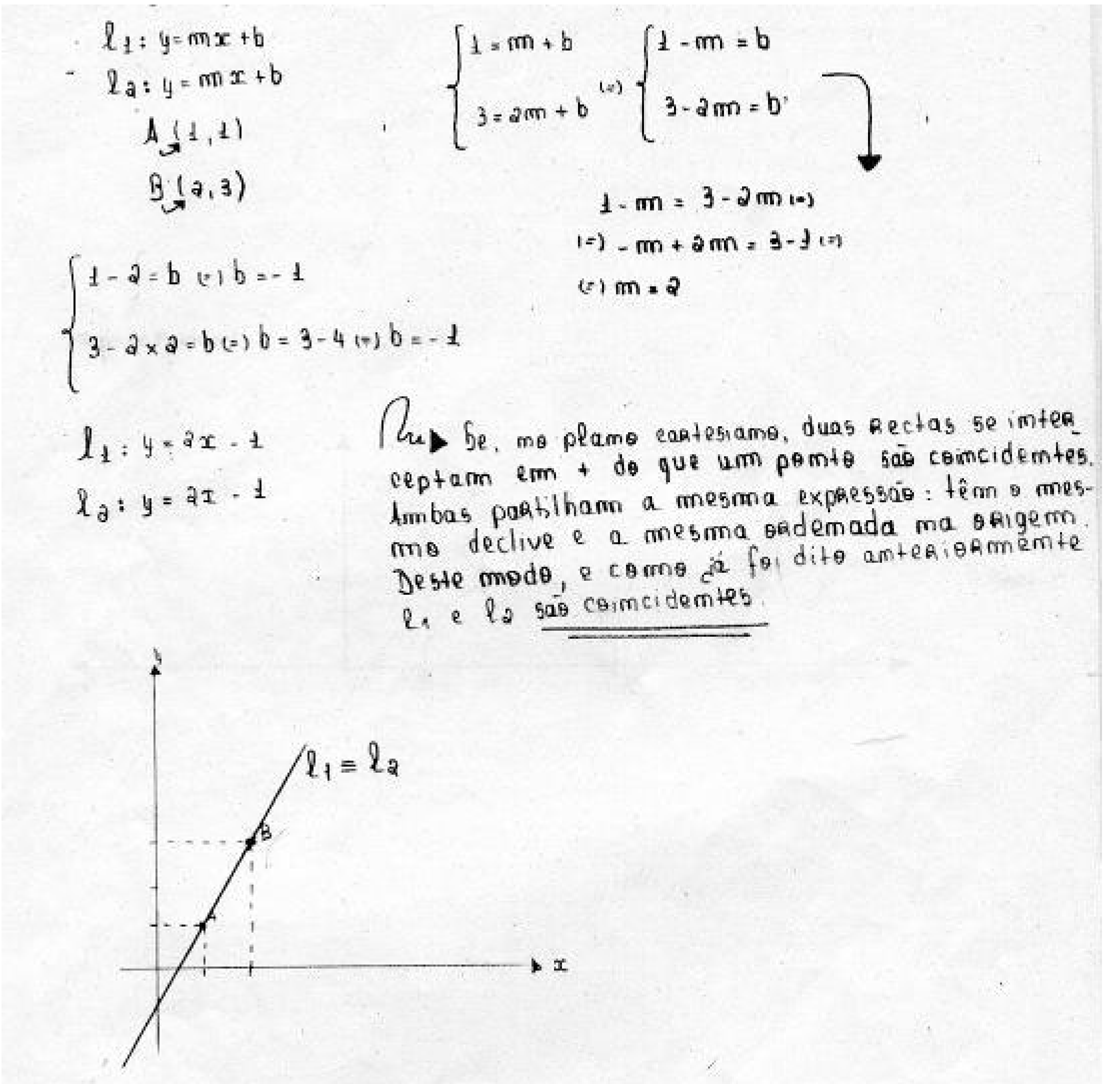


Figura 8.7 – Solução da aluna X à 2ª parte do problema 1

É importante salientar que, apesar desta aluna já estar familiarizada com o plano cartesiano e com o facto de que duas rectas que se intersectam em mais do que um ponto são coincidentes, sentiu necessidade de realizar a justificação apresentada na figura 8.7.

SOLUÇÃO (Elaborada pela aluna Y e pela aluna T)

Episódio 1: Leitura e análise da situação-problema

(Tempo: 00.03.10- 00.08.00)

Os primeiros cinco minutos foram dedicados à leitura do enunciado e à sua análise, acompanhada da construção da seguinte figura (Recurso ao GSP, ao sript Hyp_line)

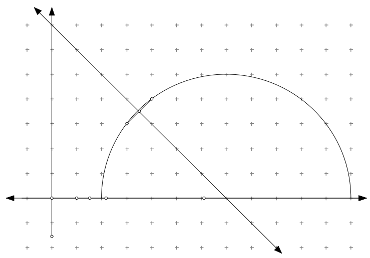


Figura 8.8 – Construção realizada pela aluna Y com recurso script hyp_line.gss

Episódio 2: Exploração, elaboração e implementação de plano

(Tempo: 00.09.05- 00.45.08)

Após a construção da figura 8.8, a aluna procedeu à exploração da situação estabelecendo o seguinte diálogo.

Y.: *Estou a ver…esta é a linha que passa por A e B. (Constrói um diagrama com recurso ao GSP);*

Professora*:* *Qual é a expressão analítica dessa linha?*

Y.: *Não sei!*

T.: *Eu também não!*

Professora*:* *Qual é a expressão analítica de uma semi-circunferência?*

Y.: *Já sei… (A aluna escreveu a expressão geral de uma circunferência).*

Professora*:* *Então, e neste caso?*

T.: *Mas nós não temos o centro da circunferência…;*

Y.: *Apenas temos os dois pontos A e B… e o programa não nos dá as coordenadas do centro;*

Professora: *Bom, dados dois pontos de uma circunferência podemos determinar as coordenadas do seu centro sabendo que este se situa no eixo das abcissas. Sabem fazer isso?*

Y.: *Se unirmos A ao centro, temos o raio da circunferência. O mesmo acontece se unirmos B ao centro. Mas, ainda não temos o centro* (as coordenadas do centro)...

T.: *Não sei…;*

Y.: *Espera… Sabemos que o centro pertence à linha que divide [AB] ao meio. Não é professora?*

Professora*: Correcto. Conseguem agora dar a expressão da linha hiperbólica?*

A aluna acompanhou os cálculos da colega (aluna T.). Durante esses cálculos, gerou-se o seguinte diálogo:

Y. *Da mediatriz…Quando estivemos a falar do plano cartesiano vimos uma recta de equação y =x e agora é y=-x.*

T. *Porquê?*

Y. *Porque agora a linha está assim (faz gestos com a mão referindo-se à inclinação da recta) é perpendicular à que tem declive 1.*

Professora: A mediatriz é da forma y= x+b, qual é o b?

Y. *A mediatriz coincide com o centro da circunferência. Passa pelo centro.*

T. *Mas podia não passar.*

Y. *Como? Tem que passar sempre…olha a figura…Mas e se tivéssemos outros pontos? Oh professora e se tivéssemos outros pontos?*

Professora: O que te parece?

A aluna recorrendo ao computador afirmou:

Y. *Passa na mesma pelo centro (da circunferência)*

Professora: *Porquê?*

T. *Sei lá…*

Y. *Porque a distância são sempre raios…*

Alunas tinham dificuldades em calcular a distância entre dois pontos e, com a minha ajuda, escreveram a condição que define a semi-circunferência dado o raio e o centro.

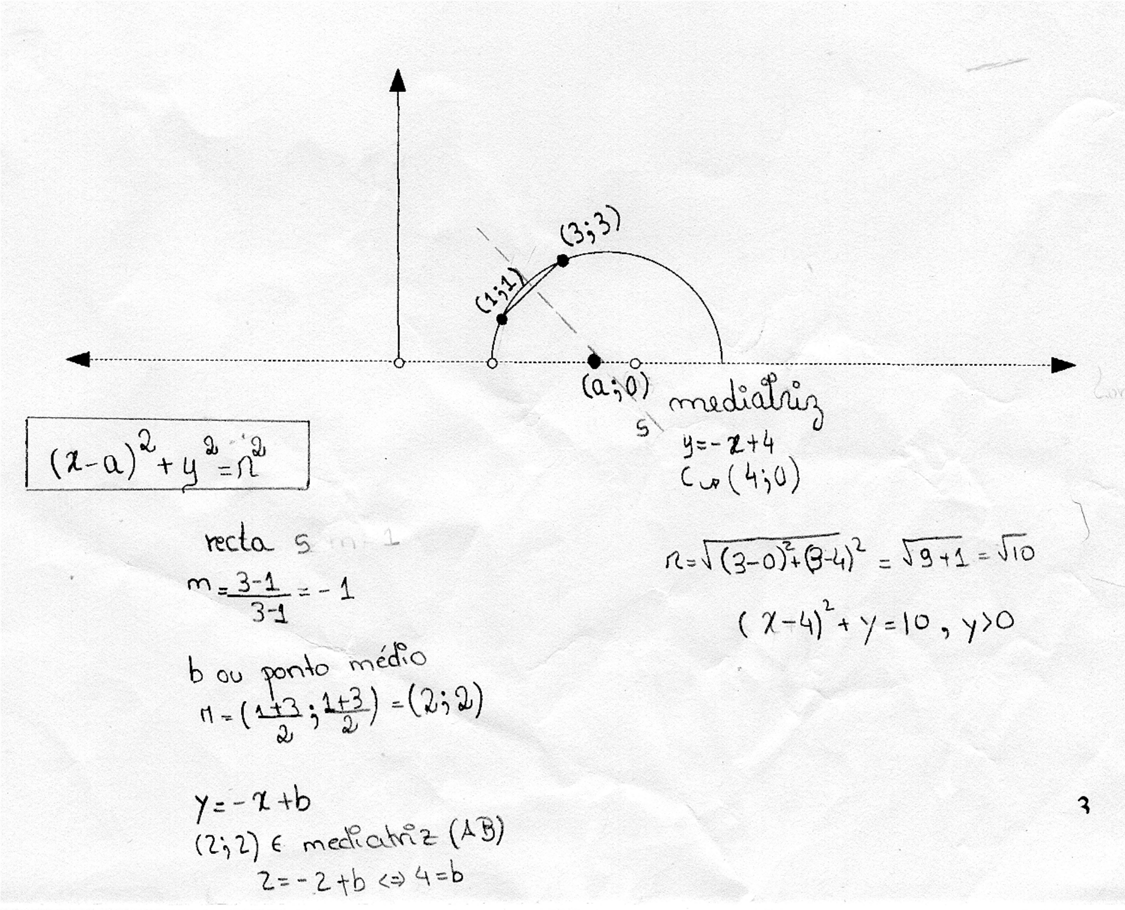


Figura 8.9 – Solução apresentada pela aluna Y à 1ª parte do problema 1

Episódio 3: Verificação

(Tempo: 00.45.08 – 00.50.10)

De seguida as alunas recorreram ao computador para verificarem geometricamente os dados obtidos por via algébrica, ou seja, as coordenadas do centro da semi-circunferência e o valor aproximado do raio.

Episódio 4: Extensão à situação-problema

(Tempo: 00.45.08 – -00.63.14)

Quanto à questão - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta.

As alunas recorreram ao GSP, ao sript Hyp_line, e justificaram por via geométrica que apenas existia uma linha hiperbólica a passar pelos pontos dados.

Na 2ª parte da questão (proposta na aula seguinte) -Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta, questão que foi formulada para outros modelos) - a aluna apresentou uma justificação, recorrendo à construção de um diagrama, exibindo a impossibilidade de construção de mais do que uma linha hiperbólica a passar pelos pontos dados, construindo um diagrama com recurso ao GSP.

No diálogo seguinte verificamos que a aluna Y estabeleceu ligação com o trabalho desenvolvido (na aula anterior) na 1ª parte e elaborou o diagrama, representado na figura 8.10, como justificação:

Y.: *Nós já não resolvemos este problema?* (**Esta questão foi formulada pela aluna imediatamente após a leitura do enunciado do problema)**

T.: *Se elas se intersectam em dois pontos, elas são coincidentes!...*

Y.: *Tem uma estás a ver… (a aluna fazendo um diagrama continua a explicar à colega)). Não é possível desenhar outra linha (através destes dois pontos).*

T.: *Intersectam-se?/*

Y.: *As duas linhas apenas se intersectam num ponto. Vês!? (a aluna continua a explicação utilizando o suporte visual)*

T.: *Podem intersectar em mais....*

Y.: *Como? Como? Apenas se forem coincidentes…*

T.: *Boa!*

Y.: *Pois… mas como é que a gente escreve isto??*

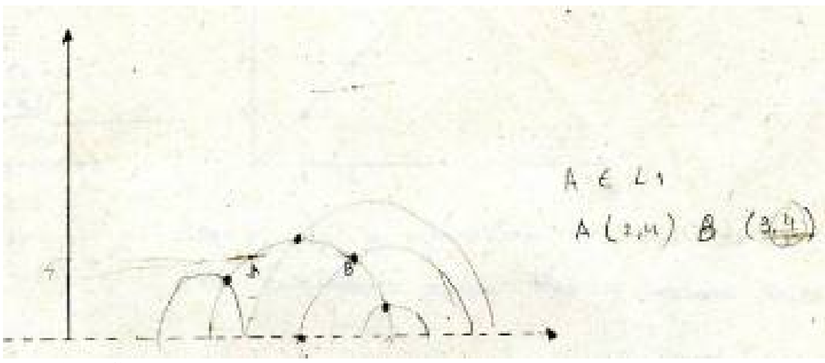


Figura 8.10 – Solução apresentada pela aluna Y na 2ª parte do problema 1

Ou seja, a aluna Y, através de interacção com o seu par, a aluna T, seguiu a sequência cognitiva, ***construção – visualização – raciocínio***.

Por imposição externa e não por necessidade sentida pela aluna, é feita uma justificação com recurso ao método de demonstração por redução ao absurdo. Assim, como consta na solução apresentada pela aluna na figura 8.10, a aluna considerou dois pontos A (2,4) e B (3,4) e considerou que estes pertenciam a duas linhas hiperbólicas distintas. Após a realização de cálculos algébricos, sem revelar dificuldades de cálculo, concluiu que as duas linhas hiperbólicas consideradas inicialmente eram coincidentes, pois tinham o mesmo centro e raio.

.

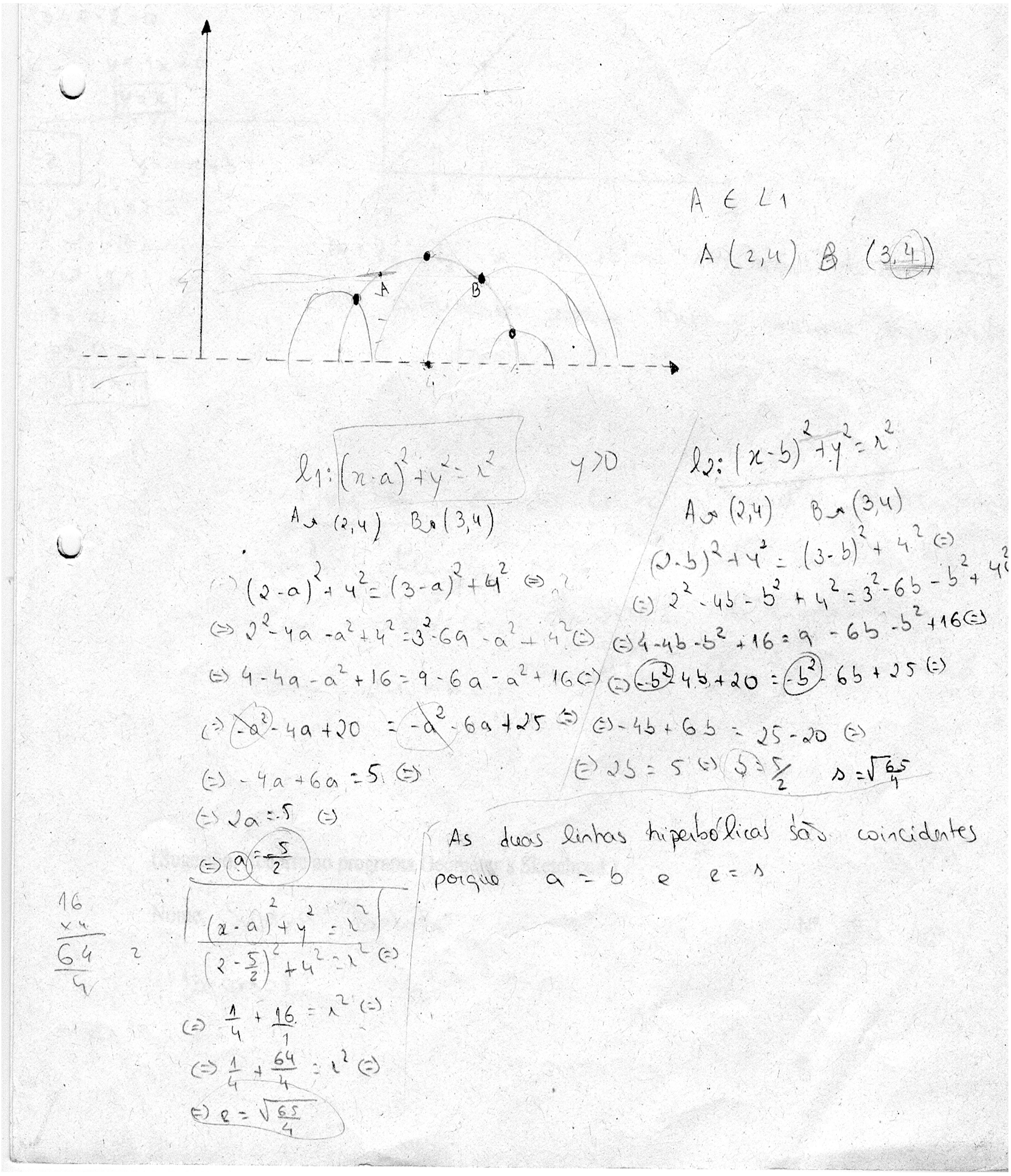


Figura 8.11 - Solução apresentada na extensão da situação –problema

De seguida fez o mesmo raciocínio para o plano cartesiano.

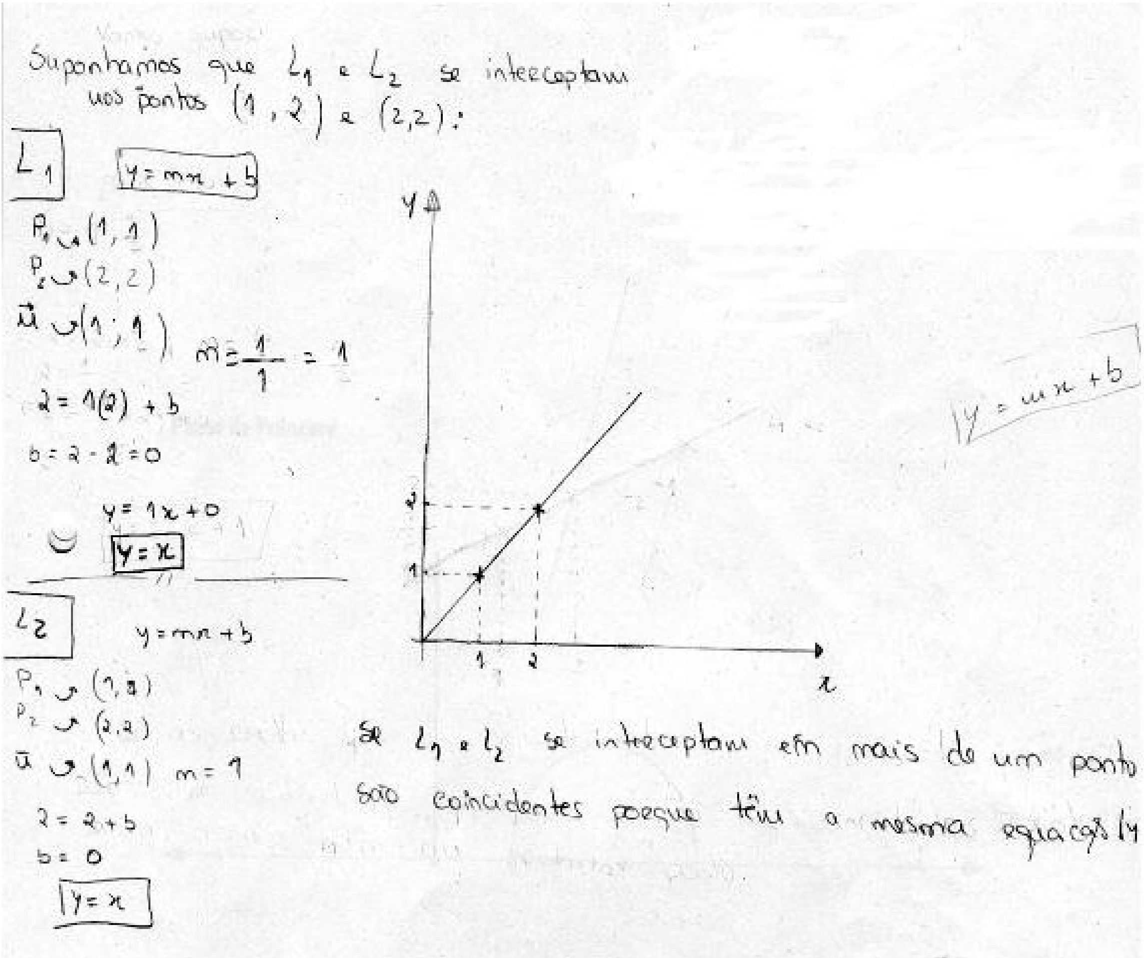


Figura 8.12 – Solução apresentada pela aluna Y na extensão ao problema 1

A aluna Y apesar de também estar familiarizada com o facto de que duas rectas que se intersectam em mais do que um ponto são coincidentes (no plano cartesiano), apresentou a justificação ilustrada na figura 8.12.

Objectos e relações primárias

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações primárias, que intervêm na solução da situação-problema elaborada pela aluna X e pela aluna Y:

A linguagem utilizada pela **aluna X** foi a gráfica e a algébrica. A gráfica foi utilizada, logo após a leitura do enunciado, como ajuda quer na identificação do tipo de linha hiperbólica em causa (linha não vertical) quer na identificação da metodologia a seguir para encontrar o centro e o raio da semi-circunferência a passar por A e B. No entanto, a aluna X opta pela linguagem algébrica para expressar a solução do problema.

Na 1ª parte da situação-problema a aluna aplicou conceitos prévios, nomeadamente: No plano Euclidiano - linha (recta), circunferência, definição de distância entre dois pontos, ponto médio e mediatriz de um segmento de recta, declive de uma recta; definição de semi-plano de Poincaré e de linha hiperbólica. Note-se que a abordagem analítica é feita no 10ºano de escolaridade e a definição de semi-plano de Poincaré foi dada durante o desenvolvimento da pasta de problemas, no 10ºano.

Aplicou, também, as seguintes propriedades: No plano Euclidiano, a mediatriz de uma corda de circunferência contém o seu centro; Condição que define uma circunferência dado o centro e o raio.

Quanto aos procedimentos adoptados a aluna, após a leitura do enunciado da situação-problema, construiu uma linha hiperbólica a passar pelos pontos dados e determinou a expressão algébrica que a define. Note-se que o diagrama serviu de apoio visual ao raciocínio elaborado para a definição algébrica da linha hiperbólica pedida.

Em relação à questão - *Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta.* Numa primeira abordagem, a aluna apresentou uma argumentação com base na construção/observação de um diagrama. No entanto sentiu necessidade de justificar por via analítica. Após solicitação de apoio, utilizou o método de demonstração por redução ao absurdo.

Na elaboração da justificação, na 2ª parte, a aluna não conseguiu aplicar a propriedade de que a geometria hiperbólica é uma geometria incidente, propriedade emergente da 1ª parte, e elaborou uma justificação baseada em exemplos e recorrendo novamente ao método de redução ao absurdo.

A **aluna Y** mostrou-se familiarizada com os termos e expressões da situação-problema. Apenas confirmou a definição de declive de uma recta e de semi-plano de Poincaré (o que é compreensível na medida em que o termo declive de uma recta, apesar de ter sido referido ao nível da escolaridade básica, foi segundo uma abordagem sintética e não analítica). As linguagens utilizadas no problema, por esta aluna, foram a representação geométrica (diagrama) e a algébrica (cálculo algébrico). A algébrica foi utilizada, por solicitação da professora, numa segunda abordagem. A elaboração do diagrama constitui, de facto, uma ajuda para a compreensão da situação–problema, a elaboração e implementação de um plano de resolução (a intersecção da mediatriz à corda [AB] com o eixo das abcissas é o centro da semi-circunferência representativa da linha hiperbólica que passa pelos pontos A e B) e para a avaliação da solução encontrada (através verificação com recurso às potencialidades do GSP).

É de referir que a situação-problema motivou a abordagem de conceitos/definições, propriedades/proposições, procedimentos, já conhecidos da escolaridade básica (ponto médio e mediatriz de um segmento de recta, propriedades da mediatriz), segundo uma perspectiva sintética e que foram retomados, no ensino secundário, segundo uma perspectiva analítica. Motivou também uma abordagem algébrica e o domínio do cálculo algébrico permitindo à aluna justificar que, no semi-plano de Poincaré, por dois pontos (escolhidos pela aluna) apenas passava uma linha hiperbólica.

A aluna Y, através de interacção com o seu par, a aluna T, seguiu a sequência cognitiva ***construção – visualização – raciocínio***.

Os argumentos apresentados por esta aluna foram de natureza empírica, caracterizados pelo uso de exemplos através da construção de diagramas. A construção geométrica de apenas uma linha a passar pelos dois pontos dados (recurso a um exemplo concreto), quer no plano Euclidiano quer no semi-plano de Poincaré, exemplificou as proposições 1 e proposição 2. No entanto, como se pretendia desenvolver a passagem de um raciocínio de natureza intuitiva para um raciocínio de natureza formal, através da elaboração de um raciocínio lógico (método por redução ao absurdo), a aluna foi confrontada com um cenário de possível incerteza (através de questões colocadas pela professora) que lhe pareceu estranho pela evidência revelada na construção do diagrama. A aluna não sentiu necessidade de utilizar outro tipo de justificação a não ser a exibição de diagrama. A justificação foi pedida para um caso particular - *Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta. (A mesma questão foi formulada para outros modelos)* - a aluna não sentiu necessidade de justificar para o caso geral.

A sequência de procedimentos adoptada foi elaboração de diagrama e apresentação de argumentos com base no diagrama. A justificação, com recurso ao método de redução ao absurdo, foi elaborada após explicação da professora (utilizando pontos distintos dos dados no enunciado do problema).

Na 2ª parte da situação-problema, a aluna estabeleceu ligações com o trabalho realizado na 1ª parte. No entanto, não conseguiu justificar referindo o resultado - *Neste modelo, por dois quaisquer pontos passa uma única linha.* Mais uma vez, a aluna não sentiu necessidade de outro tipo de justificação a não ser a exibição de diagramas (ver figura 8.10).

Argumentação – Objectos e relações secundárias

A justificação apresentada pela **aluna X**, de que existe apenas uma linha hiperbólica a passar por A e B, foi de natureza *dedutiva* – baseada na aplicação do método de demonstração por redução ao absurdo e no cálculo algébrico (cálculo *simbólico*) - após explicação da professora sobre o método de demonstração por redução ao absurdo num contexto diferente deste. De forma parcial, a aluna conseguiu aplicar o método de redução ao absurdo.

Relativamente à 2ª parte da situação–problema a justificação apresentada pela aluna caracterizou-se pelo uso de exemplos como único elemento de convicção. Assim, isto leva-nos a considerar a justificação apresentada como sendo de natureza empírica, apesar de ter utilizado, novamente, o método de redução ao absurdo e agora de forma mais consistente.

Ostensivo – não-ostensivo: Em relação ao objecto matemático semi-plano de Poincaré, a impossibilidade da marcação do centro da semi-circunferência, linha hiperbólica pedida na situação-problema, ou seja o ponto de coordenadas (4,0), proporcionou a exploração do correspondente não–ostensivo, definição de semi-plano de Poincaré. Quer numa argumentação de natureza empírica e/ou numa argumentação de natureza dedutiva, tem ostensivos associados que são, respectivamente, diagramas de semi-circunferências e/ou linguagem algébrica.

A linha hiperbólica é um objecto não-ostensivo, que se torna ostensivo, neste caso concreto, através de uma semi-circunferência e através da respectiva expressão algébrica que a define.

Esta aluna, apesar de recorrer a diagramas e a expressões algébricas e de reconhecer que são ambos importantes, recorreu mais a expressões algébricas. (X. *Recorri mais à expressão analítica em si, do que ao gráfico mas ambos foram bastante importantes para a resolução dos problemas. Apenas após a professora explicar consegui resolver o problema até ao fim).*

Parece que a aluna não reconheceu os objectos não-ostensivos implicados na situação (Proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente, …) e conseguiu resolver o problema até ao fim após uma explicação da professora sobre a técnica de redução ao absurdo.

Extensivo – intensivo: A definição de linhas hiperbólicas no semi-plano de Poincaré e a adaptação ao caso particular de querermos definir a linha hiperbólica que passa pelos pontos A e B facilita a construção do diagrama, que apoia o processo de visualização que, por sua vez, serviu de base ao raciocínio para a resolução do problema.

Na segunda parte do problema - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta, questão que foi formulada para o plano cartesiano. A aluna apresenta uma argumentação de natureza *empírica*- exemplo genérico. A justificação é baseada num exemplo específico. A impossibilidade da representação gráfica de mais de uma linha hiperbólica a passar pelos dois pontos dados, constituiu justificação para a resposta de existir apenas uma linha hiperbólica, $(x-4)^2+y^2=10 \wedge y>0$, que contém os pontos dados A e B. Na argumentação de natureza *dedutiva*, o objecto extensivo $(x-7)^2+y^2=41 \wedge y>0$ é utilizado como um exemplo específico, caso particular, de uma classe, $(x-a)^2+y^2=r^2 r \wedge y>0$ (linha hiperbólica de centro (a,0) e raio r, sendo a um número real e r um número real positivo).

O pedido de uma justificação de natureza *dedutiva* e a extensão a outros modelos de geometria constituiram um factor de dificuldade pelo facto da aluna não se recordar da técnica de demonstração por redução ao absurdo. A aluna realizou os cálculos algébricos de forma autónoma, bem como a justificação escrita.

Institucional – pessoal: As experiências da aluna com o método de demonstração por redução ao absurdo eram quase inexistentes (a aluna apenas referiu que tinha “ouvido falar” no método no seu 8º ano a propósito da raiz quadrada de 2). Assim, pareceu adequado relembrar o método de demonstração por redução ao absurdo utilizando precisamente o contexto referido pela aluna.

Unitário – sistémico: Num contexto de geometria Euclidiana, a noção de que por dois quaisquer pontos passa uma e uma só linha (noção de incidência) é abordada na escolaridade básica. No entanto a aluna não utilizou este objecto matemático e sentiu necessidade de recorrer a exemplos concretos e não a um exemplo genérico. Não entende como “óbvia” a afirmação – *Na geometria Euclidiana, no Plano Cartesiano, se as rectas l1 e l2 se intersectam em mais do que um ponto as rectas são coincidentes.* É de certo modo preocupante esta ocorrência.

Expressão – conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, o estudo de novos significados, mais ricos e profundos, de objectos da geometria Euclidiana. Em que medida o aluno estabelece esta relação semiótica?

As expressões algébricas foram utilizadas sem dificuldades. No entanto, a aluna não conseguiu, de forma autónoma, aplicar o método de demonstração por redução ao absurdo. Generalizou, a partir de dois exemplos, que quer a geometria Euclidiana quer a hiperbólica são geometrias incidentes.

A **aluna Y** apresentou uma argumentação de natureza *empírica* – empirismo simples (Visualização – Argumentação) – pois recorre, apoiada pelo recurso ao GPS, à construção da linha hiperbólica a passar pelos pontos A e B e justifica a impossibilidade da representação gráfica de mais de uma linha hiperbólica a passar pelos dois pontos dados, com base na percepção visual e recorrendo a vários exemplos.

Ostensivo – não-ostensivo: A aluna utiliza o diagrama da semi-circunferência a passar pelos pontos A e B como ajuda para a apresentação da solução à 1ª parte do problema (a linha hiperbólica que passa pelos pontos dados). Na 2ª parte do problema, a representação do raciocínio através do diagrama da figura 8.10 é a solução. A impossibilidade da construção de mais do que uma linha hiperbólica a passar por dois pontos é, para esta aluna, a justificação. Ela não menciona o não-ostensivo implicado na situação, isto é, a proposição 2 - A geometria hiperbólica é uma geometria incidente.

Extensivo - Intensivo: A aluna recorreu à representação da linha hiperbólica, no semi-plano de Poincaré, a passar pelos pontos A e B e definiu-a.

Na segunda parte do problema - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta (a mesma questão foi formulada para outros modelos). A aluna apresentou uma argumentação de natureza pragmática (recurso ao traçado da linha hiperbólica). Numa argumentação de natureza *conceptual*, o objecto extensivo, $(x-4)^2+y^2=10 \wedge y>0$, é utilizado como um exemplo específico, caso particular de uma classe ($(x-a)^2+y^2=r^2 \wedge y>0$ - linha hiperbólica de centro (a,0) e raio r, sendo a um número real e r um número real positivo), para a utilização de argumentos dedutivos, método de redução ao absurdo, com base na algebrização do problema.

O pedido de uma justificação de natureza *conceptual* e a extensão a outros modelos de geometria constituiu um factor de dificuldade e, note-se que, apesar da explicação prévia do método de redução ao absurdo, a solução não está completa.

<u>Pessoal – institucional</u>: Na primeira parte da situação-problema tem lugar uma argumentação de natureza empírica através do recurso a um exemplo (*Naïve empirismo)* e a um exemplo representativo de uma classe (*Exemplo genérico)*. Este tipo de argumentação é muito frequente nas aulas de matemática.

A segunda parte da situação-problema já requer uma argumentação de natureza *dedutiva* (experiência pensada) em que as acções sejam interiorizadas a partir de exemplos específicos, bem como o recurso a operações lógicas, abordadas quer nas aulas de matemática quer nas aulas de filosofia (11º ano).

As experiências da aluna com o método de demonstração por redução ao absurdo eram quase inexistentes (a aluna apenas referiu o método ligado à prova da irracionalidade de raiz quadrada de 2). Utilizando precisamente o contexto referido pela aluna, foi relembrado o método de demonstração por redução ao absurdo.

Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências foram na geometria Euclidiana, não se identificou conflitos ao nível da *cognição pessoal* pelo facto de se estar num cenário de geometria hiperbólica. Os conflitos cognitivos identificados têm relação com a elaboração das justificações (e.g., o domínio do método de redução ao absurdo).

<u>Unitário – sistémico</u>: Esta aluna não utilizou a noção, previamente abordada, de que por dois quaisquer pontos passa uma e uma só linha recta (noção de incidência). Na 2ª parte da situação – problema a aluna procedeu à análise da situação através da construção de diagramas os quais serviram de base à elaboração da síntese - *l_1 e l_2 linhas no semi-plano de Poincaré, se $l_1 \cap l_2$ tem dois ou mais pontos então $l_1$coincide com l_2.*

<u>Expressão – conteúdo</u>: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, o estudo de novos significados, mais ricos e profundos, de objectos da geometria Euclidiana (e.g., a noção de linha recta, a noção de geometria incidente, …).

O termo linha deixa de ser apenas identificado como linha recta. A aluna estabelece esta nova relação semiótica.

A aluna recorre a uma representação gráfica e/ou mista (abordagem sintética). A algébrica não é utilizada de forma espontânea. Ela não conseguiu, de forma autónoma, aplicar o método de demonstração por redução ao absurdo.

A 1ª parte da actividade desenvolvida pela aluna caracterizou-se por ser uma actividade de natureza empírica. Os argumentos apresentados basearam-se na construção de diagramas. A justificação apresentada a seguir para provar a unicidade dessa linha, com recurso ao método por redução ao absurdo, foi realizada por solicitação da professora e após explicação desta (fase descendente). Na justificação da unicidade dessa linha, a aluna aplicou o método de redução ao absurdo, após explicação, ou seja, teve a percepção de que justificar a validade da afirmação – *se as linhas l1 e l2 se intersectam em mais do que um ponto então as linhas são coincidentes* – é equivalente à falsidade da afirmação - *as linhas l1 e l2 Intersectam-se em mais do que um ponto e as linhas l1 e l2 são distintas.*

Na 2ª parte da questão, a aluna utilizou a linguagem gráfica e não conseguiu estabelecer relação com o trabalho desenvolvido na 1ª parte, ou seja que n*este modelo de geometria plana por dois quaisquer pontos passa uma única linha.* A justificação foi uma repetição do procedimento adoptado na 1ª parte. Após uma actividade de natureza empírica, a aluna tem consciência de que não é suficiente (Episódio 2 – […] Y. *Pois… mas como é que a gente escreve isto??)*, parece ter consciência da importância da fase descendente (a justificação, ou tentativa de justificação, da afirmação feita no enunciado).

8.3.2 O Processo de argumentação das alunas X e Y ao problema 2

PROBLEMA 2: Considera uma Geometria, no plano, em que os pontos e as linhas têm as mesmas propriedades da Geometria Euclidiana Plana, mas a definição de distância entre dois pontos P($x_{1,}\ y_1$) e Q(x_2 , y_2) é dada por $d_t = |x_1 - x_2\ | + |y_1 - y_2\ |$.

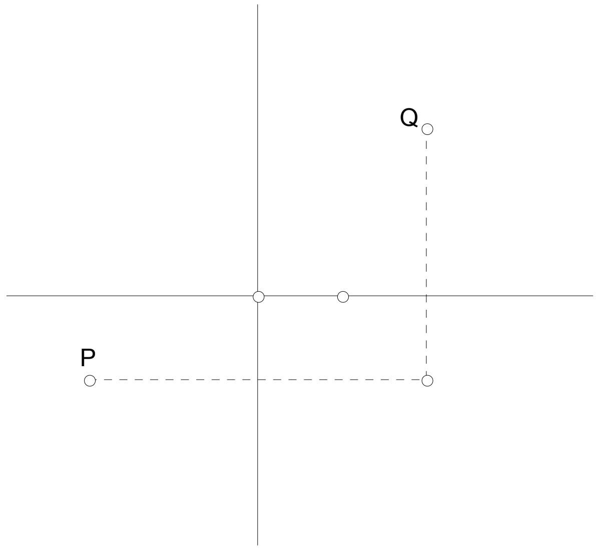


Figura 8.13 – A distância que o Motorista de Táxi percorre de P para Q (pontos de uma grelha rectangular representativa de ruas de uma cidade)

Recorda que a circunferência é o conjunto de pontos, do plano, cuja distância a um ponto fixo é constante.

