



DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DAS CIENCIAS
EXPERIMENTAIS
ÁREA DE DIDÁCTICA DAS MATEMÁTICAS

**Los procesos metacognitivos en la comprensión
de las prácticas de los estudiantes cuando
resuelven problemas matemáticos:
una perspectiva ontosemiótica**

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

Santiago de Compostela, 2006



DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DAS CIENCIAS
EXPERIMENTAIS
ÁREA DE DIDÁCTICA DAS MATEMÁTICAS

**Los procesos metacognitivos en la comprensión
de las prácticas de los estudiantes cuando
resuelven problemas matemáticos:
una perspectiva ontosemiótica**

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão

**Memória realizada bajo la codirección de los Doctores
D. José Antonio Cajaraville Pegito y D. Pedro Antonio Labraña Barrero**

José Antonio Cajaraville Pegito, profesor doctor de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela,

Pedro Antón Labraña Barrero, profesor doctor de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela,

HACEN CONSTAR:

Como Codirectores de la Tesis Doctoral que lleva por título “**Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica**”, realizada por Dona Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, que cumple todos los requisitos necesarios de calidad científica para ser presentada y defendida ante el oportuno Tribunal para optar al Grado de Doctor.

Y para que conste a los efectos oportunos, firman en Santiago de Compostela a 8 de Mayo del año 2006.

Prof. José A. Cajaraville Pegito

Prof. P. Antón Labraña Barrero

Santiago de Compostela, Mayo de 2006

Esta Tesis Doctoral ha contado, en la última fase de realización, con la ayuda del proyecto de investigación SEJ2004-07346, financiado por el MEC, para el trienio 2005-2997.

Agradecimientos

Quiero dejar patente mi más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que han colaborado en la realización de este trabajo.

A mis directores de tesis, Dres. José Antonio Cajaraville Pegito y Antón Labraña Barrero, que han contribuido en alto grado a mi formación, compartiendo conmigo, sus conocimientos y competencias profesionales. A José Antonio Cajaraville Pegito por su dedicación y paciencia en toda esta trayectoria y por acompañarme en los momentos más difíciles. A su entrañable familia, que nos han tratado, a los míos y a mí, como verdaderos hermanos. A Antón Labraña Barrero, por la objetividad y sutileza demostradas en tantas horas de orientación. A ambos, gracias por haberme dado su amistad, su cariño y su confianza.

A la Comunidad Gallega por la acogida en estos cuatro años y medio, por haber contribuido a nuestra formación (en especial de mis hijas) y que ha cautivado poco a poco nuestros corazones. Nunca nos olvidaremos del ejemplo de solidaridad y respeto de esta tierra.

A los profesores y profesoras de los Institutos Xelmírez I, Rosalía de Castro y San Clemente y a sus respectivos alumnos, que gentil y desinteresadamente colaboraron en este trabajo de investigación. A Antía, Marta, Marcos y Laura, estudiantes de Magisterio, protagonistas de nuestros Estudios de Casos, por sus esfuerzo, interés y disponibilidad manifestados en este trabajo.

A la Dra. Helena Cury, por la amistad y valiosas aportaciones en la fase final, de revisión, de este trabajo. A los Dres. Carmen Batanero y Joaquín Giménez por las orientaciones en la fase del diseño de la investigación. A los Dres. Fredy González y Luisa Gironde por el gran apoyo prestado y recomendaciones de lecturas. A Xandra por la revisión gramatical y ortográfica. A la Dra. Leonor Santos por haber mediado para la consecución de mi estancia en Portugal.

A los profesores Dres. José Manuel Domínguez Castiñeiras, Isabel García-Rodeja Gayoso, Felipe Trillo Alonso, Carmen Vázquez Vaamonde y, en general, al profesorado del Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais y a los compañeros del grupo de trabajo del Proyecto “Álgebra en la Enseñanza Secundaria”, por sus aportaciones e incentivos constantes.

Agradezco especialmente al Dr. Vicenç Font su disponibilidad, dedicación y desinteresada colaboración en todas las fases del trabajo; al Dr. Juan Godino por sus valiosas contribuciones; al Dr. Domingos Fernandes que amablemente y con gran profesionalidad me ha orientado en mi estancia en la Universidad de Lisboa; y al Dr. Bruno D'Amore por su inestimable colaboración.

A mis amigos en Brasil, siempre presentes a pesar de la distancia, Mariluce (y sus llamadas nocturnas), Jarbinhas, Aurinha, Enoque, Gilda, Carrera, Jônei, Wania, Kleber, Anafer,...

A mis amigos en España, Jorge, Esther, Xandra, Flora, Pepe, Fina, Montse, Carmen, Ana, Wagner, Jorge Acevedo y en general a los amigos de la Facultad de Ciencias de la Educación,... por su amistad y cariño.

A mis compañeros de trabajo de la Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), que acreditan que el desarrollo profesional del profesor más que una conquista personal es una conquista de la institución, que busca entre sus metas la formación de sus profesionales y, por tanto, la calidad de la educación e investigación que promueve. En este ámbito, son muchos los compañeros a los que quisiera mostrar mi agradecimiento, a riesgo de olvidarme de alguno de ellos, voy a personalizarlo en la Dra. Lívia Diana Rocha Magalhães y en el prof. Edson Mascarenhas, por su profesionalidad, amistad y compañerismo.

Asimismo quiero mostrar mi agradecimiento al Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), bajo la dirección del Dr. Miguel Santos Rego y a la UESB, por su aportación económica que contribuyó a hacer posible este trabajo.

Finalmente deseo expresar un especial agradecimiento a mi familia por el apoyo, paciencia y comprensión durante todos estos años de estudio, asumiendo muchas de mis labores y responsabilidades familiares y soportando los altibajos de mi estado de humor. A vosotros queridos míos, Humberto, Carol e Izadora dedico este trabajo. También lo dedico a nuestra gran familia en Brasil, siempre presente a través de todos los medios de comunicación, haciendo menor la distancia y llenándonos de amor. Especialmente, se lo dedico a mi hermana Nadinha deseando que en breve ella pueda realizar sus sueños universitarios.

Agradecimientos.....	i
Índice.....	iii
CAPÍTULO 1- INTRODUCCIÓN.....	01
1 Contexto general del estudio.....	01
2 Orientaciones para el problema.....	04
3 Problema y cuestiones de la investigación.....	06
4 Relevancia y pertinencia de la investigación.....	08
5 Organización general del estudio.....	09
CAPÍTULO 2- MARCO TEÓRICO.....	13
Introducción.....	13
I Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.....	14
1 Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.....	14
1.1 El Concepto de problema.....	16
1.2 La noción de práctica.....	17
1.3 La noción de institución.....	18
2 Las nociones de objeto institucional y personal.....	19
2.1 Objeto institucional.....	19
2.2 Objeto personal.....	21
2.3 Significado institucional y personal de un objeto.....	22
2.3.1 Significado y sentido de un objeto.....	23
2.3.2 Tipos de significado.....	25
3 Comprensión.....	26
3.1 La evaluación de los conocimientos.....	27
4 Configuraciones de objetos matemáticos y facetas duales.....	28
4.1 Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.....	28
4.2 Facetas o dimensiones del conocimiento matemático.....	30
5 Constructos del EOS utilizados en esta investigación.....	33

6	¿Cómo contempla el EOS a los procesos metacognitivos?.....	40
II	Metacognición: la trayectoria de su desarrollo y aplicabilidad en la educación.....	42
	Introducción.....	42
1	Los orígenes y primeros conceptos.....	42
2	El panorama general de definiciones y modelos.....	44
3	El panorama de definiciones y modelos en la Educación Matemática.....	53
4	Componentes de la metacognición.....	58
4.1	La metacognición como producto o contenido cognitivo.....	60
4.1.1	El conocimiento metacognitivo.....	61
4.1.1.1	Conocimiento de la variable de la persona.....	62
4.1.1.2	Conocimiento de la variable de la tarea.....	62
4.1.1.3	Conocimiento de la variable de las estrategias.....	63
4.1.1.4	Conocimiento de la variable interacciones entre persona, tarea y estrategia.....	65
4.2	La metacognición como proceso u operación cognitiva.....	65
4.2.1	Habilidades o Estrategias Metacognitivas.....	66
4.2.2	Monitoramento Cognitivo (Control/Regulación).....	66
4.2.2.1	Planificación.....	68
4.2.2.2	Supervisión.....	69
4.2.2.3	Regulación.....	69
4.2.2.4	Evaluación.....	70
5	Las Experiencias Metacognitivas.....	70
	Más reflexiones.....	71
III	Contextos de evaluación y de instrucción en el desarrollo de la metacognición.....	73
	Introducción.....	73
1	Contextos de evaluación.....	73
a)	Evaluación del conocimiento metacognitivo.....	73
b)	La metacognición en documentos programáticos internacionales, NCTM y OCDE/PISA.....	79
2	Contextos de instrucción estándar y no-estándar.....	82
a)	Principios educativos y agentes sociales en el desarrollo de la Metacognición.....	82
b)	Programas diseñados y aplicados para el desarrollo metacognitivo.....	86
IV	La dinámica de las discusiones en torno a la resolución de problemas y la metacognición: una cuestión de circunstancias.....	91
	Algo más sobre la relación entre estas dos temáticas.....	97
V	Relación entre metacognición y prácticas de RP.....	101
	Configuración metacognitiva institucional de referencia.....	104
CAPITULO 3- PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....		109
	Introducción.....	109
I	Perspectivas metodológicas.....	109
1.1	Experiencias y papeles de la investigadora.....	111

Introducción.....	137
II El diseño de la investigación.....	113
2.1 Problema y cuestiones de investigación.....	113
2.2 Hipótesis del trabajo.....	115
2.3 Naturaleza de las informaciones.....	116
2.4 Participantes y Contexto del Estudio.....	117
2.5 Las cuestiones de validez y la técnica de Triangulación.....	117
2.6 Instrumentos de investigación utilizados en la recogida de datos.....	119
2.6.1 Prueba de Habilidades Metacognitivas (PHM).....	122
2.6.2 Entrevistas orales y semi-estructuradas (la Técnica de Retrospección).....	125
2.6.3 Debate en grupo sobre la PHM. Primera Triangulación.....	126
2.6.4 Evaluación Estimada del profesor (EEP).....	128
2.6.5 Calificaciones Finales de Curso (CFC).....	129
2.6.6 Observación indirecta de un proceso de instrucción.....	130
2.7 El proceso de análisis de datos y los criterios. Segunda Triangulación.....	130
2.8 Posicionamiento en el análisis de datos ante las dificultades y limitaciones.....	134
 CAPÍTULO 4- PRESENTACIÓN, ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS DE INVESTIGACIÓN.....	 137
I Bloque Análisis de las respuestas prototípicas.....	139
II Bloque Análisis de estudios de casos (individual y en grupo).....	180
III Bloque Análisis de correlaciones.....	262
IV Bloque Análisis de un proceso de instrucción estándar.....	272
 CAPÍTULO V- CONCLUSIONES.....	 293
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	315
ANEXOS.....	327
Anexo A.....	327
Anexo B.....	341
Anexo C.....	353
Anexo D.....	360

Capítulo 1

Introducción

“Hablando se aprende, escuchando se enseña”¹

Se pretende en este capítulo realizar una síntesis de las razones que de algún modo nos han conducido al diseño de la investigación, es decir, las razones para el planteamiento del problema y cuestiones que orientan el estudio.

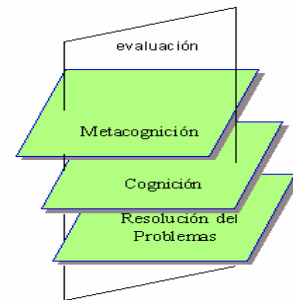
1. Contexto General del Estudio

La labor investigadora que nos propusimos desarrollar nos ha permitido, entre otras cosas, reflexionar, una vez más, sobre nuestro papel como agente hablante y oyente del proceso educativo. Cuestionamos muchas veces nuestro papel como educadores, un papel que puede marcar definitivamente el rumbo educativo (en el sentido amplio del término educación) de nuestros alumnos. Evocamos en este punto a Paulo Freire (y a sus obras “Pedagogía del Oprimido” y “Educación como Práctica de la Libertad”), cuando percibimos que no podemos hablar del papel de profesor sin hablar del diálogo, fenómeno que puede romper la relación opresor-oprimido, aún más inmersos en un sistema educativo que, bajo nuestro punto de vista, es fuertemente tradicionalista y, por ello, resistente a cambios. Percibimos que desempeñar el papel de profesor requiere -además de valores siempre reconocidos, como el de ser innovador, el gusto por lo que se hace, el preocuparse por el alumno, por su aprendizaje- estimular el diálogo y dar oportunidad para que el alumno hable y hable nuevamente, una y otra vez; requiere ponerse como alumno, ser oyente, escuchar y escuchar nuevamente, una y otra vez. En este momento ya nos estamos remitiendo al aforismo de la cita previa: *hablando se aprende, escuchando se enseña*, y a las experiencias que tuve en la Universidade Estadual Paulista (UNESP) particularmente

¹ Aforismo crítico del modelo tradicional de enseñanza y que sustentaba las clases del profesor Baldino en la UNESP –Universidade Estadual Paulista– Brasil.

con los profesores Baldino y Carrera. El trabajo del profesor en clase debería centrarse más en escuchar y menos en hablar, cediendo, poco a poco, protagonismo al alumno, que debería a su vez, y a través de la comunicación constante, conquistar el aprendizaje. Es percibiendo al profesor como un elemento menos hablante y más oyente como vemos su contribución a la formación de un ciudadano crítico, reflexivo. Es así como tiene sentido hablar de un profesor convergente con una práctica de la enseñanza liberadora, en el sentido de Paulo Freire, volcada hacia la autonomía del alumno en su aprendizaje.

En la práctica investigadora que proponemos, nos adentraremos en tres áreas de estudio relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la Matemática: Metacognición, Cognición y Resolución de Problemas (RP). Hablar de cualquiera de estas implica hablar de la otra, ya que son tres áreas íntimamente relacionadas y, juntas, nos ayudarán a comprender las razones que guían las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas. Obviamente, entraremos en una cuarta área que es transversal a las primeras, la de Evaluación.



La Metacognición es una temática que en esencia requiere, entre otras cosas, reconocer y observar la autonomía del alumno. De forma que nos pareció oportuno estar evocando las enseñanzas de Paulo Freire (Freire, 1979; 1996). Así, una educación que promueva el desarrollo de la metacognición estará contribuyendo al desarrollo de la autonomía del estudiante (también en el sentido de Freire). Para ello, es necesario estimular el desarrollo de habilidades metacognitivas (Mateos, 2003), acercándoles progresivamente al control de su propio proceso de aprendizaje (Trillo, 1989), respondiendo a una necesidad de la escuela (de la educación) que desee favorecer la autonomía en el aprendizaje (Lafortune, Jacob y Hébert, 2003). “No sólo conseguir alumnos más reflexivos y concientes de los procesos mentales (...), sino que esa reflexión sirviera como medio para facilitar el avance de los alumnos en la dirección de la autorregulación de sus propios procesos de aprendizaje” (Mateos, 2001, p.15).

El papel relevante que la educación formal y, de forma similar, la no formal (o espontánea) desempeñan en el desarrollo de los procesos metacognitivos es plasmado en el ámbito general de las investigaciones en el área educativa (Mateos, 2001; Mayor, Suengas y González, 1993; Crespo Allende, 2000-1; Schoenfeld, 1985a; González, 1996; Schraw, 2001; Hartman, 2001 y Gourgey, 2001). En Didáctica de las Matemáticas, por ejemplo, al

igual que en otras, muchos de los esfuerzos se dirigen a tratar de comprender las relaciones entre cognición y metacognición. En la revisión de la literatura pertinente, observamos que muchos de los estudios que se preocupan por comprender las relaciones entre estos procesos se apoyan (y aquí nos incluimos) en la definición de Flavell (1976) para diferenciar las estrategias cognitivas de las metacognitivas: las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia una meta, y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso. Sin embargo, esta diferenciación no siempre resulta fácil de discernir. De hecho, se presentaron algunas dificultades cuando intentamos aplicarla a una práctica matemática (como por ejemplo, la resolución de un problema) pretendiendo una mejor comprensión de dicha práctica. Esto nos ha llevado a buscar marcos teóricos que intentasen explicar la realización de una práctica. De ahí la decisión de utilizar el “Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática” (EOS).

El EOS es un enfoque emergente que viene desarrollándose hace más de una década por Godino y colaboradores (por ejemplo, Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa (2005) y Font, 2005-6). Propone un análisis de la noción de “significado” desde un punto de vista didáctico, dirigido, entre otras cosas, a apoyar los estudios sobre la evaluación de los conocimientos. Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal. Los objetos matemáticos son concebidos como entidades emergentes de sistemas de prácticas. Se propone como objeto básico para el análisis “los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas” (Godino, 2002, p.242). Las prácticas, así como la dialéctica personal-institucional, ocupan un lugar privilegiado en este enfoque proporcionando una visión más integral de la problemática del conocimiento del alumno.

Para analizar la actividad matemática el EOS nos presenta la “Técnica del Análisis Semiótico”, mostrándonos cómo aplicar la tipología de objetos y dimensiones del conocimiento matemático contruídos por dicho “enfoque”. A pesar del indispensable apoyo de este “enfoque” para nuestro trabajo, entendíamos que, para interpretar con mayor detalle la complejidad de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de RP y, por ende, de la comprensión de las matemáticas, era necesario considerar además, explícitamente, los aspectos metacognitivos.

Finalmente refiriéndonos al área de RP, es conocido que los problemas y su resolución han marcado el desarrollo de la Historia de las Matemáticas y, en tanto que línea de investigación, fue (y continua siendo) uno de los pilares básicos del edificio de la Educación Matemática como disciplina científica (Fernandes, 1988, 1991-2; Lester, 1994; Vilas, 2001, 2004; González, 2005) que tiene como uno de sus principales objetivos capacitar a los estudiantes para resolver problemas. Pero el logro de este objetivo no es nada fácil (Pifarré y Sanuy, 2001). La realidad del aula muestra la casuística de dificultades y errores observados en el alumnado en el proceso de resolución de problemas matemáticos (Callejo y Vilas, 2003). “La resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana” (Contreras y Carrillo, 1997, p.22). La RP es un proceso complejo y, como tal, las investigaciones que intentan comprender ese proceso atribuyen la causa del éxito y/o fracaso de los estudiantes a un conjunto de variables que, de un modo u otro inciden en las competencias del estudiante y, por tanto, en su práctica: conocimientos (declarativo, procedimental y condicional), estrategias (cognitivas y metacognitivas), recursos, heurísticas, control, emociones, actitudes, sistemas de creencias, contextos socio-culturales, ..., entre otras (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994a, 1994b; Fernandes, Borralho y Amaro 1994; Guzmán, 1995; Carrillo, 1996, 1998; Puig y Cerdán, 1996; D’Amore, 1997; Hegedus, 2000; Gusmão 2000a,b; Vilas, 2001, 2004; González, 2005, entre otros).

2. Orientaciones para el Problema

Uno de los intereses de la Didáctica de las Matemáticas es identificar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos (conceptos, propiedades...), así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. Si aceptamos que un sujeto “comprende” o “capta” el significado de un objeto cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, relacionarlo con otros objetos y aplicarlo a una variedad de situaciones problemáticas prototípicas, estaremos relacionando la idea de “significado” con la de “comprensión” (Godino, 2003).

La importancia que tiene la noción de comprensión para la Didáctica de las Matemáticas se ve plasmada en diferentes investigaciones y documentos curriculares de amplia difusión e influencia internacional como los del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 1995, 2000), pero su caracterización continúa siendo un

problema. Y, en este orden, Sierpinska (1994, p.3) formula las siguientes preguntas: ¿Cómo enseñar de modo que los estudiantes comprendan?; ¿qué es lo que no comprenden?; ¿qué comprenden y cómo? En los documentos referidos del NCTM se señala que los estudiantes deberían comprender las matemáticas, sin embargo, la realidad del aula parece distanciarse de estos planteamientos. La práctica del aula parece decantarse hacia la práctica rutinaria de ejercicios algorítmicos, con clara predominancia del marco aritmético-algebraico, promoviendo casi en exclusiva la “comprensión instrumental” (en el sentido de Skemp, 1976). Esta práctica muestra también debilidades, como la escasa puesta en escena de variados sistemas de representación del conocimiento matemático y la ausencia significativa de contextos y situaciones-problema enfocados hacia la comprensión, y consecuente aprendizaje, de los conceptos matemáticos objeto de estudio. En Galicia (España), esta apreciación se refleja con nitidez tanto en la posición de los profesores de matemáticas, como en los enfoques de los textos de impacto relevante en el aula, y en la consecuente influencia sobre las carencias comprensivas, por parte de los estudiantes, del conocimiento matemático propio del nivel educativo en que estos se encuentran. (Godino, 2003; Cajaraville, J., Fernandez, T., Labraña, P., Salinas, M., De La Torre, H., Vidal, E., 2003a)

Existen indicadores que justifican la realización de estudios que aborden diversos aspectos de las acciones de los estudiantes en situación de aprendizaje y, en particular en el proceso de RP (e.g. los documentos del NCTM, 2000, y el Informe PISA/OCDE, 2003). Por ello, la actividad de RP, también merece una atención especial en ese contexto, toda vez que la matemática puede ser concebida como la actividad de resolver problemas (Polya, 1965). A pesar de lo mucho que se ha investigado existe un interés constante en evaluar las capacidades de los estudiantes y los procesos implicados en la RP que, como área de investigación, continúa siendo todo un campo de inspiración.

Entre las propuestas (o programas) que de un modo general utilizan la RP y la actividad matemática como fuente para la construcción del conocimiento matemático, que son llevadas a cabo por algunos investigadores en el intento de comprender cómo los estudiantes realizan una práctica, están el EOS (Godino, 2002; Font, 2005; entre otros) y la metacognición que, además, se convierte en un medio para ayudar al estudiante a mejorar sus competencias en la RP y, consecuentemente, para lograr aprender comprensivamente las matemáticas. La metacognición viene desempeñando un papel importante en la RP y

como tal reconocen su relevancia autores ya mencionados aquí (e.g., Fernandes, 1992; Lester, 1994; González, 1996).

En estudios previos realizados con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) (Gusmão, T. R. S; Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A. 2004a,b; Gusmão, et. al. 2005a,b; Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A. y Gusmão, T.R.S. 2003b), en los que fundamentalmente las herramientas teórico-metodológicas usadas venían del campo de la metacognición, constatamos que los análisis hechos de los conflictos y dificultades observadas en estos estudiantes cuando realizaban prácticas para resolver problemas eran limitados, lo que nos llevó a plantear la posibilidad de completarlos utilizando los constructos del enfoque ontosemiótico.

Es en esta perspectiva en la que situamos nuestra investigación, en la cual utilizaremos el EOS y la Metacognición como medios fundamentales para el análisis de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el proceso de RP.

3. Problema y cuestiones de la investigación

Nuestra investigación se centra, en particular, en el estudio de las relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos y las prácticas de RP por parte de estudiantes de determinados niveles educativos. Todo ello con la perspectiva de que los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, debieran contribuir al desarrollo de conocimientos metacognitivos preexistentes. Así, resulta necesario presentar el problema de investigación, que viene determinado por las siguientes cuestiones:

CUESTIONES GENERALES	CUESTIONES ESPECÍFICAS (y aclaraciones)
<p>CG1. <i>¿De qué manera podemos comprender las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de RP a través de la integración de ciertos constructos teóricos del EOS y de la Metacognición?</i></p>	<p>CE1. <i>¿Cómo podemos describir, analizar e interpretar las prácticas que realizan los estudiantes de dos niveles educativos, E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) y Magisterio, considerados individualmente, en grupo y con el apoyo del profesor, en el proceso de RP a través de la integración de los constructos del EOS y de la Metacognición para?</i></p>

<p>CG2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las competencias metacognitivas de los estudiantes, evaluadas en nuestras tareas de RP, y su rendimiento académico?</i></p>	<p>CE2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en nuestras tareas y sus Calificaciones Finales de Curso (CFC) (medidas por la media obtenida en el conjunto de todas las asignaturas), en particular, en la asignatura de Matemática (MAT)?</i></p>
<p>CG3. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre los niveles de competencia metacognitiva que los profesores presuponen (1) a sus alumnos y los niveles observados a través de una prueba externa (2)?</i></p>	<p>(1) <i>a través del conocimiento de aulas y tomando por base nuestra prueba (externa), el profesor estimará las competencias metacognitivas de sus alumnos (as). A esta estimación nombraremos EEP (Evaluación Estimada del Profesor).</i> (2) <i>PHM – Prueba de Habilidades Metacognitivas.</i></p>
<p>C4. <i>¿De qué manera la metacognición emerge en los procesos de instrucción estándar (entendidos como aquellos que no han sido programados expresamente para desarrollar y/o incrementar la metacognición)?</i></p>	

En este contexto, consideramos cuatro premisas que son necesarias enunciar:

- 1) Consideramos que las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP pueden ser mejor explicadas si se contemplan para su análisis la integración de ciertos constructos teóricos, como el EOS y la Metacognición;
- 2) Consideramos que las dificultades para resolver problemas, por parte de los estudiantes, están relacionadas con sus carencias cognitivas y metacognitivas;
- 3) Consideramos que las competencias metacognitivas de los estudiantes inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas;
- 4) Consideramos que el desarrollo de la metacognición forma parte de los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, y que puede impulsarse si profesores y alumnos toman conciencia de éstos.

4. Relevancia y Pertinencia de la Investigación

El aprendizaje adquirido y la reflexión que hacemos a partir de esta investigación nos lleva, sobre todo, a tomar conciencia de que aún sabemos muy poco sobre los procesos de comprensión de nuestros alumnos(as) y, si queremos aproximarnos cada vez más a una comprensión plena de los mismos, son necesarios estudios de esta naturaleza y, seguro, la consideración de otros factores que aquí no contemplamos. Por otra parte, éstos mismos, aprendizaje y reflexión, incumben directamente a la profesora preocupada por la calidad de su propia práctica, la cual debe ser responsable, consciente y mediadora de los procesos de aprendizaje cognitivo y metacognitivo de sus alumnos(as). Creemos que, por sí sola, esta reflexión ya justificaría la importancia de este estudio, es decir, la importancia que tiene para el propio desarrollo profesional de la investigadora.

Además, los resultados pueden ser relevantes para quien se preocupa, en particular, por comprender mejor los procesos metacognitivos (también los de RP y cognición), dado que la investigación propuesta, con su delimitación del problema, del campo social o geográfico, del período tratado y del dominio teórico abarcado, puede -sin pretensiones de aportar novedades aún no exploradas- ser única en la medida en que las muestras elegidas para el estudio, en su contexto socio-cultural y en el momento en que se concretiza el estudio, no se repiten (Beaud, 1990).

Al intentar integrar ciertos constructos del EOS y de la Metacognición para estar en mejores condiciones de explicar, y luego comprender, las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP, creemos estar contribuyendo, por una parte, a enriquecer el marco de la Metacognición, aportando nuevos matices de interpretación y clarificación de diferentes aspectos de dicha problemática desde un punto de vista didáctico, y, por otra, puesto que pretendemos complementar el Marco del EOS con el constructo de configuración metacognitiva, los resultados pueden tener interés teórico. De modo que, comprender las prácticas de nuestros alumnos(as) en el campo de RP, es importante para establecer mejores condiciones que permitan aportar explicaciones a la problemática didáctica asociada al problema de la comprensión de las matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2001-3; Cajaraville, et. al. 2003b; Gusmão, et. al. 2004a,b; Gusmão, et. al. 2005a,b; -2005; Font, 2005).

Quizás el estudio de las interrelaciones entre Cognición, Metacognición, RP y Evaluación, nos permita averiguar en qué dirección se pueden orientar las investigaciones

para clarificar algunas lagunas que siguen latentes en la comprensión de la problemática didáctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como por ejemplo, que el fracaso puede estar asociado a la utilización de estrategias metacognitivas básicas o que las dificultades de aprendizaje estén asociadas con la ausencia de regulación del estudio (Gonçalves, 1996), y, a ser posible, derivar consecuencias para la superación de dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, la importancia y relevancia de la presente investigación se relaciona con el interés nuclear de la comunidad de educadores matemáticos por la problemática del significado de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas. Y dado que, como aludimos anteriormente, aún faltan caminos por recorrer en el intento de entender los procesos de comprensión de los alumnos, experimentar nuevas formas de analizar y comprender sus prácticas es una forma de contribuir a aproximarnos a este entendimiento, y pensamos que esta investigación puede contribuir a motivar la realización de otros estudios en esta dirección.

5. Organización general del estudio

De modo general, el estudio está organizado en cinco capítulos, incluyendo esta **Introducción**.

En el **capítulo 2**, se encuentra la revisión de la literatura o “marco teórico” donde abordamos temas relativos a las áreas de estudio ya mencionadas. Con respecto al área de Cognición, dirigimos nuestra atención al programa del EOS, describiendo resumidamente su modelo teórico. Nos centramos especialmente en los constructos definidos como “configuraciones epistémicas y cognitivas” que tienen en cuenta las entidades u objetos matemáticos: *lenguaje, procedimientos, definición (concepto), proposiciones, argumentos, y situación-problema*, para explicar la realización de una práctica. Desde este contexto observamos la necesidad de ampliarlo, contemplando una configuración metacognitiva para la realización de dicha práctica. Así que, adentrados en el área de la Metacognición, consideramos pertinente hablar, entre otras cosas, de la trayectoria histórica de su desarrollo y, a partir de ahí, resaltamos la estructura organizativa de la temática, respetando los matices personales de cada investigador, que ayudan a expresar como ésta es percibida. Damos a conocer, sobre todo, cómo la metacognición puede ser desarrollada y/o incrementada a través de las experiencias en contextos sociales diversos y,

específicamente, a través de procesos de instrucción formal o no formal. También desde este contexto, dejamos patente la necesidad de contemplar una configuración cognitiva para explicar la realización de una práctica. A continuación, pasamos al área de RP, toda vez que nuestro campo de actuación es la práctica de resolver problemas. Ofrecemos, ahí, una breve discusión de la relación entre RP y Metacognición. Como ya mencionamos el área de Evaluación es transversal a las tres primeras, de modo que la atención que damos a ésta está presente en todas las temáticas, pero particularmente dedicamos unos breves comentarios sobre cómo la metacognición es evaluada. Finalizamos nuestro “marco teórico” con un apartado donde buscamos sintetizar y concluir el razonamiento inferido sobre una visión pragmática de la metacognición, mostrando la organización de ideas en el intento de explicar lo que consideraremos como el constructo *configuración metacognitiva*, que vendrá a complementar el constructo configuración cognitiva del EOS.

A continuación, en el **capítulo 3**, desde una perspectiva cualitativa-cuantitativa, exponemos nuestras opciones metodológicas, fruto tanto de la complejidad de la temática como de juicios personales sobre los modos de concebir una investigación en nuestro ámbito. Volvemos a enunciar las cuestiones de la investigación y presentamos el conjunto de hipótesis para que el lector pueda acompañar la dinámica del trabajo que se seguirá en el capítulo de análisis de datos. Además, se pretenden describir los criterios generales de análisis.

En el **capítulo 4**, presentamos el análisis de datos obtenidos a través de los instrumentos de investigación aplicados a una muestra de 185 estudiantes de 3º y 4º de E.S.O.; se analiza, también, el trabajo realizado con 4 alumnos de Magisterio (3º de Educación Primaria), lo que se complementa con el análisis de un proceso de instrucción. Estos análisis nos han permitido verificar las hipótesis enunciadas. De modo general, los resultados señalan que las competencias metacognitivas de los estudiantes parecen incidir sobre el rendimiento académico en matemáticas y que sus dificultades en la RP están relacionadas con sus carencias cognitivas y metacognitivas; y que un profesor consciente de su papel como formador de ciudadanos críticos, reflexivos y autónomos, conduce, inevitablemente, en el día a día, al alumno(a) a desarrollar competencias metacognitivas.

Finalmente, nuestro estudio culmina con el **capítulo 5**, el cual dedicamos a las conclusiones. Entre otros aspectos, la investigación nos indica que los constructos “configuración epistémica y cognitiva” (del EOS) y el “constructo configuración metacognitiva”, juntos, constituyen una valiosa herramienta de análisis para comprender

con eficacia la realización de las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP. Cualquier proceso de instrucción que considera los aspectos metacognitivos como obvios supone perder la oportunidad de un trabajo explícito y consciente de los mismos, además, bajo cualquier intención de desarrollo de competencias metacognitivas, está la de que ésta promueve, de forma natural, las dos posiciones complementarias del diálogo: hablar y escuchar.

Capítulo 2

Marco Teórico

“Si incluí la Visibilidad en mi lista de valores a salvar es para advertir del peligro que corremos de perder una facultad humana fundamental: el poder de enfocar visiones de ojos cerrados, de hacer brotar colores y formas a partir de un alineamiento de caracteres alfabéticos negros en una página blanca, de pensar por imágenes...”
(Seis propuestas para o próximo milênio, Ítalo Calvino)

Introducción

En este capítulo, destinado a la revisión de la literatura, presentaremos los modelos teóricos considerados, que están organizados en dos grandes ámbitos que podríamos resumir en Cognición y Metacognición. La cognición matemática ha sido y es una constante en las ciencias y tecnologías interesadas por la cognición humana. Entre las corrientes o modelos en torno a esta temática centraremos nuestra atención en el “Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática” (EOS), un enfoque que viene siendo emergente en nuestra área científica. Presentaremos brevemente algunos de sus constructores, y nos centraremos, en particular, en aquellos que han sido especialmente útiles en nuestra investigación. Mostraremos cómo en dicho enfoque, si bien hasta el momento no se ha tenido en cuenta la metacognición, se es consciente de la necesidad de desarrollar constructos teóricos de tipo metacognitivo. La necesidad de ampliar las actuales explicaciones que se proponen en el EOS para la comprensión de la realización de una práctica matemática, justificaron la inserción de nuevas herramientas teóricas que tienen su origen en las investigaciones sobre la metacognición. Al adentrarnos en el ámbito de la metacognición presentaremos también, de manera breve, sus constructos, algunas discusiones sobre su relación con el contexto de resolución de problemas, evaluación y procesos de instrucción. Por otra parte, también, observamos las limitaciones de esta teoría, si se contemplan de manera aislada sus constructos, para comprender mejor la realización de una práctica matemática. De igual modo, sentimos la necesidad de complementar esta teoría, ahora, con los constructos del EOS. Finalizando nuestra revisión de la literatura,

presentamos nuestras aportaciones para el presente trabajo, que va en la dirección de conjugar estos dos grandes ámbitos en un esquema (unidad mínima) de análisis de las prácticas, compuesto por los constructos que hemos llamado *configuración epistémica y cognitiva* y *configuración metacognitiva*.

I - ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En diferentes trabajos, Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002a,b,c; Godino, Batanero y Roa, 2005; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font, en prensa; entre otros.) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran un enfoque ontológico y semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticas. Se trata de un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Es pragmático puesto que propone una formulación del significado de los objetos matemáticos que asume los presupuestos de la epistemología pragmática: “las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción” (Faerna, 1996; p. 14). Hablamos de una perspectiva antropológica, ya que su principal objeto de estudio es el hombre aprendiendo en instituciones escolares, y las matemáticas son el resultado de una construcción social realizada en diferentes instituciones. Por último, decimos que es semiótico porque atribuye un papel central a los recursos expresivos utilizados en la actividad matemática.

A continuación se exponen, de manera breve, algunos de los constructos del enfoque ontosemiótico.

1 - Significado institucional y personal de los objetos matemáticos

Considerando que “el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico” (Godino, 2003), el EOS toma como punto de partida la teoría antropológica de Chevallard (1989, 1991-2, 1997), específicamente, las nociones de “objeto” y de “praxema”. Para Chevallard (1991, ápod Godino, 2003), “praxema” corresponde a los *objetos materiales*

ligados a las prácticas y usa esta noción para definir el “objeto” como un *emergente de un sistema de praxemas*, más concretamente como:

"Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito" (Chevallard, *ápu*d Cobo, 2003, p.33).

Esas nociones forman parte de la base de los constructos del EOS, pero los autores de este enfoque proponen hacer de éstas, nociones más operativas y refinadas -en consonancia con los supuestos pragmáticos de las teorías de significado-, mostrando, además, sus semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales, como por ejemplo, las de “concepción” y “significado”; consideran necesario precisar las nociones de “práctica” y de “objeto”, así como un uso técnico de la noción de significado que sea útil en los estudios psicológicos y didácticos (Godino y Batanero, 1994); se interesan por reconocer explícitamente, en el componente discursivo, los “conceptos”, “proposiciones” y “argumentaciones”, así como el “lenguaje”, objetos ostensivos en la terminología de la teoría antropológica (Godino, 2002a).

El EOS reconoce la distinción e interdependencia entre la esfera de lo personal y de lo institucional como ejes principales de la antropología cognitiva, pero, también, alerta de que un énfasis excesivo en lo institucional puede llevar a prescindir de la esfera de lo mental, de los fenómenos relacionados con el aprendizaje del sujeto. De ahí que la consideración explícita de este dominio lleve a los investigadores a diferenciar entre “objeto institucional” (conocimiento objetivo) y “objeto personal/mental” (conocimiento subjetivo).

Se destaca que las prácticas y sus relaciones con los objetos están organizadas en torno a una finalidad: adoptar decisiones, resolver situaciones problemáticas, etc., y por eso se considera necesario tomar como noción primitiva la de “situación-problema”.

Por tanto, los autores se interesan por elaborar una *ontología simple* “de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado” (Godino y Batanero 1994, p. 333). O sea, proponen como objeto básico para el análisis “los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas” (Godino, 2002a,

p.242). Así, a partir de la noción de “situación-problema”, definirán los conceptos teóricos de “práctica”, “objeto (personal e institucional)” y “significado (personal e institucional)”, para hacer operativo ese triple carácter de la matemática y la génesis personal e institucional del conocimiento matemático y su mutua interdependencia.

1.1 - El Concepto de “problema”

Entre las muchas definiciones válidas de *problema*, dos son particularmente adaptadas al EOS. La primera es de Lester (1980), el cual define *problema* como “una situación en la que se pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución” (Godino, 2003, p.88) y la segunda es dada por Simon (1978): “un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente” (Godino, 2003, p.88). Son definiciones generales y que se refieren a problemas de cualquier índole. Sin embargo, el interés de Godino, expresado en sus palabras, es “dilucidar las características de los problemas o situaciones de tipo matemático” (ibid. p.8) y como ilustración nos presenta un ejemplo de estimación de una cantidad desconocida, tomando como objeto matemático la "media". Las observaciones hechas para ese ejemplo particular, pensamos se pueden extender a cualquier problema en general. Así, puede que en el enunciado de una cuestión y en el desempeño de las tareas correspondientes intervengan objetos matemáticos diversos y se hace necesario precisar, entre otras cosas, a) la búsqueda, dentro del campo de problemas, de lo esencial entre los distintos contextos, b) las relaciones con otras situaciones y c) la actividad de matematizar, etc.

Las “actividades de matematización” son aquellas dirigidas a buscar soluciones que no son accesibles en el momento, a comunicar la solución a otros, a justificarlas, etc. El hecho de relacionar un problema y su solución, con otras situaciones y contextos, con el objeto de generalizar, simbolizar y validar la solución fue descrita por Freudenthal, en 1991, como actividad de “matematizar” (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2003).

Las características de la actividad de matematización son sintetizadas en la definición de práctica que se presenta a continuación.

1.2 - La noción de “práctica”

Una de las primeras nociones introducidas en el marco del EOS fue la de *práctica* y, conforme acabamos de mencionar, el desarrollo de esta noción tuvo como meta principal caracterizar las “actividades de matematización” y, como tal se nos presenta:

DEFINICION 1: Llamamos “práctica” a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Es observable que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales y/o abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Son esos mismos objetos ligados a la práctica que Chevallard (1991) denominó “praxemas”.

Lo que interesa a los autores, “más que una práctica particular en un problema concreto dado, son los tipos de prácticas, esto es, los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas” (Godino y Batanero, 1994, p. p.335). A estos invariantes les llaman “prácticas prototípicas (o características)” y, que pueden ser asociadas a cada campo de problemas y/o a cada persona.

También se presenta la noción de “práctica personal significativa” y, en ese sentido proporcionan la siguiente definición:

DEFINICION 2: Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

El carácter subjetivo con que se dota la definición de “práctica”, lleva los autores a diferenciar entre “prácticas personales” y “prácticas institucionales”. Mientras que las primeras pueden variar de un sujeto a otro, las segundas son compartidas socialmente en una misma institución. (Serrano, 1996)

Cabe resaltar que en el EOS se considera que no se pueden interpretar las conductas observables de los alumnos si no les atribuimos una finalidad, de ahí la distinción que se hace entre “conducta humana” (comportamiento aparente y observable) y “práctica” (acción humana orientada a un fin).

1.3 - La noción de “institución”

En la Sociología se suelen considerar las instituciones básicamente desde dos perspectivas: la primera, tendría que ver con la configuración de un conjunto de prácticas compartidas y la segunda, las entiende como una organización que se compone de: un cuerpo directivo, un edificio y unos trabajadores, destinada a servir algún fin socialmente reconocido y autorizado. Es evidente que las instituciones escolares encajan claramente en estas dos maneras de entender las instituciones.

En el EOS interesa, sobre todo, la primera manera de entender la institución, sin que esto implique no tener en cuenta el otro punto de vista.

Dado que las situaciones problemáticas y sus soluciones son socialmente compartidas en el seno de instituciones, son conceptualizadas las nociones de "institución" y de "sistema de prácticas sociales":

DEFINICION 3: Una “institución” (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Se llama “institución matemática” (M) a las personas que en el seno de la sociedad están comprometidas en la resolución de nuevos problemas matemáticos; son los productores del "saber matemático". Otras instituciones involucradas con "situaciones matemáticas" son los "utilizadores" del saber matemático (matemáticos aplicados) y los "enseñantes" del saber matemático (la escuela del saber matemático) (Godino y Batanero, 1994).

En el seno de las distintas instituciones, el EOS se interesa por el conjunto de prácticas que tienen por objeto lograr la solución del correspondiente campo de problemas,

mirándolas desde una perspectiva sistémica para indagar su principio organizativo. De ese modo, definen:

DEFINICION 4: Sistema de “prácticas institucionales”, asociadas a un campo de problemas:

Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un “campo de problemas” C y compartidas en el seno de la “institución” I .

Este sistema es representado por la notación $P_I(C)$.

Entre los tipos de prácticas sociales citadas, mencionamos: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos y argumentaciones.

2 - Las nociones de “objeto institucional” y “personal”

Normalmente la efectividad de una práctica matemática es compartida por distintas personas a lo largo del tiempo, en situaciones problemáticas diversas, y más adelante pueden llevar a evoluciones de la práctica y de los objetos que de ella emergen, como es ilustrado por los autores para el caso del objeto matemático "media".¹

2.1 - Objeto “institucional”

En otras palabras, “el objeto matemático media se presenta como un ente abstracto que emerge² progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos”. (ibid. p.336)

En el contexto de las “prácticas socialmente compartidas” se observa que éstas pueden variar en las distintas instituciones, y en vista de eso, se aclara que se ha de conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas.

¹ Godino explicita la evolución de ese concepto (en contextos de prácticas variadas). Para más detalle ver Godino y Batanero (1994).

² “De acuerdo con Morin (1977), la noción de emergencia significa que los productos globales de las actividades que forman un sistema disponen de cualidades propias, las cuales retroactúan sobre las actividades mismas del sistema del que se vuelven inseparables” (Godino y Batanero, 1994, p.338).

Así que, recurriendo a la máxima pragmática de que un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución, es definida la siguiente noción:

DEFINICION 5: “Objeto institucional” O :

Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I .

En esos términos se afirma que la emergencia del objeto es progresiva a lo largo del tiempo y, en un momento dado, es reconocido por la institución, nombrado, generalizado o modificado, o bien empleado para resolver otros campos de problemas, según se va ampliando el campo de problemas asociado. “El objeto institucional puede conceptualizarse también como signo de la unidad cultural constituída por $P_I(C)$ ” (Godino y Batanero, 1994, p.336) y es el constituyente del conocimiento objetivo (en el sentido de Ernest, 1991). “Si la institución I es la institución matemática M , el objeto institucional recibirá el nombre de objeto matemático (pueden ser conceptos, proposiciones, teorías,...)” (Godino y Batanero, 1994, p.336).

Aún en relación con la “emergencia” es enfatizado:

“De un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. (...) Por otro lado, los mismos objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos problemas y pueden ser usados como herramientas en la resolución de otros. (Dialéctica herramienta-objeto formulada por Douady, 1986)” (ibid. p.338).

La “emergencia del objeto” puede ser retratada, en conformidad con Font (2005), con la siguiente ilustración:

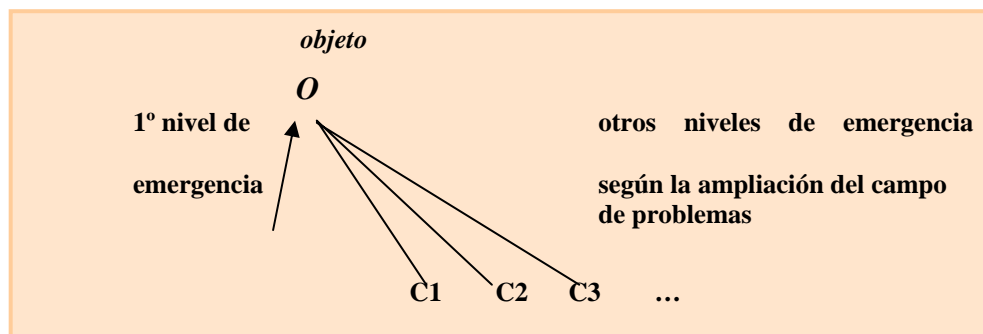


Fig.1 – Emergencia del Objeto

Como consecuencia de los presupuestos pragmáticos en que se basan, para un análisis antropológico de los fenómenos cognitivos y didácticos, los autores postulan “la existencia (cultural) de distintos objetos, según la institución de referencia, en situaciones donde la concepción absolutista de las matemáticas ve un único objeto” (Godino y Batanero, 1994, p.338).

2.2 - Objeto “personal”

Comparando la relación entre las prácticas y los problemas que las suscitan como una “relación estímulo-respuesta”, Font y Ramos (2005) consideran que en el medio de esta relación tienen lugar los “objetos matemáticos personales”. O sea, que entre el estímulo (campo de problemas) y la respuesta (sistema de prácticas) hay un lapso “donde tiene lugar el proceso (...) de simbolización por el que las experiencias (...) se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos” (p.320), dando lugar a dichos objetos – que además tiene el matiz de “conciencia subjetiva”.

Es en ese plano que Godino y Batanero (1994) proponen las nociones de "sistema de prácticas personales" y de "objeto personal":

DEFINICION 6: “Sistema de prácticas personales” asociadas a un campo de problemas:

Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C . Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$.

DEFINICION 7: “Objeto personal” O_p :

Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$.

También aquí, la “emergencia del objeto” es progresiva tiene en cuenta la historia del sujeto (experiencias y aprendizajes) y, es el constituyente del “conocimiento subjetivo” (en el sentido de Ernest, 1991).

2.3 - Significado institucional y personal de un objeto

“Los objetos son nombrados y descritos mediante ciertas prácticas (intensivas) que suelen considerarse como definiciones del objeto (incluso se identifican con el objeto mediante un fenómeno metonímico)” (Godino y Batanero, 1994, p.337). Haciendo referencia a Vergnaud (1990) se observa que éste considera que el “significado de un objeto matemático”, desde un punto de vista didáctico y psicológico, no puede quedar reducido a su mera definición. Además,

“Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo” (Vergnaud, 1990, apud Godino y Batanero, 1994, p.337).

En ese sentido, los autores coinciden con Vergnaud y afirman: “el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos” (p.338). Además, se resalta la necesidad de estar diferenciando la dimensión personal e institucional para el significado. El objeto “media”, anteriormente mencionado, sirve también para ilustrar la dimensión institucional, explicitando el tratamiento que es dado a este objeto en relación a los currículos oficiales y textos correspondientes a la escuela “elemental”, “secundaria” o mismo en la universidad y en la “vida diaria” en la que lo esencial no son las propiedades o definiciones de un objeto (en este caso, matemático), “sino que es su uso como herramienta de análisis y toma de decisiones en cierto tipo de situaciones problemáticas” (ibid.). Con esto, proponen la siguiente definición:

DEFINICION 8: “Significado de un objeto institucional” O_I :

Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el O_I en un momento dado.

Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo. Simbólicamente, para un tiempo t y una institución I :

$$S(O_I) = P_I(C)$$

Y como ya se indicó, si $I=M$, hablaremos del significado matemático de un objeto.

De ese modo, esta noción introduce en la problemática epistemológica y didáctica los sistemas de prácticas sociales (los objetos matemáticos que de ahí emergen, su evolución y dependencia institucional) y, el análisis semiótico de los objetos institucionales implica la consideración de las situaciones problemáticas y de los objetos que intervienen en la resolución de las mismas. O sea, implica la consideración de la dimensión subjetiva del significado.

Así que la noción de “significado personal” O_p es introducida en correspondencia con la noción de “significado de un objeto institucional”, en los siguientes términos:

DEFINICION 9: “Significado de un objeto personal” O_p :

Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.

Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente.

De un modo simbólico, $S(O_p) = P_p(C)$.

Según los autores, “una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituídas por acciones interiorizadas” (ibid. p.339).

2.3.1 - Significado y sentido de un objeto

Font (2005) resalta que la emergencia progresiva de los objetos matemáticos institucionales pone en evidencia la necesidad de marcar la diferencia entre sentido y referencia de un término y, apoyándose en las ideas de Frege (1998), señala que “la referencia será el objeto matemático nombrado, mientras que el *sentido* es la manera de presentación” (p.112, itálicos nuestro). Ilustra esa diferencia con el ejemplo de la “mediatriz”: se puede definir la “mediatriz de un segmento” como la perpendicular que pasa por el punto medio, o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. Tenemos el concepto de “mediatriz” relacionado con conceptos diferentes (por ejemplo, “punto medio” y “lugar geométrico”), pero se trata de la misma referencia y posee sentidos distintos ya que la manera de presentación (conexión con otros conceptos) es diferente. “Entender que las dos definiciones son equivalentes

informa de que dos definiciones, que se podrían considerar definiciones de objetos diferentes, se refieren al mismo objeto” (ibid.).

Font explicita que en una definición, como es el caso de la “mediatriz”, se puede generar un conjunto de prácticas. Tenemos el objeto “mediatriz” relacionado a otros objetos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes, lo que marca diferentes situaciones y prácticas.

Vimos que el “objeto matemático institucional” es un emergente de un sistema de prácticas y que su significado se define, también, en términos de prácticas. Parafraseando a Godino, Font describe el significado $S(O) = \{\text{Conjunto de prácticas } P_i \text{ tal que en cada práctica } P_i \text{ la institución utiliza el objeto } O\}$ (ibid.). En una perspectiva pragmática, el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto y otros más. Este hecho, hace que el autor distinga en el marco de la EOS los términos *sentido* y *significado*.

“Puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, en el EOS se entiende el *sentido* como un subconjunto del sistema de prácticas que constituyen el significado del objeto” (ibid. p.113, *itálico nuestro*).

Y ya en relación al “significado” observa:

“El *significado de un objeto matemático*, entendido como sistema de prácticas, se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir *sentido* (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos” (ibid., *itálicos nuestro*).

Lo que quiere decir el autor es que un objeto matemático con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. En cada nuevo programa la actividad de resolver nuevos problemas, aplicar nuevas técnicas, utilizar nuevas representaciones, etc., genera, con el paso del tiempo, la aparición de nuevas prácticas (sentidos) que van ampliando el significado del objeto.

Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona dispongan de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca.

2.3.2 - Tipos de significado

Desde el punto de vista instruccional, para explicar la dialéctica institucional-personal, en el EOS se consideran diferentes tipos de “significados institucionales” y “personales”.

En relación a los institucionales (tomado desde el punto de vista del profesor) tenemos, con base en Godino (2003), Font (2005) y Font y Ramos (2005), que:

- 1) será un *significado institucional de referencia* de un objeto (contenido o tema matemático) la planificación o delimitación que el profesor hace (para sus alumnos) sobre “lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas” (Font, 2005, p.115), en general, lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto. De acuerdo con Font, es un significado difícil de delimitar, toda vez que es una resultante de diferentes componentes: como la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, libros de texto y materiales que la institución escolar suele utilizar, objetos matemáticos personales de los profesores, etc.;
- 2) será un *significado institucional pretendido* de un objeto el sistema de prácticas que el profesor planifica sobre el objeto para un cierto proceso instruccional. O sea, la delimitación que hace de la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado;
- 3) será un *significado institucional implementado* el sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y para las evaluaciones de los aprendizajes. O sea, no todo lo que se planifica se pone exactamente en práctica, de ahí que posibles “cambios” en lo pretendido derivadas de las interacciones entre los sujetos en clase, son susceptibles de ocurrir; y
- 4) será un *significado institucional evaluado* de un objeto una muestra o colección de tareas (o cuestiones) que el profesor incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes.

Desde el punto de vista del estudiante, y con base en esos mismos autores, tenemos:

- 1) el *significado personal global*, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno relativas a un objeto matemático;

- 2) el *declarado*, que da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las evaluaciones propuestas (en conformidad o no con el punto de vista institucional); y
- 3) el *logrado*, que corresponde a las prácticas manifestadas en conformidad con la pauta institucional establecida.³

3 - Comprensión

Según Font (2001), básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia. Estos dos puntos de vista, según el autor, responden a concepciones epistemológicas que, como mínimo, son divergentes, por no decir que están claramente enfrentadas. Los enfoques cognitivos en la didáctica de las matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión como "proceso mental". Los posicionamientos pragmáticos del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión, básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas):

“En una situación ideal, y en una institución dada, diríamos que un sujeto "comprende" el significado del objeto O_1 -o que ha "captado el significado" de un concepto, por ejemplo- si fuese capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente” (Godino y Batanero, 1994, p.342).

Todavía, es observable que la comprensión difícilmente será o total, o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles.

³ “Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas. Por ejemplo, aunque el significado pretendido de la derivada en una institución escolar no contemple la notación incremental y la diferencial, el significado personal declarado de los alumnos suele incorporar prácticas en las que dicha notación se utiliza (Inglada y Font 2003). Este hecho se produce aún en el caso de que no se haya utilizado esta notación en la clase de matemáticas ya que el cociente incremental y el concepto de diferencial se utiliza habitualmente en la clase de física, con lo que ciertas prácticas que utilizan la notación incremental y la diferencial forma parte del significado global del alumno debido al proceso de estudio que han seguido en la clase de física” (Font y Ramos, 2005).

En trabajos posteriores el EOS considera que las “funciones semióticas” tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas dentro de un determinado juego de lenguaje. La relevancia de las mismas permite entender también la “comprensión” en términos de funciones semióticas (Godino, 2003; Godino, 2002b,c). Según este autor, se puede interpretar la comprensión de un “objeto O ” por parte de un “sujeto X ” (sea individuo o institución), en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como “funtivo (expresión o contenido)”. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de “conocimiento” equivale a hablar del contenido de una o muchas funciones semióticas, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

3.1 - La evaluación de los conocimientos

El problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos es también fuente de preocupación de los autores. Una de las cuestiones que se plantea en este ámbito es cómo evaluar aquello que no conocemos. Así que, una de las finalidades del EOS es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la “evaluación del conocimiento matemático”.

La distinción entre el significado de los objetos (personales e institucionales) y su caracterización mediante sistemas de prácticas, permite plantear el problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos como acoplamiento entre significados personales e institucionales. Este punto de vista sobre la evaluación hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas:

“Para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce x por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Webb, 1992; Snow y Lohman, 1991)” (Godino y Batanero, 1994, p.343).

Por tanto en el EOS se considera que, para poder evaluar los resultados de un proceso de instrucción realmente implementado (*significado implementado*) o bien de un

proceso de instrucción planificado en un libro de texto (*significado pretendido*), es necesario establecer el significado de referencia que sirva de comparación. En el caso que nos ocupa, la RP, será necesario establecer una “Configuración Epistémica” (CE a partir de ahora) de referencia para poder valorar la resolución de los alumnos (ver capítulos IV).

4 - Configuraciones de objetos matemáticos y facetas duales

4.1- Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el EOS se considera que para la realización de cualquier práctica es necesario activar un conglomerado formado por algunos o todos los elementos siguientes: *lenguaje, situaciones, definiciones (conceptos), proposiciones, procedimientos y argumentos*:

“Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el sujeto tenga adquirido para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una determinada situación-problema (por ejemplo, representar una función determinada) vemos que, de entrada, el sujeto ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (dominio, puntos de corte, asíntotas, etc.), simbólico (por ejemplo, la fórmula de la función) y gráfico (sistema de ejes de coordenadas, gráfica, etc.). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos (función, gráfica, dominio, etc.) y propiedades (por ejemplo, si la derivada es positiva, la función es creciente) que son necesarios para justificar las acciones que realizará el alumno (por ejemplo, calcular la derivada primera o las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, etc.), las cuales también se utilizarán en la argumentación (implícita o explícita) que realizará el alumno para decidir que las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias” (Font, 2005, p.114).

A continuación explicitamos con más detalle estos seis tipos de objetos:

- (1) **Lenguaje** (términos, expresiones, notaciones, gráficos): En un texto viene dado en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (el ordinario y el específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos;
- (2) **Situaciones** (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...): Son las tareas que inducen a la actividad matemática;
- (3) **Procedimientos**: Son utilizados por el sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, ...);

- (4) **Conceptos**⁴: Dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, función...);
- (5) **Proposiciones** (propiedades, teoremas, corolarios, lemas, etc.);
- (6) **Argumentos** que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Reforzando lo dicho, esta clasificación de los objetos calificados de matemáticos - toda vez que se ponen en juego en la actividad matemática- es una primera categorización de las entidades que constituyen el sistema de prácticas y son considerados por el autor “los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.” (Godino, 2002a, p.246).

Para Godino, el lenguaje es una entidad inseparable de las demás, toda vez que ésta les da corporeidad. El lenguaje tendrá en el significado sistémico una valencia multifuncional, y de ahí interpretamos que será un lenguaje representacional, actuacional, situacional, proporcional, conceptual y argumentativo. “Aún que mucha matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los registros materiales” (ibid.) y así se justifica el puesto central que ocupan las entidades lingüísticas en la actividad matemática; su lugar como mediadora (en el sentido de Vygotsky) entre la praxis y el logos (Godino, 2003); su lugar “en el centro de atención de la didáctica, pero sin perder de vista la actividad matemática y los objetos culturales no lingüísticos emergentes de esa actividad” (Godino, 2003, p.118).

Las situaciones-problemas “son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones (...) constituyen el componente práctico de las matemáticas” (Godino, 2002a, p.246) o la praxis en el sentido de Chevallard (1997). Los conceptos, proposiciones y argumentaciones desempeñan un papel normativo y regulativo en las matemáticas, y son los componentes teóricos o discursivos, el logos también en el sentido de Chevallard.

Todas esas entidades descritas, también, como logos y praxis son marcadas por una relación de interdependencia y, el lenguaje, como se ha indicado, es algo presente en todas

⁴ “Los conceptos o propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como “reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones” para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker 1985. p.285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de “conceptos” es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones), que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología”. (Godino, 2002, p.246)

ellas. Es de este modo como el autor pretende hacer explícito y operativo el componente discursivo o teórico de las praxeologías matemáticas.

A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama *configuración*. Estas configuraciones pueden ser *cognitivas* (conglomerado de objetos personales) o *epistémicas* (conglomerado de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

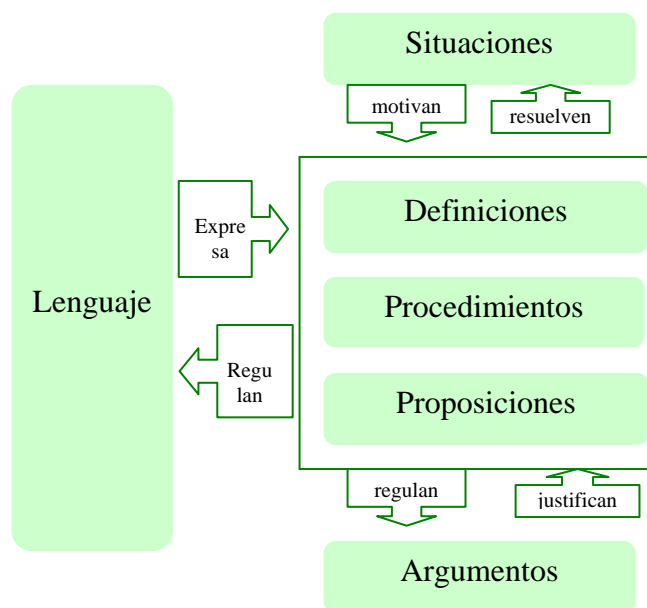


Fig. 2 - Constructos de Configuración Epistémica y Cognitiva del EOS

4.2- Facetas o dimensiones del conocimiento matemático

Son cinco las facetas o dimensiones duales que, según el contexto y juego de lenguaje en que participan, pueden ser: *personal-institucional*, *ostensiva-no ostensiva*, *ejemplar-tipo*, *elemental-sistémica*, *expresión-contenido*. Actuando en parejas se complementan de forma dialéctica y, con otras entidades (por ejemplo, objetos matemáticos), enriquecen el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. En otras palabras, esas facetas son consecuencia de una serie de procesos interpretativos involucrando los objetos matemáticos y sus elementos de significado, dando lugar a distintas versiones o miradas de los mismos. (Godino, 2002a; Font, 2005)

- (1) *Dualidad personal/institucional*: Si se trata de las manifestaciones de un sujeto individual, por ejemplo, de su conducta de respuesta a un determinado instrumento de evaluación, estaremos delante de un objeto personal (o de objetos personales): al ser portadores, al menos potencialmente, de rasgos idiosincrásicos de sus conocimientos. Ahora si se trata de textos o discursos “oficiales” (documentos curriculares, libros de textos, explicaciones del profesor, etc.) usados como referencias en la clase, estaremos delante de un “objeto institucional” (o de objetos institucionales). En una clase pueden emerger “microinstituciones” consecuencia de conductas (maneras de hablar y actuar) compartidas entre grupos de alumnos y reguladas por ellos, que, en interacción, por ejemplo, con la cultura matemática representada por el profesor, pueden producir acoplamientos progresivos en las cogniciones institucionales. En esa perspectiva, Godino asume como esencial la distinción entre persona e institución, de manera que en el sistema didáctico tal distinción se refleje en los propios objetos de enseñanza y aprendizaje, ya que el sistema didáctico “permite caracterizar el aprendizaje como “acoplamiento progresivo” entre significados personales e institucionales”. (Godino, 2002a, p.249) En lo que hace referencia a los tipos de significados institucionales y personales de un objeto matemático el autor distingue cuatro significados (*de referencia, pretendido, implementado y evaluado*) en el ámbito institucional; y tres significados (*global, declarado y logrado*) en el ámbito personal. (Volveremos sobre esos tipos de significados en un apartado más adelante).
- (2) *Dualidad unitario(elemental)/sistémico*: si se toma un determinado concepto y se considera como una entidad compuesta (por ejemplo, medidas de tendencia central), con una cierta organización o estructura (conceptos-sistema) y, también, una determinada relación entre ambas entidades, estaremos tratando de un objeto sistémico. Si el concepto es considerado como una entidad unitaria (por ejemplo, operaciones aritméticas de adición y división) que se manifiesta de manera transparente, como si se tratara de entidades unitarias o elementales, estaremos tratando de un “objeto elemental”.
- (3) *Dualidad ostensivo/no ostensivo*: “Cualquiera de los objetos tiene una faceta ostensiva, esto es, perceptible, y otra no ostensiva”. Así que, serán “ostensivas” tanto las entidades lingüísticas como gestos, escrituras y sonidos perceptibles de forma directa, como las entidades praxémicas o discursivas que necesitan de los

elementos lingüísticos para su constitución y funcionamiento. “El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo” (ibid. p.250). Serán considerados “objetos no ostensivos” los objetos mentales, o sea, los lingüísticos pensados, imaginados, por una persona. El ostensivo puede ser no ostensivo. Tal paradoja, en palabras del autor puede ser resuelta hablando de objetos lingüísticos como entidades funcionales primarias (ostensivas/no ostensivas), tanto si son consideradas como objetos personales o institucionales.

- (4) *Dualidad ejemplar/tipo*: Es una distinción clásica en la teoría del lenguaje y se corresponde a una interpretación lingüística de la distinción concreto-abstracto. Es una noción que puede ser “útil para descubrir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos derivados de la confusión entre ejemplar y tipo” (ibid. p.251). En la actividad matemática estamos siempre interesados por el proceso de generalización de los problemas (y discursos); por resolver ciertos tipos de problemas y en un proceso de estudio particular “debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto concreto (...), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema” (ibid.). La condición de concreto o abstracto depende del juego de lenguaje en que se usa.
- (5) *Dualidad expresión/contenido (o significante/significado)*: La distinción entre “expresión” y “contenido” tiene en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. El uso que se hace de estos términos es el mismo atribuido a la “función semiótica” en el sentido de Hjelmslev (1943 apud Godino, 2002a), la cual hace referencia a la relación de dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí; de las correspondencias entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución).

Los constructos aquí presentados y que constituyen el modelo del EOS se pueden representar por medio del esquema que sigue:

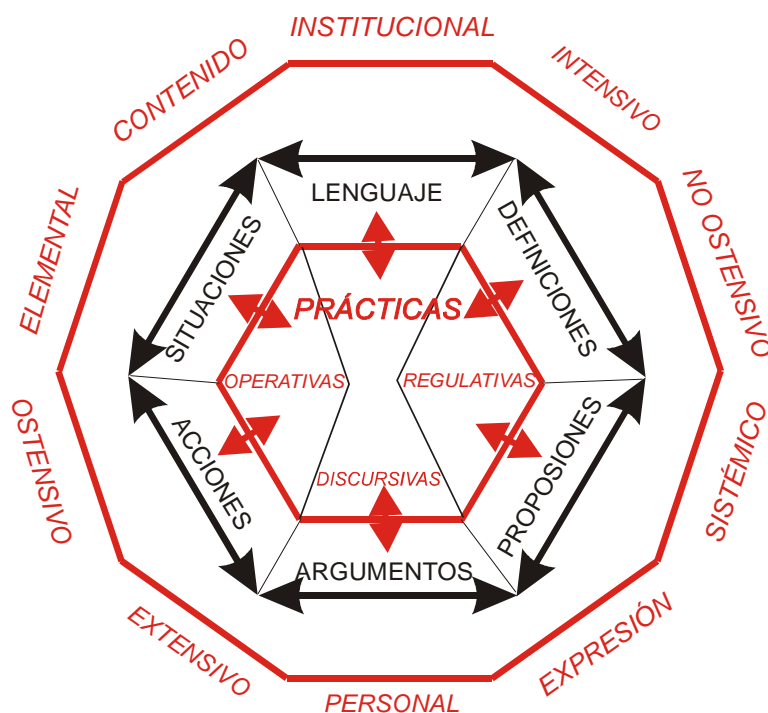


Fig. 3 - Herramientas teóricas del EOS

En el interior de la figura tenemos las prácticas (operativas, discursivas y regulativas). Para la realización de las prácticas es necesario activar una configuración (hexágono) y a su vez, los objetos que forman esa configuración son emergentes de las prácticas. Por último, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono).

5 - Constructos del EOS utilizados en esta investigación

De entre la variedad de nociones teóricas introducidas por el EOS para el análisis de las prácticas de RP, que es el objetivo de esta investigación, nos han resultado especialmente útiles algunas de las facetas duales y los constructos de configuración epistémica y cognitiva (lenguaje, proposiciones, definiciones (conceptos), procedimientos, argumentos y situaciones-problema). La ventaja de las facetas duales es que permiten ver las prácticas de RP desde diferentes perspectivas.



Fig. 4 – Prácticas de RP (en el EOS)

Si bien cada una de estas perspectivas nos aporta información relevante sobre las prácticas de RP, consideramos esencial tener en cuenta las facetas elemental-sistémico, institucional-personal e intensivo-extensivo.

La faceta extensivo-intensivo ha sido puesta de manifiesto por muchos investigadores sobre la resolución de problemas, por lo que no vamos a insistir aquí. Por citar un ejemplo, el “proceso de particularización-generalización” es básico en la explicación de Mason, Burton y Stacey (1989).

La faceta institucional-personal la consideramos básica para poder comparar la resolución de un problema realizada por un alumno, con la resolución que se considera correcta desde la perspectiva institucional.

La faceta elemental-sistémico aplicada a la RP permite entender el problema como la parte visible de un “iceberg”, el cual se puede representar por medio de una configuración epistémica.

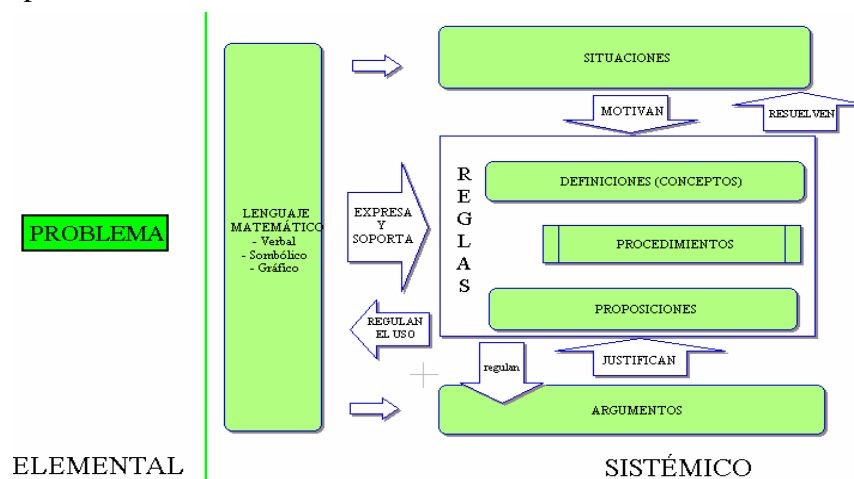
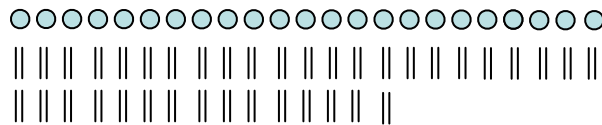


Fig. 5 – Configuración Epistémica/Cognitiva

Para justificar esta perspectiva sistémica basta pensar en las diferentes maneras de resolver problemas. En el siguiente problema, por ejemplo, se puede observar la importancia que tiene el “lenguaje”:

*En una granja tenemos gallinas y conejos, en total hay 23 cabezas
y 76 patas. ¿Cuántos animales de cada clase tenemos?*

Representación icónica:



Representación aritmética:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 2 \\ \hline 46 \end{array} \quad ; \quad 76 - 46 = 30 \quad ; \quad 30 : 2 = 15$$

Representación algebraica:

$X = \text{conejos}$
 $Y = \text{gallinas}$

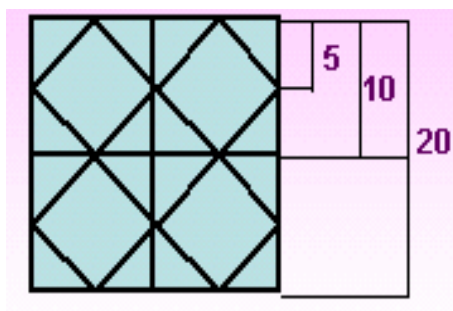
$$\left. \begin{array}{l} X + Y = 23 \\ 4X + 2Y = 76 \end{array} \right\}$$

Según el tipo de lenguaje utilizado, el mismo problema plantea diferentes exigencias conceptuales y técnicas: la primera representación (icónica) se corresponde a la siguiente idea “damos dos patas a cada animal y, después, las que quedaran van asignándose de dos en dos hasta que ya no quede ninguna”. Es conceptual y argumentativo en el reparto; en la segunda representación (aritmética) hay también exigencias técnicas de cálculo numérico; en la tercera representación, observamos que, sin embargo, el método algebraico es mecánico en el reparto, pensamos que, en realidad, no hay reparto, apenas manipulación simbólica asignificativa (técnica). Las exigencias conceptuales y argumentativas están al principio, para poder escribir las ecuaciones, pero son diferentes de las anteriores, ya que ahora intentamos escribir relaciones que dan como resultado los números del enunciado, mientras que antes actuábamos descomponiendo esos números.

En el siguiente problema se puede observar la importancia que también tiene el bloque de las definiciones (conceptos), procedimientos y proposiciones. Si bien la forma de representación utilizada en la resolución es siempre la misma (lenguaje geométrico), los conceptos, procedimientos, etc. utilizados son diferentes:

Dado un cuadrado de 20 cm de lado unimos los puntos medios de los lados opuestos para obtener 4 cuadrados. Si en cada cuadrado unimos los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene otro cuadrado. ¿Cuál es su área?

Después de traducir el enunciado al lenguaje geométrico, el problema se puede solucionar por medio de diferentes conceptos, procedimientos y proposiciones:



1) **Pitágoras:** $h = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} = 7,07 \rightarrow A = (7,07)^2 = 50$



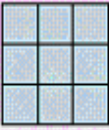
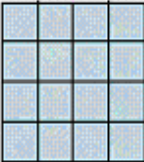
2) **Área:** $ACM = (10)^2 = 100$; $4 \cdot AT = 4 \cdot (b \cdot h) / 2 = 4 \cdot (5 \cdot 5) / 2 = (4 \cdot 25) / 2 = 50$

3) **Área y fracciones:** $ACG = (20)^2 = 400$.

$$ACP = 10^2 / 2 = 100 / 2 = 50$$

En el siguiente problema se puede observar la importancia que también tiene el bloque de los argumentos:

Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de $n \times n$.

	1 x 1	2x2	3x3	4x4	TOTAL	
	1				1	1
	4	1			5	$1 + 2^2$
	9	4	1		14	$1 + 2^2 + 3^2$
	16	9	4	1	30	$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Para un tablero de 8 x 8, será:

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 =$$

$$64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$$

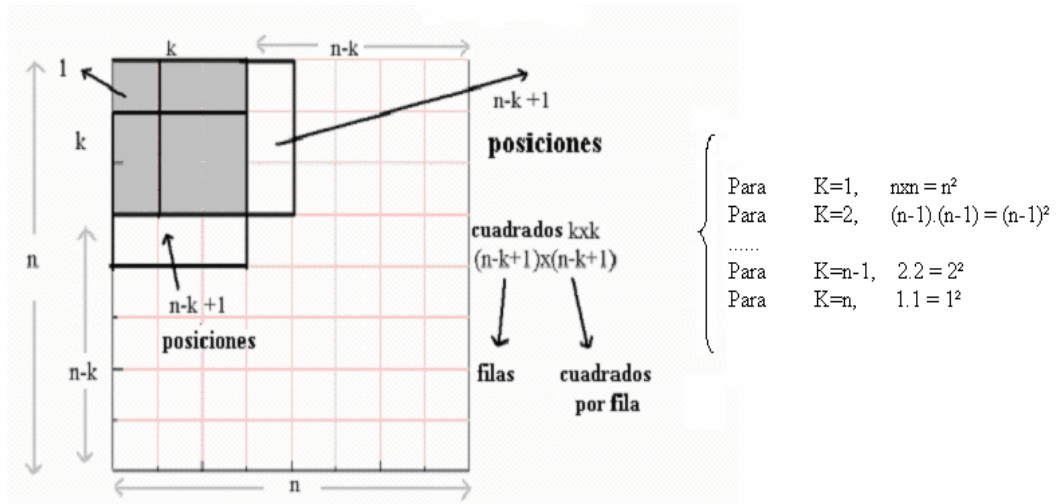
Por tanto, en general:

Los cuadrados que hay en un tablero de $n \times n$ son igual a la suma de los cuadrados de los números consecutivos, el mayor de los cuales es el de los cuadrados que forman la longitud del tablero.

$$\sum_{1}^{n} n^2$$

En este caso el argumento dado se limita a una generalización por inducción empírica o incompleta (parece ser cierta, pero no estamos del todo seguros de que lo sea y, en caso de serlo, no sabemos por qué lo es). Nos hemos limitado a la formulación de una conjetura.

En Mason, Burton y Stacey (1989) se da una argumentación por medio de elementos genéricos:

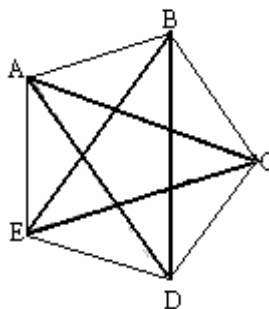


El constructo de configuración, que ha aparecido al contemplar la faceta elemental-sistémica, es básico en el EOS para poder explicar la realización de una práctica matemática. A nosotros nos ha sido muy útil para poder explicar las prácticas de RP de los alumnos, ya que nos ha permitido confeccionar configuraciones epistémicas de referencia que pudiesen ser utilizadas para evaluar las prácticas de los alumnos cuando resuelven problemas.

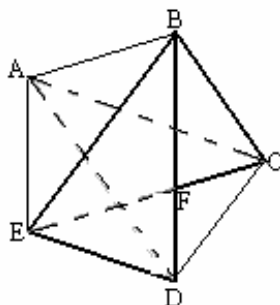
El hecho de contemplar la situación problema en el marco de una configuración epistémica permite entender que a un problema se le pueden asociar diferentes configuraciones epistémicas (en función de las diferentes formas de resolución). Veamos más un ejemplo:

El pentágono estrellado.

Si en un pentágono regular que tiene por lados AB , BC , CD , DE y EA , trazas todas sus diagonales, obtienes un **pentágono estrellado**:



Sus lados son: AC , CE , EB , BD y DA . Demuestra que los triángulos BED y BCF son semejantes (sugerencia: basta con probar que tiene dos ángulos respectivamente iguales).

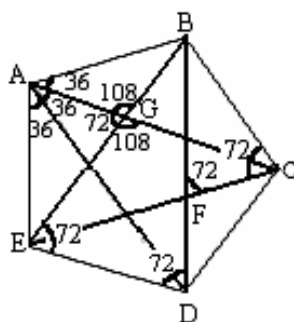


La resolución de este problema se puede acometer de varias formas distintas, de las que nosotros nos limitaremos a señalar dos:

La posición de los triángulos BDE y BCF “no es de Thales”. Si se acepta la sugerencia que se da en el texto, existen varias formas de probar que ambos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales. Consideraremos aquí dos modelos de prueba.

Prueba 1 (Solución geométrica): Como AB es paralelo a EC , el ángulo B del triángulo BDA es igual al ángulo F de BCF (alternos internos entre paralelas), pero el triángulo BDA es igual al BDE , por construcción, así que el ángulo B anterior es igual al ángulo E de BDE , por tanto $\hat{E} = \hat{F}$; a su vez, el ángulo C de BCF es el mismo ángulo de BCE . Como los triángulos BCE y BDE son iguales, por construcción, se deduce que $\hat{C} = \hat{D}$.

Prueba 2 (Solución basada en la medición de ángulos): En el interior del polígono estrellado se forma un pentágono regular, su ángulo central es $360/5 = 72^\circ$. El ángulo interior es su complementario $180-72 = 108^\circ$. Así que (ver figura siguiente) las diagonales trazadas en el pentágono regular *trisecan*



Cada ángulo interior de dicho pentágono. Así pues los ángulos de la figura E , D , F y C , valen todos 72° . Por tanto hemos demostrado de dos formas distintas que los triángulos BDE y BCF son *semejantes* por tener sus ángulos respectivos iguales.

6 - ¿Cómo contempla el EOS a los procesos metacognitivos?

En el recorrido que hicimos sobre el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, podemos observar cómo en dicho enfoque, de manera implícita, se es consciente de la importancia que tiene la metacognición en la explicación de la realización de una práctica matemática. Por ejemplo, en Font (2005), en coherencia con los presupuestos pragmáticos del EOS, se plantea la necesidad de interpretar la relación entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante en términos de *brecha*.

Observamos que los tres aspectos que tener en cuenta para salvar dicha brecha, resaltados por el autor, son requisitos que, en nuestra opinión, incorporan procesos metacognitivos. Veamos: 1) valorar lo que uno va a hacer; 2) decidir qué secuencia de acciones es la más indicada para conseguir lo que se ha decidido; y 3) seguir un curso temporal; son aspectos que implican, entre otras cosas, tener en cuenta el conocimiento que uno tiene de sí mismo, de sus propias capacidades para llevar a cabo la tarea, y el conocimiento de la tarea. O sea, son aspectos metacognitivos que, aunque considerados implícitamente, todavía deben ser desarrollados.

Según Font (2005): para “superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto es determinante, hay que considerar la activación, entre otros aspectos, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal” (ibid. p.114). Añadiremos que, para la realización de una práctica, además de una configuración cognitiva, hay que contemplar una configuración metacognitiva (según discutiremos en apartados posteriores) que acompaña a la primera interaccionando con ella y de la cual también forma parte el objeto personal. En esa dirección, se puede pensar en la metacognición como un componente más que considerar en el intento de superar esa brecha.

Otros ejemplos de párrafos en los que, de alguna manera, podemos observar como en el EOS se es consciente de las limitaciones que presentan las configuraciones cognitivas para explicar la realización de una práctica son los siguientes:

- “Para realizar una práctica matemática (por ejemplo, la representación gráfica de una función) el sujeto necesita una serie de conocimientos sobre la representación gráfica de funciones que son fundamentales para: 1) la realización de la práctica que consiste en representar una función determinada, y 2) para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Es decir, que hay que tener en cuenta que el sujeto tiene un conocimiento sobre la “representación gráfica”, (por ejemplo, como resultado del proceso de instrucción). **También podemos considerar que tiene unas capacidades y habilidades de tipo general**” (Font, 2005, p.114, negrito nuestro).
- “En el EOS se considera que para superar la brecha entre un objeto personal y la práctica en la que dicho objeto personal es determinante hay que considerar la activación, **entre otros aspectos**, de una configuración cognitiva de la que forma parte el objeto personal” (ibid., negrito nuestro).
- “Las consideraciones anteriores son las que permiten justificar porqué en el EOS se considera que la brecha entre el objeto y la práctica se salva mediante la activación de una configuración cognitiva. Dicha configuración cognitiva es “situada”, es decir, específica para la situación problema que se ha planteado. Además de la configuración cognitiva, en el EOS se considera que hay que tener en cuenta otros factores, que no vamos a comentar aquí, como son, entre otros, los instrumentos técnicos de los que dispone el sujeto, el tiempo y **el proceso de gestión y regulación de la configuración cognitiva**” (Ramos, 2005, p. 146, negrito nuestro).
- “La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como “hiper-procesos” matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, **la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos**” (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 9, negrito nuestro).

Esta constatación que se hace en el EOS de la necesidad de ampliar las actuales explicaciones de la realización de una práctica, justificaron nuestro intento de complementar dichas explicaciones con la ayuda de nuevas herramientas teóricas que tienen su origen en las investigaciones sobre la metacognición.

II - METACOGNICIÓN: LA TRAYECTORIA DE SU DESARROLLO Y APLICABILIDAD EN LA EDUCACIÓN

Introducción

Para este apartado hacemos, primeramente, un repaso de la trayectoria histórica del desarrollo de la metacognición y, a partir de ahí, resaltamos la estructura organizativa de la temática, particularmente, dentro del contexto educacional, pero apoyada en el campo del paradigma de la psicología cognitiva. Nos adentramos en el área de Didáctica de las Matemáticas revisando algunos estudios que reflejan los esfuerzos de investigadores y que muestran el tratamiento que es dado a la temática dentro de esta área de investigación. Después de presentar la metacognición en un contexto general, describimos cada uno de sus componentes que vienen estructurando ésta como una línea de investigación. En definitiva, con esta revisión buscamos, sobretodo, respetar los matices personales de cada investigador que ayudan a expresar cómo la temática es percibida.

1 - Los orígenes y primeros conceptos

A finales del siglo XIX el estudio de la mente y de su funcionamiento se constituyó como una disciplina empírica¹. Sin embargo, años más tarde algunos teóricos², desde la perspectiva del behaviorismo, obvian en sus estudios las nociones mentalistas, lo que contribuyó a que éstas fuesen relegadas a un segundo plano. En las últimas décadas, el área conocida como ‘teoría de la mente’ ha experimentado un desarrollo muy importante, y fueron precisamente los estudios del behaviorismo en “Resolución de Problemas” e “Inteligencia Artificial” los que vienen a suscitar el interés de los teóricos en “Procesamiento de la Información” para un retorno a los estudios sobre la mente bajo una nueva perspectiva (Ferreira, 2003, p. 5-6; Mateos, 2001, p.39).

El desarrollo de una nueva psicología mentalista comienza a partir de los años 50 con los trabajos de Newall y Simon observando a personas resolviendo problemas para inferir la estructura mental existente detrás de sus estrategias (Schoenfeld, 1992; Ferreira,

¹ Tiene sus orígenes relacionadas con el inicio de los experimentos de Wundt en 1879, seguido de William James en 1890 con el funcionalismo y después el enfoque mentalista (Ferreira, 2003).

² Por ejemplo, Watson (1930) y Skinner (1970), perciben y comprenden el comportamiento humano considerando apenas los agentes externos como responsables. (Schoenfeld, 1992; Ferreira, 2003)

2003). A partir de los años 80 “las teorías que explicaban el comportamiento humano empezaban a percibir que no era posible comprenderlo considerando apenas los agentes externos como responsables” (Ferreira, 2003, p.54). Es en ese contexto que los agentes o procesos internos, por ejemplo, de “conciencia” y “control del pensamiento”, pasan a desempeñar un papel importante en el comportamiento humano. Del estudio de tales procesos también se ocupa el área conocida como “metacognición” que ha contribuido mucho al desarrollo de los mismos.³

González (1996) resalta que la palabra “metacognición” es “un neologismo producto de la ciencia psicológica contemporánea, particularmente la de orientación cognoscitivista” (ibid. p.110). A pesar de no ser una palabra de origen griego lleva consigo una idea vinculada al prefijo griego “meta” (metá) que, entre otras acepciones, puede significar “posterior a” o “que acompaña” y de ahí el entendimiento de la metacognición como un “vocablo que hace referencia a lo que viene después de, o acompaña a la cognición” (ibid.).

Pero, *¿qué es exactamente la metacognición?*. Las dificultades y confusiones en torno a la definición de este concepto son resaltadas por muchos investigadores: González (1996), Mayor, Suengas y González (1993) y Ferreira (2003), por ejemplo, para atenuar tal problemática, tuvieron la preocupación de reconstruir sus orígenes y desarrollo. Con estos autores tuvimos acceso a una retrospectiva histórica donde podemos hablar de una relación muy próxima entre el término “metacognición” –que es contemporáneo- y otros que lo anteceden. En ese sentido, retrocediendo a 1933 el término “metacognición” -a pesar de no existir aún- aparece relacionado con el de “autoconciencia reflexiva”, usado por Dewey, toda vez que el primero implica la reflexión sobre los procesos cognitivos (Ferreira, 2003). En 1965 se relaciona con el “sentimiento de conocer”, usado por Hart, quien afirma que el tema ya era discutido 10 años antes por Flavell y Wellman (o sea, en 1955). En 1969 aparece en los estudios sobre la memoria de Tulving y Madigan, que ponen de relieve uno de los rasgos más característicos del ser humano: su capacidad de tener memoria sobre la memoria, explicando la existencia de una sustancial relación entre el funcionamiento de ésta y el conocimiento que uno tiene de sus propios procesos de memoria (González,

³ En esa área, la existencia de la auto-regulación es clara: “Teorías que procuren explicar el comportamiento humano solamente como un producto de refuerzos y punitivas externas presentan una imagen truncada de la naturaleza humana, pues las personas poseen capacidades auto-directivas que las capacitan para ejercer algún control sobre sus pensamientos, sentimientos y acciones a través de las consecuencias que éstos producen sobre ellas mismas. El funcionamiento psicológico es, por lo tanto, regulado por una interacción entre fuentes de influencia auto generadas y externas” (Bandura, 1986, p.355, citado por Ferreira, 2003)

1996). De la comprensión de “tener memoria sobre la memoria”, surgen los términos “metamemoria” (acuñado por Flavell en 1971) y “metacompresión” en la disertación sobre conocer el propio conocimiento, hasta finalmente arribar a la “metacognición”. A partir de la década de los 70, concretamente en 1976, Flavell presenta una primera definición que - aún siendo considerada por el propio autor como vaga o no muy satisfactoria- le sirvió para desarrollar un modelo metacognitivo. Con los estudios pioneros de Flavell sobre la metamemoria de los niños, en que les pedía que reflexionasen sobre sus propios procesos de memoria, es desarrollada toda una vertiente de trabajo que se constituye en una de las dimensiones de la metacognición: “el conocimiento acerca de la cognición” (González, 1996). Aún en los años 70, el tema empieza a ganar receptividad y, en paralelo al declive de las investigaciones sobre QI, se pensaba en la atrayente posibilidad de enseñar estrategias metacognitivas a las personas (Ferreira, 2003). En 1980 el término empieza a ganar espacio en los textos académicos. Pronto se relacionó con dominios específicos (la lectura, comprensión, atención, interacción social, comunicación, etc). Se replantea con fuerza la aplicación del término a la metacognición en general y, también, la necesidad de definirlo teórica y operacionalmente (Mayor et. al. 2003).

Actualmente la metacognición ocupa un lugar destacado en la literatura de la investigación, plasmada en diversos estudios, relacionándose, como indicamos, en un principio, con la “metamemoria” (Flavell y Wellman, 1977; Schneider, 1985; Schneider y Pressley, 1998), la “resolución de problemas” (Davidson, Deuser y Sternberg, 1994, Jausovec 1994), el “razonamiento” (Kuhn, 1989), la “inteligencia” (Sternberg, 1985), la “lectura” (Beker y Brown, 1984; Paris, 1991 entre otros), la “educación matemática” (Schoenfeld, 1987; Swanson, 1990 entre otros), la “comunicación” (Mayor et. al. 1993) y otros estudios sobre el “aprendizaje” y la “instrucción” (Mateos, 2001; Mayor et. al., 1993; Ferreira, 2003, entre otros).

Después de esta breve retrospectiva histórica pasamos a ver un conjunto de definiciones que se suelen a dar al término metacognición.

2 - El panorama general de definiciones y modelos

Tabla 1 - panorama general de definiciones y modelos

Investigador	Definición/Características	Modelo/Componentes
Flavell (1976)	“La metacognición se refiere al conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o	Conocimiento metacognitivo 1) persona 2) tarea y 3) estrategias

Flavell (1981)	<p>cualquier otro asunto relacionado con ellos (...) La metacognición hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de alguna meta u objetivo concreto” (p.232).</p> <p>Habla de los emprendimientos socio-cognitivos como aquellos que “incluye todo esfuerzo intelectual cuyo objetivo es pensar o aprender, sobre procesos sociales o psicológicos, de sí mismo, de otros individuos, o grupos humanos de cualquier tamaño y tipo...” p.272. Propone que el monitoramiento de los emprendimientos ocurre a través de acciones y interacciones entre cuatro clases de fenómenos: <i>conocimiento metacognitivo, experiencias metacognitivas, metas (o tareas), y acciones (estrategias)</i>. La actividad de “monitorar” se constituye en organizar, supervisar, regular (controlar) y evaluar el proceso seguido.</p>	4)interacciones entre persona, tarea y estrategia.
		Experiencias metacognitivas
		Metas/objetivos cognitivos
		Acciones o estrategias
Brown (1978)	<p>Es “el control deliberado y consciente de la propia actividad cognitiva” (ápu^d Mateos, 2001).</p> <p>Brown et al. (1983) remite al modelo a la derecha (Ferreira 2003, refiriéndose a Williamson 1991).</p>	Conocimiento sobre la cognición
		La auto-regulación de la cognición
Garofalo y Lester (1984)	<p>“Metacognición es saber cuando, donde y cómo usar el conocimiento y las creencias” que uno tiene. (ápu^d Ferreira 2003, refiriéndose a Wilson 1997)</p>	El conocimiento y creencias sobre los fenómenos cognitivos
		Regulación y control de las acciones cognitivas. (ápu ^d Hegedus, 1998)
Nelson y Nerens (1990)	<p>Es “simultáneamente un tópico de interés por su propia fuerza y por constituirse en un puente entre áreas, por ejemplo, entre toma de decisión y memoria, entre aprendizaje y motivación, y entre aprendizaje y desarrollo cognitivo” (citado por Ferreira, 2003).</p>	Nivel inferior (<i>nivel-objeto</i>), proporciona datos al nivel-meta
		Nivel superior (<i>nivel-meta</i>), responsable de la supervisión y control del nivel-objeto
Williamson (1991)	<p>Conocimiento y control que uno tiene de sus propios procesos cognitivos. “Metacognición es el pensar sobre el pensamiento y gerenciar el pensamiento” (ápu^d Ferreira, 2003)</p>	Conciencia
		Autorregulación
		Control ejecutivo
Schoenfeld (1992)	Define metacognición como “un término	Conocimiento

	que abarca el conocimiento y la regulación de estrategias cognitivas”.	Regulación de estrategias cognitivas	
González (1996)	La metacognición es un concepto tridimensional que envuelve: conciencia, monitoramiento (supervisión, control y regulación) y evaluación de los propios procesos cognitivos.	Conciencia	
		Monitoramiento	
		Evaluación de los propios procesos cognitivos	
Hegedus (1998)	Considera la metacognición como “un constructo relevante para comprender mejor las conductas de los estudiantes cuando resuelven problemas” (p. 29). Es un constructo que engloba las cuatro componentes a la derecha.	Reflexión	
		Organización	
		Supervisión (Monitoring)	
		Asignación de recursos (Exploring)	
(Mayor et. al. 1993)	“El modelo que consideramos más completo y adecuado de la metacognición ha de incorporar a la vez la específica actividad metacognitiva y el objeto propio de esa actividad que no es otro que la cognición”. (p.56)	Actividades metacognitivas	conciencia control <i>autopoiesis</i>
		La cognición (la actividad cognitiva)	
		El modelo de la metacognición es el resultado del producto cartesiano entre la actividad metacognitiva y la cognición.	
Lafortune et al (2003)	Lafortune discute y complementa el modelo de Flavell.	Conocimiento metacognitivo	1)persona 2)demás aprendices 3)funcionamiento del pensamiento en general 4)tarea 5)estrategias
		Habilidades metacognitivas	
		Metacognición conscientizable	
Ferreira (2003)	Entiende que la metacognición es un proceso que envuelve la toma de conciencia y comprensión de los propios saberes y prácticas, la reflexión y la autorregulación del propio aprendizaje y practica”. (p.35)	Ferreira discute, entre otros modelos, el de Flavell poniendo énfasis en las interacciones.	

Un primer objetivo es describir tanto las ideas de los autores mencionados en la tabla, como las de otros más, inicialmente en el contexto general de educación, para después restringir la discusión al área de Educación Matemática. La descripción procederá de dos formas: 1) presentar una visión general de la metacognición y 2) presentar

separadamente cada uno de los principales conceptos (o conceptos centrales) que tienen estructurada la metacognición como una línea de investigación. Un segundo objetivo relacionado con esa descripción, consiste en reunir las ideas clave (y, normalmente, discutidas) en un lenguaje coherente con sus orígenes (tomando como referencia el clásico modelo de Flavell). Todo eso con el objeto de organizar el panorama de definiciones existentes y construir un texto más uniforme y quizá más completo de los conceptos, en torno a lo que viene a ser una Teoría de la Metacognición.

Inicialmente, lo que podemos observar en la tabla es que la mayoría de los investigadores remite la definición de metacognición a una familia de componentes teóricos (con frecuencia expresados) que tiene por base el modelo o la taxonomía de Flavell.

Tenemos, que las ideas que sustentan la literatura básica en el dominio de la metacognición se deben a Flavell (en el paradigma de la “psicología cognitiva estructural”) y a Brown (en el “paradigma de la psicología cognitiva del procesamiento de la información”)⁴. Esos dos teóricos han propuesto de forma independiente y complementaria un conjunto de definiciones-descripciones de ese dominio. El modelo de desarrollo del “conocimiento metacognitivo” ofrecido por Flavell fue el primer paso hacia un análisis más sistemático de la metacognición y no solamente permitió el punto de partida de subsecuentes investigaciones, sino también una “explosión” de pesquisas empíricas en ese dominio. De igual importancia es la contribución de Brown que pone el énfasis en el desarrollo de “habilidades metacognitivas”. Pero, también es conocido que esa temática pasó a ser largamente dominada (y a tener sus ideas ancladas) en el paradigma del procesamiento de la información. (Kluwe, 1987; Yussen, 1985; Mateos, 2001)

Recordamos que cualquier intento por definir el término metacognición acaba de alguna forma remitiéndose a las bases del modelo de Flavell. Puede no ser un modelo “preciso” y completo, o no satisfactorio en las palabras del propio autor (Flavell, 1987), pero ha sido una de las principales referencias al tratar la temática, y la literatura que revisamos confirma que la definición más extendida del término es la ofrecida por ese autor en 1976, la cual fue aplicada inicialmente a la metamemoria. Su concepción de metacognición tiene raíces en las ideas de Piaget según la cual “el desarrollo cognitivo no sólo implica un aumento de la complejidad estructural del sistema cognitivo, sino también

⁴ En nuestro trabajo no profundizamos en el paradigma de investigación de Brown, pero contemplaremos algunas ideas de la autora a lo largo del texto.

del acceso consciente, que iría desde las regulaciones automáticas de la acción (...) hasta la regulación activa consciente” (Mateos, 2001, p.22). El modelo metacognitivo desarrollado por Flavell está basado en una taxonomía de componentes de conocimientos (Flavell y Wellman, 1977; Flavell, 1976) que son importantes en la actividad metacognitiva. En este modelo él resalta la distinción y la interacción entre las cuatro componentes: *conocimiento metacognitivo* (una porción del conocimiento del mundo que uno adquiere a través de sus experiencias y de los significados dados por él a tareas, objetivos, acciones, experiencias), *experiencias metacognitivas* (pueden ser cualquier tipo de experiencia afectiva o cognitiva relacionada con el progreso hacia las metas), *metas* (son los objetivos cognitivos por alcanzar) y *acciones o estrategias* (son recursos que las personas utilizan para reconocer y mejorar su conocimiento acerca de lo que ocurre durante el proceso de aprendizaje). Las dos primeras son consideradas claves en esa taxonomía. Es asumido que el conocimiento metacognitivo tiene su propio curso de desarrollo en el conjunto de esas categorías (Flavell, 1981, 1987). Veamos la representación de su modelo.

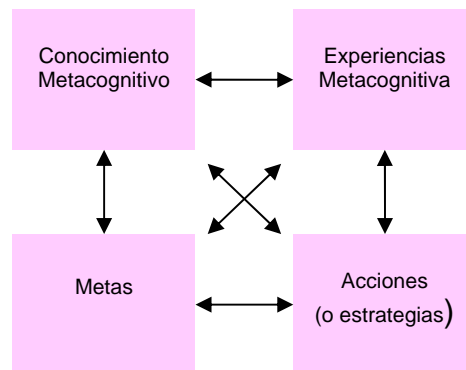


Fig. 6 – Modelo Metacognitivo de Flavell

De acuerdo con Flavell (1987) son muchos los conceptos que se pueden relacionar con el de metacognición y entre éstos apunta: “procesos ejecutivos”, “operaciones formales”, “conciencia”, “cognición social”, “auto-eficacia”, “auto-regulación”, y conceptos de la “auto psicología” o “psicología subjetiva”. La relación entre esos conceptos y otros tantos también es comentada por Mateos (2001) -a la cual remitimos para mayores conocimientos- que en sus conclusiones llegamos a conocer que las relaciones entre la metacognición y éstos son tan estrechas que sus fronteras con ellos resultan difíciles de delimitar, y aquí añadimos que también esta cantidad de conceptos resulta más complicada al entendimiento de esta temática.

Observamos esa estrecha relación en otro texto de Flavell sobre los “emprendimientos socio-cognitivos”, plasmando sus ideas sobre la metacognición. De acuerdo con el autor, los “emprendimientos socio-cognitivos” vienen siendo aquellos que “incluye todo esfuerzo intelectual cuyo objetivo es pensar o aprender sobre procesos sociales o psicológicos de sí mismo, de otros individuos, o grupos humanos de cualquier tamaño y tipo (incluyendo organizaciones sociales, naciones, y ‘personas en general’)” (Flavell, 1981, p.272). Para él un emprendimiento socio-cognitivo “podría ser una percepción, un sentimiento, un motivo, habilidades, intenciones, propósitos, (...) o cualquier otro proceso o propiedades de sí mismo o de otros [vemos que en este momento parece enfatizar o incluso explicitar factores que no “aparecían” en su primera definición aportada en 1976. Podría ser aún interacciones y relaciones sociales que ocurren entre individuos, grupos, naciones, o otras entidades sociales” (ibid.). Propone (y al mismo tiempo enfatiza) que el monitoreo de los emprendimientos socio-cognitivos ocurre a través de acciones e interacciones entre las cuatro clases de fenómenos ya conocidos, o sea: *conocimiento metacognitivo*, *experiencias metacognitivas*, *metas (o tareas)*, y *acciones (estrategias)*. El trabajo o la actividad de monitorar un emprendimiento se constituye en organizar, supervisar, regular (controlar) y evaluar el proceso seguido. Retomando fragmentos de la definición dada por el autor en 1976 tenemos que: el *conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos* es acompañado de elementos que poseen la función o capacidad de organizar, supervisar, regular y evaluar ese conocimiento, es decir, ese conocimiento es acompañado por el monitoreo. Así que, una forma de poder interpretar el texto de 1981, para el modelo de Flavell, sería:

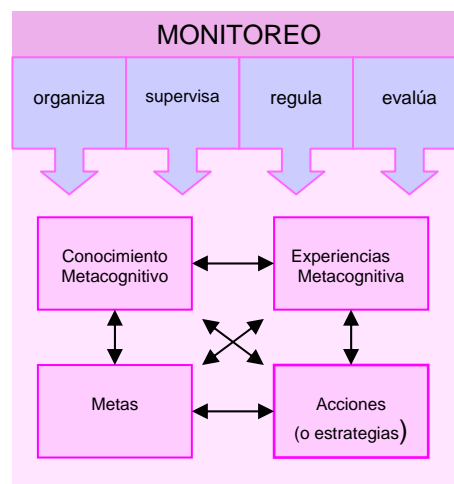


Fig. 7 – Interpretación para el Modelo de Flavell

El modelo del “monitoramiento cognitivo” propuesto por Flavell fue considerado como la primera aproximación para conectar actividad cognitiva y metacognitiva (Kluwe, (1987).

En el paradigma del procesamiento de información, Brown, en 1978, define metacognición como “el control deliberado y consciente de la propia actividad cognitiva” (*ápu*d Mateos, 2001)⁵. La metacognición se refiere a la comprensión del conocimiento, una comprensión que puede ser reflejada en cada uso efectivo o descripción evidente del conocimiento en cuestión (Brown, 1987). Las diferencias entre los modelos de Brown y de Flavell, explicitadas en Mateos (2001), están en que: las estrategias, en Flavell, son parte del cuadro general cognitivo y metacognitivo, en Brown, son el centro de la actividad cognitiva; además,

“Si establecemos una comparación entre las concepciones formuladas por Flavell y por Brown, encontramos que, pese a que las dos líneas de trabajo tienen antecedentes distintos y emplean métodos de investigación y lenguajes diferentes, hay un solapamiento sustancial. Ambas líneas de investigación ponen un énfasis especial en la conciencia de la propia actividad cognitiva, en las estrategias usadas por los sujetos y mecanismos auto-regulatorios y en la supervisión del proceso hacia las metas. Las dos líneas se ocupan de examinar los problemas o deficiencias en la producción cognitiva, es decir, el fracaso de los sujetos para usar espontáneamente las estrategias cuando son apropiadas siendo, sin embargo, capaces de emplearlas cuando se les dirige explícitamente a hacerlo. En la explicación de esas deficiencias, no obstante, el acento se coloca en aspectos diferentes. Mientras que para Flavell se deben fundamentalmente a un conocimiento insuficiente de las variables que afectan al rendimiento en tareas que demandan una actividad cognitiva, para Brown, lo que diferencia a expertos y novatos es el control que ejercen sobre la propia actividad cognitiva..., en síntesis, éste se extiende desde el conocimiento que uno tiene de sus propios procesos cognitivos hasta el control de la propia actividad cognitiva” (Mateos, 2001, p.28).