Investiga a forma da circunferência nesta nova Geometria. A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?

SOLUÇÃO (Elaborada pelos alunos X e J)

<u>Episódio 1: Leitura e análise da situação-problema</u>

(Tempo: 00.02.25- 00.07.25)

Os alunos, a aluna X e o aluno J, leram o enunciado em silêncio (00.02.25-00.05.18) e seguiu-se o diálogo:

X. *Aqui o que nós temos que saber é como é que é uma circunferência nesta geometria?*

Professora: Parece que sim. Lê com mais atenção o enunciado…

Após a leitura feita em voz alta a professora referiu a definição de circunferência e a definição de distância Euclidiana já familiar aos alunos.

Episódio 2: Exploração e elaboração da justificação

(Tempo: 00.07.26 – 00.54.50)

De seguida os alunos marcaram, em papel quadriculado, pontos num referencial cartesiano.

X. *Posso marcar pontos com as coordenadas que nós quisermos?*

Professora: Sim.

Após um minuto de silêncio, a professora questionou os alunos.

Professora: Então como é que vocês determinam a distância entre dois pontos? (00.08.18)

X. *A distância daqui aqui? Era só substituir as coordenadas dos pontos aqui* (referindo-se à expressão da distância do Motorista de Táxi).

Professora: E tu João também substituías?

X. *Sim…* (pouco convencido)

Professora: Observando a figura, não chegas logo a esses valores? Ou seja, à diferença das abcissas e à diferença das ordenadas? Por exemplo no teu caso (no caso da aluna X) os pontos são A e B? Então podes ver um, dois, três, quatro mais um, dois, três.

X. *Ah!*

De seguida estabeleceu-se ligações com situações do dia a dia, referindo-se a distância percorrida por um táxi para ir da escola à piscina.

Professora: Se considerar este ponto A (ponto registado pela aluna X na sua folha) quais são os pontos que distam 2 unidades de A? Com esta definição de distância (distância da GMT) e tomando para unidade o lado da quadricula.

X. *Duas unidades?*

J. *Este aqui (indicando* um ponto alinhado horizontalmente com A)

Professora: Está certo.

X. *Este é outro…*

Professora: Então vá, investiguem então qual é a forma da circunferência nesta nova geometria.

X. *Então agora marcamos vários pontos que estejam à mesma distância do centro.*

Professora: Então e neste caso o teu centro é (0,0) e o teu raio é 3?

X. *Sim…Os que estão em cima dos eixos é óbvio…Agora pode ser (2,1) e agora todos os outros assim* (referindo-se aos pontos de coordenadas (1, -2), (-1,2), (-1, -2)) *…e agora também posso fazer um e dois para cima… (*referindo-se ao ponto de coordenadas (1,2))

Professora: Podes.

X. *Isto vai é ficar muito esquisito, mas pronto* (aluna riu-se).

J. *Pois parece…*

X. *Não vai ficar da forma que nós conhecemos…*

Professora: Pois não.

X. *Fica mais ao menos assim* (exibindo o diagrama).

J. *Não percebi.*

Nesta altura a aluna revê em voz alta a marcação dos pontos.

X. *Agora podíamos marcar muitos mais mas acho que não vale a pena.*

Professora: Mas chega para concluírem sobre a forma da circunferência?

X. *Acho que com o primeiro exemplo e este já dá para ver que vai ter sempre a mesma forma, só com dimensões diferentes.*

Professora: E a forma qual é?

X. *Na geometria normal é um losango.*

Após a observação da construção feita a aluna elaborou a seguinte questão,

X. *E se quiséssemos outra figura, por exemplo um triângulo equilátero?*

Professora: Experimenta…

X. *Consideramos um equilátero …e vai ficar assim…um rectângulo…então este equilátero tem medidas 6, 6 e 6 e o rectângulo tem 2 tanto num cateto como noutro e vai ter 4 aqui. E a partir da distância podemos fazer outros…* (consultar parte superior da Figura 8.15).

Professora: Lembras - te da desigualdade triangular?

X. *Não. O que é?*

Professora: Então, num triângulo qualquer lado (medida do lado) é menor que a soma dos outros dois.

X. *Mas neste caso 4 é igual a 2 mais 2…não se verifica*

J. *Não percebi.*

Nesta altura foi relembrada a desigualdade triangular, no contexto da geometria Euclidiana, e referido que se a igualdade d (A,B) + d (B,C) = d (A,C) se verificasse então os pontos A,B e C seriam colineares. No entanto, na geometria do Motorista de Táxi a verificação da igualdade anterior pode corresponder a uma situação em que os pontos A, B e C não sejam colineares.

X. *Eu tenho dois pontos A e B à distância de 5 e quero determinar um terceiro ponto que esteja também à distância de 5 de A e de B…* (consultar parte superior da Figura 8.15).

Alunos em silêncio a tentarem construir um triângulo equilátero de lado 5.

X.*O ponto C tem de ficar aqui para ter dois e meio e dois e meio.*

J. *Se fosse seis era aquele (referenciando o diagrama da esquerda representado na figura 8.15.*

X. *Mas vai ter a mesma forma.*

Em relação à questão – A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ? Foi relembrado o cálculo de π.

X. *Então nestes dois exemplos calculamos a razão entre o perímetro e o diâmetro e depois podemos concluir.*

J. *Vamos fazer outro exemplo.*

X. *Oh Stora eu no perímetro, não sei se posso dizer isto, mas faço a soma de todos os lados?*

Professora: Podes. É a soma de todos os lados.

Os alunos efectuaram os cálculos apresentados na figura 8.14.

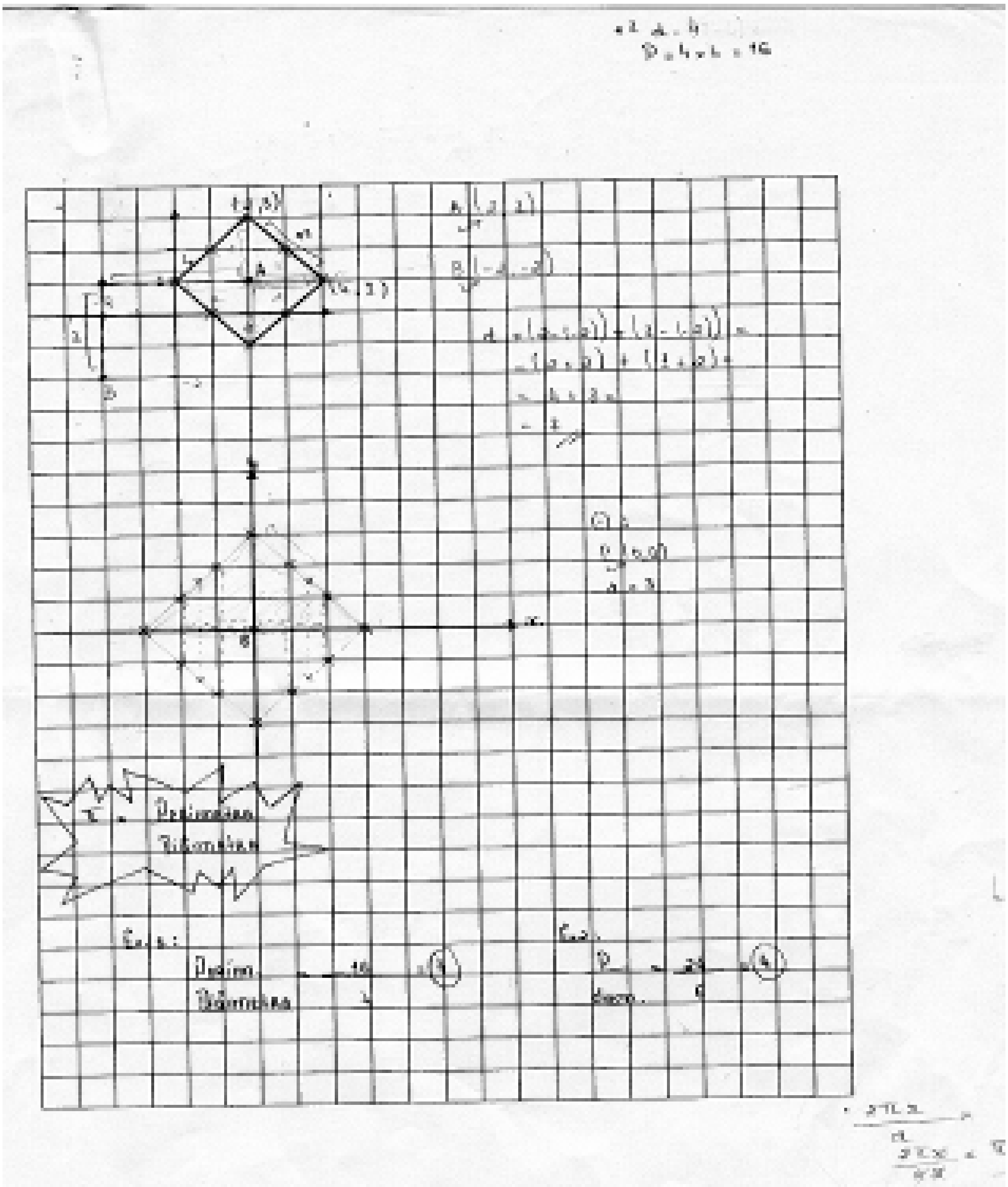


Figura 8.14 – Solução da aluna X ao problema 2 (1º folha de registo)

X. *Oh stora dá o mesmo, não dá π mas dá um valor igual* (referindo-se ao valor constante igual a 4).

Professora: E que valor é esse?

X. *Dá 4. Ao João não sei…*

Os dois alunos chegaram ao valor 4 em dois exemplos diferentes.

Nesta altura foi feito um ponto da situação e leu-se novamente o enunciado (00.40.28).

Professora: Então o que era pedido?

X. *Investigar qual era a forma da circunferência e se fazia sentido falar em π.*

Professora: E o que responderam a isso?

X. *Ainda não respondemos (riu-se). Falamos em π mas não tem o mesmo valor que na geometria Euclidiana…*

J. *É muito difícil justificar…eu não sei explicar bem as coisas…*

X. *Vimos que tem outro valor. Não é o 3,14 mas é o 4.*

Nesta altura relembrou-se o π como a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro, experiência desenvolvida na Escolaridade Básica (Aluna fez um registo escrito no canto inferior da figura 8.14). De seguida foram solicitados a elaborar o mesmo raciocínio no contexto da geometria do Motorista de Táxi.

Os alunos elaboraram uma justificação para o caso geral (figura 8.15)

Professora: Ficam mais convencidos assim?

X. *Assim convence mais…*

J. *Sim* (pouco convencido).

Professora: Quando têm que trabalhar em termos algébricos vocês têm mais dificuldades?

X. *A dificuldade não é trabalhar em termos algébricos a dificuldade é abstrairmo-nos dos exemplos e chegarmos lá (00.54.47). Porque trabalhar em termos algébricos não é muito difícil.*

Professora: Então para ti o problema é o "saltinho", sair do exemplo concreto e ir para o exemplo genérico.

X. Para mim é.

Professora: *E para ti J?*

J. Para mim também, mas tenho mais dificuldades que ela (a aluna X) em trabalhar em termos algébricos.

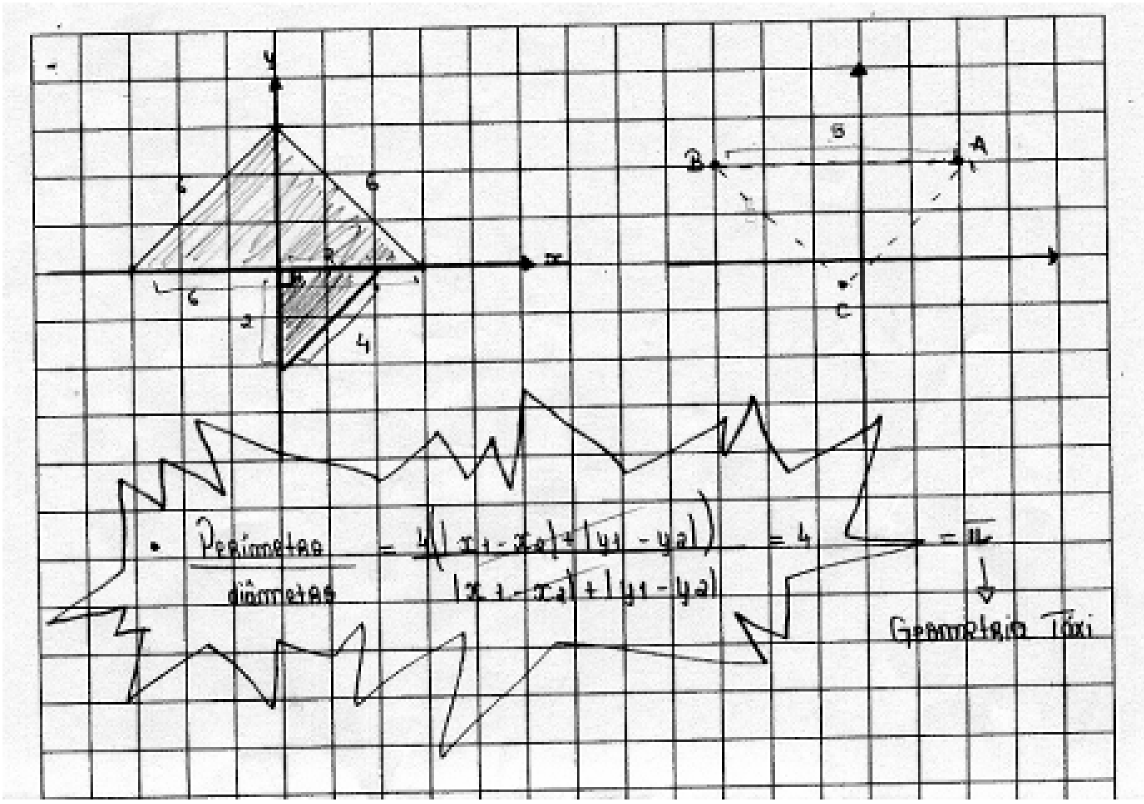


Figura 8.15 – Solução da aluna X ao problema 2 (2º folha de registo)

A aluna X apresentou como resposta,

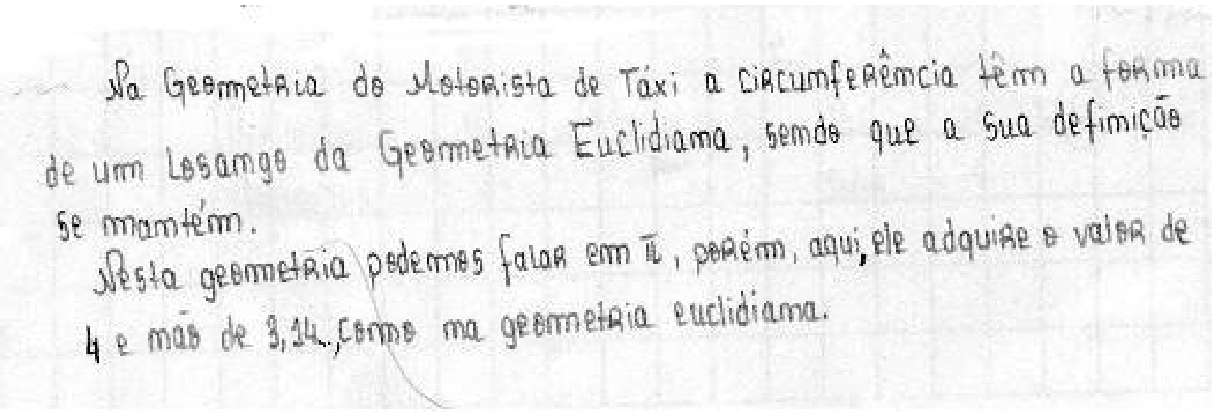

Na Geometria do Motorista de Táxi a circumferência têm a forma de um Losango da Geometria Euclidiama, sendo que a sua defimição se mantém.
Nesta geometria podemos falar em π, porém, aqui, ele adquire o valor de 4 e mão de 3,14, como ma geometria euclidiama.

Figura 8.16 – Resposta apresentada pela aluna X ao problema 2

<u>Episódio 3: Reflexão</u>

Foi pedido aos alunos para realizarem uma composição matemática sobre a resolução desta tarefa, após a aula mas ainda no próprio dia.

J. Não gosto muito de escrever.

X. É só explicar o nosso raciocínio.

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

Elabora uma composição sobre a resolução da tarefa, explicando o teu raciocínio.

Para a resolução desta tarefa foi necessária uma leitura muito atenta para perceber bem o que nos era pedido. Após esta leitura, precisámos da ajuda da professora no que dizia respeito à distância entre dois pontos...

Começámos, então, por fazer um referencial no qual desenhámos dois pontos e calculámos a distância entre eles, ficando deste modo a perceber melhor a fórmula da distância. Recorremos à definição de circunferência e aplicámo-la, definindo uma medida e aproveitando um dos pontos já desenhados para marcarmos, em torno do mesmo, vários pontos com essa medida como distância. Unimo-los e obtivemos uma circunferência com a forma de um losango da Geometria Euclidiana.

De seguida, relembrámos o método pelo qual, na Geometria Euclidiana, chegamos ao valor de π, sendo este método dividir o perímetro da circunferência pelo seu diâmetro: $\frac{2\pi r}{d} = \frac{2\pi \cancel{r}}{2\cancel{r}} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} = \pi$. Deste modo, aplicámos este método nas circunferências que desenhámos como exemplo (na Geometria Táxi) e em ambas o valor de π foi quatro; generalizando, na Geometria Táxi podemos verificar que $\pi = \frac{\text{Perímetro}}{\text{diâm.}} = \frac{4\cancel{(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)}}{\cancel{|x_1-x_2|+|y_1-y_2|}} = 4$.

Assim acabámos de resolver a tarefa que até se revelou fácil após perceber como "funcionava" a fórmula da distância na geometria táxi.

Muito obrigada.

Figura 8.17 – Composição matemática da aluna X sobre a solução ao problema 2

SOLUÇÃO (Elaborada pela aluna Y)

Episódio 1: Leitura e análise da situação-problema

(Tempo: 00.05.00- 00.07.10)

A aluna Y resolveu a situação-problema 2 sozinha. Após a leitura do enunciado, considerou dois pontos A e B de coordenadas, respectivamente, (3,2) e (6,5) e de seguida registou a distância Euclidiana entre eles (parte superior da figura 8.18)

Y. *Stora, neste caso a distância é valor absoluto de …está aqui no enunciado.*

Professora: Sim. A definição de distância é essa.

Y. *Uma circunferência é assim…* (aluna traçou uma circunferência) *agora vamos ver como será aqui.*

Após ler novamente o enunciado em silêncio a aluna colocou as suas dúvidas,

Y. *Oh stora não percebo esta distância.*

Nesta altura foi explicada a situação à aluna referenciando-se a situação do percurso de um táxi e de como calcular a distância que ele percorre entre dois trajectos (por exemplo da escola à estação de caminho de ferro).

Episódio 2: Exploração e elaboração da justificação

(Tempo: 00.07.15 – 00.35.24)

De seguida, a aluna passou à exploração da forma da circunferência de centro o ponto (3,3) e raio 2.

Y. *Então com centro em (3,3) e raio 2, tenho os pontos (1,3) e (5,3) e (2,2 e (2,4) …*

Professora: Sim continua…

Aluna em silêncio construiu a circunferência pedida.

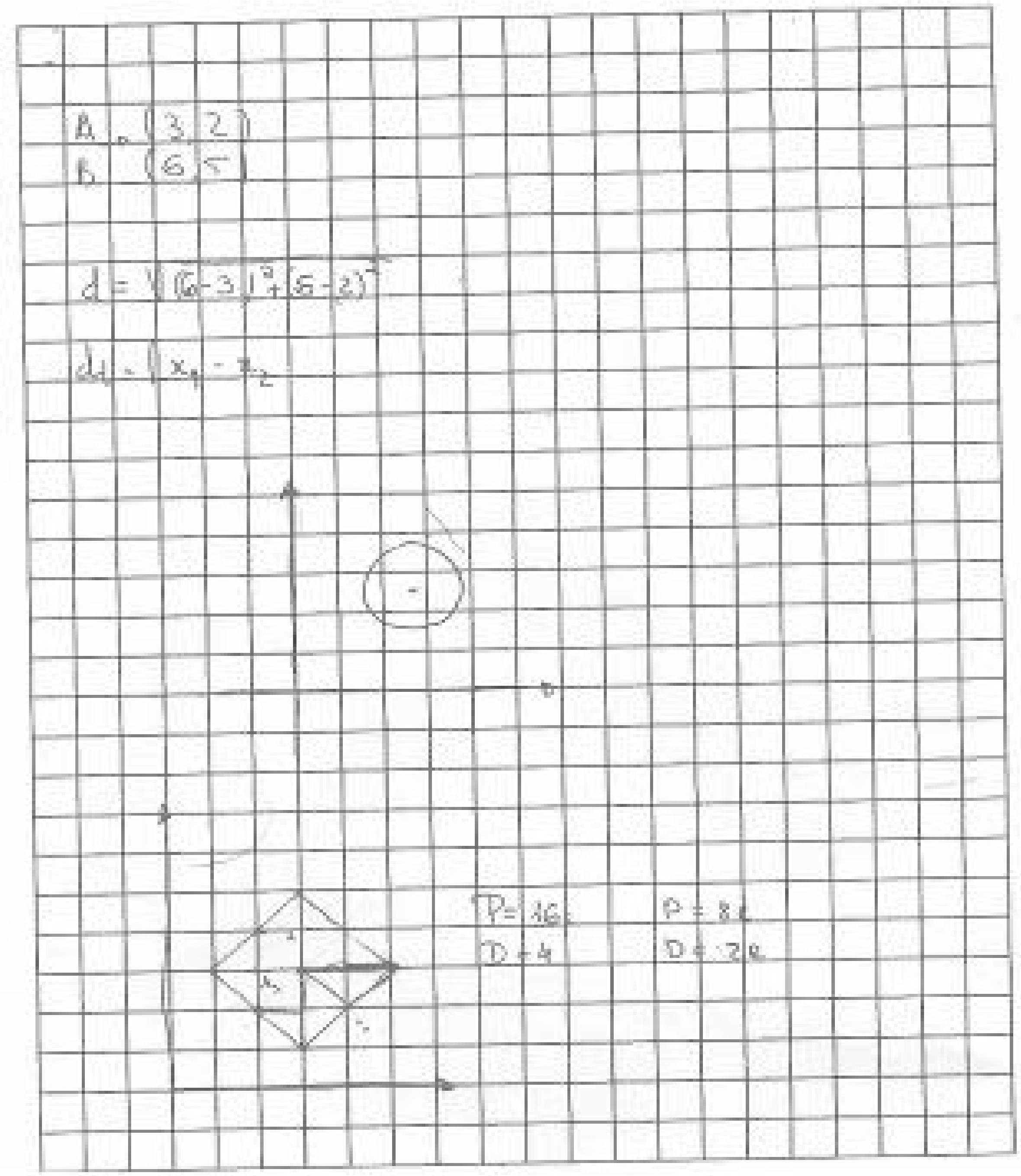


Figura 8.18 – Solução da aluna Y ao problema 2 (2ª folha de registo)

Y. *Mas não é uma circunferência…é um losango…pois é diferente.*

Professora: É um losango?

Y. *Sim é um losango, tem os lados iguais…*

Professora: Mas já respondeste ao pedido?

De seguida, a aluna registou o valor do perímetro e do diâmetro para o caso particular e registou igualmente o valor do perímetro e do diâmetro para o caso geral, registando na figura construída a letra r para designar o raio (ver figura 8.19).

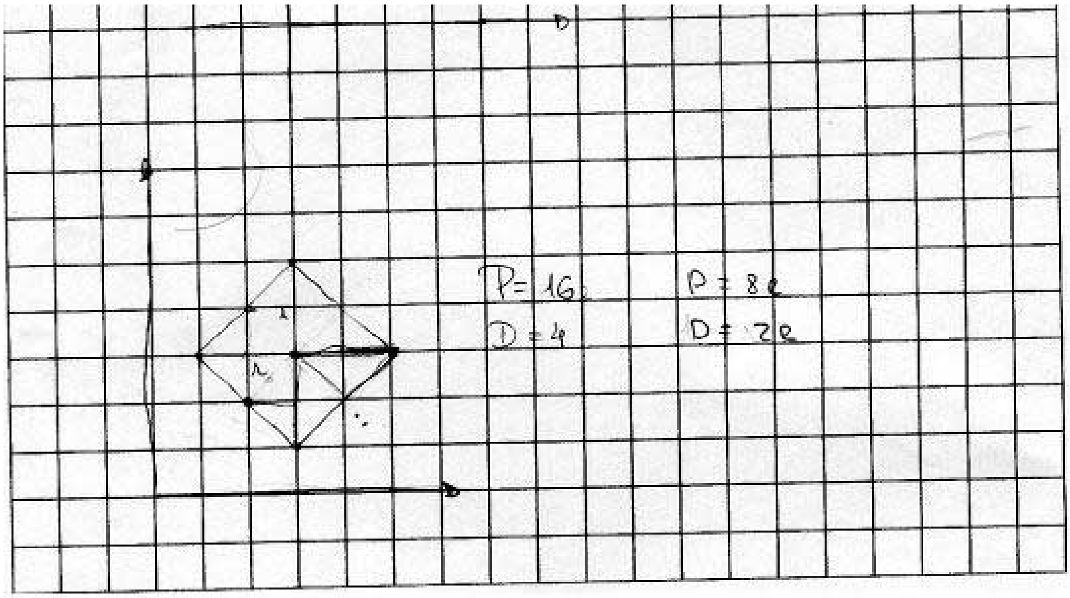


Figura 8.19 – Solução da aluna Y ao problema 2 (2ª folha de registo)

Após o registo anterior a aluna apresentou (na folha do enunciado do problema) a seguinte resposta:

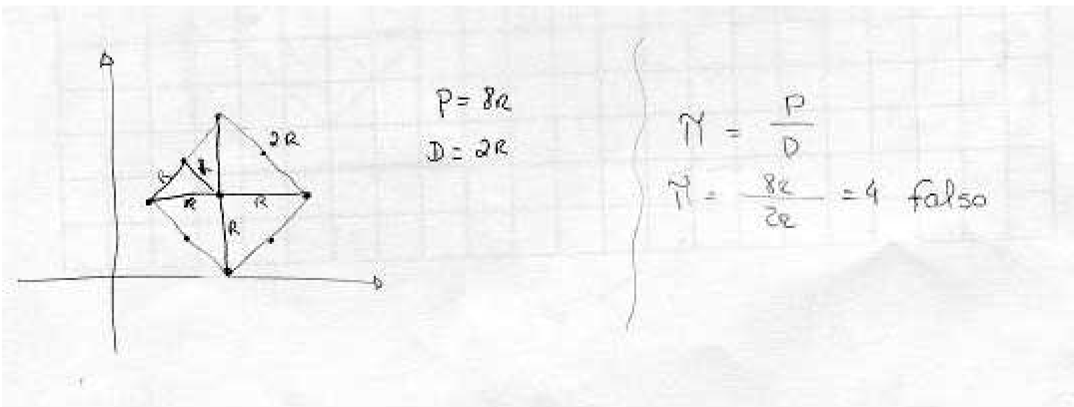


Figura 8.20 – Resposta apresentada pela aluna Y ao problema 2 (1ª folha de registo)

Observe-se o registo da letra r, designação do raio, na figura anterior e o valor do lado 2r do quadrado. Uma das letras r assinala uma distância Euclidiana neste contexto particular da geometria do Motorista de Táxi.

Em relação à razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, nesta geometria, foi entendido como *falso* o π ser igual a 4.

Episódio 3: Reflexão

Esta aluna não elaborou a composição escrita sobre a resolução da tarefa no entanto fez a revisão dos procedimentos adoptados e não apresentou dúvidas.

Objectos e relações primárias

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações primárias que intervêm na solução da situação-problema 2.

A **alunaX,** na solução apresentada, utilizou a terminologia de distância entre dois pontos, coordenadas de um ponto, losango, triângulo equilátero, perímetro e diâmetro.

O diagrama apresentado no enunciado constituiu uma ajuda para a compreensão e utilização da definição de distância entre dois pontos nesta geometria.

Em relação às definições envolvidas, a aluna dominava as definições de; distância entre dois pontos e perímetro de uma figura. No entanto, considerando a questão colocada durante o episódio 2, *Oh Stora eu no perímetro, não sei se posso dizer isto, mas faço a soma de todos os lados?,* parece indicar que a definição de perímetro suscitou conflitos cognitivos no contexto da geometria do Motorista de Táxi.

Os procedimentos adoptados que serviram de fundamento às justificações apresentadas, seguiram a sequência; construção ⟶visualização⟶raciocínio. A forma da circunferência, neste modelo de geometria, foi induzida a partir de exemplos. Ou seja, as justificações foram de natureza *empírica (a justificação envolveu o uso de relações encontradas nos exemplos – tipo indutivo).* E na segunda parte da situação foi utilizado um exemplo genérico como ajuda para organizar a justificação segundo uma abordagem analítica, baseada em manipulações algébricas (*justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo transformativa).*

A **alunaY** utilizou a terminologia já mencionada no caso da aluna X. No entanto, revelou mais dificuldades na interpretação da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi. O diagrama apresentado no enunciado constituiu uma ajuda para a compreensão e utilização da definição de distância entre dois pontos nesta geometria.

A aluna mostrou-se familiarizada com as definições envolvidas na situação-problema, não se registando qualquer tipo de conflito cognitivo.

Os procedimentos adoptados, que serviram de fundamento às justificações apresentadas, seguiram, também, a sequência:

Construção $\longrightarrow$visualização$\longrightarrow$raciocínio.

A forma da circunferência, neste modelo de geometria, foi dada a partir de um exemplo genérico (justificação de *natureza empírica, baseada no exemplo genérico, referindo-se a propriedades abstractas e aos elementos de uma família).* Em relação ao cálculo da razão entre o perímetro e o diâmetro, foi feita uma abordagem sintética, comprovando a existência de uma razão constante e igual a 4 (*justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo estrutural).*

Argumentação – Objectos e relações secundárias

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações secundárias que intervêm nas soluções apresentadas pela **aluna X .**

Ostensivo – não-ostensivo: A aluna X recorreu a mais do que um exemplo para justificar a forma da circunferência nesta nova geometria. Ela associou ao objecto não-ostensivo, circunferência, um ostensivo (que classificou de *losango da geometria Euclidiana*) na sequência da adopção da definição de distância na geometria do Motorista de Táxi. Note-se que a aluna ainda explorou o ostensivo de triângulo equilátero e que serviu de contexto para abordar a ausência da propriedade – desigualdade triangular (não-ostensivo).

Na justificação à segunda parte do problema - *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?* O exemplo genérico foi utilizado como ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante tem como ostensivo o símbolo π que a aluna considerou igual a 4.

Extensivo - Intensivo: A representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar da geometria Euclidiana. Tal facto é justificado mostrando a sua veracidade nalguns exemplos específicos – *empirismo simples.* Assim, um objecto extensivo é utilizado como um caso particular (exemplos específicos de "circunferências" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo.

Quanto às justificações de natureza *dedutiva,* a aluna adoptou uma abordagem analítica, baseada em manipulações algébricas.

Pessoal–institucional: A situação-problema motivou argumentos quer de natureza empírica quer de natureza dedutiva regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi (*cognição institucional)*. Do ponto de vista da *cognição pessoal*, a actividade desenvolvida promoveu o questionamento por parte desta aluna da definição de perímetro neste caso específico – *Oh stora eu no perímetro, não sei se posso dizer isto, mas faço a soma de todos os lados?* - ou seja, promovendo o entendimento do papel chave das definições na elaboração de argumentos. Quanto à questão – *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?* - A aluna X não entendeu o π como um número irracional mas sim como uma letra que designa a razão entre um perímetro e um diâmetro, ou seja, entendida como tendo uma natureza funcional.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução da situação-problema, a aluna segue um percurso que vai desde a análise da situação até a uma síntese da actividade desenvolvida. Esta síntese é apresentada na composição sobre a solução elaborada. Note-se que nesta síntese a aluna afirma " *Assim acabámos de resolver a tarefa que até se revelou fácil após perceber como "funcionava" a fórmula da distância na geometria táxi".* O objecto matemático - distância na geometria do Motorista de Táxi - é entendido como um objecto complexo no início da actividade mas essa complexidade vai-se esbatendo ao longo da resolução do problema.

Expressão - conteúdo: A situação – problema apesar de ser formulada num contexto de geometria do Motorista de Táxi há indicadores claros de que a aluna estabeleceu ligações com a geometria Euclidiana. Na composição apresentada na figura 8.17, a aluna associa a forma da circunferência, nesta nova geometria, ao losango e não ao quadrado.

[…] *Unimo-los e obtivemos uma circunferência com a forma de um losango da Geometria Euclidiana. […]*

O problema induziu a abordagem da igualdade d(A,B) + d(B,C) = d(A,C), na geometria do Motorista de Táxi, com os pontos A, B e C não colineares.

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações secundárias que intervêm na solução apresentada pela **aluna Y.**

Ostensivo – não-ostensivo: A aluna sentiu necessidade, na interpretação do enunciado do problema, em considerar o ostensivo da circunferência na geometria Euclidiana. De seguida, apenas se baseou num exemplo para justificar a forma da circunferência nesta nova geometria. Na justificação à segunda parte do problema, um exemplo genérico foi utilizado como base do ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante é 4 que não foi identificada com sendo π.

Na figura 8.20 a aluna regista a letra r idealizando o ostensivo de circunferência no modelo da geometria Euclidiana.

<u>Extensivo - intensivo</u>: A representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar (da geometria Euclidiana) a qual é justificada mostrando a sua veracidade num exemplo específico – *empirismo simples.* Assim, esta aluna passa de apenas um exemplo concreto para o caso genérico. Ou seja, utiliza um objecto extensivo, um caso particular (exemplo específico de "circunferência" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo.

Através da figura 8.19, observa-se que a aluna Y regista o valor 16 para o perímetro e de 4 para o diâmetro de uma "circunferência" e, em paralelo, regista o valor de 8r e 2r, respectivamente para o perímetro e o diâmetro, para o caso geral letra r (designação da medida do raio). Quanto às justificações de natureza *dedutiva,* a aluna adoptou uma abordagem sintética e não analítica como seria de prever, considerando que o estudo mais recente da geometria Euclidiana foi segundo uma abordagem analítica.

<u>Pessoal–institucional:</u> A situação - problema motivou argumentos quer de natureza empírica quer de natureza dedutiva regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi, *cognição institucional*. Do ponto de vista da *cognição pessoal*, esta aluna questionou a definição de distância nesta nova geometria. Quanto à questão - *A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? Faz sentido falar em π ?* - A aluna entendeu o π como número irracional e portanto considerou falsa a afirmação, de que *a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é π.*

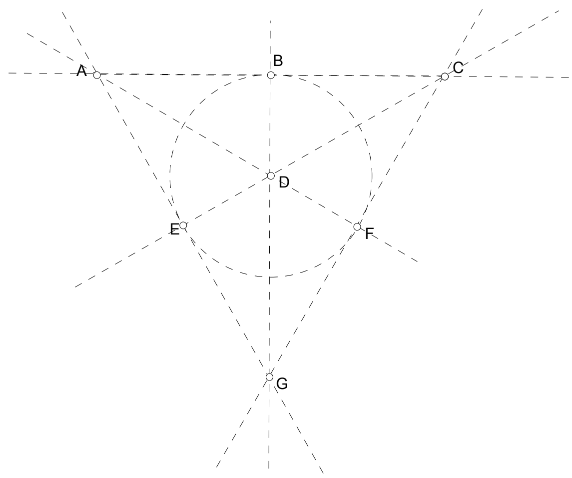
<u>Unitário – sistémico</u>: A aluna começa por referenciar a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano recorrendo a um exemplo. No entanto, é notória na solução apresentada o entendimento da situação em causa de forma sistémica (figuras 8.19, 8.20).

<u>Expressão – conteúdo</u>: A aluna Y também estabeleceu ligações com a geometria Euclidiana. Observe-se que na figura 8.20 ela assinala o raio r tal como fazia habitualmente num contexto de geometria Euclidiana.

O problema induziu a abordagem dos conteúdos previstos na respectiva configuração epistémica. No entanto, não foi discutida a situação de que, na geometria do Motorista de Táxi, a igualdade d(A,B) + d(B,C) = d(A,C) pode corresponder a uma situação em que os pontos A, B e C não sejam colineares.

8.3.3. O processo de argumentação das alunas X e Y ao problema 3

PROBLEMA 3: Imagina uma geometria finita formada por sete pontos e sete linhas[32]. Em que **A, B, C, D, E, F, G são os únicos pontos, {A, B, C}, {A, E, G}, {C, F, G}, {A, D, F}, {B, D, G}, {E, D, C}, {E, F, B} são as únicas linhas.**



Averigua, justificando, a validade da seguinte afirmação:

"Dada uma linha e um ponto exterior a essa linha, por esse ponto passa uma linha paralela à dada."

SOLUÇÃO (Elaborada pelas alunas X e Y)

<u>Episódio 1: Leitura e análise da situação-problema</u>

(Tempo: 00.00.13-00.05.44)

Após a leitura do enunciado, as alunas X e Y analisaram a figura dada no enunciado fazendo corresponder a cada linha do plano de Fano a sua designação. Nesta altura, registou-se o seguinte diálogo:

Y. *Só tem seis. Não tem só seis linhas?*

---

[32] Plano de Fano.