Hay autores que en sus modelos han llamado la atención sobre los aspectos más procedimentales, como, por ejemplo, lo hacen Nelson y Nerens (1990, citados por Mateos, 2001 y Ferreira, 2003). Para ellos la metacognición es “simultáneamente un tópico de interés por su propia fuerza y por constituirse en un puente entre áreas, por ejemplo, entre toma de decisión y memoria, entre aprendizaje y motivación, y entre aprendizaje y

⁵ Para Brown las raíces de la metacognición se encuentran en los análisis: 1) de los informes verbales; 2) De los mecanismos ejecutivos del sistema de procesamiento de la información; 3) de los problemas que plantea el aprendizaje y desarrollo de la autorregulación y la reorganización conceptual; y 4) del tópico de la heterorregulación. Para más información ver Mayor et. al. (1993)

desarrollo cognitivo” (ápuđ Ferreira, 2003, p.58). El modelo presentado por ellos divide los procesos cognitivos en niveles interrelacionados: nivel inferior (*nivel-objeto*⁶) y nivel superior (*nivel-meta*⁷). Las cogniciones del “nivel-objeto” proporcionan datos a las del “nivel-meta” que son las responsables de la supervisión y control de las del “nivel-objeto”. Hay dos relaciones de dominancia entre estos dos niveles, caracterizadas por el flujo de informaciones que se establece entre ambos: el “monitoreo (monitoring)” o “supervisión” que consiste en el flujo que pasa del “nivel-objeto” al “nivel-meta” y el “control” que resulta del flujo en el sentido contrario, del “nivel-meta” al “nivel-objeto”. (Mateos 2001; Ferreira, 2003)

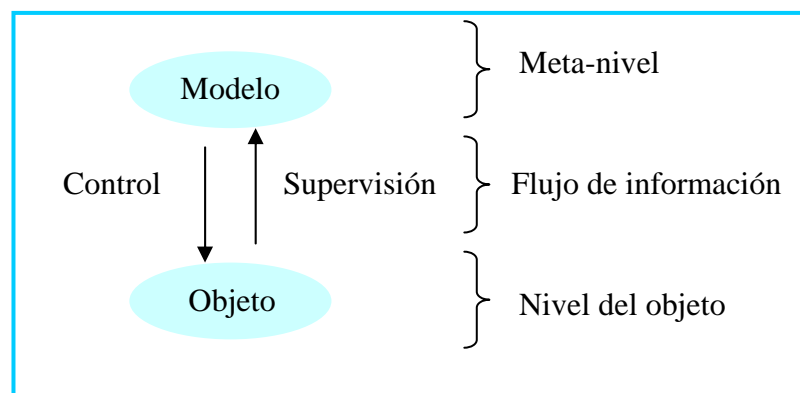


Fig. 8 Modelo de metacognición propuesto por Nelson y Narens (1994)⁸

Otro modelo es el elaborado por Wilson (citado por Ferreira, 2003) que partiendo de las ideas de Flavell destaca tres funciones de la metacognición: a) “conciencia” (del individuo acerca de donde se encuentra en el proceso de aprendizaje, de sus estrategias personales y de lo que necesita ser hecho); b) “evaluación” (juicios que son hechos, considerando la propia capacidad y limitaciones del pensamiento); y c) “regulación”, que ocurre cuando el individuo modifica su pensamiento, usando sus habilidades de control. En ese modelo se propone la reflexión como mediadora (la conciencia puede volverse evaluación, que a su vez, puede transformarse en regulación). También, en su modelo, parece considerar la importancia del “contexto” (conocimiento previo de los estudiantes, valores, expectativas, etc.) afectando el aprendizaje⁹.

⁶ Constituyen representaciones de los objetos externos en el sistema cognitivo. (ver Mateos, 2001, p.32 y Ferreira, 2003)

⁷ Son representaciones acerca de las representaciones del nivel-objeto (ver Mateos, 2001, p.32 y Ferreira, 2003)

⁸ Representado por Ferreira, 2003.

⁹ Decimos parece, pues según Ferreira el modelo de Wilson a pesar de no representar esas variables (del contexto) no deja de considerar la importancia de las mismas.

Trillo (1989) se refiere a la metacognición como una de las “operaciones del pensamiento” y en su artículo estructura su discurso, entre otras, sobre la cuestión de que se debe “insistir en que la metacognición es la única ‘habilidad cognitiva’ que verdaderamente coadyuva a desarrollar el protagonismo del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje.” (ibid. p.105)

Willimson (citado por Ferreira, 2003) la define como constituida por los tres componentes teóricos comúnmente presentados: “conciencia”, “autorregulación” y “control ejecutivo”.¹⁰

Para Mayor et. al (1993) “el modelo (...) más completo y adecuado de la metacognición ha de incorporar a la vez la específica actividad metacognitiva y el objeto propio de esa actividad que no es otro que la cognición” (ibid. p.56), y así, los autores, consideran el modelo de: 1) *la actividad metacognitiva*, con dos componentes básicas: la conciencia y el control, pero incorpora un tercer componente que denomina “autopoiesis”, que es la articulación entre el “cierre” (un circuito de retroalimentación) y la apertura (ir más allá de lo dado); 2) *la cognición (la actividad cognitiva)*, que es el objeto de la actividad metacognitiva y, como un todo organizado y dinámico, se puede caracterizar por: incluir elementos básicos del “sistema representacional, procesual y funcional”; hacer frente a los problemas básicos que plantea la estructura del sistema y su funcionamiento (“dualidad”, “regulación” y “adaptabilidad”); explicar cuáles son los rasgos y características que ha de poseer la mente para enfrentar los problemas básicos (“organización sistemática”, “flexibilidad” y “autocontrol”); y en cuanto al 3) el *modelo de la metacognición*, es el resultado del producto cartesiano entre la “actividad metacognitiva” por la “cognición”.

Para Wellman (1985) la metacognición se refiere al conocimiento sobre los procesos cognitivos de la persona, y a los estados tales como memoria, atención, conocimiento, conjetura e ilusión.

Yussen, en 1985, según González (1996), resalta que “la metacognición es la actividad mental mediante la cual otros estados o procesos mentales se constituyen en objeto de reflexión” (ibid. p.118) y considera que la metacognición alude a un conjunto de procesos que se ejercen sobre la cognición misma, por ejemplo, pensar en las estrategias que mejor ayudan a recordar (“metamemoria”); o interrogarse a sí mismo para determinar si ha comprendido o no algún mensaje que alguien acaba de comunicarle

¹⁰ Para ampliar información ver Ferreira, 2003.

(“metacompreensión”); o considerar las condiciones que pueden distraer menos a uno mientras observa algo (“meta-atención”).

Lafortune et. al. (2003), revisando la literatura de Flavell (1987) y Brown (1979, 1987), también agrupa en dos los componentes (metacognitivos) señalados por esos autores: 1) conocimientos metacognitivos y 2) habilidades metacognitivas (utilización y adaptación del conocimiento para administrar, supervisar y evaluar la actividad mental)¹¹. Lafortune et al., presentan, además, un tercer componente, la “metacognición conscientizable”, la toma de conciencia de los conocimientos y procesos utilizados para resolver problemas, para controlarlos mejor y dominar la tarea.¹²

Presentadas algunas de las definiciones que de manera general se corresponden con el área de Educación, veamos ahora las ubicaciones de ese dominio en el contexto de la Educación Matemática.

3 - El panorama de definiciones y modelos en la Educación Matemática

Alan Schoenfeld fue uno de los pioneros en el estudio de la metacognición dentro de la Educación Matemática. En 1983 sus estudios sobre sistemas de creencias, interacción social y habilidades de control mostraron el comportamiento de estudiantes como resolutores de problemas (Ferreira, 2003). Continuando en esa dirección, este autor, en 1985, presenta un constructo teórico interaccionando procesos cognitivos y metacognitivos que inciden sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en particular sobre la resolución de problemas. Identifica cuatro categorías de conocimiento y comportamiento: 1) “recursos”, 2) “heurísticas”, 3) “control” y 4) “sistemas de creencias”. Es prácticamente en el apartado relativo al *control* en donde el autor promueve la discusión en la dirección de la metacognición.¹³

¹¹ Por “habilidades metacognitivas” los autores se quieren referir “al control activo que la persona ejerce sobre su funcionamiento cognitivo y afectivo ante la tarea a ejecutar”. (Lafortune et al., 2003, p.9)

¹² El tercer componente emergió de los trabajos de Lafortune y St’Pierre (1994, 1996). Lafortune et al resaltan que la *metacognición conscientizable*, “se basa sobre la conciencia necesaria sobre la capacidad de verbalizar y de aportar un juicio crítico frente al desarrollo de una actividad (...) a tomar conciencia de que si hay planificación y revisión constante de ésta, eso ayuda en la realización eficaz de una tarea...” (ibid. p.12). Además según esos autores, “la toma de conciencia de su proceso mental está en el corazón de la dinámica del desarrollo de habilidades metacognitivas: viene, en efecto, a enriquecer los conocimientos metacognitivos, los cuales, a su vez influyen la gestión de una actividad mental posterior”. (ibid. p.12)

¹³ Según el autor, el término metacognición ha sido usado en la literatura psicológica para discutir el “control”. Mucha de la literatura sobre el *control* se desarrolla en torno a la Inteligencia Artificial (AI) y al Procesamiento de Información (IP) que aludiendo a tal fenómeno intenta desarrollar la competencia en una

Para ese autor 1) los “recursos” son el conocimiento de los propios procesos de pensamiento que uno tiene para solucionar un problema particular; 2) “heurística” (del griego, significa “sirviendo saber o entender”), una “estrategia heurística”, es una técnica o sugerencia diseñada para ayudar a entender mejor un problema; 3) “control”, llamado también “autorregulación”¹⁴, es el conocimiento que guía la selección e implementación de recursos, una estrategia cognitiva para la asignación de medios; y 4) “sistemas de creencias” (e intuiciones) son los fenómenos que pueden influenciar el comportamiento del alumno sobre sí mismo, sobre la tarea, etc.. “Mientras el conocimiento de los propios procesos y la auto-regulación tratan del reconocimiento, supervisión y control (...), las creencias e intuiciones consideran las relaciones de los individuos con las situaciones matemáticas y los efectos de la perspectiva individual sobre el comportamiento matemático...” (Ferreira, 2003, 63).

Los fracasos de estudiantes resolviendo problemas matemáticos pueden ser explicados por algún mal funcionamiento en las dos últimas categorías del modelo de Schoenfeld, toda vez que los requisitos de conocimientos que poseen los estudiantes no son aplicados coherentemente, puesto que no saben cómo monitorar y evaluar sus decisiones. En su labor investigadora, desarrollando cursos de estrategias de resolución de problemas (como veremos en el próximo capítulo), el autor encontró que los estudiantes tenían recursos para resolver problemas, pero que eran incapaces de aplicar esos recursos con éxito ya que les faltaba el conocimiento de cómo regular sus pensamientos (Gourgey, 2001, p.23). Schoenfeld considera que la “cognición matemática” interactúa con la metacognición y que las instrucciones que llevan en cuenta esos dos procesos contribuyen para aumentar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas, incluso problemas poco familiares.

Ferreira (2003) estudió la relación entre metacognición y desarrollo profesional de profesores de matemáticas y, en este contexto, entiende que la metacognición “es un

variedad de dominios y, entre ellos, se acoge bajo el título “metacognición”. Además “control” es un término prestado de AI (Schoenfeld, 1985a).

¹⁴ La autorregulación es una noción que tiene sus raíces en los trabajos de Piaget. Se identifican tres tipos de autorregulación: a) autónoma, b) activa, c) regulación consciente Hegedus (1998). También la autorregulación ha sido un área de interés para la psicología evolutiva. “Vygotsky (1964, 1978) reconoció la importancia de la autorregulación identificándola como la segunda fase en el desarrollo del conocimiento. En una primera fase, se adquiere conocimiento y se resuelven problemas de una manera automática; en la segunda, mediante acciones conscientes dirigidas a una meta, la persona emplea estrategias para recordar y usar lo que necesite para resolver problemas, lo cual le da un mejor control sobre su conocimiento cognitivo” (Mayor et. al. 1993, p.103).

proceso que envuelve la toma de conciencia y comprensión de los propios saberes y prácticas, la reflexión y la autorregulación del propio aprendizaje y practica” (ibid. p.35).

Al discutir en sus estudios la relación que existe entre los conceptos metacognición y reflexión, la autora observa la intrínseca relación entre ambos conceptos, toda vez que el primero envuelve la reflexión sobre los procesos cognitivos, pero tal relación aún no ha sido discutida en profundidad. Para ella “la reflexión es una acción importante dentro del proceso metacognitivo, pero sin embargo para otros autores la reflexión sería un concepto amplio que envolvería la metacognición”. Refiriéndose a McAlpine et al. (1999), también señala que, para esos autores “la reflexión es entendida como un proceso formativo de evaluación compuesto por seis componentes: metas, conocimiento, acción, monitoramiento, toma de decisión y un ‘pasillo de tolerancia’” (ibid. p.47).

González (1996) presenta la metacognición como un constructo tridimensional que abarca: (a) conciencia; (b) monitoreo (supervisión, control y regulación); y (c) evaluación de los propios procesos cognitivos.

En 1999 ese mismo autor, reafirma que una de las herramientas teóricas utilizadas en su labor investigadora, es el reconocimiento de la metacognición como:

“Un constructo cognitivo tridimensional que alude al conocimiento que cada sujeto tiene acerca de su propio accionar cognitivo y a los mecanismos interiorizados de pensamiento que utiliza para supervisar y regular dicho accionar concurrentemente con la realización de alguna tarea intelectualmente exigente. La metacognición es una voz interior que actúa como un ‘coach intelectual’ (Schoenfeld) cuando una persona se aboca a realizar cualquier tarea que le demande algún esfuerzo intelectual; por consiguiente, un indicio de desarrollo metacognitivo es la posibilidad de ‘escuchar dicha voz’” (González, 1999, p.206).

Llama “tarea intelectualmente exigente” a aquella que *demandada la activación de procesos de pensamiento de orden superior*.¹⁵ En su indagación, trata de conocer los procesos cognitivos y metacognitivos que los estudiantes universitarios activan cuando intentan encontrar una solución a algún problema matemático, para de ahí obtener información que sirva de base para dibujar el *perfil cognitivo del estudiante universitario* (venezolano). Como diagnóstico general cita, por ejemplo, las deficiencias en capacidades y conocimientos correspondientes a los niveles educativos anteriores, y en cuanto al “diagnóstico matemático”, señala que los estudiantes: 1) tienen dificultades para hacer

¹⁵ Además “considerando, específicamente, la resolución de problemas, se asume que este proceso constituye el aspecto caracterizador básico del quehacer matemático (Halmos, 1980)”. (González, 1999)

abstracciones y establecer relaciones; 2) presentan carencias significativas de experiencia en el manejo de herramientas académicas claves y 3) exhiben insuficiencias en las operaciones básicas y elementales del cálculo matemático.

En otro texto González (1998) considera, además, la metacognición como *un constructo de naturaleza teórica* y resalta que su ámbito está vinculado con la toma de conciencia de las acciones o procesos cognitivos interiorizados que, para un caso específico de un resolutor de problemas, eso implica el reconocimiento de los procesos internos que activa cuando intenta resolver un problema.

Otro autor que ha investigado sobre la metacognición en educación matemática es Hegedus (1998). Considera la metacognición como “un constructo relevante para comprender mejor las conductas de los estudiantes cuando resuelven problemas” (ibid. p. 29). En este mismo texto señala que Schoenfeld, en 1992, define metacognición como “un término que abarca el conocimiento y la regulación de estrategias cognitivas” (ibid. p.21). De forma semejante Garofalo y Lester (citados por Hegedus, ibid.) afirman que “la metacognición incluye dos aspectos separados pero relacionados: a) el conocimiento y creencias sobre los fenómenos cognitivos, y b) la regulación y el control de las acciones cognitivas”. (ibid. p.30)

El modelo que este autor aporta para analizar la conducta metacognitiva de los estudiantes repasa la literatura en pensamiento autorregulador con Brown y Schoenfeld y lo denomina “ROME”: Reflexión, Organización, Supervisión (Monitoring) y Asignación de recursos (Exploring).

“La reflexión se refiere a la búsqueda de información relevante para el problema (libros de texto, notas, experiencias previas...) y las consecuencias de esta búsqueda, en relación con los efectos de la aplicación de determinadas técnicas o algoritmos a la resolución del problema. La organización hace referencia a las conductas de planificación que un resolutor de problemas realiza en las fases exploratoria y ejecutiva de la resolución. La supervisión tiene por objeto “guardar huella de lo que está haciendo”: valorar las opciones de aproximación elegidas y la aplicación de nuevas piezas de información en el problema. Finalmente, la asignación de recursos se refiere a la disponibilidad de conceptos, imágenes visuales o técnicas algorítmicas, mediante las propias notas, experiencias y condiciones del problema” (Hegedus, 1998, p.37, subrayado nuestro).

Entre los diversos trabajos que existen, de los que aquí sólo mostramos algunos, corroboramos, sin embargo, con afirmaciones de que son pocos los intentos de ofrecer un modelo general y completo de la metacognición. También, de manera general, se concluye

que, dada la complejidad intrínseca que el tema metacognición (sus componentes y subcomponentes metacognitivos) tiene, observamos diferentes bifurcaciones que hacen los teóricos e investigadores al tratar del mismo. Quizás esas bifurcaciones son consecuencia de la existencia de diversas líneas de investigación seguidas, cuando considera las necesidades intrínsecas de cada disciplina, sea por la propia práctica de organizar la temática, que hace considerar algunos aspectos no tenidos en cuenta por otras, y, para nuestra área en particular, quizás, “los problemas aparecen cuando se intercalan los campos de la matemática y la psicología, en un esfuerzo por lograr una definición del funcionamiento metacognitivo” (ibid. p.20). Como se puede notar, las confusas definiciones constituyen un problema que se extiende, también, a nuestra área de investigación. Aún según Hegedus “desde 1970, la educación matemática y la psicología han dado varias definiciones confusas de lo que es metacognición, y puede verse a ésta como un ‘paraguas’ que cobija varias aproximaciones históricas al tema” (p. 37).

Son muchos los que dejan en evidencia la dificultad de esta temática. De cierta forma, queremos registrar aquí nuestra propia impresión, que además se reflejará en el próximo apartado. Al intentar construir un panorama general que pudiera reflejarse en un organigrama básico y representativo de la “teoría de la metacognición”, observamos que las ubicaciones hechas -incluso considerando y respetando las observaciones anteriormente mencionadas de líneas de pensamiento- tornan el contacto y el trabajo con esa temática demasiado laboriosos y, en muchas ocasiones, tuvimos la impresión de que estábamos intentando montar un puzzle demasiado complejo donde las piezas, cuando no se encajaban, parecían sobrar y, en el mejor de los casos, se repetían. Si por un lado reconocemos la complejidad de ese constructo y también el valor de sus orígenes y de las contribuciones que se han realizado para enriquecer una teoría, pero pensamos que demasiadas terminologías y el hecho de añadir por añadir, buscando terminologías nuevas o metáforas para estar hablando de los mismos objetos, contribuye más a fragmentar que a fortalecer la red de pensamientos en torno a una “Teoría de la Metacognición”; por otro, tampoco deseamos hacer críticas prematuras, dado que las investigaciones en el área de la metacognición las podemos ver como relativamente recientes.

Por fin, aclaramos que las opciones por unos y no por otros aspectos, por unas y no por otras lecturas, no tuvo la intención de delimitar preferencias, pero la “falta” de un modelo general y completo, de alguna forma nos provocó cierta inquietud -en vista de que

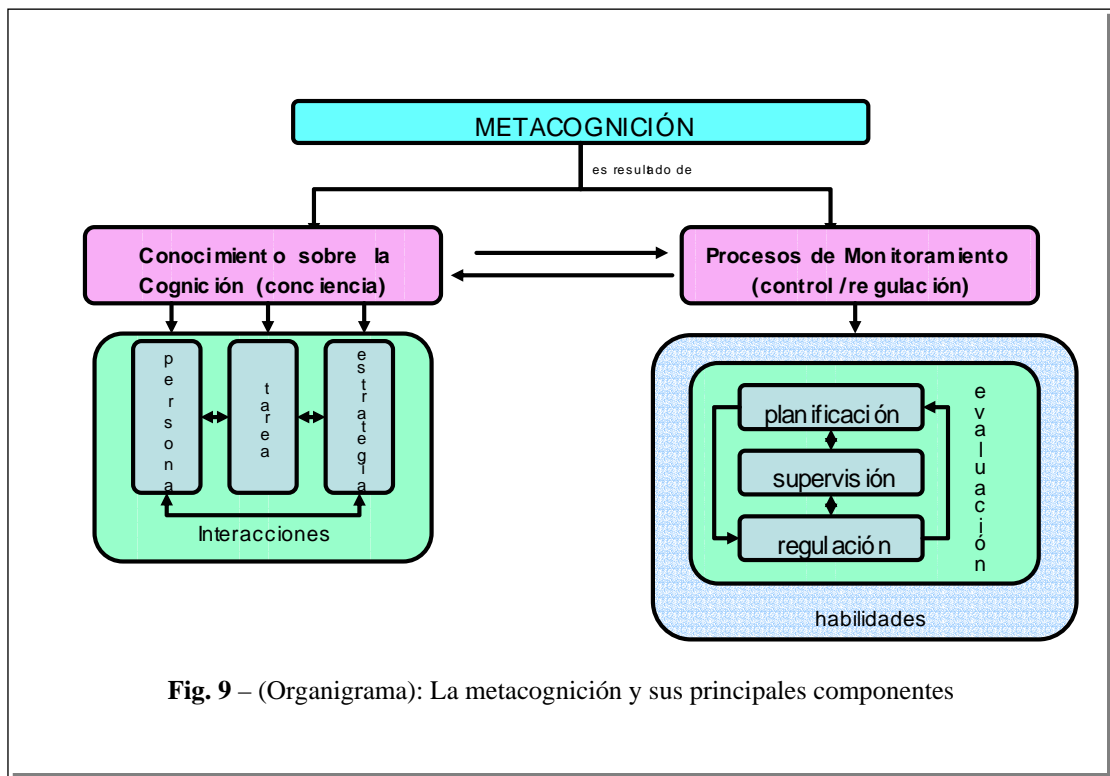
necesitábamos construir o considerar una determinada “estructura”¹⁶- y, en medio de una compleja red de pensamientos que se nos revelaba, nos pareció más prudente y razonable tomar partido por rescatar los orígenes y componer un texto que respectase los matices de cada investigador, pero en conformidad con los planteamientos de Flavell que, de manera más específica, se muestran en el próximo apartado.

En todo este panorama, percibimos tres matices a la hora de definir/caracterizar la temática: la metacognición como “cognición”, “conocimiento sobre la cognición” y “monitoreo”. Algunos explicitan la condición de “auto-consciencia” otros, no. Pero, en casi todos ellos, aparece las componentes “conciencia” y “control”. Algunos autores comprenden la metacognición desde una perspectiva más amplia puesto que incluyen la cognición dentro de la metacognición, otros la sitúan al revés, como parte de la cognición. Hay dos tendencias: una, que pone énfasis en la demarcación entre cognición y metacognición; y otra, que pone el énfasis en la síntesis entre ambos aspectos. De alguna manera, hay que pensar que las dos cosas están estrictamente relacionadas, otra cosa es que conviene separarlas a fin de poder explicarlas mejor y, será en este sentido como planteamos el próximo apartado.

4 - Componentes de la metacognición

Todo ese panorama de definiciones y modelos descritos hasta aquí, traza dos grandes “divisiones” de contenido respecto del concepto de metacognición: se concibe como producto y como proceso de la cognición. Y observamos que de esas divisiones van surgiendo varias ramas o subdivisiones. Para una mejor visualización, intentamos construir un organigrama representativo de las ideas básicas o más mencionadas por los teóricos e investigadores, que van diseñando este constructo. Vale resaltar que es un organigrama que además de expresar tal división, reúne, en su mayoría, las ideas generales, concepciones y definiciones, de los autores consultados sobre la familia de conceptos de este constructo. También este organigrama pretende ser una muestra de cómo está organizado el texto que se sigue.

¹⁶ Tomamos la palabra “estructura” entrecomillada, pues a pesar de la falta de un modelo general y completo, tampoco concebimos un modelo o una estructura como algo estático e inmutable cuando se trata de representar la subjetividad de comprensión de un tema.



Se puede decir que las dos grandes “divisiones” de contenido tienen que ver con los significados que se atribuyen al concepto de metacognición ya que la mayoría de los investigadores que se han ocupado de esta temática suelen delimitar dos significados diferentes del término (todavía estrechamente relacionados): 1) la concibe como un “producto o contenido cognitivo” y 2) la asimila a “procesos u operaciones cognitivas”. Más adelante también veremos que esos dos significados pueden ser tratados como dos tipos de conocimiento: el “declarativo” y el “procedimental”. La interacción entre estos dos grandes componentes puede darse de la siguiente forma: por una parte, el desarrollo del conocimiento metacognitivo sobre las variables que lo componen permite que la actividad de monitoreo ocurra con más eficacia sobre los emprendimientos cognitivos; si se recurre a una actividad de monitoreo, como por ejemplo, una planificación cuidadosa, con el fin de incrementar, pongamos por caso, el dominio del conocimiento de un tema (y por tanto aumentar el conocimiento metacognitivo sobre la tarea), habrá una influencia del conocimiento metacognitivo sobre el proceso de regulación. Por otra parte, al evaluar la eficacia de una estrategia (cognitiva o metacognitiva) y su potencial utilización en otras situaciones (actividad reguladora), puede ocurrir un aumento del conocimiento

metacognitivo sobre la variable estrategia. De modo que hay constantemente una interacción entre ambas componentes (Gonçalves, 1996).

4.1 - La metacognición como producto o contenido cognitivo

Esta dimensión de la metacognición también suele ser referida por *conocimiento declarativo*, *auto-conocimiento* o simplemente *conocimiento sobre la cognición*. En tanto que “producto o contenido cognitivo” la metacognición se refiere al conocimiento que las personas adquieren en relación con su propio funcionamiento cognitivo y el de los demás. Un ejemplo de ese tipo de conocimiento es saber que (tener conciencia de que) los esquemas que construimos como forma de organizar la información que obtenemos a partir de algo, nos facilitarán la adquisición y recuperación posterior de la información (Mateos, 2001, p.20). En otras palabras, estamos tratando del “conocimiento metacognitivo de la cognición”.

Esta primera gran “división” o vertiente de trabajo es conocida como una de las principales dimensiones de la metacognición, y existen autores que sugieren reservar el término metacognición solamente a esta primera acepción, como es el caso de Wellman. Así que este conocimiento sobre la cognición podemos llamarlo “conocimiento metacognitivo” y, a partir de esta pequeña introducción pasaremos ahora a hablar más específicamente de él.¹⁷

4.1.1 - El conocimiento metacognitivo

Este conocimiento es una porción del conocimiento del mundo que uno adquiere (Flavell, 1987); un conocimiento general que todo individuo va acumulando a través de sus experiencias y de los significados dados por él a tareas, objetivos, acciones, experiencias (Mattos y Almeida, citado por Ferreira, 2003). Es un saber relativo a la cognición que tienen las personas en tanto que aprendices (Lafortune et al, 2003). Se puede describir como el conocimiento sobre el conocimiento y el saber, incluyendo el conocimiento de las

¹⁷ “Flavell, en sus trabajos pioneros, comenzó estudiando la metamemoria de los niños, es decir, lo que los niños conocen acerca de su propia memoria, para lo cual, Flavel, pedía a los niños que reflexionaran sobre sus propios procesos de memoria. En esta dirección se desarrollará toda una vertiente de trabajo que, con el tiempo, llegará a constituir una de las dimensiones de la metacognición: conocimiento acerca de la cognición” (González, 1996, p.112).

capacidades y limitaciones de los procesos de pensamiento, de lo que se puede esperar que sepan los seres humanos en general, de las características de uno mismo y de los demás en cuanto seres cognitivos (Nickerson et al., 1985, apud Crespo, 1993, p.90). Desde el punto de vista del paradigma del “procesamiento de información”, Brown señala que el “conocimiento sobre cognición” se refiere a “la información relativamente estable, expresable, a menudo falible, y de desarrollo tardío que tienen los pensadores humanos sobre sus propios procesos cognitivos y de los demás” (Brown, 1987, p.67-68). Según esta autora, el desarrollo tardío de este conocimiento implica que los sujetos consideren sus procesos cognitivos como objetos de pensamiento y reflexión. Y en este sentido podemos hablar de lo que Piaget decía sobre el pensamiento reflexivo, que implica, entre otras cosas, testar hipótesis, evaluar y haber alcanzado el estadio de las “operaciones formales” (Brown, 1987). Ese conocimiento tradicionalmente ha sido relacionado con el “saber que” (aunque en nuestra opinión este conocimiento es el *saber que sé qué* y no solamente saber que).

Flavell (1987) describe una amplia clase de conocimientos que el individuo puede adquirir sobre alguna actividad cognitiva. En relación con esta componente (conocimiento metacognitivo), las personas podemos desarrollar cuatro clases de conocimiento sobre las siguientes variables: 1) “persona”, 2) “tarea”, 3) “estrategias” y 4) “interacciones” que se dan entre las tres primeras. Hay investigadores que añaden otras clases: 5) los “demás aprendices” y 6) el “funcionamiento del pensamiento” en general.¹⁸ Aunque Flavell menciona sólo tres de las clases, presenta y discute la interacción entre las dos o tres primeras variables y, bajo nuestra interpretación, no deja de ser una cuarta clase que el autor incluye. De acuerdo con Crespo (1993), podemos decir que el aprendiz habrá de evaluar al menos las tres primeras clases de variables, para poder predecir si será o no capaz de solucionar un determinado problema y cómo lo hará. De ese modo, pasamos a describir esas cuatro clases de conocimiento que las personas podemos desarrollar.

¹⁸ Los investigadores tienen siempre presentes la terna: persona, tarea y estrategias. Lafortune et al. (2003), por ejemplo, añaden: *los demás aprendices y el funcionamiento del pensamiento en general*. Ferreira (2003), pone énfasis en *las interacciones*. Cabe además resaltar que algunos autores hacen subdivisiones de la referida terna, aunque acaban, de cierta forma, convergiendo a las mismas ideas. En relación a la variable los demás aprendices, Lafortune et al. (2003) nos informan de que este tipo de conocimiento concierne a las representaciones construídas por comparación entre compañeros. Interpretamos que Flavell contempló esta discusión al tratar la variable de la persona, más específicamente cuando habla del “conocimiento interindividual”. En cuanto a la variable de conocimiento del funcionamiento del pensamiento en general, estos mismos autores nos informan de que este tipo de conocimiento se refiere a las representaciones que el aprendiz ha construído sobre la cognición, por ejemplo, que la memoria a corto plazo es limitada.

4.1.1.1 - Conocimiento de la variable “persona”

Esta variable está relacionada con los conocimientos y creencias que conciernen al “ser humano como ser cognitivo” (afectivo, motivacional, perceptual, etc.) (Flavell, 1987). Es un conocimiento que “se va construyendo a lo largo del desarrollo para conducir a consideraciones más adecuadas sobre qué es lo que sabemos y qué lo que ignoramos, con qué grado de certeza podemos afirmarlo y cuáles son nuestras capacidades y limitaciones” (Crespo, 1993, p.95 refiriéndose a Moreno Hdez., 1989), así como otras características personales que pueden afectar al rendimiento en la tarea. Aún según Crespo basándose en Moreno Hdez., este conocimiento supone habilidades básicas y necesarias, como la elaboración de inferencias, y necesita ir acompañado de otras capacidades, para analizar las exigencias de la tarea y enfrentarse con éxito a la resolución de un problema. Para Mateos (2001) ese conocimiento ha sido el menos indagado tradicionalmente.

Flavell identifica tres subcategorías de la variable “persona”: *intraindividual*; *interindividual*; y *universal*. La “intraindividual” hace referencia al “conocimiento y creencias sobre uno mismo”, de sus propias habilidades, intereses, propósitos, gustos, motivaciones, percepciones, fuerzas, flaquezas y otros atributos y estados personales que pueden afectar al rendimiento en la realización de tareas cognitivas. Un ejemplo de la variable intraindividual es saber que uno recuerda mejor palabras que números, otro sería, que aprendo más fácilmente la idea principal de un texto si yo misma lo leo, que si lo oigo leer. En el caso de la variable “interindividual”, hace referencia a la “comparación entre personas”. Un ejemplo sería, saber que a uno le resulta más difícil que a los compañeros de clase aprender matemáticas (Mateos, 2001). Las variables “universales” son propias de la cognición humana y hacen referencia al “conocimiento del individuo sobre propiedades fundamentales del proceso cognitivo y la psicología humana”. Así, saber que nuestra memoria no es un registro preciso de la experiencia y, por tanto, es falible y de capacidad limitada. (Flavell, 1987; Yussen, 1985; Ferreira, 2003; Mateos, 2001; Lafortune et al., 2003; Gonçalves, 1996)

4.1.1.2 - Conocimiento de la variable “tarea”

Según Flavell (1987) el individuo aprende algunas cosas sobre el “cómo” la naturaleza y las demandas encontradas en la tarea afectan y dificultan su forma de ejecución y relativa

dificultad. Son consideradas dos categorías de “tareas”: 1) la de información disponible y 2) la de exigencia y dificultad.

El conocimiento metacognitivo correspondiente a la primera, está en la comprensión que el individuo tiene acerca de la influencia del tipo y cantidad de información, como, por ejemplo, saber que el recuerdo de un material puede depender de las características de dicho material, como su longitud o estructura; saber que es capaz de detectar la falta de datos en un problema.

El conocimiento metacognitivo correspondiente a la segunda categoría está en la comprensión de las exigencias y dificultades de la tarea, o sea, saber que en algunos casos las demandas de las tareas son mucho más rigurosas y difíciles que en otros; en general, es más fácil recordar el argumento de una historia, que las palabras utilizadas para contarla (Gonçalvez, 1996). También se puede decir que estos conocimientos se desarrollan con la experiencia y con las confrontaciones entre diferentes tareas, ya que a lo largo de su vida el individuo va desarrollando “la comprensión de la influencia de determinadas variables de tarea en el almacenamiento y el recuerdo de la información y sigue adquiriendo nuevas habilidades en el análisis de las exigencias de tareas cada vez más complejas” (Crespo, 1993, p.99).

Para Mateos (2001) es muy importante conocer las características de una tarea, dado que este conocimiento ayuda al sujeto a elegir la estrategia más adecuada. Algunos de los comentarios que hace la autora para el caso de una actividad de lectura, y que podemos generalizar, son que las estrategias de una tarea están condicionadas por el objetivo de esa tarea; que el conocimiento de los factores de la tarea que afectan a la memoria, como la comprensión por parte de los niños de que las tareas de reconocimiento son más fáciles que las de recuerdo, se va desarrollando con la edad y que los factores que influyen en la atención que prestan a las tareas, tienen que ver con condicionantes externos (por ejemplo, ruidos) e internos (motivación, etc.).

4.1.1.3. Conocimiento de la variable “estrategias”

Mucho se puede aprender sobre estrategias cognitivas o procedimientos para alcanzar una meta. La adquisición del conocimiento estratégico requiere una comprensión de los aspectos declarativos, procedimentales y condicionales de las estrategias (Mateos, 2001). Esta variable se refiere al conocimiento de la efectividad relativa de las estrategias alternativas para abordar una tarea: por ejemplo, saber que establecer una imagen visual

que recoja la relación entre dos palabras ayuda a recordar mejor la asociación entre ellas que el repaso verbal repetido de la misma (Flavell, 1987; Mateos, 2001). Esta variable también trata sobre “la manera más eficaz de llevar una actividad a su término y sobre las razones que motivan la elección de una estrategia; sobre la secuencia de acciones a poner en práctica (...) [sobre el] conocimiento de estrategias para seleccionar, inferir, memorizar...” (Lafortune et al, 2003, p.10). Siguiendo a Flavell (1987) tenemos que, con el valor diferencial de estrategias alternativas, el individuo aprende sobre las estrategias cognitivas y metacognitivas.

A medida que el sujeto va creciendo, va también aumentando su nivel de alcance y el de complejidad de las estrategias que es capaz de describir. “Con la edad el alumno es más capaz de responder a fines cognitivos y va adquiriendo la flexibilidad que le permite adaptar las acciones cognitivas a los fines cognitivos” (Crespo, 1993, p.102) concomitantemente el sujeto va adquiriendo una mayor capacidad de desarrollo metacognitivo.

Se incluye en la variable de las estrategias otras variables o facetas de conocimiento como por ejemplo la planificación y evaluación. Brown (apud Crespo, 1993) sugiere una lista de estrategias (entre ellas, planificar, predecir, descubrir y monitorar). Esa autora pone el énfasis en el conocimiento de estrategias. Para ella, este conocimiento consiste en aquellos pasos individuales que utilizamos para regular y modificar el progreso de la actividad cognitiva cuando esta está en curso (Yussen, 1985). El estudio de algunas de esas facetas las abordaremos en siguientes apartados.

Sobre esta otra componente del modelo de Flavell podemos decir que las acciones o estrategias son recursos que las personas utilizan para reconocer y mejorar su conocimiento acerca de lo que ocurre durante el proceso de aprendizaje (Ferreira, 2003). Uno puede distinguir entre “estrategias cognitivas y metacognitivas” y, en ese sentido Flavell nos explicita que las estrategias son cognitivas cuando se emplean para hacer progresar la actividad cognitiva y son metacognitivas cuando su función es monitorar ese progreso. O sea, mientras que las cognitivas sirven para alcanzar objetivos cognitivos, las segundas son utilizadas para verificar si estos objetivos fueron alcanzados.

Crespo Allende (2000-1) con base en diversos autores¹⁹ describe las estrategias (para un caso específico de lectura) como aquellas acciones cognitivas, conscientes y deliberadas, que se implementan para alcanzar un determinado objetivo en una situación

¹⁹ (Antonijevic y Chadwick, 1981-2; Gagné, 1991; Monereo et al., 1997, apud Crespo Allende, 2000-1).

concreta. Varían con el contexto y se ajustan a estilos individuales. El valor de una estrategia viene dado por su éxito en una tarea.

Gonçalves (1996) basándose en Campione, 1987, señala que “el conocimiento metacognitivo sobre qué estrategias serán más eficaces para alcanzar determinados objetivos es válido tanto para objetivos cognitivos como metacognitivos” (ibid. p.18).

4.1.1.4 - Conocimiento de la variable “interacciones entre persona, tarea y estrategia”

Flavell y otros autores, como es el caso de Yussen (1985), Ferreira (2003) y Crespo (1993) se apresuran a indicar que la mayor parte del conocimiento metacognitivo implica probablemente la existencia de “interacciones” entre esas categorías de conocimiento (persona, tarea y estrategia) con el objeto de influenciar el uso (o el resultado) de alguna competencia (actuación) cognitiva. Así que, las estrategias seleccionadas para resolver una tarea concreta dependerán tanto de las características de esa tarea como de las personas (Mateos, 2001).

4.2- La metacognición como proceso u operación cognitiva

La metacognición en esta acepción suele ser interpretada como *mecanismo autorregulatorio, autorregulación de la conducta, conocimiento procedimental* o simplemente *regulación*. Pero sobre todo esta acepción se refiere a los procesos de supervisión y regulación que ejercemos sobre nuestra propia actividad cognitiva. Un ejemplo sería que, cuando queremos favorecer el aprendizaje de algún contenido, buscamos seleccionar como estrategia la organización de ese contenido en un esquema para después evaluar el resultado obtenido (Mateos, 2001, p.20). También es un saber relativo a la cognición.

La metacognición como “proceso” se acerca más a un conocimiento de tipo procedimental que, como vimos, se refiere al cómo conocemos, o sea, el *saber cómo sé* algo.

Los procesos o actividades de planificación, supervisión, regulación y evaluación así como la habilidad para usar lo que se conoce (la utilización espontánea del conocimiento) y el acceso a la información relevante para realizar una tarea, sirven como indicios para señalar el funcionamiento metacognitivo. Cuando una persona hace uso de

uno o más de esos procesos en la actividad cognitiva decimos que dispone de ciertas habilidades, habilidades para planificar, supervisar, etc. Las consideraciones sobre las habilidades las ubicaremos en este apartado y a él nos referiremos a continuación para después adentrarnos con más detalle en los procesos mencionados.

4.2.1- Habilidades o Estrategias Metacognitivas

Estas habilidades son descritas “como aquellas habilidades cognitivas que son necesarias o útiles para la adquisición, el empleo y el control del conocimiento, y de las demás habilidades cognitivas” (Nickerson et al., 1985, apud Crespo, 1993, p.90). En otras palabras, es la utilización y adaptación del conocimiento para la gestión de la actividad mental y consiste en predecir, planificar, controlar, regular y verificar esta actividad en la ejecución de una tarea. Su principal manifestación de desarrollo es el control y la regulación aportada constantemente durante la ejecución de una tarea (Lafortune et al., 2003). En ese sentido, González (1996) nos indica que, una persona que ha desarrollado habilidades metacognitivas, piensa activamente acerca de lo que está haciendo cuando está dedicado a la realización de alguna tarea intelectualmente exigente y es capaz de ejercer control sobre sus propios procesos cognitivos. Esas habilidades hacen del individuo un usuario hábil del conocimiento, consciente de que es necesario organizar previamente de alguna manera la conducta que se va a llevar a cabo (Crespo, 1993).

Brown pone énfasis en las habilidades metacognitivas. Para ella esas habilidades implican la operación de procesos mentales específicos por la cual los individuos organizan y monitoran sus propios pensamientos (Kluwe, 1987). Para Brown las habilidades metacognitivas son los “mecanismos auto-regulatorios” que emplea un sujeto durante el intento activo de resolver problemas (Mateos, 2001)²⁰.

4.2.2 - Monitoramiento²¹ Cognitivo (Control/Regulación)

Comúnmente llamado “Control o Regulación de la cognición”, estos procesos envuelven para algunos las variables de supervisión y regulación dejando de lado las variables de

²⁰ Para más detalles remitimos a Mateos.

²¹ También en la literatura sobre metacognición encontramos el término monitoramiento refiriéndose a la supervisión. Utilizamos aquí monitoramiento por considerar que esta palabra abarca otros vocablos y además queremos ser “fiel” a la nomenclatura utilizada por Flavell en 1981 cuando describe que actividad de monitorar un emprendimiento se constituye en organizar, supervisar, regular y evaluar el proceso seguido.

planificación y evaluación y, para otros son procesos que envuelven todas esas variables; nos incluimos entre esos últimos.

El control de la cognición tiene su origen en la problemática de la generalización y transferencia de lo aprendido. Los estudios en esa vertiente para comprobar la hipótesis “según la cual el uso de los recursos cognitivos propios no es espontáneo sino que, cuando se tiene la necesidad de enfrentar tareas o problemas concretos, es necesario activarlo, a fin de seleccionar la estrategia más pertinente en cada situación” (González, 1996, p.113), incluyen una enseñanza explícita de métodos de autorregulación permitiendo a los sujetos experimentales monitorar y supervisar el uso de sus propios recursos cognitivos.

De acuerdo con el modelo de Flavell, el monitoramiento que una persona ejerce sobre su propia actividad cognitiva depende de las acciones e interacciones entre las cuatro componentes de su modelo (*conocimiento metacognitivo, experiencias metacognitivas, metas (objetivos cognitivos a alcanzar) y acciones o estrategias*), o sea, que cualquier componente puede relacionarse con cualquiera de las restantes (Mateos, 2001, p.22).

La actividad de monitorar se dirige a examinar, asegurarse de que está en la dirección correcta hacia la meta perseguida; a llevar una “observación evaluativa”, para saber si se mantiene el ritmo o si nos alejamos de él. Tener conciencia de los esfuerzos cognitivos que hay que desarrollar puede ser un indicio de control (Kagan y Lang (1978) apud González, 1996).

Crespo (1993) apunta que la regulación (en tanto que monitoreo) suele ser concebida como: a) el “control y supervisión del propio desempeño” y destaca dos aspectos, que son: 1) la limitación de la cantidad de esfuerzo que dedicamos a una tarea y 2) el autocontrol de la comprensión, o sea, la capacidad de determinar que uno entiende apenas parte de lo que está leyendo u oyendo y el conocimiento de lo que uno tiene que hacer al respecto; b) “control y adaptación de las estrategias” y modificación de las mismas si es necesario, que requieren tener una conducta reflexiva, haciendo correcciones cuando es necesario; y, c) “verificación” (evaluación) de los resultados. Cuando ya se ha dado la respuesta, la regulación del proceso requiere la evaluación de la misma para comprobar si responde o no al planteamiento previo.

Como podemos observar la “regulación” se refiere a un conjunto de actividades destinadas a “controlar el aprendizaje”. Algunos autores como Schraw (2001) además de incluir en ésta, las actividades de supervisar y evaluar, incluye la actividad de planificar. En cambio otros consideran sólo las dos primeras. De todos los modos lo que está claro es

que esas actividades se ponen en marcha antes, durante y después de la ejecución de una tarea.

A fin de reiterar lo dicho, queremos señalar que la actividad de monitorar se puede extender a cualquier acción en particular que implique, por ejemplo, la necesidad de tener que trazar algún plan, de hacer algún examen, un cambio o una reflexión, en cualquiera de las etapas del proceso.

4.2.2.1 - Planificación

Esta dimensión implica elaborar planes de acción cognitiva, organizar y/o diseñar estrategias cuyo desarrollo, potencial o eventualmente, podrían conducir al logro de la solución del problema. La acción cognitiva de planificar comporta a su vez acciones metacognitivas como por ejemplo, analizar una tarea con el fin de prever las etapas de realización, para anticipar y elegir estrategias en función de las metas fijadas (Weinstein y Mayer, 1986; Kagan y Lang, 1978, apud González, 1996). También se puede decir que la planificación es la organización previa de las actividades y equivale a “trazar de antemano el recorrido físico o mental para estructurar y organizar la propia conducta” (Flavell, 1977, apud Crespo, 1993, p.109). Para Brown (1978) la planificación es denominada estrategia central, afirmando que todo el concepto de estrategia gira en torno a la idea de planteamiento como estrategia central (Crespo, 1993).

Crespo (1993) basándose en Moreno Hdez. (1990) resalta que es preciso diferenciar

“el planteamiento (o metaplan), que sería la estrategia metacognitiva más general y se refiere al conjunto de decisiones sobre cómo enfocar el problema en general (...) [de] la decisión sobre cuáles son las acciones deseables que ha de tomar la persona, para pasar a continuación a una planificación más específica (...) que conducirán al objetivo previsto” (p.110).

La planificación de la solución de un problema implica descomponer el problema en subproblemas y diseñar una secuencia de pasos a seguir para acometer cada subproblema. La planificación es una etapa que marca la diferencia entre expertos y novatos y, normalmente son los expertos que dedican más tiempo a esta fase cuando se enfrentan, por ejemplo, con problemas nuevos. En cambio, los novatos tienden a lanzarse directamente a una acción sin planificarla previamente (Mateos, 2001, p.85-6).

4.2.2.2 - Supervisión

Esta otra dimensión implica la posibilidad de reflexionar sobre las acciones cognitivas que están en marcha y examinar sus consecuencias; pensar acerca de su propia conducta, de cómo está haciendo, de sus capacidades de control sobre sus propios procesos cognitivos, como si un supervisor (“ejecutivo”) estuviera monitoreando sus pensamientos y acciones. (Kagan y Lang, 1978; p. 181, apud González, 1996). Es tener conciencia del grado en el que la meta está siendo lograda (Weinstein y Mayer, 1986 apud González, 1996). En otras palabras, es a través de la supervisión que quedamos informados del estado en que se encuentra nuestro conocimiento.

Los expertos en esta etapa también suelen ser mejores supervisando el progreso del proceso de resolución del problema. Desempeñan un mayor esfuerzo y son más conscientes y más precisos en sus acciones que los novatos, que tienden a lanzarse directamente a una acción sin supervisar su ejecución (Mateos, 2001, p.85-6).

4.2.2.3 - Regulación

Esta actividad o acción consiste en modificar el proceso seguido como consecuencia de la supervisión ejercida, pudiendo, por ejemplo, aportar correcciones puntuales y cambiar o modificar estrategias que hayan sido implementadas cuando no estén resultando efectivas para alcanzar la meta fijada. La regulación como consecuencia de la supervisión, evidencia la necesidad que tiene la regulación de la información sobre el estado en que se encuentra la actividad cognitiva. (Lafortune et al, *ibídem*: 11, Weinstein y Mayer, 1986 apud González, 1996; Mateos, 2001)

El hecho de “ajustar y/o cambiar los planes” por otros mejores y más eficientes, además de demostrar una flexibilidad en el pensamiento, indica que una regulación está activada. También podrían incluirse en la actividad de regular los actos de “concentrarse” y de “control de la ansiedad y angustia”. (Kagan y Lang, 1978, apud González, 1993)

Dado que la regulación es consecuencia de la supervisión, quien más hace uso de esta etapa son también los expertos. Con mayor flexibilidad de pensamiento los expertos al detectar errores en el proceso, de pronto ajustan o modifican, cuando es necesario, las estrategias planificadas con el objeto de alcanzar la meta (Mateos, 2001, p.85-6).

4.2.2.4 - Evaluación

La evaluación se refiere a la “valoración del producto” y a la “eficiencia del aprendizaje” (Schraw, 2001). Según Crespo Allende (2000-1), dentro de este grupo podemos incluir acciones para valorar el nivel de logro de una tarea. Afirma que Flavell, en 1985, distingue y diferencia las estrategias de evaluación de las demás estrategias cognitivas y las considera como estrategias metacognitivas que controlan la eficiencia de las acciones cognitivas.

Para finalizar la familia de conceptos en torno a esa temática, pasemos a hablar de otro más que compone el modelo de Flavell, el de “experiencia”.

5 - Las Experiencias Metacognitivas

Otro de los conceptos principales en la taxonomía propuesta por Flavell son las *experiencias metacognitivas* y estas pueden ser cualquier tipo de “experiencia afectiva o cognitiva” (ideas, pensamientos, sentimientos, etc), relacionada con el progreso hacia las **metas** (en este momento, estamos en la tercera componente del modelo de Flavell), que pueden llegar a ser interpretadas conscientemente y que son pertinentes para la conducción de la vida intelectual (Flavell, 1987; Pressley, 1985). Un ejemplo, dado por Flavell y Wellman en 1977 de experiencia metacognitiva, relativa a la memoria, es “tenerlo en la punta de la lengua”. Estas, ocurren a menudo cuando la cognición falla, cuando uno tiene el sentimiento de que alguna cosa resulta difícil de percibir, comprender, recordar, o resolver.

Según Yussen (1985) Flavell sugiere que podemos distinguir entre “conocimiento metacognitivo” y “experiencias metacognitivas”. Cuando estamos empeñados en alguna actividad cognitiva, tal como leer, estamos respondiendo a algún conocimiento que tenemos almacenado en la memoria sobre la actividad en general. ¿Qué palabra debo poner aquí? puede ser ejemplo de reacciones de “experiencias metacognitivas” y, estas, ocurren de manera relativamente espontánea o a través de reflexiones on-line (durante el proceso cognitivo); estas experiencias pueden ser breves o largas en cuanto a la duración y pueden ser simples o complejas en cuanto al contenido. Así, las experiencias metacognitivas son reacciones accionadas en el momento (en el curso) de la actividad cognitiva mientras que

el “conocimiento metacognitivo” consiste en “conceptos almacenados” (declarativo, procedimental, ...) en la memoria para guiar la actividad cognitiva.