A aluna X conta as linhas e responde:

X. *Olha a circunferência conta também.*

Y. *Pois é uma linha realmente.*

A aluna Y faz novamente a contagem e afirma,

Y. *Ah!? ...EF esta não tem…temos que perguntar à stora.*(A aluna continuou a ler) *dada uma linha e um ponto exterior a essa linha/*

X. *Então…Temos uma linha e um ponto exterior à linha. Um ponto qualquer?*

Y. *Sim…Por esse ponto passa uma linha…Ah!?*

X. *Estes pontos são os únicos que existem e então dada, por exemplo, esta linha e um destes pontos exterior a esta linha aqui, então temos que ver por algum destes pontos ou por todos estes pontos passa uma linha paralela a esta.*

Y. *Eu não percebi é o que é que se pede…o que é que esta frase quer dizer…Ah, uma linha …(estas) são as únicas linhas, uma linha é uma destas/*

X. *Dão-te uma linha e depois dão-te um ponto qualquer exterior a essa linha e tens que ver se por esse ponto passa uma linha paralela à primeira linha optativa.*

Y. *Não, não passa nenhuma paralela.*

X. *É isso que tens que ver.*

Y. *Oh stora isto é uma linha* (A aluna referiu-se à linha {EFB})

X. *Eu continuo a achar que isto é uma linha.*

Professora: Diz?

X. *Nós estivemos a contar as linhas ...*

Professora: E então?

Y. *Só temos seis/*

X. *Mas esta também conta* (Referindo-se à linha {EFB})

Professora: Esta também conta.

X. *É o que eu estava a dizer.*

Professora: Cada linha agora contém três pontos. Quais são essas linhas?

A aluna Y identificou em voz alta as sete linhas utilizando apenas duas letras. Não foi feita a correcção da terminologia para não interferir no raciocínio elaborado.

Y. *Eu não percebi o que a frase quer dizer.*

X. *Eu já tentei explicar mas não fui lá muito bem sucedida (riu-se).*

Professora: Tenta novamente, por favor.

X. *Eles querem saber se por exemplo temos uma linha, não é? E dão-nos um ponto qualquer exterior a essa linha e querem saber se a linha que passa por esse ponto/*

Y. *Alguma linha.*

X. (Após a interrupção da aluna Y, esta aluna continua a explicação) *é paralela à linha dada.*

Y. *Não há nenhuma, pois não? Acho que não, pelo menos aqui não há nenhuma paralela a/*

X. *Só há estas linhas?*

Professora: Sim só há estas linhas.

Y. *Nenhuma aqui é paralela uma a outra…*

Professora: És capaz de explicar melhor?

X. *Porque não formam nenhum ângulo de noventa graus.*

Y. *Pois.*

Professora: Então qual é a definição de linhas paralelas?

X. *Não se podem intersectar.*

Y. *Mas aqui… todas se intersectam, alguma intersecta com outra.*

<u>Episódio 2: Elaboração da justificação</u>

(Tempo: 00.05.45 - 00.20.10)

Após a fase de análise da situação-problema as alunas passaram à elaboração da justificação.

Y. *AC intersecta-se com AG e com AF…como é que eu hei-de dizer…*

X. *Eu tenho que ver só por uma linha.*

Y. *Como é que vamos justificar.*

X. *Ah! Todas se intersectam. Por exemplo, tomas qualquer linha como ponto de partida, não é? E se tu fores a ver, esta intersecta, esta intersecta, esta intersecta, esta intersecta, esta intersecta.*

Y. *Pois é.*

X. *Mas qualquer uma delas que eu já estive a fazer (riu-se).*

Y. *Mas a stora quer com cálculos ou é só explicar?*

X. *Mas aqui não tens cálculos. Mas stora a definição de paralelismo é a mesma da Euclidiana?*

Professora: Sim é a mesma.

***Y.** Para já, esta é uma circunferência e está intersectada com todas*[as outras].

***X.** Acho que temos que partir daí (da definição) para justificar.*

Alunas em silêncio a pensarem. (00.07.51 -00.08.30)

***Y.** Então esta frase é falsa?*

Professora: Pelo que dissestes parece que sim…mas tens que justificar.

***Y.** Como vamos justificar?*

***X.** Para já escrevi a definição – "Duas rectas são paralelas se a sua intersecção for o vazio, ou seja, se estas por mais que se prolonguem nunca se intersectem".*

***Y.** E agora como é que dizemos que qualquer uma delas é intersectada por todas?*

***X.** Acho que temos que dar exemplos. Se são só estes pontos que existem e se são só estas linhas que existem…*

***Y.** Iah! É isso, qualquer linha é intersectada pelas outras, pelas seis restantes.*

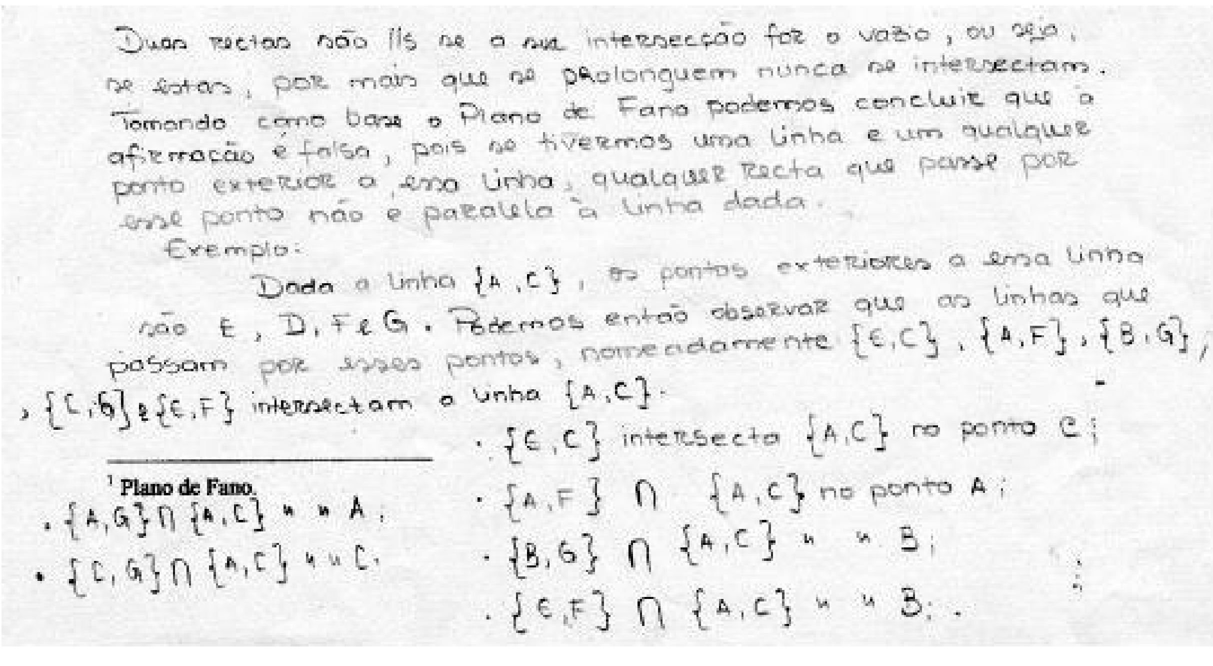
***X.** Pomos por exemplo, assim…A linha AC é intersectada pela linha AG, pela linha BD, pela linha AF…percebes?*

***Y.** A gente não precisa de ver tudo… Um ponto exterior, por exemplo, a esta linha, por ele passam as outras que intersectam esta…Pois…é a mesma coisa…*

***X.** Vamos começar a justificar (por escrito) e depois comparamos.*

Alunas em silêncio a elaborarem a justificação escrita (00.10.50- 00.20.10)

As figuras seguintes ilustram as soluções escritas das alunas.



Duas rectas são //s se a sua intersecção for o vazio, ou seja, se estas, por mais que se prolonguem nunca se intersectam. Tomando como base o Plano de Fano podemos concluir que a afirmação é falsa, pois se tivermos uma linha e um qualquer ponto exterior a essa linha, qualquer recta que passe por esse ponto não é paralela à linha dada.

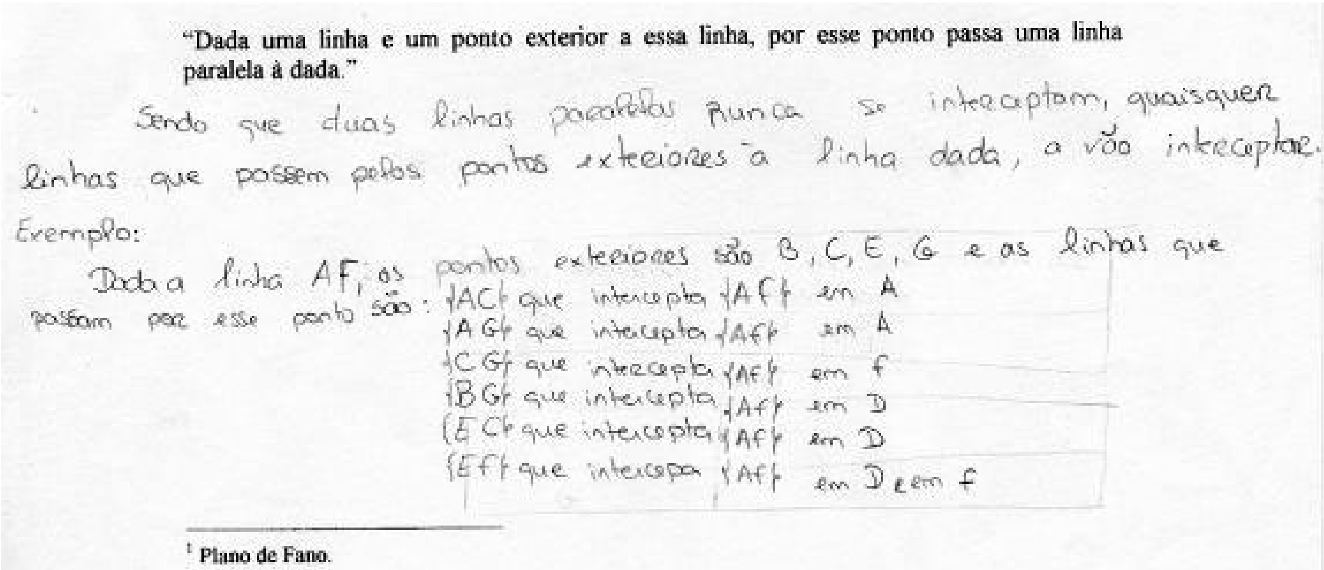
Exemplo:

Dada a linha {A,C}, os pontos exteriores a essa linha são E, D, F e G. Podemos então observar que as linhas que passam por esses pontos, nomeadamente {E,C}, {A,F}, {B,G}, {C,G} e {E,F} intersectam a linha {A,C}.

. {E,C} intersecta {A,C} no ponto C;
. {A,F} ∩ {A,C} no ponto A;
. {B,G} ∩ {A,C} " " B;
. {E,F} ∩ {A,C} " " B;.
. {A,G} ∩ {A,C} " " A;
. {C,G} ∩ {A,C} " " C.

[1] **Plano de Fano.**

Figura 8.21 – Solução da aluna X ao problema 3.


"Dada uma linha e um ponto exterior a essa linha, por esse ponto passa uma linha paralela à dada."

Sendo que duas linhas paralelas nunca se interceptam, quaisquer linhas que passem pelos pontos exteriores à linha dada, vão interceptar.

Exemplo:

Dada a linha AF, os pontos exteriores são B, C, E, G e as linhas que passam por esse ponto são:
{AC} que intercepta {AF} em A
{AG} que intercepta {AF} em A
{CG} que intercepta {AF} em F
{BG} que intercepta {AF} em D
{EC} que intercepta {AF} em D
{EF} que intercepta {AF} em D e em F

[1] Plano de Fano.

Figura 8.22 – Solução da aluna Y ao problema 3 (frente da folha de registo)

Episódio 3: Reflexão

(Tempo: 00.20.10 – 00.23.49)

***X**. Acho que já acabei stora (00.20.11) mas é melhor ver tudo outra vez.*

A aluna verificou a solução apresentada.

Objectos e relações primárias

Na solução apresentada ao problema 3, as alunas utilizaram uma terminologia para as linhas do plano de Fano indicando apenas dois pontos de cada uma das sete linhas (e.g., {A,C} referindo-se à linha {ABC}).

O diagrama apresentado no enunciado constitui um apoio importante na análise da situação-problema e note-se que a aluna X identificou a linha {EFB}

[…]

***Y**. Só tem seis. Não tem só seis linhas?*

A aluna X conta as linhas e responde:

***X.** Olha a circunferência conta também.*

[…]

Utilizaram, de forma correcta, a simbologia ligada ao conceito de paralelismo.

A situação-problema motivou a abordagem do conceito de paralelismo.

A aluna X definiu linhas paralelas na geometria Euclidiana, associando à ideia de não intersecção no "infinito".

O procedimento adoptado por esta aluna, após a análise da situação com a colega, foi a verificação da validade da afirmação feita para uma só linha.

[…]

Y. *AC intersecta-se com AG e com AF…como é que eu hei-de dizer…*

X. *Eu tenho que ver só por uma linha.*

[…]

Assim a justificação apresentada fundamentou-se na observação empírica do exemplo da linha {A, B, C} utilizando a definição de linhas paralelas e a definição de plano de Fano.

Argumentação – Objectos e relações secundárias

As alunas apresentaram justificações de natureza *empírica – experimentação crucial, do tipo intelectual.* De seguida, ir-se-á continuar a análise da solução apresentada ao problema 3 aplicando os atributos contextuais.

Ostensivo – não-ostensivo: O enunciado do problema associa uma figura, atributos ostensivos, à definição de plano de Fano, que contém atributos não-ostensivos.

Os atributos ostensivos para as linhas do plano de Fano utilizados pelas alunas foram {A, C}, {A, G}, {C, G}, {A, F}, {B, G}, {E, C} e {E, F}, onde apenas são referidos dois pontos das linhas tal como era feito no contexto da geometria Euclidiana. Note-se, ainda, que a aluna X percepcionou que não existiam linhas paralelas por não formarem ângulos de noventa graus.

[…]

Y. *Nenhuma aqui é paralela uma a outra…*

Professora: És capaz de explicar melhor?

X. *Porque não formam nenhum ângulo de noventa graus.*

[…]

No entanto, não desenvolveu esta ideia e optou por considerar uma das sete linhas do plano de Fano e a intersecção desta linha com as restantes como justificação da falsidade da afirmação - "Dada uma linha e um ponto exterior a essa linha, por esse ponto passa uma linha paralela à dada."

A aluna Y, inicialmente, não *idealizou* o ostensivo da linha {EBF}.

Extensivo – intensivo: Apesar destas alunas já terem tido contacto com uma geometria finita, uma geometria de quatro pontos, que lhes foi apresentada no teste de avaliação diagnóstico (realizado no início do ano lectivo anterior) não houve indícios de que estabelecessem ligação com essa experiência.

Institucional – pessoal: Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências na aula de matemática são com exemplos de linhas "traçadas" no plano cartesiano e/ou no semi-plano de Poincaré, na situação do plano de Fano o facto de só existirem sete linhas induziu as alunas a confirmarem com a professora a existência de apenas essas linhas.

[…]

X. *Só há estas linhas?*

Professora: Sim só há estas linhas.

Y. *Nenhuma aqui é paralela uma a outra…*

Professora: És capaz de explicar melhor?

X. *Porque não formam nenhum ângulo de noventa graus.*

Y. *Pois.*

Professora: Então qual é a definição de linhas paralelas?

X. *Não se podem intersectar.*

Y. *Mas aqui… todas se intersectam, alguma intersecta com outra.*

[…]

Unitário – sistémico: Durante o episódio 1, as alunas procederam a uma análise da situação-problema. Nesta análise, muito apoiada pela figura dada no enunciado, a aluna Y só identificou seis linhas no plano de Fano, pois não identificou {EFB} como sendo uma linha. No final desta análise, enquanto a aluna Y conclui globalmente que todas as linhas dadas se intersectam a aluna X sente necessidade de realizar uma análise *só para uma linha.*

[…]

Y. *Mas aqui… todas se intersectam, alguma intersecta com outra.*

[…]

***X.** Eu tenho que ver só por uma linha.*

De seguida, na elaboração da justificação, as alunas apresentam um pequeno texto síntese, da solução ao problema, seguido de um exemplo.

Expressão – conteúdo: A situação-problema induz, ao nível do conteúdo, à abordagem de proposições já abordadas em situações anteriores (Proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente). Induz a abordagem da proposição: O plano de Fano é uma geometria incidente.

Relativamente ao conceito de linhas paralelas, a aluna X expressou os seguintes significados: " *Duas linhas são paralelas se a sua intersecção for o vazio";"* [Duas linhas são paralelas] *se por mais que se prolonguem nunca se intersectam".* Neste contexto particular do plano de Fano, esta mesma aluna apenas utilizou o primeiro dos significados anteriormente referidos e durante a análise da situação-problema, através da observação da representação pictórica do plano de Fano, parece que momentâneamente fez confusão entre as noções de paralelismo e perpendicularidade.

[…]

***Y.** Nenhuma aqui é paralela uma a outra…*

Professora: És capaz de explicar melhor?

***X.** Porque não formam nenhum ângulo de noventa graus.*

[…]

É um facto (comprovado nas configurações cognitivas iniciais) que estas alunas durante a sua escolaridade básica desenvolveram actividade matemática relacionada com concorrência e paralelismo de rectas no plano Euclidiano.

A abordagem de uma geometria finita, definida pictoricamente, é uma situação atípica no currículo de matemática do ensino secundário e que induziu o questionamento sobre a definição de linhas paralelas.

[…]

Y. Mas a stora quer com cálculos ou é só explicar?

***X.** Mas aqui não tens cálculos. Mas stora a definição de paralelismo é a mesma da euclidiana?*

[…]

8.3.4. O processo de argumentação das alunas X e Y ao problema 4

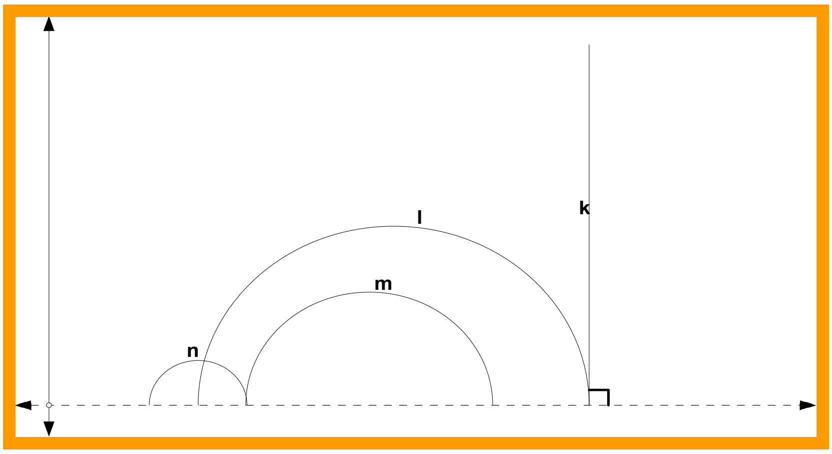
PROBLEMA 4: Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n** e **k)** no Semi-Plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições:

l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$

m: $(x - 6,5)^2 + y^2 = 6,25 \wedge y > 0$

n: $(x - 3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$

k: $x = 11 \wedge y > 0$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

SOLUÇÃO (Elaborada pelas alunas X, Y, C e J)

Episódio 1: Leitura e análise da situação- problema

(Tempo: 00.00.40 – 00.04.17)

Nesta sessão, o grupo de trabalho era constituído por quatro elementos, a aluna X, a aluna Y, a aluna C e o aluno J.

Os primeiros quatro minutos da sessão foram dedicados à leitura e análise da figura dada no enunciado. Após a leitura do enunciado, ocorreu o seguinte diálogo:

X. *Stora a definição de paralelas é a mesma?*

Professora: Sim a definição é a mesma.

X. *Então, duas linhas por mais que se prolonguem nunca se intersectam.*

Y. *Estas não são paralelas* (referindo-se a l e a n).

X. *Mas estas duas são* (referindo-se a l e a m).

Y. *Mas não são paralelas…*

X. *Como é que tu sabes?*

Y. *Oh dá para ver… a distância daqui aqui e daqui aqui…* (referindo-se à distância Euclidiana entre as duas semi-circunferências, representativas das linhas hiperbólicas em causa).

X. *Mas a distância não tem que ser a mesma.*

Y. *Tem, quando são paralelas esta distância daqui aqui é sempre igual à daqui aqui e daqui aqui… (apontando as linhas l e m). Não é?*

C. *Esta não é paralela de certeza a nenhuma delas.*

Y. *Qual?*

C. *A k.*

Y. *E a n também não.*

Alunas em silêncio a observarem a figura.

A aluna Y identificou o valor do raio nas linhas hiperbólicas l, m e n e efectuou o seu registo ao lado da figura (ver parte superior da figura 8.24).

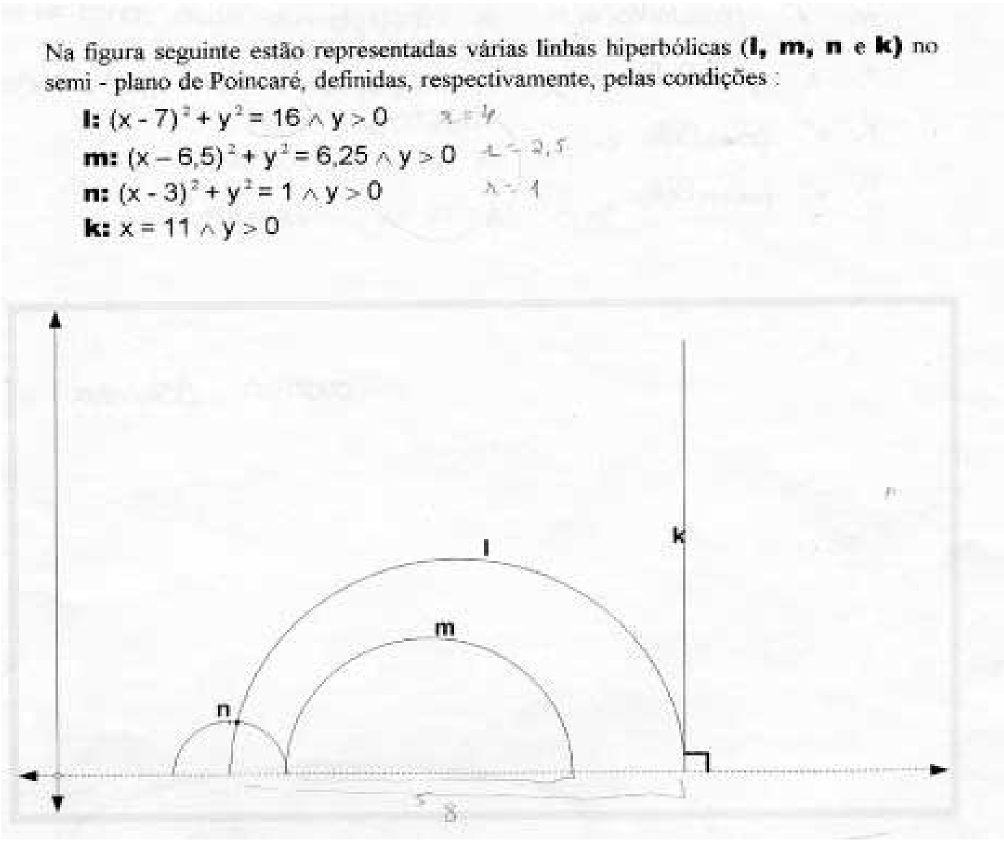


Figura 8.23 – Folha de registo da solução da aluna Y (parte superior)

Y. *Oh stora eu tenho uma dúvida. É duas linhas ou duas rectas? (00:03:05)*

Professora: *Duas linhas. Já tínhamos visto que na geometria hiperbólica falamos em linhas.*

Y. *Só que estas não se intersectam mas também não são paralelas… (referindo-se a l e a m) a distância que vai daqui aqui não é a mesma daqui aqui.*

Professora: Porque é que dizes que não são paralelas?

Y. *Porque a distância que vai daqui aqui não é a mesma que daqui aqui. (00:03:00)*

Professora: Estás a pensar na geometria Euclidiana?

Y. *Ah! Então podem ser paralelas…*

Professora: Podem… (a professora saiu da sala)

X. *Duas paralelas são o l e o m…não é?*

C. *O l e o m?*

X. *Sim e duas que não são paralelas são …pode ser o l e o k.*

C. *Duas paralelas são o m e o l, não é?*

Y. *Aqui pede duas.*

C. *Mas não paralelas há mais…há o n e o l, há o m e o n…*

Y. *O k…espera aí. O k também pode ser paralela a m e paralela a n, nesta geometria.*

J. *Porquê?*

X e Y *(em simultâneo). Porque não se intersectam.*

J. *Nós vamos por aí ver.*

Y. *Pois… temos que ver se a definição/*

C. *Então o k é paralela a n.*

Y. *A l não, é a n e a m. Este é outro tipo de geometria…*

De seguida, seguiu-se um período de dois minutos em que os alunos permaneceram, no geral, em silêncio. (00.05.39-00.08.47). Esta pausa foi interrompida pela aluna X, que iniciou o diálogo seguinte:

X. *Só vais dar um exemplo?*

Y. *Sim…*

X. *Eu acho que isto está muito simples…depois temos que colocar…Pois …porque não se intersectam.*

C. *Então o k é paralela a m.*

Y. *A m é paralela mas a l não…estão juntinhas.*

Episódio 2: Elaboração da justificação

(Tempo: 00.05.03 – 00.38.16)

Após a fase de análise da situação-problema o grupo centrou-se na elaboração de uma justificação escrita. Os alunos permaneceram um certo tempo em silêncio *(00.05.03-00.08.47)* antes de ter início o diálogo seguinte:

X. *Só vais dar um exemplo…*

Y. *Sim…*

Passado, mais ao menos, um minuto uma das alunas afirmou:

C. *Eu acho que isto está a ser muito simples…*

X. *Eu acho que primeiro temos que dar as mais óbvias e depois vamos tentar ter outras interpretações… (00.09.34) …*(As coordenadas dos centros) *Os centros são sete, zero e seis e meio, zero…e se tu vires está certo.*

Y. *Qual é a equação da circunferência?*

X. *É x menos a ao quadrado, mais y menos b ao quadrado, igual a r ao quadrado.*

Y. *O que é o a e o que é o b?*

X. *É o centro.*

Y. *Oh professora eu acho que isto está a ser muito simples…*

De seguida, e por solicitação da professora, cada uma das alunas explicou o raciocínio elaborado através da leitura da respectiva solução.

C.*(00:14:15) Vou ler a minha solução - Segundo esta geometria no semi-plano de Poincaré qualquer linha é paralela desde que não haja intersecção. Como tal k é paralela a m e a n assim como m é paralela a l. No caso das não paralelas são n e m, l e k pois há intersecção no prolongamento das linhas.*

Professora: Achas que há prolongamento?

C*. Sim…*

Y*. Não…isto é um semiplano (semi-plano de Poincaré)*

C. *De qualquer maneira elas intersectam-se.*

Nesta altura, a professora pediu a solução à aluna X.

X. *Na geometria de Poincaré sendo a definição de paralelismo a mesma da geometria Euclidiana, podemos verificar que m e l são paralelas, pois estas linhas nunca se intersectam e l e n são não paralelas pois intersectam-se num ponto.*

De seguida a aluna Y leu a sua solução:

Y. *Duas linhas dizem-se paralelas em qualquer geometria quando a sua intersecção é o conjunto vazio. Então m é paralela a l e l não é paralela a n.*

Professora: Parece que consideram que m e l são paralelas e que m, n e l, k e l, n não são paralelas. Porquê?

X. Por a imagem…

Professora: E não se pode apresentar um argumento mais convincente?

X. *Podemos…falta-nos é saber como (riu-se) (00:19:29)*

Professora: Na geometria analítica quando querias determinar a intersecção, de por exemplo, as rectas de equação y igual a dois x mais quatro e y igual a menos x mais dois , como é que fazias?

X. *Fazíamos o sistema e tínhamos o ponto…*

De seguida, as alunas passaram a adoptar uma abordagem analítica para justificarem a resposta apresentada.

Problema

Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n e k**) no semi - plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições :

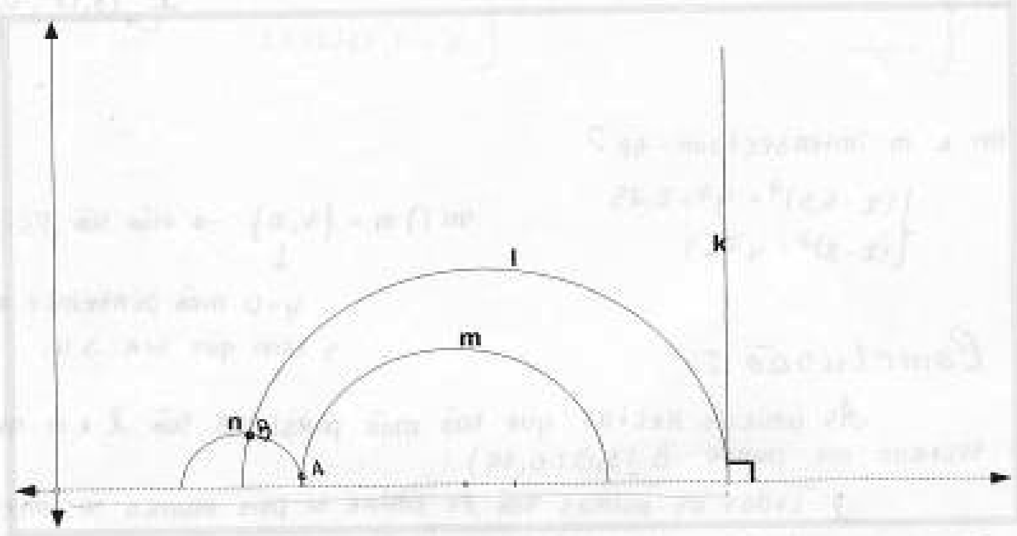
l: $(x-7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$ $C(7,0)$

m: $(x-6{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25 \wedge y > 0$ $C(6{,}5;0)$

n: $(x-3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$ $C(3,0)$

k: $x = 11 \wedge y > 0$

• $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ $C(a,b)$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Paralelismo ⇒ quando duas linhas, por mais que se prolonguem, nunca se intersectam.

Na geometria de Poincaré, sendo a definição de paralelismo a mesma da Geometria Euclidiana, podemos verificar que:

↳ m // l, pois estas linhas nunca se intersectam;

↳ l e m são não parelas, pois intersectam-se num ponto (B).
(3,13 ; 0,99)

K e L intersectam-se?

$$\begin{cases} x = 11 \\ (x-7)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 4^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \end{cases} \quad I(11,0)$$

Não há intersecção
y tem que ser maior que zero

Figura 8.24 – Solução da aluna X ao problema 4 (frente da ficha de registo da solução)

Quando a aluna X determinou o ponto de intersecção das linhas l e k gerou-se o seguinte diálogo.

X. *O stora isto dá um ponto muito esquisito…eu devo ter isto mal!*

Professora: E porque é que é esquisito?

X. *Então porque dá onze, zero …*

Professora: E porque é que é esquisito?

X. *Porque os onze devia ser lá mais para cima (aluna riu-se).*

Y. *Não, onze são o x.*

X. *Ai pois é! Ok estava a ver isto ao contrário.*

Professora: Então já é aceitável?

Y. *É …*

X. *Não.*

Y. *É …onze é.*

X. *Está bem…mas o y tem que ser maior do que zero não pode ser zero.*

Y. *Mas Intersectam-se num ponto…*

X. *Tá bem…mas não é válido porque o y tem que ser maior do que zero.*

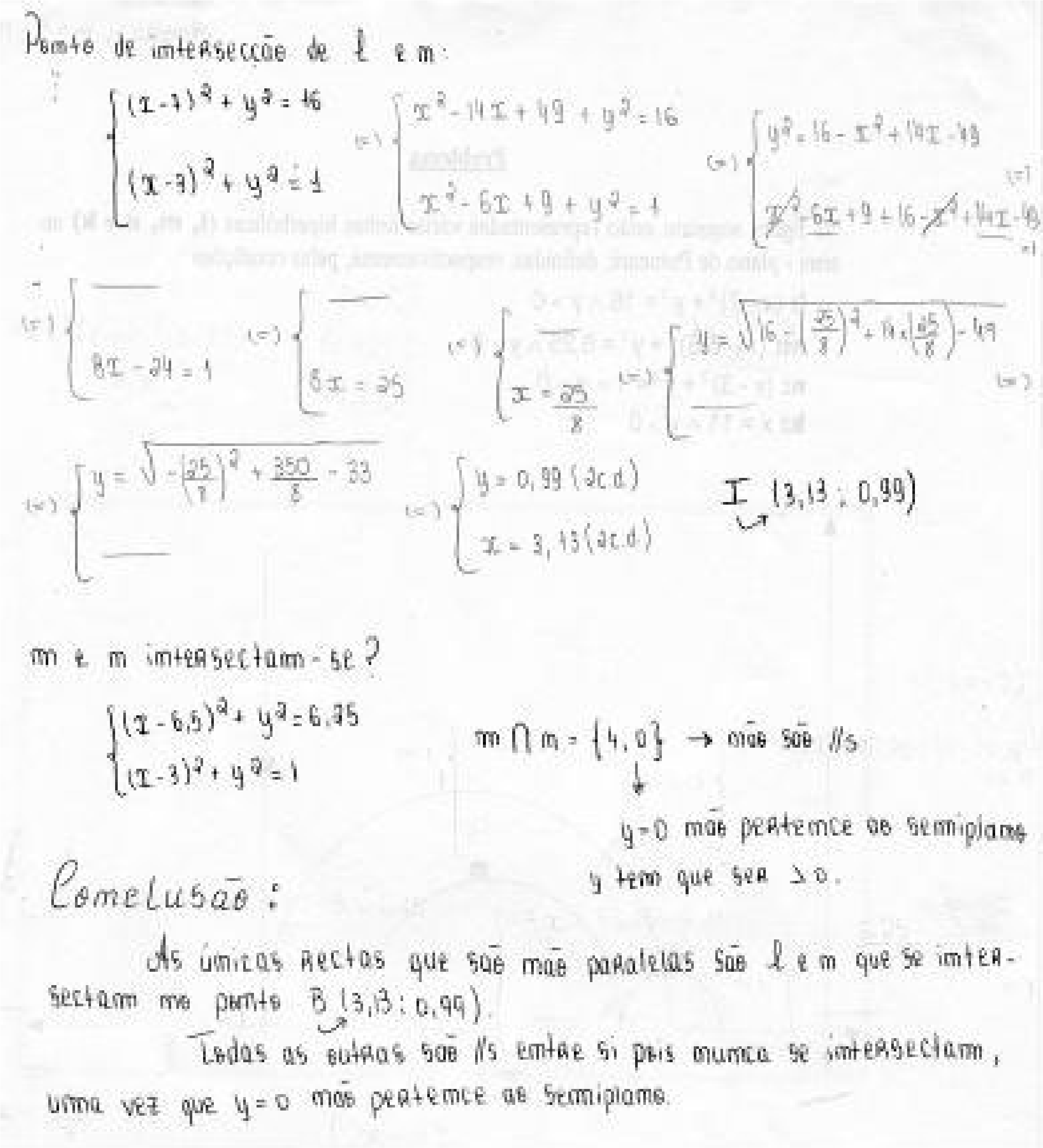
Professora: Então o que concluem?

As alunas X e Y responderam não em simultâneo:

Y. *Então as únicas aqui que são paralelas é a l com a m.*

C. *E m e n?*

Y. *(As linhas) m e n também são não paralelas porque se intersectam no ponto dois, zero.*



Ponto de intersecção de l e m:

$$\begin{cases}(x-7)^2+y^2=16\\(x-3)^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-14x+49+y^2=16\\x^2-6x+9+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2=16-x^2+14x-49\\\cancel{x^2}-6x+9+16-\cancel{x^2}+14x-49=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{—}\\8x-24=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{—}\\8x=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{16-\left(\frac{25}{8}\right)^2+14\times\left(\frac{25}{8}\right)-49}\\x=\frac{25}{8}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{-\left(\frac{25}{8}\right)^2+\frac{350}{8}-33}\\\text{—}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0{,}99\ (2c.d)\\x=3{,}13\ (2c.d)\end{cases}$$

$I\ (3{,}13\ ;\ 0{,}99)$

n e m intersectam-se?

$$\begin{cases}(x-6{,}5)^2+y^2=6{,}25\\(x-3)^2+y^2=1\end{cases}$$

$n \cap m = \{(4,0)\}$ → não são //s

$y=0$ não pertence ao semiplano
y tem que ser > 0.

Conclusão:

As únicas rectas que são não paralelas são l e m que se intersectam no ponto $B\ (3{,}13\ ;\ 0{,}99)$.

Todas as outras são //s entre si pois nunca se intersectam, uma vez que $y=0$ não pertence ao semiplano.

Figura 8.25 – Solução da aluna X ao problema 4 (verso da ficha de registo da solução)

A aluna Y recorreu à resolução de sistemas para verificar a relação de paralelismo entre as linhas k-l e l-n.

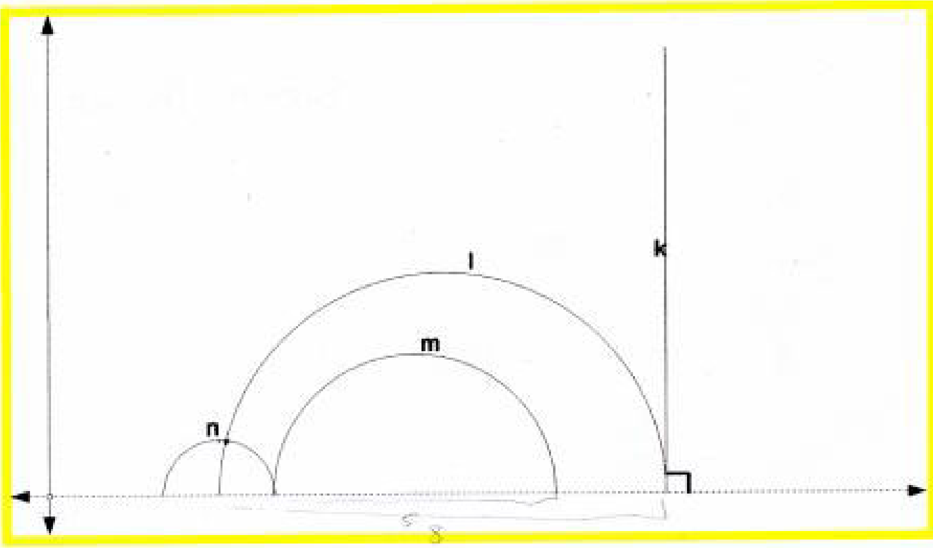
Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n e k**) no semi - plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições :

l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$ $\quad r = 4$

m: $(x - 6,5)^2 + y^2 = 6,25 \wedge y > 0$ $\quad r = 2,5$

n: $(x - 3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$ $\quad r = 1$

k: $x = 11 \wedge y > 0$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intercepção é o conjunto vazio.