La importancia de las experiencias metacognitivas reside en la influencia que pueden ejercer sobre el individuo, llevándolo a revisar, cambiar o abandonar objetivos y planteamientos ya establecidos, alterar e influenciar el conocimiento metacognitivo y aún activar estrategias dirigidas a la consecución de objetivos cognitivos y metacognitivos. (Flavell, 1979; Gonçalves, 1996)

Más reflexiones...

De todo este panorama de conceptos, ideas y concepciones de teóricos e investigadores en el intento de elaborar una teoría de la metacognición, podemos inferir que el conocimiento acerca de la cognición de uno mismo, de los demás, de objetos, etc., así como las actividades de monitoreo que uno ejerce de sus propias destrezas cognitivas, no solamente sirve para describir y caracterizar una teoría que alude a procesos u operaciones internas (mentales) -ejercidas por un interiorizado conjunto de mecanismos que permiten tanto recopilar, producir y evaluar información como controlar y autorregular el funcionamiento intelectual (Ferreira, 2003)- y que, en las palabras de González (1996), es “un constructo de naturaleza teórica que (...) en el caso específico de la resolución de un problema, implica el reconocimiento, por parte del resolutor, de los procesos internos de pensamiento que él activa cuando intenta resolverlo” (p.63-4), sino que también sirven para entender el pensamiento involucrado en las prácticas matemáticas, o sea, la metacognición ocurre simultáneamente con las acciones cognitivas (estos dos aspectos se condicionan mutuamente sin que en nuestra opinión uno se puede considerar la causa “mecánica” del otro). En ese sentido, vemos que tanto el conocimiento acerca de la cognición, como las actividades de monitoreo emergen (y acompañan) las experiencias que uno va adquiriendo con las tareas que maneja, con las personas de su alrededor, con el uso de determinadas estrategias, con el uso de las funciones de monitoreo,... es decir, con las experiencias que según Flavell están relacionadas con el progreso hacia las metas. En el contexto académico vemos como factor importantísimo las experiencias adquiridas con los procesos de instrucción (dirigidos conscientemente o no hacia el desarrollo de la metacognición). Pero, también es necesario destacar, que relacionadas con ese progreso hacia las metas están las experiencias que los sujetos adquirieron (y van adquiriendo) en diversos contextos, nombrados de muchas

formas: background familiar, la cultura, los amigos, la calle y en el ámbito extra académico de forma general. Entendiendo que las experiencias (metacognitivas) deben ser concebidas en este contexto general es que interpretamos las experiencias como una tela de fondo para el desarrollo de la metacognición. También las dos vertientes de la metacognición guardan relación con el factor edad y con los significados que uno atribuye a todas estas cosas, esto es, que uno atribuye al mundo de objetos al su al rededor, etc. Todo eso, confirma la influencia que los agentes o procesos externos ejercen sobre ese conocimiento. De aquí, podemos inferir que la metacognición tiene sus raíces en los hechos, en el uso, y es ante todo un constructo que emerge de la práctica, que representa una porción de las experiencias y del conocimiento que uno adquiere del mundo, con el mundo y en el mundo. Además es un constructo relativo al sujeto y a sus relaciones con los objetos al su al rededor.

En el próximo apartado profundizaremos un poco más es las cuestiones del contexto, agentes sociales y procesos de evaluación e instrucción sobre esta temática.

III - CONTEXTOS DE EVALUACIÓN Y DE INSTRUCCIÓN EN EL DESARROLLO DE LA METACOGNICIÓN

Introducción

En este apartado, trataremos de discutir dos enfoques. En el primero, analizaremos brevemente dos documentos programáticos internacionales con el propósito de apreciar la atención dada a los aspectos metacognitivos. El NCTM (2000) es un documento programático en los dominios del “desarrollo curricular”, de la “evaluación” y de la “innovación” en educación matemática. Se trata de un documento que aglutina un consenso muy amplio en torno a las recomendaciones que en él constan. En realidad es un conjunto de recomendaciones que sintetiza los resultados de la investigación realizada en los últimos 15 años. Otro documento es el OCDE/PISA²² (2003) que discute y analiza el encuadramiento conceptual del PISA así como todos los procedimientos investigadores utilizados para la evaluación internacional de los aprendizajes de los alumnos de 15 años en Matemáticas, Ciencias y Literatura (Lengua Materna). Estos dos documentos contienen informaciones con incidencia en la importancia de la evaluación de los procesos metacognitivos, acabando por llamar la atención para la relevancia de la metacognición en el desarrollo de la comprensión matemática de los alumnos. Aún en este primer enfoque, trataremos de discutir la problemática de la evaluación de la actividad metacognitiva, ejemplificando métodos normalmente utilizados para evaluar dicha actividad. En el segundo, que denominaremos “contexto de instrucción estándar y no-estándar”, ubicaremos otras dos temáticas: a) los principios para la instrucción y el papel de los agentes sociales (profesores, compañeros...) en el desarrollo de la actividad metacognitiva y b) los programas diseñados y aplicados para desarrollar y/o incrementar dicha actividad en el sujeto.

1 - Contextos de evaluación

a) Evaluación del conocimiento metacognitivo

¿Como podemos evaluar la actividad metacognitiva de los estudiantes dado que ésta difícilmente se traduce en una respuesta observable? La respuesta a esta pregunta parece

²² Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

tener que ver con el empleo de una diversidad de procedimientos y sistemas indirectos de evaluación y también con una diversidad de metodologías²³.

Por otra parte, cabe resaltar que la variedad de metodologías, consecuencia, también, del análisis de datos cualitativos, ha comenzado a valorarse adecuadamente a partir del desarrollo del cognitivismo en el siglo XX. Un hecho que ha marcado esta valoración fue el lanzamiento del Sputnik en 1957 por la unión soviética. Conforme señala Fernandes (2005) el mundo occidental, temiendo quedarse atrás en la carrera hacia el espacio, reaccionó poniendo énfasis en el desarrollo de reformas educativas orientadas para promover, sobretodo, la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias. “Los países más desarrollados de la Europa y los Estados Unidos hicieron inversiones significativas en la evaluación de los currículos (...) porque querían cerciorarse de que los nuevos currículos obedecían a los criterios de calidad que se pretendían alcanzar” (ibid. p.58). De modo que ésta fue una época bastante importante en el contexto del desarrollo de la evaluación. Aún dentro de este contexto, Kilpatrick, en 1978, comparando los métodos de investigación prevalecientes en Estados Unidos en la época, con los tipos de investigación cualitativa realizados en la Unión Soviética, observó que la investigación americana, sancionada como “rigurosa”, resultaba un poco estéril: en la búsqueda del rigor experimental, los investigadores habían perdido de vista el análisis de conductas matemáticas verdaderamente significativas. En contraste, la investigación soviética, sancionada como “no rigurosa”, se enfocó hacia el análisis de las conductas y habilidades matemáticas que debían ser consideradas como aspectos importantes del pensamiento matemático (Schoenfeld, 1985b, 1992). Con este encuadramiento, la evaluación puede ser vista como un eslabón de comunicación entre la escuela y la sociedad.

Pero los cambios en la sociedad continúan y ahora con mucho más fuerza y mucho más exigencias. Según Fernandes (2005) para adaptar el sistema educativo al ritmo frenético social tienen habido propuestas permanentes de reformas en las políticas

²³ A estos procedimientos y sistemas indirectos de evaluación algunos autores los identifican como “métodos” (Mayor et. al., 1993) y otros como “metodología y métodos” (como lo hacen Schoenfeld y Hegedus). Clasifican como métodos: el “paradigma del experto-novato” (Heller y Hungate), metacognición y creencias (Schoenfeld, 1992), creencias del profesor y sus efectos en la instrucción (Alba Thompson, citada por Schoenfeld, 1992). También “pensamiento en voz alta”, análisis protocolar y trabajo grupal, (Hegedus, 1998 incluso refiriéndose a Schoenfeld). De la misma forma existe una diversidad similar de metodologías: los métodos experimentales, estudio del experto-novato, entrevistas clínicas, análisis protocolares y observaciones del aula entre otros, (Schoenfeld, 1992). La gran mayoría de las metodologías intenta explicar el pensamiento matemático. De forma general, parece haber una estrecha relación entre estos términos que son tratados como similares. Todavía estamos inclinados a concordar con la clasificación de Mayor et. al., ya que a nuestro entender, de forma sucinta, el método es un procedimiento y la metodología es un conjunto de métodos.

educativas. En ese orden de cosas, los currículos de la actualidad son mucho más desafiantes y exigentes que los de 30 años atrás ya que, entre otras cosas, exigen diversidad y profundidad de conocimientos, tareas complejas, preocupación explícita con la integración, relación y movilización de conocimientos y aprendizajes y, todo eso, desarrollándose en contextos significativos para los alumnos. Alinear la evaluación con las nuevas exigencias curriculares ha sido un desafío, toda vez que aún se perciben usos con mayor o menor expresión de “modelos de evaluación” centrados en “objetivos comportamentales y clasificatorios”.

De manera que, desde temprano, es imbuída en el hombre la idea de medir para clasificar, para excluir y, eso acontece en varias estratos de la sociedad: familia, trabajo, escuela, etc. Y la escuela tiene enaltecido mucho los procedimientos competitivos y clasificatorios. Desde nuestro punto de vista, esos procedimientos son típicos de una sociedad *bestista* (del inglés “best”), donde apunta como “mejor alumno” el que más acierta. El “peor alumno” será aquél que comete más errores (Hoffmann, 1998; Gusmão, 2000a). Con todo, es necesario tener en cuenta que, con las actuales exigencias de nuestra sociedad, el nuevo concepto de “éxito” estará asociado a “aquél que aprende a aprender”.

Muchos autores, en los últimos 15 o 20 años vienen llamando la atención sobre el hecho de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos; tener en consideración cuestiones de naturaleza ética, moral, política y social (ver, por ejemplo, Fernandes, 1991, 1994 y 2005). Este autor, rescatando la trayectoria de concepciones tradicionales de la evaluación y sus implicaciones en el proceso de enseñanza, muestra las reales necesidades de transformar la práctica de evaluación y, apoyándose en las “teorías de aprendizaje”, propone una nueva concepción que se configura como alternativa a las evaluaciones predominantes. Es una propuesta que presupone una partija de responsabilidades entre profesores y alumnos en materia de “evaluación” y de “regulación de los aprendizajes”. Nombradamente, se trata de la Evaluación Formativa Alternativa (AFA) que según el autor:

“Se trata de una evaluación más humanizada, más situada en los contextos vividos por profesores y alumnos, más centrada en la regulación y mejora de los aprendizajes, más participada, más transparente e integrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje. O sea, una evaluación que es eminentemente formativa en sus formas y en sus contenidos” (Fernandes, 2005, p.63).

Uno de los papeles de los profesores en esta perspectiva de evaluación, es claramente el de proporcionar medios para desarrollar competencias metacognitivas en los estudiantes. Pero, ¿se podría incluir dicha propuesta también en el ámbito de los contextos de instrucción, en tanto que programas destinados al desarrollo de la metacognición? La idea de incorporar la AFA en los procesos de instrucción es ya algo inherente a ella, pero lo que no se puede es confundirla con una técnica o un método para evaluar el conocimiento, que no lo es. En este sentido, la AFA es:

“Una construcción social compleja, un proceso eminentemente pedagógico, plenamente integrado en la enseñanza y aprendizaje, deliberado, interactivo, cuya principal función es la de regular y la de mejorar los aprendizajes de los alumnos. O sea, es la de conseguir que los alumnos aprendan mejor, con comprensión, utilizando y desarrollando sus competencias, nombradamente las del dominio cognitivo y metacognitivo” (ibid. p.65).

Entre las características más relevantes de la Evaluación Formativa Alternativa resaltadas por el autor son:

- “La evaluación es deliberadamente organizada para proporcionar un feedback inteligente y de elevada cualidad teniendo en previsión mejorar los aprendizajes de los alumnos;
- El **feedback** es determinante para activar los procesos cognitivos y metacognitivos de los alumnos, que, a su vez, regulan y controlan los procesos de aprendizaje, así como para mejorar su motivación y auto-estima;
- La naturaleza de la interacción y de la comunicación entre profesores y alumnos es absolutamente central, porque los profesores tienen que establecer puentes entre lo que se considera importante aprender y el complejo mundo de los alumnos (lo que ellos son, lo que saben, cómo piensan, cómo aprenden, lo que sienten, cómo sienten, etc.);
- Los alumnos son deliberada, activa y sistemáticamente involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, responsabilizándose por sus tareas y teniendo amplias oportunidades para elaborar sus respuestas y para compartir lo que, y el modo en que, comprendieran;
- Las tareas propuestas a los alumnos, que, deseablemente, son simultáneamente de enseñanza, de evaluación y de aprendizaje, son seleccionadas con criterio y diversificadas; representan los dominios estructurales del currículo y activan los procesos más complejos del pensamiento (e.g., analizar, sintetizar, evaluar, relacionar, integrar, seleccionar);
- Las tareas reflejan una estrecha relación entre las didácticas específicas de las disciplinas, que se constituyen como elementos de referencia indispensables, y la evaluación, que tiene un papel relevante en la regulación de los procesos de aprendizaje;
- El ambiente de evaluación de las clases, induce a una cultura positiva de éxito basada en el principio de que todos los alumnos pueden aprender” (ibid. p.69).

Ahora, si lo que se busca es la “autonomía” del alumno en el proceso de aprendizaje, esta autonomía requiere/exige toda una práctica de diálogos, de escucha, de oportunidades, de participación conjunta y responsable de los agentes sociales involucrados en este proceso. Y es así como vemos que la AFA contribuye a esta tan soñada autonomía y consecuente desarrollo metacognitivo.

Como antes mencionamos la AFA no es ninguna técnica, ni ninguno método para evaluar el conocimiento metacognitivo. Pero, existen muchos medios de evaluarse dichos conocimientos. Así, entre los “métodos de análisis” más conocidos del conocimiento metacognitivo y su aplicación productiva a la resolución de problemas, los más frecuentes para evaluar la metacognición son: “entrevistas estructuradas” en un conjunto de preguntas (más común para niños), “entrevistas clínicas” (informes verbales), análisis del “pensamiento en voz alta”, de las expresiones naturales y de la ejecución de la tarea, “estudio del experto-novato”, “análisis protocolares” (cuestionarios e inventarios de lápiz y papel), así como los intentos de construir “escalas o instrumentos de evaluación”. Las cuestiones, normalmente, objetivan indagar desde conocimientos generales a puntuales, cuando se pone al sujeto en la situación concreta de resolución de problemas.

A pesar de la variedad de métodos utilizados, Hegedus (1998) señala que no parece haber, sin embargo, ninguna directriz clara para proponer una metodología científica que permita evaluar el “pensamiento metacognitivo eficiente”. Sin embargo, las investigaciones en metacognición, aunque problemáticas, han proporcionado información relevante para una comprensión más rigurosa de los procesos de resolución de problemas (Lester, 1994a).

Para ejemplificar la variedad de metodologías, tenemos, según Hegedus, que la metodología de análisis utilizada por él en su investigación, se separa de la de Schoenfeld, toda vez que, éste último, considera que en el protocolo (de entrevistas), no debe haber intervención por parte del entrevistador: debe limitarse exclusivamente a observar y hacer preguntas protocolarias que no aporten información (del tipo ¿porqué hace esto?) al resolutor. Por el contrario, Hegedus, preocupado por detectar aspectos metacognitivos particulares que usan los estudiantes al resolver problemas de cálculo integral, adopta una postura intervencionista en los protocolos de sus entrevistas, aportando informaciones precisas para provocar en el estudiante la necesidad de manifestar conductas metacognitivas concretas, incluso con intervenciones instruccionales para ayudar a los

resolutores en situaciones muy sutiles, o con ayudas como “represente esta situación gráficamente”, “use esta estrategia heurística para...”.

En relación con las metodologías utilizadas por Schoenfeld y Hegedus, pensamos que la complementariedad entre ambas podría ofrecernos resultados interesantes. Las “verbalizaciones neutras”, no intervencionistas (con sus reglas), buscando informaciones más generales, son tan importantes como las verbalizaciones de carácter intervencionista (con sus reglas) cuando se pretende buscar alguna particularidad. Es decir, las dos son igualmente importantes para identificar estrategias metacognitivas. Claro que muchas veces el investigador se ve en la tesitura de tener que elegir una, ninguna o todas, jugando un papel determinante la flexibilidad en la aplicación de reglas.

Daremos ahora una sucinta información, con carácter ilustrativo, de apenas dos de los métodos anteriormente citados. Aclaraciones sobre los demás pueden verse por ejemplo, en Schoenfeld (1985a, 1992), Mayor et. al. (1993) y Hegedus (1998). Uno de ellos es el estudio de la “comparación experto-novato”. Muchas investigaciones muestran que los aprendices metacognitivamente activos suelen tener mayor competencia en tareas cognitivas que aquellos que no lo son, de modo que se distinguen un resolutor de problemas experto de uno novato. Los expertos planean más y supervisan y regulan más eficientemente sus estrategias, tienen mayor sentido de sus propias capacidades y limitaciones como resolutores de problemas y, de modo general, son académicamente más exitosos (González, 1996, refiriéndose a Nickerson, 1984; Gourgey, 2001). En cambio los novatos son menos conscientes del conocimiento que poseen y de la utilidad del mismo, disponen de menos estrategias y no usan la flexibilidad (Campione et. al., 1989, apud González, 1996). Se diferencian en un dominio específico de contenidos, no tanto en la cantidad, como en la habilidad para reconocer y activar la información que poseen (González, refiriéndose a Kagan y Lang, 1978). Esta comparación (entre “resolutores expertos y novatos”) es observada en las investigaciones interesadas en describir en qué consiste la metacognición: “los primeros (...) ‘no solo saben más, sino que saben que saben más, saben mejor como emplear lo que saben, tienen mejor organizado y más fácilmente accesible lo que saben, y saben mejor cómo aprender más todavía (p.124)’”. (Trillo, 1989, citando a Nickerson, 1987). También una apreciación, sobre una experiencia, entre expertos y novatos, puede verse en Schoenfeld (1992).

Otro método se basa en los “informes verbales”: Tienen lugar cuando se les pregunta a las personas qué estrategias usan cuando realizan tareas cognitivas (Mayor et.

al., 1993). Estos autores nos presentan algunos inconvenientes de este método. No se puede saber hasta qué punto lo que dice el entrevistado corresponde a lo que realmente ha pensado mientras realizaba la tarea, o si es lo que piensa en el momento de la reflexión (en el momento de la entrevista), o, incluso, hasta qué punto está diciendo la verdad. “De ahí que la mayoría de los estudios se basen en los informes de varias personas y sólo sea posible extraer las conclusiones a partir del consenso estadístico” (ibid. p.146). Otro inconveniente apuntado por los autores es que, muchas veces, las personas no saben cómo han hecho algo y, en estos casos, tendremos que “decidir si la incapacidad para verbalizar significa ausencia de estrategias metacognitivas, ejecución automatizada o falta de recuerdo” (ibid.). La cuestión del tiempo entre la tarea y el informe verbal es otra cuestión que debe ser considerada cuando se pretende usar este método. Cuanto menos tiempo transcurra entre ambos más precisas y completas serán las informaciones. En nuestra investigación utilizamos este recurso con varias personas, y los detalles de su uso, los abordaremos en el capítulo destinado a la metodología.

b) La metacognición en documentos programáticos internacionales, NCTM y OCDE/PISA

En una breve revisión de estos documentos con vistas a apreciar la atención que se da a los aspectos metacognitivos, fue posible situar esta atención en el contexto de las “competencias”. Es señalada la importancia de la “flexibilidad de pensamiento” y “autonomía del aprendizaje” de modo que, la persona matemáticamente competente debe tener habilidad para usar los conocimientos matemáticos con flexibilidad y aplicar con destreza y eficacia lo aprendido en un contexto, a otro contexto. Por otra parte, subrayan que “aprender comprendiendo” propicia la autonomía del aprendizaje, permitiendo a los estudiantes definir sus objetivos y hacer un seguimiento de sus progresos, al tiempo que aumenta su confianza para resolver tareas matemáticas. (Llinares, 2003; NCTM, 2000; PISA/OCDE, 2003)

En la presentación de los diez Estándares Curriculares (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad –estándares de contenidos-; resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones -estándares de procesos-), para los niveles desde preescolar hasta el final

de la educación secundaria, observamos la atención dada a la componente “control”, concretamente en el estándar “Resolución de Problemas”, se cita textualmente:

“Los programas de enseñanza de todas las etapas [desde preescolar a nivel 12] debería capacitar a todos los estudiantes para:
Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas.
Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos.
Aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas.
Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él.” (NCTM, 2000, p. 55).

Del conjunto de estas capacidades, llamamos la atención hacia las consideraciones que hacen los “Principios” y “Estándares” acerca del “pensamiento estratégico” y del “control reflexivo del proceso de resolución de un problema”. En relación con el “pensamiento estratégico” apuntan la necesidad de crear oportunidades para utilizar las estrategias frecuentemente citadas (uso de diagramas, buscar patrones, probar con casos concretos, considerar diversas posibilidades, trabajar hacia atrás, tantear, comprobar, etc.), e insertarlas de forma natural en las áreas de contenidos matemáticos. En el nivel de secundaria “los estudiantes deberían tener acceso a una amplia gama de estrategias y ser capaces de decidir cuál usar y adaptar e inventar otras” (ibid. p.57). Referente al “control reflexivo (monitoreo) del proceso de resolución de problemas”, se señala la evidencia de que el “resolutor eficiente” de problemas “controla y ajusta constantemente” lo que está haciendo, asegurándose de “entender el problema” para luego trazar un plan y evaluar periódicamente sus progresos, parándose a considerar otras alternativas y enfoques cuando detecta que no está en la dirección adecuada hacia la meta que persigue. Hace referencia a las investigaciones de Garofalo y Lester (1985) y Schoenfeld (1987) que, según vimos, indican que los fallos de los estudiantes en resolución de problemas no se deben a falta de conocimientos matemáticos, sino al uso ineficaz de lo que saben. Los buenos resolutores de problemas se autoevalúan a medida que enfocan y resuelven los problemas siendo conscientes de sus progresos, y “tales capacidades reflexivas (*metacognición*) es más probable que se desarrollen en un ambiente de clase que las apoye” (ibid. p. 58).

Con el objeto de evaluar los conocimientos matemáticos de estudiantes de 15 años, en diversos países, en el Informe PISA (OCDE, 2003), se describe con detalle la noción de “competencia matemática general”²⁴ y las “competencias matemáticas específicas”²⁵ que

²⁴ “la aptitud (...) para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las

serán objeto de evaluación. Resalta que juntas, estas dos competencias pueden ser consideradas como una “competencia matemática comprensiva”. Se señala que las “competencias” y la “comprensión” no son estados dicotómicos: competente/no competente, comprende/no comprende; sino que, en cada persona y en cada momento, se presentan diferentes “logros competenciales”, distinguiendo así entre tres grupos: a) reproducción; b) conexión y c) reflexión. Dentro de cada uno de ellos, las “competencias específicas” adquieren características propias. Así, en el grupo de reproducción, atienden a la capacidad de reproducir el conocimiento estudiado usando representaciones y definiciones estándar, procedimientos, cálculos y solución de problemas rutinarios. En el grupo de conexión, se amplía el alcance de estas competencias a la integración, conexión y ampliación moderada de los conocimientos practicados, mediante la aplicación de estos conocimientos a contextos ligeramente diferentes de los practicados. En el grupo de reflexión, hay un salto cualitativo en el alcance de dichas competencias que suponen haber desarrollado capacidades, incluso metacognitivas, para usar razonamientos avanzados, formular y resolver problemas complejos, reflexión y comprensión en profundidad de los conocimientos adquiridos, argumentación, abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos. Por fin, en el Informe PISA se incluyen explícitamente, dentro de las competencias específicas, componentes metacognitivas como supervisión, control y regulación en los procesos de construcción de modelos y su correspondiente resolución como problemas matemáticos.

La noción de “competencia matemática” que se deja traslucir en el contexto de esta revisión se refiere al complejo cognitivo que comprende tanto los aspectos pragmático-operatorios como discursivos del conocimiento matemático, expresándose en términos de “capacidades para...” o “comprensión de...”. Dichas competencias se vinculan a un propósito central: la capacidad para matematizar la realidad circundante al alumno, usando los conocimientos matemáticos adquiridos de manera flexible, reflexiva y crítica.

necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”(Informe PISA/OCDE, 2003, p.28, cursiva del autor).

²⁵ Pensar y razonar, Argumentación, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas, Representación, Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico y, Empleo de soportes y herramientas.

2- Contextos de instrucción estándar y no-estándar

a) Principios educativos y agentes sociales en el desarrollo de la Metacognición

En el capítulo anterior, vimos que el conocimiento y el monitoreo (control) de los procesos metacognitivos se incrementan con la edad, en parte debido a las experiencias adquiridas con las tareas, las demás personas, estrategias y contextos diversos que, de modo intencionado o espontáneo, van enriqueciendo el repertorio de conocimientos generales y específicos de cada uno y, en parte, por las interacciones con nuevos contextos de aprendizaje diseñados para el desarrollo de la metacognición. Esos contextos son normalmente denominados “programas de entrenamiento en estrategias de resolución de problemas”.

Nuestro interés ahora, es presentar los resultados y conclusiones de algunas investigaciones, centradas en evaluar la actividad metacognitiva dentro de los referidos programas o sistemas de prácticas planteados intencionalmente para el desarrollo de dichas actividades, así como la integración de estos programas o actividades en los planes educativos, y no pararnos a describir los modelos o recursos utilizados en esas investigaciones. Concomitantemente, presentaremos las discusiones en torno al papel que los agentes sociales, familia y escuela, desempeñan en el desarrollo metacognitivo del sujeto. Para ésto pondremos atención en los estudios de Mateos (2001), Mayor et. al. (1993), Crespo Allende (2000-1), Schoenfeld (1985a), Schraw (2001), Hartman (2001) y Gourgey (2001). Por otra parte, y con base en estos estudios, pretendemos no sólo continuar incidiendo sobre la naturaleza pragmática de la metacognición -toda vez que hemos venido afirmando que nos interesa comprender las prácticas de los estudiantes mirándolas, también, desde esta perspectiva y, por otro lado estas mismas prácticas nos permitirán comprender mejor la naturaleza de este constructo- sino también *contrastar los resultados obtenidos por esos estudios con los obtenidos en nuestra investigación.*

Como no todos los estudiantes desarrollan y usan la metacognición espontáneamente, se diseñan y aplican programas de instrucción explícita, pretendiendo los profesores con ello incrementar el desarrollo de estrategias y conocimientos metacognitivos en los estudiantes (Hartman, 2001). Otra razón para la realización de estos

programas es la problemática de la transferencia de conocimientos y habilidades ya adquiridas, especialmente las de carácter general, a nuevos contextos.

Mateos (2001) describe dos cuestiones que deben dirigir la instrucción hacia el desarrollo de la metacognición. Como primera cuestión coloca las razones por las que tal desarrollo debe constituirse en un objetivo educativo, y en ese sentido señala que, a pesar de, la mayoría de los investigadores y educadores, asumir que las habilidades metacognitivas deben formar parte integral del currículum escolar, no existe el mismo acuerdo en cuanto a la forma de llevar a cabo una instrucción que promueva la metacognición. Sin embargo, un mayor consenso en esa dirección defiende la enseñanza de la metacognición en el contexto de las diferentes tareas y contenidos escolares, una perspectiva que, según la autora, subraya “la importancia del entrenamiento metacognitivo para promover el empleo autónomo y auto-regulado de las estrategias específicas de una tarea y su transferencia a situaciones nuevas” (ibid. p.92). En la discusión que promueve sobre el desarrollo de la metacognición como objetivo educativo ejemplifica que el fracaso de los niños para usar espontáneamente una estrategia que está disponible en situaciones apropiadas (lo que Flavell ha llamado “deficiencia de producción”) se debe a que estos niños no usan de forma autónoma las estrategias que, sin embargo, son capaces de ejecutar debido a que no son conscientes del significado y utilidad de estas y a que no controlan la utilización que hacen de las mismas (ibid. p.93). Para superar ese déficit, de naturaleza metacognitiva, se piensa en la intervención como medio para favorecer el desarrollo del conocimiento y monitoreo (control) metacognitivos. El reconocimiento de este hecho, según Mateos, se refleja en la evolución que desde finales de los años setenta han experimentado las intervenciones en esa dirección, que, como también comenta la autora, ha pasado del “entrenamiento ciego” a la “instrucción con información explícita”. El entrenamiento ciego, como método de intervención tradicional, se basaba en supuestos conductuales del aprendizaje en los que el alumno respondía a la instrucción sin comprender el “por qué”, “cuándo”, “dónde” y “cómo” debería usar la estrategia que se le inducía a utilizar. Por las limitaciones del método tradicional surgen, a partir de los años ochenta, muchos programas de instrucción explícita dirigidos a mejorar las estrategias implicadas, por ejemplo, en la resolución de problemas matemáticos, empezando a incorporar los componentes de la instrucción metacognitiva. También entre los argumentos que llevaron al entrenamiento de estrategias está el hecho de que los sujetos abandonaban las estrategias porque no recibían instrucciones para emplearlas, y, en ese sentido, la autora

afirma que si los aprendices tomasen conciencia de los beneficios que puede reportar el uso de una estrategia, se inclinarían más a usarla de forma espontánea. Como comenta Schraw (2001) en esta misma dirección, una de las características más destacables del éxito de los aprendices, son las metas bien orientadas.

La segunda cuestión resaltada por Mateos es relativa a los mecanismos que hacen posible el desarrollo metacognitivo. La importancia de la práctica de las actividades metacognitivas para el desarrollo de la metacognición fue señalado por Flavell en 1987, tal y como señala Mateos. Según esa autora, parte de esa práctica tiene lugar cuando el niño se enfrenta solo con tareas que demandan comportamientos estratégicos, planificación y autorregulación que pueden promover su desarrollo metacognitivo indirectamente, y parte es llevada a cabo en el contexto de la interacción social, donde la familia y la escuela modelan la actividad metacognitiva ayudando al niño a regular sus acciones, aunque no necesariamente de forma intencionada.

Las investigaciones sobre el papel de los agentes sociales en la actividad metacognitiva tienen a Vygotsky como interlocutor de referencia. En ese sentido, Mateos (2001) refiriéndose a las aportaciones de este teórico señala que éstas son, sin duda, “las que han contribuido de forma más notable a impulsar el desarrollo de nuevos modelos de instrucción” (p.97). En la teoría de Vygotsky todas las funciones cognitivas superiores (memoria, percepción, atención, comprensión) tiene un origen social (o interpsicológico)²⁶. En la medida en que un individuo va creciendo y recibiendo instrucciones tanto por vías formal o espontánea, sus funciones cognitivas superiores van sufriendo transformaciones que no necesariamente implican un aumento en sus capacidades de procesamiento sino más bien en sus destrezas para controlar y regular sus habilidades. Como podemos observar, en todo ese proceso el sujeto no está aislado y las transformaciones que ocurren en sus funciones superiores tienen un origen social. Los estudios con los niños muestran que las personas que interactúan con ellos (adultos y compañeros) con más experiencias actúan como mediadores organizando el entorno, interpretando y dando significado a los acontecimientos, dirigiendo la atención hacia los aspectos relevantes de la experiencia y enseñándoles a enfrentarse con la información. La mediación proporcionada por los agentes sociales debe situarse en la “zona de desarrollo proximal” que es la distancia entre

²⁶ “Esa naturaleza básicamente interpersonal del pensamiento se transforma progresivamente en un proceso de carácter intrapsicológico. Por consiguiente, para Vygotsky, el mecanismo fundamental del desarrollo es la “internalización” gradual de lo que originalmente es una actividad compartida o social” (Mateos, 2001, p.98). Remitimos a la autora para más detalle.

el nivel de desarrollo real (lo que el niño es capaz de realizar de forma independiente) y el nivel de desarrollo potencial (lo que es capaz de realizar con el apoyo de los demás) y, es en esa zona que el niño adquiere la capacidad de auto-regulación. En ese contexto queda subrayado que tanto el conocimiento como los procesos cognitivos se transmiten socialmente pero también evidencia la contribución de las ideas de Vygostky, en especial la de zona de desarrollo próximo, como soporte teórico en las propuestas didácticas de intervención. (Mayor et. al., 1993; Mateos, 2001; Crespo Allende, 2000-1)

Uno de los entornos que facilita el desarrollo metacognitivo es el familiar. Las investigaciones en ese ámbito muestran, por ejemplo, que durante la interacción entre madres e hijos, las madres formulan preguntas e instrucciones encaminadas a dirigir y organizar el curso de la actividad del niño. Verbalizaciones como ¿Te parece que está bien así?, ¿Qué tendríamos que hacer a continuación? dirigidas hacia una tarea concreta y, de modo general, en el curso normal de los acontecimientos, van modelando distintas actividades metacognitivas necesarias para que los niños puedan controlar sus actos y prever alternativas a la hora de enfrentarse con el aprendizaje y la solución de problemas. Según Mateos, el entorno familiar estimula el desarrollo de la metacognición, por ejemplo, en la medida en que las madres, al tomar conciencia del nivel de desarrollo de sus niños, ajustan el control que ejercen sobre sus comportamientos y les animan a adoptar estrategias de planificación y supervisión. Por otra parte, Mateos refiriéndose a los estudios de Baker (1994) señala que algunos padres manifiestan que no suelen enseñar habilidades metacognitivas por creer que los niños adquieren tales habilidades por sí mismos sin necesidad de ser instruidos directamente por el entorno familiar o escolar y, en ese sentido, resalta que el hecho de no fomentar deliberadamente tal desarrollo no significa que tal instrucción no tenga lugar. Como podemos observar, de forma deliberada o no, el entorno familiar favorece el desarrollo de la metacognición. (Mayor et al., 1993; Mateos, 2001)

En el contorno escolar al igual que el familiar el niño debe tener la oportunidad de desarrollarse metacognitivamente, pero “parece que los profesores rara vez instruyen directamente a sus alumnos en habilidades metacognitivas (...) parece que los niños cuyas madres y profesores ofrecen más instrucción metacognitiva regulan mejor su aprendizaje que los niños que reciben menos instrucción de ese tipo” (Mateos, 2001, p.101 refiriéndose a Baker, 1994). Aún en esa dirección Mayor et. al. (1993 refiriéndose a Feuerstein et. al, 1985) indican que estos últimos atribuyen la falta de atributos metacognitivos en el funcionamiento infantil a la falta de mediadores humanos adultos que los ejemplifiquen,

siendo los profesores los mediadores ideales tanto por ser modelos eficaces en el empleo de estrategias, como por el tipo de problemas y materiales que presentan a sus alumnos.

“Por otra parte, existen indicios de que la percepción que los profesores tienen de sus alumnos, si bien recoge las diferencias metacognitivas individuales, suelen ser más bien holísticas y basadas en el rendimiento académico. Por ello, los alumnos con calificaciones altas son vistos en general como poseedores de más conocimiento metacognitivo, mejor autoconcepto, más dedicación y esfuerzo, más habilidad, más atribuciones personales de éxito que aquellos con calificaciones inferiores. Sin embargo, estas evaluaciones no coinciden con las que los propios alumnos hacen acerca de sí mismos” (Mayor et. al. 1993, p.106-7).

Este panorama de percepción que profesores tienen de sus alumnos (recogiendo las diferencias metacognitivas), en una cierta medida, también es objeto de interés de nuestro trabajo. En ese sentido, tomando por base la cita anterior, formulamos una de nuestras hipótesis de trabajo.

Nos parece interesante incluir en ese contexto las consideraciones de Schraw (2001) cuando señala que una de las condiciones para que muchos estudiantes puedan mejorar su pensamiento crítico y científico es, por ejemplo, tener la oportunidad de observar las habilidades que usan los expertos y, otro ejemplo para desarrollar la conciencia metacognitiva es tener acceso a una reflexión de experto sobre qué está haciendo y cómo de bien lo está haciendo.

También en ese contexto social, parecen desempeñar un papel importante los compañeros (o los iguales). Mayor et. al. (1993) resaltan que muchas de las habilidades y conocimientos de los estudiantes son adquiridos a partir de la observación de otros compañeros. Mateos (2001) señala que el rendimiento en tareas es mayor cuando trabajan con parejas que si lo hacen solos, debido probablemente a que el trabajo en parejas les obliga a explicitar en mayor medida la forma en que estructuran y controlan sus acciones.

b) Programas diseñados y aplicados para el desarrollo metacognitivo

Para incrementar habilidades metacognitivas se desarrollan programas de intervención en entrenamiento de estrategias en resolución de problemas. Programas de este tipo ha conducido en muchos casos a incrementos estables en el aprendizaje tanto en estudiantes regulares como en estudiantes con dificultades y muchos de estos programas han sido desarrollados fuera del contexto de la clase cotidiana (Gonçalves, 1996 refiriéndose a

Flavell, 1979 y Brown, 1987). Normalmente lo que se pretende es mejorar el desempeño en una amplia variedad de tareas que requieren entre otras cosas observación cuidada, uso crítico del lenguaje y toma de decisiones (Gonçalves, 1996). Schoenfeld (1985a), por ejemplo, describe su intervención que se dirigió, entre otros aspectos, hacia la sistematización, análisis y simplificación de problemas matemáticos. Su programa incluye procedimientos para enseñar al estudiante a monitorar su propia actividad metacognitiva. Su papel como interventor se basaba en hacer preguntas del tipo “qué están haciendo y porqué” (como las mencionadas anteriormente en el texto sobre resolución de problemas) para que el estudiante realizara de esa forma un auto-monitoreo, para que sintiera la necesidad de monitorar su propio progreso y de considerar alternativas aproximadas. Sus resultados muestran un significativo aumento en las habilidades de los estudiantes para resolver problemas de matemática, incluso problemas pocos familiares. A parte de su intervención, Schoenfeld observó estudiantes resolviendo problemas en parejas y al igual que Flavell, constató que aunque los estudiantes tengan recursos para resolver problemas son incapaces de aplicarlos con éxito si desconocen sus capacidades para regular sus pensamientos, mientras que, por el contrario, un buen control puede llevar al éxito aunque tenga pocos recursos. De modo general el autor considera que la cognición matemática interactúa con la metacognición y que las instrucciones que enfatizan la comprensión de problemas significativos y el monitoramiento de estrategias aumentan significativamente las habilidades de los estudiantes para resolver problemas.

Gourgey (2001) indica sus experiencias integrando metacognición con lectura e instrucción matemática, realzando las reacciones de los estudiantes para aprender a pensar metacognitivamente. Al igual que Schoenfeld, en su programa de entrenamiento, indagaba periódicamente a sus alumnos sobre lo que hacían, si estaban seguros de haber usado todos los datos del problema, de cómo y por qué hacían, etc. De su estudio, concluye que tanto resolutores de problemas como lectores, clarifican metas, buscan comprender conceptos y relaciones, se auto-monitoran, se auto-cuestionan, se auto-evalúan, eligen razonadamente sus acciones y son académicamente más exitosos que estudiantes que no usan estas estrategias, observando asimismo que tales capacidades metacognitivas pueden ser incrementadas a través de la práctica guiada y, también, que es posible lograr ese incremento en aquellos alumnos con muchas dificultades, pero con paciencia y persistencia por ambas partes, instructor y estudiante. En este contexto subraya la influencia del afecto sobre la metacognición y viceversa y, en ese sentido, observa que estudiantes con pobres

habilidades metacognitivas no solamente son pasivos sino también dependientes de los demás. De su revisión de la literatura observa que la instrucción en clase frecuentemente se focaliza en el conocimiento matemático, minusvalorando el papel de la metacognición en la resolución de problemas y, en esa misma línea, al igual que Schoenfeld, considera que la “instrucción que enfatiza la comprensión de los significados del problema y el monitoramiento y elecciones de estrategias incrementa el éxito de los estudiantes así como sus capacidades para transferir esas habilidades a problemas poco familiares” (Gourgey, 2001, p.25).

Gonçalves (1996) revisando algunos estudios llevados a cabo para evaluar el impacto del desarrollo de la metacognición señala, en relación al trabajo efectuado en el contexto de la clase, que muchas investigaciones concluyeron que “el treino [entrenamiento] de la metacognición parecer ser más eficaz cuando ocurre en el contexto del aprendizaje de conceptos específicos de una disciplina (en este caso Matemáticas) que a través de un programa de enseñanza paralelo” (ibid. p.45, aclaración nuestra).

De esta revisión, observamos que los programas propuestos objetivan promover el conocimiento explícito declarativo, procedimental y condicional sobre cada estrategia y, los resultados de los esfuerzos que se han hecho para fomentar dichos conocimientos indican que el conocimiento y los procesos de monitoreo pueden aumentarse a través de prácticas de instrucción explícita en clase, y que los estudiantes usan las habilidades adquiridas para incrementar sus acciones (Schraw, 2001). En otras palabras, en el plano educativo, lo que se espera con el desarrollo de la metacognición es ante todo enseñar a los estudiantes a planificar, supervisar y evaluar sus acciones, favoreciendo el uso espontáneo y autónomo de las estrategias y la construcción de un conocimiento explícito sobre cuándo y dónde utilizarlas, así como facilitar su generalización a nuevos problemas (Mateos, 2001).

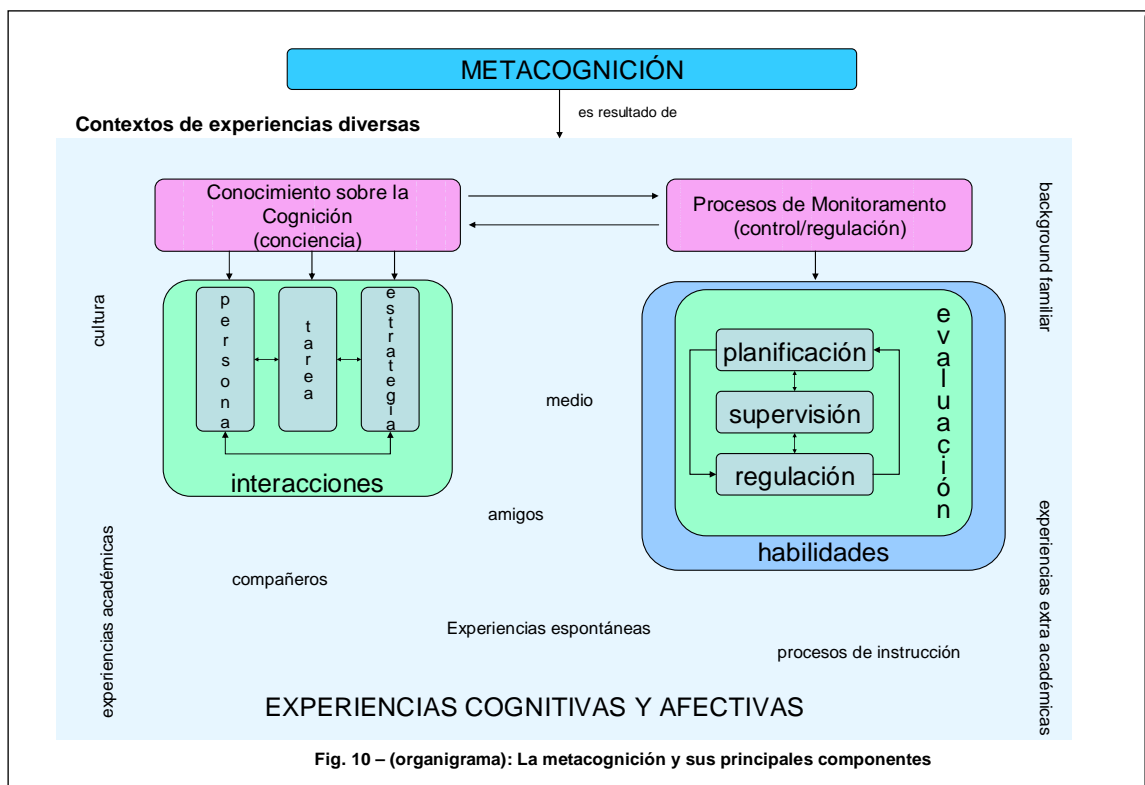
Al subrayar las contribuciones de los contextos sociales, familia y escuela (compañeros y procesos de instrucciones formales o espontáneos) para el desarrollo de la metacognición en el sujeto, las investigaciones están señalando la metacognición como un emergente de ese contexto. La metacognición es, por tanto, un constructo que puede ser desarrollado e incrementado a través de la práctica socialmente compartida (entre padres e hijos, compañeros, profesores y alumnos), normalmente llevada a cabo a través de procesos de instrucción formal e intencional, pero también a través de instrucción informal y/o no intencional que legitiman el desarrollo de este constructo. Mayor et al. (1993)

citando a otros autores afirma que el desarrollo cognitivo de los niños se debe a la instrucción formal e informal que reciben y que aquellos que reciben mejor instrucción obtienen mejores resultados en su desarrollo.

La importancia de trabajar la metacognición abiertamente en clases ya era resaltada por muchos investigadores. Fernandes (1988), por ejemplo, señala que a través de este trabajo, los profesores pasan a contribuir, entre otras cosas, a que sus alumnos mejoren la calidad de sus decisiones y tomen conciencia de su práctica matemática. Es necesario despertar la conciencia de profesores y alumnos (también de los padres) sobre la importancia de este proceso. En ese sentido, la metacognición todavía ocupa poco espacio en los sistemas educativos (en el trabajo diario del profesor). Por otra parte, también pudimos observar el lugar que viene ocupando este enfoque, en los Principios y Estándares Curriculares del NCTM (2000) y en el Informe PISA (OCDE, 2003) que podemos interpretar como una estrecha relación entre las nociones de competencia, capacidad y metacognición, aunque todavía en esos documentos parece reservarse un lugar concreto para hablar de las “competencias metacognitivas” al hablar de las “competencias específicas” o “standards específicos”. Además sin intención de ser contradictorios, interpretamos que el discurso metacognitivo fluye de modo general en todo el texto sobre las competencias toda vez que observamos la noción de competencia (o de persona “competente”) asociada a tener “capacidades para hacer y comprender”, “actitud para identificar y comprender”... lo que supone que, para poner en práctica esta noción en la realización una tarea, una persona necesita poner en práctica un conjunto de configuraciones cognitivas y metacognitivas. De ahí que, al hablar de competencias siempre está implícita la metacognición. En ese momento, nos parece oportuno rescatar la idea de circunstancias referida en el texto de resolución de problemas ya que, entre otras cosas, también se puede observar el re-emplazamiento de ideas, de sentidos (que enfatizo, no ser propias del ámbito de la metacognición) a otras nociones, que quizás por una cuestión de circunstancias son los neologismos del momento educacional. O también se puede decir simplemente que son sólo términos interrelacionados y utilizados en una amplia variedad de estudios que acompañan diversos y distintos significados que se van matizando con el tiempo y las necesidades.

En definitiva, todo este contexto será muy importante para nuestro trabajo. Con él pretendemos discutir y comparar algunos resultados en el sentido de explicar las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas y, traer quizás aportaciones en el sentido de

complementar o enriquecer el marco de las discusiones sobre el papel de los agentes sociales, educativos (familia y escuela) para el desarrollo del constructo metacognición y, en otro orden construir respuestas para aumentar las explicaciones sobre la naturaleza pragmática de este constructo. Queremos decir además que después de las discusiones promovidas sobre otros contextos y agentes sociales que contribuyen al desarrollo de la metacognición, intentamos presentar nuevamente el organigrama anterior donde se puede observar cómo estos contextos y agentes quedan ahí diluidos.



Pero, también de esta revisión y reflexión de la literatura sumados a resultados previos de nuestra investigación nos ha llevado a considerar que también *los constructos teórico-prácticos actualmente elaborados por la “Teoría de la Metacognición” por si solos no son suficientes para comprender la “realización de una práctica”*. De modo que de la misma forma que hemos considerado necesario complementar el EOS con el marco de la metacognición justificamos la necesidad, ahora, del marco de referencia del EOS para complementar y consecuentemente fortalecer la Teoría de la Metacognición.

IV - LA DINÁMICA DE LAS DISCUSIONES EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA METACOGNICIÓN: UNA CUESTIÓN DE CIRCUNSTANCIAS

En el centro de Fedora, metrópoli de piedra gris, hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando dentro de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora. Son las formas que la ciudad habría podido adoptar si, por una u otra razón, no hubiese llegado a ser como hoy la vemos. En todas las épocas alguien, mirando a Fedora tal como era, había imaginado el modo de convertirla en la ciudad ideal, pero mientras construía su modelo en miniatura, Fedora dejaba de ser la misma de antes, y aquello que hasta ayer había sido uno de sus posibles futuros era solo un juguete en una esfera de vidrio.

Fedora tiene ahora en el palacio de las esferas su museo: cada habitante lo visita, elige la ciudad que corresponde a sus deseos, la contempla imaginando que se refleja en el estanque de las medusas donde se recogía el agua del canal (si no hubiese sido desecado), que recorre desde lo alto del baldaquín la avenida reservada a los elefantes (ahora expulsados de la ciudad), que resbala a lo largo de la espiral del minarete de caracol (perdida ya la base sobre la cual debía levantarse).

En el mapa de tu imperio, oh gran Kan, deben ubicarse tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmente reales, sino por que todas son sólo supuestas. Una encierra aquello que se acepta como necesario mientras todavía no lo es; las otras aquello que se imagina como posible y un minuto después deja de serlo.

(Las ciudades y el deseo. 4 -Las ciudades invisibles de Italo Calvino)

En el apartado anterior pusimos en evidencia nuestro particular interés por la problemática de la evaluación del conocimiento metacognitivo. También evidenciamos como indicadores empíricos para la evaluación de dichos conocimientos, las prácticas explicitadas durante la resolución de problemas y que, para una mejor comprensión de los procesos metacognitivos sería necesario estudiarlos dentro de esos sistemas de prácticas. De hecho, una de las formas de averiguar el alcance del conocimiento metacognitivo de una persona es ponerla en situaciones concretas de resolución de problemas. Por otra parte, también es conocido que el contexto de Resolución de Problema es propicio para aprender a aprender. Esto nos hace pensar en lo estrecha que es la relación entre esas dos temáticas.

Es cierto que los problemas y su resolución han marcado el desarrollo de la historia de las matemáticas (González, 2005) y, en tanto que línea de investigación, la resolución de problemas fue (y continúa siendo) uno de los pilares básicos del edificio de la Educación Matemática como disciplina científica. Pero además de eso se ha constituido en todo un campo de inspiración de investigaciones. Hubo una altura de nuestro estudio que llegamos a pensar, por influencia y por falta de más conocimientos, que sobre resolución de problemas todo estaba dicho, pero algunas lecturas en particular nos han llamado la

atención sobre tal hecho: una fue la de González (2005) quien nos alerta que la investigación acerca de la resolución de problemas “parece ser una actividad permanente entre los educadores matemáticos que asume este asunto como preocupación prioritaria de su quehacer investigador (...) los problemas y su didáctica serán materia de investigación siempre vigente (...) para la producción profesional de saberes” (p.9). Como ejemplo de la necesidad de continuar investigando González apunta el caso de Latinoamérica, más específicamente su propio país, Venezuela. También Vilas (2001) remarca que “la resolución de problemas de matemáticas en el marco escolar es un campo de estudio relativamente reciente” (p.17). Otras lecturas que me han llamado bastante la atención fueron las de Lester (1994a y 1994b) quien advierte que esta forma de pensar (que todo estaba dicho) es uno más entre otros aspectos que ha contribuido a un declive del interés de las investigaciones (en RP) en educación matemática. Lester (1994b) entra en detalle sobre las razones para este declive, en el contexto estadounidense, y entre las razones explica que la RP es aún más compleja de lo que podemos pensar. En sus palabras, la RP “es una actividad que requiere que el individuo se involucre en una variedad de acciones cognitivas cada una de las cuales exige algún conocimiento y capacidad. Además de eso, estas acciones cognitivas están influenciadas por factores no cognitivos” (ibid. p.26). De modo que, tal complejidad según el autor puede hacer que los investigadores sean reacios a involucrarse en esta área.