Então $m // l$

e

K não é paralela a l?? → falso porque $D =]0, +\infty[$

$$\begin{cases} x = 11 \\ (x-7)^2 + y^2 = 16 \end{cases} = \begin{cases} \text{—} \\ 16 + y^2 = 16 \end{cases} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \end{cases}$$

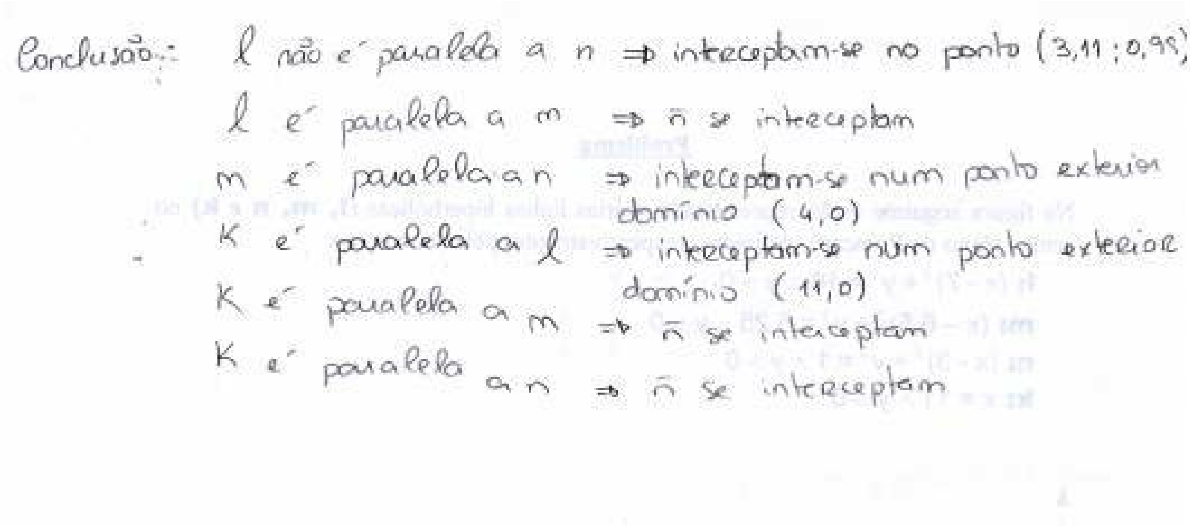
$l // n$??

$$\begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = 16 \\ (x-3)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 14x + 49 + y^2 = 16 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{-x^2 + 14x - 33} \\ x^2 - 6x + 9 - x^2 + 14x - 33 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 8x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{-\left(\frac{25}{8}\right)^2 + 13,25} \\ x = \frac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,99 \\ x = 3,13 \end{cases}$$

Figura 8.26 – Solução da aluna Y ao problema 4 (frente da ficha de registo da solução)

Após a resolução de dois sistemas de duas equações a duas incógnitas compostos, respectivamente, pelas expressões algébricas das linhas k - l e l –n, a aluna Y registou a conclusão sobre o paralelismo das linhas l-n, l-m, m-n, k-l, k-m e k-n.



Conclusão: l não é paralela a n ⇒ interceptam-se no ponto (3,11 ; 0,99)
l é paralela a m ⇒ ñ se interceptam
m é paralela a n ⇒ interceptam-se num ponto exterior domínio (4,0)
K é paralela a l ⇒ interceptam-se num ponto exterior domínio (11,0)
K é paralela a m ⇒ ñ se interceptam
K é paralela a n ⇒ ñ se interceptam

Figura 8.27 – Solução da aluna Y ao problema 4 (verso da ficha de registo da solução)

Episódio 3: Verificação

(Tempo: 00.38.17-00.43.06)

A aluna Y finaliza a solução apresentando a conclusão (ilustrada na figura 8.28). Nesta altura ocorreu o seguinte diálogo:

Y. *Essa definição de paralelismo, quando a gente diz por mais que se prolonguem está errada para as circunferências, porque olha estas/(00:38:17)*

X. *Eu estou a perceber o que estás a dizer…*

Y. *Não temos que dizer por mais que se prolonguem. […]*

C. *Não se pode prolongar… Então mas como é que não se intersectam? Aqui no gráfico induz em erro.*

J. *Pelo gráfico só l e n é que se intersectam…*

X. *(As linhas) l e n são as únicas que não se intersectam.*

Observe-se que, na conclusão, a aluna X utiliza a designação de rectas e não de linhas, segue a definição de paralelismo associada a existência de intersecção e já não associa o paralelismo à expressão inicial "[…*]por mais que se prologuem, nunca se encontram.[…]"*

Objectos e relações primárias

Analisemos os objectos matemáticos e suas relações primárias, que intervêm na solução da situação-problema 4 elaborada pela aluna X e pela aluna Y.

Na solução apresentada, a **aluna X** optou pela linguagem algébrica para expressar a solução do problema. Utilizou, de forma correcta, a simbologia ligada ao conceito de rectas paralelas e revela domínio sobre terminologia do semi-plano de Poincaré. Recorre e resolve de forma correcta sistemas de duas equações com duas incógnitas.

A situação-problema motivou a abordagem do conceito de linhas paralelas. A aluna apresentou uma definição de linhas paralelas, na geometria Euclidiana, associada à ideia de intersecção no "infinito". A aluna estende esta definição ao Semi-Plano de Poincaré.

A situação-problema poderia ter motivado a utilização da propriedade transitiva do paralelismo de rectas (possivelmente abordada em anos de escolaridade anteriores). No entanto, esta propriedade não foi utilizada na solução apresentada.

Quanto aos procedimentos adoptados, a opção da aluna X pela via algébrica é notória. Apesar desta aluna visualizar o ponto B, de intersecção das linhas m e n, resolve um sistema e indica as coordenadas, com valores aproximados às centésimas, desse ponto. A algebrização do problema ajudou a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Parece-nos que a visualização da figura não induziu raciocínios erróneos.

A justificação apresentada fundamenta-se nos procedimentos anteriores e foi de natureza dedutiva, onde os exemplos específicos foram utilizados para apoiar a organização das justificações – *experimentação pensada.*

A **aluna Y** utilizou as linguagens - gráfica e algébrica - como ajuda para identificar linhas paralelas e não paralelas. A figura dada no enunciado constitui uma ajuda para se identificar linhas paralelas e não paralelas.

A situação colocada tinha como objectivo potenciar a visualização e valorizar o papel da definição de semi-plano de Poincaré na justificação da indicação de linhas paralelas e de linhas não paralelas.

A linguagem algébrica ajuda a clarificar eventuais dúvidas sobre o paralelismo de algumas linhas. Por exemplo das linhas l e k.

O problema motivou, ainda, a abordagem de, conceitos/definições, propriedades/proposições (e.g., definição de linhas paralelas numa geometria abstracta, …).

A justificação foi do tipo conceptual, <u>fundamentada</u> nas definições de, Semi-Plano de Poincaré e de linhas paralelas.

A sequência de procedimentos adoptada, pelas alunas, foi ***visualização – raciocínio***.

Mas será que, neste caso, a visualização induziu raciocínios erróneos?

A visualização, na *fase* ascendente da resolução do problema, proporcionou a intuição de algumas linhas paralelas (e.g., n e m) que na realidade não o eram. De facto, através da visualização, as relações de paralelismo entre as linhas dadas no enunciado do problema não foi intuitiva, não foi evidente e foram aceites com base na realização de uma verificação mais formal (recurso a resolução de sistemas, recurso à definição de Semi-Plano de Poincaré, …)

Argumentação – Objectos e relações secundárias

De seguida, ir-se-á continuar a análise da solução do problema centrando-nos nos argumentos e aplicando os atributos contextuais à sua análise.

<u>Ostensivo – não-ostensivo</u>: Na solução apresentada pela aluna X, observa-se que utilizou os pontos A e B para assinalar, respectivamente, a intersecção das linhas l, n e m, n. No entanto, parece-nos que a aluna sentiu necessidade de determinar as coordenadas dos pontos, mesmo do ponto B, para reconhecer o não-ostensivo (linhas não paralelas e linhas paralelas) representado na situação.

Assim, os objectos ostensivos mobilizados na apresentação da solução do problema foram a representação dos pontos A e B na figura dada no enunciado e os sistemas das respectivas condições que definem as linhas hiperbólicas em causa.

A aluna Y, na argumentação apresentada, utilizou: a notação "//" (ostensivo) para se referir à relação de paralelismo (não-ostensivo) entre linhas; a linguagem algébrica, na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas e utiliza o símbolo $\Rightarrow$ (*se…então…)* a ligar frases, como por exemplo, "*l não é paralela a n* $\Rightarrow$ *Intersectam-se no ponto (3,11;0,99)* ", "*l é paralela a m* $\Rightarrow$ *não se intersectam*".

<u>Extensivo – intensivo</u>: A aluna X utilizou a condição que define uma circunferência de centro dado, o ponto C de coordenadas (a,b), e raio r para suporte à identificação dos centros das semi-circunferências, ou seja, das linhas hiperbólicas representadas nas figuras.

A definição dada no início "*Paralelismo – quando duas linhas, por mais que se prolonguem, nunca se intersectam.*" é adoptada pela aluna para a geometria hiperbólica, que ela designa de *geometria de Poincaré.* No entanto, na solução do problema, apenas se reporta à existência ou não de intersecção.

Na argumentação apresentada, a aluna Y começou por escrever: *Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intersecção é o conjunto vazio* Ou seja, pensou na definição de linhas paralelas e de seguida é que se focou nos objectos extensivos representados no enunciado do problema.

<u>Institucional – pessoal:</u> A situação-problema pode originar uma dialéctica entre o institucional e o pessoal. Se, por um lado, a visualização se revela ser um meio para dar a solução do problema, por outro, as experiências mais recentes destes alunos no âmbito do paralelismo de linhas, na geometria Euclidiana, foram segundo uma abordagem analítica e através do recurso à resolução de sistemas de equações.

Assim, ao nível da *cognição pessoal*, a situação-problema gerou os seguintes conflitos ao nível da definição de linhas paralelas:

A aluna Y, utilizou o ostensivo de linhas paralelas, da geometria Euclidiana, no contexto da geometria hiperbólica. É o que parece indicar o diálogo que se estabeleceu no episódio de leitura e análise entre as alunas X e Y:

[…]

Y. *Mas não são paralelas…*

X. *Como é que tu sabes?*

Y. *Oh dá para ver… a distância daqui aqui e daqui aqui…*(referindo-se à distância Euclidiana entre as duas semi-circunferências, representativas das linhas hiperbólicas em causa).

X. *Mas a distância não tem que ser a mesma.*

Y. *Tem, quando são paralelas esta distância daqui aqui é sempre igual à daqui aqui e daqui daqui… (apontando as linhas l e m). Não é?*

[…]

A aluna X apresentou uma definição de linhas paralelas, logo no início da solução escrita (figura …), onde refere "*…por mais que se prolonguem nunca se intersectam"* e confrontada, pela aluna Y, com o desajustamento desta definição não apresenta argumentos.

Unitário – sistémico: Durante o processo de resolução do problema, as alunas seguem uma trajectória que vai desde a análise da situação colocada até a uma síntese da actividade desenvolvida. A análise elaborada pelas duas alunas apresenta aspectos diferentes. A aluna X sente necessidade de *decompor* o enunciado, registando as coordenadas dos centros das semi-circunferências (linhas hiperbólicas) e os pontos de intersecção das linhas l, n e m, n. A aluna Y, ao *decompor* o enunciado, regista o valor dos raios das referidas semi-circunferências e foca-se na distância entre elas.

Quanto à síntese apresentada pelas duas alunas, esta é apresentada na conclusão da solução elaborada. No caso da aluna X, ela refere as únicas "rectas" que não são paralelas e de seguida faz a afirmação "*Todas as outras são// entre si pois nunca se intersectam uma vez que y=0 não pertence ao semiplano".* No caso da aluna Y, a conclusão inclui a referência à relação de paralelismo entre as linhas duas a duas.

Expressão - conteúdo: A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas num contexto de geometria hiperbólica.

As alunas revelaram domínio de cálculo algébrico, nomeadamente na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Ao nível do domínio da linguagem, a aluna X referiu a designação "rectas" quando não se tratava de rectas. Parece que ao nível da linguagem, esta aluna ainda não domina algumas questões de linguagem da geometria hiperbólica.

Adoptando a categorização de Balacheff mencionada por Gutiérrez and Marrades (2000), a justificação que elas apresentam é de natureza *Conceptual* – baseada na definição de linhas paralelas na geometria abstracta (exemplo de uma geometria abstracta), formulação de propriedades (Propriedades da relação de paralelismo) e no cálculo algébrico (cálculo *simbólico*). No *cálculo simbólico*, não existe experimentação e a justificação é baseada na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, na utilização de expressões simbólicas formalizadas.

8.4. Configurações cognitivas finais de dois sujeitos

Neste ponto são apresentadas as configurações cognitivas finais das alunas X e Y relativamente à argumentação matemática segundo dois níveis de análise com enfoque, respectivamente, nos objectos matemáticos e suas relações primárias (*situação – problema,* *linguagem, conceitos, proposições e procedimentos)* e suas relações secundárias (*ostensivo - não ostensivo, extensivo - intensivo, pessoal – institucional, unitário - sistémico, expressão - conteúdo).*

8.4.1. Primeiro Nível de Análise

A **aluna X** mostrou-se, de uma forma geral, familiarizada com as questões de linguagem relativas a cada problema. A linguagem utilizada foi a linguagem da geometria Euclidiana. Por exemplo, a aluna utilizou a designação de "rectas" no contexto da geometria hiperbólica (ver figura 8.6). Na solução apresentada aos 4 problemas, esta aluna adoptou preferencialmente uma linguagem algébrica.

Em relação aos conceitos, o conceito de paralelismo suscitou, nesta aluna, as afirmações:

- "*Duas rectas são //s se a sua intersecção for o vazio, ou seja, por mais que se prolonguem nunca se intersectam"* (Figura 8.21);
- "*Paralelismo – quando duas linhas, por mais que se prolonguem, nunca se intersectam. Na geometria de Poincaré, sendo a definição de paralelismo a mesma da geometria Euclidiana, podemos verificar que: m // l , pois estas linhas nunca se intersectam; l e n são não paralelas, pois intersectam-se num ponto.* (Figura 8.24*).*

Na elaboração das justificações relacionadas com o conceito de paralelismo, a aluna procedeu à verificação da intersecção entre elas.

É notório o conceito de linhas paralelas (rectas paralelas) associado à ideia de "infinito" ou seja, *por mais que se prolonguem nunca se encontram.*

Outro aspecto que ilustra a "ancoragem" da aluna no modelo da geometria Euclidiana é a associação de linha a um conjunto infinito de pontos e que é visível na resolução do problema 3. Neste contexto, além de visualizar ângulos (rectos), a designação utilizada para se referir a uma linha do plano de Fano foi a nomeação de dois pontos, tal como lhe é familiar num contexto de geometria Euclidiana.

Ainda em relação aos conceitos, os problemas propostos permitiram a definição de: Linhas paralelas[33]e de distância entre dois pontos, quer na geometria Euclidiana quer na geometria do Motorista de Táxi.

---

[33] Definição: Duas linhas dizem-se paralelas, no sentido estrito, quando situadas no mesmo plano, não têm qualquer ponto comum. (Fernandes, P. 1967)

Na resolução dos problemas procedeu-se à enunciação das seguintes propriedades/ proposições: Desigualdade triangular (relativa à relação entre os lados de um triângulo na geometria Euclidiana); O plano cartesiano é uma geometria incidente; O semi plano de Poincaré é uma geometria incidente; Na GMT, d (A, B) + d (B, C)= d (A, C) com os pontos A, B e C não colineares.

Ao nível dos procedimentos e conforme os enunciados dos problemas tinham ou não figura, esta aluna seguiu respectivamente a sequência: visualização – raciocínio ou construção - visualização – raciocínio. Na elaboração das soluções dos problemas optou, no geral, por uma abordagem analítica e revelou facilidade ao nível do cálculo algébrico.

De seguida é apresentado um esquema síntese dos objectos e relações primárias observados durante a resolução dos problemas propostos.

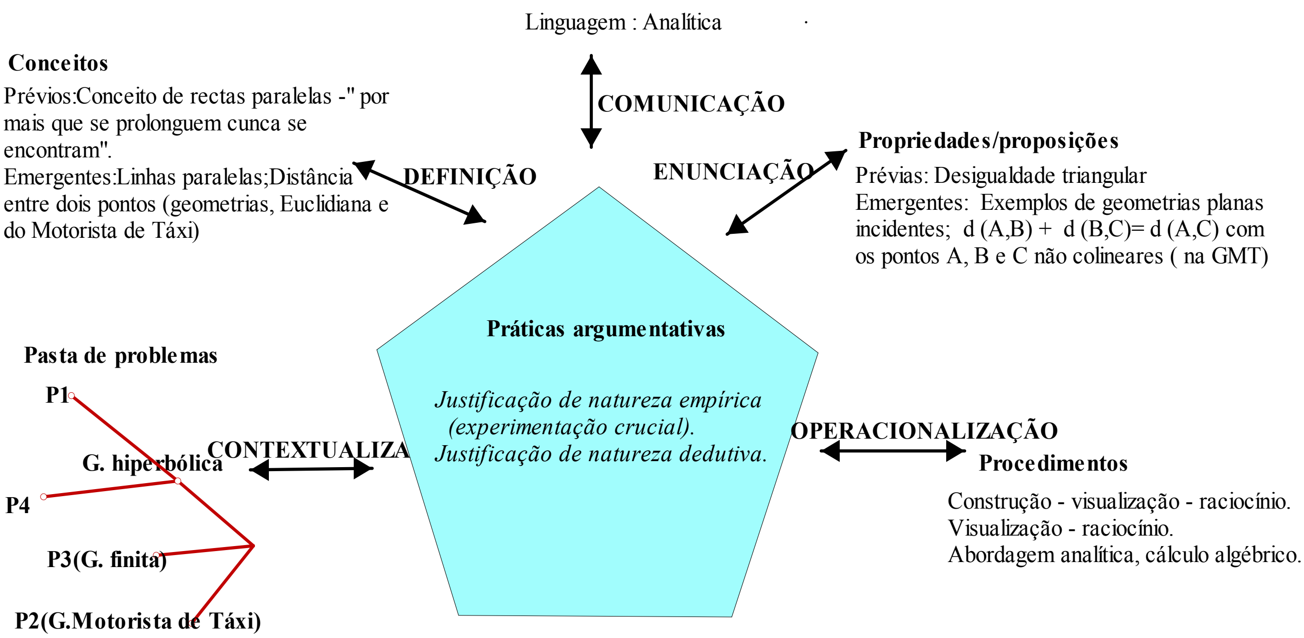


Figura 8.28 – Configuração cognitiva final da aluna X – ***primeiro nível de análise***

As justificações apresentadas por esta aluna foram de natureza empírica ou de natureza dedutiva. Das justificações empíricas foi mais notória uma *experimentação crucial* – do *tipo analítica* (por exemplo, problema 2) e do *tipo intelectual* (por exemplo, problema 4). Das justificações de natureza dedutiva, distingue-se a *experimentação pensada* (por exemplo, problema 1), começando por uma verificação empírica seguida de sequências de deduções lógicas *(justificações estruturais)* as quais derivam dos dados do problema, de axiomas, de definições, etc. As justificações de natureza dedutiva foram sempre sentidas, pela aluna, como necessárias para a solução completa do problema em causa.

De seguida, apresenta-se um quadro onde se descreve, de forma sucinta, para cada um dos problemas, as acções implementadas pela aluna X ocorridas durante a resolução de cada problema, identificando-se a ocorrência e os "saltos" entre os métodos empírico e dedutivo, ou seja a transição entre as fases ascendente e descendente[34].

	<u>Fase ascendente</u>: Caracterizada por uma actividade empírica numa tentativa de melhor compreender o problema, geralmente uma hipótese ou a sua verificação.	→[35] ←	<u>Fase descencente: </u>Caracterizada por uma actividade em que o aluno tenta produzir uma justificação dedutiva.
P 1	1ª Parte: Exploração através de construção; Definição da linha hiperbólica a passar pelos pontos dados. Em relação à questão - Quantas linhas distintas passam por esses dois pontos? Justifica a tua resposta - numa primeira abordagem, a aluna apresenta uma argumentação com base na construção/observação de um diagrama, no entanto <u>sente necessidade</u> de justificar por via analítica. A aluna não consegue aplicar a propriedade de que a geometria hiperbólica é uma geometria incidente, propriedade emergente da 1ª parte, e elabora uma justificação baseada em exemplos (figura 8.7).	→ ←	1ª Parte: <u>Sente necessidade</u> de justificar por via analítica e tenta produzir uma justificação(***X.*** *Passa só uma. Por um é que passam várias…mas temos que justificar!)* Após solicitação de apoio, utiliza o método de demonstração por redução ao absurdo. 2ª Parte: Validação de conjectura (método de demonstração por redução ao absurdo).
P 2	A aluna começa por uma actividade de natureza empírica, traçando pontos sobre os eixos de coordenadas à distância de 3 unidades da origem. Elabora uma justificação de natureza *empírica (a justificação envolve o uso de relações encontradas nos exemplos – tipo indutivo).* ***X.*** *Acho que com o primeiro exemplo e este já dá*	→ ←	Quanto à questão: A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante?

[34] Marrades e Gutiérrez (2000)
[35] Arzarello refere a importância de se prestar especial atenção ao momento em que o aluno, ao resolver um problema, passa de uma fase ascendente para uma fase descendente (Marrades e Gutiérrez, 2000).

	para ver que vai ter sempre a mesma forma, só com dimensões diferentes. (figura 8.14) Calcula a razão entre o perímetro e o diâmetro para dois exemplos e conclui que essa razão, na GMT, é 4.		*Justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo transformativa).* (figura 8.15)
P 3	A aluna desenvolve uma actividade empírica numa tentativa de melhor compreender o enunciado do problema. Na elaboração da justificação recorre a exemplo: ***X.*** *Eu tenho que ver só por uma linha. (*pensamento analítico).	→	Justificação de natureza *empírica – experimentação crucial, do tipo intelectual.* ***X.*** *Vamos começar a justificar (por escrito) e depois comparamos.* (Alunas em silêncio a elaborarem a justificação escrita) (figura 8.21)
P 4	Analisa a figura dada no enunciado e questiona sobre a definição de linhas paralelas (***X.*** *Stora a definição de paralelas é a mesma?).* De seguida elabora conjectura e o recurso a um diagrama constitui justificação para essa conjectura. (Prof. Parece que consideram que m e l são paralelas e que m, n e l, k e l, n não são paralelas. Porquê? **X**. *Por a imagem…)*	→ ←	Justificação de natureza dedutiva (por solicitação da professora) onde os exemplos específicos foram utilizados para apoiar a organização das justificações – *experimentação pensada.* (Figura 8.26) A abordagem analítica conduz a outra leitura da figura dada no enunciado.

Tabela 8.4 – Fase ascendente e descendente (entre o domínio gráfico e o domínio teórico) observadas nas práticas argumentativas da aluna X.

Em relação à **aluna Y**, a linguagem utilizada nas várias geometrias planas que serviram de contexto às situações-problema foi, tal como o observado com a aluna X, uma linguagem Euclidiana. Mostrou-se, de uma forma geral, à vontade com a terminologia utilizada, salvo algumas excepções, como por exemplo, no contexto do problema 4 formulou a questão – “ -*Qual a equação da circunferência? (p.59).* No processo de resolução dos problemas adoptou com mais frequência uma linguagem gráfica do que uma linguagem algébrica. Também esta aluna parece associar linha a um conjunto infinito de pontos e no problema do plano de Fano designa, tal como a aluna Y, uma linha através da nomeação de dois dos seus pontos e não de três como consta no enunciado.

Em relação ao conceito de paralelismo esta aluna enuncia – *“ Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intersecção é o conjunto vazio”* (Figura 8.26).

Ainda em relação aos conceitos, os problemas propostos promoveram o estudo dos conceitos emergentes referidos anteriormente na análise elaborada para a aluna X.

Durante a resolução dos problemas esta aluna abordou as propriedades/proposições: A relação de paralelismo é uma relação transitiva (estudada no contexto da geometria Euclidiana); O plano cartesiano é uma geometria incidente; O semi plano de Poincaré é uma geometria incidente.

Ao nível dos procedimentos, consoante os enunciados dos problemas tinham ou não figura, esta aluna seguiu respectivamente a sequência: visualização – raciocínio ou construção - visualização – raciocínio.

Na elaboração das soluções dos problemas a aluna Y optou, no geral, por uma abordagem sintética. As figuras para a aluna Y (quer fornecidas do enunciado quer construídas por ela) desempenham um papel que vai além de constituírem um apoio à intuição. Por exemplo, na solução apresentada na parte 2 do problema 1 (figura 8.10), a figura construída pela aluna é entendida como prova da afirmação em causa (Se duas linhas do semi-plano de Poincaré têm dois ou mais pontos em comum então são coincidentes).

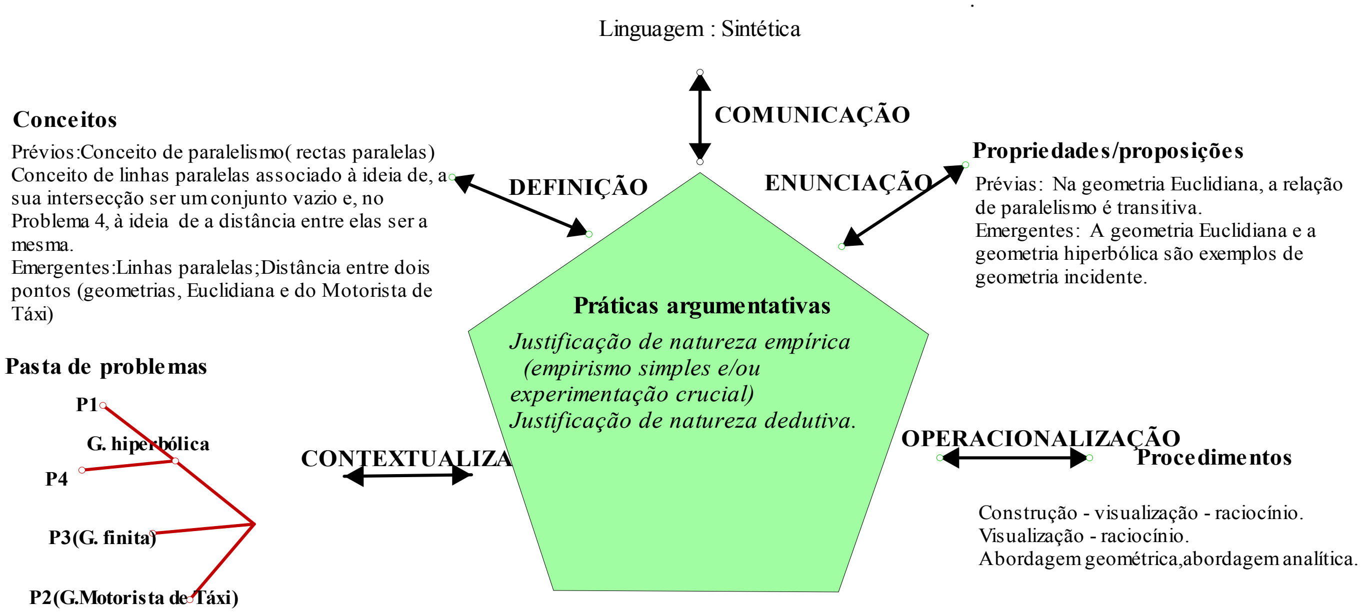


Figura 8.29- Configuração cognitiva final da aluna Y – ***primeiro nível de análise***

As justificações apresentadas por esta aluna pautaram-se por começar por uma verificação empírica seguida de uma justificação de natureza dedutiva.

De seguida, apresenta-se um quadro onde se descreve, de forma sucinta, para cada um dos problemas, as acções implementadas pela aluna Y durante a resolução de cada problema, identificando-se a transição entre as fases ascendente e descendente.

	<u>Fase ascendente</u>: Caracterizada por uma actividade empírica numa tentativa de melhor compreender o problema, geralmente uma hipótese, ou a sua verificação.	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	<u>Fase descencente:</u> Caracterizada por uma actividade em que o aluno tenta produzir uma justificação dedutiva.
P 1	1ª Parte: Exploração através de construção de diagramas. Produção de conjectura e considera que o diagrama constitui justificação. Os argumentos apresentados por esta aluna são de natureza empírica, caracterizados pelo uso de exemplos do domínio gráfico (construção de diagramas). A aluna não sente necessidade de outro tipo de justificação a não ser a exibição de diagramas. ***Y.:*** *Tem uma estás a ver… (a aluna fazendo um diagrama continua a explicar à colega)). Não é possível desenhar outra linha (através destes dois pontos*)(figura 8.10).	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	Aplica o método de demonstração por redução ao absurdo após solicitação da professora. 2ª Parte: Validação de conjectura através de construção de diagrama. Validação da conjectura, por solicitação da professora, e a aluna aplica o método de demonstração por redução ao absurdo).
P 2	Desenvolve actividade empírica para compreender a definição de distância neste modelo de geometria plana, na GMT (figura 8.18). Justificação de *natureza empírica, baseada no exemplo genérico, referindo-se a propriedades abstractas e aos elementos de uma família*	$\longrightarrow$	A razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é constante? *Justificação de natureza dedutiva, experimentação pensada do tipo transformativa)* (figura 8.19).
P 3	Desenvolve a actividade empírica numa tentativa de melhor compreender o enunciado do problema. ***Y.*** *A gente não precisa de ver tudo* (para todos os casos) ... *Um ponto exterior por exemplo a esta linha, por ele passam as outras que intersectam esta…Pois…é mesma coisa… (pensamento* global).	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	Justificação de natureza *empírica – experimentação crucial, do tipo intelectual* (figuras 8.22, 8.23).
P 4	Análise da figura dada no enunciado e questionamento sobre a terminologia. ***Y.*** *Oh stora eu tenho uma dúvida. É duas linhas ou duas rectas?* Regista o valor do raio de cada uma das semi-circunferências (linhas hiperbólicas). Faz a ligação		Justificação de natureza dedutiva (sentida a sua necessidade através do

	entre linhas paralelas e a distância entre elas ser a mesma. ***Y.*** *Só que estas não se intersectam mas também não são paralelas… (referindo-se a l e a m) a distância que vai daqui aqui não é a mesma daqui aqui.* Elabora conjectura. A imagem justifica a conjectura. A abordagem geométrica induziu a uma resposta errada.	⟶ ⟵	diálogo com a professora) onde os exemplos específicos foram utilizados para apoiar a organização das justificações – *experimentação pensada* (figuras 8.27-8.28). A abordagem analítica conduziu a outra leitura da figura dada no enunciado.

Tabela 8.5 – Fase ascendente e descendente (entre o domínio gráfico e o domínio teórico) observadas nas práticas argumentativas da aluna Y.

Considerando que diferentes representações sustentam diferentes formas de pensar e manipular os objectos matemáticos (NCTM, 2007, p. 423) e considerando que a anula X optou, preferencialmente, por uma abordagem analítica enquanto a aluna Y, no geral, optou por uma abordagem sintética, podemos afirmar que a aluna X tem um pensamento mais algébrico e a aluna Y um pensamento mais geométrico.

8.4.2. Segundo Nível de Análise

A comparação da configuração epistémica dos problemas com a trajectória cognitiva destas alunas permite a identificação dos seguintes conflitos cognitivos:

- A linha no plano de Fano tem um ostensivo que elas designam por duas letras como uma linha da geometria Euclidiana, a “linha” é um objecto ostensivo e concreto e sendo linha não é identificada com um conjunto de três pontos, a designação das linhas no plano de Fano é feita como na geometria Euclidiana, ou seja, indicando dois pontos dessa linha;

- No contexto da GMT, no problema 2, as alunas identificam a constante entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência como sendo 4. Estabelecendo analogia com essa razão na geometria Euclidiana, a aluna X faz a seguinte afirmação – “*Nesta geometria podemos falar em π, porém aqui ele adquire o valor de 4 e não de 3,14… como na geometria euclidiana”* (figura 8.16), ou seja, esta aluna não identificou o π como número irracional. Em contrapartida, a aluna Y identificou o π como um número irracional e neste contexto a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro é uma constante igual a 4, mas não é π;

- A "robustez" da produção de justificações, de soluções de problemas, com base na utilização de exemplos específicos (*empirismo simples)*, constituiu um conflito que foi sendo "negociado" ao longo da resolução dos problemas.

As práticas argumentativas destas alunas, caracterizam-se pela apresentação de justificações de natureza empírica - experimentação crucial, do tipo intelectual – e de justificações de natureza dedutiva -experimentação pensada, do tipo estrutural.

De seguida, são apresentados dois esquemas síntese dos objectos e relações secundárias observados durante a resolução dos problemas.

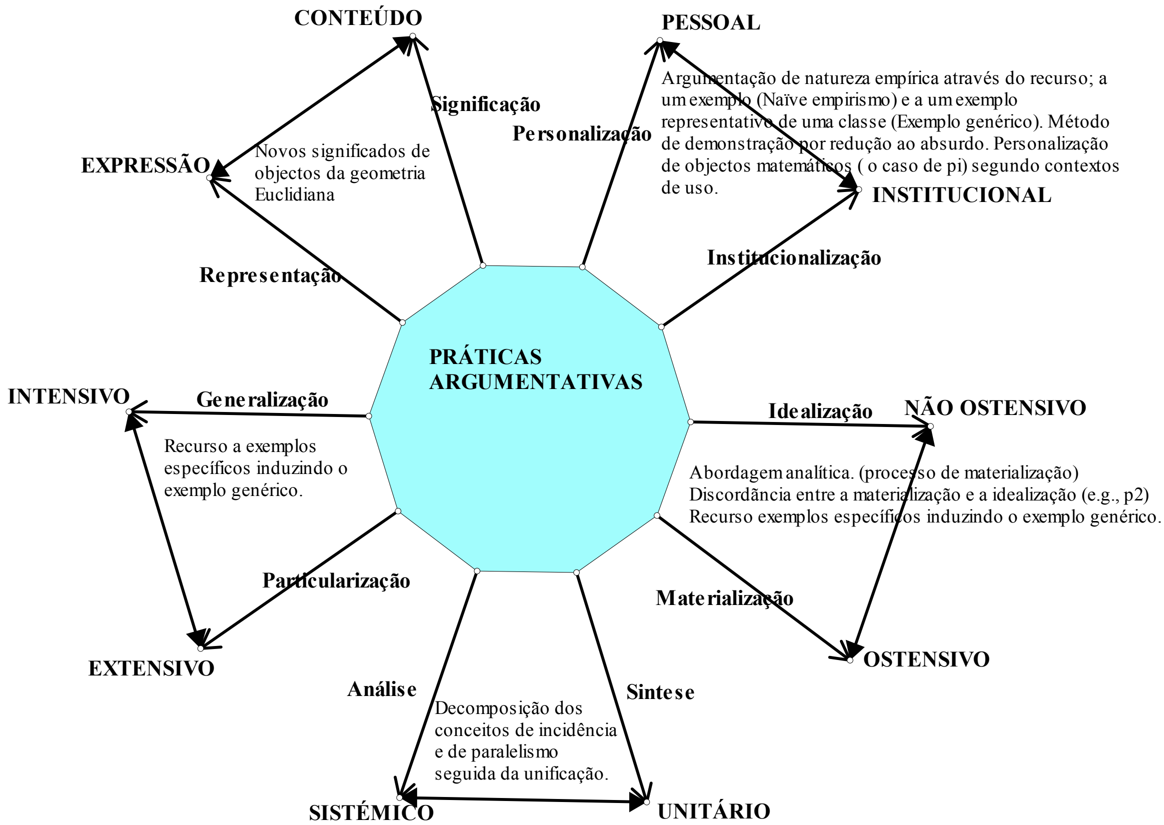


Figura 8.30 - Configuração cognitiva final da aluna X– *segundo nível de análise*

Figura 8.31 – Configuração cognitiva final da aluna Y – *segundo nível de análise*

Em síntese, uma abordagem geométrica diversificada, através de várias geometrias planas, promoveu nestas alunas, através da sequência de práticas argumentativas já descritas, um entendimento diferente das seguintes relações:

- Ostensivo – não ostensivo, através de um processo de materialização (domínio gráfico, algébrico) e idealização (domínio teórico);

- Extensivo – intensivo, através de um processo de particularização e de generalização, do exemplo específico para o exemplo genérico;

- Pessoal – institucional, através de um processo de personalização de objectos matemáticos institucionalizados segundo contextos de uso (por exemplo, o valor atribuído pela aluna X a π);

- Unitário – sistémico, través de um processo de decomposição e unificação (por exemplo, as várias geometrias abordadas são exemplos de uma geometria incidente);

- Expressão – conteúdo, através de um processo de representação e significação, novos significados são atribuídos a entes da geometria Euclidiana, (por exemplo a noção de linha, a linha nas várias geometrias planas tem diferentes representações mas com um significado).

Podemos afirmar que estas alunas revelaram indícios claros de evolução de justificações de natureza empírica (raciocínio mais espontâneo) para justificações de natureza dedutiva (raciocínio mais estruturado). Há indicadores claros de que foram percebendo as diferenças das definições (e.g., a definição de distância na geometria Euclidiana e a definição de distância na geometria do Motorista de Táxi), assim como o papel das definições na estrutura de uma justificação segundo um esquema dedutivo.

Segundo Balacheff [36], um indicador de mudança de uma prova empírica para um esquema de prova dedutiva é o perceber as diferenças de definições ou características de justificações espontâneas.

No final do estudo foi solicitado às alunas para responderem por escrito à seguinte tarefa:

Procura explicar, por palavras tuas, o significado de:

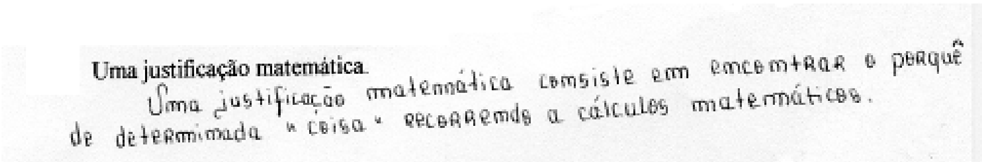


Figura 8.32 – Resposta da aluna X

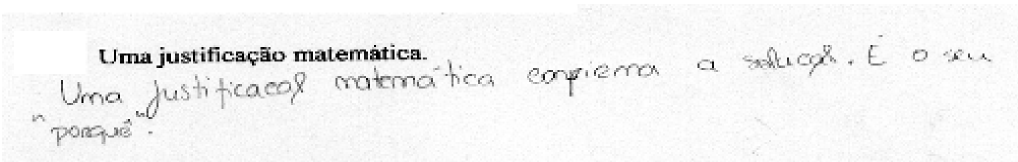


Figura 8.32 – Resposta da aluna X

A aluna X parece ter um entendimento da justificação mais ligado ao estabelecimento da verdade de uma afirmação, enquanto para a aluna Y parece servir mais para testar a credibilidade de uma solução.

8.4.3. Síntese

Em síntese, parece importante referir que os problemas propostos permitiram a abordagem de: Conceito de paralelismo; Exemplos de geometria (plana) incidente;

---

[36] http://www.theproofproject.org/proofcolloquium07/, (07/10/2007)

Definição de linhas "rectas" em 2D; Método de demonstração por redução ao absurdo. Promovendo a passagem de um raciocínio mais espontâneo para um pensamento mais estruturado.

As alunas, envolvidas neste estudo, tiveram de uma forma progressiva consciência da importância da fase descendente na elaboração de justificações.

Foi notória a evolução de uma fase ascendente, caracterizada por uma actividade empírica, para uma fase descendente, em que as alunas produzem uma justificação dedutiva.

Cenários em ambientes de geometria dinâmica proporcionam o ostensivo de objectos matemáticos não – ostensivos (e.g., problema 1).

Os problemas propostos criaram conflitos entre uma interpretação intuitiva e uma argumentação formal (relação entre o conhecimento intuitivo e formal). A resolução desses conflitos permitiu uma evolução de conhecimentos e de competências argumentativas (e.g., o papel atribuído às definições).

Nas práticas argumentativas destas alunas assistiu-se a um processo progressivo, desde a apresentação de justificações caracterizadas pelo uso de um ou vários exemplos (*justificação de natureza empírica - empirismo simples),* quer envolvendo percepção visual e/ou as relações matemáticas encontradas nesses exemplos, passando pelas justificações baseadas num exemplo representativo de uma classe (*justificação de natureza empírica - exemplo genérico)* até às justificações baseadas em aspectos genéricos do problema e deduções lógicas (*justificação de natureza dedutiva – experimentação pensada do tipo estrutural)*. Note-se que, neste último tipo de justificações, o papel dos exemplos é apoiar os passos da dedução.

REFLEXÕES FINAIS

Nesta parte do trabalho é apresentado um resumo dos objectivos do estudo e da metodologia de investigação utilizada, é apresentada a avaliação da idoneidade didáctica da pasta de problemas e é feita a sua discussão. Finalmente, são referidas algumas limitações do estudo e feitas algumas recomendações.

Segundo vários investigadores (e.g., Hanna, G., 2000, Hoyles, C., 1998) a demonstração é fundamental para a aprendizagem da matemática e um dos grandes desafios que se coloca aos professores é o de utilizarem a demonstração como um veículo para promover a compreensão matemática dos alunos.

Por outro lado, é constatada a existência de poucos resultados de investigação, nomeadamente em Portugal, de formas activas de realçar a papel da demonstração na sala de aula, nomeadamente ao nível do ensino secundário, no sentido de encontrar metodologias adequadas para induzir nos alunos um raciocínio dessa natureza.

O presente estudo pretendia contribuir para conceber, desenvolver e avaliar abordagens didácticas alternativas de ensino da geometria plana, no ensino secundário, com recurso a vários modelos de geometria plana, estabelecendo uma boa relação entre a intuição e o raciocínio dedutivo, ou seja, que a intuição promova a realização de raciocínios dedutivos, assim como o raciocínio dedutivo.

O estudo realizado consistiu na proposta, em espaço extra aula, de uma pasta de problemas de geometria com o objectivo de gerar algum entendimento sobre a seguinte questão: *De que forma é que outros modelos de Geometria Plana, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo?*

A perspectiva teórica dominante neste estudo tem como ponto de partida a formulação de uma ontologia de objectos matemáticos que tenha em conta os seguintes aspectos da matemática: *como resolução de problemas, socialmente partilhada, como linguagem simbólica e como sistema conceptual logicamente organizado* (Godino, Contreras e Font, 2006).

Ao assumir -se esta perspectiva teórica, é aceite:

(1) A natureza relacional da matemática, a matemática como actividade humana, a matemática como processo em vez de ser entendida como produto - *aspectos epistémicos*;

(2) Adaptação consistente dos novos conhecimentos aos previamente conseguidos, interacção social e comunicação como motores de aprendizagem, a complexidade da aprendizagem – *aspectos cognitivos*;

(3) A aprendizagem entendida como um processo de participação e integração numa comunidade – *aspectos emocionais*.

Uma perspectiva semiótica também transcende a dicotomia tradicional subjectivo - objectivo. Os sinais são inter subjectivos e assim proporcionam as bases para a construção de significados subjectivos, bem como as bases para se comunicar o conhecimento humano.

Há estudos recentes que se prendem com os processos de como os alunos aprendem a justificar afirmações matemáticas. Marrades e Gutiérrez (2000) descrevem uma estrutura de análise das justificações dos alunos, a qual engloba duas categorias principais de justificações: as justificações de natureza empírica e as justificações de natureza dedutiva.

Os dados relativos às duas alunas - caso, foram recolhidos durante um ano lectivo e resultaram da sua observação, do registo escrito das actividades e de reacções escritas a essas mesmas actividades.

A análise dos dados teve em consideração os objectivos do estudo e foi guiada pelas heurísticas de uma perspectiva ontosemiótica do ensino e aprendizagem da matemática e pelas categorias das justificações dos alunos definidas por Marrades e Gutiérrez (2000) para operacionalização da questão de investigação.

De acordo com Godino, Contreras e Font (2006), foi aceite a seguinte hipótese metodológica: fixadas determinadas circunstâncias (sujeitos, recursos, restrições, …), do ponto de vista da didáctica da matemática pode julgar-se (tendo por base resultados teóricos e dados empíricos) sobre a pertinência de certas tarefas e seu desenvolvimento.

Análise e avaliação da adequação didáctica do processo de estudo implementado

Nesta secção é feita uma avaliação da adequação didáctica da pasta de problemas considerando-se várias dimensões a ter em consideração e cuja formulação teve por base as noções teóricas do *enfoque ontosemiótico* (EOS).

As várias dimensões a ter em consideração - *adequação epistémica, adequação cognitiva, adequação interaccional, adequação mediacional* e *adequação ecológica* (Godino, Contreras e Font, 2006) - não são observáveis directamente e, por essa razão, é necessário inferi-las a partir de indicadores empíricos.

Adequação epistémica

Na análise da adequação epistémica, podem considerar-se diversos aspectos.

Um primeiro aspecto a destacar é que as situações-problema colocadas são situações atípicas ao actual currículo de matemático do Ensino Secundário Português. O currículo de referência[37] não contempla o estudo de outras geometrias planas além da Euclidiana. No âmbito dos temas transversais contemplados no currículo referido, as situações-problema permitiram a abordagem, da resolução de problemas, de alguns conteúdos de lógica e do raciocínio matemático criando-se contexto para o aluno adquirir alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva da matemática. Ou seja, o actual currículo de matemática, do Ensino Secundário Português prevê oportunidades para a elaboração de conjecturas num contexto de resolução de problemas, promovendo-se uma atmosfera favorável à introdução de aspectos formais da prova.

A linguagem utilizada foi representativa dos significados de referência da geometria Euclidiana. Isto decorre claramente do estudo de caso. No caso da aluna X, é possível identificar a preferência por uma linguagem analítica enquanto que no caso da aluna Y por uma linguagem sintética.

As definições, proposições e procedimentos são identificados no modelo de geometria de referência, a geometria Euclidiana no plano, e ampliados a outros modelos de geometria plana (e.g., semi plano de Poincaré) num contexto de resolução de problemas de prova. Este processo incluiu momentos de ruptura brusca no conhecimento pessoal destes

[37] Programas Homologados de Matemática **no âmbito da Revisão Curricular:** Matemática A -10º ano (2003/2004).

alunos aos quais se seguiram a busca de uma articulação coerente de conteúdos de outras geometrias.

A abordagem de outros modelos de geometria plana, distintos do modelo Euclidiano, comas alunas –caso, obedeceu a uma *trajectória epistémica* que teve a seguinte distribuição ao longo do tempo: 1º) A resolução de problemas de geometria durante o 10 º ano no contexto turma, durante o período lectivo das aulas de matemática, com o objectivo de rever conceitos da escolaridade básica, familiarizar os alunos quer com ambientes de geometria dinâmica quer com problemas de prova; 2º) A resolução de uma pasta de problemas num contexto de várias geometrias planas, no decurso do 11º ano, com um grupo restrito de alunos.

Adequação cognitiva

O desenvolvimento de actividades de resolução de problemas no contexto diversificado de geometria plana proporcionou experiências em que os alunos trabalharam vários sistemas axiomáticos.

Na caracterização dos argumentos apresentados pelas alunas, pode considerar-se diversos aspectos. Relativamente à sua natureza, podem indicar-se as seguintes conclusões: - As justificações apresentadas pela aluna X foram de natureza empírica (*experimentação crucial* – do *tipo analítica* e do *tipo intelectual*) e/ou de natureza dedutiva (*experimentação pensada);* - As justificações apresentadas pela aluna Y foram de natureza empírica (*Empirismo simples* – do *tipo perceptual e indutivo*) e/ou de natureza dedutiva (*experimentação pensada).*

O momento da compreensão das situações-problema, nas duas alunas – caso, é caracterizada por uma actividade empírica. A tentativa de produção de uma justificação dedutiva é distinta em cada aluna. A aluna X sente a necessidade de produzir esse tipo de justificação. No caso da aluna Y, esta ideia surge com contornos menos bem definidos, ou seja, em alguns casos é mesmo elaborada por imposição externa.

A evolução do pensamento matemático destas alunas, de um pensamento mais instantâneo para um pensamento mais estruturado, no sentido da integração de um modelo de geometria plana (do papel das definições, dos axiomas, …), parece estar ligada a esta experiência de resolução de problemas num contexto de várias geometrias planas.

A visão que as alunas têm, no início do estudo, da matemática e da sua aprendizagem está intimamente relacionada com a forma como essa aprendizagem foi feita na escolaridade básica. Por exemplo, a terminologia *teorema* foi associada ao teorema de Pitágoras. A definição de linhas paralelas aparece associada à ideia de infinito (“*por mais que se prolonguem nunca se intersectam”)* no caso da aluna X e à ideia de distância no caso da aluna Y (“*a distância entre elas é a mesma”)*. No desenvolvimento do estudo, a emergência e reforço de conceitos/definições e de propriedades/proposições (e.g., geometria incidente) tem um papel fundamental na promoção do raciocínio matemático.

Adequação interaccional

Um grande número de estudos tem confirmado a importância do papel do professor na criação de ambientes de debate que conduzam os alunos à identificação da estrutura de uma demonstração, à apresentação de argumentos e à distinção entre os argumentos correctos dos incorrectos, bem como a encorajar a interacção entre os alunos. Além disso, é crucial que o professor ajude os alunos a compreenderem por que é que uma prova é necessária e quando esta é válida (cf. Balacheff,1987; Hanna,1995 cit in Bergen et al, 2000). Na configuração epistémica das situações – problema envolvidas no estudo foram identificados potenciais conflitos semióticos que, de uma forma geral, foram sendo resolvidos à mediada que foram surgindo durante a actividade das alunas. O tipo de interacção entre professora e alunas, apoiada no trabalho de grupo, permitiu resolver, de uma forma geral, as dificuldades e conflitos.

Adequação mediacional

Quanto ao grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais para o desenvolvimento dos problemas propostos, as alunas tiveram à sua disposição meios informáticos (Geometer´s Sketchpad) e textos de apoio. Estes meios proporcionaram a interacção com os vários elementos da configuração epistémica e cognitiva (situação-problema, representação, definições, proposições e argumentos). A possibilidade de realizar no computador um elevado número de experiências, com grande facilidade e rapidez, permitiu obter um *feedback* extremamente rápido.

Os cenários produzidos em ambiente de geometria dinâmica e as figuras apresentadas nos enunciados das situações-problema apoiaram o trajecto entre uma actividade eminentemente empírica e uma actividade eminentemente dedutiva (transição entre as fases ascendente). As alunas, no geral, iniciaram a resolução dos problemas com uma actividade empírica que serviu de contexto para a abordagem teórica. No entanto, após essa teorização, o campo gráfico foi novamente observado segundo outro ponto de vista contribuindo para a compreensão dos conceitos envolvidos. A aluna X , através deste recurso, trabalhou de forma ostensiva a definição de semi-plano de Poincaré.

Os cenários gerados em ambiente de geometria dinâmica permitiram a realização das justificações de natureza empírica. Para a aluna Y, e no contexto do problema 1, estes cenários, só por si, constituíram justificação.

O tempo de 90 minutos destinado à resolução de cada problema revelou-se, no geral, adequado.

Adequação emocional

Na experiência realizada, as alunas disponibilizaram-se a colaborar e revelaram envolvimento nas tarefas propostas. Os problemas motivaram a participação das alunas e estas sentiram-se encorajadas a realizar várias experiências permitindo-lhes tomarem decisões mais reflectidas em relação aos conceitos e proposições abordadas.

É razoável prever que estes ambientes, nomeadamente ambientes de geometria dinâmica, transformem rapidamente a relação entre o conhecimento matemático e os problemas propostos. Essa mudança ocorrerá devido à natureza dos problemas propostos e aos processos de resolução (Mariotti, 2000).

Adequação ecológica

Na selecção dos problemas, teve-se em consideração as directrizes do currículo de matemática, do Ensino Secundário, em relação ao raciocínio matemático. Em relação aos tópicos de ensino previstos, rompeu-se com o estudo de apenas um modelo de geometria, a Euclidiana, e teve-se em consideração outros modelos de geometria plana (e.g., o semiplano de Poincaré).

A aprendizagem individual é iniciada por participação fazendo parte do social. Efectivamente, o uso público de sinais tem por base a construção privada de significado. Esta é talvez a principal justificação para adoptar uma perspectiva semiótica na matemática e no ensino e aprendizagem da matemática.

A noção de adequação didáctica, com as suas seis dimensões – *epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional e ecológica* – permite centrar a análise da adequação didáctica nas interacções entre os significados institucionais e pessoais, no contexto de um projecto educativo. As referidas dimensões e as várias adequações devem ser integradas tendo em conta as interacções entre as mesmas. O que requer falar-se da adequação didáctica como critério sistémico de pertinência de um processo de ensino (adequação ao projecto de ensino) em que um dos indicadores empíricos consiste na adaptação entre os significados pessoais conseguidos pelos alunos e os significados institucionais pretendidos/implementados (adequação cognitiva).

Os exemplos aqui apresentados não aconteceram sem os seguintes elementos, tarefas cuidadosamente preparadas, adequada orientação do professor, criação de oportunidades para os alunos, conjecturarem, cometerem erros, reflectirem, interpretarem relações entre objectos e apresentarem explicações matemáticas.

Limitações e implicações do estudo

Este estudo foi desenvolvido com o objectivo de investigar de que forma é que a resolução de problemas de outros modelos de Geometria Plana, distintos da geometria Euclidiana, pode ajudar os alunos do ensino secundário a desenvolver o raciocínio dedutivo. Este trabalho foi conduzido num ambiente em que os alunos resolveram problemas de prova, alguns deles com recurso a ambientes de geometria dinâmica. Com a metodologia adoptada, pretendia-se obter dados que permitissem caracterizar em profundidade, a argumentação apresentada por estas alunas.

Nesta secção, são referidas algumas limitações do estudo e sugeridas as suas implicações através de recomendações relativas a futura investigação.

A investigação foi conduzida através de dois estudos de caso. Embora o seu objectivo não fosse a generalização de resultados, esse facto pode constituir uma limitação relativamente às conclusões. Seria interessante alargar esta investigação a outros alunos procurando encontrar indícios distintos e comuns com as conclusões do presente estudo.

O contexto de trabalho em que o estudo foi desenvolvido fez utilização dos computadores através do uso de programas de geometria dinâmica (e.g. Geometer´s Sketchpad). Seria importante realizar estudos desta índole em que existisse uma maior ênfase na elaboração de conjecturas a serem testadas.

O estudo desenvolveu-se através da recolha de dados realizada com observação e gravação da argumentação oral e escrita das alunas. Apesar de se ter acompanhado estas alunas, primeiro no seu ambiente turma (10º ano) e depois em pequenos grupos de trabalho (11º ano), seria importante analisar o desenvolvimento de competências argumentativas em estudos com maior duração, por exemplo, abrangendo o ciclo de estudos do ensino secundário.

O estudo incidiu sobre as competências argumentativas dos alunos em matemática. No entanto, existem indicações de que as atitudes do professor podem condicionar a natureza da argumentação dos alunos. Seria importante estudar em particular a influência das orientações do professor no desenvolvimento das competências argumentativas dos alunos.

O estudo aponta para que a dualidade entre pensamento instantâneo (*justificações empíricas*) e pensamento estruturado (*justificações dedutivas*) está relacionada com a ideia de que a prova matemática é associada a uma *imposição do exterior* ou, pelo contrário, constitui uma *expressão individual*. Seria interessante investigar a forma como o percurso escolar do aluno, desde os primeiros anos de escolaridade, influencia o entendimento sobre o papel da prova em matemática e ter-se uma compreensão mais profunda da complexidade envolvida na aprendizagem da prova.

Este estudo contribuiu para tornar saliente a importância da compreensão do papel das definições no desenvolvimento da solução de problemas de prova e a aplicação de métodos de demonstração, nomeadamente o método de demonstração por redução ao absurdo. Seria importante estudar outros métodos de demonstração, o que poderia contribuir para sugerir linhas orientadoras para a sua abordagem didáctica.

Este estudo poderá ter contribuído para tornar saliente a importância de processo de estudo da prova matemática segundo uma abordagem diversificada da geometria plana. Uma das implicações do estudo é o facto da escolha das situações-problema e as suas configurações didácticas, quer ao nível da escolaridade básica quer ao nível do ensino secundário, dever promover a capacidade de abstracção dos alunos e o conhecimento do método próprio da matemática, o método lógico-dedutivo.

Os resultados do estudo sugerem a existência de concepções erradas sobre conceitos matemáticos que podem provocar *conflitos cognitivos* nos alunos…

O estudo permite inferir que uma abordagem geométrica diversificada, através de vários modelos de geometria plana, promoveu nas alunas - caso, um entendimento diferente dos processos de, *materialização/idealização, particularização/generalização, personalização/institucionalização, análise/síntese e representação/ significação.* Seria interessante investigar a forma como o percurso escolar de um aluno, desde a escolaridade básica, influencia este tipo de entendimento e avaliar o seu grau de centralidade na preparação didáctica das situações-problema e na actividade matemática.

Este estudo poderá ter contribuído para tornar proeminente a importância da abordagem de outros modelos de geometria plana, distintos da Euclidiana, no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Uma das implicações desse resultado é o facto das situações didácticas a propor no estudo da geometria, ao nível do Ensino Secundário, dever atender a problemas de prova em vários modelos de Geometria Plana a propor aos alunos.

Os resultados do estudo ilustram a complexidade da análise e avaliação da argumentação matemática. A argumentação matemática poderá ser melhor compreendida e avaliada se tivermos a consciência de que os argumentos estão interligados com os objectos primários e secundários definidos no EOS. É a identificação das ligações entre esses vários objectos que caracterizam os processos de argumentação.

English Summary: The Development of Deductive Reasoning at Secondary School Level: Resorting to Plane Geometry

1. Introduction

This work, in the framework of the Mathematics Education, focuses on the study of alternative approaches to teaching and learning of Euclidean Geometry at Secondary School, in order to promote structured levels of thought of mathematical thought. Specifically, the potential of resorting to other models of Plane Geometry (e.g. Hyperbolic Geometry, Taxicab Geometry) in relation to this problem will be researched.

The choice of Secondary School is due to the fact that it is a level of teaching where a high failure rate is registered (particularly 10^{th} grade) and where the existing abyss is conspicuous between High School and University teaching in the scope of logic-deductive reasoning.

The work to be carried out aims to deepen the study of issues connected to the nature of the knowledge involved that forms the basis for decisions, such as: What processes are to be taught? What processes do we want the students to command? And on the other hand, bear in mind that we want to develop capacities of higher order, meaning that the teaching of Mathematics should be directed at high levels of thought such as: problem solving; communicate mathematically; reasoning and demonstration.

The mathematics syllabus for Primary and Secondary School has neglected mathematical proof, thereby contributing towards the existence of inequality between the Secondary School and University stages of teaching.

Very often, teaching approaches are centred on verification of results and do not value exploration and explanation (Villiers, 1998). There is currently a trend to resume the logic-deductive reasoning.

The main goal of this research is to analyse learning environments in which the students are requested to solve proof problems in diversified contexts and in a more general way, promote the development of deductive reasoning and a broader vision of mathematical knowledge. Specifically, the approach of proof problems in a context of non-Euclidean geometry, by resorting to artefacts and dynamic geometry software, will be researched.

2. Objectives and research issue

The study of teaching and learning strategies to support students in understanding the process of mathematical proof was the basis of this work. Since Geometry is the cradle of modern axiomatic systems, we centred our research on the analysis of some results in non-isomorphic geometric axiomatic systems, namely in Euclidean and Hyperbolic Geometries.

Secondary School students developed the problems in Portugal. In conceiving them, we took into account the present syllabus suggestions that recommend the creation, through the proposal of the problem situation, of environments which favour the approach of formal aspects of proof.

The problem-solving activity leads to important aspects of the mathematical education, namely in the discussion of strategies of solution, argumentation skills, execute proofs with a command of mathematical language issues, analysis and suitability of results, construction of concepts. The progressive acquisition of skills in the realm of problem solving is one of the great goals of any system of Primary and Secondary School teaching in mathematics.

Through this research, we aim to:

- Develop tasks that prompt teaching and learning of Geometry according to a diversified approach;

- Analyse the varied approaches of the tasks developed by the Secondary School students in different moments and the way these students mustered their capacities, both at mathematical content level and at the level of processes;

- Conceive and develop alternative didactic approaches to teaching Euclidean Geometry at Secondary School, by resorting to other plane geometries;

- Assess the impact of these approaches in the development of the students' mathematical knowledge;

- Establish a good relationship between intuition and deductive reasoning, in other words, so that intuition promotes the accomplishment of deductive reasoning, as well as deductive reasoning educating intuition.

The research hypothesis is as follows: a diversified approach to geometry, namely the familiarisation of students with other models of geometry, other axiomatic systems (not foreseen in the present Secondary School syllabus) in parallel with Euclidean axiomatics, will originate the following advantages:

- Transition from an intuitive reasoning to a deductive reasoning;
- Understanding of what an axiomatic system is;
- Promotion of argumentative skills of students in Secondary School.

The research carried out comprised the implementation (in the classroom) of a folder of geometry tasks with the aim of generating some understanding on the following question: *How can other models of Plane Geometry, other than the Euclidean one, help Secondary School students to develop deductive reasoning?*

3. Theoretical and methodological referential

3.1 Research antecedents

The last few years have witnessed extensive research in the scope of teaching and learning of mathematical reasoning, particularly reasoning of deductive nature. A testimony of this is displayed in publications on this topic in journals of mathematics teaching between 1990 and 1999. Moreover, Nicholas Balacheff has kept a Website since 1997, in the form of a Newsletter – *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematics Proof,* which has disclosed theoretical and empirical studies on this topic.

In CERME 4 (*Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)* in Spain, Reid, D. (2005), having the work of several researchers as reference (e.g., Godino & Recio, 2007; Reid, 2001; Balacheff, 2004), discussed the different meanings of proof and proving in terms of the following dimensions: the concept of proof; the purpose of teaching proof; the kinds of reasoning involved in a proof, the need to prove and the relationship between proof and language.

A considerable number of researchers have been researching the resort to environments of dynamic geometry and specifically its role in mathematical reasoning. An indicator of such a fact is the special edition of the international journal of research in mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics 44 (2000)*.

The mentioned edition presents an analysis of the influence of dynamic geometry software (DGS) in students' conceptions on proof when they are confronted with geometry problems involving proof in dynamic geometry environments, it provides evidence that activity with dynamic geometry software affords students the possibility of having access to the theoretical aspects of mathematics; Marrades and Gutiérrez (2000) describe a structure of analysis and classification of justifications of students. The examples of success represented here did not happen without the following elements: carefully prepared tasks, adequate teacher guidance; creation of opportunities for students to conjecture, make mistakes, reflect, and interpret relationships between objects and present mathematical explanations.

It is reasonable to foresee that these environments quickly transform the relationship between mathematical knowledge and the problems proposed. This change will happen due to the nature of the problems proposed and the solving processes Mariotti (2000).

A large number of studies have confirmed the importance of the teacher's role in creating discussion environments which lead the students to identifying the structure of a proof, the presentation of arguments and the distinction between correct and incorrect arguments, as well as encouraging interaction among students. Besides this, it is crucial that the teacher help the students understand why a proof is necessary and when it is valid (e.g., Balacheff, 2002; Hanna, 2000).

The fact that research in this realm has been reflected upon, both in international conferences and in various publications (e.g., Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactique des Mathématiques, La Lettre de la Preuve[38]) bears proof of maturity of the research in teaching and learning of mathematical "proof" and "proving".

Research in this field (e.g., Schalkwijk, L.V, 2000) documents that for Secondary School students, tasks involving deductive reasoning comprise tasks of a high level of difficulty. Dreyfus (1999), identified three categories of difficulty: *a lack of sense of the need for proof*; *a failure to grasp the nature of proof and writing proofs.* Considering that in a general way, proof continues to have an important place in the mathematics syllabus, both national and international, teachers of mathematics should be concerned about didactic approaches to problems of proof in the sense promotion, mathematical understanding and acknowledgement of proof as one of the fundamental aspects of mathematics.

[38] http://www.lettredelapreuve.it/

In Portugal, the approaches to teaching mathematical proof, both Secondary School, very frequently focus on the verification of results and less on exploration and explanation. Assessment indicators, whether checked or summed, clearly demonstrate the need for development of interventions in mathematical education that promote a more autonomous mathematical thinking in our students.

Accessibility to dynamic geometry environments (e.g., Geometer´s Sketchpad, Cabri Geometry) facilitates the accomplishment of tasks of exploratory nature, due to the fact that students easily test conjectures through the exploration of constructions carried out or they conjecture geometric relationships based on visual evidence. According to Hanna (2000), the mathematics teacher should be aware that visual representations comprise an essential component in mathematics syllabuses in that it creates bridges with the formal aspect of mathematics.

Our study is a small piece in the agenda of research in the education of Secondary School students for mathematical proof. In this sense and in an atypical way, we opted to approach proof problems in a diversified context of Plane Geometry and resorting to environments of dynamic geometry.

Considering that this work is from the field of Mathematics Education and taking into account the various focuses that have been proposed in this field, it seems convenient to clarify the focus/es.

According to Font (2002), the various focuses that have been proposed in Mathematics Education are positioned in an explicit or implicit way on the following aspects:

- A *general ontology*: a theory of existence in relation to the consideration of the world status and what inhabits it.

- A *general epistemology* which encompasses: (a) A theory on the nature, genesis and validation of subjective knowledge; (b) A theory on the nature, genesis and validation of objective knowledge; (c) A theory on meaning and truth, implied by the theories on subjective and objective knowledge.

- A theory on the nature of mathematics.

- A theory on learning and teaching which encompasses: (a) A general theory on learning (how personal knowledge is formed); (b) A specific theory on the learning of mathematics (how personal mathematical knowledge is formed); (c) A theory on teaching (the means to facilitate learning); (d) A theory on the teaching of mathematics (the means to facilitate learning of mathematics).

- A definition of the goal of the research.
- A methodology of research.

3.2 The onto-semiotic focus

According to Godino, J.D., Batanero, C. and Font, V. (2006), in an onto-semiotic perspective, the Mathematics Education must consider and be based on the nature of mathematical content, in its cultural and personal development, particularly within school institutions. Therefore research in Mathematics Education cannot ignore questions like, and I quote:*¿ Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?;¿Qué papel juegan la actividad humana y los procesos socioculturales en el desarrollo de las matemáticas?;¿Las matemáticas se descubren o inventan?; ¿Agotan las definiciones formales y los enunciados de las proposiciones el significado integral de los conceptos?; ¿Cuál es el papel que juegan en el significado de los objetos matemáticos, sus relaciones con otros objetos matemáticos, las situaciones problemáticas en las cuales se usan como herramientas, y las diversas representaciones simbólicas?(*p.2)

The starting point of the onto-semiotic focus is the formulation of an ontology of mathematical objects which takes into account the following three aspects of mathematics: *as a resolution of problems*, socially shared, *as symbolic language* and as a *logically organised conceptual system*. Taking the problem situation as the primitive notion, one defines the concepts of *practice, object* (personal and institutional) and *meaning*, with the aim of making visible and operative, the referred triple character of mathematics on the one hand, and on the other, the personal and institutional genesis of mathematical knowledge, as well as its mutual interdependence.

In mathematical practice[39], various types of objects intervene (symbols, graphs, diagrams, definitions, propositions, etc.) which are represented in written, oral graphic or even in sign language form. Out of the systems of operative and discursive mathematical practices new objects emerge that give us indications on the structure and organisation of

[39] Mathematical practice is considered, according to Godino (2006), *all acts or expressions (verbal, graphic, etc.) carried out by someone to solve mathematical problems, communicate the solution obtained to others, validate it or generalise it to other contexts and problems.*

these systems. These emerging objects can be “institutional objects”, shared by an institution, or “personal objects”, which include cognitive constructions (conceptions, schematics, internal representations, etc.).

Following these ideas, Godino, J.D., Batanero, C. and Font, V. (2006) refer that for a finer analysis of the mathematical activity it is necessary to take into account six types of primary entities: *Problem situation*; *Language* (e.g., terms, expressions, notations, graphs) in its various registers (e.g., written, oral, sign language); *Concepts* (approached through definitions or descriptions); *Propositions* (statements on concepts); *Procedures* (e.g., algorithms, operations, calculation techniques); *Arguments* (statements used to validate or explain the propositions and procedures, of deductive nature or another type). These six objects relate to each other by forming epistemic (networks of institutional objects) and cognitive configurations (networks of personal objects). Considering an entity as being primary is not an absolute question but rather a relative one, since we are dealing with functional entities in contexts of use. The systems of practices and the configurations are proposed by the same researchers, as theoretical tools to describe mathematical knowledge, in its double version: personal and institutional.

The contextual attributes signalled by these researchers are: *Personal/institutional* - The *personal cognition* is the result of thought and action of the individual subject confronted by a class of problems, whereas *institutional cognition* is the result of dialogue, understanding and regulation within a group of individuals who make up a community of practices; *Ostensive / non-ostensive* – The ostensive attribute refers to the representation of a non-ostensive object, which is to say, of an object that cannot be shown to another. The classification between ostensive and non-ostensive depends on the contexts of use. Diagram, graphics and symbols are examples of objects with ostensive attributes, perforated cubes and plane sections are of polyhedra are examples of objects with non-ostensive attributes; *Expression / content* (antecedent and consequent of any semiotic function) - The relationship is established by means of semiotic functions, understood as a relationship between an antecedent (*expression*, designation or name) and a consequent (*content*, designated or mathematical being) established by a subject (person or institution) according to a specific criterion or code of correspondence; *Extensive / intensive* (specific / general) – This duality is used to explain one of the basic characteristics of mathematical activity, namely generalization. This duality allows for the centre of attention to be the dialectics between the specific and the general, which is undoubtedly a key issue in the construction and application of mathematical knowledge; *Unitary / systemic* – In certain circumstances, mathematical objects participate as unitary entities, in others, they should be taken as the decomposition of others so that they can be studied.

3.3 Geometric reasoning

In relation to geometric reasoning, Duval, R. (1998) refers three types of cognitive processes which accomplish specific epistemological functions - **visualisation** (relating to spatial representation), **construction** (resorting to tools) and **reasoning** (in particular the *discursive processes* to broaden the processes of knowledge, for demonstration and interpretation). These different processes can be carried out separately. Therefore, visualisation does not depend on construction. If construction precedes visualisation, the construction processes depend only on connections between the mathematical properties and the technical constraints of the tools. Lastly, if visualisation is an intuitive aid that is necessary to find a proof, reasoning depends exclusively on the *corpus* of the propositions (definitions, axioms, theorems) that are available. And in some cases, visualisation may elude or be impossible. Nevertheless, these three types of cognitive processes are intimately connected and their synergy is cognitively necessary for proficiency in geometry.

There are numerous studies on the processes of how students learn to justify mathematical statements (e.g. Arzarello, 1998, Balacheff, 1988, Harel and Sowder, 1996). Ramón Marrades and Ángel Gutiérrez (2000) describe a structure of analysis of the students' justifications, which encompasses two main categories of justifications: the justifications of empirical nature and the justifications of deductive nature.

3.4 Methodological options

The need to understand the complexity involved in the mathematical argumentation process and the concern about obtaining explanations for what happens in this process, led to a qualitative methodology, both in collecting data and their analysis. The five main characteristics of a qualitative research are: the direct data source is the natural environment; the collected data are essentially descriptive; the process is more important than simply the products; the data tend to be analysed in an intuitive way; and special importance is given to the participants' point of view (Bogdan & Biklen, 2006, p.47-51). Such characteristics were present in this study. Firstly, the study object was a process and not a product, and the focus of research was to understand how this process occurs. In order to describe the process of mathematical argumentation, it became necessary to observe it in its naturally occurring environment, "*To divorce the act, word or gesture from its context is, for a qualitative researcher, to lose sight of the significance"* (Bogdan & Biklen, 2006, p.48). The researcher has a key role regarding data collection and the materials registered, and "the understanding that the researcher has in relation to them is a key instrument of analysis" (Bogdan & Biklen, 2006, p.48). As external evidence of the development of the argumentation process, the nature of the necessary data to investigate the process of mathematical argumentation took on the descriptive form.

"For a qualitative researcher who plans to develop a theory on his study object, its direction is only established after collecting data and spending time with the subjects. It is not about assembling a puzzle whose final shape we know beforehand. We are building a picture that takes shape as the parts are collected and examined.... The qualitative researcher plans to use part of the study to learn what the important questions are" (Bogdan & Biklen, 2006, p.50)

An inductive process of data analysis was used, starting from some theoretical assumptions; the abstractions are built as the collected data are grouped.

Within a methodology of qualitative research, the task of understanding and explaining the complexity involved in mathematical argumentation produced by the students, when confronted by proof problems, requires observation and detailed analysis both of the written productions of the students and the interactions established, particularly between the students. Therefore, a case study was adopted since this methodology is particularly adequate when *"how and why questions are fundamental, when the researcher has little control over events and when the focus of study is a phenomenon that happens in a real context"* (Yin, 1984, p.13).

Participants

The study dealt with the proof processes of Secondary School students. Opting for this level of teaching is justified by the following reasons:

- The present Secondary School syllabus contemplates logic-deductive reasoning. In the "General Topics", which is a set of topics that should be developed upon in a lateral way regarding the syllabus structure, the topic "Logic and Mathematical Reasoning" has the function of aiding the students in understanding demonstrations. According to the present syllabus, symbolic writing should arise naturally. Moreover, the mathematical concepts and their properties should be stimulated intuitively, until the students are able to work on them and reach precise mathematical formulations. Also proposed is the development of various structuring forms of logic reasoning, such as the theorem notion, hypothesis, thesis and demonstration;

- The existing gap between Secondary School and University teaching is conspicuous, in terms of logic-deductive reasoning.

- Regarding the researcher, her professional experience as a teacher at this level for 14 years, pointed towards the importance of reflecting on and deepening issues connected to the didactic approach of resolving proof problems.

Two levels of accomplishment were set up for this work. The first one, being in a classroom environment with a class of 20 students (15-16 years of age) in 10th grade – Secondary School, from the social economics field in the 2004/2005 school year. The second level, situated on the study of the individual cognitive trajectories of two students (both girls 16 years of age) from the mentioned class, during their 11th grade (2005/2006 school year) which, even though it focused on the same questions as those defined for the class, allowed for a more detailed level of analysis. The empirical study in the second stage of the study was developed in an extra-classroom scenario in sessions of small work groups that ran in parallel to the mathematics class. Those groups had already been set up since the beginning of 10th grade and all elements, besides the case students, participated voluntarily.

Choosing the class depended on the availability of the teacher responsible for that class. Among the teachers from the mathematics group of the Secondary School that the class belonged to – Dr Mário Sacramento Secondary School in Aveiro, only this teacher from the 10th grade Mathematics teachers showed interest and availability to participate in the study.

As for the second level of accomplishment of the study in question, it was necessary to select some of the 20 students from the class. Therefore, bearing in mind the characteristics of the study to be carried out and the dimension of the work involved, it was decided to study two individual cases. Selecting the cases – two students – was done on the basis of the following criteria: (a) Different school success during 10th grade and there were indicators from the first stage of the study and the class teacher, in terms of expecting some diversity of paths regarding argumentation processes; (b) A liking to solve problems; (c) Good informer (this aspect was very important considering the research goals, due to the fact of the analysis being based on what is “visible” in the process, and oral discourse is a means to making reasoning processes “visible”); (d) Availability and willingness to participate in the study.

4. Design and implementation of the study process

Following is the epistemic configuration and the cognitive configuration and trajectory of one of the problems proposed in the study process – problem 4.

4.1 Epistemic configuration of problem 4

PROBLEM 4: STATEMENT AND SOLUTION

Statement: The following diagram represents various hyperbolic lines (**l, m, n and k)** on the Poincaré half-plane, defined respectively by the conditions:

l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$

m: $(x - 6{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25 \wedge y > 0$

n: $(x - 3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$

k: $x = 11 \wedge y > 0$

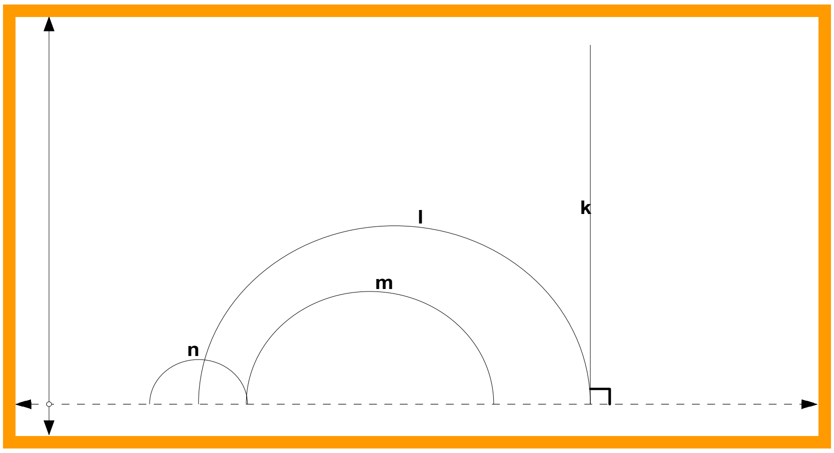


Figure 8.6. Hyperbolic lines (l, m, n and k) on the Poincaré half-plane

Indicate, if there are, two parallel lines and two non-parallel lines. Justify.