Con todo, hemos de reconocer que ha sido una de las áreas de nuestro ámbito científico que más ha producido.

Entre las cuestiones que urgían ser respondidas y que han generado estudios se encuentran las planteadas por Lester en 1980, que permanecían actuales a casi una década y media después de su primer planteamiento según evaluación del autor en 1994. Estas fueron:

1. *“El desarrollo de teoría necesita convertirse en la primera prioridad.*
2. *Es necesaria mucha más claridad respecto al significado de la resolución de problemas.*
3. *Es necesario desarrollar “instrumentos” de investigación para medir la eficacia y para observar el comportamiento.*
4. *¿Cómo se debe enseñar la resolución de problemas?*
5. *¿Cuál es el tiempo necesario para un “tratamiento” de investigación?*
6. *Quiénes deben ser los “sujetos” de la investigación en resolución de problemas?*
7. *Es necesario prestar más atención a la “transferencia” de lo que fue aprendido” (Lester, 1994b, p.28).*

Estas cuestiones fueron, en su mayoría, objeto también de atención en otras investigaciones (e.g. Schoenfeld en 1992). Todo ello, porque, a pesar de las respuestas que intentaban dar, continuaban a persistir dificultades tales como la de identificar claramente los procesos de pensamiento utilizados en la RP. Tal perspectiva lleva a Lester (así como otros investigadores, e.g. Fernandes, 1994 y Schoenfeld, 1992) a plantear modelos heurísticos para evaluar y comprender tales procesos, considerando múltiples factores que pueden influenciar en las capacidades y conducta matemática de los estudiantes durante el proceso de RP, tales como: adquisición y utilización del conocimiento, recursos, control, sistemas de creencias, actitudes, factores afectivos, contextos socio-culturales, entre otros.

No obstante, entre las numerosas investigaciones salidas a la luz sobre RP, nos preguntábamos ¿cuánta atención se había prestado a la metacognición? Haciendo un pequeño recorrido por algunas obras consideradas clásicas en la literatura de Educación Matemática, intentamos construir respuestas a esta pregunta, adoptando como punto de vista que *las circunstancias* en torno a las investigaciones en resolución de problemas acababan siempre por prestar directa o indirectamente una cierta atención a los aspectos metacognitivos. De esa forma, intentaremos mostrar cómo los referentes (en este caso términos o expresiones comunes) utilizados para representar y describir tanto las componentes básicas del modelo (método heurístico) de resolución de problemas, como las del modelo de la metacognición a pesar de actuar en *circunstancias* diferentes, favorecen las mismas ideas, diseñando los mismos discursos (muchas veces no asumidos o declarados, pero que implícitamente están ahí) y que certifican, indudablemente, la presencia de procesos metacognitivos en prácticamente todas las fases o etapas establecidas en los modelos de resolución de problemas. Podemos decir, también, con el mismo criterio dado por Font (2005) para *sentido y referente* (visto en el primer apartado) que las componentes de esos modelos, a pesar de tener sentidos distintos sus referentes, son los mismos. Como modelos relacionados con la resolución de problemas presentaremos aquí unos pocos, toda vez que percibimos que las investigaciones en esta vertiente tiene casi siempre (todo parece indicar) como referencia el clásico de Polya. Veamos una breve síntesis en la tabla que sigue:

Tabla 2 – Modelos de Resolución de Problemas

AUTORES	FASES Y CARACTERISTICAS/DESCRIPCIÓN DEL MODELO UTILIZADO
(1989/1945) Polya	<p>Una clasificación del modelo de Polya describe las acciones a ser desarrolladas por un <i>resolutor ideal</i> (aquél que siempre avanza hacia la solución final del problema):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) comprender el problema (ver claramente lo que se pide) 2) trazar un plan (captar las relaciones entre los elementos del problema a fin de encontrar las claves de la solución) 3) ejecutar el plan ideado 4) volver atrás (revisar y discutir la solución encontrada)
(1989) Burton, Mason y Stacey; Vila, 2001 refiriéndose a Callejo, 1994)	<p>Proponen un modelo de ayuda instruccional, que considera:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Fase inicial: el estudiante ha de comprender lo que debe hacer y de qué trata el problema que tiene enfrente. 2) Fase de ataque: es la fase más relevante: el resolutor ensaya una primera hipótesis de resolución que puede no conducirlo a puerto y, entonces, debe estar dispuesto a comenzar de nuevo..., al ataque. 3) Fase de revisión: es la fase en que el resolutor compara la propia solución con el estímulo de partida. Puede permitir retornar sobre sus pasos; facilita el control personal. 4) Fase de extensión: la solución de un problema debería llevar a la creación de otro, y así sucesivamente; lleva a reforzar el desarrollo de una actitud matemática.
(1985c) Schoenfeld	<p>Resalta algunos planteamientos sobre la enseñanza de resolución de problemas. Aspectos importante:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) <i>el papel del profesor como modelo de comportamiento:</i> <ol style="list-style-type: none"> a. <i>seguir el proceso “paso a paso”.</i> Para que los alumnos puedan acompañarlos. Implica examinar casos sencillos y particulares, desistir de un proceso y volver a otro, buscar conexiones concretas, intentar generalizar, demostrar y comprender el problema. b. <i>resolver el problema con el alumno, utilizando sus ideas.</i> Sugiere, entre otras cosas, que los problemas sean resueltos conjuntamente en clase, que el profesor actúe como “moderador”, que se haga preguntas tales como: ¿tiene alguien alguna sugerencia que hacer? ¿Alguna otra cosa? ¿Qué te hizo pensar en eso? ¿Estáis seguros de que entendieron suficientemente bien el problema? “Con suerte (y perseverancia por parte del profesor) estas preguntas se convertirán finalmente en algo automático para los alumnos. A mediados de semestre les puede decir: “bien, ¿qué pregunta voy a hacer ahora?” y normalmente lo saben; a final del semestre, ellos mismos pueden plantear las preguntas” (p.37). c. <i>el profesor a prueba: resolución de problemas “sin preparación previa”.</i> Se pretende quitar el carácter “artificial” de las explicaciones. 2) <i>el profesor como entrenador.</i> Mostrar al alumno la manera correcta de resolver el problema (el camino más sencillo, más fácil, etc.) 3) <i>hay más de una manera de ponerle el cascabel al gato matemático.</i> Muchas veces no hay un único planteamiento “correcto” para resolver un problema. 4) <i>mayor cantidad no es siempre mejor.</i> El autor nos cuenta que con su experiencia sus alumnos llegaron a una actitud alerta, desarrollaron habilidades para llegar rápidamente al fondo del asunto, hacían preguntas más inteligentes y penetrantes que mostraban entender lo que se estaba haciendo en clase (sucediendo eso en más de una materia). 5) <i>Si el profesor no lo dice (la mayoría de las veces) los alumnos no lo captarán.</i> (para más información remito a Schoenfeld, 1985b) 6) <i>Las observaciones sobre la dificultad de los problemas.</i> (para más información remito a Schoenfeld, 1985b) 7) <i>El profesor ¿“infallible?”.</i> (para más información remito a Schoenfeld, 1985b)

(1985d) Schoenfeld	Distingue las conductas y acciones a ser desarrolladas por un <i>resolutor real</i> (aquel susceptible de cometer errores, desistir del proceso, hacer varios intentos, o sea, un alumno normal). Para el autor no existen fases perfectas. 1) análisis y comprensión 2) diseño-planificación 3) exploración 4) ejecución y verificación
(1997): D'Amore (1997)	D'Amore que además de presentarnos y aclararnos otros modelos, nos describe la aproximación "clásica" según la cual en la actividad de resolución de problemas, se dan cuatro fases: 1) Preparación: los elementos del problema son analizados, relacionados entre sí y, también, con el campo de competencias del que resuelve. 2) Incubación: el que se enfrenta al problema renuncia a resolverlo pero, incluso si parece interesado y ocupado en otra cosa, en realidad, de forma inconsciente, está... "moliendo y mezclando" los componentes del problema. 3) Inspiración: puede llegar o en el momento de retorno al problema, de forma explícita, o bien mientras el sujeto se ocupa de otras cosas. 4) Verificación: la idea que ha generado la inspiración es discutida y comparada con las preguntas del problema, para verificar si está en sintonía con ellas.

Lo que podemos observar en estos modelos es que el manejo de la terminología empleada así como el sentido de ésta, atribuido a cada componente básica, sugiere una interpretación metacognitiva. Aunque no emplean un lenguaje explícito y en algunos casos específicos de la metacognición, los modelos en RP sugieren la existencia y desarrollo de procesos metacognitivos. El planteamiento metacognitivo a que nos estamos refiriendo se observa por ejemplo, en las preguntas sugeridas por Schoenfeld a sus alumnos (conforme la tabla). Preguntas del tipo ¿Qué te hizo pensar en eso? Son preguntas que equivaldrían a las propuestas por Polya en 1945 y que incitan al alumno a pensar, evocar, recordar, reflexionar,... sobre sus acciones cognitivas, sobre sus propios procesos de pensamientos. Tal planteamiento metacognitivo también aparece en otras etapas de los mencionados modelos, por ejemplo, la comprensión del problema en que ésta requiere, por parte del resolutor, un cierto grado de conocimiento sobre algunos o todos los objetos (contenidos matemático, por ejemplo), a priori, involucrados en el problema (de la misma forma acontece con las etapas de planificación y ejecución); los conocimientos requeridos para el ensayo de una hipótesis, el comenzar de nuevo puede indicar que el fallo fue reconocido y que después de un examen (del fallo) es posible atacar, cambiar o regular la estrategia (por utilizar la terminología metacognitiva). En ese momento recordamos lo indicado sobre la componente regulación que tiene entre sus características la flexibilidad de pensamiento y, sobre tal parece ser también contemplada en la RP con el propio Polya (tal como afirma Rodríguez, 2005) y que realmente, también, pudimos confirmar entre las numerosas

preguntas que sugiere Polya para ayudar al alumno en la resolución de un problema. Por ejemplo *¿cuál es la incógnita?*, buscando el sentido de la flexibilidad de pensamiento en el texto de Polya para esta su pregunta, tenemos en palabras del autor “podemos cambiar el vocabulario [refiriéndose a pregunta anterior] y hacer la misma pregunta en diferentes formas: ¿Qué se requiere?; ¿qué quiere usted determinar?; ¿qué se le pide a usted que encuentre?” (Polya, 1989, p.25). En ese sentido, (Rodríguez, 2005) resalta que “enunciar de manera diferente un problema puede ser resultado de la flexibilidad del pensamiento, Polya denomina a esto ‘variación del problema’” (p.11), y señala que en opinión de Polya “la variación de un problema aparece como una movilización y una organización de los conocimientos previamente adquiridos” (ibid.). Continuando con nuestra revisión de los modelos mencionados, observamos los planteamientos metacognitivos, por ejemplo en la etapa de revisión/verificación cuando ésta requiere hacer un examen de la verdad para saber si estuvo (o si está) bien encaminado hacia la meta de resolver el problema. Sabemos que (en el caso de los problemas matemáticos) la verificación de la solución y de la corrección de los pasos seguidos se ajusta a los criterios de rigor y de verdad propios de esta ciencia. También en la extensión, aplicación o generalización de la solución de un problema requiere el conocimiento (y control) de los mecanismos implicados en las fases anteriores y además un conocimiento más elaborado. Y como vemos, en el cumplimiento de las etapas previstas en la RP se espera que el resolutor haga uso (en algunas o en todas las etapas) de procesos metacognitivos. La relación entre resolución de problema y metacognición la podemos observar, incluso, en el momento que el resolutor “observa”, piensa o “se da cuenta” de los propios procesos de pensamiento durante la resolución de una tarea.

Observamos que de manera general los modelos propuestos para la RP incluyen como componentes básicas la comprensión, planificación, ejecución (de lo planeado) y la revisión (o evaluación). Son componentes que coinciden en su mayoría (al menos como referentes) con las referidas en los modelos propuestos para la Metacognición que incluyen, como ya vimos, entre sus componentes el conocimiento (de sí, del otro, de la tarea, de un objeto, etc.), la planificación, regulación, supervisión y evaluación.

Así que, los referentes de un modelo se incorporan con una cierta facilidad al discurso del otro. Los sentidos parecen agruparse y, en una visión más global, se funden dando cuerpo a un discurso común.

Al “reconocer” un discurso común, entre los modelos de resolución de problemas y de metacognición, no estamos hablando de nada nuevo, apenas intentamos hacer más explícitas las ideas que ciertamente muchos ya dijeron (directa o indirectamente), como fue el caso del propio Polya.

Algo más sobre la relación entre estas dos temáticas

La década de los 80 parece ser la que impulsó las relaciones entre metacognición y resolución de problemas. Según Lester (1994a, p.663-6) las primeras referencias en nuestra área aparecen con las investigaciones de Lesh, Silver y Schoenfeld, iniciadas en el año 1982 las cuales aluden a la acción metacognitiva como una “fuerza directriz” en la solución de problemas, influenciando el comportamiento cognitivo en todas las fases del proceso de resolución. En su artículo, Lester hace un análisis de las áreas de investigación en resolución de problemas que más ha progresado en el período de 1970-1994, más específicamente su estudio revela las siguientes cuatro áreas (también formuladas, por el autor, en forma de preguntas): (a) ¿Qué hace que un problema sea difícil para un estudiante? (b) ¿Cómo diferenciar buenos y malos resolutores de problemas? (c) ¿Qué se sabe sobre la enseñanza de resolución de problemas y, (d) ¿Es la metacognición la fuerza directriz en la resolución de problemas? La respuesta que el autor da a esta última pregunta confirma que también en la Educación Matemática la metacognición ha sido relacionada (a) con el conocimiento que uno tiene de sus propios procesos de pensamiento y (b) con la regulación y monitoreo que uno hace de su actividad durante el proceso de resolución de un problema, o sea, las dos gran “divisiones” trabajadas en apartados anteriores.

Otro autor que, como vimos, hace explícitos tales procesos es González (2005) quien en este caso resalta que el modelo de Polya “proporciona un criterio para organizar la actividad del resolutor, posibilitando la construcción de una plataforma global donde se sustenta todo el mecanismo de acción cognitivo, metacognitivo y afectivo de quien *Hace Matemática* cuando resuelve problemas” (p.19, grifo del autor). De hecho, el autor nos presenta, en su libro, un cuadro donde explicita el modelo de Polya como esquema organizador de dicho accionar (para más detalle remitimos al autor). Observamos con la lectura de González su gran preocupación con los aspectos metacognitivos así como la forma explícita con que éstos son tratados. El autor afirma que en la actividad de resolución de problemas matemáticos el resolutor pone en juego los siguientes elementos:

1) Conocimientos de contenido matemático; 2) Herramientas Heurísticas para el abordaje del problema; 3) Una representación mental del proceso de resolución de problemas y; 4) La conciencia de sus propias debilidades y fortalezas como resolutor.

Pensamos que la tabla por si sola ya es clarificadora de lo que pretendíamos resaltar sobre la presencia de la metacognición en todas las etapas del proceso de resolución de un problema y que asumidos o no los discursos, ahí acaban confirmando tal presencia. Pero además queremos hacer algunas observaciones más: si consideramos como *referentes* las componentes básicas de esos modelos podremos decir que – una vez más basándonos en las ideas de Font (2005), ahora para *sentido y significado*- los sentidos de esos referentes al variar de un autor a otro se caracterizan como distintos (por sus diferentes formas de presentación) y, en su conjunto serán esos sentidos los que constituirán los significados de cada referente (que puede ser planificar, revisar, etc.); si los referentes, tanto de los modelos de la resolución de problemas como de la metacognición, son los mismos, preguntamos: ¿de qué estamos hablando? O mejor dicho: ¿Sería prudente incluso poner una línea divisoria al hablar de estos temas? Quizá lo mejor es asumir que todo ciertamente se trata de *una cuestión de circunstancias* y, en estos términos podemos hacer referencia al texto de Calvino²⁷ destacado al principio del apartado y preguntar ¿como habitante o visitante de Fedora, que ciudad (que Fedora) elegirías tú? Con el texto de Calvino queremos dejar patente el espíritu de nuestra discusión, nos centraremos ahora en el hecho de que las ideas planteadas en ambos modelos convergen en “un solo discurso”, a pesar de las *circunstancias diferentes*.

Sabemos que las circunstancias de las investigaciones en el propio progreso de la ciencia están marcadas por el contexto de cada época, por las disciplinas científicas, por las líneas que se adoptan, por creencias, necesidades, deseos, intereses, modismos, disputas, etc. Nos atrevemos a suponer, por ejemplo, que cuando Polya hizo el planteamiento de “su” modelo, en 1945²⁸, en las circunstancias de aquella época o era complicado hacer un debate (explícito) sobre determinados procesos, como es el caso de los procesos metacognitivos, pues era entrar en un terreno “no muy deseado” o no sentía la necesidad de hablar de éstos por creer (o concebir) que de alguna forma tales procesos ya estaban implícitos en la actividad matemática o simplemente también porque realmente no pensaba

²⁷ La primera vez que reparé con este texto de Calvino fue en la tesis de Vianna (2000) que luego me incitó a la lectura completa de *ciudades invisibles* y, ahora, por una razón o por otra, hablando también de circunstancias me hizo recordar más una vez a Vianna.

²⁸ Descartes, en el Discurso del Método, ya se refería a las reglas del método para dirigir la propia razón.

en éstos (pero... ¿qué decir de un método de resolución (como el propuesto) cuando se requiere un uso competente y acertado de funciones superiores?). ¡¿O quizás, mejor sería decir que en aquella época tales procesos no eran “preocupación” o no eran “pensados” en el área de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?!. Las circunstancias de Flavell, en ese sentido, eran otras, como psicólogo cognitivo estaba “en todo su derecho” de hablar. Ya las circunstancias de Schoenfeld, Lester, Burton, Mason y Stacey entre otros, en la década de los 80, eran favorables a proporcionar un discurso más explícito sobre los procesos metacognitivos. En esa época el área de Educación Matemática se vio inmersa en problemas y cuestionamientos (también circunstancias) que ya no se podía escapar de una explicación –donde la necesidad de incorporar conceptos como el de las interacciones sociales y el del aprendizaje situado en las investigaciones empezaba a ser urgente, y central–. Pero sobre todo es necesario señalar que las circunstancias de las investigaciones en el propio progreso de la ciencia son marcadas, por la construcción y socialización del conocimiento, en este caso matemático. En todo este contexto, también nos atrevemos a decir que la respuesta a la pregunta sobre cuánta atención se ha prestado a la metacognición sería que, por una razón o por otra, de forma deliberada o no, “siempre” se ha dado atención a los aspectos metacognitivos.

Así, podemos hablar de circunstancias diferentes para hablar de cosas que aunque parezcan “diferentes”, en verdad, se trata de las mismas cosas, del mismo discurso.

Nuestras circunstancias, para hablar de la metacognición, quizá no sean de las más favorables ya que este tema parece no estar de moda o que su auge fue en la década de los 80. Pero, por otro lado, también las circunstancias llevan a la moda a cambiar las “cosas” de lugar, pero puede que sean las mismas “cosas”. En ese sentido preguntamos: ¿ha cambiado la metacognición de nombre? Vimos que al indagar sobre los orígenes del término metacognición nos encontramos con otros términos que se relacionan con este, como por ejemplo, autoconciencia reflexiva (datado de 1933 según Ferrera, 2003). Pero, reformulamos entonces la pregunta: en el área de Educación Matemática y mirando para el actual contexto, ¿Qué es realmente la metacognición hoy para nosotros? ¿Tiene ésta, de facto, ocupado el lugar merecido? Como informalmente se dice que todo está dicho sobre RP (que no aceptamos) será que podemos también decir que con la metacognición ha ocurrido lo mismo? O sea, ¿Se ha dicho todo sobre la metacognición? Bien... si la respuesta es sí, ¿esto significa decir que ya no hace falta más investigaciones sobre dichas temáticas?

Pero con el mismo razonamiento planteado por Fernandes et al. (1994), Lester (1994a, 1994b) entre otros, pensamos que muchas cuestiones, como las planteadas por estos autores, permanecen todavía actuales careciendo de más claridad en sus respuestas, dado que muchos de los problemas que generaron investigaciones permanecen latentes e incluso, desconocidos por muchos en el contexto de clase. Inspirados por los planteamientos de Onuchic y Allevato (2004) con base en Van de Walle (2001) -cuando resalta que a pesar de que los cambios y avances en Educación Matemática hayan ocurrido muy lentamente (pero de forma continúa) alcanzando a pocos, sus proyectos han tenido una penetración y aceptación como nunca antes ha ocurrido, caracterizando en palabras de la autora una “revolución en la Educación Matemática”, y, en este sentido, es necesario seguir luchando- estamos tentados a transferir la interpretación que damos a su texto para decir también que, en relación a la RP y con ella la Metacognición, hubo avances, sin sombra de duda, pero también los progresos son demasiados lentos y no alcanzan a una mayoría (¡qué dirá a todos!) y por esto, el trabajo debe continuar.

También podemos decir, sencillamente, que las circunstancias nos favorecen a coger un “auto-stop” en compañía de esos teóricos e investigadores y aprovechar el trayecto para discutir la temática planteada en este trabajo.

V - RELACIÓN ENTRE METACOGNICIÓN Y PRÁCTICAS DE RP

En las discusiones sobre la metacognición en tanto que conocimiento sobre la cognición, hemos visto que se incluyen tres tipos de conocimiento que han recibido las etiquetas de *conocimiento declarativo* (conocimiento proposicional que se refiere al “saber qué” acciones pueden emprenderse para llevar a cabo una tarea y qué factores influyen en el rendimiento, o sea, incluye conocimientos sobre sí mismo como aprendiz y sobre factores que influyen su actuación), *conocimiento procedimental* (se refiere al “saber cómo” aplicar dichas acciones y muchos de esos conocimientos son conocidos como heurísticos y estrategias) y *conocimiento condicional* (se refiere al “saber por qué”, usamos el conocimiento declarativo y el procedimental. Es un conocimiento importante porque ayuda a actuar con más eficacia en la selección y uso de estrategias). (Schraw 2001; Mateos, 2001; Carrel, Gajdusek y Wise, 2001 con base Paris et al., 1983, entre otros)

Se trata, en nuestra opinión de una clasificación que en ciertos casos resulta difícil de aplicar, sobre todo cuando se intenta aplicar a la resolución de problemas.

Dada esta dificultad y puesto que nuestro interés central reside en comprender las prácticas matemáticas de los alumnos en el proceso de RP hemos optado por hacer una revisión de esta clasificación desde una perspectiva pragmatista. De acuerdo con esta perspectiva nos interesa no limitarnos únicamente a explicaciones mentalistas, puesto que consideramos que el hombre no es un ser que sólo piensa, comprende... sino que también es un ser que actúa, toma decisiones, etc.

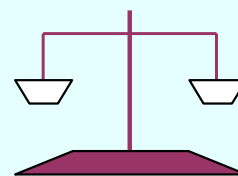
Consideremos como contexto de reflexión el siguiente problema (de las 9 bolitas):

Fíjate como pensó Rocío la forma de averiguar cuál era la bolita más “ligera” efectuando una única pesada:

Cogió dos cualquiera de las bolitas y puso una en cada plato:

- a) Si una pesaba menos, esa sería la más ligera;
- b) Si pesaban lo mismo, la que quedó sin pesar sería la más ligera.

Ahora tienes **nueve** bolitas semejantes, también una de ellas más ligera que las otras. ¿Como podrías descubrir cuál es, en **dos pesadas**?



El resolutor al enfrentar una situación-problema tiene que realizar una práctica para resolverla. Para ello, realiza una serie de acciones, más o menos deliberadas.

Una de estas acciones es justificar su respuesta en base al desequilibrio de la balanza. Siguiendo la terminología habitual de los estudios sobre la metacognición esta acción es un indicio de que el sujeto ha realizado una argumentación en la cual ha utilizado la proposición “a más cantidad más peso” y, por tanto, se infiere que el sujeto es consciente de dicha proposición (“sabe que” se cumple esta propiedad). Se considera que la observación externa de esta acción del sujeto es una confirmación de que se ha producido un “acceso de conciencia” en el que dicha proposición ha sido objeto del pensamiento del sujeto.

Además, del “saber qué” el “saber cómo” es otra forma de acceso consciente. Por ejemplo, “*saber cómo*” se debe realizar la distribución de las bolas en los platos de la balanza, “saber cómo” utilizar las propiedades que conoce para resolver el problema, etc. También, el “saber porqué” es otra forma de acceso consciente. Por ejemplo, saber por qué el hecho de que la balanza se desequilibre es una explicación de que las dos bolas pesan diferente.

Los ejemplos en los que se pone en funcionamiento el *saber qué, cómo, por qué* y, también, *cuándo*, son indicadores de que fue activado un estado de conciencia, y en nuestra opinión también pueden funcionar, en algunos casos, como indicadores de estados de conciencia que se pueden considerar como metacognitivos.

En el proceso de instrucción, estos interrogantes (en muchos casos implícitos) están íntimamente relacionados con el contexto en el que se realiza la práctica de resolver problemas y, por tanto, pueden evocar, activar o detonar otras acciones. A su vez, estos interrogantes emergen de estos contextos de prácticas y se convierten en elementos supervisores, reguladores y evaluadores del proceso de resolución, e incluso, cuando se es consciente de ellos, también de nuevos procesos de resolución que se tengan que realizar en el futuro.

Igualmente, bajo esa perspectiva concebimos la metacognición: como un constructo derivado, en gran medida, de la práctica y como tal consideramos que sus elementos son, en parte, emergentes de un sistema de prácticas (en el sentido de Godino y Font).

Para concretar nuestro enfoque, asumiremos, de entrada, la definición de Flavell (1976) de metacognición:

La metacognición se refiere al conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos, por ejemplo, las propiedades de la información relevantes para el aprendizaje...[y

que además] hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan, normalmente al servicio de alguna meta u objetivo concreto. (p.232)

Por otro lado, y a fin de tener presente también las consideraciones de otros autores, y puesto que ese conocimiento (acerca de los propios procesos y productos cognitivos) llevado a cabo por una persona (cognitiva y afectiva) sufre influencias de contextos sociales diversos (familia, escuela, procesos de instrucción estándar y no-estándar...) que juntos construyen una historia de vida de un sujeto, nos inclinamos por *entender la metacognición como un conocimiento teórico-práctico-social, que acompaña a la cognición (interaccionando ambos continuamente sin que se pueda considerar que uno determina al otro de manera “mecánica”), pudiendo ser desarrollado y/o incrementado al mismo tiempo que el conocimiento cognitivo es desarrollado, y como tal es resultado de las exigencias de la conducta social efectiva y satisfactoria y que además, se usa y se cambia bajo constricciones contextuales.*

La metacognición suele manifestarse desde estados (accesos) de conciencia automática hasta estados de conciencia deliberada (“control deliberado”), desde estados pasivos a estados activos de conciencia. En el intervalo entre un estado pasivo y uno activo podemos pensar en muchos niveles (estados) de conciencia, desde el más vago al más elevado, y por tanto, podemos pensar en muchos niveles de metacognición. Es en este sentido que presentamos una *configuración metacognitiva* que actuando junto con la configuración cognitiva (propuesta por el EOS), en tanto que herramientas de análisis, puedan contribuir a una mejor comprensión de la prácticas que realizan los estudiantes para resolver problemas, y por tanto para una mejor comprensión de las conductas matemáticas de éstos.

Para la configuración metacognitiva que proponemos a continuación, consideraremos tres niveles que, a su vez, pueden ser desglosados en otros más específicos, si es necesario. Es importante señalar que a pesar de esta separación, dichos niveles, en el proceso de RP, actúan de manera conjunta, retroalimentándose continuamente. Haciendo un paralelismo con el Enfoque Ontosemiótico, llamaremos *configuración metacognitiva institucional* a la configuración que servirá como modelo de referencia para la *configuración metacognitiva personal*, desarrollada por el estudiante.

Configuración metacognitiva institucional de referencia

Para la realización de la práctica, como por ejemplo resolver un problema que le represente un grado de dificultad importante, un resolutor experto pondrá en funcionamiento una configuración epistémica/cognitiva (según se mire desde la perspectiva institucional o personal), pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión de los componentes de la configuración epistémica a lo largo del proceso de resolución (coordinación, planificación/organización, supervisión/control, regulación y revisión/evaluación que pueden ser automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles, etc.). Teniendo en cuenta una supuesta familiaridad con los elementos de la configuración epistémica, por parte del resolutor experto, para una tarea en concreto, podemos, de un modo general, decir que tal familiaridad también se extiende a los elementos de la configuración metacognitiva. Para el caso particular de las prácticas que realizaran los alumnos en el contexto de resolución de nuestras tareas, propondremos una reconstrucción hipotética de una configuración metacognitiva “adaptada” a cada situación problema, pero que de modo general la podemos describir de la siguiente forma:

Tabla 3 – Configuración Metacognitiva

Consideraciones para una Configuración Metacognitiva Institucional de Referencia
<p><i>Gestiones primarias (metacognición primaria)</i></p> <p>Para empezar a resolver un problema, el resolutor experto, debe comprender primero lo que se pide en el enunciado, debe tomar conciencia de todos los aspectos que se han de tener en cuenta para la resolución de la situación problema. Dichos aspectos guiarán el desarrollo de las acciones posteriores. Después, teniendo en cuenta las exigencias y condiciones impuestas por la tarea, debe decidir o elegir los pasos que supuestamente le llevarán a la solución. Dado que se supone que es experto en la materia, las decisiones que tomará en la mayoría de los problemas serán rápidas (e incluso en algunos casos automáticas); también sus argumentaciones sobre la bondad del plan adoptado serán precisas y de acuerdo con los conocimientos institucionales.</p> <p>Las gestiones para este primer nivel cubren desde la fase de ataque al problema hasta el ensayo de uno o más planes de resolución y, con ello un nivel relativamente semiautomático de procesos de supervisión, regulación y evaluación.</p> <p>Podemos decir de modo general que las acciones metacognitivas iniciales que se esperan para este nivel serán, sobre todo, de <i>comprensión</i> y de <i>organización/planificación</i>.</p>

Gestiones secundarias (metacognición secundaria)

La metacognición primaria en general va asociada a acciones del resolutor experto manifestadas de forma rápida (e incluso automática), dada la supuesta familiaridad que se le supone con los conocimientos necesarios para la resolución de la situación (tarea).

Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación más reflexivas que las que se dan en la primera.

1) Dado un plan que puede ser el adecuado o no, una acción *supervisiva* es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo “estoy siguiendo correctamente el plan previsto”. Este tipo de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de supervisión puntual o constante de las acciones emprendidas. Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento.

2) En una acción *regulativa* se supone que el resolutor implícitamente o explícitamente hace cuestionamientos del tipo “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender”. Se da cuenta de que se equivocó y sobre todo se pregunta *cuándo* o *dónde* se equivocó.

3) En una acción *evaluativa/verificativa* se supone que el resolutor explícitamente hace cuestionamientos del tipo “estoy respondiendo correctamente a la tarea” ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?”. Este tipo de preguntas son indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación/verificación final de las acciones emprendidas.

Gestiones para una metacognición ideal

Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, tal como se ha dicho serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación. Lo que caracteriza este tercer nivel metacognitivo es el recurso deliberado de procesos cognitivos de características muy generales (pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, resolución alternativa, una solución original, etc.), los cuales se proponen como nuevas alternativas (mucho más conscientes y reflexivas) a las demandas de supervisión, regulación y evaluación anteriores.

Aunque hemos puesto los tres niveles de metacognición separados uno del otro, hay que pensarlos como un proceso continuo que se desarrolla en espiral. En muchos casos será suficiente el nivel primario de metacognición (cuando por ejemplo un resolutor experto se enfrenta a un problema que para él es simple).

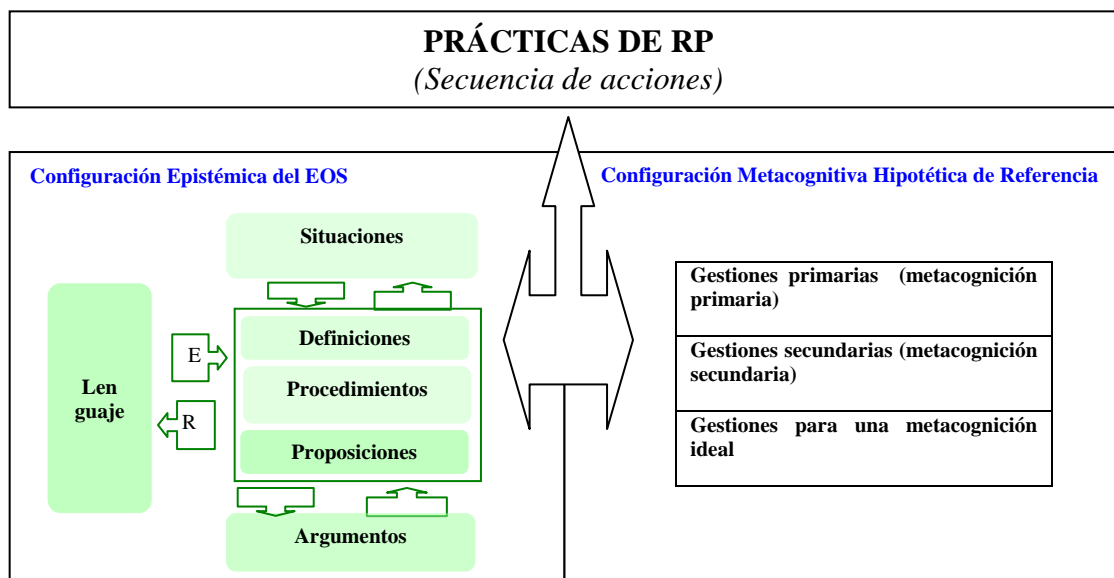
Sólo aparecerán explícitamente los niveles secundario y terciario descritos anteriormente cuando el resolutor se enfrente a una situación problema cuya complejidad le obligue a ponerla en funcionamiento.

La configuración metacognitiva institucional (de un resolutor ideal), será tomada como referencia para evaluar las configuraciones metacognitivas personales de los estudiantes. En la confección de esta configuración ideal se han tenido en cuenta los siguientes aspectos: 1) la actividad metacognitiva de los profesores de matemáticas que han resuelto el conjunto de nuestros problemas que posteriormente se propusieron a los alumnos, 2) la revisión de la literatura sobre la metacognición que hemos consultado y 3) la experiencia de la doctoranda y de los directores de tesis en la resolución de problemas en la formación continua de los profesores y 4) la opinión de expertos de la metacognición que hemos consultado. Posteriormente esta configuración se ha refinado teniendo en cuenta matices sugeridos por las respuestas de algunos estudiantes.

Los niveles de metacognición necesarios para la resolución de un problema dependerán de la complejidad del problema y del nivel de conocimientos (cognitivos y metacognitivos) del resolutor.

Con lo dicho, creemos que para una mejor comprensión de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el contexto de nuestras tareas, será necesario contemplar una unidad mínima de análisis compuesta por las configuraciones cognitiva y metacognitiva conjuntamente, que es lo que veremos en el próximo capítulo.

Seguidamente presentamos un esquema de las herramientas de análisis de las prácticas de RP:



Con este esquema queremos representar que si bien, por una parte conviene, para el análisis de las prácticas de RP, considerar por separado los constructos configuración cognitiva y metacognitiva, que a su vez están descompuestas en sus elementos constitutivos, queremos señalar que “vemos” estos constructos formando parte de un todo integrado, que en su conjunto contribuye a explicar la realización de dicha práctica.

Capítulo 3

Perspectivas Metodológicas y Problema de Investigación

Tudo o que sei a respeito do mundo, mesmo pela ciência, eu sei a partir de uma visão minha ou de uma experiência de mundo sem a qual os símbolos da ciência não significariam nada.

Merleau-Ponty

Introducción

En este capítulo exponemos la metodología utilizada en el estudio, describiendo en detalle las consideraciones tenidas en cuenta para una mejor organización y claridad de la información. Comenzamos por describir la perspectiva en que se sitúa la investigación, combinando elementos cualitativos y cuantitativos y, a partir de ahí, explicitamos todo el diseño de la investigación, reiterando en primer lugar las cuestiones, presentando las hipótesis y revelando lo que ha sido realizado, cómo, cuándo y quién ha participado en todo este proceso.

I- PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

Hemos visto cómo la diversidad de metodologías de investigación viene a enriquecer el campo de la educación matemática. Observamos cómo el desarrollo del cognitivismo en el siglo XX permitió valorar adecuadamente la importancia del análisis de datos cualitativos. Podemos señalar, entonces, valores emergentes de nuevas perspectivas para la educación matemática, como los aspectos de contextualización, autonomía, valoración del diálogo, creatividad y los aspectos personales e institucionales de los sistemas de prácticas, que se

revelan cada vez más necesarios y que han llevado a una redefinición de los objetivos, estrategias de enseñanza-aprendizaje y de los métodos de investigación en el campo de la Educación Matemática. Y es en este escenario de redefiniciones donde se justifica hablar de la diversidad de herramientas teóricas, de enfoques, de modalidades y de metodologías de investigación.

Aquí, pretendemos señalar el lugar que tendrán las perspectivas cualitativa y cuantitativa en nuestra investigación.

La naturaleza de la temática de nuestra investigación, reclama una mayor flexibilidad en el tratamiento de los datos que a su vez son complejos, dinámicos y no lineales. Así que, una dosis de integración entre la formalidad del método cuantitativo y su conjunto de fases sucesivas y bien determinadas, y el método cualitativo nos proporcionará una visión más amplia de los temas en cuestión, específicamente de las prácticas puestas en juego para intentar responder a las preguntas de la investigación.

No concebimos la idea de que una investigación para ser calificada como científica deba estar encuadrada solo en los parámetros positivistas y, tomando como nuestras algunas de las palabras de Baptista (1992), afirmamos: en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas están implicados una serie de acontecimientos que “hablan”. De ahí la necesidad de una investigación más abierta, ya que investigar para nosotros significa tener la libertad de indagar nuevos caminos. Sin embargo, no pretendemos distanciarnos de los métodos cuantitativos, sino que señalamos, al reconocer sus límites, la necesidad de considerar las dos perspectivas y, además, repensar la práctica reproductora, muchas veces resistente a nuevas formas de pensar e investigar la realidad (Gusmão, 2000a). Intentaremos percibir las dos perspectivas como complementarias de forma que el uso de una implicaría el uso de la otra.

Desde esta perspectiva, la educación matemática tiene las fronteras más allá del dogmatismo, cuando concibe el proceso de enseñanza-aprendizaje como un fenómeno dinámico, complejo, caminando en el vasto horizonte de conocimientos (histórico y actual) que van desde la Epistemología, al de la Psicología, Antropología, Pedagogía, Filosofía, Lingüística, Sociología, Historia de la Ciencia. (Viggiani, 1993; Godino, 2003, entre otros). El carácter dinámico y complejo de esta disciplina científica reclama una mirada hacia los métodos, metodologías, teorías,... más integradora. Mas no se pretenden rupturas, escoger una perspectiva en detrimento de la otra; de ahí que “una aproximación

sistémica para los problemas didácticos es importante ya que muestra que la didáctica de las matemáticas se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe, como consecuencia, desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, aunque sin despreciar los aportes de las disciplinas conexas [mencionadas anteriormente]” (Godino, 2003, p.18). Así, la educación matemática debe preocuparse de la naturaleza de la propia matemática, de los contenidos matemáticos, de su desarrollo cultural y personal, y de la problemática de la comprensión y significado (institucional y personal) de sus objetos, ocupándose de las interpretaciones construidas al respecto de los significados sociales, culturales e históricos, para posibilitar que la Matemática y su enseñanza pasen a ser vistos a través de sus relaciones con el contexto socio-político-cultural que las circunscribe. (Viggiani, 1993; Godino, 2003). “Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la didáctica de las matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos” (Godino, 2003, p.14).

La naturaleza interdisciplinar de la educación matemática es puesta de manifiesto en muchas investigaciones, que han contribuido, en gran medida, a su crecimiento. “La Educación Matemática se impone como una área de investigación de naturaleza interdisciplinar, con metodología propia y distinta, en el estilo, en los objetivos, en las propiedades y en el propio patrón cualitativo de investigación matemática pura y aplicada...” (D’Ambrosio, 1993, p.14-15).

Este carácter interdisciplinar nos permite considerar las dos perspectivas aquí mencionadas como complementarias e interconectadas y situarnos también en un punto intermedio entre ambas, al tiempo que justificamos, así, sus usos en nuestro trabajo.

1.1. Experiencias y papeles de la investigadora

En un estudio de naturaleza cualitativa el investigador (investigador cualitativo) es el principal instrumento de recogida de datos, estando influenciado por sus conocimientos, concepciones y experiencias –que enmarcan su “lugar epistemológico” que según González (2003) es concebido como “la posición desde la cual produce conocimientos y saberes; la misma está asociada con su historia de vida, su formación personal y profesional, (...) con las huellas que hayan dejado en él sus vivencias y demás experiencias vitales como ser humano” (p.9) y, estando el estilo de pensamiento del investigador en

función del lugar epistemológico que adopta, es relevante conocer algunos aspectos de su experiencia previa (Fonseca, 2004). En 1993 me licencié en Ciencias Exactas con Habilitación en Matemáticas por la Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB); dos años después (1995) concluía mi primera especialización en Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas. Estando realizando la especialización, fui aprobada en concurso público para el Magisterio Superior, también en la misma universidad, dando clases de Análisis Matemático, Cálculo Diferencial e Integral y Didáctica de las Matemáticas, entre otras asignaturas. Ahí pude iniciar mis primeras reflexiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, que sumado a las reflexiones propias de la aplicación del proyecto de monografía del curso de especialización titulado *La Relación Aprendizaje de las Matemáticas y los Estadios de las Operaciones Formales* (en estudiantes de bachillerato de la red pública y privada) me permitieron comprender que este proceso era algo dinámico, complejo y que envolvía muchas variables de orden cultural, político, social, psicológico, filosófico, entre otras y, además de provocar una reflexión me ha hecho ver que eran necesarios muchos estudios y una mayor dedicación por mi parte para intentar comprender el funcionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje. Al principio, en el conjunto de estas variables, una me ha llamado la atención “los aspectos afectivos/emocionales”, que en ese momento no pude tratar, pero que junto con las reflexiones que empezaban a aflorar me impulsó a continuar investigando y, así en 2000 terminaba el mestrado en Educación Matemática por la UNESP (Rio Claro/São Paulo) donde pude desarrollar un trabajo que me gustó muchísimo y ha puesto una marca indeleble en mi trayectoria de investigadora y donde, por fin, trabajé con los procesos afectivos (particularmente las emociones). En 2002 llegué a España empezando a hacer el doctorado en Estadística e Investigación Operativa, cursando todo el período de docencia pero, frente a la imposibilidad de aplicar el proyecto de la estadística a la Educación dado que el programa no lo permitía, he retornado a mi origen. Así que, en 2003, me inscribí en el Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. En este nuevo programa, el profesor Dr. Antón Labraña conociendo algo del trabajo desarrollado en Brasil sobre la influencia de las emociones en el aprendizaje de matemáticas, nos sugirió la posibilidad de relacionar los procesos afectivos con los metacognitivos, los cuales ya eran considerados por él, como algo integrado e inseparable de su práctica como maestro (y aprendiz) en el escenario educativo. Así que, con su apoyo y también con el apoyo

continuo de Dr. Cajaraville comencé a interesarme por los estudios sobre metacognición. La relación entre procesos afectivos y metacognición a pesar de ser observada a principios de nuestros estudios acabó siendo un problema no tratado y que dejamos, de momento, abierto a estudios futuros. Sin embargo, reconocemos que la afectividad sería otra vertiente a contemplar a la hora de analizar y comprender las prácticas realizadas por los estudiantes y, en esta dirección recomendamos, por ejemplo, los estudios de González (1996) y Gusmão (2000a,b). Debemos aún dejar patente a lo largo de esta trayectoria de doctorado que, progresivamente fui contando con el apoyo de otros investigadores -además de mis directores de tesis Dr. José Antonio Cajaraville y Dr. Antón Labraña (Universidad de Santiago de Compostela)- en el sentido de enriquecer y ampliar las perspectivas de estudios, con el Dr. Vicenç Font (Universidad de Barcelona), Dr. Juan Godino (Universidad de Granada), Dr. Fredy González (Universidad Pedagógica Experimental Libertador de Venezuela), Dr. Bruno D'Amore y, recientemente, con mi estancia en Portugal, pude contar con la colaboración del Dr. Domingos Fernandes (Universidad de Lisboa).

II- EL DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Para la construcción del diseño de la investigación hemos tenido en cuenta las opiniones de Bardin (1979), Crespo (1993), Luna (1998), Batanero (2003), entre otros, que desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa nos presentan las etapas de un proceso de investigación educativa. Todo ello, ha contribuido a organizar el trabajo, pero sin que presuponga haber seguido un orden pre-fijado para el mismo.

Así, trataremos a continuación de reescribir el problema y las cuestiones que orientan la investigación, y presentar las hipótesis de trabajo con el objeto de facilitar al lector la perspectiva que se seguirá en el capítulo siguiente, de análisis de datos.

2.1. Problema y cuestiones de investigación

Nuestra investigación se centra, en particular, en el estudio de las relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos y las prácticas de RP, por parte de estudiantes de determinados niveles educativos. Todo ello, en la perspectiva añadida de que los propios

procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, debieran contribuir al desarrollo de procesos metacognitivos preexistentes. De aquí que resulte conveniente hablar del problema de investigación que viene determinado por el conjunto de las siguientes cuestiones:

CUESTIONES GENERALES	CUESTIONES ESPECÍFICAS (y aclaraciones)
CG1. <i>¿De qué manera podemos comprender las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de RP a través de la integración de ciertos constructos teóricos del EOS y de la Metacognición?</i>	CE1. <i>¿Cómo podemos describir, analizar e interpretar las prácticas que realizan los estudiantes de dos niveles educativos: E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) y Magisterio, considerados individualmente, en grupo y con el apoyo del profesor, en el proceso de RP a través de la integración de los constructos del EOS y de la Metacognición para?</i>
CG2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las competencias metacognitivas de los estudiantes, evaluadas en nuestras tareas de RP, y su rendimiento académico?</i>	CE2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en nuestras tareas y sus Calificaciones Finales de Curso (CFC) (medidas por la media obtenida en el conjunto de todas las asignaturas), en particular, en la asignatura de Matemática (MAT)?</i>
CG3. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre los niveles de competencia metacognitiva que los profesores presuponen (1) a sus alumnos y los niveles observados a través de una prueba externa (2)?</i>	(1) <i>a través del conocimiento de aulas y tomando por base nuestra prueba (externa), el profesor estimará las competencias metacognitivas de sus alumnos (as). A esta estimación nombraremos EEP (Evaluación Estimada del Profesor).</i> (2) <i>PHM – Prueba de Habilidades Metacognitivas</i>
C4. <i>¿De qué manera la metacognición emerge en los procesos de instrucción estándar (entendidos como aquellos que no han sido programados expresamente para desarrollar y/o incrementar la metacognición)?</i>	

2.2. Hipótesis del trabajo

También, retomando las premisas básicas que habíamos referido en la introducción:

- 1) Consideramos que las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP pueden ser mejor explicadas si contemplan para su análisis la integración de ciertos constructos teóricos, como el EOS y la Metacognición;
- 2) Consideramos que las dificultades de comprensión, por parte de los estudiantes, están relacionadas con sus carencias cognitivas y metacognitivas;
- 3) Consideramos que las competencias metacognitivas de los estudiantes inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas;
- 4) Consideramos que el desarrollo de la metacognición forma parte de los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, y que puede impulsarse si profesores y alumnos toman conciencia de éstos.

Podremos establecer las siguientes hipótesis:

H1. *El hecho de que una persona tenga adquirido los **conocimientos cognitivos** suficientes para la realización exitosa de una práctica, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias o uso incorrecto de conocimientos metacognitivos.*

H2. *El hecho de que uno tenga adquirido y controle aspectos del **conocimiento metacognitivo** suficientes para afrontar una nueva tarea, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias de conocimientos cognitivos.*

H3. *El hecho de que una persona tenga adquirido y controle el **conocimiento metacognitivo** indicado para afrontar nuevos aprendizajes, aunque no siempre es garantía de éxito, en muchos casos consigue mejorar su configuración cognitiva, facilitando la adquisición de dichos aprendizajes.*

H4. *En la realización de una práctica se activan las dos configuraciones, cognitiva y metacognitiva, que mutuamente se apoyan e interactúan para el progreso común.*

- H5.** *El instrumento PHM que refleja el dominio/control de los procesos metacognitivos por parte de los estudiantes,*
será un buen predictor de ese dominio/control si
a. la correlación entre las variables PHM y CFM resulta significativa;
b. la correlación entre PHM y CFC resulta significativa;
No será un buen predictor si
c. el estudio de las correlaciones anteriores no resulta significativo.
- H6.** *Reconociendo el profesor los conocimientos y capacidades metacognitivas de sus alumnos con respecto a los reflejados en nuestro instrumento PHM,*
este reconocimiento vendrá indicado si
a. el estudio de correlaciones entre PHM y EEP es significativo.
En el caso opuesto,
b. indicará baja presencia de un trabajo explícito enfocado al desarrollo de la metacognición.
- H7.** *El profesor reconocerá mejor los conocimientos y capacidades metacognitivas de los alumnos de buena conducta académica general (en rendimiento y comportamiento) y, en este caso,*
el reconocimiento vendrá indicado si
a. el estudio de correlaciones entre PHM y EEP referidos a los alumnos considerados “mejores” por sus respectivos centros, resulta significativo;
No vendrá indicado si
b. el estudio de correlaciones no resulta significativo.
- H8.** *La instrucción no programada para desarrollar y/o incrementar aspectos de la metacognición acaba, de forma espontánea o inconscientemente, impulsando el desarrollo de habilidades metacognitivas.*

2.3. Naturaleza de las informaciones

La naturaleza de las informaciones de esta investigación es de carácter “opinativa” (creencias, suposiciones, valores, entre otros.) que según Luna (1998) “son aquellas que expresan la concepción de un individuo al respecto de sí mismo, de una situación o de otro, envolviendo sus creencias, sentimientos, valores, opiniones, etc.” (p.49). Aún según este autor, estas informaciones, en general, exigen interpretación tanto por parte de quien las emite, dado su carácter subjetivo, como por parte de quien las registra y/o decodifica en el momento de su análisis.

2.4. Participantes y Contexto del Estudio

Debido a la naturaleza de las informaciones, para la selección de los sujetos seguiremos las orientaciones de Luna (1998), donde los sujetos pasan a tener las siguientes características: poseer la información; ser capaces de traducirla verbalmente y que se dispongan a hacerlo para el investigador.

Nuestra muestra está constituida por 192 estudiantes, distribuidos así: a) 15 alumnos (1 clase) de 3º/4º¹ de E.S.O. (Educación para Adultos) del Instituto San Clemente de Santiago de Compostela y que han participado en la fase del estudio piloto. Tenían una media de 18 años de edad, sin haber finalizado los estudios de ESO, con varios cursos repetidos en su particular periplo escolar repleto de fracasos; b) 173 estudiantes de 3º de E.S.O. de tres Institutos Públicos de Santiago de Compostela: Gelmirez I (3 clases), Rosalía de Castro (4 clases) y San Clemente (2 clases). Tenían una media de 14 años de edad; c) 4 alumnos del tercer curso de Magisterio (Educación Primaria) de la Universidad de Santiago de Compostela. En su gran mayoría los participantes han demostrado bastante interés a la hora de participar en la investigación, han puesto empeño a la hora de responder los problemas, sabían que no estaban siendo evaluados aunque si observados, no por el acierto de sus respuestas a los ítems, si no por el interés de los mismos.