Solution: The indication is requested, along with justification, of two parallel lines and two non-parallel lines. **1)** Through a process of visualisation, and based on the definition of parallel lines, the indication of lines l and n as an example of two non-parallel lines and the indication of l and m as an example of two parallel lines seems obvious. The same cannot be said for lines l and k, or n and m, as examples of parallel lines. In fact, in these cases, the justification must also take into consideration the definition of the Poincaré half-plane. Because in relation to lines l and k, the intersection point would be (11, 0) which is not a point of the Poincaré half-plane. So lines l and k are parallel lines. **2)** Through the algebraization of the problem, the problem is transformed into one of algebraic calculus, through the resolution of two-equation systems (conditions defining the lines given in the diagram). By resorting to knowledge already acquired in primary school, the system can be possible determinate (with one solution, in which that solution is the intersection point of the two hyperbolic lines) or impossible (with no solution, in which the non-existence of a solution means that the respective hyperbolic lines do not intersect). Therefore, the indication and justification of two non-parallel lines and two parallel lines is brought forward through the resolution of systems.

Objects and primary relationships

Let us observe the mathematical objects that take part in solving the problem and their primary relationships, shown in table 8.3.

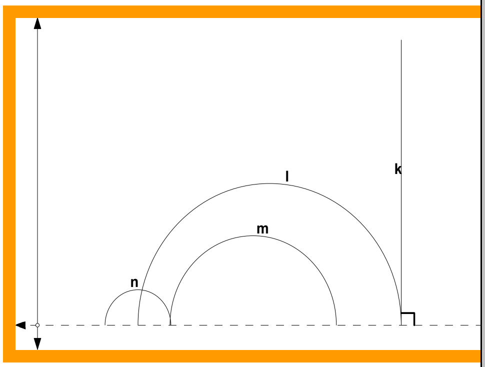
<table>
<tr>
<td rowspan="3">LANGUAGES:

- Terms and expressions: Poincaré half-plane, hyperbolic line, parallel lines.

-Diagram: The following drawing is given in the statement. Construction was made by resorting to script Hyp_line of Geometer´s Sketchpad)</td>
<td rowspan="3">C
O
M
M
U
N
I
C
.</td>
<td>SITUATION/ PROBLEM: Problem statement.</td>
</tr>
<tr>
<td>Motivation Resolution</td>
</tr>
<tr>
<td>CONCEPTS/ DEFINITIONS:

Previous: Definition of the Poincaré half-plane; Definition of parallel lines in Euclidean Geometry.

Emerging: Definition of parallel lines in an abstract geometry.</td>
</tr>
</table>



If a point of coordinates (x,y) belonged to l and k, then x=11 and $(x - 7)^2 + y^2 = 16$. But this would imply that y=0, which is not true for a point (x,y) of the Poincaré half-plane.

- Algebraic calculus (resolution of two-equation systems with two unknowns). For example, the system of equations that define lines k and l has its solution as point (x, y) = (11,0), and since y=0 it is not a point of the Poincaré half-plane.

A S S I S T

PROPERTIES/ PROPOSITIONS:

Previous: In the Cartesian Plane, the relationship of parallelism is transitive.

Emerging: In the Poincaré plane, the relationship of parallelism is transitive.

PROCEDURES: Process of visualisation.

visualisation $\longrightarrow$ reasoning

Algebraic calculus. Resolution of systems.

Fundamenting   Justification

ARGUMENTS: Justifications of the conceptual type, based on the definition of parallel lines and the Poincaré half-plane.

Note: Justification may comprise the resolution of systems, of two equations and two unknowns, in other words, the algebraization of the problem.

Table 8.5 - Objects and primary relationships of problem 4

The languages used in the problem are geometric and algebraic. The geometric comprises aid to identify parallel and non-parallel lines.

The situation put forward aimed at strengthening visualisation and valuing the role of the Poincaré half-plane definition in justifying the indication of parallel and non-parallel lines.

The algebraic language aids in clarifying likely doubts on the parallelism of some lines, such as lines l and k.

The problem situation motivates the approach of concepts/definitions, properties/propositions (e.g., definition of parallel lines in an abstract geometry, …).

The sequence of procedures to be adopted is the following visualisation $\longrightarrow$ reasoning.

But could visualisation, in this case, induce wrong reasoning?

The expected justification is of the conceptual type, based both on the definitions of the Poincaré half-plane and of parallel lines, and on the properties of the relationship of parallelism in the Cartesian Plane.

Argumentation – Objects and secondary relationships

By adopting the categorisation of Balacheff mentioned by Gutiérrez and Marrades (2000), argumentation is of a *Conceptual* nature – based on the definition of parallel lines in abstract geometry (example of an abstract geometry), formulation of properties (Properties of the relationship of parallelism) and on algebraic calculus (*symbolic* calculus). In *symbolic calculus*, there is no experimentation and justification is based on the resolution of two-equation systems with two unknowns, on the use of formalised symbolic expressions.

Following is the continuation of the problem analysis, centred on the arguments and applying the contextual attributes.

Ostensive – non-ostensive: In this case, visualisation is a means to be prioritised in presenting the argumentation, based on the definition of parallel lines and the Poincaré half-plane definition. The problem statement associates ostensive attributes (algebraic notation, graphs – drawing 8.2) to hyperbolic lines, non-ostensive objects.

Do students recognise non-ostensive objects represented in the situation?

Visualisation of drawing 8.2 may facilitate argumentation of the conceptual type, based on the definition of parallel lines and of the Poincaré half-plane.

Argumentation based on the resolution of systems (two equations with two unknowns) uses the associated ostensive objects (algebraic notation) for the hyperbolic lines in presenting the solution to the problem.

Which ostensive objects do the students make use of in presenting the solution to the problem?

Extensive - Intensive (specific / general): An extensive object is used as a specific case (a specific example, hyperbolic line l: $(x - 7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$), of a more general case (in other words, of the hyperbolic line of type l: $(x - c)^2 + y^2 = r \wedge y > 0$) which is an intensive object. According to Contreras *et al.*, this extensive/ intensive duality is used to explain a basic procedure of mathematical activity: the use of generic examples (Godino, 2007). In the problem, one can think of the definition of parallel lines for the general case of hyperbolic lines and establish the connection with the problem statement, which uses extensive objects.

Institutional – personal: The problem situation may give rise to dialectic between the institutional and the personal. If, on the one hand, visualisation is revealed to be a means to provide a solution to the problem, on the other, the more recent experiences of these students in the scope of parallelism of lines, in Euclidean geometry, was carried out according to an analytical approach and by resorting to the resolution of equation systems.

Considering that at the level of *institutional cognition* experiences with the parallelism of lines in the mathematics classroom were carried out in a context of Euclidean geometry, by resorting to the resolution of systems, what type of conflicts at *personal cognition* level can this problem originate?

Unitary – systemic: The notion of parallelism is considered to be previously known for the case of the Cartesian Plane, for Euclidean geometry, and in this case this mathematical object is used as a unitary entity. The same notion taken on in other geometry models (e.g., the Poincaré half-plane) is understood as a more complex object to be learnt.

Expression - content: The problem situation works as motivation (induces), at content level, the definition of parallel lines in an abstract geometry.

Both drawing 8.2 and the algebraic expressions in the problem statement can aid visualisation of the problem and presentation of the justification.

Are the algebraic expressions that define the hyperbolic lines connected, to the respective graph representation, without difficulty? In what way does the student establish this semiotic relationship?

According to Fischbein, E. (1999), Lobachevsky, Bolyai, Riemann, they demonstrated the existence of other geometries, which are logically possible. These geometries provoke conflicts with our natural images, and apparent self-evidence, of the real world and its spatial properties. What type of conflicts does the problem statement create with the students' previous images of parallel lines in Euclidean geometry?

4.2 Configuration and cognitive trajectory of problem 4

The process of argumentation of students X and Y for problem 4

SOLUTION (Carried out by students X, Y, C and J)

Episode 1: Reading and analysis of the problem situation

(Time: 00.00.40 – 00.04.17)

In this session, the work group comprised four elements, student X, student Y, student C and (male) student J.

The first four minutes of the session were dedicated to reading and analysing the drawing supplied in the exposition. After reading the exposition, the following dialogue took place:

X. *Teach', is the definition of parallels the same?*

Teacher: Yes, the definition is the same.

X. *Then, two lines, no matter how far they are prolonged, never intersect.*

Y. *These are not parallel* (referring to l and n).

X. *But these two are* (referring to l and m).

Y. *But they're not parallel…*

X. *How do you know?*

Y. *Oh, you can see… the distance from here to here and from here to here …* (referring to the Euclidean distance between the two semi-circumferences, representative of the hyperbolic lines in question).

X. *But the distance doesn't have to be the same.*

Y. *It does, when they are parallel, this distance from here to here is always the same as from here to here and from here to here… (pointing at lines l and m). Isn't it?*

C. *This one is definitely not parallel to any of them.*

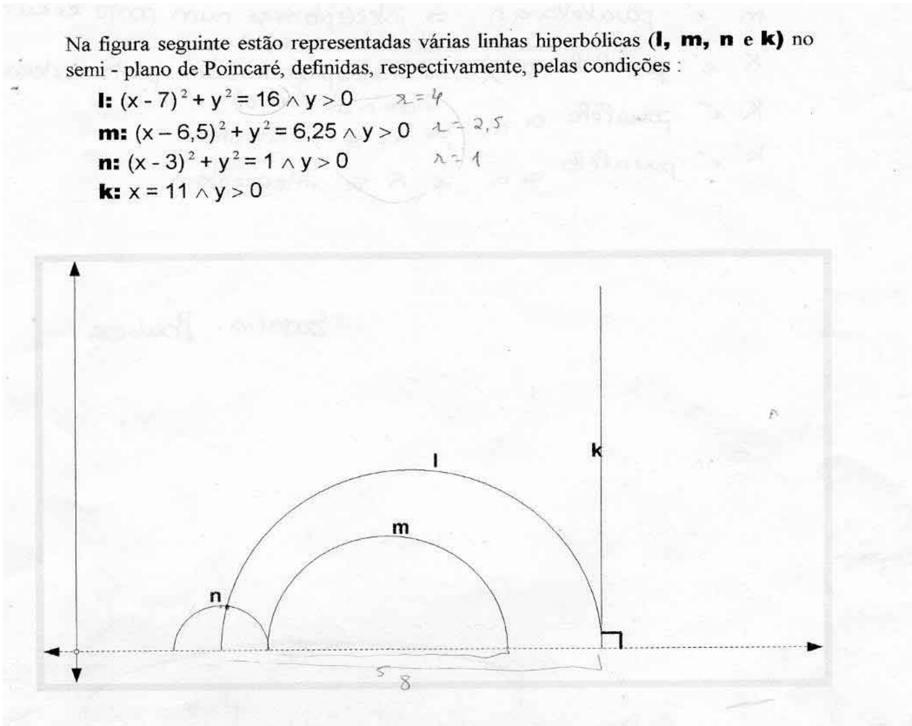
Y. *Which one?*

C. *k.*

__Y.__ And neither is n.

Students are silent while observing the drawing.

Student Y identified the value of the radius in hyperbolic lines l, m and n and noted it down next to the drawing (see top part of drawing 9.24).



Drawing 9.23 – Answer sheet of student Y (top part)

***Y.** Oh Teach', I have a question. Is it two lines or two straight lines? (00:03:05)*

Teacher: *Two lines. We had already decided that in hyperbolic geometry we speak of lines.*

***Y.** It's just that these don't intersect but they're not parallel either… (referring to l and m) the distance from here to here is not the same as from here to here.*

Teacher: Why do you say they are not parallel?

***Y.** Because the distance from here to here is not the same as from here to here. (00:03:00)*

Teacher: Are you thinking of Euclidean geometry?

Y. *Aha! Then they can be parallel …*

Teacher: They can… (the teacher left the room)

X. *Two parallels are l and m…aren't they?*

C. *l and m?*

X. *Yes, and two that aren't parallel are …they can be l and k.*

C. *Two parallels are m and l, aren't they?*

Y. *This here asks for two.*

C. *But there are more non-parallels …there is n and l, there is m and n…*

Y. *Ok…wait a minute. Ok, it can also be parallel to m and parallel to n in this geometry.*

J. *Why?*

X and Y *(simultaneously). Because they don't intersect.*

J. *We'll see check that out.*

Y. *Right…we have to check if the definition/*

C. *Then k is parallel to n.*

Y. *Not l, it's n and m. This is another kind of geometry…*

A two-minute period followed in which the students were by and large silent. (00.05.39-00.08.47). This pause was interrupted by student X, who started the following dialogue:

X. *Are you only going to give one example?*

Y. *Yes…*

X. *I think this is too simple…then we have to place…Right …because they don't intersect.*

C. *So k is parallel to m.*

Y. *m is parallel but not l …they're very close.*

<u>Episode 2: Setting up the justification</u>

(Time: 00.05.03 – 00.38.16)

After the phase of analysing the problem situation, the group concentrated on setting up a written justification. The students were silent for a certain period of time *(00.05.03-00.08.47)* before the following dialogue took place:

X. *You're only going to give one example…*

Y. *Yes…*

Approximately one minute later, one of the students stated:

C. *I think this is way too simple…*

X. *I think we should first supply the more obvious ones the let's try other interpretations… (00.09.34)* …(the coordinates of the centres) *The centres are seven, zero and six and a half, zero…and if you check, it's correct.*

Y. *What is the circumference equation?*

X. *It's x minus a squared, plus y minus b squared, equals r squared.*

Y. *What is a and what is b?*

X. *It's the centre.*

Y. *Oh teacher, I think this is too simple…*

Next, and after the teacher's request, each student explained the reasoning set up by reading the respective solution.

C. *(00:14:15) I'll read my solution – According to this geometry in the Poincaré half-plane, any line is parallel as long as there is no intersection, as such, k is parallel to m and n as m is parallel to l. As for the non-parallel ones, they are n and m, l and k since there is intersection in the extension of the lines.*

Teacher: Do you think there is extension?

C*. Yes…*

Y*. No…this is a half-plane (Poincaré half-plane)*

C. *In any case, they intersect.*

At this point, the teacher asked student X for her solution.

X. *In Poincaré geometry, the definition of parallelism being the same as in Euclidean geometry, we can verify that m and l are parallel, since these lines never intersect and l and n are non-parallel since they intersect at one point.*

Student Y then read her solution:

Y. *Two lines are said to be parallel in any geometry when their intersection is an empty set. So m is parallel to l and l is not parallel to n.*

Teacher: It seems you all consider m and l to be parallel and that m, n and l, k and l, n are not parallel. Why?

X*. Since the image ...*

Teacher: And couldn't you present a more convincing argument?

X. *We can…we just need to know how (laughed) (00:19:29)*

Teacher: In analytical geometry, when you wanted to determine the intersection of, for example, the straight lines of equation y equals two x plus four and y equals minus x plus two, how did you do it?

X. *We would do the system and we'd have the point…*

The students then adopted an analytical approach to justify the answer put forward.

Problema

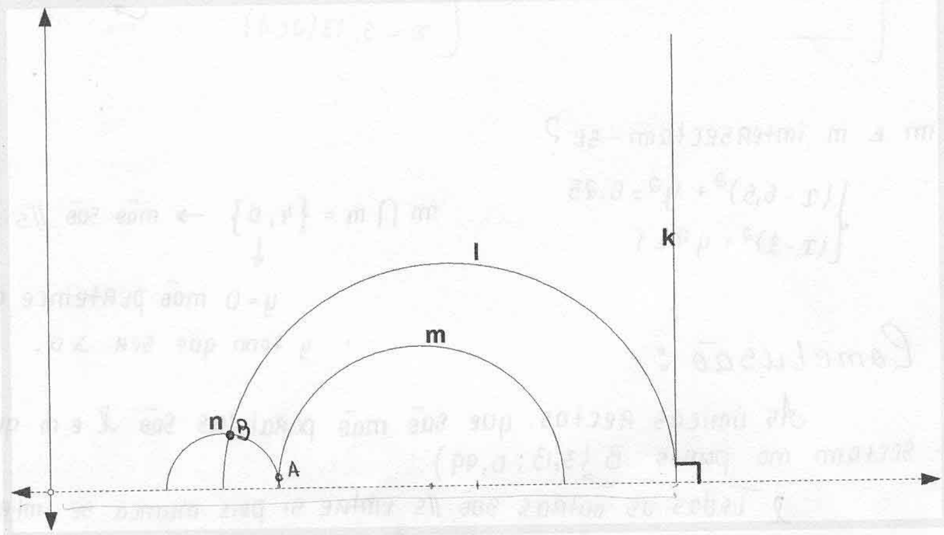
Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n** e **k**) no semi - plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições :

l: $(x-7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$ $\quad C(7,0)$

m: $(x-6{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25 \wedge y > 0$ $\quad C(6{,}5;0)$ $\qquad \bullet\ (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 \quad C(a,b)$

n: $(x-3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$ $\quad C(3,0)$

k: $x = 11 \wedge y > 0$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Paralelismo ⇒ quamdo duas limhas, por mais que se prolomguem, mumca se imtersectam.

Na geometria de Poimcaré, semdo a defimição de paralelismo a mesma da Geometria Euclidiama, podemos verificar que:

↳ m // l , pois estas limhas mumca se imtersectam ;

↳ l e m são mão parelas , pois imtersectam-se mum pomto (B).

(3,13 ; 0,99)

K e L imtersectam-se ?

$$\begin{cases} x = 11 \\ (x-7)^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 4^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \end{cases} \qquad I\ (11,0)$$

Não há intersecção
y tem que ser mai
que zero

Drawing 9.24 – Solution of student X to problem 4 (front of the answer sheet)

When student X determined the point of intersection of lines l and k, the following dialogue took place:

X. *Teach', this gives us a very weird point…I must have this wrong!*

Teacher: And why is it weird?

X. *Well, because it gives eleven, zero …*

Teacher: And why is it weird?

X. *Because the eleven should be farther up (student laughed).*

Y. *It's not the eleven, it's the x.*

X. *Oh, of course it is! Ok, I was seeing this backwards.*

Teacher: So, is it acceptable now?

Y. *Yes, it is …*

X. *No.*

Y. *Yes …eleven is.*

X. *Alright…but y has to be greater than zero; it can't be zero.*

Y. *But they intersect in one point…*

X. *That's right…but it's not valid because y has to be greater than zero.*

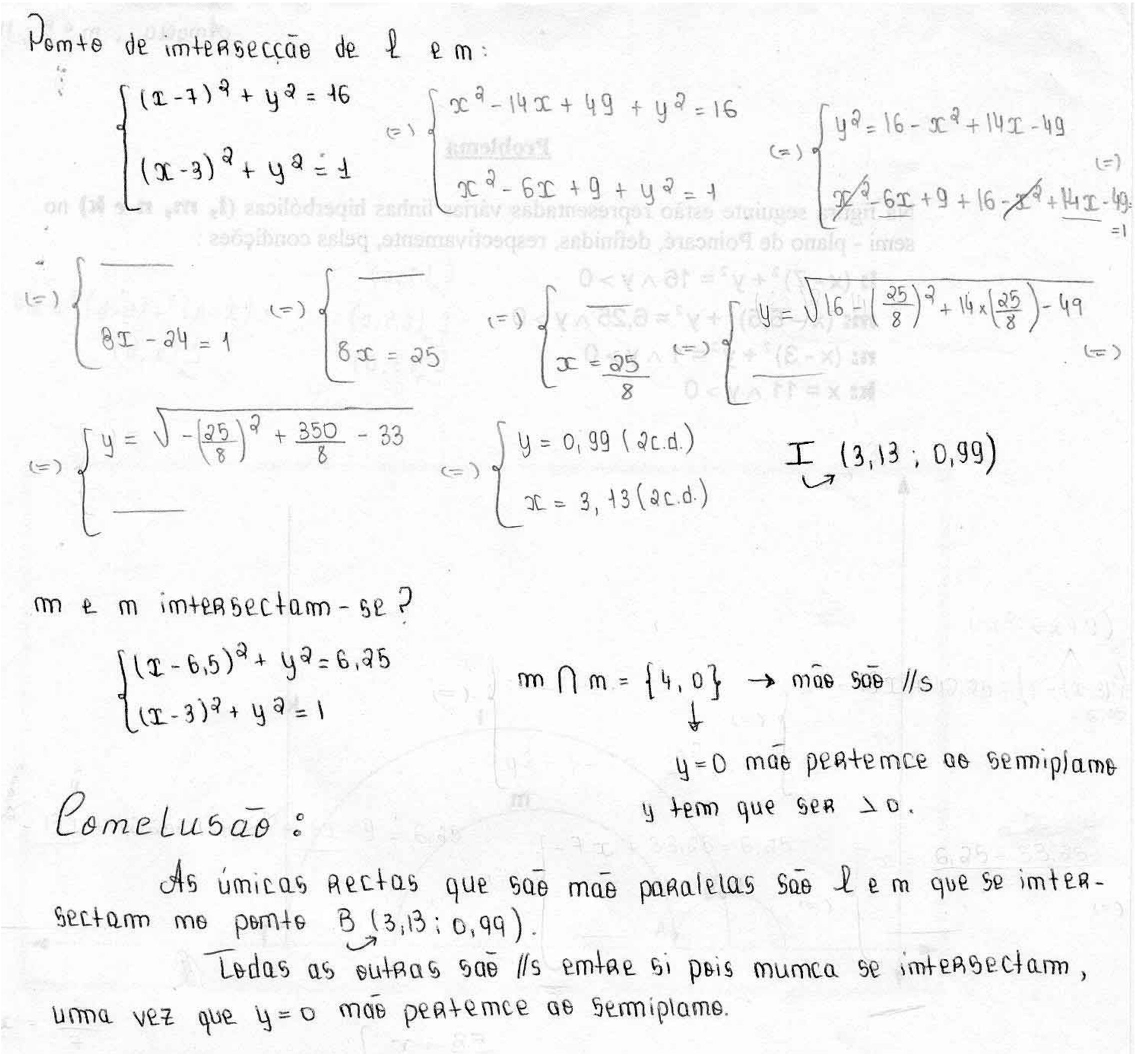
Teacher: So what do you conclude?

Students X and Y answered simultaneously.

Y. *So the only parallel ones here are l with m.*

C. *And m and n?*

Y. *(Lines) m and n are also non-parallels because they intersect in point two, zero.*



Ponto de intersecção de l e m:

$$\begin{cases}(x-7)^2+y^2=16\\(x-3)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-14x+49+y^2=16\\x^2-6x+9+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=16-x^2+14x-49\\\cancel{x^2}-6x+9+16-\cancel{x^2}+14x-49=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\8x-24=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\8x=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\\x=\frac{25}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{16-\left(\frac{25}{8}\right)^2+14\times\left(\frac{25}{8}\right)-49}\\\text{———}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{-\left(\frac{25}{8}\right)^2+\frac{350}{8}-33}\\\text{———}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0,99\ (2\text{c.d.})\\x=3,13\ (2\text{c.d.})\end{cases}$$

$I\ (3,13\ ;\ 0,99)$

m e n intersectam-se?

$$\begin{cases}(x-6,5)^2+y^2=6,25\\(x-3)^2+y^2=1\end{cases}$$

$m\cap n=\{4,0\}\rightarrow$ não são //s

$y=0$ não pertence ao semiplano

y tem que ser >0.

Conclusão:

As únicas rectas que são não paralelas são l e m que se intersectam no ponto $B\ (3,13\ ;\ 0,99)$.

Todas as outras são //s entre si pois nunca se intersectam, uma vez que $y=0$ não pertence ao semiplano.

Drawing 9.25 – Solution of student X to problem 4 (reverse of the answer sheet)

Student Y resorted to the resolution of systems to verify the relationship of parallelism between lines k - l and l-n.

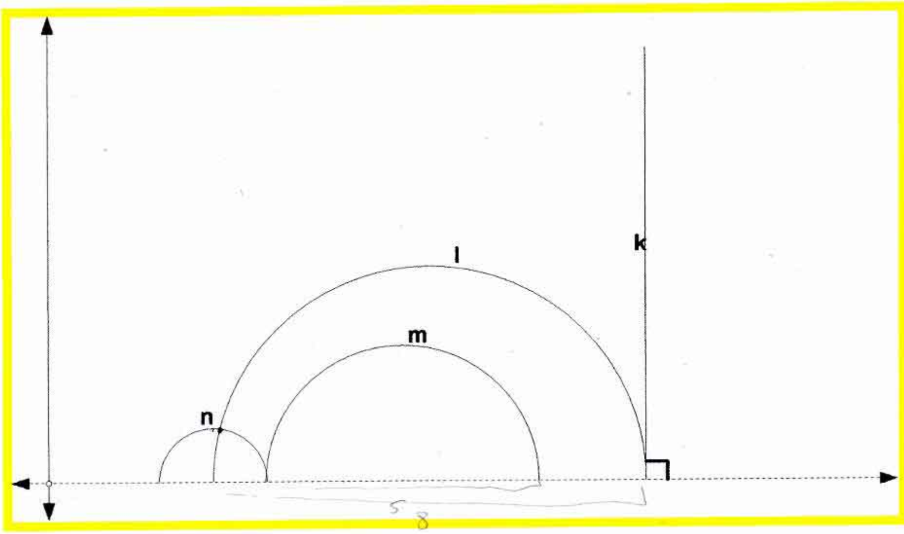
Na figura seguinte estão representadas várias linhas hiperbólicas (**l, m, n** e **k**) no semi - plano de Poincaré, definidas, respectivamente, pelas condições :

l: $(x-7)^2 + y^2 = 16 \wedge y > 0$ $\quad x = 4$

m: $(x-6{,}5)^2 + y^2 = 6{,}25 \wedge y > 0$ $\quad x = 2{,}5$

n: $(x-3)^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0$ $\quad x = 1$

k: $x = 11 \wedge y > 0$



Indica, caso existam, duas linhas paralelas e duas não paralelas. Justifica.

Duas linhas dizem-se paralelas (em qualquer geometria) quando a sua intercepção é o conjunto vazio.

Então $m // l$ → falso porque $D =]0, +\infty[$

e

k não é paralela a l??

$$\begin{cases} x = 11 \\ (x-7)^2 + y^2 = 16 \end{cases} = \begin{cases} \text{———} \\ 16 + y^2 = 16 \end{cases} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 0 \end{cases}$$

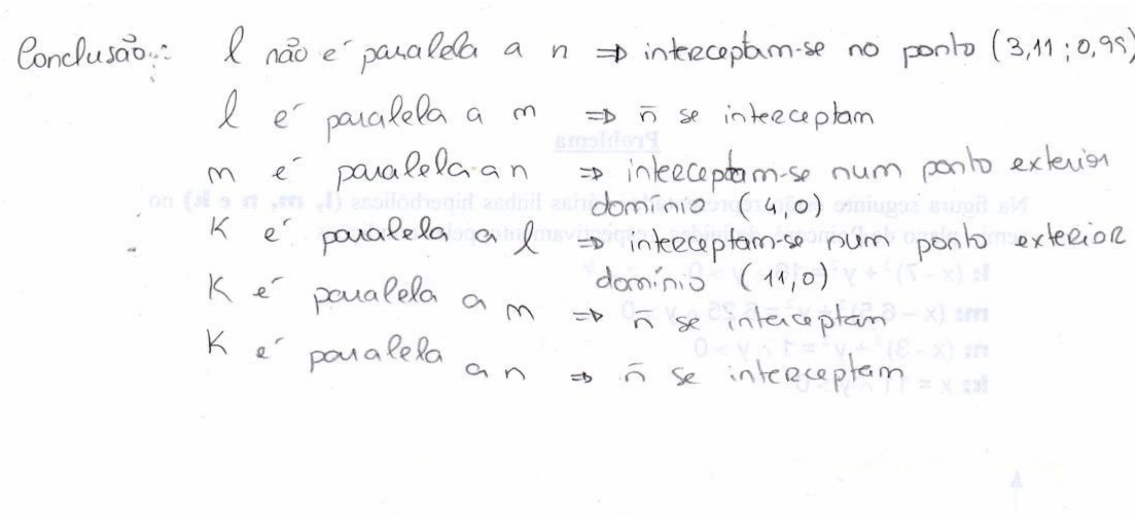
$l // n$?? →

$$\begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = 16 \\ (x-3)^2 + y^2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 14x + 49 + y^2 = 16 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \sqrt{-x^2 + 14x - 33} \\ x^2 - 6x + 9 - x^2 + 14x - 33 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 8x = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{-\left(\frac{25}{8}\right)^2 + 13{,}25} \\ x = \frac{25}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}99 \\ x = 3{,}13 \end{cases}$$

Drawing 9.27 – Solution of student Y to problem 4 (front of the answer sheet)

After resolving two compound systems of two equations and two unknowns, respectively, by the algebraic expressions of lines k - l and l –n, student Y recorded the conclusion on the parallelism of lines l-n, l-m, m-n, k-l, k-m and k-n.


Conclusão: l não é paralela a n ⇒ interceptam-se no ponto (3,11 ; 0,95)
l é paralela a m ⇒ ñ se interceptam
m é paralela a n ⇒ interceptam-se num ponto exterior domínio (4,0)
K é paralela a l ⇒ interceptam-se num ponto exterior domínio (11,0)
K é paralela a m ⇒ ñ se interceptam
K é paralela a n ⇒ ñ se interceptam

Drawing 9.27 – Solution of student Y to problem 4 (reverse of answer sheet)

<u>Episode 3: Verification</u>

(Time: 00.38.17-00.43.06)

Student Y finalises the solution by presenting the conclusion (illustrated in drawing 9.28). At this moment, the following dialogue took place:

Y. *That definition of parallelism, when we say no matter how far they are prolonged, is wrong for circumferences because take a look at these/(00:38:17)*

X. *I see what you mean…*

Y. *We don't have to say no matter how far they are prolonged. […]*

C. *You cannot prolong… But then how do they not intersect? This here on the graph is misleading.*

J. *According to the graph, only l and n intersect …*

X. *(Lines) l and n are the only ones that do not intersect.*

Note that in the conclusion, student X uses the designation of straight lines and not lines, she follows the definition of parallelism associated to the existence of intersection and no longer associates parallelism to the initial expression "[…*]no matter how far they are prolonged, they never meet.[…]*"

Objects and primary relationships

Let us analyse the mathematical objects and their primary relationships, which take part in the solution to problem situation 4 set up by student X and by student Y.

In the solution put forward, **student X** chose algebraic language to express the solution to the problem. She correctly used the symbology connected to the concept of parallel straight lines and shows a command of the Poincaré half-plane terminology. She correctly resorts to and resolves systems of two equations with two unknowns.

The problem situation originated the approach of the parallel lines concept. The student presented a definition of parallel lines, in Euclidean geometry, associated to the idea of intersection in "infinity". The student extends this definition to the *Poincaré* half-plane.

The problem situation could have given rise to the use of the transitive property of parallelism of straight lines (probably taught in previous school years). Nevertheless, this property was not used in the solution put forward.

As for the procedures adopted, student X's choice for the algebraic one is evident. In spite of this student visualising point B, of intersection of lines m and n, she resolves a system and indicates coordinates of that point, with figures rounded off to the hundredths. The algebraization of the problem helped clarify likely doubts on the parallelism of some lines. It seems that the visualisation of the drawing did not induce wrong reasoning.

The justification put forward is based on the previous procedures and had a deductive nature, where the specific examples were used to support the organisation of the justifications – *thought-out experimentation.*

Student Y used graph and algebra languages, as aids in identifying parallel and non-parallel lines. The drawing supplied in the exposition comprises an aid in identifying parallel and non-parallel lines.

The situation put forward aimed at strengthening visualisation and valuing the role of the Poincaré half-plane definition in justifying the indication of parallel and non-parallel lines.

Algebraic language aids in clarifying likely doubts on the parallelism of some lines, such as lines l and k.

The problem also gave rise to the approach of concepts/definitions, properties/propositions (e.g., definition of parallel lines in an abstract geometry, …).

The justification was of the conceptual type, based on the definitions of the Poincaré half-plane and of parallel lines.

The sequence of procedures adopted by the students was ***visualisation – reasoning***.

But could visualisation, in this case, have induced wrong reasoning?

Visualisation, in the ascending *phase* of problem resolution, gave rise to the intuition of some parallel lines (e.g., n and m) which in reality were not. In fact, through visualisation, the relationships of parallelism between the lines given in the problem statement was not intuitive, it was not obvious and they were accepted based on carrying out a more formal verification (resorting to the resolution of systems, resorting to the Poincaré half-plane definition…)

Argumentation – Objects and secondary relationships

Following is the continuation of the problem solution analysis, centred on the arguments and applying the contextual attributes to its analysis.

Ostensive – non-ostensive: In the solution put forward by student X, we see that she used points A and B to mark, respectively, the intersection of lines l,n and m,n. Nevertheless, it seems to us that the student felt the need to determine the coordinates of the points, even of point B, to recognise the non-ostensive (non-parallel lines and parallel lines) represented in the situation.

Therefore, the ostensive objects brought forward in presenting the solution to the problem were the representation of points A and B in the drawing supplied in the exposition and the systems of the respective conditions which define the hyperbolic lines in question.

Student Y, in the argumentation presented, used: the "//" notation (ostensive) to refer to the relationship of parallelism (non-ostensive) between lines; the algebraic language (in the resolution of two-equation systems with two unknowns) and uses the symbol $\Rightarrow$ (*if…then…)* when joining sentences, such as "*l is not parallel to n* $\Rightarrow$ *intersect in point (3,11;0,99)", "l is parallel to m* $\Rightarrow$ *do not intersect"*.

<u>Extensive - Intensive</u>: Student X used the condition that defines a circumference of a given centre, point C with coordinates (a,b), and radius r as support in identifying the centres of the semi-circumferences i.e., of the hyperbolic lines represented in the drawings. The definition given in the beginning "*Parallelism – when two lines, no matter how far thy are prolonged, never intersect.*" is adopted by the student for hyperbolic geometry, which she designates as *Poincaré geometry.* However, in the solution of the problem, she only refers to the existence or not of intersection.

In the argumentation put forward, student Y started by writing: *Two lines are said to be parallel (in any geometry) when their intersection is an empty set.* In other words, she thought of the definition of parallel lines and only then did she focus on the extensive objects represented in the problem statement.

<u>Institutional – personal:</u> The problem situation may give rise to dialectic between the institutional and the personal. If, on the one hand, visualisation is revealed to be a means to provide a solution to the problem, on the other, the more recent experiences of these students in the scope of parallelism of lines, in Euclidean geometry, was carried out according to an analytical approach and by resorting to the resolution of equation systems.

Therefore, at *personal cognition* level, the problem situation generated the following conflicts in terms of defining parallel lines:

Student Y used the ostensive of parallel lines of Euclidean geometry, in the context of hyperbolic geometry, which is what seems to be indicated by the dialogue that took place in the episode of reading and analysis between students X and Y;

[…]

Y. *But they're not parallel…*

X. *How do you know?*

Y. *Oh, you can see… the distance from here to here and from here to here …* (referring to the Euclidean distance between the two semi-circumferences, representative of the hyperbolic lines in question).

X. *But the distance doesn't have to be the same.*

Y. *It does, when they are parallel, this distance from here to here is always the same as from here to here and from here to here… (pointing at lines l and m). Isn't it?*

[…]

Student X presented a definition of parallel lines right in the beginning of the written solution (drawing …) where she refers "…*no matter how far they are prolonged, they never intersect"* and confronted by the maladjustment of this definition – by student Y – she does not present any arguments.

Unitary – systemic: During the process of resolution of the problem, the students follow a trajectory that goes from the analysis of the situation put forward up to a summary of the activity developed. The analysis carried out by both students displays different aspects. Student X feels the need to *break down* the exposition, recording the coordinates of the centres of the semi-circumferences (hyperbolic lines) and the points of intersection of lines l, n and m,n. Student Y, upon *breaking down* the exposition, records the value of the radii of the mentioned semi-circumferences and focuses on the distance between them.

In relation to the summary presented by the two students, it is presented in the conclusion of the solution carried out. In student X's case, she refers to the only "straight lines" that are not parallel and then states: "*All the others are // between themselves because they never intersect since y=0 does not belong to the half-plane".* In student Y's case, the conclusion includes reference to the relationship of parallelism between the lines two by two.

Expression - content: The problem situation works as motivation (induces), at content level, the definition of parallel lines in a context of hyperbolic geometry.

The students revealed a command of algebraic calculus, namely in the resolution of two-equation systems with two unknowns. In terms of commanding the language, student X referred to "straight lines" when in fact they were not straight lines. It seems that in terms of language this student does not yet command some issues of hyperbolic geometry language.

By adopting the categorisation of Balacheff mentioned by Gutiérrez and Marrades (2000), the justification they present is of a *Conceptual* nature – based on the definition of parallel lines in abstract geometry (example of an abstract geometry), formulation of properties (Properties of the relationship of parallelism) and on algebraic calculus (*symbolic* calculus). In *symbolic calculus*, there is no experimentation and justification is based on the resolution of two-equation systems with two unknowns, on the use of formalised symbolic expressions.

5. Summary and main contributions

It seems important to mention that the problems proposed allowed for an approach of: Concept of parallelism; Examples of incident (plane) geometry; Representation of straight lines (in different models of plane geometry); Method of proof by contradiction (*reductio ad absurdum*), promoting the change from a more spontaneous reasoning to a more structured thought.

The students involved in this study were, in a progressive way, aware of the importance of the descending phase in setting up justifications.

The evolution from an ascending phase, characterised by empirical activity, to a descending phase, in which the students produce deductive justification, was obvious.

Scenarios in environments of dynamic geometry give rise to the ostensive of non-ostensive mathematical objects (e.g., problem 1).

The problems proposed created conflicts between an intuitive interpretation and formal argumentation (relationship between intuitive and formal knowledge). The resolution of these conflicts allowed for an evolution of knowledge and argumentative skills (e.g., the role attributed to definitions).

In the argumentative practices of these students, we witnessed a progressive process, from the presentation of justifications characterised by the use of one or various examples (*justification of empirical nature – simple empirics),* involving both visual perception and/or mathematical relationships found in those examples, and also justifications based on a representative example of a class (*justification of empirical nature – general example)* up to the justifications based on general aspects of the problem and logical deductions (*justification of deductive nature – thought-out experimentation of the structural type)*. Note that in the last type of justifications, the role of examples is to aid the steps of the deduction.

The study suggests that a diversified geometric approach, through various models of plane geometry, promoted in the case students, a different understanding of the processes of *materialisation/idealisation, specification/generalisation, personalisation/institutionalisation, analysis/summary and representation/meaning.* It would be interesting to research the way school success of a student, from primary school, influences this type of understanding and assess its degree of centrality in the didactic preparation of problem situations and in mathematical activity.

This study might have contributed in making more prominent the importance of the approach of other models of plane geometry, other than the Euclidean one, in the development of deductive reasoning. One of the implications of this result is the fact that didactic situations to be proposed in the study of geometry at Secondary School level should cover proof problems in various models of Plane Geometry to put forward to students. The results of the study demonstrate the complexity of analysis and assessment of mathematical argumentation. Mathematical argumentation can be better understood and assessed if we are aware that the arguments are interconnected with the primary and secondary objects defined in the onto-semiotic focus of mathematical cognition. It is the identification of the connections between those various objects that characterise the argumentation processes.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (2001). Revisiting the goals and the nature of mathematics for all in the context of a national curriculum. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25-40). Utrecht, The Netherlands.

Balacheff, N. (2002/2004) The researcher epistemology: a deadlock from educational research on proof. Fou Lai Lin (ed.) 2002 *International Conference on Mathematics - "Understanding proving and proving to understand"*. Taipei: NSC and NTNU (pp. 23-44). Reprinted in *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, no 109, August 2004, http://www-leibniz.imag.fr/NEWLEIBNIZ/LesCahiers/Cahier109/ResumCahier109.html.

Blanché, R. (1978). *A axiomática,* Lisboa : Editora Presença.

Bogdan, R. e Biklen, S. K. (1998). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breda, A. M. (1995). Modelos de geometrías planas. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática,* 32 , 241-259.

Brown, A. e Dowling, P. (1998). *Doing Research/Reading Research: a mode of interrogation for education*. London: Falmer Press.

deVilliers, M. (1998). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369-393). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Dieudonné, J. (1997). *A formação da matemática contemporânea.* Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics,* 38(1-3), 85-109.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, in C. Mammana and V.Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21stCentury,* Kluwer, Dordrecht.

Dwyer, M. C. e Pfiefer, R. E. (1999). Exploring hyperbolic geometry with the geometer´s sketchpad. *The mathematics teacher,* 92(7), 632-637.

Eisenhardt, M. K. (2002). Building theories from case study research. In A. Huberman & M. Miles (Eds.), *The qualitative researcher's companion* (pp. 5-36). Thousand Oaks: Sage Publications.

Epp, S. (1994). The role of proof in problem solving. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 257-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 38, 11-50.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: a demonstração em geometria.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: APM.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA,*7(2), 127-170.

Godino, J. D. e Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14(3) : 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.*Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22(2/39) :237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. e Font, V. (2006). Un enfoque ontológico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible na internet:* http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#sintesis

Godino, J. D., Contreras, A. e Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1): 39-88.

Godino, J. D., Recio A. M. (1997). Meanings of proofs in mathematics education. In Pekhonen, Erkki (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol.2 p.313-320). Lathi, Finland.

Greenberg, M.J. (1972). *Euclidean and non Euclidean Geometries – Development and History.* University of California, Santa Cruz: W.H. Freeman and Company.

Hanna, G. (2000): Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1&2), Keith Jones, Ángel Gutiérrez Maria Alessandra Mariotti (eds.) 5-23.

Hanna, G. e Bardeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematics knowledge. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40*:345-353.

Harel, G. e Sowder, L.(1998). Types of student´s justifications. *The Mathematics Teacher,* 91(8), 670- 675.

Hoyles, C. e Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121-128). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Huberman, A. e M., Miles, M. B. (1994). Data management and analysis methods. In N. Denzin e Y. Lincoln. (Eds.), *Handbook of qualitative research (pp.428-444).* Thousand Oaks: Sage Publications.

Mariotti, M. A.(1998).Intuition and proof: reflecting on Fischbein, E.´s paper. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Novembre/ Décembre.

Mariotti, M. A.(2001). Influence of technologies advances on student's mathematical-learning. In English L, Bartolini M.G, Jones G., Lesh R.,Tirosh D (eds).

Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erbium associates.

Marrades, R. e Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Millmann, R. S. e Parker, G. D.(1991). *Geometry- A Metric Approach with Models,* Springer-Verlag.

Ministério da Educação (1999). *Programa de matemática do ensino secundário.* Lisboa: ME- DES.

National Council of Teachers of Matematics (2000). *Principles ans standards for school mathematics.*Reston: NCTM.

Osta, I. (1998). Geometry from a cognitive point of view, in C. Mammana and V.Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* Kluwer, Dordrecht.

Prevost, F. J. (1998). The conic sections in Taxicab geometry: some investigations for high school students. *The mathematics teacher,* 91(4), 304-307.

Krantz, S. G. (1994). The immortality of proof. *Notices of the american mathematical society,* 41(1), 10-13.

Recio, A. M., Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 83 – 99.

Reid, D. (2005). *The meaning of proof in mathematics education* Paper presented to Working Group 4: Argumentation and Proof, at the Fourth annual conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Spain. 17 - 21 February 2005. Proceedings to appear. Currently available online at: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/Reid.pdf

Riding, R., Rayner, S. Towards (1997). A categorization of cognitive styles and learning styles. *Educational Psychology* ; 17(1): 5-27.

Sáenz-Ludlow, A. e Presmeg, N. (2006). Semiotic perspectives on leraning mathematics and communicating mathematically.*Educational Studies in Mathematics,* 61(1-2), 1-10.

Schalkwijk, L.V., Bergen, T. e Van Rooij, A (2000). Learning to probe by investigations: a promising approach in dutch secondary education. *Educational Studies in Mathematics,* 43, 293-311.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematics problem solving.*New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992).Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouwes (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Mac Millan.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using tecnology. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 12, Nº 3, 210-230.

Tirosh, D. (1999). Forms of mathematical knowledge: learning and teaching with understanding. *Educational Studies in Mathematics, 38*, 1- 9.

Valleman, D. J. (1998). *How to prove it: a structured approach.* Cambridge University Press.

Waring, S. (2001). Proof is back! *Mathematics in school, January,* 1- 8. Currently available online at: http://www.m-a.org.uk

Wittgenstein, L.(1998). Linguagem e Mundo. São Paulo: Annablume.

Yin, R. K. (1989). *Case study research: Design and methods.*Newbury Park: Sage Publications.

ANEXOS

ANEXO 1. TESTE DIAGNÓSTICO E CRITÉRIOS DE CORRECÇÃO

Este anexo contém o teste diagnóstico realizado, em Novembro de 2004, pelos alunos da turma participante na experiência, bem como os critérios de correcção. Os critérios de correcção do teste foram elaborados a partir das respostas dos alunos e tendo por base esses mesmos critérios procedeu-se à elaboração dos gráficos que serviram de apoio à análise dos resultados.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

ALUNOS DO 10º ANO

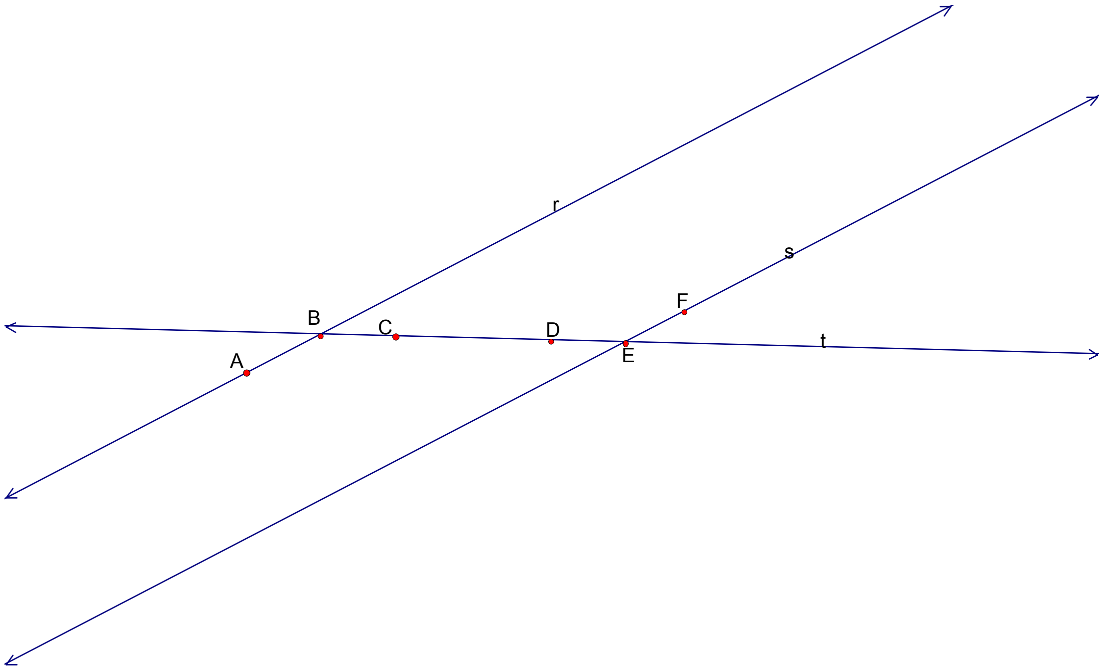
ESCOLA SECUNDÁRIA DOUTOR MÁRIO SACRAMENTO

MATEMÁTICA

Novembro 2004

Questões sobre Geometria no Plano

1. Observa a figura seguinte,



1.1 Considera que a medida da amplitude do ângulo ABC é igual à medida da amplitude do ângulo DEF. O que podes dizer acerca das rectas r e s? Justifica.

1.2 Considera que a medida da amplitude do ângulo ABC é inferior à medida da amplitude do ângulo DEF. O que podes dizer acerca das rectas r e s? Justifica.

2. Responde às questões seguintes com **sempre, algumas vezes** ou **nunca**.

Justifica as respostas.

2.1 Duas rectas que nunca se intersectam **são sempre, algumas vezes** ou **nunca** rectas paralelas?

2.2 As rectas suporte de dois lados de um rectângulo, **são sempre, algumas vezes** ou **nunca** rectas paralelas?

2.3 As rectas suporte de dois lados de um triângulo, **são sempre, algumas vezes** ou **nunca** rectas paralelas?

3. Diz se é **verdadeira** ou **falsa** a afirmação:

Se duas rectas são secantes então elas são perpendiculares

Justifica.

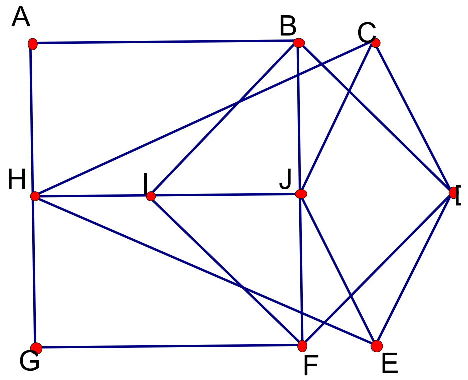
4. Os pontos **ABJH** são os vértices de um rectângulo.

Observa a figura e indica os pontos que parecem ser os vértices de:

a) Um quadrado

b) Um losango

c) Um trapézio



5. Sendo [ABCD] um paralelogramo com [AB] $\cong$[BC] e $\angle$ABC um ângulo recto.

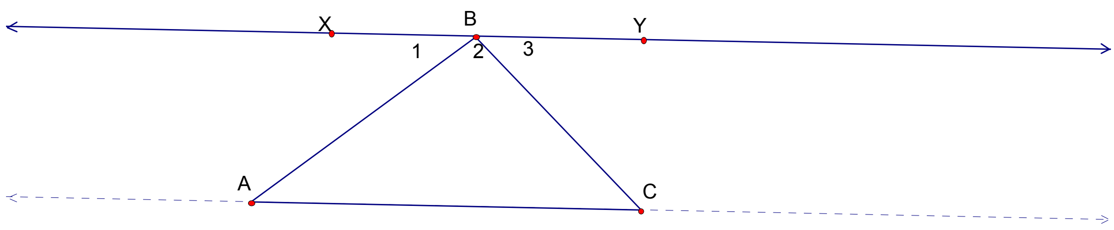
Classifica o quadrilátero [ABCD] e justifica.

6. A afirmação seguinte é **verdadeira** ou é **falsa**? Justifica.

Se as diagonais de um quadrilátero [EFGH] são perpendiculares então ele é um losango.

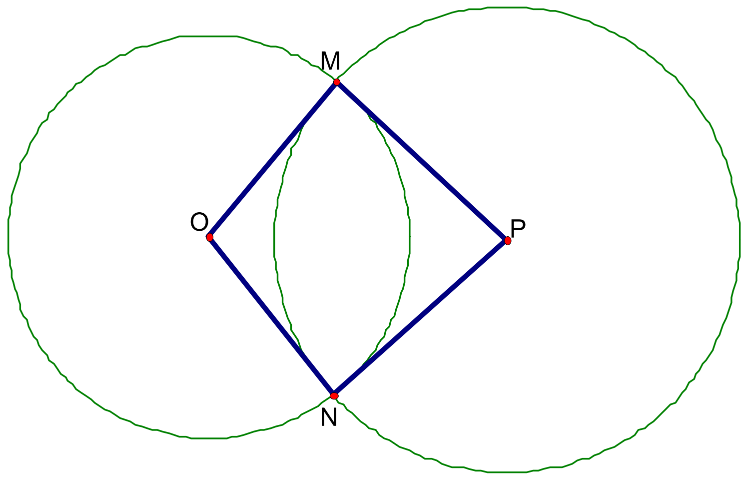
7. A recta XY é paralela à recta AC.

Prova que o ângulo XBY é um ângulo raso.



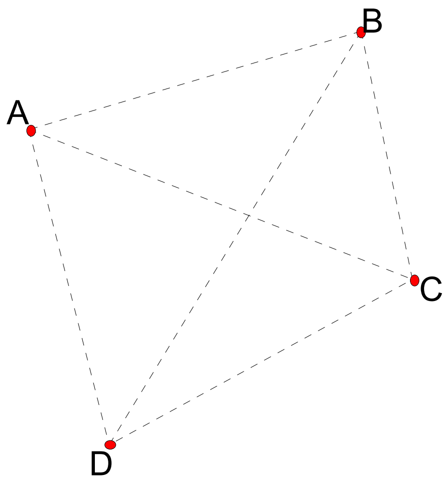
8. Na figura os dois círculos de centro em O e em P Intersectam-se nos pontos M e N.

Prova que, Δ[OMP] ≅ Δ[ONP].



9. Imagina uma Geometria em que a recta, que como sabes, é formada por um conjunto de pontos, é finita e tem apenas alguns pontos. Nesta "nova" Geometria **A,B, C e**

D são os únicos pontos, **{A,B}, {A,C},{A,D}, {B,C},{B,D}, {C,D}são as únicas rectas**. A recta {A,B} intersecta {A,C} porque têm um ponto comum. As rectas {A,B} e { C,D} são paralelas porque não têm pontos comuns.



Diz se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

9.1 {A,C} intersecta {B,D}.

9.2 {A,C} é paralela a {B,D}.

Questões sobre Geometria no Espaço

10. Dois planos no espaço podem ou não intersectar-se? Justifica.

11. Se dois planos tiverem um ponto em comum, o que terão mais em comum? Justifica.

12. Haverá uma família de planos concorrentes numa mesma recta? Justifica.

Nome: ---

Muito obrigada

Critérios de correcção

(Teste Diagnóstico)

O teste diagnóstico é constituído por vários tipos de itens, itens de resposta curta e itens de resposta mais extensa. Todas as respostas são classificadas através de códigos que correspondem aos diversos desempenhos dos alunos.

As categorias V, F correspondem, respectivamente, a respostas correctas e a respostas completamente erradas ou irrelevantes.

Categorização com dois símbolos

A criação destas categorias de análise tem por objectivo a caracterização das produções dos alunos, nas várias questões do teste diagnóstico e, assim, ser útil na compreensão do pensamento do aluno e na determinação do seu grau de domínio de certas capacidades, nomeadamente a capacidade de comunicação matemática.

O primeiro símbolo, V ou F, indica se o aluno responde, ou não, de forma correcta. O número visa fornecer informação sobre o tipo de abordagem utilizado pelo aluno, sobre os modelos de erro ou as concepções erradas que caracterizam o seu trabalho. O símbolo *, acrescentado à categoria (V ou F), indica que o aluno recorreu a um diagrama.

O código X é atribuído sempre que o aluno não desenvolva qualquer tipo de trabalho para responder à questão.

Item 1,2,3,5,6,9,10,11,12

Categoria V

- V1 – Respostas correctas, com justificação revelando o domínio dos conceitos envolvidos.
- V2 – Resposta correcta, com justificação baseada no recurso ao contra-exemplo.
- V3 – Resposta correcta, com justificação baseada na negação da tese.
- V4 - Resposta correcta, com justificação incompleta, revelando algum domínio conceptual.
- V5 – Resposta correcta, com justificação errada revelando concepções erróneas dos conceitos envolvidos.
- V6 – Resposta correcta com uma tentativa de justificação copiando partes do enunciado.
- V7 – Resposta correcta com uma justificação incompreensível e/ou do tipo *“a porque a”*.
- V8 – Resposta correcta sem justificação.

Categoria F

- F1 - Resposta errada, com uma justificação revelando algum domínio dos conceitos envolvidos (e/ou com uma justificação do tipo *"se a então b, porque se b logo a").*
- F2 - Resposta errada, com justificação onde é visível uma confusão de conceitos.
- F3 – Resposta errada com justificação, copiando partes do enunciado.
- F4 – Resposta errada com justificação incompreensível e/ou com apresentação de um diagrama.
- F5 - Resposta errada sem justificação.

Item 7,8

Categoria V

- V1 – Argumentação correcta e completa.
- V2 – Argumentação correcta mas incompleta.
- V3 – Identifica alguns elementos da hipótese.

Categoria F

- F1 - Argumentação errada, revelando algum domínio dos conceitos envolvidos e/ou afirmação da tese, justificando-a (com recurso a definições e/ou com base no diagrama).
- F2 - Argumentação errada, onde é visível uma confusão de conceitos.
- F3 – Argumentação incompreensível.

ANEXO 2. QUESTIONÁRIO - “PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM”

Este anexo contém o questionário sob o título: “PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM”. Foi realizado em Novembro de 2004, durante uma aula.

QUESTIONÁRIO: “PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM”

Introdução

Este questionário tem por objectivo identificar a tua visão sobre a disciplina de Matemática e a sua aprendizagem e não contém questões de resposta “certa” ou “errada”. As respostas que deres não vão interferir na tua classificação.

Instruções

Nas questões I e II, coloca o símbolo **X** no quadrado ☐ que melhor representa o que pensas sobre as afirmações apresentadas e de acordo com a seguinte escala:

Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente

Por favor, responde cuidadosamente a todas as questões.

I. O que pensas relativamente a cada uma das seguintes afirmações:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente
Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta.	☐	☐	☐	☐	☐
Os problemas de Matemática são sempre resolvidos em menos de 10 minutos.	☐	☐	☐	☐	☐

Há apenas uma maneira correcta de resolver um problema de Matemática.	☐	☐	☐	☐	☐
Encontrar uma resposta correcta de um problema é mais importante do que saber porque é que a resposta é correcta.	☐	☐	☐	☐	☐
Aprender Matemática é, fundamentalmente, memorizar.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática é uma actividade solitária.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real.	☐	☐	☐	☐	☐

II. A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA É PARA TI:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente
"Uma disciplina difícil."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ajuda a compreender e interpretar o mundo que nos rodeia."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ensina a pensar."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ajuda a preparar para a minha profissão futura."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina onde descubro resultados novos"	☐	☐	☐	☐	☐

"Uma disciplina que me ajuda para a minha formação global como cidadão na sociedade de hoje"	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina útil para outras disciplinas que tenho"	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me obriga a estudar muito"	☐	☐	☐	☐	☐

III. Diz por palavras tuas o que entendes por:

a) Exercício

b) Problema

c) Teorema

d) Uma prova

e) Uma conjectura

IV Pensa nas tuas aulas de Matemática, da escolaridade básica (7º, 8º e 9º anos), e enuncia três aspectos de que mais gostaste e três aspectos de que menos gostaste.

Aspectos de que mais gostei:

1º -

2º -

3º -

Aspectos de que menos gostei

1º -

2º -

3º -

Nome:

Muito Obrigada

Teresa Neto

Novembro de 2004

ANEXO 3. QUESTIONÁRIO - "PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM"

Este anexo contém o questionário sob o título: "PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM". Foi realizado em Novembro de 2005, durante uma aula.

QUESTIONÁRIO: "PERCEPÇÕES DOS ALUNOS SOBRE A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E A SUA APRENDIZAGEM"

Introdução

Este questionário tem por objectivo identificar a tua visão sobre a disciplina de Matemática e a sua aprendizagem e não contém questões de resposta "certa" ou "errada". As respostas que deres não vão interferir na tua classificação.

Instruções

Nas questões I e II, coloca o símbolo **X** no quadrado ☐ que melhor representa o que pensas sobre as afirmações apresentadas e de acordo com a seguinte escala:

Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente

Por favor, responde cuidadosamente a todas as questões.

I. O que pensas relativamente a cada uma das seguintes afirmações:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente
Os problemas de Matemática têm uma e uma só resposta correcta.	☐	☐	☐	☐	☐
Os problemas de Matemática são sempre resolvidos em menos de 10 minutos.	☐	☐	☐	☐	☐
Há apenas uma maneira correcta de resolver um	☐	☐	☐	☐	☐

problema de Matemática.					
Encontrar uma resposta correcta de um problema é mais importante do que saber porque é que a resposta é correcta.	☐	☐	☐	☐	☐
Aprender Matemática é, fundamentalmente, memorizar.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática é uma actividade solitária.	☐	☐	☐	☐	☐
A Matemática que se aprende na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real.	☐	☐	☐	☐	☐

II. A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA É PARA TI:

	Discordo totalmente	Discordo	Nem concordo nem discordo (estou indeciso)	Concordo	Concordo totalmente
"Uma disciplina difícil."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ajuda a compreender e interpretar o mundo que nos rodeia."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ensina a pensar."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ajuda a preparar para a minha profissão futura."	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina onde descubro resultados novos"	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me ajuda para a minha formação global como cidadão na sociedade de hoje"	☐	☐	☐	☐	☐

"Uma disciplina útil para outras disciplinas que tenho"	☐	☐	☐	☐	☐
"Uma disciplina que me obriga a estudar muito"	☐	☐	☐	☐	☐

III. Diz por palavras tuas o que entendes por:

f) Exercício

g) Problema

h) Teorema

i) Uma prova

j) Uma conjectura

ANEXO 4. APRENDER A DEMONSTRAR

Este anexo contém materiais de apoio à abordagem didáctica de questões de lógica.

Foi proposto e explorado em espaço de aula.

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano turma D

Matemática - Materiais de Apoio

Enunciados da forma

“se…então…”

Exemplo 1:

Se [ABCD] é um losango então as suas diagonais são perpendiculares.

A afirmação anterior é composta por duas proposições simples, “[ABCD] é um losango” e “as suas diagonais são perpendiculares” ligadas por “se”…”então”.

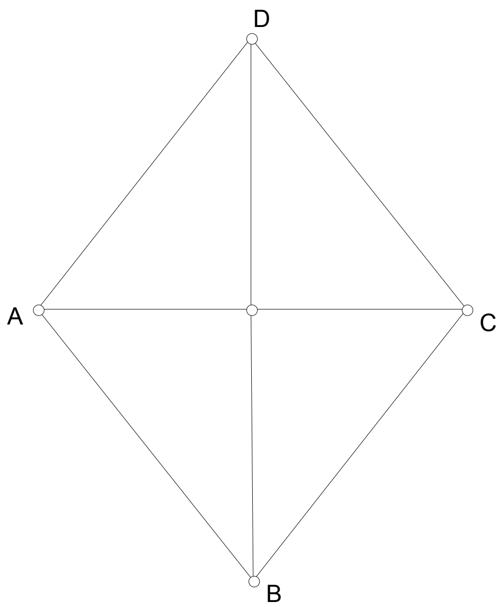


Figura 1

Designemos por:

p: “[ABCD] é um losango”

q: “as suas diagonais são perpendiculares”

Então podemos escrever abreviadamente,

$$p \Rightarrow q$$

Quando é que a afirmação dada é falsa?

Para responder à questão vamos construir a tabela de verdade recorrendo a exemplos.

P	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Hipótese e Tese

No exemplo anterior, a afirmação "[ABCD] é um losango" é designada de hipótese. A afirmação "as suas diagonais são perpendiculares" é designada por tese.

Atenção…

Não fazer confusão entre "hipótese" e "tese".

Para o exemplo anterior, existem quadriláteros que têm as diagonais perpendiculares sem serem losangos.

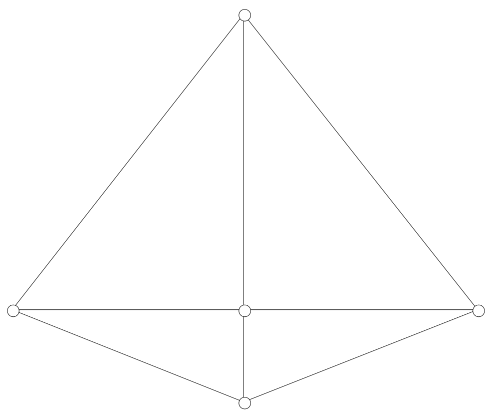


Figura 2

Enunciados Recíprocos e Enunciados Equivalentes

Enunciados Recíprocos

A partir de uma frase do tipo " se…então" podemos formar outra frase invertendo a hipótese e a tese. A frase obtida é designada recíproca da primeira.

O enunciado "se p então q"é recíproco do enunciado " se q então p".

Notação:

Enunciado directo $p \Rightarrow q$

Enunciado recíproco $q \Rightarrow p$

Exemplos

Exemplo 1

Enunciado: Se um quadrilátero [ABCD] tem diagonais que se intersectam no ponto médio, então [ABCD] é um paralelogramo.

Enunciado recíproco: Se [ABCD] é um paralelogramo, então as suas diagonais [AC] e [BD] intersectam-se no ponto médio.

Exemplo 2

Enunciado: Se um triângulo [ABC] é rectângulo em A então $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

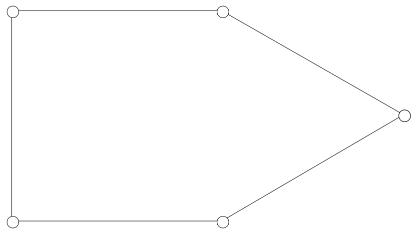
Enunciado recíproco: Se $BC^2 = AB^2 + AC^2$, então o triângulo [ABC] é rectângulo em A.

Atenção: Se um enunciado é verdadeiro, o seu enunciado recíproco não é forçosamente verdadeiro.

Exemplos

3) É verdade que "se duas rectas são perpendiculares então elas são secantes", mas é falso dizer que "se duas rectas são secantes, então elas são perpendiculares"
4) É verdade que "se um polígono é regular, então os seus lados têm o mesmo comprimento", mas é falso afirmar que "se um polígono tem os lados com o mesmo comprimento, então ele é regular"

Para mostrar que esta segunda frase é falsa, é suficiente dar um "contra-exemplo". A figura seguinte mostra um pentágono não regular em que os cinco lados têm o mesmo comprimento.



Enunciados Equivalentes

Frequentemente, em matemática, queremos dizer que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ são ambas verdadeiras. É, assim, conveniente introduzir um novo símbolo

$$\Leftrightarrow$$

A expressar tal facto.

Podes pensar no símbolo $p \Leftrightarrow q$, como sendo uma maneira abreviada de escrever $(p \Rightarrow q)$ e $(q \Rightarrow p)$

EXEMPLO

p: Se [ABCD] é um paralelogramo com AB = AD, então [ABCD]é um losango

q: Se [ABCD] é um losango, então [ABCD] é um paralelogramo com AB =AD

Vamos construir a tabela de verdade para $p \Leftrightarrow q$

P	Q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Aprender a Demonstrar

Demonstrar significa estabelecer a veracidade de uma determinada afirmação a partir de outras dadas no enunciado e de afirmações demonstradas anteriormente.

Exemplo

Demonstrar que a frase “[ABCD] é um paralelogramo com AB = AD” é equivalente à frase “[ABCD] é um losango”

ANEXO 5. QUESTIONÁRIO: "Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e sua aprendizagem". Preenchido antes do processo de estudo implementado.

Este anexo contém as respostas dos alunos relativas às partes III e IV do questionário referido no anexo 2.

III. Diz por palavras tuas o que entendes por:

a) Exercício

1. " É onde pomos em prática a matéria dada, dando questões para resolvermos"
2. " É a prática de resolver qualquer problema"
3. " É algo que fazemos para exercitar. Para ver se compreendemos o que demos, para praticar"
4. " Actividade para consolidar o que aprendi"
5. "Algo que nós temos que resolver (é um problema)"
6. " Acto de resolução de um problema"
7. "Acto de calcular ou realizar algo"
8. "Pôr em prática a matéria"
9. "Acto de calcular ou realizar algo"
10. "É onde pomos em prática o que aprendemos"
11. "Acto de calcular ou realizar"
12. "Resolver um problema"
13. "É algo que nos ajuda a praticar sobre a matéria que damos"
14. "Acto de calcular determinados valores que nos são dados ou não"
15. "É o acto de resolução sobre a matéria dada"
16. "É o acto de calcular ou realizar algo"
17. "Algo que nos ajuda a praticar sobre determinado tema"
18. "Algo que resolvemos (calculamos) com os dados que nos dão"

b) Problema

1. " É um exercício onde temos que pensar para encontrar uma solução"
2. " É um conjunto de dados que não têm uma resposta final"
3. "É algo que se opõe à nossa vida, uma dificuldade e para ultrapassar essa dificuldade tem que se encontrar uma resposta, uma resolução"
4. " Exercício de raciocínio"
5. "São questões para pensar, resolver, normalmente, difícil"
6. " Questão colocada para nós resolvermos"
7. "Cálculo racional e lógico que envolve operações entre números"
8. "Implica raciocínio"
9. "Um problema é o cálculo racional e lógico que envolve operações entre números"
10. "Algo que temos que resolver"
11. "Exercício de concentração"
12. "Questão colocada para resolução"
13. "É uma questão que nos colocam para nós resolvermos"
14. "Exercício de raciocínio para resolver, por vezes, temos que realizar cálculos"
15. "Questão prática que, muitas vezes, pode reflectir a realidade"
16. "É uma questão para a qual nós fazemos cálculos e damos uma resposta com base nesses cálculos"
17. "Questão prática que muitas vezes nos pode reflectir o real"
18. "exercício que resolvemos através do raciocínio"

c) Teorema

1. “É criado por um matemático para facilitar a resolver um problema”
2. “ É um método que me ajuda a chegar à solução de um problema”
3. “ É tipo uma regra”
4. “ É uma fórmula usada para resolver determinadas exercícios”
5. “É uma fórmula inventada (com sentido) por alguém”
6. “Teoria de resolução”
7. “Uma regra”
8. “Algo que nos guia para fazermos os exercícios”
9. “Um teorema é uma regra”
10. “É uma fórmula que nos ajuda a responder aos exercícios e a problemas”
11. “Teoria que nos ajuda a resolver o exercício”
12. “Não sei”
13. “É algo que nos ajuda a entender os problemas”
14. “Teoria que nos ajuda a resolver exercícios”
15. “Fórmula básica que nos ajuda a resolver problemas”
16. “É uma regra”
17. “Fórmula básica que nos ajuda a resolver problemas/exercícios”
18. “A teoria que nos ajuda a resolver exercícios”

d) Uma prova ou demonstração

1. “É a aplicação dos nossos conhecimentos”
2. “ É demonstrar que eu sou capaz de resolver qualquer situação, neste caso, matemática”
3. “ Serve para ver se o nosso raciocínio está correcto”
4. “Algo que explica um teorema e que demonstra a sua veracidade”
5. “ Não sei”
6. “Teste de avaliação”
7. “O que prova um teorema”
8. NR
9. “Algo que explica ou comprova um teorema”
10. “Demonstrar o que aprendemos ou vamos aprender de uma maneira mais prática”
11. “Avaliação do que aprendemos”
12. “Não sei”
13. “Teste ou uma avaliação”
14. “É uma folha com exercícios e problemas na qual demonstramos os nossos conhecimentos”
15. “Elementos de avaliação”
16. “Acto de comprovar algo”
17. Elemento de avaliação para onde transmitimos os nossos conhecimentos”
18. NR

e) Uma conjectura

1. “Não sei”

2. “Não sei”
3. NR
4. “Não sei”
5. “Não sei”
6. “Não sei”
7. “Não sei”
8. NR
9. “Não sei”
10. “Não sei”
11. NR
12. “Não sei”
13. “Não sei”
14. “Não sei”
15. “Não sei”
16. “Não sei”
17. “Não sei”
18. “Não sei”

IV. Pensa nas tuas aulas de matemática, da escolaridade básica (7º, 8º e 9º anos) e enuncia três aspectos de que mais gostaste e três aspectos de que menos gostaste.

Aspectos que mais gostei

1º	Estatística
	Geometria
	Resolver equações
	Equações
	A matéria do 7º ano
	Trabalhos de grupo
	Equações de 2º grau
	Regras de 3 simples
	Estatística
	Resolução de exercícios
	Inequações
	Equações de 1º e 2º grau
	Teorema de Pitágoras
	Estatística
	Estatística

	Trigonometria
	Resolver bastantes exercícios para consolidar a matéria
	Equações e inequações

2º	Equações de 1º grau
	NR
	Jogo do 24
	Inequações
	NR
	Situações caricatas originadas por respostas erradas
	Sistemas
	Teorema de Pitágoras
	Equações de 2º Grau
	Teorema de Pitágoras
	Estatística
	NR
	Equações
	Equações
	Probabilidades
	Equações de 2º e 2º grau
	Equações
	Teorema de Pitágoras

3º	Nos 7º e 8º anos, adorei os meus professores
	NR
	Professora dos 8º e 9º anos
	Forma como foram dadas as aulas
	NR
	Conclusões surpreendentes
	Inequações
	Equações de 1º grau

	NR
	Feriados
	NR
	NR
	Inequações
	Probabilidades
	Equações
	Saídas para observar objectos relacionados com a Matemática
	Inequações
	Sistemas

Aspectos que menos gostei

1º	Inequações
	Equações
	Aulas de seca
	Geometria
	Alguma maneira que as professoras tinham de explicar
	Testes
	Problemas (de qualquer matéria)
	Casos notáveis
	Professor pouco motivador
	Aulas chatas (monótonas)
	Geometria
	Geometria
	Números reais
	Geometria
	Geometria
	Professora do 7º ano

2º	Casos notáveis
	NR
	NR
	NR
	NR
	Partes da material
	Geometria
	Notação científica
	NR
	De fazer testes
	NR
	NR
	Geometria
	Professora pouco motivadora
	Professora pouco motivadora
	NR
	Não gosto muito de Geometria
	Estatística

3º	No 9º ano não gostei do professor
	NR
	NR
	NR
	NR
	Aulas “enfadonhas”
	Probabilidades
	Aulas chatas
	NR
	Algumas notas que tive
	NR
	NR
	NR

	NR
	NR
	NR
	A professora é que fazia a maior parte dos exercícios
	NR

ANEXO 6. QUESTIONÁRIO: "Percepções dos alunos sobre a disciplina de matemática e sua aprendizagem".

Este anexo contém as respostas dos alunos relativas às partes III e IV do questionário referidono anexo 3. Este questionário foi preenchido depois do desenvolvimento da pasta de problemas.