También han participado de este estudio, 9 profesores de Matemáticas de los mencionados Institutos (de los estudiantes implicados en este estudio) y 2 profesores de la Universidad de Santiago de Compostela que han participado como colaboradores en la recogida de datos. Los profesores de los Institutos evidenciarán su preocupación por proporcionar a sus alumnos una educación matemática dirigida, entre otras cosas, a prepararlos para afrontar situaciones asequibles y deseables desde una perspectiva educativa general y, claro, de la matemática.

2.5. Las cuestiones de validez y la técnica de Triangulación

Para responder a las cuestiones de validez respecto a las informaciones recabadas y analizadas hemos enmarcado, metodológicamente, nuestra investigación en un proceso de

¹ Es un tipo especial de enseñanza, donde los cursos tienen duración cuatrimestral.

Triangulación. La Triangulación es un asunto de carácter metodológico, procedimental, pertinente en una investigación de tipo cualitativa, toda vez que, en palabras de González:

“su implementación está vinculada con la calidad y la robustez de la información sobre cuya base se ha de construir los datos que sirven de soporte a las expresiones generales de carácter teorizante que conforma el discurso de una investigación de naturaleza predominantemente cualitativa” (González, 2003, p.3).

Se puede decir, también, que la triangulación es “el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano” (Cohen y Manion, 1990, p.331). Puede ser entendida como una técnica o una estrategia que posibilita la comparación entre diferentes métodos, datos, teorías o investigadores (Cerda, 2000; Ferreira, 2003). Coincidimos con Cerda (2000) en que el objetivo de esta técnica es evitar que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales. En sus palabras:

“La triangulación es una garantía para impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales y para lo cual utiliza múltiples fuentes, métodos e investigadores con la intención de ampliar el ámbito, densidad y claridad de los constructos desarrollados en el curso de la investigación y corregir los sesgos que aparecen cuando el fenómeno es examinado por un solo observador, con una técnica y desde un solo ángulo de observación” (Cerda, 2000, p.50).

Así, sobre la idea de triangulación se asienta la evaluación de la calidad de la información recabada en investigaciones desde diferentes perspectivas cualitativas (González, 2003). Entre los principios sobre los que se sustentan los procedimientos de un proceso de triangulación, González menciona: (a) la existencia de múltiples realidades; (b) el hecho del conocimiento avanzar hacia la divergencia; (c) en el ámbito social, todo está interrelacionado y; (d) cada persona construye conocimiento en función de su lugar epistemológico.

Siguiendo este autor, observamos que el proceso de triangulación queda determinado por las informaciones recopiladas, perspectivas de observadores participantes, teorías adoptadas, métodos; “la triangulación, entonces, consiste en la comparación y contrastación de estos datos entre si (Denzin, 1989), mediante procedimientos de control cruzado (Carr y Kemmis, 1983)” (p.16, subrayado del autor).

Aún González señala que la posibilidad de ubicarse en diferentes posiciones, puede llevar a la emergencia de varias modalidades de triangulación, conforme podemos apreciar en el cuadro, siguiente, que nos presenta el autor:

Modalidades de la Triangulación	
CRITERIO	VARIANTES
1. Tiempo	1.1 Datos de un mismo grupo en diferentes momentos 1.2 Datos en un mismo momento de diferentes grupos
2. Espacio	2.1. Estudio de un mismo fenómeno en diferentes ámbitos geográficos
3. Niveles combinados	3.1 Estudio de un fenómeno desde perspectivas secuenciadas y/o jerarquizadas: individual, grupal u organizacional
4. Teorías	4.1 Utilización de diversas teorías para abordar una situación, en lugar de considerar sólo un punto de vista
5. Investigadores, observadores o participantes	5.1 Usar las informaciones complementarias entre si, proporcionadas por varios observadores; cada quien aporta su propio estilo de recabar y procesar información
6. Métodos	6.1 Varios métodos para un mismo asunto (entre) 6.2 El mismo método en diferentes ocasiones (dentro)
7. Datos	7.1 Obtención de datos en diferentes momentos 7.2 Obtención de datos en distintas partes 7.3 Obtención de datos diferentes sujetos

Es así que, la triangulación consiste en comparar las diferentes impresiones obtenidas por diversas vías, ampliar, clarificar y corregir, cuando sea necesario, los constructos considerados y desarrollados en la investigación (Cerde, 2000), aspirando, sobretodo, una convergencia entre tres puntos/perspectivas/visiones/... sobre una misma situación o asunto, que se fortalecen mutuamente, creando una imagen más cercana y lo más fiel posible, de la complejidad del asunto estudiado (González, 2003).

A continuación presentamos los instrumentos utilizados en la investigación y ya en este apartado comentamos el uso de una primera triangulación en nuestro trabajo.

2.6. Instrumentos de investigación utilizados en la recogida de datos

Una de las metas inicialmente pensada para acercarnos al pensamiento del alumno y así comprender mejor la metacognición fue intentar percibir y conocer otras variables (además de las que hemos tratado hasta aquí) que pudieran estar interfiriendo en su conducta

matemática a la hora de realizar una práctica. Pretendíamos acercarnos al *historial académico* del estudiante haciendo un acompañamiento de su rutina con los estudios, familia, compañeros, profesores... Nos atrevimos a hacer algunos planteamientos y llegamos a llevar a cabo durante dos años una serie de acciones, entre ellas: entrevistas semi-estructuradas individuales a alumnos y profesores, cuestionarios a padres, a alumnos y a profesores, aplicaciones de una prueba no-standard buscando percibir las habilidades metacognitivas, acompañamiento y análisis de momentos de evaluaciones de los alumnos con aplicación de códigos para identificar el estado afectivo de estos, observaciones y grabaciones en audio de prácticas de aulas, estudio comparativo de las calificaciones finales del conjunto de todas las asignaturas de curso y, grabaciones en audio y video de estudios de casos individuales y colectivo. Todo ello, porque creíamos que la conducta matemática del estudiante, desde el ángulo que proponíamos mirar, solo se podría comprender mejor considerando al estudiante como un sujeto integrado en sus varias relaciones con el mundo, con sus aspectos multidimensionales, como “un sujeto tributario de instituciones, ocupante de lugares y posiciones concretas, y que se funda a partir de las relaciones en las cuales su existencia está inscrita” (Aquino, 1997, p.94). Y de ahí que el *historial académico* lo concebíamos como una verdadera historia de vida de la que hace parte no solo las experiencias y conocimientos adquiridos por el estudiante a lo largo de su vida “académica” como también hace parte la “extra-académica”, o sea, hace parte los conocimientos previos, las habilidades, los éxitos y fracasos, las expectativas cumplidas y frustradas, los gustos y preferencias por unas y otras formas de aprender, los padres, los compañeros y amistades, profesores y ex-profesores, los centros, y demás agentes del acto educativo formal y informal y, por tanto, sería el *historial académico* una poderosa fuente de información, que debería ser tenida en cuenta, cuando se pretendían buscar explicaciones a los problemas de comprensión y aprendizaje de las matemáticas. Construimos un banco de datos con muchísimas informaciones. No obstante, una mejor planificación del trabajo, atendiendo un punto de vista metodológico, nos hizo percibir que para el contexto de una tesis, manipular con demasiadas informaciones podría desviar el propósito del trabajo, pero que sin embargo pueden ser tratadas en el futuro. Así que, decidimos acotar y, los instrumentos que traemos (del historial académico del alumno) para ser analizados en esta investigación son:

- 1- Prueba de Habilidades Metacognitivas (PHM).
- 2- Entrevistas orales y semi-estructuradas (la Técnica de Retrospección) al colectivo de estudiantes (ESO y Magisterio) con respecto a la PHM.
- 3- Debate en grupo sobre la PHM (con estudiantes de Magisterio).
- 4- Evaluación Estimada del Profesor (EEP) de matemáticas sobre las competencias metacognitivas de sus alumnos, tomando por base la PHM.
- 5- Calificaciones Finales de Curso (CFC) correspondientes a 3º y 3º/4º de ESO.
- 6- Observación indirecta de un proceso de instrucción.

Antes de referirnos a estos instrumentos, insertados en el contexto de la resolución de problemas, consideramos pertinente realizar algunas aclaraciones sobre lo que entendemos como un problema, que converge en la misma dirección tomada por Godino (1994), cuando hablamos del EOS.

En el contexto de esta investigación, nos referimos a un problema cuando hablamos de una tarea frente a la cual se poseen ciertos recursos que permiten abordarla con diferentes perspectivas de éxito, pero no se cuenta con un procedimiento mecánico cuya aplicación estandarizada proporcione la solución deseada.

Un problema siempre ha sido relativo al individuo concreto, pues lo que parece ser un problema para uno, puede no serlo para otro y el que parece ser rutinario para el profesor puede no serlo para el estudiante: si un estudiante no ha formalizado procedimientos rutinarios y habilidades para resolver el tipo de problema que se ha enseñado recientemente, el ejercicio no resulta tan rutinario para ese estudiante (Schoenfeld, 1985; Hegedus, 1998; entre otros). En otras palabras, “deberemos pensar lo que es un problema de acuerdo con aquello que motiva y coloca necesidades para los sujetos... nuestros alumnos, y no para nosotros, los profesores” (Vianna, 2002, p.401). Para motivarse y despertar curiosidad y necesidades es preciso que el sujeto sea “seducido” por el problema, que lo desee y se sienta atraído por resolverlo. Así, Vianna considera la cuestión del “deseo” como algo a tener en cuenta a la hora de considerar lo que es un problema y a la hora de plantearlo para los alumnos y así enfatiza “¡el problema debe ser problema para los alumnos!”.

Reforzando estas ideas, Cury & Sampaio (200?) añaden:

“Nuestra dificultad, como profesores de Matemáticas, es encontrar el punto medio entre una actividad que despierte la curiosidad, desafíe al estudiante y, al mismo tiempo, le permita construir un conocimiento nuevo o desarrollar estrategias de resolución de problemas (...) acreditamos ser fundamental colocar una dosis de curiosidad, otra de buen senso y completar con una medida llena de razonamiento lógico. ¡Y dejarlos saborear la mezcla!”²

Tales perspectivas, en la medida del posible, las tuvimos en cuenta en la elaboración de nuestro instrumento, Prueba de Habilidades Metacognitivas (PHM), que contiene una lista de problemas a resolver y que, a continuación comentamos.

2.6.1. Prueba de Habilidades Metacognitivas (PHM)

La PHM fue construida tomando como punto de partida la “prueba inicial de habilidades de aprendizaje”³ del Instituto de Evaluación y Asesoramiento Educativo (IDEA), que adaptamos para el nivel de 3º de ESO.

Según Mayor et. al. (1993),

“Las tareas que más probablemente implican estrategias metacognitivas son las que requieren generalización (...) y las que obligan a coordinar tareas individuales porque fuerzan a que la persona reflexione, ensaye y autorregule. Por tanto, para evaluar la metacognición hay que elegir tareas que requieran la intervención de procesos conscientes. Los pensamientos y acciones típicamente conscientes son: 1) los implicados en una acción no automatizada; 2) los implicados en tareas en que los sujetos tienen que hacer elecciones y enjuiciamientos sobre si una tarea nueva requiere la utilización de un paradigma previo; y 3) los que se dan en situaciones en que no vale la estrategia habitual, porque se produce una interrupción más o menos momentánea de la conducta y del pensamiento (Borkowski, 1985)” (Mayor et. al. (1993, p.147).

Aunque se podría matizar de la cita la afirmación “las tareas que *más* implican... estrategias metacognitivas” y sin pretender generalizar, observamos que el instrumento PHM usado para evaluar la metacognición, se respalda y converge con el contexto de estas opiniones. Es decir, reflexionando sobre esta cita nos preguntamos: ¿Nuestra prueba

² Artículo aceptado por el BOLEMA (Boletim de Educação Matemática), pero que todavía no ha sido publicado.

³ Autoría de la Dra. Amparo Moreno. Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación-Universidad Autónoma de Madrid. También fueron incluidas algunas cuestiones (3, 4 y 6) extraídas del trabajo de Gusmão (1997) y una cuestión (7) adaptada del libro “Perspectiva em Aritmética e Álgebra para el Século XXI” (Lins & Jiménez, 1997).

requerirá pensamientos y acciones conscientes? Siguiendo los parámetros de Mayor et. al. (*op. cit.*) intentaremos responder esta pregunta.

1) Nuestro instrumento no se basa en automatismos. Está compuesto por un conjunto de problemas no-rutinarios, lo que significa que el estudiante no dispone (en nuestra opinión) de habilidades estandarizadas para resolverlo, aunque podría tener recursos adecuados para intentarlo. Debemos señalar que antes de la aplicación de la prueba aclaramos a los estudiantes los objetivos de la misma; que no estaban obligados a contestar, pero si lo hacían, era necesario que fueran sinceros en sus respuestas; que, en general, no existía una única solución para cada cuestión; que no estábamos buscando un resultado correcto o incorrecto, y lo que deseábamos era conocer las estrategias empleadas por ellos; que ante cualquier duda y posibles preguntas estábamos a su disposición. Durante la aplicación de la prueba intentábamos atenderlos en la medida en que lo demandaban, en un clima relajado. Para esto se contaron con otros dos profesores colaboradores. Después de la aplicación agradecemos su participación, prometiéndoles (dado su interés) comunicarles los resultados. Algunos de estos estudiantes serían entrevistados después de la prueba.

2) Los problemas de la PHM fuerzan al resolutor a tomar decisiones, hacer elecciones y enjuiciamientos sobre si lo que se plantea permite o requiere la utilización de modelos conocidos o hay que emprender nuevos caminos. En la medida de lo posible, intentan que el alumno se exprese libremente, huyendo de respuestas estereotipadas.

3) Los problemas no-rutinarios de la PHM rompen con los tipos de estrategias (algorítmicas, cálculo rutinario) habituales, produciendo un desequilibrio (en el sentido de Piaget) y, reafirmando las palabras de Mayor et. al. (*op. cit.*) provocando una interrupción más o menos momentánea de la conducta y del pensamiento.

Es así que consideramos que el instrumento PHM requiere pensamientos y acciones conscientes en el sentido de Mayor et. al. (1993).

Realizamos un primer experimento, a través de un estudio piloto, con la PHM que contenía 12 problemas, durante el curso 2002-03 con una muestra de 15 estudiantes de 3º/4º de E.S.O. (Educación para Adultos). El estudio piloto tuvo un carácter exploratorio, o sea, tuvo la finalidad de practicar e intentar prever algunas dificultades de aplicación. En el mismo sentido dado por Luna (1998), nuestra intención real con este estudio piloto fue explorar al máximo posible la situación para emplearla en planificaciones posteriores.

Una vez corregidas las respuestas y discutidos los resultados, realizamos una serie de modificaciones en algunas preguntas que dieron lugar a un nuevo instrumento aplicado, en dos etapas, a 170 estudiantes de 3° de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.). En aquellos ítems que no fueron modificados, la muestra alcanzaría, justo con los 15 alumnos anteriores, un total de 185 estudiantes de E.S.O. implicados en este estudio.

El nuevo instrumento, ahora con 15 problemas, quedó dividido en dos partes interrelacionadas:

Una primera (parte principal), conteniendo nueve problemas que intentamos “vaciar” al máximo del formalismo simbólico propio de la matemática (centrando el énfasis en los patrones y estrategias de razonamiento praxeológico⁴), permaneciendo sólo el uso de números con carácter comunicativo (y una anecdótica suma de pequeños números naturales).

Una segunda (parte complementaria), aplicada una semana después de la primera, conteniendo seis problemas, donde se introducen signos algebraicos (con carácter comunicativo), se reformulan tres de los problemas anteriores y se presenta uno nuevo que permite, aunque no exige, el uso de fórmulas de áreas de figuras simples (correspondientes a Educación Primaria).

Las cuestiones implicadas en esta prueba requieren del resolutor la capacidad de clasificar, ordenar, seriar, combinar, descomponer, aproximar, hacer suposiciones, simplificar, generalizar, entre otras. Son cuestiones que en su mayoría requieren el reconocimiento de relaciones concretas o intuitivas, que implican a su vez la liberación del pensamiento en relación con los objetos. Delante de una situación problema, el resolutor puede realizar acciones en función de un número cualquiera de combinaciones posibles.

Además, la PHM es un instrumento de naturaleza abierta, más subjetiva que objetiva (a pesar de existir algunas cuestiones de múltiple elección el alumno debe siempre justificar su elección o decisión), cognitiva y metacognitiva y más o menos independiente del currículo oficial del curso. La descripción completa de la PHM se encuentra en el anexo 1.

⁴ Pretendemos hacer aflorar conductas metacognitivas como: a) toma de conciencia del propio conocimiento, valorando el potencial cognitivo disponible para dar respuesta a un problema, b) uso contextualizado y controlado de conocimientos accesibles, c) reconocimiento de informaciones contradictorias usando el razonamiento lógico, d) supervisión de acciones y técnicas empleadas y verificación de los resultados obtenidos con carácter autorregulador. Usamos aquí el término “praxeológico”, para referirnos a la dualidad práctica/teoría (praxis/logos) (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

2.6.2. Entrevistas orales y semi-estructuradas (la Técnica de Retrospección)

Transcurrido poco más de un mes, el tiempo que necesitamos para hacer la corrección de la PHM y esperar la disponibilidad de los profesores y estudiantes, que estaban atareados con exámenes, recurrimos a algunos de los alumnos (as) de 3° de E.S.O. que estuvieron dispuestos a aclarar sus argumentos aportados en la Prueba. Las entrevistas se realizaron en un plazo muy corto: 20 minutos con cada estudiante, ya que tuvimos que aprovechar momentos del propio horario normal de las clases de matemáticas para estar con ellos, contando siempre con el permiso de su profesor.

Optamos por la entrevista semi-estructurada, toda vez que una de sus ventajas es de permitir la captación inmediata y corriente de la información deseada. Es un tipo de entrevista que se desarrolla a partir de un esquema básico, sin embargo no aplicado rígidamente, o sea, es flexible y admite adaptaciones cuando son necesarias (Ludke, 1986).

A pesar de haber recopilado una serie muy rica de informaciones con las entrevistas, sentíamos que el tiempo de 20 minutos para realizar muchas de las aclaraciones que habíamos previsto era poco y, además, que el tiempo transcurrido entre el día que había realizado la PHM y el día de la entrevista pudo haber sido demasiado largo y las aportaciones actuales podrían no reflejar el pensamiento real en el momento de la prueba. Incluso, algunos alumnos (as) durante la entrevista afirmaban ya no estar de acuerdo con su respuesta anterior toda vez que después de la prueba, en conversación con sus compañeros, se habían dado cuenta de sus errores e, incluso, habían tenido tiempo para reflexionar sobre sus actos. Puede que realmente el diálogo con compañeros haya surtido el efecto de un aprendizaje significativo en el contexto de nuestra prueba, que incluso parecía reflejarse en la toma de conciencia de sus limitaciones y condiciones de las tareas, cuando de hecho aportaban detalles que antes no habían percibido. Sin embargo, sentimos la necesidad de obtener una información más cercana al momento de la realización de la prueba escrita. La imposibilidad por motivos diversos (horarios incompatibles, no tenían tiempo porque hacían pasantías u otros cursos en el horario complementario al del instituto, no podían quedar más que media hora, no querían, etc.) de implicar a los alumnos de E.S.O. en un estudio más profundo, sin preocupación, al menos en principio, con el tiempo, nos ha llevado a buscar otro colectivo de estudiantes para el trabajo, estudiantes universitarios. No obstante, aclaramos que algunas de las informaciones recopiladas en las

entrevistas en la E.S.O. están contempladas en nuestros análisis y abordamos un estudio de caso de este contexto.

Con el nuevo colectivo de estudiantes las entrevistas fueron hechas inmediatamente después de la resolución escrita del problema por parte del alumno. Este proceso es conocido según Fernandes, Borralho y Amaro (1994) como la técnica de retrospección donde solicitamos el relato, por parte del participante, de sus procesos de pensamiento utilizados para resolver el problema. Según estos autores, una dificultad de esta técnica es que “puede que sea difícil a un alumno reproducir exactamente los procesos que realmente utilizó” (p.44).

Realizadas las entrevistas, procedemos a las transcripciones de las mismas. Hicimos los análisis buscando las unidades de significado para el estudio en cuestión. Para ello, utilizamos el proceso de la categorización de los datos. Parafraseando a Bardin (1979), tendremos, a través de la categorización, la oportunidad de clasificar los contenidos constituyentes de un conjunto, por diferenciación, para de ahí, a través de criterios pre-establecidos hacer un reagrupamiento de esos contenidos.

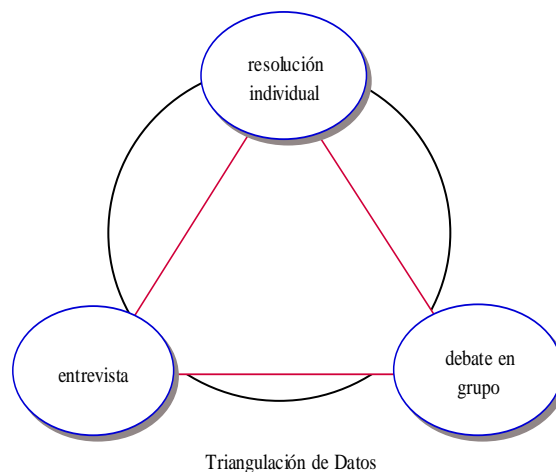
2.6.3. Debate en grupo sobre la PHM. Primera Triangulación

El otro colectivo al que dirigimos nuestra atención con el objeto de profundizar o conocer más detalles sobre las argumentaciones realizadas durante el proceso de resolución de problemas fue alumnos de Magisterio (Educación Primaria). Después de exponer los objetivos de la investigación en una clase de 61 estudiantes que estaban en su último año de la Carrera de Magisterio, 4 (cuatro) de ellos: Marcos, Antia, Laura y Marta se mostraron dispuestos a participar en nuestros Estudios de Caso.

Para estos alumnos seleccionamos 8 (ocho) de los 15 (quince) problemas de la PHM: 1 (la tapa de la alcantarilla), 2 (los tipos de pesca), 4 (las fracciones), 5 (el pescador), 6 (la figura escondida), 7 (la secuencia), 8 (la población) y 13 (las nueve bolitas).

Fue en esta nueva etapa de recogida de datos donde aplicamos nuestra primera triangulación, que es conocida como vimos por triangulación de datos. Fueron realizados cuatro encuentros dedicados a las ocho cuestiones seleccionadas con duración media de

dos horas cada uno, dando un total de ocho horas. Dos cuestiones por encuentro y una hora para cada cuestión. Siempre dábamos un momento para lectura y exposición de dudas (que no hubo) y, siempre insistíamos para que buscasen escribir todo lo que pensaban y lo máximo que podían. De modo que el proceso de triangulación ha ocurrido de la siguiente forma: primero, los cuatro estudiantes resolvían cada cuestión individualmente y bastante separados uno del otro (distribuidos en las esquinas de la clase), sin un mínimo de contacto o interferencia durante la resolución. Inmediatamente al término, y aún separados de los demás, el alumno era llevado a otra clase para proceder con la entrevista prevista con respecto a la cuestión planteada, que se iniciaba con: *Dinos todo lo que puedas sobre lo que ha pasado por tu mente mientras resolvías el problema*. Pretendíamos por medio de las preguntas estimar los conocimientos y capacidades de los sujetos que no son accesibles por simple observación (Cobo, 2003) y que profundizasen o declarasen algún detalle más no mencionado en la respuesta por escrito. En el momento que todos habían contestado la misma pregunta y hecho aclaraciones sobre la misma, se reunían en grupo para debatir sus argumentos sobre la cuestión en juego. En la dinámica del debate todos exponían sus razonamientos y dudas, opinaban, dirigían... Terminada una cuestión, empleábamos el mismo procedimiento con la segunda. Y así lo hicimos en cada cuestión, en cada encuentro, construyendo así todo un proceso de triangulación. Para el control del tiempo y evitar contactos entre ellos en los dos momentos (prueba escrita y entrevista) antes del debate -por si terminaban al mismo tiempo y ya que pretendíamos que no hubiese ningún tipo de contacto entre ellos, antes del debate, sobre las formas de pensamientos manifestadas en cada situación-problema y, así, poder registrar el máximo de información posible- contamos con la presencia del profesor Humberto (doctorando) y del profesor Dr. Cajaraville en todos los encuentros. Todo este proceso fue grabado en audio y video. Una representación de esta primera triangulación podemos apreciarla a continuación.



Además, queremos señalar que coincidimos con Cobo (2003) al afirmar que “al tratar de evaluar la comprensión que muestran los alumnos sobre un determinado concepto y sobre los diversos elementos de significado que lo configuran, hemos de tener en cuenta que tratamos de evaluar un *constructo inobservable*” (p.133). Al no poderse observar directamente esta comprensión, sus características deberán ser inferidas de las respuestas dadas por los alumnos, en este caso a la PHM.

2.6.4. Evaluación Estimada del profesor (EEP)

La Evaluación Estimada del Profesor (EEP) es una calificación subjetiva atribuida por los profesores de matemáticas a sus respectivos alumnos, con respecto a las competencias metacognitivas de éstos, tomando por base la PHM. Se realiza a finales de curso, considerando que el profesor tiene un conocimiento amplio de cada alumno, y puede, *grosso modo*, realizar una estimación de las calificaciones que obtendrían en la PHM. Para esta estimación el profesor tuvo como parámetro nuestros criterios de correcciones, o sea, los criterios de competencias, de cada cuestión, establecidos como categorías de respuestas ensayadas por sus propios alumnos. Una vez realizadas por los profesores, pedimos a algunos de ellos (a aquellos predispuestos a participar) aclaraciones sobre las valoraciones emitidas, aclaraciones que pueden explicar, en parte, algunas llamativas distorsiones en el estudio de la correlación. Han participado cinco profesores en esta etapa.

Este instrumento EEP es considerado por nosotros como un instrumento de alto valor pedagógico, educativo y metacognitivo pues, además de implicar una reflexión

profunda sobre cada alumno, el profesor realiza un ejercicio de autoevaluación, al tener que valorar la preparación de los alumnos por él formados, siguiendo criterios intrínsecos a sus convicciones y creencias profesionales, para afrontar un conjunto de tareas intelectualmente asequibles y deseables desde una perspectiva educativa general. Es decir, que el profesor pueda emitir juicios en función del conocimiento individual que de cada alumno (a) tiene y de la capacidad de reflexionar, argumentar y construir frente a situaciones problemáticas, que les atribuye.

Nos gustaría aún resaltar que los profesores han reconocido la PHM como un instrumento asequible a las competencias cognitivas y metacognitivas de sus alumnos. Cinco de ellos (los que participaron en la etapa de aclaraciones) han reconocido trabajar con estos tipos de cuestiones. Así que podremos atribuir a esto un cierto carácter de validez y fiabilidad para nuestro instrumento, dentro del contexto de la muestra investigada.

2.6.5. Calificaciones Finales de Curso (CFC)

El instrumento Calificaciones Finales de Curso es el conjunto de las medias obtenidas en todas las asignaturas a final del curso (año lectivo) correspondientes a 3º y 3º/4º de E.S.O.. Dicho instrumento fue solicitado a los respectivos institutos que gentilmente nos las cedieron. Debemos considerar que las calificaciones finales incluyen de forma significativa factores referidos a la conducta, contemplando resultados de evaluaciones de carácter cuantitativo (exámenes, test, ejercicios individuales y en grupo hechos en clases y extra-clases, taller, etc.) y cualitativo/actitudinales (actitudes, intereses, comportamiento, participación, intervenciones en clases, cumplimiento en la entrega de tareas, etc.), es decir son resultados globales. En el conjunto de las asignaturas del 3º de E.S.O. se encuentran Física y Química; Biología y Geología; Tecnología; Música; Ciencias Sociales, Geografía y Historia; Educación Física; Lengua Extranjera-Inglés; Educación Plástica y Visual; Lengua Castellana y Literatura; Lengua Gallega y Literatura; Matemáticas; Cultura Religiosa y; Optativas (Lengua Extranjera – Francés y Alemán; Iniciación a la Tecnología Informática). Las asignaturas correspondientes al 3º/4º se encuentran agrupadas por ámbitos: Naturaleza, Sociedad, Lingüístico, Tecnológico-Matemático y Instrucción al Trabajo Administrativo.

2.6.6. Observación indirecta de un proceso de instrucción

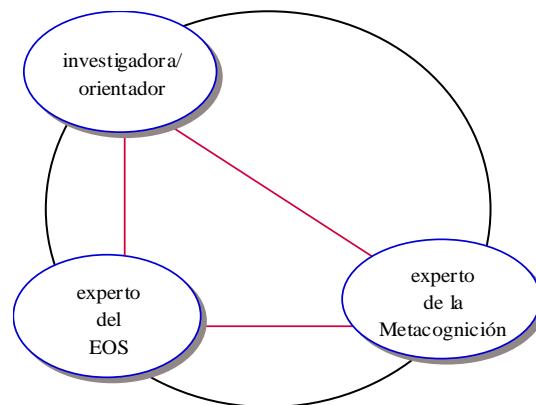
El fragmento de la práctica de aula que traemos para análisis no fue observado y grabado directamente por la investigadora, pero a partir de un video, lo observamos (si así puede decir), lo estudiamos y lo transcribimos para seguidamente analizarlo. El video que está muy bien grabado, describe un proceso de instrucción que fue realizado por el profesor Dr. José Antonio Cajaraville Pegito con estudiantes del antiguo ciclo superior de EGB en el año 1989. Era una clase de 26 estudiantes de 14 años y duró, aproximadamente, 1h. 20 m. Se trata de una clase experimental, desarrollada en el contexto de las prácticas escolares de alumnos de Magisterio en el Colegio de Prácticas anexo a la Universidad. Por tanto el profesor que dirige la experiencia no es el profesor de matemáticas habitual ni, por tanto, el responsable de la clase. El objetivo de la clase consistía en ejemplificar la enseñanza por diagnóstico, para descubrir posibles lagunas y dificultades de los estudiantes, mediante una práctica organizada. Fue un proceso de instrucción considerado por el profesor (y por la institución) como formal y, en este momento, el profesor no tenía la intención (al menos conscientemente) de desarrollar capacidades metacognitivas en sus alumnos(as). Todo ha sido, como ya decimos, grabado en vídeo, pero presentamos, aquí, sólo un fragmento de este.

2.7. El proceso de análisis de datos y los criterios. Segunda Triangulación

El análisis de datos está enmarcado, además, en una estrategia metodológica de estudios de caso. Un estudio de caso puede ser “un estudio de una entidad bien definida, como un programa, una institución, un sistema educativo, una persona, o una entidad social. Permite conocer en profundidad su “cómo” y sus “porqués”, evidenciando su unidad e identidad propias” (Ponte, 1994, p.3, ápuđ Ferreira 2003, p.123); requiere dedicarse deliberada y cuidadosamente sobre una cuestión específica, buscando encontrar sus características esenciales (Ferreira, 2003). En nuestra investigación, la estrategia de estudios de caso fue aplicada en tres modalidades: casos individuales (185 alumnos y un profesor), caso parcial (un grupo con 4 alumnos en debate) y caso general (toda la muestra de 189 estudiantes/participantes). Por otra parte el análisis de nuestros datos, ahora bajo el contexto de estudios de caso, está enmarcado por un proceso de triangulación. El tipo de

triangulación que utilizaremos ahora es la opinión de expertos (o de investigadores) la cual permite comparar las diferentes impresiones obtenidas con el objeto de proporcionar un análisis más cuidadoso y más fino de las informaciones, no dejando (en atención a Cerda) que prevalezcan sólo las impresiones de la investigadora y orientador.

Esta triangulación se caracteriza, primero por el estudio y análisis iniciales de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el proceso de resolución de nuestras tareas (instrumento PHM) y también de la práctica de aula de un profesor y sus respectivos alumnos(as) bajo las dos vertientes de análisis consideradas, el EOS y la Metacognición; segundo, después de elaborada una primera versión del análisis (orientanda/orientador) la hemos sometido a la apreciación de expertos tanto en el EOS como en Metacognición, tratando como ya hemos dicho de refinar los análisis y, tercero, que todo este proceso interactivo entre orientanda/orientador, expertos del EOS y de la Metacognición (resultando en idas y venidas de las impresiones) ha originado el texto de análisis que presentamos en el próximo capítulo. Una representación de este proceso puede ser apreciada en el esquema:



Triangulación de Expertos (Investigadores)

El EOS es un programa emergente en el área de la Didáctica de las Matemáticas que proporciona constructos teóricos para realizar análisis ontológicos y semióticos. El constructo “función semiótica” es básico para los análisis semióticos (ver Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005) mientras que el constructo de “configuración epistémico/cognitiva” es básico para los análisis ontológicos (relativos a la naturaleza y tipos de objetos matemáticos presentes en las prácticas).

En nuestro caso, para analizar las prácticas de los estudiantes en la resolución de problemas, de entrada, hemos utilizado la técnica propuesta en Font (2005). En dicho trabajo, se utilizan las configuraciones epistémicas/cognitivas para explicar una práctica matemática. Los elementos de estas configuraciones son: lenguaje, proposiciones, acciones, argumentaciones, conceptos y situaciones problema. Se trata de un modelo de configuración epistémica y cognitiva compuesto tanto de elementos estáticos (lenguaje, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) como dinámicos (acciones y argumentaciones), pero sin hacer distinciones entre lo que es estático y lo que es dinámico. Esta técnica la hemos aplicado en nuestros primeros análisis (estudio global de las prácticas de los 185 estudiantes), entre otros motivos, por cuestiones de tiempo y simplicidad.

El EOS en tanto que un enfoque relativamente nuevo tiene sus constructos en constante proceso de revisión y recientemente ha matizado el constructo configuración epistémica/cognitiva de manera que se puedan distinguir los aspectos estáticos de los dinámicos. Esta matización permite realizar análisis más finos. La posibilidad de realizar análisis más finos nos ha llevado a aplicar en el estudio de casos, de acuerdo con las nuevas propuestas del EOS, un modelo de configuración epistémica y cognitiva compuesto tanto de elementos estáticos como dinámicos haciendo claramente la distinción entre ambos elementos.

También resaltamos que para el análisis de los datos aportados en el protocolo escrito de los 185 estudiantes, hicimos primeramente un análisis de contenido (Bardin, 1986) de las informaciones, originando una serie de categorías de respuesta agrupadas según un criterio cíclico de comparación de respuestas. Estos criterios los consideramos de carácter más específicos. Ahora, en virtud de la problemática específica que presenta cada uno de los ítems de nuestra PHM, realizamos primero un desglose diferenciado de las respuestas de los resolutores estableciendo una serie de *niveles de competencia (primario, secundario e ideal)*, respondiendo a las habilidades metacognitivas descritas en el marco teórico (representadas al final por configuraciones metacognitivas).

Análogamente, dado que cada ítem suponía un conjunto diferenciado de respuestas (o *tipología de soluciones*) por parte de los alumnos, dio lugar a una clasificación propia de las mismas, atendiendo (a un conjunto de variables dependientes y de tipo cualitativo) al grado de elaboración, al razonamiento manifestado, a las estrategias utilizadas y a los

resultados alcanzados, así como a la característica del argumento manifestado (variable explicativa, cualitativa). La conjunción de los parámetros anteriores da lugar a cada *categoría de respuesta* (A,B,C,...). Dado la especificidad de cada cuestión, presentamos los criterios particulares de cada una en el propio cuerpo de análisis. Las respuestas dadas por los resolutores, cuyo razonamiento manifestado no comprendíamos decidimos agruparlas en una especie de *cajón de sastre*, y que dejamos en abierto para futuros estudios. Tampoco se han tenido en cuenta para los análisis variables de tipo sexo y estados afectivos, que podrían ser consideradas como extrañas y, que cuyo efecto se puede analizar, también, en estudios posteriores.

A cada categoría de respuesta le asignamos una puntuación de referencia, garantizando que una “buena respuesta” entrase en la franja (8,10) y estableciendo distancias con las respuestas “no adecuadas”, que se sitúan en la franja (0,4) (variables dependientes de tipo cuantitativo). En el intervalo (4,8) se utilizan las respuestas intermedias, en función de su nivel.

La naturaleza de este sistema de puntuación es subjetiva y enfatizamos que no estamos interesados en el acierto o en el error del resolutor y sí en sus justificaciones argumentativas y estrategias evidenciadas. También nos gustaría observar que los niveles que se proponen pueden ser encarados como ficticios toda vez que su presencia aquí, se debe a la necesidad de una mayor organización de nuestros análisis y no en estar demarcando niveles en el razonamiento del resolutor. Quizás una metáfora para estar expresando esta idea sería pensar en espiral donde el conocimiento va evolucionando.

En cada ítem, la nota otorgada a una respuesta concreta puede oscilar ± 1 , diferenciado estilos, usos, carencias o aportaciones particulares que no sean esenciales a la correspondiente categoría.

Caben, aún, algunas aclaraciones: las variables manejadas en esta investigación se almacenan en un banco de ítems y para ello fue utilizado el paquete estadístico SPSS que nos ha facilitado, entre otras cosas, el análisis cuantitativo de los resultados, más específicamente el análisis de correlaciones entre las variables CFC, CFM, EEP y PHM; para el caso del fragmento de un proceso de instrucción hicimos un análisis más holístico considerando los constructos de la metacognición.

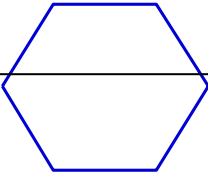
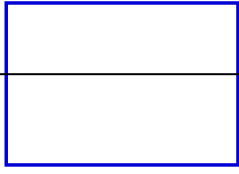
En definitiva, nuestros análisis se basaron en estudios de casos individuales, en grupo (4 estudiantes en debate), y global (con toda la muestra). Para la construcción de los

estudios de caso individual y global tuvimos en cuenta los protocolos escrito y el oral (la entrevista) y, para el conjunto de la muestra, los protocolos escritos. La conjunción de los instrumentos, técnicas y criterios utilizados pretende una mayor fiabilidad en el estudio.

2.8. Posicionamiento en el análisis de datos ante las dificultades y limitaciones

Aún teniendo en cuenta para el análisis de datos, la literatura abordada, las técnicas mencionadas y los criterios aquí presentados, pensamos que nadie ve el mundo de la misma forma y con la misma mirada, de modo que, subrayamos nuestra responsabilidad y subjetividad intrínseca en el tratamiento y en las interpretaciones que hemos dado a la hora de analizar, y por tanto, de comprender las prácticas manifestadas por los estudiantes en el contexto de nuestras tareas. Con este espíritu queremos señalar que posiblemente algunos aspectos que interpretamos como pertenecientes al ámbito metacognitivo sea vista, por otros, como cognitivo, y viceversa. Concretamente, queremos señalar que las *configuraciones cognitiva y metacognitiva* asumidas en el contexto de nuestros análisis para explicar las prácticas pueden que sean en algunos momentos interpretadas, desde otras perspectivas, como formando parte, sólo, de la cognición o metacognición. En este contexto, se puede preguntar, por ejemplo, ¿hasta qué punto lo descrito por el sujeto como procesos cognitivos (o metacognitivos) envueltos en la RP se corresponde exactamente con lo que ha pensado en el momento? ¿De qué forma el hecho de que el sujeto tenga que relatar sus procesos cognitivos afecta los propios procesos cognitivos? Son preguntas que de algún modo reflejan las dificultades y limitaciones a la hora de evaluar los procesos de pensamiento. De algún modo son dificultades (de naturaleza metodológica) que aún persisten (Fernandes et al 1994) en las investigadores. Estos autores con base en Lucas et al (1980) resaltan cuatro “fenómenos” potencialmente diferentes a tenerse en cuenta: “Aquello que el alumno dice o escribe; Aquello que el alumno quiere significar o está pensando; La forma cómo el investigador interpreta lo que aprehende o percibe; La forma cómo el investigador hace corresponder una categoría (...) a la interpretación que hace” (p.42). De lo señalado por estos autores buscamos tener presentes las dificultades y limitaciones derivadas de estos “fenómenos” a la hora de analizar y interpretar los datos y, además, las asumimos toda vez que siguiendo a Fonseca (2004), pretender anularlas es algo imposible de modo que lo que se procura es minimizar su efecto, buscando un análisis

lo más cuidadoso posible de los datos que hemos recabado. En este sentido, con nuestros análisis pretendemos acercarnos al modo como los estudiantes han resuelto los problemas propuestos y a partir de ahí intentar inferir sobre sus prácticas. A continuación, intentamos representar lo dicho en un diagrama:

		Nuestra Perspectiva	
		Configuración Cognitiva	Configuración Metacognitiva
Otras Perspectivas	Cognición		
	Metacognición		

Capítulo 4

PRESENTACIÓN, ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS DE INVESTIGACIÓN

“Su relato nos muestra cuanto es necesario para transformar el mundo: rabia y pertinacia, saber y revuelta, intervención rápida, profunda ponderación, fría tolerancia, infinita perseverancia. Comprensión de la parte y comprensión del todo: sólo enseñados por la realidad podemos transformar la realidad”.
(La decisión, Bertold Brecht)

Introducción

Los análisis de los datos de esta investigación están organizados en cuatro bloques:

- I. *Análisis de las Respuestas Prototípicas;*
- II. *Análisis de Estudios de Casos (individuales y en grupo);*
- III. *Análisis de Correlaciones;*
- IV. *Análisis de un Proceso de Instrucción Estándar.*

Para el primer bloque, presentaremos el *análisis de las Respuestas Prototípicas* considerando toda la muestra (185 estudiantes), siguiendo las dos perspectivas aquí consideradas, con la observación de que los análisis están orientados por una versión más antigua del EOS, pero que todavía no compromete los resultados.

Para el segundo bloque, *análisis de Estudio de Casos*, presentaremos tres prácticas de RP a través de dos casos individuales y uno de grupo que serán analizados desde dos perspectivas, el EOS y la Metacognición. Resaltamos que, en la perspectiva del EOS, consideraremos para el análisis las recientes actualizaciones del modelo que estamos utilizando, donde “separa”, para efecto de refinar los análisis, los elementos dinámicos (acciones y argumentaciones) de la configuración epistémica.

En el tercer bloque presentaremos el *Estudio de Correlaciones* entre la variable PHM y las demás variables, CFC, CFM y EEP, para toda la muestra considerada en esta investigación, buscando en algunos momentos comparar nuestros resultados con los de otras investigaciones.

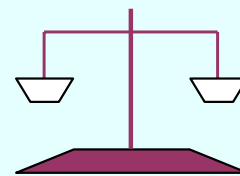
En el cuarto bloque, describimos y analizamos un *Proceso de Instrucción Estándar* donde profesor y alumnos están sumergidos en un proceso (contexto) de Resolución de Problemas, más específicamente, de un problema: “relaciones entre medidas, utilizando piezas del tangram de Fletcher”.

I BLOQUE

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS PROTOTÍPICAS

EL PROBLEMA DE LAS 3 BOLITAS

Tres bolitas son del mismo tamaño, color y forma; dos tienen el mismo “peso” y la otra es más “ligera”. Usando una balanza con dos platos y efectuando **una única pesada**, ¿cómo podemos encontrar la bolita más “ligera”?



Aquí, la idea esencial reside en que se puede establecer el “rango” (peso relativo), a través de una relación de orden entre 3 objetos, sin necesidad de contrastarlos todos entre sí.

Para este problema, diferenciaremos las siguientes “competencias”:

C1, de *razonamiento ingenuo*: incluir en los razonamientos los datos buscados. (“tomo la más ligera y...”)

C2, de *experimentación ingenua*: hacer cualquier cosa, sin sujetarse a las condiciones del problema ni a las características del contexto. (“tomo dos, luego otras dos,...”)

C3, de *experimentación selectiva de una elección*: experimentar en función del contexto del problema y de los instrumentos disponibles. (“elige dos y las compara para comprobar si se ha acertado”)

C4, de *explicitación de posibles alternativas resultantes de la experimentación*: (si pesan distinto, ya sé cual es, pero si no, tendría que pesar otra vez” o “¿qué puede, entonces, ocurrir?, ¿y qué en otro caso?”).

C5, de *deducción inquirida*: (“en ese caso, ¿qué sabría?”) (adjetivamos de esta forma, para diferenciarnos de la deducción “mecánica” usual en las aulas de matemáticas, como por ejemplo $3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6, \dots$).

C6S, de *supervisión*: examina lo hecho.

C7R, de *regulación*: si no obtiene éxito, emprende otro camino.

C8E, de *evaluación/revisión*: revisa lo hecho para verificar si ha cumplido las condiciones impuestas.

En la tabla que sigue, presentamos de manera agrupada las “categorías de respuestas” (A,B,C,...) que acompañan una explicación sucinta de las “tipologías de resoluciones” correspondientes a cada categoría, así como las respectivas “competencias” y “notas/puntuaciones” que les asignamos.

Tabla 3 - resumen de los constructos del Problema de las 3 bolitas

Cate- goría	Descriptores (tipologías de resolución)	Competencias	Nota
A	Dibujar la estrategia completa y, por lo tanto, experimentar imaginariamente el proceso que lleva a descubrirla.	C3, C4, C5 y C6S Tal vez C7R y C8E	9
B	Establecer la estrategia y deducir conclusiones parciales, omitiendo la inferencia de la 3ª bola en caso de coincidir en peso las dos bolas probadas.	C3, C4, C5 Talvez C7R y C8E	6
C	Evaluar cómo repercuten los distintos elementos (dos bolitas frente a una, valorando, a ojo, el grado de descompensación producido).	C2 y C6S y C8E (parcialmente)	5
D	Compara por parejas, necesitando varias pesadas (no se sujeta á las limitaciones).	C2	3
E	No se sujeta a las limitaciones ni se adecúa al instrumento: estimar los pesos con la mano, pesar una a una (con o sin unidad graduada).	C2	2
F	Propuestas que requieren conocer ya la respuesta.	C1	1

A continuación procederemos al análisis de este problema desde la perspectiva de los dos marcos contemplados.

PERSPECTIVA DEL EOS

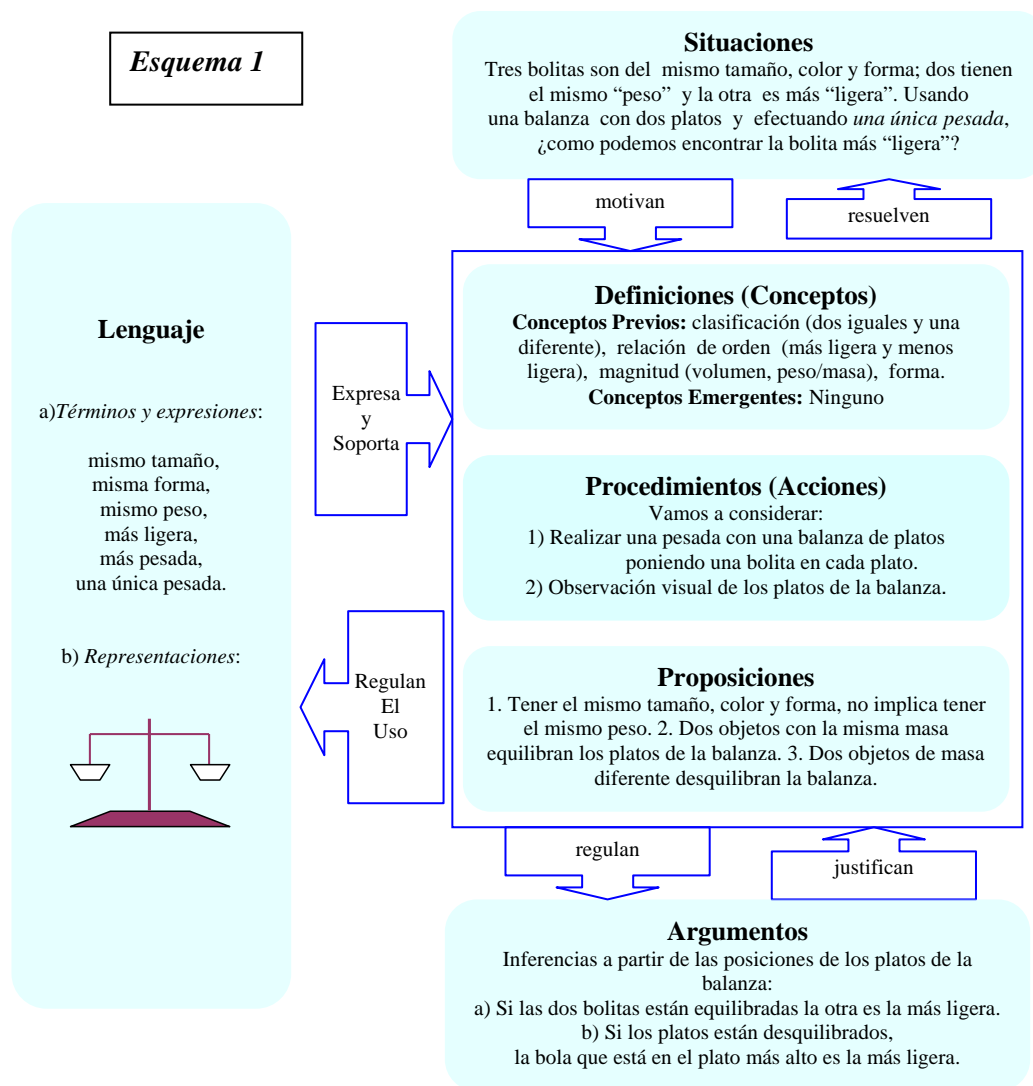
Solución Experta:

Se pone una bolita en cada uno de los platos de la balanza. Si los platos están equilibrados la otra es la más ligera. Si los platos están desequilibrados, la bola que está en el plato más

alto es la más ligera. Para ello ha tenido que: a) Realizar la lectura de la situación-problema; b) decidir realizar una pesada con dos bolitas cualesquiera; c) observar la posición de los platos; y d) argumentar en función de la posición de los dos platos. Finalmente, el experto tiene que decidir que la solución que ha hallado cumple las condiciones del enunciado del problema, y en caso contrario, tiene que revisar el proceso o bien iniciar un nuevo camino.

Configuración Epistémica (de referencia):

Para la realización de la práctica que permite resolver este problema, un resolutor experto pondría en funcionamiento la siguiente *configuración epistémica*, puesto que la tomaremos como *configuración de referencia* para analizar la adecuación de las *configuraciones cognitivas* de los estudiantes:



Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje: Los términos (mismo tamaño, misma forma, mismo peso, más y menos ligera, única pesada) se suponen ya conocidos por el resolutor. *Representaciones:* el dibujo de la balanza tiene la función de reforzar el texto para que el resolutor no desvíe la atención hacia el uso de otro instrumento de medición, como, por ejemplo, una balanza digital. En este caso, el instrumento (la balanza) que se presenta con palabras y figura en el enunciado determina la técnica de resolución del problema.

Acciones: La idea esencial, en este problema, reside en que se puede establecer el “rango” (peso relativo), a través de una relación de orden entre 3 objetos sin necesidad de contrastarlos todos entre sí. En el sentido institucional se supone que las acciones por realizar después de la lectura del problema son dos: a) Realizar una pesada con la balanza de platos poniendo una bolita cualquiera en cada plato y b) Observación visual de los platos de la balanza. De esta manera se cumple la exigencia de que la tarea se efectúe con una única pesada.

Conceptos: Los conceptos se suponen también conocidos por el resolutor. Estos son: “clasificación” (dos iguales y una diferente), “relación de orden” (más ligera y menos ligera), “magnitud” (volumen, peso/masa), “forma”.

Proposiciones y propiedades: había una primera propiedad (se afirma en el enunciado) que el resolutor debe tener en cuenta: “tener el mismo tamaño, color y forma, no implica tener el mismo peso”. También ha de tener en cuenta, que dos objetos con la misma masa equilibran los platos de la balanza y que dos objetos de masa diferente desequilibran la balanza.

Argumentaciones: Se tienen que realizar inferencias a partir de las posiciones de los platos de la balanza. Éstas son: a) Si las dos bolitas están equilibradas, la otra es la más ligera; b) Si los platos están desequilibrados, la bola que está en el plato más alto es la más ligera.