II. Diz por palavras tuas o que entendes por:

f) Exercício

19. "É uma questão em que a resposta consiste em cálculos"
20. "Aplicar os nossos conhecimentos num exercício e poder resolvê-lo"
21. "Resolução de um problema"
22. "Algo onde podemos treinar matéria dada"
23. "É uma aplicação directa"
24. "É algo em que pomos em prática o que sabemos ou o que aprendemos"
25. "Resolução do estudado anteriormente"
26. "Consiste na aplicação directa dos conteúdos aprendidos"
27. "É a prática da resolução de um problema"
28. "É a resolução de uma questão, de fácil resolução"
29. "Um exercício é uma forma de treino ou de demonstração quer em matéria como noutras ciências"
30. "É algo que se realiza para testar os conhecimentos ou seja, testar uma teoria"
31. "É algo que resolvemos sem termos que recorrer a grandes raciocínios, é praticamente de resposta (quase) directa"
32. "Uma resolução de cálculos para obtenção de resultados"
33. "Resolução de cálculos para obter um resultado"
34. "Ponho em prática regras, através da sua resolução"
35. "Um exercício é algo que nos obriga a realizar um cálculo para resolver o exercício (um cálculo escondido)"
36. "Praticarmos a nossa mente a resolver desafios que se colocam frequentemente. Algo que nos é proposto para nós tentarmos resolver e assim praticarmos e treinarmos a nossa memória"

g) Problema

19. "Questão com grau de dificuldades que nos coloca a pensar/raciocinar"
20. "Algo mais do que um exercício. É mais complicado de resolver e de pensar"
21. "É uma resolução de questões"
22. "É o que constitui um exercício ou algo que nos vai treinar também"
23. NR
24. "É um exercício de raciocínio onde temos que ser nós a arranjar os dados para chegar à resposta final"
25. "Exercício difícil de resolver"
26. "Consiste na pesquisa e raciocínio e tentar chegar a uma resolução"
27. "É a apresentação de um raciocínio que temos de acabar através de regras ou outros raciocínios"
28. "É a resolução de questões mas que temos que pensar mais do que num exercício"
29. "É algo por resolver que se tem que resolver para se encontrar a solução deste…"
30. "É uma questão que nos permite pensar, reflectir e depois resolvê-lo"
31. "É algo que, para resolvermos, temos que fazer um raciocínio"
32. "Inclui exercícios, é uma questão que requer uma grande capacidade de raciocínio"
33. "Exercícios que implicam grande capacidade de raciocinar"
34. "Exercício que necessita pensar e reflectir sobre algo"

35. “Um problema é algo que através dos olhos se realiza”
36. (o mesmo que problema)

h) Teorema

19. “Género de uma fórmula que aplicamos em alguns exercícios”
20. “Uma fórmula para resolver vários exercícios”
21. “É uma teoria que nos ajuda a resolver um problema”
22. “É uma regra proposta para resolver os problemas”
23. NR
24. “É uma regra proposta para resolver um problema”
25. “Teoria”
26. “É uma lei que se aplica em determinados casos”
27. “É uma regra proposta para resolver problemas”
28. “É uma teoria pela qual nós nos guiamos para resolver um problema”
29. “É algo que serve de fórmula para todos os casos com partículas semelhantes”
30. “Uma fórmula que nos permite realizar vários exercícios. Trata-se de uma constatação”
31. “É como uma regra que se constata através de exercícios e problemas”
32. “Regra/lei”
33. “Regra ou lei”
34. NR
35. “É uma regra que se usa para resolver um problema”
36. “Regra que serve para provar determinadas situações, podendo ser aplicada de diversos formas”

i) Uma prova ou demonstração

19. “ Através de exemplos reais, provamos algo”
20. “Provar o resultado a que nós chegámos, porque é que é assim…”
21. “É mostrar se o que nos dão está certo ou não e explicar”
22. “É algo onde podemos demonstrar os nossos conhecimentos”
23. NR
24. “É o que nós temos que demonstrar para comprovar o resultado obtido”
25. “Fazer uma apresentação”
26. “É ir encontrar a forma para se obter um resultado ou é procurar a forma pela qual se chegou àquele resultado”
27. NR
28. “É mostrar se o que nos dão está correcto ou não e porquê”
29. “É mostrar a justificação da resolução/solução do problema”
30. “Consiste em mostrar algo que é dito, se é verdadeiro ou não e porquê”
31. “É uma maneira de provar, na prática, o que dizemos na teoria”
32. “Algo que indica que um termo é igual a outro”
33. “Provar algo que nos é dado”
34. “Provar que algo é igual a outro algo”
35. “Demonstrar algo através de cálculos que comprovam o que penso”

36. “Explicar em que consistem determinadas afirmações, provando que são verdadeiras ou falsas”

j) Uma conjectura

19. “Uma afirmação”
20. “Levantar uma hipóteses em que pode ser verdadeira ou falsa. É uma afirmação”
21. “É uma afirmação do que se observa”
22. “É algo que nos parece verdadeiro, mas que depois podemos comprovar”
23. “É uma afirmação que é preciso fundamentar”
24. “É algo que nos parece verdade mas que temos que o provar”
25. “Quando se observa alguma coisa e podemos afirmar sobre algo. Isso é conjecturar”
26. “É uma afirmação daquilo que se observa ao que se testou”
27. “É o levantamento de uma hipótese verdadeira ou falsa que depois de constatar”
28. “É uma afirmação do que se observa”
29. “É um raciocínio retirado a partir de constatações verdadeiras”
30. NR
31. “É quando levantamos uma hipótese (verdadeira/falsa) que depois temos que constatar”
32. “É algo com uma verdade aparente, mas que precisa de ser testada”
33. “É algo que nos parece verdade, mas que ainda vamos testar”
34. “É após muitas tentativas, com resultados idênticos, concluímos algo”
35. “É após muitas tentativas, com resultados idênticos, provar algo”
36. “É uma afirmação sobre o que nos parece que é uma coisa mas que ainda temos de testar para provar se é verdade”

Intervenção Pedagógica – Avaliação

Interesse do conteúdo

1. NR
2. “É interessante, não só para resolvermos problemas, mas também para aplicarmos em experiências do dia-a-dia”.
3. “Achei que foi uma actividade interessante em certos aspectos”
4. “Achei uma actividade muito interessante”
5. “É interessante, na medida em que é sempre bom aprender mais”
6. “Interessante para melhorou a capacidade de raciocínio”
7. “Depende da matéria leccionada. Havia sessões em que estava muito interessada, outras que não”
8. “Foi interessante pelos métodos de resolução que utilizámos”
9. “O conteúdo, na minha opinião, e interessante para percebermos algumas coisas que acontecem e, muitas vezes, encontramos justificação”
10. “O conteúdo destas sessões interessou-me, pois, podemos aplicar em muitos casos do nosso dia-a-dia e pode vir a servir para a minha profissão futura”
11. NR
12. “Práticas geometria hiperbólica no computador”

13. NR
14. "Estas sessões tiveram interesse, para desenvolver a nossa capacidade na realização dos problemas"
15. NR
16. "O conteúdo é interessante, na minha opinião, para percebermos algumas coisas que acontecem e muitas vezes não encontramos justificação"
17. "É interessante na medida em que nos ajuda a compreender certas coisas da matemática e não só"
18. "O interesse do conteúdo consiste em trabalhar os problemas com diferentes geometrias. O trabalho no computador foi interessante"

A utilidade para a tua aprendizagem

1. NR
2. "Foi bastante útil pois aprendi a resolver problemas pelo Modelo de Pólya, o que se tornou mais fácil"
3. "É mais fácil para poder visualizar os problemas"
4. "Com a prática de resolução de problemas conseguimos, agora, mais facilmente resolve-los"
5. "Penso que não vou utilizar muito estes modelos"
6. "Importante para a preparação para o exame nacional"
7. "Acho que tem utilidade na minha aprendizagem porque as sessões obrigaram-nos a pensar e isto é muito importante para a disciplina da matemática"
8. "É importante pois depararmos com problemas diferentes das que resolvemos normalmente"
9. "É útil para ligarmos o que aprendemos nas sessões ao que damos nas aulas e ao nosso dia-a-dia"
10. "Ajudou-me a melhorar a minha forma de raciocínio"
11. "O cálculo de distâncias"
12. "Saber que a matemática também passa pelas novas tecnologias"
13. "Acho que vai ser e é útil para a resolução de problemas"
14. "Foi importante"
15. "Acho que vai ser muito útil para o futuro, apesar de agora não dar muita importância"
16. "è útil para ligarmos o que aprendemos nas sessões ao que damos nas aulas e ao nosso dia-a-dia"
17. "Ajudou-me em relação à disciplina de matemática"
18. "Estes problemas ajudam, pois, treinamos a nossa capacidade que nos ajuda no exame final do 12º ano".

O grau de dificuldade

1. NR
2. "O grau de dificuldade não foi nem demasiado baixo, nem elevado"
3. "O grau de dificuldade foi aumentando, chegando a um nível que já me deixou baralhado"

4. “Algum, era conforme o problema”
5. “Elevado”
6. “Elevado”
7. “Médio”
8. “Elevado no início, mais baixo no final da resolução”
9. “Achei um bocado difícil, mas ao mesmo tempo, interessante, porque se não tivesse um elevado grau de dificuldade, não tinha interesse”
10. “Ao início das sessões, era mais difícil. Ao final, começou a ser mais fácil, comecei a resolver por mim própria”
11. “Tirar conclusões”
12. “Elevado”
13. “Achei o conteúdo complicado, uns menos e outros meio”
14. “Em alguns casos, o grau de dificuldade era elevado”
15. “Acho que em algumas tarefas o grau de dificuldade era bastante elevado”
16. “Achei um bocado difícil, mas ao mesmo tempo, interessante porque se as coisas não tivessem um elevado grau de dificuldade, não tinham interesse”
17. “Alguns exercícios eram difíceis, outros não..”
18. “Por vezes, achava que para resolver o problema, tinha que proceder a muitos cálculos, o que o tornava complicado e na resolução do exercício os cálculos eram simples”

Outros comentários

1. “Se eu tivesse que falar a outras pessoas sobre diferentes tipos de geometria eu, de facto, diria que existe mais que um tipo de geometria. Qualquer um deste tipos se rege por diferentes regras e o que numa geometria pode ser completamente impossível. Existem três tipos de geometria hiperbólica, esférica e euclidiana, sendo esta última a mais conhecida e utilizada no ensino básico e também secundário”
2. “Foi uma experiência útil para a minha aprendizagem, pois, fiquei a conhecer outros tipos de geometria e aprendi a resolver problemas pelo Modelo de Pólya, o que torna essa tarefa mais fácil de realizar. Foi importante o recurso aos computadores e a todos os outros materiais que usámos para nos ajudarem a resolver os problemas”
3. “Aprendemos um novo método de resolução de problemas e trabalhamos numa geometria hiperbólica, quando só sabemos trabalhar na Euclidiana”.
4. “Antes de começar com as sessões, sabia apenas da existência da Geometria Euclidiana, a partir daí fiquei a conhecer mais uma, a Geometria Hiperbólica”
5. “Não me lembro muito bem das sessões, mas gostei de trabalhar no computador. Era uma maneira diferente de perceber as outras geometrias. O Modelo de Pólya não me ajudou muito, mas apliquei-o em algumas situações”
6. “Não me lembro muito bem das sessões, mas gostei de trabalhar com o computador, com materiais relacionados com os problemas, apesar de achar muito difícil a sua resolução. Quando tive dificuldades, recorri a esquemas e desenhos. Os problemas que mais gostei foram: o problema do Pentágono e o Losango dentro de um cubo. Sinto que aprendi mais sem o computador”

7. “No início, não gostei muito das sessões, mas agora acho que são importantes! Já as vejo com os outros olhos”
8. NR
9. “Já não me lembro muito bem do que fizemos o ano passado, mas trabalhámos com diferentes geometrias, que nos fizeram ver de maneira diferente algumas coisas. A utilização de computadores e de objecto práticos faz com que se perceber melhor o que estávamos a fazer”
10. NR
11. “Falando sobre as outras geometrias com as quais tive experiência, embora já não me lembre muito bem, foi descobrir as várias formas de geometria, utilizando exemplos do dia-a-dia, aprendendo conteúdos específicos para cada um dos conceitos. É muito interessante relacionar a matéria com as novas tecnologia”
12. NR
13. NR
14. NR
15. “Se fizesse que falar disto a alguém, diria que ao início podia não despertar interesse (como me aconteceu a mim), mas que depois vai ser engraçado, talvez muito útil no futuro”
16. NR
17. “Foi interessante”
18. NR

ANEXO 7. TABELA SINTESE DO 2º NÍVEL DE ANÁLISE DAS PRATICAS ARGUMENTATIVAS DAS ALUNAS X, Y.

Este anexo contém a tabela que sintetiza o segundo nível de análise das práticas argumentativas das alunas X e Y. Esta análise, além de ser mediada pelas relações secundárias (*ostensivo - não ostensivo, extensivo - intensivo, pessoal – institucional, unitário - sistémico, expressão - conteúdo)* dos objectos matemáticos, tem em consideração os processos envolvidos (*materialização – idealização, particularização – generalização, personalização – institucionalização, decomposição – unificação, significação – representação).*

Ostensivo – não ostensivo		
	Aluna X	**Aluna Y**
P1	A impossibilidade da marcação do centro da semi-circunferência, linha hiperbólica pedida na situação - problema, ou seja o ponto de coordenadas (4,0), proporcionou a exploração da definição de semi-plano de Poincaré. Não reconheceu objectos não -ostensivos implicados na situação (por exemplo, proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente; proposição 2: A geometria hiperbólica é uma geometria incidente).	A impossibilidade da construção de mais do que uma linha hiperbólica a passar por dois pontos constitui justificação. Ela não menciona o não-ostensivo implicado na situação, isto é, a proposição 1: A geometria Euclidiana é uma geometria incidente e a proposição 2 - A geometria hiperbólica é uma geometria incidente.
P2	A aluna X recorreu a mais do que um exemplo para induzir sobre a forma da circunferência na GMT. Ela associou ao objecto não – ostensivo, circunferência, um ostensivo (que classificou de *losango da geometria Euclidiana*). A exploração, por iniciativa desta aluna, do ostensivo de triângulo equilátero serviu de contexto para abordar a propriedade – desigualdade triangular (não-ostensivo). O exemplo genérico, além de exemplos particulares, foi utilizado como ostensivo de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante tem como ostensivo o símbolo π que a aluna considerou igual a 4.	Na análise da situação – problema a aluna recorreu ao ostensivo da circunferência na geometria Euclidiana. Apenas se baseou num exemplo, exemplo genérico, para justificar a forma da circunferência nesta nova geometria. Esta aluna, apenas utilizou um exemplo genérico para a justificação de que a razão entre o perímetro e o diâmetro é constante e essa constante é 4 que não foi identificada com π.

P3	Os atributos ostensivos para as linhas do plano de Fano utilizados pela aluna foi {A, C}, {A, G}, {C, G}, {A, F}, {B, G}, {E, C}, {E, F}, onde apenas são referidos dois pontos das linhas tal como era feito no contexto da geometria Euclidiana. A aluna X percepcionou que não existiam linhas paralelas por não formarem ângulos de noventa graus (***X.*** *Porque não formam nenhum ângulo de noventa graus).*	Os atributos ostensivos para as linhas do plano de Fano utilizados por esta aluna foi, tal como a aluna X, {A, C}, {A, G}, {C, G}, {A, F}, {B, G}, {E, C}, {E, F}, onde apenas são referidos dois pontos das linhas tal como era feito no contexto da geometria Euclidiana. A aluna Y, inicialmente, não *idealizou* o ostensivo da linha {EBF}.
P4	Os objectos ostensivos mobilizados na apresentação da solução ao problema foram a representação dos pontos A e B na figura, dada no enunciado e os sistemas das respectivas condições que definem as linhas hiperbólicas representadas pictoricamente no enunciado da figura. No entanto parece-nos que a aluna sentiu necessidade de determinar as coordenadas dos pontos, mesmo do ponto B, para reconhecer o não -ostensivo (linhas não paralelas e linhas paralelas) representado na situação.	A aluna utilizou a notação "//" (ostensivo) para se referir à relação de paralelismo (não -ostensivo) entre linhas; recorreu à linguagem algébrica (na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas) e utilizou o símbolo $\Rightarrow$*,* a ligar frases, como por exemplo, "*l não é paralela a n"*e "*Intersectam-se no ponto (3,11;0,99)", "l é paralela a m*" e *"não se intersectam".*
Extensivo – intensivo		
	Aluna X	**Aluna Y**
P1	Do exemplo particular recorreu ao exemplo genérico. Na argumentação de natureza *dedutiva*, o objecto extensivo, $(x-7)^2+y^2= 42\wedge y>0$, é	Recorreu ao exemplo particular e ao exemplo genérico. O pedido de uma justificação de natureza *conceptual* e a extensão a

	utilizado como um exemplo específico, caso particular, de uma classe, $(x\text{-}a)^2 + y^2 = r \wedge y > 0$ (linha hiperbólica de centro (a,0) e raio r, sendo a um número real e r um número real positivo).	outros modelos de geometria constituiu um factor de dificuldade e, note-se que, apesar da explicação prévia do método de redução ao absurdo a solução apresentada não estava correcta.
P2	A representação pictórica da circunferência na geometria do Motorista de Táxi não é a familiar da geometria Euclidiana, a qual foi justificada mostrando a sua veracidade nalguns exemplos específicos – *empirismo simples.* Um objecto extensivo é utilizado como um caso particular (exemplos específicos de "circunferências" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo. Quanto às justificações de natureza *dedutiva,* a aluna adoptou uma abordagem analítica, baseada em manipulações algébricas.	Esta aluna passa de apenas um exemplo concreto para o caso genérico. Ou seja, utiliza um objecto extensivo como um caso particular (exemplos específicos de "circunferências" na geometria do Motorista de Táxi), de um caso mais geral (isto é, da expressão geral de uma "circunferência") que é um objecto intensivo. Quanto às justificações de natureza *dedutiva,* a aluna adoptou uma abordagem sintética. Através da figura 9.19, observa-se que a aluna Y regista o valor 16 para o perímetro e de 4 para o diâmetro de uma "circunferência" e, em paralelo, regista o valor de 8r e 2r, respectivamente para o perímetro e o diâmetro, para o caso geral letra r (designação da mediada do raio).
P3	Apesar desta aluna já ter tido contacto com uma	Apesar desta aluna já ter tido

	geometria finita, uma geometria de quatro pontos, não houve indícios de que estabelecesse ligação com essa experiência.	contacto com uma geometria finita, uma geometria de quatro pontos, não houve indícios de que estabelecesse ligação com essa experiência.
P4	A aluna X utilizou a condição que define uma circunferência de centro dado, o ponto C de coordenadas (a,b), e raio r para suporte à identificação dos centros das semi-circunferências, ou seja, das linhas hiperbólicas representadas nas figuras.	A aluna referiu a definição de linhas paralelas e de seguida focou-se nos objectos extensivos representados no enunciado do problema.
Pessoal – institucional		
	Aluna X	**Aluna Y**
P1	Na primeira parte da situação-problema tem lugar uma argumentação de natureza empírica através do recurso; a um exemplo (*Naïve empirismo)* e a um exemplo representativo de uma classe (*Exemplo genérico)*. Este tipo de argumentação é muito frequente nas aulas de matemática. As experiências da aluna com o método de demonstração por redução ao absurdo eram quase inexistentes (a aluna apenas referiu que tinha "ouvido falar" no método no seu 8º ano a propósito da raiz quadrada de 2. Assim, pareceu adequado relembrar o método de demonstração por redução ao absurdo utilizando precisamente o contexto referido pela aluna.	Na primeira parte da situação-problema tem lugar uma argumentação de natureza empírica através do recurso; a um exemplo (*Naïve empirismo)* e a um exemplo representativo de uma classe (*Exemplo genérico)*. Este tipo de argumentação é muito frequente nas aulas de matemática. As experiências da aluna com o método de demonstração por redução ao absurdo eram quase inexistentes (a aluna apenas referiu que tinha "ouvido falar" no método no seu 8º ano a propósito da raiz quadrada de 2. Assim, pareceu adequado

		relembrar o método de demonstração por redução ao absurdo utilizando precisamente o contexto referido pela aluna.
P2	A situação - problema motivou argumentos quer de natureza empírica quer de natureza dedutiva regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi (*cognição institucional)*. Do ponto de vista da *cognição pessoal*, a actividade desenvolvida promoveu o questionamento por parte desta aluna da definição de perímetro neste caso específico. A aluna X não entendeu o π como um número irracional mas sim como uma letra que designa a razão entre um perímetro e um diâmetro, ou seja, entendida como tendo uma natureza funcional.	A situação - problema motivou argumentos quer de natureza empírica quer de natureza dedutiva regulados pela definição de métrica na geometria Euclidiana e na geometria do Motorista de Táxi (*cognição institucional)*. Do ponto de vista da *cognição pessoal*, esta aluna questionou a definição de distância nesta nova geometria. A aluna entendeu o π como número irracional e portanto considerou falsa a afirmação, que é verdadeira na geometria Euclidiana, de que *a razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro é π*
P3	Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências na aula de matemática são com exemplos de linhas "traçadas" no plano cartesiano e/ou no semi-plano de Poincaré, na situação do plano de Fano o facto de só existirem sete linhas induziu as alunas a confirmarem com a professora a existência de apenas essas linhas.	Considerando que ao nível da *cognição institucional* as experiências na aula de matemática são com exemplos de linhas "traçadas" no plano cartesiano e/ou no semi- plano de Poincaré, na situação do plano de Fano o facto de só existirem sete linhas induziu as alunas a confirmarem com a professora a existência de apenas

		essas linhas.
P4	Se por um lado a visualização se revela ser um meio para dar a solução ao problema, por outro as experiências mais recentes destas alunas no âmbito do paralelismo de linhas, na geometria Euclidiana, foi segundo uma abordagem analítica e através do recurso à resolução de sistemas de equações. A aluna X apresentou uma definição de linhas paralelas, logo no início da solução escrita "*…por mais que se prolonguem nunca se intersectam"* e confrontada com o desajustamento desta definição, pela aluna Y, não apresenta argumentos.	Se por um lado a visualização se revela ser um meio para dar a solução ao problema, por outro as experiências mais recentes destas alunas no âmbito do paralelismo de linhas, na geometria Euclidiana, foi segundo uma abordagem analítica e através do recurso à resolução de sistemas de equações. A aluna Y, utilizou o ostensivo de linhas paralelas, da geometria Euclidiana, no contexto da geometria hiperbólica. ***Y.*** *Oh dá para ver… a distância daqui aqui e daqui aqui…*(referindo-se à distância Euclidiana entre as duassemi-circ., representativas das linhas hiperbólicas em causa).
Unitário – sistémico		
	Aluna X	**Aluna Y**
P1	Num contexto de geometria Euclidiana, a noção de que por dois quaisquer pontos passa uma e uma só linha (noção de incidência) é abordada na escolaridade básica. No entanto a aluna não utilizou este objecto matemático como uma entidade unitária e sentiu necessidade de recorrer a exemplos concretos e não a um exemplo genérico.	Num contexto de geometria Euclidiana, a noção de que por dois quaisquer pontos passa uma e uma só linha (noção de incidência) é abordada na escolaridade básica. No entanto esta aluna, também, não utilizou este objecto matemático como uma entidade unitária e sentiu

		necessidade de recorrer a exemplos concretos e não a um exemplo genérico.
P2	Durante o processo de resolução da situação-problema, a aluna segue um percurso que vai desde a análise da situação até a uma síntese da actividade desenvolvida. Esta síntese é apresentada na composição sobre a solução elaborada. Note-se que nesta síntese o objecto matemático distância na geometria do Motorista de Táxi, entendida como um objecto complexo no início da actividade se revelou, segundo a aluna, *fácil após perceber como "funcionava" a fórmula da distância na geometria táxi.*	A aluna começa por referenciar a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano recorrendo a um exemplo. No entanto, é notória na solução apresentada o entendimento da situação em causa de forma sistémica
P3	Esta situação-problema induziu a aluna X a confirmar se a definição de linhas paralelas no plano de Fano é a mesma da geometria Euclidiana.	Esta situação-problema induziu a aluna X a confirmar se a definição de linhas paralelas no plano de Fano é a mesma da geometria Euclidiana.
P4	A noção de paralelismo é uma noção conhecida para o caso do plano cartesiano, para a geometria Euclidiana, e neste caso este objecto matemático é utilizado como uma entidade unitária. Enquanto que a mesma noção abordada noutros modelos de geometria (e.g., o semi-plano de Poincaré) é entendida como um objecto mais complexo a ser aprendido.	A noção de paralelismo é uma noção conhecida para o caso do plano cartesiano, para a geometria Euclidiana, e neste caso este objecto matemático é utilizado como uma entidade unitária. Enquanto que a mesma noção abordada noutros modelos de geometria (e.g., o semi-plano de Poincaré) é entendida como um objecto mais complexo a ser aprendido.

Expressão – conteúdo		
	Aluna X	**Aluna Y**
P1	As expressões algébricas foram utilizadas sem dificuldades. No entanto a aluna não conseguiu, de forma autónoma, aplicar o método de demonstração por redução ao absurdo. Generalizou a partir de dois exemplos, de que quer a geometria Euclidiana quer a hiperbólica são geometrias incidentes.	A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, o estudo de novos significados, mais ricos e profundos, de objectos da geometria Euclidiana (e.g., a noção de linha, a noção de geometria incidente, …). a aluna recorre a uma representação gráfica e/ou mista (abordagem sintética). A algébrica não é utilizada de forma espontânea. Ela não conseguiu, de forma autónoma, aplicar o método de demonstração por redução ao absurdo.
P2	A situação – problema apesar de ser formulada num contexto de geometria do Motorista de Táxi há indicadores claros de que a aluna estabelece ligações com a geometria Euclidiana. Na composição apresentada na figura 9.17, a aluna associa a forma da circunferência, nesta nova geometria, ao losango e não ao quadrado. […] *Unimo-los e obtivemos uma circunferência com a forma de um losango da Geometria Euclidiana.[…]* O problema induziu a abordagem da igualdade d(A,B) + d(B,C) = d(A,C), na geometria do Motorista de Táxi, com os pontos A, B e C não	A aluna Y estabeleceu ligações com a geometria Euclidiana. Observe-se que na figura 9.20 ela assinala o raio r tal como fazia habitualmente num contexto de geometria Euclidiana. O problema induziu a abordagem dos conteúdos previstos na respectiva configuração epistémica, no entanto não foi discutida a situação de que, na geometria do Motorista de Táxi, a igualdade d(A,B) + d(B,C) = d(A,C) pode corresponder a uma situação em que os pontos A, B e C não sejam

	colineares.	colineares.
P3	Relativamente ao conceito de linhas paralelas, a aluna X expressou os seguintes significados: " *Duas linhas são paralelas se a sua intersecção for o vazio";"* [Duas linhas são paralelas] *se por mais que se prolonguem nunca se intersectam".* Neste contexto particular do plano de Fano, esta mesma aluna apenas utilizou o primeiro dos significados anteriormente referidos e durante a análise da situação – problema, ao que tudo indica através da observação da representação pictórica do plano de Fano, associou linhas paralelas à existência de ângulos rectos. A abordagem de uma geometria finita, definida pictoricamente, é uma situação atípica no currículo de matemática do ensino secundário e que induziu o questionamento sobre a definição de linhas paralelas.	A abordagem de uma geometria finita, definida pictoricamente, é uma situação atípica no currículo de matemática do ensino secundário e que induziu o questionamento sobre a definição de linhas paralelas.
P4	A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas num contexto de geometria hiperbólica. As alunas revelaram domínio de cálculo algébrico, nomeadamente na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas. Ao nível do domínio da linguagem, a aluna X referiu a designação "rectas" quando não se tratava de rectas.	A situação-problema serve de motivação (induz), ao nível do conteúdo, a definição de linhas paralelas num contexto de geometria hiperbólica. As alunas revelaram domínio de cálculo algébrico, nomeadamente na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas.

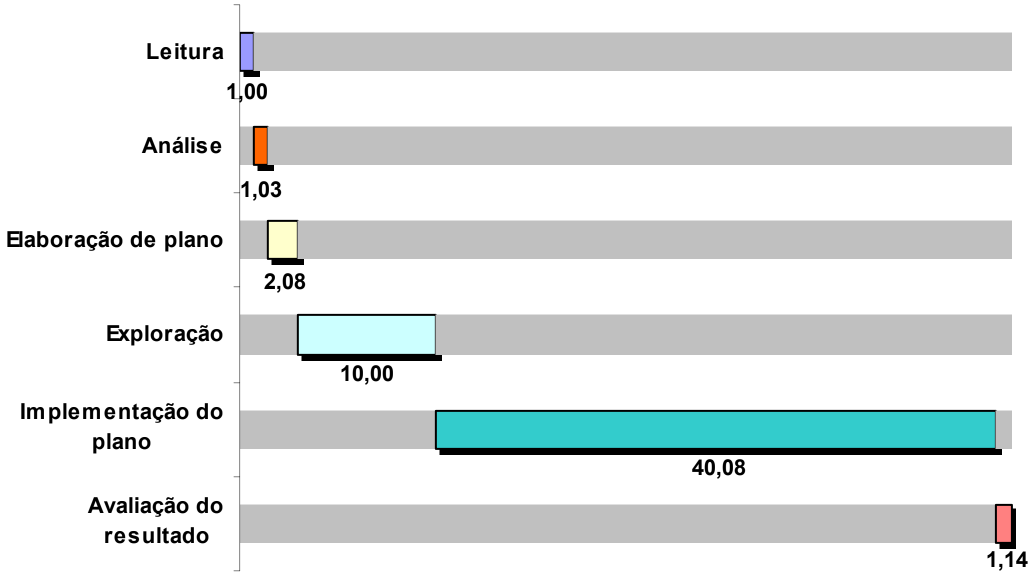
ANEXO 8. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS – MODELO DE SCHOENFELD

Este anexo contém a descrição do modelo e um dos exercícios de aplicação do modelo, num dos primeiros problemas propostos.

A codificação dos procedimentos adoptados pelos alunos quando confrontados com um problema, segundo Schoenfeld (1985), é a seguinte:

1. Leitura: Começa quando o sujeito procede à leitura do enunciado em voz alta. Incluindo o tempo gasto a perceber as condições colocadas no enunciado e continua mesmo durante o silêncio que se segue à leitura – silêncio que pode indicar contemplação, uma nova leitura (em silêncio) do enunciado, ou pensamentos em "branco". Continua, também, através da verbalização de partes e /ou todo o enunciado.
2. Análise: Se não existe aparentemente um procedimento a adoptar depois da leitura do enunciado, a fase seguinte da solução do problema consiste na análise. Na análise é feita uma tentativa para a compreensão total do problema, seleccionando uma perspectiva apropriada e reformulando o problema nesses termos, e considerar quaisquer princípios ou mecanismos que possam ser apropriados. O problema pode ser simplificado e reformulado.
3. Exploração: Nesta fase da resolução de problemas, pode utilizar-se uma variedade de heurísticas – o recurso a analogias, o recurso a diagrama, etc. Idealmente, a exploração tem uma estrutura; existe uma "métrica solta" no espaço do problema (a distância percebida entre os objectos conforme o enunciado do problema original) que serve para a selecção de itens considerados. Precisamente, por a exploração ter uma estrutura débil, tanto as avaliações globais como locais são momentos críticos. Uma busca não controlada pode levar a "desastre", mas também poderá desconsiderar uma alternativa promissora.
4. Elaboração de plano/ implementação: Nesta fase, as questões prendem-se com a estrutura do plano, se o plano está bem estruturado ou não, se a implementação do plano é feita ordenadamente, e se existe avaliação ou monitorização do processo por parte de quem resolve o problema, com feedback ao plano e avaliação aos níveis local e/ou global.
5. Verificação: As questões aqui colocadas são; Foi feita a revisão da solução? Se sim como? Existe alguma avaliação da solução, bem como do processo, ou uma avaliação da credibilidade plausibilidade do resultado?

Exemplo de exercício de aplicação do modelo



ANEXO 9. MATERIAIS DE APOIO

Este anexo contém materiais de apoio disponibilizados aos alunos nas sessões de trabalho na turma (parte integrante do dossier individual do aluno).

Resolução de Problemas

Ter um problema significa procurar com consciência alguma acção apropriada para atingir um objectivo claramente definido, mas não imediatamente atingível – "onde não há dificuldades não há problema".

Resolver um problema é encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, é atingir um objectivo desejado que não é imediatamente acessível e, fazê-lo com os meios apropriados.

Como Resolver um Problema (Modelo de Pólya)	 1ª Etapa: Compreender o problema 2ª Etapa: Elaborar um plano de resolução 3ª Etapa: Realizar o plano 4ª Etapa: Examinar a solução obtida

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano turma D

16/Novembro/2004

Lem@tic

Matemática - Materiais de Apoio

Os temas a seguir apresentados, são temas que já estudaste na tua escolaridade básica aos quais poderás recorrer para a resolução dos problemas que te são propostos.

Bom trabalho!

Casos de Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes, se e só se tiverem, de um para o outro, dois pares de ângulos geometricamente iguais.
Dois triângulos são semelhantes, se e só se tiverem, de um para o outro, um ângulo geometricamente igual e os lados que o formam proporcionais.
Dois triângulos são semelhantes, se e só se tiverem, de um para o outro, os três lados proporcionais.

Teorema: A recta suporte do segmento de recta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela à recta suporte do terceiro lado.

Mediatriz de um segmento de recta

Definição: Mediatriz de um segmento de recta é o conjunto dos pontos equidistantes dos extremos do segmento.

Propriedade da mediatriz: A mediatriz de um segmento de recta é a recta perpendicular ao segmento no seu ponto médio.

ANEXO 10. PASTA DE PROBLEMAS

Este anexo contém as situações problema propostas à turma.

Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano Ensino Secundário – Turma D

Problema

“Polígonos e Polígonos Inscritos – Razão entre as suas áreas ”

(Recurso ao Geometer´s Sketchpad)

- Constrói dois triângulos, em que os vértices de um deles (triângulo inscrito) são os pontos médios dos lados do outro triângulo. Qual a razão entre as áreas destes dois triângulos? Justifica.

- Constrói dois quadriláteros em que os vértices de um deles (quadrilátero inscrito) são os pontos médios do outro. Qual a razão entre as suas áreas? Justifica.

- Prevê o que acontece no caso de considerares pentágonos e, comprova a tua previsão procedendo de forma análoga à seguida nos pontos anteriores. Qual a razão entre as áreas dos pentágonos? Justifica.

Universidade de Aveiro

Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa

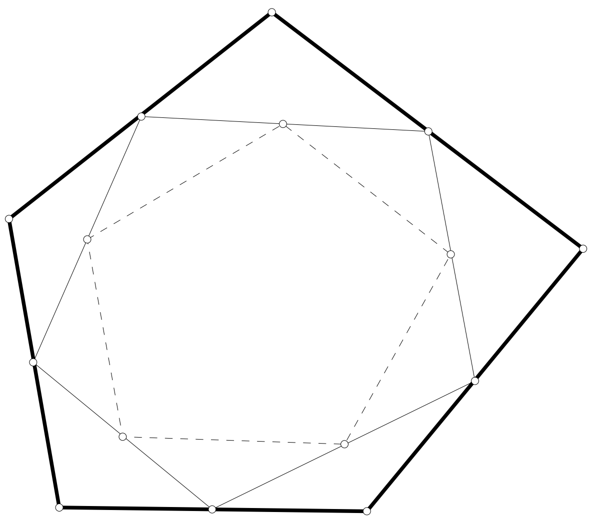
Lem@tic

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano Ensino Secundário – Turma D

Problema do pentágono

Considera três pentágonos, como mostra a figura, em que o segundo se obtém unindo os pontos médios dos lados do pentágono inicial, o terceiro pentágono obtém-se unindo os pontos médios do segundo pentágono.



Consulta o Sketch “pentágono”que está no ambiente de trabalho, “arrasta” um dos vértices do pentágono inicial e elabora uma conjectura sobre a razão entre os perímetros de um dos pentágonos e do seu pentágono inscrito.

Consideras a tua conjectura verdadeira? Porquê?

Universidade de Aveiro

Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa

Lem@tic

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano Ensino Secundário – Turma D

Problema

Consideremos o cubo com 4 cm de aresta. Sabendo que os pontos I e J são pontos médios das arestas [AE] e [CG], respectivamente, prova que a secção produzida no cubo pelo plano IDJ é um losango.

Universidade de Aveiro

Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano do Ensino Secundário – Turma D

Problema

Dois náufragos vão ter a uma ilha com a forma de um triângulo equilátero e querem escolher o local para construírem uma cabana. A ilha está coberta de árvores e têm de abrir caminhos para irem às três praias da ilha, que são os lados do triângulo. Qual o local, da ilha, onde devem construir a cabana para que o comprimento total dos caminhos seja mínimo.

Tarefa

Explorações com Software de Geometria Dinâmica

Na Escolaridade Básica foram-te dadas oportunidades para aplicares o axioma das paralelas, também designado por Postulado das Paralelas de Euclides, que tem o seguinte enunciado:

Dada uma linha r e um ponto P exterior a r, existe uma e uma só linha passando por P e paralela a r.

1. Utiliza o programa **Geometer´s Sketchpad** e constrói uma linha r e um ponto P exterior a r. De seguida utilizando à opção *parallel line* do *Construct* e faz passar por P uma linha paralela a r. Arrasta o ponto P e observa as figuras obtidas. Comenta a seguinte afirmação:

Para cada linha l e um ponto Q não pertencente a l, existe uma e uma só linha s que passa por Q e é paralela a l

2. Utiliza o Sketch, hip _ line e no disco de Beltrami-Poincaré executa os procedimentos anteriores. Arrasta o ponto P e observa as figuras obtidas. Comenta a seguinte afirmação

Para cada linha l e um ponto Q não pertencente a l, existe mais do que uma linha s que passa por Q e é paralela a l

3. Utiliza o programa Cinderella e executa os procedimentos seguidos em 1. Recorre a *geometry esferic view* e arrastando o ponto P observa as figuras obtidas. Comenta a seguinte afirmação.

Para cada linha l e um ponto Q não pertencente a l, não existe nenhuma linha que passe por Q e seja paralela a l

4. Como pudeste observar nas questões anteriores as representações de pontos e linhas são diferentes. O axioma das paralelas lido à luz dessas interpretações converteu-se sempre numa proposição verdadeira?

Escola Secundária Doutor Mário Sacramento

10º Ano turma D

Problema

Dadas as proposições:

A – Por um ponto exterior a uma recta é possível fazer passar uma recta paralela à dada e só uma.

B – A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

Demonstra que as afirmações anteriores são equivalentes, ou seja, $A \Leftrightarrow B$

ANEXO 11. QUESTIONÁRIO FINAL

Este anexo contém o questionário aplicado, à turma, no final das sessões de introdução a modelos de geometria plana distintos do modelo Euclidiano e três exemplos de respostas dadas.

Questionário

Escreve um relato da actividade desenvolvida nesta sessão, especificando:

1- O interesse do conteúdo

2- A utilidade para a tua aprendizagem

3- O grau de dificuldade

4- Outros comentários

Questionário

Escreve um relato da actividade desenvolvida nesta sessão, especificando:

1- O interesse do conteúdo

É interessante, ajuda a visualizar tudo com mais facilidade do que numa aula normal, não só hoje com esta actividade, mas sim como as anteriores.

2- A utilidade para a tua aprendizagem

Penso que é importante e muito útil, são conceitos que são importantes nós percebermos para agora como para o futuro.

3- O grau de dificuldade

Tudo isto não é facil, contudo é mais facil visualizar assim do que numa aula normal.

4- Outros comentários

Podiamos ter aulas aqui até o fim da Geometria

Questionário

Escreve um relato da actividade desenvolvida nesta sessão, especificando:

1- O interesse do conteúdo

Acho que o conteúdo desta sessão foi interessante pois permitiu-nos conhecer outros métodos sobre as linhas paralelas.

2- A utilidade para a tua aprendizagem

Conclui que afinal depende do método com que estejamos a [illegible] para saber quantas rectas paralelas a outras rectas dada passam por 1 ponto.

3- O grau de dificuldade

Aquilo das rectas não foi muito difícil.
Mas aquilo da cela de covoie já era + complicado.

4- Outros comentários

Questionário

Escreve um relato da actividade desenvolvida nesta sessão, especificando:

1- O interesse do conteúdo

Acho que esta sessão teve alguma interesse para mim visto que eu gosto de trabalhar com Rectas curvas.
Para mim esta sessão teve muito mais interesse do que aquelas que tivemos até agora tirando a primeira.

2- A utilidade para a tua aprendizagem

Acho que teve uma grande utilidade na minha aprendizagem, porque aprendi muita alguma coisa sobre Rectas curvas.

3- O grau de dificuldade

Acho que o grau de dificuldade foi um bocadinho alto. Acho que todo o que aprendi de Rectas curvas era relativamente facil.

4- Outros comentários