PERSPECTIVA DE LA METACOGNICIÓN

Configuración Metacognitiva Hipotética de Referencia

Para la realización de la práctica que permite resolver este problema, un resolutor experto pondría en funcionamiento la configuración epistémica anterior, pero para ello tiene que tomar unas decisiones de gestión (coordinación, supervisión/control, regulación y revisión/evaluación), que se producen de manera rápida, simultánea y semi-automática dada la simplicidad de la tarea para el experto. De modo que, para discriminar los niveles de competencia metacognitiva de los alumnos, diseñamos la siguiente configuración metacognitiva hipotética de referencia¹:

Tabla 4 – configuración metacognitiva hipotética

<p>Gestiones primarias (metacognición primaria)</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>Realiza una lectura comprensiva</i> de la situación-problema <i>dándose cuenta</i> de las exigencias y condiciones de la tarea para ajustarse a ella.2) <i>Observa cuidadosamente</i> la posición de los platos, con una <i>conciencia automática</i> de toda la situación3) <i>Argumenta</i> en función de la posición de los dos platos con una <i>conciencia automática</i> (o <i>deliberada</i>, cuando necesaria).
<p>Gestiones secundarias (metacognición secundaria)</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>De supervisión</i>: “¿consigo los objetivos cumpliendo las condiciones impuestas?”.2) <i>De regulación</i>: “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, corrijo alguna cosa o emprendo otro camino”.3) <i>De evaluación/revisión</i>: revisar lo hecho para verificar que se han cumplido las condiciones impuestas.

Gestiones primarias (metacognición primaria)

Teniendo en cuenta que los elementos de la configuración epistémica anterior son supuestamente familiares al resolutor experto, podemos, de un modo general, decir que tal familiaridad se extiende a los elementos de la configuración metacognitiva. O sea:

¹ La simplicidad del problema, para el nivel de enseñanza en que fue aplicado, no exige más que los dos niveles de metacognición enunciados (incluso, en algunos casos, podría reducirse sólo al primer nivel).

1) Una *lectura comprensiva de la situación-problema*, por un resolutor experto, normalmente ocurre con fluidez y sin atropellos y los significados pertinentes son construidos (quizá mejor, evocados) rápido y automáticamente (conciencia automática) mientras la lectura es realizada. No ocurriendo con fluidez dicha lectura, el resolutor pondrá más atención en ella (un cambio de lectura por algo nuevo y que da lugar a una relectura, podrá indicar una conciencia deliberada). Consecuentemente, la fluidez y conciencia de todos los aspectos que se han de tener en cuenta durante la situación “lectura del problema” son un pre-requisito fundamental para el desarrollo de acciones a posteriori. Así que, después de la lectura de la situación, la *decisión deliberada de realizar una pesada con dos bolitas cualesquiera* es consecuencia de una conciencia automática: el “*darse cuenta*” a partir de las exigencias y condiciones impuestas por la tarea para coordinar y decidir la gestión que supuestamente le llevará a la solución. Este paso desencadenará automáticamente en el paso siguiente:

2) *Observar cuidadosamente y de forma consciente y automática la posición de los platos*. También esta acción/gestión supuestamente ocurrirá de forma automática. O sea, tendrá supuestamente una conciencia automática, cuando son evocadas y aplicadas las propiedades pertinentes a la situación. De la observación sigue el próximo paso:

3) *Argumentar en función de la posición de los dos platos*. Se supone que las argumentaciones también sean automáticas, que las gestiones de supervisar y de regular ocurran automáticamente, ya que supuestamente, además, durante todo el proceso de resolución no hubo complicaciones, todo ha ocurrido con fluidez y sin atropellos, y las argumentaciones vienen a confirmar la expectativa y la decisión acertada de una estrategia óptima hacia el logro de la meta pretendida. De lo contrario, o sea, del no cumplimiento de las expectativas o de las condiciones impuestas, el abandono (o cambio) de las gestiones de conciencia automática dará lugar a gestiones de conciencia deliberada, de una supervisión y una regulación deliberada.

Gestiones secundarias (metacognición secundaria)

La presencia de los niveles de gestión de supervisión y evaluación en el conjunto de las acciones/gestiones anteriores debe supuestamente ser manifestada de forma automática por

parte del resolutor experto, suponiendo la familiaridad con la situación (tarea). Una regulación (por ejemplo, un cambio o modificación) en las estrategias de resolución del problema, conforme a lo dicho, dará lugar a gestiones declaradas. Además,

1) En el *Nivel de supervisión* se supone que el resolutor implícitamente haga cuestionamientos del tipo “¿consigo los objetivos cumpliendo las condiciones impuestas?” con el objetivo (o como evidencia) de que se está supervisando/controlando sus actuaciones. Tal supervisión le conduce (y garantiza) un mayor rendimiento.

2) En el *Nivel de regulación* con el cuestionamiento implícito “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, corrijo alguna cosa o emprendo otro camino” se supone por parte del resolutor un cierto grado de conciencia declarada.

3) en el *Nivel de evaluación/revisión* se espera que la evaluación ocurra automáticamente en cada paso verificando que los planteamientos están bien. La evaluación juntamente con la supervisión abren paso a la regulación.

TIPOLOGÍA DE CONFIGURACIONES COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS DE LOS ALUMNOS

En la tabla que sigue podemos encontrar las “categorías de respuestas”, explicitadas inicialmente para este problema, seguidas de un ejemplo prototípico de respuesta de nuestros alumnos que corresponde a cada categoría, así como las correspondientes “configuraciones prototípicas de orden cognitivo y metacognitivo”.

Categoría de Acciones	Ejemplos Prototípicos	Configuraciones Cognitivas prototípicas	Configuraciones Metacognitivas prototípicas
A	<i>En un plato se ponen dos bolitas y en el otro una. En el plato que hay dos bolitas se quita una. Si los platos quedan igualados la que cogí es la ligera y si un plato queda arriba y otro abajo, la de arriba es la ligera. Estudiante (N177)</i>	En esta categoría, los ejemplos de las configuraciones cognitivas de los alumnos se aproximan o coinciden con la de referencia institucional	En esta categoría, los ejemplos de las configuraciones metacognitivas de los alumnos se aproximan o coinciden con la de referencia institucional

Categoría de Acciones	Ejemplos Prototípicos	Configuraciones Cognitivas Prototípicas	Configuraciones Metacognitivas prototípicas
B	<p><i>Pues, poniendo cada bola en cada plato de la balanza, y si se mantiene la balanza nivelada, pesan lo mismo, y si no está nivelada es porque una pesa más y la otra menos. Estudiante (N27)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje: terminología y notaciones:</i> coincide con la de referencia; <i>Representaciones:</i> no hay, además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones:</i> coinciden con las de referencia. 3) <i>Conceptos previos:</i> además de los de referencia explícita se presenta: clasificación (igualdad o diferencia de masa); <i>Conceptos emergentes:</i> ninguno. 4) <i>Proposiciones y propiedades:</i> coinciden con las de referencia; 5) <i>Argumentaciones:</i> Normalmente se realiza solamente una inferencia omitiendo el análisis de la 3ª bola.</p>	<p>(<i>metacognición primaria</i>): 1) Lectura parcialmente comprensiva; 2) Observación con conciencia parcial de la situación; 3) Argumentación deliberada. (<i>metacognición secundaria</i>): un cierto nivel de supervisión</p>
C	<p><i>Poniendo 2 y 1 cualesquiera y mirando la diferencia de cuánto baja y cuanto sube la otra. Si baja mucho más de lo que sube es que están las 2 bolas más pesadas juntas y viceversa. Estudiante (N31)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje:</i> a) <i>Términos y expresiones:</i> diferencia entre masas, nivel de subida y bajada b) <i>Representaciones:</i> no hay además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones:</i> Realiza una pesada poniendo dos bolitas frente a una; Observación visual de los platos de la balanza. 3) <i>Conceptos: Previos:</i> coinciden con los de referencia; <i>Conceptos Emergentes:</i> gravedad (nivel de subida y bajada de los platos). 4) <i>Proposiciones y propiedades:</i> No utiliza la propiedad 2 de referencia. 5) <i>Argumentaciones:</i> Hace inferencias a partir del grado de descompensación de la balanza.</p>	<p>(<i>metacognición primaria</i>): 1) Lectura parcialmente comprensiva. 2) Evalúa a ojo, el grado de descompensación. 3) Argumenta deliberada e intuitivamente. (<i>metacognición secundaria</i>): un cierto nivel de supervisión</p>
D	<p><i>Poniendo las bolas en la balanza e ir cambiando las bolas de la balanza para así encontrar la más ligera. Estudiante (N35)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje:</i> a) <i>Términos y expresiones:</i> cambio de bolas, comparación de masas, varias pesadas; b) <i>Representaciones:</i> no hay además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones:</i> Colocación alternativa de parejas de bolas en los platos. Cambio de bolas. Observación visual de los platos de la balanza. 3) <i>Conceptos Previos:</i> coinciden con los de referencia; <i>Conceptos Emergentes:</i> ninguno. 4) <i>Proposiciones y propiedades:</i> contempla la 1, la 2 (implícitamente) y la 3. 5) <i>Argumentaciones:</i> en función de la necesidad de realizar más de una pesada.</p>	<p>(<i>metacognición primaria</i>): 1) Lectura carente de comprensión. 2) Valorar el peso de cada una tras una triple pesada. 3) Argumentar a partir de varias pesadas. (<i>metacognición secundaria</i>): Ausente</p>

Categoría de Acciones	Ejemplos Prototípicos	Configuraciones Cognitivas prototípicas	Configuraciones Metacognitivas – prototípicas
E	<p><i>Pues cuando las coges para ponerlas en la balanza tienes que notar el peso, por eso adivinas cual es la que pesa menos. Estudiante (N181)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje</i>: a) <i>Términos y expresiones</i>: distingue objetos con el tacto, varias pesadas; b) <i>Representaciones</i>: no hay además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones</i>: Sentir el peso con las manos. 3) <i>Conceptos</i>: <i>Previos</i>: coinciden con los de referencia; <i>Conceptos Emergentes</i>: sensación táctil para valorar masas con precisión, adivinanza. 4) <i>Proposiciones y propiedades</i>: contempla la 1 y se presenta que “dos objetos o grupos de objetos de masa iguales o diferentes se pueden detectar mediante sensación táctil”. 5) <i>Argumentaciones</i>: hace inferencias por pura sensación táctil.</p>	<p>(<i>metacognición primaria</i>):</p> <p>1) Lectura carente de comprensión. 2) Valora el peso. 3) Argumenta en función de la decisión de descubrir la bola ligera con la mano (<i>metacognición secundaria</i>): Ausentes</p>
F	<p><i>La bolita más ligera es la que pesa menos que las otras. estudiante (N28)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje</i>: a) <i>Términos y expresiones</i>: mismo tamaño, misma forma, mismo peso, más ligera, más pesada; b) <i>Representaciones</i>: no hay además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones</i>: ninguna. 3) <i>Conceptos</i>: <i>Previos</i>: relación de orden (más ligera y menos ligera), magnitud (peso/masa), forma; <i>Conceptos Emergentes</i>: ninguno. 4) <i>Proposiciones y propiedades</i>: Solo hay una proposición trivial o redundante (ser más ligero es pesar menos). 5) <i>Argumentaciones</i>: Ninguna.</p>	<p>Las configuraciones metacognitivas se muestran ausentes.</p>
G	<p>1) <i>Porque están hechas de distinto material</i> 2) <i>Porque la balanza estaba mal nivelada</i> <i>Estudiante (N100)</i></p>	<p>1) <i>Lenguaje</i>: a) <i>Términos y expresiones</i>: mismo tamaño, misma forma, distinto material, b) <i>Representaciones</i>: no hay además de la que ofrecemos en el enunciado. 2) <i>Acciones</i>: ninguna. 3) <i>Conceptos</i>: <i>Previos</i>: clasificación (existencia de distintos materiales); <i>Conceptos Emergentes</i>: ninguno. 4) <i>Proposiciones y propiedades</i>: ninguno. 5) <i>Argumentaciones</i>: se realizan afirmaciones evasivas.</p>	<p>Las configuraciones metacognitivas se muestran ausentes.</p>

A continuación, organizamos en una tabla las frecuencias de las respuestas obtenidas en cada categoría:

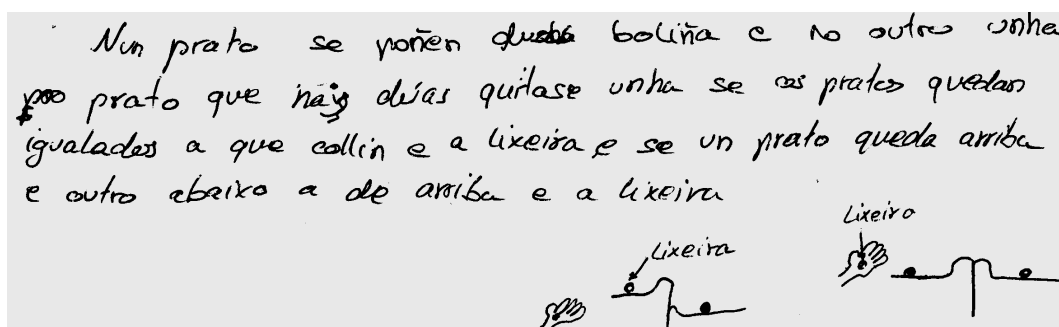
LAS 3 BOLITAS

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	A	68	36,8
	B	19	10,3
	C	11	5,9
	D	20	10,8
	E	35	18,9
	F	10	5,4
	Cajón	22	11,9
	Total	185	100,0

Categoría A:

Las respuestas prototípicas en esta categoría, tanto en lo que dice respecto a las configuraciones cognitivas como metacognitivas, coinciden en su mayoría, o se aproximan, a las configuraciones de referencia.

Según nuestros criterios de competencia, inicialmente mencionados, y conforme a la tabla anterior, tal hecho podemos observarlo en cerca del 37% de los resolutores que contestaron a la pregunta. Una respuesta ilustrativa de esa categoría es dada por el estudiante (N177):



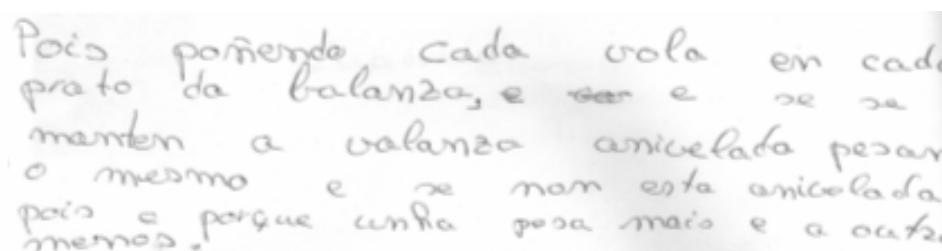
En un plato se ponen dos bolitas y en el otro una. En el plato que hay dos bolitas se quita una. Si los platos quedan igualados, la que cogí es la ligera y si un plato queda arriba y otro abajo, la de arriba es la ligera. Estudiante (N177)

Como observamos, el resolutor -experimentando imaginariamente el proceso- descubre y dibuja la estrategia completa (se aproxima a la de referencia). Se podría evitar el “gasto de energía” al poner las 2 bolitas en uno de los platos para después

quitarla. Interpretamos que la manipulación de sólo dos de las bolas es indicativa de un nivel de abstracción superior, y esto nos hace deducir que, desde el punto de vista de las configuraciones metacognitivas, el estar en la categoría A supone que el resolutor haya tomado y controlado una serie de decisiones de gestión (coordinación, supervisión, revisión, regulación y evaluación) para la realización de un juego óptimo (en el sentido institucional). O sea, que las tipologías de respuesta para esta categoría también vienen a coincidir o se aproximan a la de referencia.

Categoría B:

El 10% de los resolutores que se incluyen en esta categoría presentan las siguientes configuraciones:



Pois poniendo cada bola en cada plato da balanza, e se se se mantém a balanza nivelada pesam o mesmo e se non esta nivelada pois e porque unha pesa mais e a outra menos.

Pues poniendo cada bola en cada plato de la balanza, y si se mantiene la balanza nivelada, pesan lo mismo, y si no está nivelada es porque una pesa más y la otra menos. Alumno N27

Lenguaje (terminología y notaciones): mismo tamaño, misma forma, mismo peso, más ligera, más pesada y única pesada; *Representaciones:* no explicita externamente una representación gráfica de sus acciones.

Acciones: Realiza una pesada con la balanza poniendo una bolita en cada plato. Observación visual de los platos de la balanza. Valora el equilibrio o desequilibrio de la balanza.

Conceptos previos: clasificación (igualdad o diferencia de masa), relación de orden (más ligera y menos ligera), magnitud (volumen, peso/masa), forma. *Conceptos emergentes:* ninguno.

Proposiciones y propiedades: tener el mismo tamaño, color y forma, no implica tener el mismo peso. Observar que dos objetos con la misma masa equilibran los platos de la balanza y que dos objetos de masa diferente desequilibran la balanza.

Argumentaciones: Realiza solamente una inferencia: si la balanza está en equilibrio las dos bolas pesan lo mismo, de lo contrario una es más ligera que la otra. Se omite el análisis de la 3ª bola.

Las configuraciones metacognitivas se muestran como:

Primaria:

1) Realiza una *lectura parcialmente comprensiva de la situación-problema*: el resolutor no parece haber interpretado el texto en su totalidad ya que esto en su argumentación omite, se olvida de la pregunta clave o considera que ya ha resuelto completamente el problema. Parece que durante la lectura el resolutor se ha fijado en el aspecto de verificar, usando una balanza, cuándo dos masas son iguales o diferentes, en función del equilibrio o desequilibrio de la balanza, y no en descubrir cuál de las tres bolas es la más ligera. Como señalamos anteriormente, la fluidez y conciencia de todos los aspectos que han de tenerse en cuenta durante la situación “lectura del problema” es un pre-requisito fundamental para el desarrollo de acciones a posteriori. De modo que la *decisión de realizar una pesada con dos bolitas cualesquiera* le permite identificar si ambas bolas pesan lo mismo o una es más ligera que la otra. Es una decisión que parece ser tomada de forma consciente y automática, pero se muestra limitada por omitir, deliberadamente o no, el análisis de los resultados.

2) *Observación de la posición de los platos con una conciencia parcial de la situación* al valorar el equilibrio de la balanza. Consecuencia de los pasos anteriores, la observación, a pesar de tener en cuenta de forma automática las propiedades pertinentes, se da de forma parcial, cuando solamente observa y valora la masa de las bolitas que colocó en la balanza.

3) *Argumenta automática o deliberadamente en función del equilibrio o desequilibrio de la balanza*. Argumentación que se ve condicionada por la interpretación que el resolutor hace a partir de la lectura del problema y de las decisiones que toma, que únicamente se refiere a

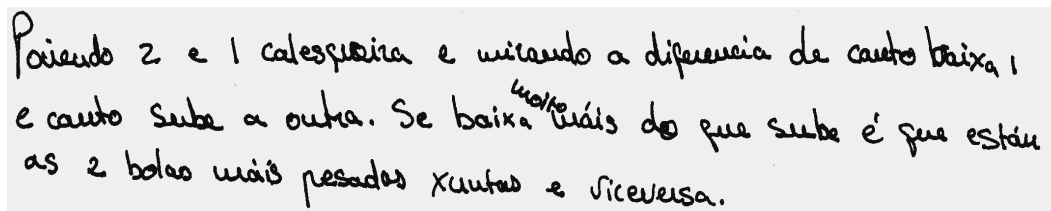
“pesar igual o diferente”. Omite argumentar lo que ocurre con la bola que ha dejado fuera de los platos de la balanza porque posiblemente considere innecesario explicitarlo.

Secundaria:

Inferimos que hay un cierto *nivel de supervisión* al valorar el desequilibrio de la balanza y su significado sobre el peso de las bolas. Sin embargo, un mayor nivel de supervisión (o una supervisión declarada) le permitiría detectar que no ha alcanzado los objetivos previsto en la tarea: localizar la bola más ligera. Este déficit le impide tomar decisiones en cuanto a la regulación de sus gestiones.

Categoría C:

Aunque las respuestas incluídas en la categoría C (6%) no resulten porcentualmente elevadas, nos parece oportuno ilustrar las configuraciones cognitiva y metacognitiva prototípicas basadas en el grado de descompensación que se produce en la balanza, colocando dos bolas frente a una.



Poniendo 2 e 1 cualesquiera e mirando a diferencia de cuanto baixa, e cuanto sube a outra. Se baixa ^{mucho} máis do que sube é que están as 2 bolas máis pesadas xuntas e viceversa.

Poniendo 2 y 1 cualesquiera y mirando la diferencia de cuánto baja y cuánto sube la otra. Si baja mucho más de lo que sube es que están las 2 bolas más pesadas juntas y viceversa. Estudiante (N31)

Siguiendo la referencia que estamos utilizando para las configuraciones cognitivas tenemos:

Lenguaje (terminología y notaciones): diferencia entre masas, nivel de subida y bajada, una única pesada; b) *Representaciones:* no explicita externamente una representación gráfica de sus acciones.

Acciones: Realizar una pesada en una balanza de platos poniendo dos bolitas frente a una. Observación visual de los platos de la balanza. Estratégicamente, parece sentir la necesidad de colocar todas las bolas en la balanza.

Conceptos Previos: coinciden con los de referencia; *Conceptos Emergentes:* gravedad (nivel de subida y bajada de los platos).

Proposiciones y propiedades: Tener el mismo tamaño, color y forma no implica tener el mismo peso (propiedad que utiliza al valorar que bajan más rápido las dos más pesadas cuando están juntas que si estuvieran juntas una pesada y otra ligera). Dos objetos o grupos de objetos de masa diferente desequilibran la balanza. El resolutor no utiliza la propiedad de que dos objetos con la misma masa equilibran los platos de la balanza (con dos bolas en un plato, la balanza siempre estará en desequilibrio).

Argumentaciones: Hace inferencias a partir del grado de descompensación de los platos de la balanza: “Si baja mucho más de lo que sube es que están las 2 bolas más pesadas juntas y viceversa”. El resolutor utiliza de forma confusa el vocablo “viceversa” ya que no especifica si lo utiliza como sinónimo de “contrario”, o simplemente hace referencia a que si dos objetos de masa diferentes están juntos en un mismo plato, la balanza se desequilibra más lentamente.

Sus configuraciones metacognitivas se muestran como:

Primaria:

1) *Lectura parcialmente comprensiva de la situación problema:* durante esta fase el resolutor parece tener en cuenta las condiciones que se especifican en el enunciado de la tarea, así como lo que se demanda. Pero su comprensión no es suficiente para llevarlo a tomar una decisión más acertada. La decisión que adopta no permite localizar la respuesta requerida y lo obliga a implicar una nueva magnitud en el estudio del problema, el nivel de subida o bajada de los platos de la balanza, en función de que estén juntas o no las dos bolas más pesadas en el mismo plato.

2) *Evalúa a ojo, el grado de descompensación*: Consecuencia de la decisión anterior, esta evaluación (a pesar de ser consciente) no le permite identificar si la bola que está sola en uno de los platos es la más ligera o no, ni tampoco cuál será de las dos que están juntas.

3) *Argumenta deliberada e intuitivamente en función del grado de descompensación*: esta argumentación es consecuencia de la decisión tomada de colocar dos bolas frente a una y proceder de forma intuitiva.

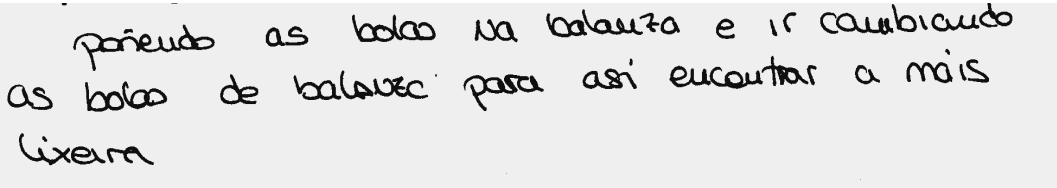
Secundaria:

Al valorar el grado de descompensación producido, el resolutor presenta, en ese momento, un cierto nivel de supervisión, aunque basado exclusivamente en una percepción, “dicho por encima”, no eficaz de la magnitud “nivel”.

A pesar de este nivel de supervisión, observamos, en esta categoría, que el resolutor no regula su gestión, ya que, si bien tiene en cuenta la condición impuesta de usar una sola pesada, sólo puede intuir (¡difícilmente!) cuál es la bola más ligera, si las dos bolas más pesadas están juntas, pero no puede sacar ninguna conclusión del caso “viceversa”. Esta forma de argumentar le impide vislumbrar otro camino para obtener la solución óptima del problema. También podríamos suponer que durante la supervisión detectó que su intención no fue satisfecha y desistió de la búsqueda de otro camino.

Categoría D:

El 11% de los resolutores, los englobados en esta categoría, no se sujeta a las limitaciones impuestas por la tarea: *una única pesada*. La comparación de las tres bolas admite distintas maneras de proceder: por parejas, sin respetar las condiciones impuestas; las tres de una vez (dos frente a una); una a una. Las configuraciones cognitivas prototípicas que encajan en esta categoría se revelan limitadas. Veamos:



poniendo as bolas na balanza e ir cambiando
as bolas de balanza para asi encontrar a mais
lixeira

Poniendo las bolas en la balanza e ir cambiando las bolas de la balanza para así encontrar la más ligera. Estudiante (N35)

Lenguaje (terminología y notaciones): cambio de bolas, comparación de masas, varias pesadas; b) *Representaciones:* no explícita externamente una representación gráfica de sus acciones.

Acciones: Colocación alternativa de parejas de bolas en los platos. Cambio de bolas. Observación visual de los platos de la balanza.

Conceptos Previos: coinciden con los de referencia; *Conceptos Emergentes:* ninguno.

Proposiciones y propiedades: Tener el mismo tamaño, color y forma, no implica tener el mismo peso. *Proposiciones y propiedades implícitas:* Dos objetos con la misma masa equilibran los platos de la balanza. Dos objetos de masa diferente desequilibran la balanza.

Argumentaciones: de sus argumentos se deduce que considera necesario realizar más de una pesada para comparar pares de bolas hasta localizar la más ligera, no respetando así las condiciones del problema.

Las configuraciones metacognitivas son limitadas y se muestran como:

Primaria:

1) *Lectura carente de comprensión de la situación problema:* Durante esta fase, el resolutor no consigue adquirir una conciencia total de las demandas de la tarea; se ve reflejado en su decisión de realizar varias pesadas colocando alternativamente parejas de bolas en la balanza. Al no tener conciencia de la condición clave del problema, la estrategia de colocar alternativamente las bolas, le lleva a realizar varias pesadas para lograr el objetivo de encontrar la bola más ligera.

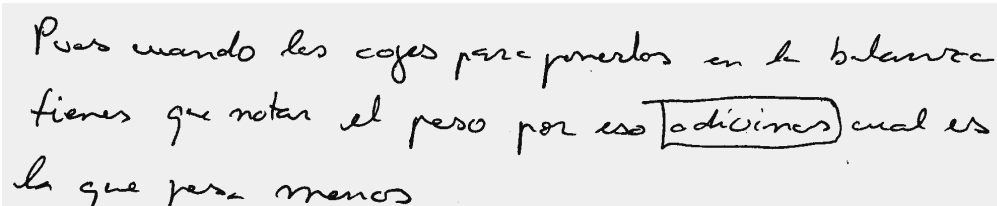
2) *Argumentar en función del número de pesadas:* Las expresiones que usa para argumentar cómo localizar la bola más ligera, no aclaran las acciones que debe realizar usando la balanza y observando la posición de los platos para decidir el equilibrio o desequilibrio de la misma. Por otra parte, sus argumentos muestran claramente que necesita más de una pesada para realizar la tarea.

Secundaria:

Ausentes, ya que al tener conciencia de lograr el objetivo de localizar la bola más ligera, no llega a plantearse (con una supervisión o regulación) si cumple algunas de las condiciones impuestas por la tarea.

Categoría E:

Lo mismo que en la categoría D ocurre en la categoría E. Los resolutores, aquí en número más significativo: el 19%, tampoco se sujetan a las condiciones de la tarea. Además, presentan propuestas que no se adecúan al instrumento, sustituyendo la balanza por la mano. Las estrategias se revelan limitadas. Veamos un ejemplo de respuesta:



Pues cuando las coges para ponerlas en la balanza tienes que notar el peso por eso [adivinas] cual es la que pesa menos

Pues cuando las coges para ponerlas en la balanza, tienes que notar el peso, por eso adivinas cual es la que pesa menos. Estudiante (N181)

Lenguaje (terminología y notaciones): por el tacto se distinguen objetos con la misma o distinta masa, varias pesadas; b) *Representaciones:* no explicita externamente una representación gráfica de sus acciones.

Acciones: Sentir el peso al coger las bolas con la mano (sensación táctil de masa).

Conceptos Previos: coinciden con los de referencia; *Conceptos Emergentes:* sensación táctil para valorar masas con precisión, adivinanza.

Proposiciones y propiedades: Tener el mismo tamaño, color y forma, no implica tener el mismo peso. Dos objetos o grupos de objetos de masas iguales o diferentes, se pueden detectar mediante el tacto.

Argumentaciones: No respeta las condiciones del problema al estimar innecesario usar la balanza. Cree que puede conseguir hacer inferencias por pura sensación táctil, incluso en casos de objetos con masas muy similares, pero no respeta la condición de una sola pesada. Al mismo tiempo, utiliza el vocablo “adivinanza” queriendo referirse a algo obvio.

Las configuraciones metacognitivas también son limitadas:

Primaria:

1) *Lectura* carente de comprensión *de la situación-problema*: puede que durante el proceso de lectura el resolutor haya considerado como superfluos la condición y contexto de la tarea, en particular tener que usar una balanza para comparar masas de objetos, dado que tal comparación se juzga capaz de hacerla con la mano.

2) *Valora el peso con la mano antes de poner las bolitas en la balanza*: Tal procedimiento alternativo le permite, a su juicio, establecer la igualdad o desigualdad de masas. No obstante, parece aceptar de alguna forma que el uso de la balanza debe confirmarle lo que él ya ha “adivinado” previamente: cuál de las bolas pesa más o menos.

3) *Argumentar en función de la decisión de descubrir la bola más ligera con la mano*: no precisa (o no tiene en cuenta) cuantas “pesadas” necesita para localizar la bola más ligera, por lo que podemos pensar que su argumento es consecuente con su decisión de reconvertir la tarea propuesta, en la tarea que a él personalmente le gustaría resolver, o sobreestimando sus competencias para resolver este tipo de tarea.

Secundaria:

El reconocimiento de sus capacidades para resolver el problema, le conduce a no considerar ningún tipo de supervisión ni regulación, que probablemente hubiera puesto de manifiesto en el caso de haber aceptado las demandas de la tarea.

Categoría F:

El 5% de los resolutores, comprendidos en la categoría F, elaboran propuestas que requieren conocer ya la solución, como si éstas fuesen suficientes, incluyen en sus

configuraciones cognitivas los datos buscados o incluso intentan esquivar enfrentarse al problema. A nuestro juicio, son respuestas que representan un tipo de razonamiento ingenuo, redundante.



La bolita más ligera, es la que pesa menos que las otras. Estudiante (N28)

Lenguaje (terminología y notaciones): mismo tamaño, misma forma, mismo peso, más ligera, más pesada; b) *Representaciones:* no explicita externamente una representación gráfica de sus acciones.

Acciones: ninguna.

Conceptos Previos: relación de orden (más ligera y menos ligera), magnitud (peso/masa), forma; *Conceptos Emergentes:* ninguno.

Proposiciones y propiedades: Solo hay una proposición trivial o redundante (ser más ligero es pesar menos).

Argumentaciones: Al subestimar o evadir la tarea los resolutores, en esta categoría, no aportan justificación, como en este caso, de la proposición que enuncian.

Las configuraciones metacognitivas se muestran ausentes. El resolutor en esta categoría hace propuestas que requieren conocer la respuesta de antemano.

Categoría “Cajón de Sastre”:

El llamado “Cajón de Sastre” que observamos en la tabla de frecuencia, es una categoría que, conforme mencionamos en la parte de la metodología, esta destinada a aquellas respuestas cuyos razonamientos o no comprendíamos o no nos sentíamos capaces de

analizar, o, mismo, que decidimos no analizar. Como ejemplo de respuesta de esta categoría ilustramos:

1) Porque están hechas de distinto material.
2) Porque la balanza estaba mal nivelada

- 1) Porque están hechas de distinto material.
- 2) Porque la balanza estaba mal nivelada. Estudiante (N100)

Este tipo de respuesta muestra cómo el resolutor evade la tarea distrayéndose en elementos circunstanciales y aportando argumentos evasivos para no implicarse en la resolución. O sea, sus reflexiones se basan en información, incluso imaginada, no relevante.

Para esta particular resolución, el resolutor hace afirmaciones evasivas que, o bien no tienen nada que ver con la tarea, o bien contradicen la información dada en el problema, a pesar de, la primera de ellas, poseer una cierta lógica y, como consecuencia, originar para el resolutor la proposición: “dos objetos de mismo tamaño, color y forma con pesos diferentes han de estar hechos de distinto material”. Las configuraciones metacognitivas se muestran ausentes y, en este caso, el resolutor apenas habla de cómo son las bolas, la balanza,...

A continuación, sigue otra elaboración para este problema, situándolo en un contexto más genérico.

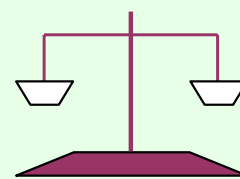
PROBLEMA DE LAS 9 BOLITAS

Fíjate cómo pensó Rocío la forma de averiguar cuál era la bolita más “ligera”, efectuando una única pesada:

Cogió dos cualesquiera de las bolitas y puso una en cada plato:

- a) Si una pesaba menos, esa sería la más ligera;
- b) Si pesaban lo mismo, la que quedó sin pesar sería la más ligera.

Ahora tienes **nueve** bolitas semejantes, también una de ellas más ligera que las otras. ¿Cómo podrías descubrir cuál es, en **dos pesadas**?



El comentario que hacemos ahora, después de la reformulación del problema, es que pretendemos observar una estrategia general de exploración frente a una situación nueva: relacionarla con otras ya conocidas (en un mismo contexto); y si la forma de relacionar permite o no situarse en la misma tesitura anterior, lo que garantizaría, entonces, el éxito en la tarea.

Para este problema valen los mismos constructos utilizados en el problema anterior. Sin embargo, en la categoría A se espera un nivel de examen, dominio o control de las acciones todavía más alto y más reflexivo que el anterior y, por tanto, la aparición de una *reflexión* metacognitiva que permita usar las estrategias cognitivas pertinentes para reducir (agrupar) el caso de 9 bolas al caso de 3 cuya solución se explicita. Se trata de una estrategia generalizable, según las potencias sucesivas de 3, en donde el número de pesadas (n) necesario para discriminar la bola más ligera, es constante para cualquiera cantidad de bolas, comprendida en el intervalo: $[3^{n-1} + 1, 3^n]$ (para cualquier $n \geq 1$). Las estrategias esbozadas en la categoría A tendrían este modelo como referente institucional.

Esto nos conduce a considerar nuevas competencias, que indicarán la toma de conciencia de la relevancia de la información explícita que se ofrece en el problema (proceso de resolución de un problema más simple, que se presenta análogo al propuesto):

C9A: Aplicación de la *analogía* haciendo un uso parcial de la estructura, que no permite reducir el nuevo problema al ya conocido.

C10G: Aplicación de *estrategias de generalización-particularización*, que requieren percibir la estructura común subyacente para reducir el nuevo problema al anterior.

En la tabla que sigue, presentamos de manera agrupada las categorías de respuestas (A,B,C,...) que acompañan una explicación sucinta de las tipologías de resoluciones correspondientes a cada categoría, así como las respectivas competencias y “notas/puntuaciones” que les asignamos.

Tabla 5 - resumen de los constructos del “problema de las 9 bolitas”

Categoría	Descriptorios (tipologías de resolución)	Competências	Nota
A	Establece la estrategia completa: hace agrupamientos de 3 y selecciona un grupo,	C9A, C10G y C6S, C3, C4, C5,	9

	pasando a la situación anterior.	Tal vez C7R y C8E	
B	Adaptación algorítmica de la solución al problema anterior que se ofrece, con intervención de todas las bolas y con agrupamientos que no corresponden a una distribución uniforme de las mismas.	C9A y C6S, C3, C5, Talvez C7R y C8E	6
C	Adaptación algorítmica de la solución anterior centrada en a), con agrupamientos que no corresponden a una distribución uniforme de las mismas, y con la omisión del estudio del tercer grupo de bolas.	C9A, C6S, C3	5
D	Comprobatoria de una elección (exenta de una estrategia previa, al azar): descarta una o varias y somete las otras a comparación.	C3, C6S	3
E	Estrategia primaria comparando todas por bloques: comparan 5 frente a 4 y valoran el grado de desequilibrio.	C2, C6S	3
F	No se sujeta a las limitaciones ni se adecúa al instrumento: estimar los pesos con la mano; pesar una a una (con o sin unidad graduada).	C2	1
G	Propuestas que requieren conocer a priori la solución.	C1	1

PERSPECTIVA DEL EOS

Solución Experta:

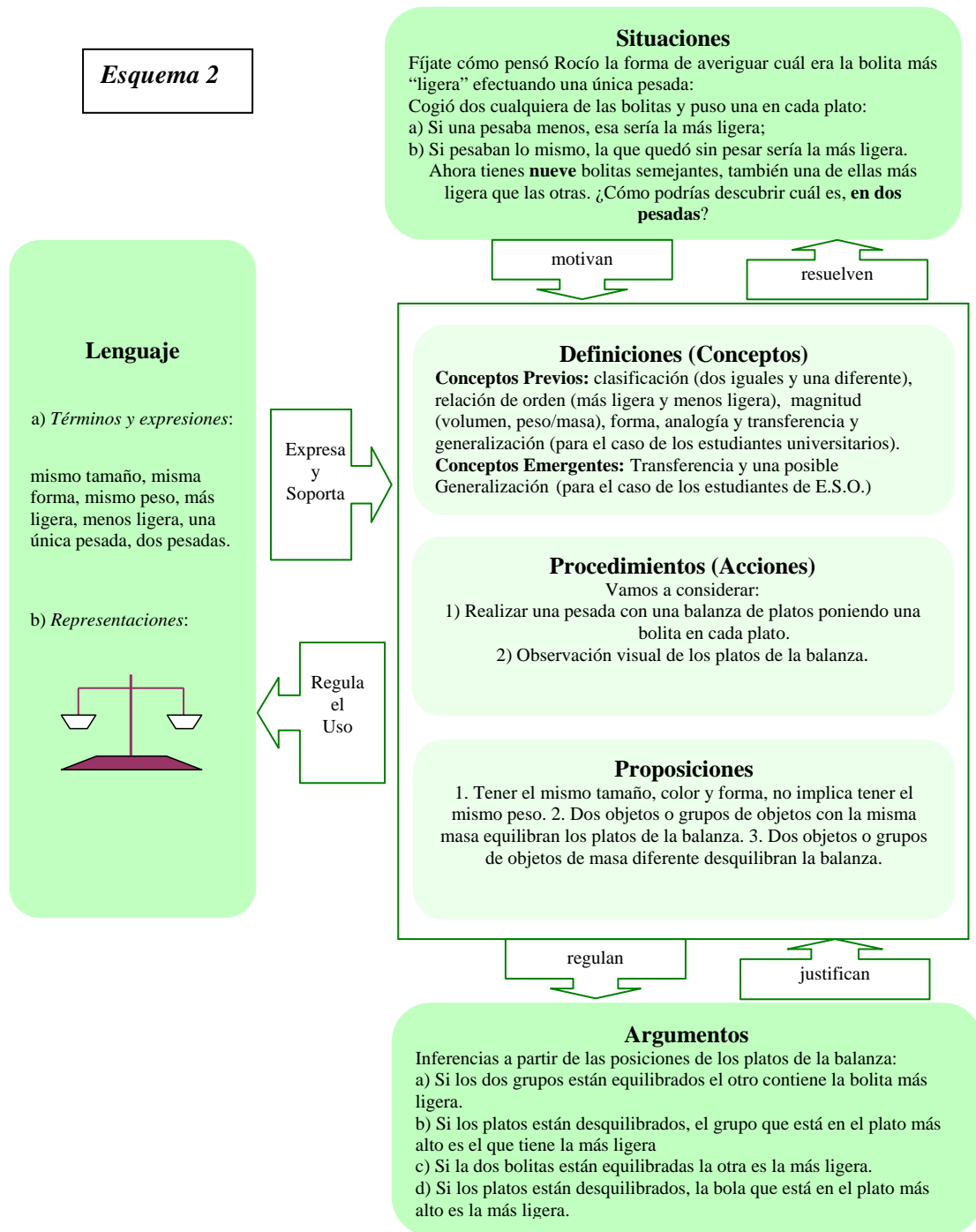
Hay que agrupar las bolitas en grupos de tres, poner un grupo en cada uno de los platos de la balanza. Si los platos están equilibrados, en el otro grupo está la más ligera. Si los platos están desequilibrados, el grupo que está en el plato más alto contiene la bola más ligera. Después, se toma el grupo en el que está la bolita más ligera y se pone una bolita en cada uno de los platos de la balanza. Si los platos están equilibrados, la otra es la más ligera. Si los platos están desequilibrados, la bola que está en el plato más alto es la más ligera. Para ello, se ha tenido que: a) Realizar la lectura de la situación-problema; b) Darse cuenta de la analogía que hay con el caso de las tres bolitas y decidir agrupar las 9 bolitas en grupos de 3; c) Decidir realizar una pesada con dos grupos de bolitas cualesquiera; d) Observar la posición de los platos; y e) Argumentar en función de la posición de los dos platos y

decidir en que grupo está la más ligera, f) Decidir realizar una segunda pesada con dos bolitas cualesquiera del grupo en el que se halla la más ligera, g) Observar la posición de los platos y h) Argumentar en función de la posición de los dos platos. Finalmente, el experto tiene que decidir que la solución que ha hallado cumple las condiciones del enunciado del problema y en caso contrario tiene que revisar el proceso o bien iniciar un nuevo camino.

Se podría esperar, además, otro nivel de respuesta en relación al experto; si el experto fuera un estudiante universitario (formación para maestro de educación primaria) cuya respuesta aproximase a una solución experta de referencia institucional, al extender o generalizar la solución para el caso de n bolas. Tal generalización, llevará asociada una terminología lo suficientemente adaptada para poder obtener la solución general de manera casi automática, se trata de un proceso de algebrización: $[3^{n-1} + 1, 3^n]$ (para cualquier $n \geq 1$), siendo n = número de pesadas. Si el experto fuera un estudiante de E.S.O. no se espera (o no se exige) una aproximación al proceso de algebrización mencionado, aunque informalmente podamos constatar en su respuesta un proceso de transferencia, que se da cuando el estudiante percibe la estructura común subyacente a los dos problemas para reducir el nuevo problema al anterior.

Configuración Epistémica (de referencia):

Para la realización de la práctica que permite resolver este problema, un resolutor experto tiene que poner en funcionamiento la siguiente configuración, que vamos a considerar como configuración epistémica puesto que la tomaremos como configuración de referencia para analizar la adecuación de las configuraciones cognitivas de los estudiantes:



Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje: Las mismas consideraciones para el problema de las 3 bolitas se extenderán a éste. Además, se espera que la solución experta del problema anterior sirva de referencia como estrategia de partida para esta nueva situación.

Acciones: La idea esencial, ahora, reside en que se puede establecer el “rango” (peso relativo), a través de una relación de orden entre 3 grupos de 3 objetos sin necesidad de contrastarlos todos entre si. En el sentido institucional se supone que las acciones a realizar son: a) Realizar una pesada con dos grupos de bolitas cualesquiera, b) Observar la posición de los platos, c) Realizar una segunda pesada con dos bolitas cualesquiera del grupo en el que se halla la más ligera y d) Observar la posición de los platos. De esta manera se cumple la exigencia de que la tarea se efectúe en dos pesadas.

Conceptos: También los conceptos se suponen ya conocidos por el resolutor. Estos son: clasificación (dos iguales y una diferente), relación de orden (más ligera y menos ligera), magnitud (volumen, peso/masa), forma, analogía, transferencia y generalización (para los estudiantes universitarios) y *Emergentes:* transferencia y generalización (para los estudiantes de E.S.O.).

Proposiciones y propiedades: La primera propiedad que el resolutor ha de tomar en cuenta es que tener el mismo tamaño, color y forma, no implica tener el mismo peso. También ha de tener en cuenta que dos objetos o grupos de objetos con la misma masa equilibran los platos de la balanza y que dos objetos o grupos de objetos de masa diferente desequilibran la balanza.

Argumentaciones: Se tienen que realizar inferencias a partir de las posiciones de los platos de la balanza. Éstas son: a) Si los dos grupos están equilibrados, el otro contiene la bolita más ligera, b) Si los platos están desequilibrados, el grupo que está en el plato más alto es el que tiene la más ligera, c) Si las dos bolitas están equilibradas la otra es la más ligera; y d) Si los platos están desequilibrados, la bola que está en el plato más alto es la más ligera.

PERSPECTIVA DE LA METACOGNICIÓN

Para discriminar los niveles de competencia metacognitiva de los alumnos, diseñamos la siguiente configuración metacognitiva hipotética de referencia:

Tabla 6 - Configuración Metacognitiva Hipotética de Referencia

<p>Gestiones primarias (metacognición primaria)</p> <ol style="list-style-type: none">1) Realizar una “lectura comprensiva de la situación problema” dándose cuenta de las exigencias y condiciones de la tarea para ajustarse a ella (realizar dos pesadas: una con dos grupos de tres bolitas cualesquiera y otra con dos bolitas cualesquiera del grupo en el que se halla la más ligera).2) Realizar “observaciones cuidadosas” y con conciencia de la posición de los platos.3) “Argumentar deliberadamente” en función de las pesadas y de la posición de los dos platos, decidiendo donde está la más ligera.
<p>Gestiones secundarias (metacognición secundaria)</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>Nivel de supervisión</i>: “¿consigo los objetivos cumpliendo las condiciones impuestas?, ¿Estaré más próximo de la situación conocida?”.2) <i>Nivel de regulación</i>: “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, corrijo alguna cosa o emprendo otro camino”.3) <i>Nivel de evaluación/revisión</i>: revisar lo hecho para verificar que se han cumplido las condiciones impuestas.
<p>Gestiones para una metacognición ideal</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>Aplicación de la Analogía (y Transferencia)</i>: Darse cuenta de la analogía que hay con el caso de las tres bolitas y <i>transferir</i> una situación a otra. “Intentaré seguir la misma estrategia”.2) <i>Aplicación de la generalización</i>: Ser capaz de generalizar el caso de 9 al caso de n bolas (para los estudiantes universitarios).

Gestiones primarias (metacognición primaria)

Teniendo en cuenta que los elementos de la configuración epistémica anterior son supuestamente familiares al resolutor experto, podemos, de un modo general, decir que tal familiaridad también se extiende a los elementos de la configuración metacognitiva.

1) *Realizar una lectura comprensiva de la situación-problema dándose cuenta de las exigencias y condiciones de la tarea para ajustarse a ella.* Valen las mismas consideraciones que para el caso de las 3 bolitas, resaltando que la fluidez y la conciencia de todos los aspectos que se han de tener en cuenta durante la situación “lectura del problema” (que, estratégicamente, incluye resuelto el problema de las 3 bolitas) son un pre-requisito fundamental para el desarrollo de acciones a posteriori que consisten,

primeramente, en *realizar una pesada con dos grupos de tres bolitas cualesquiera*. Esta es una decisión en la que se percibe un cierto grado de conciencia deliberada (el darse cuenta de la analogía y decidir agrupar) que en seguida se transforma en una conciencia automática donde tiene en cuenta las exigencias y condiciones impuestas por la tarea, para así coordinar y decidir la gestión que supuestamente le llevará a la solución.

2) Realiza dos *observaciones cuidadosas y conscientes de la posición de los platos*. La primera observación, supuestamente, ocurrirá de forma rápida y automática considerando la analogía con el caso de las 3 bolas y todas las propiedades pertinentes en la situación. Tras esta observación, toma la decisión de *realizar una segunda pesada con dos bolitas cualesquiera del grupo en el que se halla la más ligera*: El automatismo de esta decisión todavía es más rápido que en la anterior toda vez que, al llegar a esta fase, el resolutor ha reducido el nuevo problema al anterior cuya solución ahora, viene dada en el propio enunciado. La segunda observación también ocurrirá rápida y automáticamente, o bien, será imaginada, toda vez que las condiciones de observación son las mismas del caso resuelto para 3 bolas.

3) *Argumentar deliberadamente en función de las pesadas y de la posición de los dos platos, decidiendo donde está la más ligera*. Un primer nivel de argumentación ocurrirá junto con las gestiones de supervisar y evaluar que la acompañan de forma automática, confirmando la aplicación de la analogía entre ambos problemas, y que lleva a una decisión acertada de uso de una estrategia óptima para el alcance de la meta pretendida. De lo contrario, o sea, de no cumplirse las expectativas o condiciones impuestas, el abandono (o cambio) de las gestiones de conciencia automática dará lugar a gestiones de conciencia deliberada, de una supervisión, regulación y una evaluación deliberadas. Un segundo nivel de argumentación ocurrirá rápida y automáticamente, tras la observación de la segunda pesada, toda vez que se trata apenas de reescribir el proceso de solución que se encuentra en el propio enunciado o, sino, referirse a él.

Gestiones secundarias (metacognición secundaria)

Valen las mismas observaciones hechas para el problema de las 3 bolitas.

Gestiones para una metacognición ideal

1) *Aplicación de la Analogía (y Transferencia)*: Darse cuenta de la analogía que hay con el caso de las tres bolitas, haciendo uso o *transfiriendo* la estructura de la situación ya conocida para reducir el nuevo problema (agrupar las 9 bolitas en grupos de 3).

2) *Aplicación de la generalización*: pasar del caso de 9 al caso de n bolitas. Para el estudiante universitario (formación para maestro de educación primaria) que su respuesta se aproxime una solución experta de referencia institucional la cuál generaliza la solución para el caso de n bolas encontrando la terminología adecuada preferiblemente algebraica para obtener la solución de forma casi algorítmica. Para el estudiante de ESO no se exige tal aproximación, pero la aplicación de la analogía o incluso la percepción de la estructura común subyacente a ambos problemas puede ser indicio de un proceso de generalización emergente.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS PROTOTÍPICAS DE LAS 9 BOLITAS

Primeramente presentamos la Tabla de Frecuencia para este problema.

LAS 9 BOLITAS

	Frecuencia	Porcentaje
Válidos A	23	12,4
B	58	31,4
C	8	4,3
D	11	5,9
E	12	6,5
F	17	9,2
G	10	5,4
Cajón	46	24,9
Total	185	100,0

Categoría A

Las respuestas prototípicas en esta categoría tanto en lo que dice respecto de las configuraciones cognitivas y metacognitivas coinciden, en su mayoría, o se aproximan a las configuraciones de referencia.

Según nuestros criterios de competencia inicialmente mencionados para este problema y conforme tabla anterior, observamos que sobre 12% de las respuestas incluidas en esta categoría A permite diagnosticar la aparición de las dos nuevas competencias no exigidas para el problema anterior (de las 3 bolitas). Es decir, una competencia basada en el conocimiento de procesos de generalización-particularización que permite organizar y planificar las acciones para reducir la comparación de 9 bolas al caso más simple de 3 bolas cuya solución, ahora, viene dada. Como una respuesta ilustrativa tenemos:

descubrir cal é, en dúas pesadas?
- Pon tres bolinhas en cada prato, e sobran tres. Se ~~unha~~ (se) un prato pesa menos, aí está a bola máis lixeira, e, se pesan o mesmo, a máis lixeira está nas tres que quedaron fóra.
- Pésanse dúas das tres bolinhas do grupo da máis lixeira, e logo faise como fixo Rocío ó principio: se unha pesa menos, esa é a máis lixeira, e, se as dúas pesan igual, a máis lixeira é a que quedou fóra.

*Pone tres bolitas en cada plato, y sobran tres. Si un plato pesa menos, ahí está la bola más ligera, y, si pesan lo mismo, la más ligera está en las tres que quedaran fuera.
Se pesan dos de las tres bolitas del grupo de la más ligera, y luego hace como hizo Rocío al principio: si una pesa menos, esa es la más ligera, y, si las dos pesan iguales, la más ligera es la que quedó fuera. Alumno (N74)*

Categoría B (evolucionando a la A)

Ahora, si esta estrategia de generalización-particularización no se hace explícita en el resolutor, afloran otras estrategias cognitivas-metacognitivas que representan otros niveles de competencia como reflejamos en las categorías B-F.

Así en aproximadamente 31% de la categoría B se observan estrategias basadas en una adaptación algorítmica global de la resolución anterior que se ofrece en el enunciado en un intento de establecer relaciones por imitación ingenua: tomar 4 bolitas frente a 4, dejando una fuera. Una posible regulación consecuencia de una supervisión reflexiva de este proceso, por parte del resolutor, podría llevarlo a descartar tal estrategia y llegar a la misma tesitura del problema 3. En este caso, el cambio de estrategia lo situaría

en la categoría A. Ilustramos esta regulación metacognitiva con la respuesta que se sigue, del alumno (N25), que nos muestran la evolución del razonamiento del resolutor (y también de categoría, en este caso de B para A), mediante un proceso de regulación de las estrategias iniciales.

~~No primera pesada ponense 4 bolas en cada balanza.
Se todas pesan igual a que sobra es a que buscamos
Se unta das balanzas para menos se utilizarse a segunda pesada~~

~~No segunda pesada ponense as que pesaran menos repartidas~~

No primera pesada ponense 3 bolas en cada balanza. Si algun ^{trío} pesa menos se coge y en la segunda pesada se pone una en cada una y una que sobra si las dos pesan igual la que buscamos es la que sobra y si no sera la que pesa menos.

Agora dinos en que medida estás seguro de ter acertado esa cuestión (redondea a letra).

a) Moi seguro b) Bastante seguro c) Pouco seguro d) Nada seguro

En el caso de que los dos tríos pesan igual se coge el trío que sobraba y se hace la operación de arriba.

~~En la primera pesada se pone 4 bolas en cada balanza. Si todas pesan iguales la que sobra es la que buscamos. Si una de las balanzas pesa menos utilizamos la segunda pesada. En la segunda pesada se pone las que pesaran menos repartidas.~~

En la primera pesada se pone 3 bolas en cada balanza. Si alguno trío pesa menos se coge y en la segunda pesada se pone una en cada una, y una que sobra. Si las dos pesan igual la que buscamos es la que sobra y si no será la que pese menos.

En el caso de que los dos tríos pesen iguales se coge el trío que sobraba y se hace la operación de arriba.

Configuración cognitiva

1) *Lenguaje (terminología y notaciones)*: coincide con la de referencia; *Representaciones*: no explícita externamente una representación gráfica de sus acciones.

2) *Acciones*: primeramente erróneas y tras un proceso de regulación coinciden con las de referencia.

3) *Conceptos previos*: coinciden con los de referencia institucional; *Conceptos emergentes*: transferencia y generalización.

4) *Proposiciones*: coinciden con las de referencia institucional.

5) *Argumentaciones*: después de realizar una regulación de sus acciones sus argumentos básicamente coinciden con los de referencia.

Configuración metacognitiva

Primaria:

- 1) Realiza una lectura parcialmente comprensiva de la situación problema. Es consecuencia de esta comprensión la decisión de realizar una pesada con dos grupos de 4 bolitas cualesquiera y a continuación con dos grupos de 2 bolitas (decisiones erróneas).
- 2) Hace observaciones cuidadosas de la posición de los platos.
- 3) Argumenta deliberadamente en función de la posición de los dos platos.

Secundaria:

- 1) Un nivel de supervisión: darse cuenta de que trabajando con grupos de 4 bolas no consigue los objetivos previstos;
- 2) Un nivel de regulación: cambio de estrategia relacionada con la aplicación de la analogía. A partir de este momento sus acciones coinciden con las de referencia.
- 3) Un nivel de evaluación: es justo la evaluación junto con la supervisión que hace del proceso que lleva al resolutor a cambiar su estrategia.

Ideal:

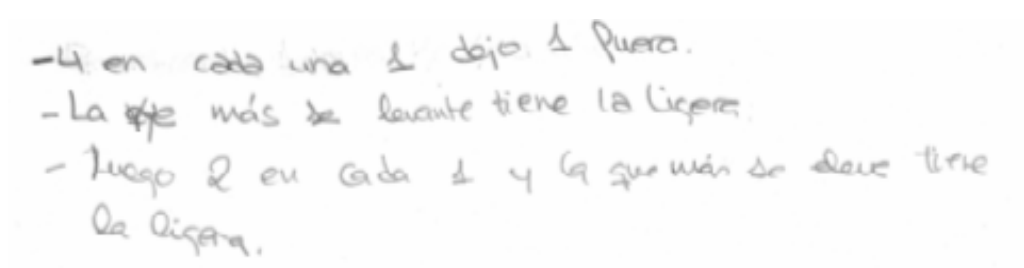
1) *Aplicación de la Analogía (y Transferencia)*: Darse cuenta de la analogía que hay entre los problemas y *transfiere de* una situación a otra. 2) *Aplicación de la generalización*: posible emergencia de un proceso de generalización.

La primera reflexión lleva al resolutor a adoptar una estrategia cognitiva cuya planificación y supervisión le coloca ante la tesitura de tener que realizar una tercera

pesada. Esta constatación provoca una regulación de su proceso metacognitivo que le conduce a reflexionar sobre estrategias más óptimas, situación que se refleja con nitidez en el razonamiento final. Esta respuesta nos ofrece un ejemplo nítido del significado de autorregulación. Al mismo tiempo se constata una diferenciación a nivel “comunicativo” con la respuesta ilustrada anteriormente (por el estudiante N74) que muestra un dominio más profundo de la representación del conocimiento matemático (mediante un uso más preciso del lenguaje), a pesar de usar ambos la misma estrategia y de estar en la misma categoría. En este momento se pone en evidencia la necesidad de diferenciar distintos tipos de objetos² matemáticos que manejamos (Godino, 2003). Ambos, desde el punto de vista de sus acciones y procesos se comportan de manera similar, pero no desde el punto de vista del manejo de lenguaje y del conocimiento conceptual (el primer estudiante explicita un proceso de generalización- particularización que no se evidencia con la misma claridad en la respuesta del segundo estudiante).

Categoría C

El 4% de los resolutores presentan una adaptación algorítmica de la solución del problema anterior (centrada en la aclaración a del enunciado del problema), pero con agrupamientos que no corresponden a una distribución uniforme de las mismas y con la omisión del estudio del tercer grupo de bolas. Un ejemplo ilustrativo de respuesta sería:



4 en cada una y deajo una fuera.
La que más se levante tiene la ligera.
Luego 2 en cada una y la que más se eleve tiene la ligera. *Alumno(N127)*

² Lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades o atributos, argumentaciones.

Configuración cognitiva

- 1) *Lenguaje (términos y expresiones)*: mismo peso, distinto peso, más y menos ligera, agrupamientos no uniformes, división de grupos de bolas, varias pesadas.
Representaciones: no hay representaciones gráfica de las acciones;
- 2) *Acciones*: a) Realizar pesadas con agrupamientos no uniformes, b) Observación visual de los platos de la balanza, c) continuar (o no) realizando varias pesadas;
- 3) *Conceptos Previos*: los de referencia, y vagamente los de analogía y transferencia;
Conceptos Emergentes: ninguno;
- 4) *Proposiciones y propiedades*: en algunos casos las propiedades están más implícitas.
- 5) *Argumentaciones*: En la mayoría de los casos sólo se hace referencia al desequilibrio y, en otros, se declara la subdivisión de los agrupamientos en donde se localiza el grupo más pesado.

Configuración metacognitiva

Primaria:

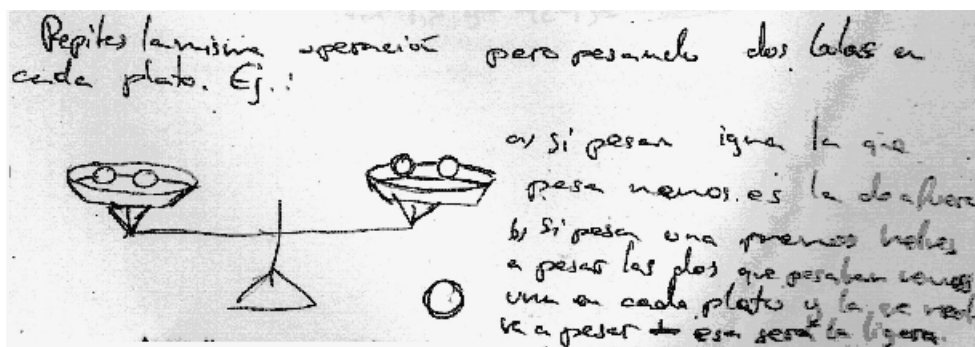
- 1) Realiza una lectura parcialmente comprensiva de la situación problema. Tras esta comprensión observamos todavía que en algunos casos deciden realizar subdivisiones de aquellos grupos que resultan más pesados (errónea).
- 2) Observaciones cuidadosas pero limitadas;
- 3) Argumenta parcialmente en función de la posición de los platos.

Secundaria:

- 1) Nivel de supervisión: generalmente se omite la supervisión del proceso, y en otros casos resulta ineficaz.

Categoría D

Se incluye en esta categoría aproximadamente 6% de los resolutores y sus respuestas están exentas de una estrategia previa, al azar: descarta una o varias y somete las otras a comparación. Un ejemplo de respuesta para esta categoría sería:



Repites la misma operación pero pesando dos bolas en cada plato (gráfico). A) si pesan igual la que pesa menos es la de afuera. B) si pesa una menos vuelves a pesar las dos que pesaban menos, una en cada plato y la que vuelva a pesar menos esa será la más ligera. (Alumno N9)

Configuración cognitiva

- 1) *Lenguaje (términos y expresiones)*: mismo peso, distinto peso, más y menos ligera, agrupamientos uniformes reduciendo en número de bolas (en este caso 5 frente a 9), dos pesadas; b) *Representaciones*: en este caso, hay representación gráfica de la acción;
- 2) *Acciones*: a) Realizar pesadas con un número reducido de bolas y agrupamientos uniformes, b) Observación visual de los platos de la balanza, c) a partir de ese momento siguen un proceso similar al institucional;
- 3) *Conceptos*: *Previos*: los de referencia, usando los de analogía y transferencia para un número reducido de bolas; *Conceptos Emergentes*: ninguno;

- 4) *Proposiciones*: coinciden con las de referencia;
- 5) *Argumentaciones*: en función de la reducción del número de bolas que aplican los argumentos son similares a los de referencia.

Configuración metacognitiva

Primaria:

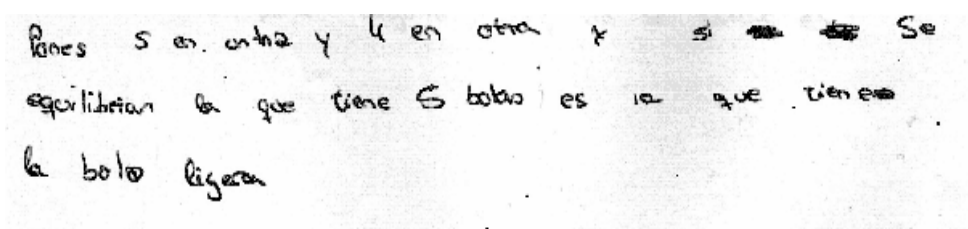
- 1) Realiza con poca comprensión la lectura de la situación problema y como consecuencia decide reducir el número de bolas para simplificar el problema sin respetar las condiciones establecidas en el mismo y decide realizar pesadas con grupos uniformes de menor cantidad de bolas;
- 2) Observación poco cuidada de la posición de los platos;
- 3) Argumentar correctamente en función de la posición de los platos para decidir en dos pesadas cuál es la bola más ligera.

Secundaria:

- 1) Nivel de supervisión: semejante al de referencia pero aplicado a una reducción previa del número de bolas, lo que implica que no se tiene en cuenta las condiciones fundamentales del problema.

Categoría E

Se incluye en esta categoría aproximadamente 7% de los resolutores que utilizan estrategias primarias comparando todas las bolas por bloques: comparan 5 frente a 4 y valoran el grado de desequilibrio. Ejemplo:



Pones 5 en un lado y 4 en otro y si se desequilibra la que tiene 5 bolas es la que tiene la bola ligera

Pones 5 en una y 4 en otra y si se equilibran, la que tiene 5 bolas es la que tiene la bola ligera. (Alumno N59)

Configuración cognitiva

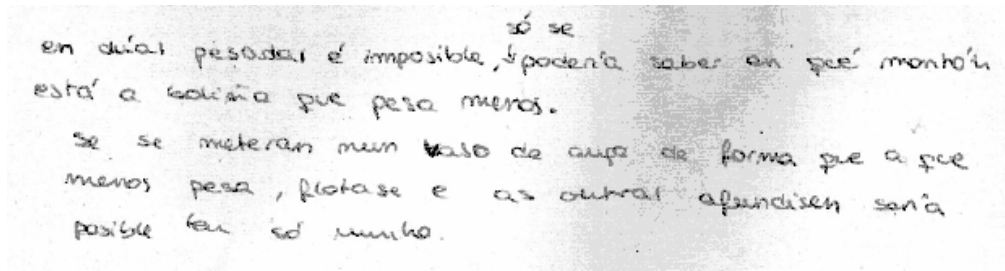
- 1) *Lenguaje (términos y expresiones)*: mismo peso, distinto peso, más y menos ligera, agrupamientos no uniformes; dos pesadas; b) *Representaciones*: no hay en este caso;
- 2) *Acciones*: a) Realizar pesadas con agrupamientos no uniformes, b) Observación visual de los platos de la balanza;
- 3) *Conceptos Previos*: los de referencia, usando de manera confusa el concepto de masa; *Conceptos Emergentes*: ninguno.
- 4) *Proposiciones*: implícitamente usa una propiedad errónea: la bola más ligera no tiene masa (equilibrio de la balanza);
- 5) *Argumentaciones*: en función de los agrupamientos que hace.

Configuración metacognitiva

Las respuestas solamente describen una estrategia metacognitiva primaria comparando todas por bloques: comparan 5 frente a 4 y valoran el grado de desequilibrio.

Categoría F

Aproximadamente 9% de los resolutores normalmente no se sujeta a las limitaciones ni se adecúa al instrumento. Puede servir como ejemplo la siguiente respuesta:



En dos pesadas es imposible, sólo se podría saber en qué montón está la bola que pesa menos. Si se metiera en un vaso de agua de forma que la que menos pesa flotase y las otras se hundiera sería posible en tan sólo una. (alumna N56)

Configuración cognitiva

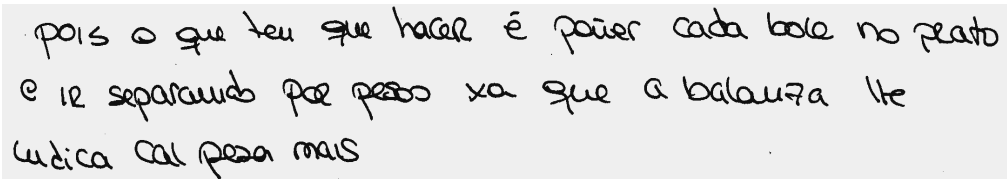
- 1) *Lenguaje (términos y expresiones)*: mismo peso, distinto peso, más y menos ligera, una pesada, dos pesadas b) *Representaciones*: no hay en este caso;
- 2) *Acciones*: a) meter las bolas en un vaso de agua b) Observación visual de flotabilidad o no de una bola;
- 3) *Conceptos Previos*: los de referencia; *Conceptos Emergentes*: densidad
- 4) *Proposiciones*: implícitamente usa una propiedad ficticia al suponer que por flotabilidad o no puede determinar la bola más ligera;
- 5) *Argumentaciones*: basadas en la menor densidad de la bola más ligera que no tiene porque garantizar en principio su flotabilidad frente a las otras.

Configuración metacognitiva

Las estrategias metacognitivas son de orden primario y no se sujetan a las limitaciones ni se adecúan al instrumento: estimar los pesos con la mano, pesar una a una (con o sin unidad graduada).

Categoría G

Los 5% de los resolutores en esta categoría hacen propuestas que requieren conocer a priori la solución.



pues lo que ten que hacer é poner cada bola no plato e ir separando por peso xa que a balanza le indica cal pesa más

Pues lo que tiene que hacer es poner cada bola en el plato e ir separando por peso ya que la balanza le indica cual pesa más. Alumno (N35)

Configuración cognitiva

- 1) *Lenguaje (términos y expresiones)*: mismo peso, distinto peso, más y menos ligera, varias pesadas b) *Representaciones*: no hay en este caso;
- 2) *Acciones*: a) meter una a una las bolas en los platos de la balanza b) Observación visual del equilibrio o desequilibrio de los platos;
- 3) *Conceptos Previos*: supuestamente los de referencia en los casos más simples; *Conceptos Emergentes*: ninguno;
- 4) *Proposiciones*: supuestamente los de referencia;
- 5) *Argumentaciones*: Se basan en propuestas que requieren conocer a priori la solución.

Configuración metacognitiva

Esta categoría pone de manifiesto carencias sustantivas de habilidades y estrategias metacognitivas, en particular no se observa reflexión (y acción), lo que conduce a ofrecer respuestas ingenuas o evasivas.

Categoría: Cajón de Sastre

Aclaremos que el significativo número de alumnos (25%) situados en el “cajón de sastre” se debe sustancialmente a los 15 alumnos que conformaba el grupo piloto, que no contestaron a 3 ítems del cuestionario complementario (uno de los cuales es el que estamos considerando). Precisamente este grupo fue la causa de que tomásemos en consideración la necesidad de reformular algunos de los problemas propuestos en el primer cuestionario (principal). Al no ser modificado de forma sustancial el cuestionario principal (que sólo se añadieron 3 ítems) consideramos oportuno seguir incluyendo, en nuestro análisis, las respuestas de este grupo piloto.

ALGUNAS CONCLUSIONES PARA ESTE PRIMER BLOQUE DE ANÁLISIS

Como era de esperar las competencias cognitivas y metacognitivas de los resolutores vienen manifestadas en “armonía”. Es decir, con base en las categorías y criterios establecidos podemos observar cuando los resolutores presentan carencias significativas en su configuración cognitiva también se presentan paralelamente carencias en sus configuraciones metacognitivas. A medida que utilizan configuraciones cognitivas más elaboradas (ej. experimentación selectiva, explicitación de posibles alternativas y de deducción inquirida) las configuraciones metacognitivas se muestran como un catalizador para la evolución de las primeras aproximándolas paulatinamente a la configuración epistémica de referencia. Recíprocamente el poseer una configuración cognitiva desarrollada hace paralelamente aflorar una configuración metacognitiva que a su vez se aproxima a la configuración metacognitiva de referencia. Todo esto viene a confirmar, lo dicho por muchos investigadores, que estas dos cosas están íntimamente relacionadas.

Pero, sobre todo, este contexto nos muestra que al considerar conjuntamente las dos perspectivas, EOS y de la Metacognición, para el análisis de las prácticas de los estudiantes pudimos percibir como de hecho estos dos conocimientos están próximos.

A partir del momento en que no se consideran las restricciones del problema (como observamos en un poco más de la mitad de la muestra – para el caso del problema de las 3 bolitas, de la categoría C al Cajón de Sastre) el pensamiento se vuelve arbitrario, contemplando estrategias de lo más variopinto (ej. hablar de elementos circunstanciales esquivando el problema y estar respondiendo por responder por una cuestión de

supervivencia escolar) y, en cambio la otra mitad al haber comprendido las restricciones del problema toman decisiones acertadas.

Otra de las cosas a considerar son las respuestas que revelan un interés específico por parte de los resolutores en satisfacer su propósito de encontrar la solución al problema sin considerar prioritario atender las condiciones que impone la tarea. El interés por encontrar la solución está relacionado el interés que ha despertado el propio problema al resolutor y que también de modo general han expresado en el conjunto de nuestra prueba, registrando apenas abandonos o rechazos en uno de los problemas (el 10, sistema de ecuaciones, que en relación a los demás parece más formal, menos atractivo, manipula a la vista ecuaciones que exigen interpretación, etc).

Básicamente, lo que marca la diferencia entre los dos problemas son los criterios de aplicación de la analogía y generalización. Para el problema de las 9 bolitas lo que sí percibe con sus resultados es que sobre el 44% (categorías A y B) de los resolutores utilizan el primer criterio y apenas el 12% el segundo. Lo que nos hace pensar que en relación al problema anterior (de las 3 bolitas) pocos resolutores consiguen dar este paso, o sea, hacer uso de estas nuevas exigencias. No fue suficiente por tanto la solución del problema anterior, que se hace explícita, para que los resolutores la adaptasen acertadamente al caso actual. Observamos que sí es significativo (categoría B y C) los intentos de uso de la analogía, pero lo hacen de manera inadecuada al considerar distribuciones no uniformes de las bolas. En este sentido, puede que las gestiones metacognitivas mal utilizadas o poco utilizadas (o incluso ausentes) contribuyan a un uso inadecuado de este criterio. Un ejemplo de uso adecuado de estas gestiones fue posible evidenciar en el alumno N25, como ya hemos mostrado, que ha evolucionado de la categoría B a la A.

También para el problema de las 9 bolitas observamos que un poco más de la mitad de los resolutores presenta respuestas basadas en un pensamiento arbitrario al no contemplar las restricciones al problema. Aún en el contexto de este problema observamos que apenas un 12% coincide o se aproxima a la configuración de referencia. Mientras que en el problema anterior este porcentaje está sobre el 47% (categoría A y B) dado que las respuestas englobadas en la categoría B para el problema de las 3 bolitas se aproximan bastante de la A, mientras que la B para las 9 bolitas se refiere a intentos de uso de la analogía (erróneos).

Todo esto, también, pone de manifiesto la complejidad de la aplicación correcta de procesos de analogía y consecuente generalización (en este caso parcial). Se trata de dos criterios de competencia cognitiva (en principio) que implican niveles avanzados de competencia metacognitiva, mostrando una vez más la relación de dependencia entre estas dos competencias así como el mutuo apoyo que puede haber entre ambas de cara a la comprensión de las situaciones problemas y de sus procesos de resolución.

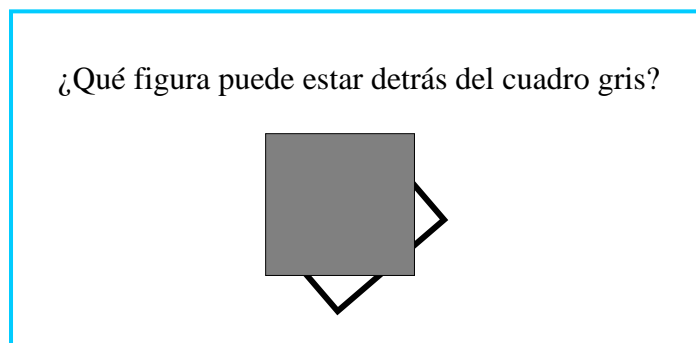
II BLOQUE

ANÁLISIS DE ESTUDIO DE CASOS

EL CASO NEREA Y EL PROBLEMA DE LA FIGURA ESCONDIDA

Comentamos en el capítulo de la metodología que una de las razones para el cambio del colectivo de estudiantes/participantes en nuestro estudio fue la necesidad de realizar un seguimiento más cuidadoso y detallado de los procesos de pensamiento puestos en juego en el contexto de nuestras tareas, para lo que resultaría imprescindible una mayor disponibilidad de los participantes, que no se podría asegurar en el caso de los estudiantes de E.S.O. Con el estudio de caso “Nerea”, pretendemos mostrar como ha sido hecho este seguimiento. Nerea, es una estudiante de Magisterio que ha participado asiduamente de todos los encuentros con una buena predisposición para trabajar en equipo, interesada en adquirir nuevos conocimientos matemáticos y didácticos. Esta observación sistemática puede ser caracterizada por un proceso de triangulación de datos a través de 3 momentos: realización individual y por escrito de la tarea, entrevista individual sobre el razonamiento seguido en la tarea y debate en grupo. A continuación, describiremos estos momentos acompañando a Nerea en el problema de la Figura Escondida. Pero antes de proceder a este estudio expondremos primero cuál fue nuestro objetivo al proponer este problema y después explicitaremos lo que sería una configuración epistémica de referencia y una configuración metacognitiva institucional de referencia para este problema.

PROBLEMA DE LA FIGURA ESCONDIDA

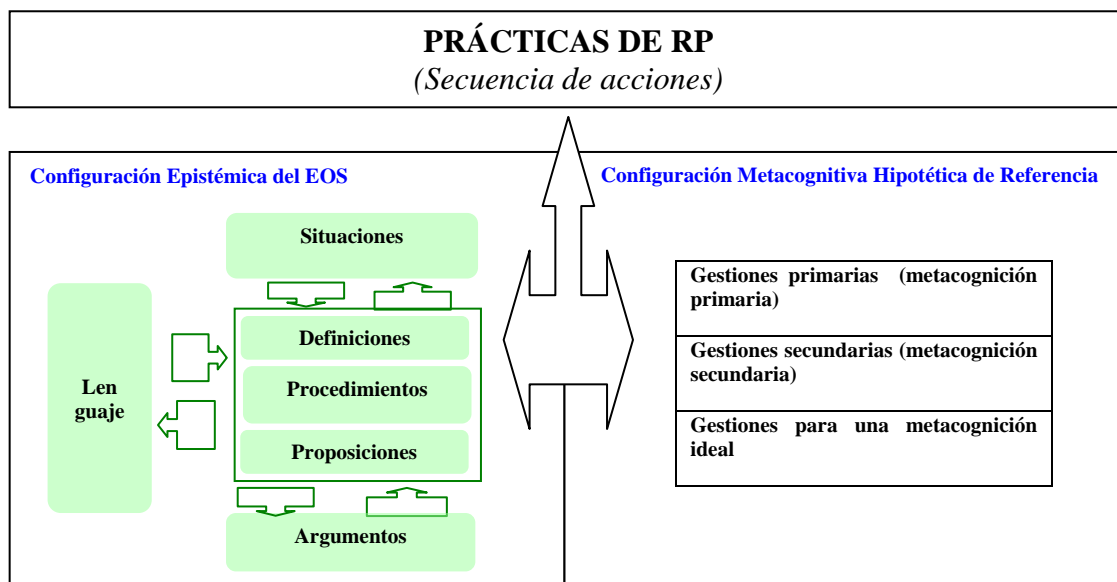


El enunciado de este problema se diseñó teniendo en cuenta dos aspectos: 1) que los conocimientos necesarios para su resolución formasen parte del bagaje de

conocimientos matemáticos de los alumnos y 2) que se prestase a múltiples respuestas, para ello, en el enunciado, se pregunta deliberadamente por “figura” en lugar de “figuras” (hay que recordar que las respuestas son infinitas si se tiene en cuenta la norma matemática de que en ausencia de restricciones a un problema, su solución debe ser lo más genérica posible).

Tal como hemos comentado en el capítulo de la metodología el proceso seguido para diseñar las configuraciones epistémica y metacognitiva de referencia para este problema fue el siguiente: 1) un matemático experto resolvió el problema, 2) esta respuesta fue sometida a la opinión de otros resolutores expertos con el objetivo de validarla y de “ver” si ofrecían soluciones alternativas, 3) a partir del protocolo de resolución y de las respuestas a algunas preguntas que les formulamos³ se confeccionó un primer esbozo y 4) posteriormente este esbozo se sometió a la consideración de expertos en el EOS y en la Metacognición. El resultado final es el que se presenta en el próximo ítem.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA Y METACOGNITIVA INSTITUCIONAL ACTIVADAS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA



³ (e.g. ¿por qué considera que debe haber soluciones lo más genéricas posible?, ¿en algún momento pensó que dado el enunciado del problema debería considerar una solución única?, ¿por qué estima necesario dibujar un caso particular?, ¿por qué ha considerado como hipótesis que la figura detrás del cuadro ha de enlazar con la poligonal que está fuera?)

Solución Experta:

Protocolo de un profesor (resolutor experto): Dado que no existe restricción alguna acerca de la figura que puede esconderse detrás del cuadro, interpretando, a partir de la información visual, que se trata de la representación plana de una forma que enlaza con la poligonal que se muestra por fuera del cuadro, existen teóricamente infinitas posibilidades de diseño de una tal figura. Al tomar la decisión de dibujar una figura “ejemplo”, ésta deberá de ser lo más genérica posible evitando que cumpla propiedades geométricas elementales (ser un cuadrilátero, ser un polígono, ser convexa, etc.), puesto que, de lo contrario estaría sometida a restricciones no impuestas por el problema. Una posibilidad sería una figura de contorno mixto, cóncava y con agujeros, como la figura siguiente:

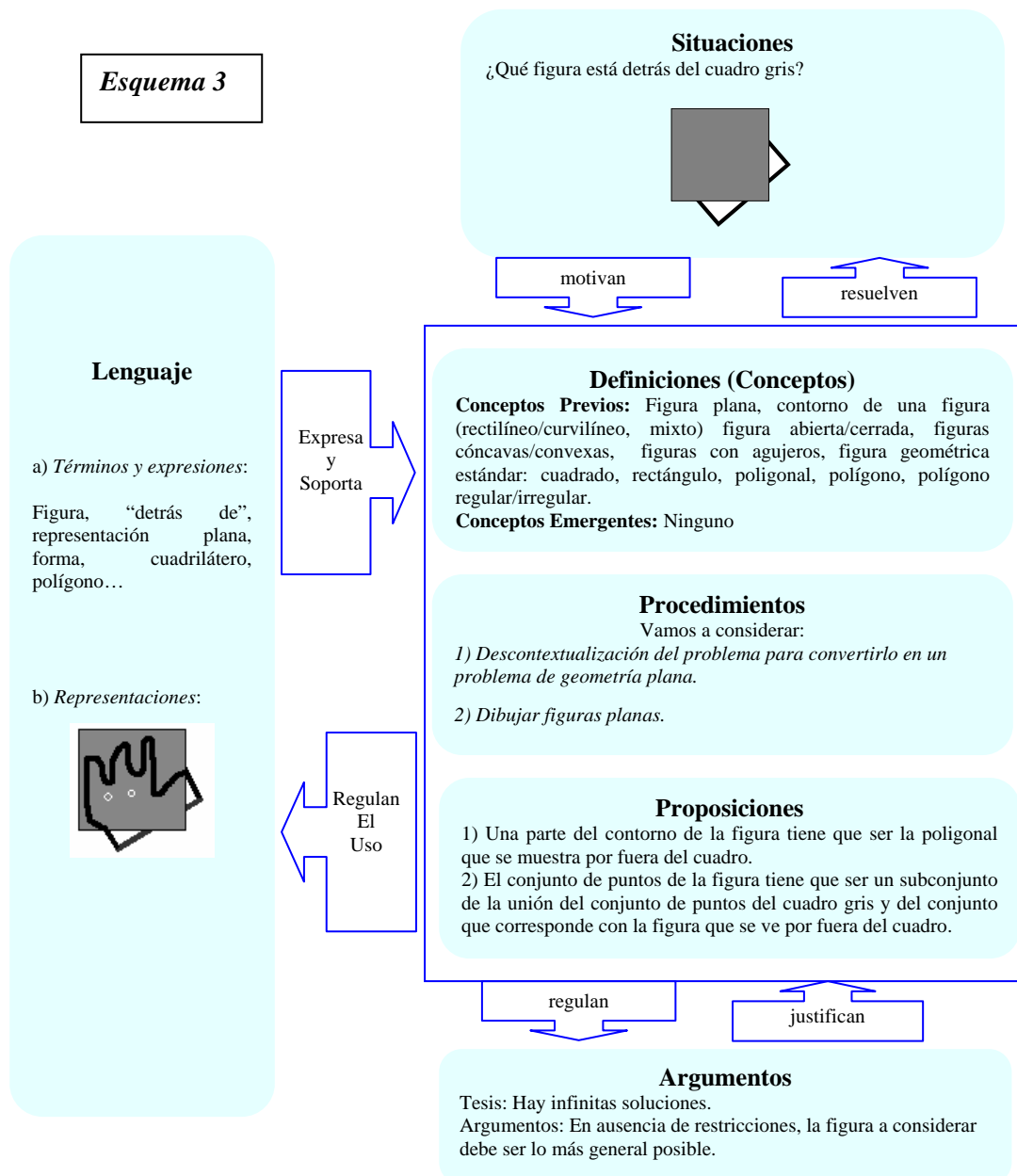


Los demás expertos han aceptado esta solución como válida, sin necesidad de aportar respuestas alternativas.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA:

Para realizar las acciones apropiadas para la resolución de la tarea, el resolutor experto activa la siguiente configuración epistémica (configuración referencial que utilizaremos para analizar la adecuación de las configuraciones cognitivas de los estudiantes):

Esquema 3



Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje (términos y expresiones): se utilizan los términos “figura” que puede estar sujeta a distintas interpretaciones (figura plana, contorno de una figura, figura convexa/no convexa, figura con agujeros, etc.), que se suponen familiares a un resolutor experto, y “detrás de” que, en este caso, es sinónimo de “escondido”, que no se puede ver.

Representaciones gráficas: en este caso el tipo de representación relevante es una representación geométrica bidimensional.

Definiciones: los conceptos previos que hay que emplear para construir una respuesta a la tarea son nociones geométricas ligadas a la de “figura plana” y a la de clasificación de figuras planas en familias (figura plana, contorno de una figura, figura convexa/no convexa, figura con agujeros, figura geométrica -triángulo, cuadrilátero, polígono regular/irregular, poligonal, círculo, etc.-).

Procedimientos: El primer proceso que se consideró por parte del experto fue la necesidad de contemplar que la figura que estaba escondida era una figura plana, por lo que se produce una descontextualización para convertir la tarea en un problema de geometría plana; a partir de esta descontextualización, las ejemplificaciones producidas a modo de representación cristalizaron en el dibujo de la figura, como la del ejemplo que se muestra, se basan en figuras planas.

Proposiciones: El resolutor consideró implícitamente las dos proposiciones enunciadas en el esquema anterior.

Argumentos: La posición del resolutor delante de este problema le lleva a formular la tesis enunciada, aportando como argumento la norma implícita de que en ausencia de restricciones, la figura a considerar debe ser lo más general posible, en particular no debe verificar ninguna propiedad geométrica elemental que puede sugerir alguna característica que debe poseer la solución.

SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA TAREA

Tras la lectura del problema, el resolutor tiene en cuenta la norma matemática que prescribe que en ausencia de restricciones concretas sobre un determinado problema, sus soluciones deben ser lo más genéricas posible, pues de lo contrario responderían a restricciones inexistentes. Esta norma se convierte en el motor de las acciones actuativas y argumentativas que se realizan. Estas son: 1) dar el argumento de que hay infinitas soluciones y 2) la realización de un dibujo como ejemplo de posible solución.

Hay que destacar que el resolutor podría haber llevado su argumentación al extremo de considerar que no hay ninguna figura.

Para la realización de la sucesión de acciones que resuelven la tarea es necesario activar los componentes de la configuración epistémica anterior simultáneamente a la configuración metacognitiva que se sigue a continuación.

CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA INSTITUCIONAL DE REFERENCIA

Un resolutor ideal, para activar la configuración epistémica anterior tendría, a priori y paralelamente al desarrollo de la práctica, que tomar una serie de decisiones de gestión (coordinación, supervisión/ control, revisión, regulación y evaluación), que pueden ser automáticas o declaradas, sobre los componentes de la configuración epistémica, en el momento del proceso de resolución.

Hemos analizado primero la metacognición del profesor (resolutor experto). En este caso, podemos decir que ha necesitado un conjunto de acciones metacognitivas que se han producido de manera rápida, simultánea y semi-automática, dada la simplicidad de la tarea para el experto. La lista de acciones metacognitivas es la siguiente:

- 1) Lectura reflexiva de la situación problema;
 - 2) Reconocimiento que no existen restricciones que limiten los tipos de formas;
 - 3) Buscar la solución lo más general posible;
 - 4) Particularizar una solución a modo de ejemplificación;
- y, todo esto acompañado de:
- 5) Gestiones de monitoreo necesarias para resolver la tarea.

Podemos decir que le ha bastado un nivel primario de metacognición para resolver la tarea dada la simplicidad de la misma.

Ahora bien, pensando en los alumnos para los cuales el problema presenta una dificultad importante, conviene diseñar, para poder discriminar sus niveles de competencias metacognitivas, una configuración metacognitiva hipotética de referencia que contemple los tres niveles que hemos propuesto en el último apartado del marco teórico.

CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA HIPOTÉTICA DE REFERENCIA

Tabla 7 – configuración metacognitiva hipotética

Gestiones primarias (<i>metacognición primaria</i>) 1) <i>Lectura reflexiva</i> de la situación problema. 2) <i>Ser consciente</i> de proponer figuras que se consideren soluciones válidas. 3) <i>Dar por válido un argumento</i> (para uno mismo).
Gestiones secundarias (<i>metacognición secundaria</i>) 1) <i>De supervisión</i> . 2) <i>De regulación</i> . 3) <i>De evaluación/verificación</i> .
Gestiones para una metacognición ideal 1) <i>Generalización</i> : Reflexionar sobre tipos de figuras planas complejas, que por su carácter irregular tiendan a no cumplir propiedades geométricas elementales. 2) <i>Particularización</i> : dibujar un figura que sea un ejemplo ilustrativo de la solución general.

Gestiones primarias (*metacognición primaria*)

1) *Lectura reflexiva de la situación problema*: para un resolutor ideal fluye en paralelo a la construcción de significados apropiados para responder a la situación, evocando los conocimientos matemáticos precisos para resolverla de la forma más eficiente posible. Sobre la propia lectura el resolutor tomará decisiones acerca de las condiciones de la tarea, reflexionando conscientemente acerca de las acciones a emprender con posterioridad. Después de esta lectura la consciencia deliberada de todos los aspectos que ha de tener en cuenta para proceder a la acción subsiguiente, le llevan a las dos siguientes consideraciones:

2) *Ser consciente que ha propuesto* un ejemplo de figura que él considera que puede ser la solución del problema.

3) *Dar por válidos los argumentos* que sustentan la solución que ha propuesto.

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

1) *De supervisión*. Un examen sobre las acciones inducirá cuestionamientos del tipo ¿estoy adaptándome a las condiciones de la tarea? (pregunta que resultará pertinente, en este caso,

si la primera decisión adoptada le llevara, por ejemplo, a considerar sólo familias de polígonos). Estos cuestionamientos deberán permitir el control de las acciones garantizando mayor eficacia en la resolución de la tarea.

2) *De regulación.* En caso de no cumplir alguna de las condiciones, el resolutor, de forma consciente, deberá emprender nuevas acciones que cumplan los requerimientos de la situación (e.g. si se decide en un primer momento por figuras convexas, en el nivel de supervisión, deberá detectar que está imponiendo una restricción no contemplada en el enunciado de la tarea, y por tanto debe regular sus acciones, considerando figuras no convexas como más representativas de la solución).

3) *De evaluación/verificación.* Los cuestionamientos hipotéticos de estar respondiendo o no a las condiciones impuestas por la tarea, son indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación/verificación constante de las acciones emprendidas.

Gestiones para una metacognición ideal

1) *Generalización:* Reflexionar sobre tipos de figuras planas complejas, que por su carácter irregular tiendan a no cumplir propiedades geométricas elementales. La forma poligonal visible fuera del cuadro en la formulación de la tarea, podría hacer pensar en un primer momento que las únicas figuras a considerar son de tipo poligonal convexo. Sin embargo, un análisis más reflexivo conduce a desestimar esta suposición al no existir restricción alguna en el enunciado.

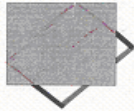
En definitiva, tendría que *reconocer que no existen restricciones que limiten los tipos de formas que pueden “escondarse” detrás del cuadro gris*, salvo quizás sobrentender que se trata de figuras planas que enlazan con el “trozo” poligonal que se visualiza por fuera del cuadro y que, por ello, debe considerar figuras genéricas, lo que se ilustraría con el hecho de ser lo más irregulares posible. Esta decisión es consecuencia del conocimiento consciente de que la falta de restricciones sobre un determinado problema debe conducir al resolutor a considerar los casos más genéricos posibles (menos restrictivos), en este caso a aquellos tipos de formas que menos condiciones cumplan (en este caso propiedades geométricas estandarizadas). Por otra parte, este conocimiento le permite reconocer que se trata de un problema con infinitud de soluciones.

2) *Particularización*: Dentro de ilimitadas posibilidades debe optar, para dar una respuesta concreta al problema, por una figura no sujeta a propiedades geométricas estándares (e.g. “ser cuadrilátero”, “ser polígono regular”, “ser polígono”, “ser convexo”, etc.), dibujando, por ejemplo, una figura con contorno mixto, no convexa y con agujeros.

Presentadas así las configuraciones de referencia, acompañaremos a Nerea en sus tres momentos, diseñando y discutiendo sus respectivas configuraciones personales.

PRIMER MOMENTO: PRUEBA ESCRITA INDIVIDUAL

4. ¿Que figura puede estar detrás del cuadro gris?



Justifica tu respuesta.

Lo primero que pensé fue que detrás del cuadrado había un rectángulo igual a la mitad del cuadrado.

Pero como hay una parte que no se ve nada, puede haber cualquier cosa, como por ejemplo:



También puede haber un ~~rectángulo~~ rectángulo que sea ~~la~~ más de la mitad del cuadrado.

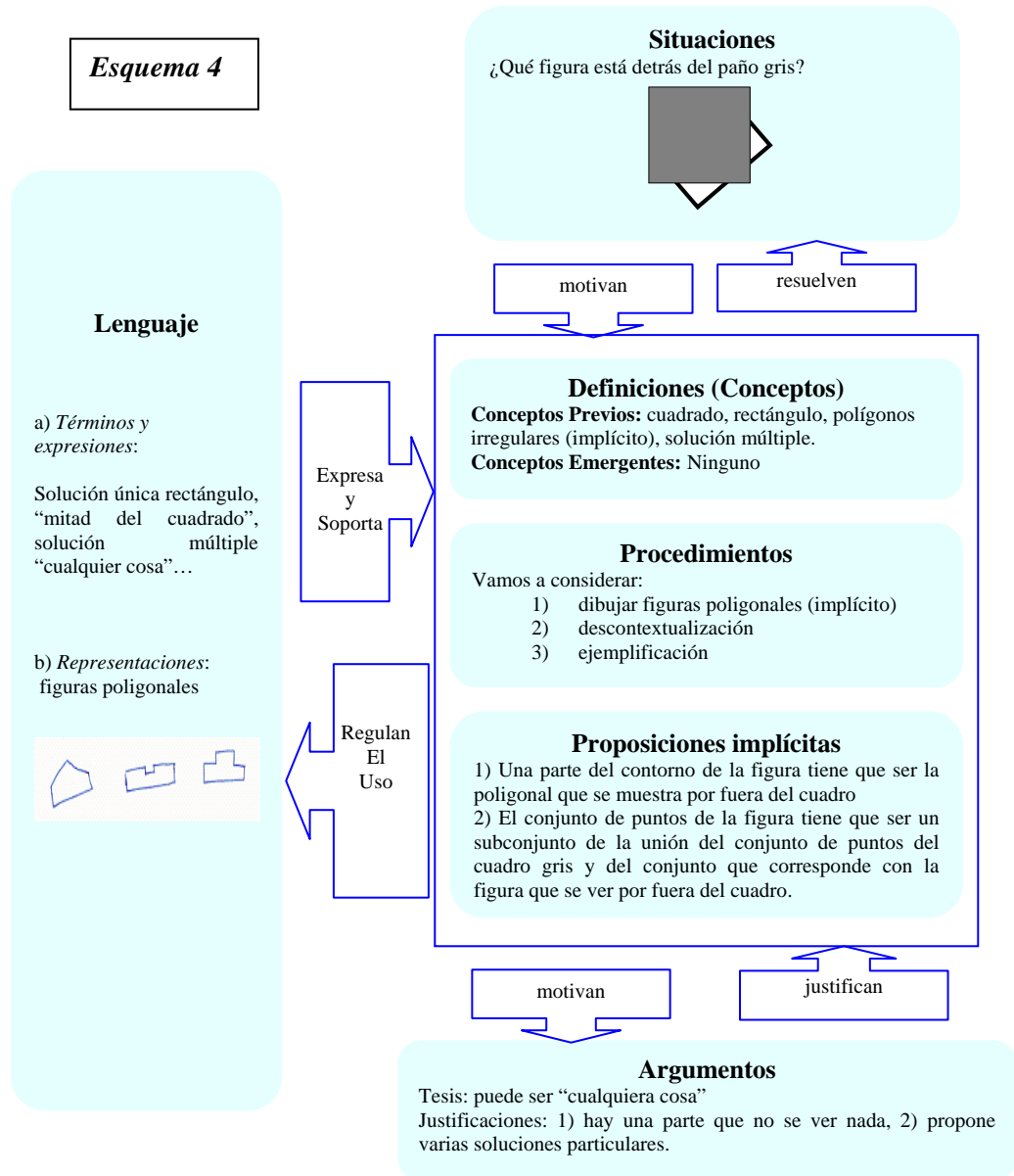
Lo primero que pensé fue que detrás del cuadrado había un rectángulo igual a la mitad del cuadrado.

Pero como hay una parte que no se ve nada, puede haber cualquier cosa, como por ejemplo:



También puede haber un rectángulo que sea más de la mitad del cuadrado.

1) PRIMERA CONFIGURACIÓN COGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA



Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje (términos y expresiones): hace referencia a la noción de rectángulo (igual a la mitad del cuadrado) que utiliza como elemento que acude a su mente para resolver el problema. En una segunda fase, utilizando un lenguaje ordinario, afirma que detrás del cuadro "puede haber cualquier cosa". *Representaciones:* en esta misma fase recurre a representaciones gráficas de familias de polígonos sin referir explícitamente sus

características, asociando cualquier cosa a formas geométricas basadas en polígonos irregulares.

Procedimientos: el primer pensamiento de Nerea le lleva a considerar procesos de representación de rectángulos (mitad del cuadrado) enlazando con la poligonal que se visualiza fuera del cuadro. Posteriormente la percepción de que puede haber “cualquier cosa” le permite ampliar el proceso a representaciones de figuras poligonales arbitrarias. Todo esto lo realiza también mediante un proceso de descontextualización que le permite considerar a la geometría plana como la dimensión adecuada para sus representaciones.

Definiciones: los conceptos que ella emplea se refieren en un principio a cuadrados y a rectángulos para posteriormente referirse, mediante representación gráfica, a tipos de polígonos arbitrarios.

Proposiciones: solo tiene en cuenta parcialmente que no hay restricciones al tipo de figura cuando afirma que “como no se ve nada puede haber cualquier cosa”. Afirmación que sin embargo restringe a polígonos.

Argumentos: se produce una evolución rápida y positiva cuando Nerea percibe que “al no ver nada detrás del cuadro”, puede haber “cualquiera cosa”. Ello le permite justificar que además de rectángulos puede haber otros tipos de figuras, aunque se restringe a figuras poligonales.

2) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA TAREA:

En su exposición escrita se distinguen dos niveles de acción. En un principio dibuja y explica que la solución es un rectángulo que afirma “igual a la mitad del cuadrado” que se puede construir sobre la silueta visible. En un segundo nivel, reconoce que detrás del cuadro “puede haber cualquier cosa”, dibujando familias de polígonos (irregulares, cóncavos, convexos). Por otra parte, cuando argumenta que “puede ser cualquier cosa” parece que no tiene en cuenta las proposiciones implícitas aunque estas se manifiestan en los ejemplos concretos que dibuja.

3) PRIMERA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA

Tabla 8 – 1ª configuración metacognitiva de Nerea

Gestiones primarias (<i>metacognición primaria</i>) 1) <i>Lectura parcialmente reflexiva</i> de la situación problema 2) <i>Ser consciente</i> de proponer figuras que considera que son soluciones. 3) <i>Dar por válido un argumento</i> (para uno mismo).
Gestiones secundarias (<i>metacognición secundaria</i>) 1) <i>De supervisión</i> 2) <i>De regulación</i> 3) <i>De evaluación/verificación (implícita)</i>
Gestiones para una metacognición ideal No hay, al menos explícitamente

Gestiones primarias (*metacognición primaria*)

1) *Lectura parcialmente reflexiva* de la situación problema. De la respuesta de Nerea deducimos que, en un primer momento, hay una reflexión parcial y simple que le lleva a dar una primera solución.

2) *Ser consciente de proponer* una primera solución que, de entrada, la considera correcta: “había un rectángulo igual a la mitad de un cuadrado”. Las acciones que emprende a partir de esta reflexión nos llevan a inferir que los conocimientos matemáticos que manipula para resolver con eficacia dicha situación son de tipo restrictivo.

3) El argumento de que sea “la mitad de un cuadrado” en un primer momento le parece un argumento válido.

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

1) *De supervisión*: El comentario “pero como hay una parte que no se ve nada” es una acción supervisora de la solución encontrada inicialmente que le lleva a la regulación del proceso.

2) *De regulación*: la regulación consecuencia de la supervisión hace que Nerea considere otras soluciones a parte del mencionado rectángulo, pasando de considerar una única solución a múltiples soluciones (todas ellas polígonos).

3) *De evaluación/verificación*: podemos deducir que evalúa puesto que da por resuelto el problema con lo hecho anteriormente.

Con relación a la acción metacognitiva de evaluación, cabe comentar que esta no le lleva a darse cuenta de que la formulación “puede haber cualquiera cosa” entra en contradicción con las restricciones del problema (no dice, por ejemplo, puede haber cualquiera cosa que respete el contorno).

Gestiones para una metacognición ideal

No hay, al menos explícitamente.

SEGUNDO MOMENTO: ENTREVISTA INDIVIDUAL

Entrevistadora (E) ¿Qué tipo de pensamientos o ideas te vinieron a la mente cuando estabas resolviendo el problema?

NEREA: Pues... en un principio, creí que solamente tenía una solución. Porque no sé... lo veía más que evidente que la parte negra era la mitad exacta del cuadrado. No sé por qué pero fue la impresión que me dio, pero claro, me dije, “hay una parte que no se ve absolutamente nada y puede ser cualquier cosa”. No lo sé... puede haber... creo que puede haber, que puede ser la mitad de un cuadrado, que puede ser un rectángulo más grande, que puede tener incluso una forma de picos, de muchas cosas. No sé. Yo di muchas vueltas. Yo creo que puede ser cualquier cosa.

E: ¿Por qué crees que al principio se te ocurrió que podría ser solamente un cuadrado?

NEREA: Porque como dije... No. La mitad de un cuadrado solo, que es un rectángulo, porque como lo veías este trozo así [apuntando la figura] yo vi tan estrecho que dije: no, fijo la mitad del cuadrado. Lo di por hecho por eso, porque tiene los lados delimitados, sin pararme a pensar en que detrás no se ve nada.

E: Entonces, la pregunta la hago de otra forma ¿Porque después pensaste que podría haber más?

NEREA: Porque hay una parte que no sé ve absolutamente nada. Y puede haber cualquier cosa o no haber nada también. Pero bueno, suponemos que se cierra [la figura visible]...

E: ¿Y en cuanto a tu estado emocional mientras resolvías el problema?

NEREA: Al principio eso, muy segura de que era la mitad del cuadrado. Sin embargo, después rápidamente... me quedé muy sorprendida cuando vi que no tenía porque ser así. Que podía ser otra cosa. Me sorprendió mucho. Porque dije yo: claro, si no se ve, puedo ver cualquiera cosa. Por eso ahí sí que me sorprendió.

E: Crees que esta primera impresión que tuviste del problema puede tener que ver con la forma en que tuviste contacto con la geometría desde pequeña?

NEREA: No lo sé, porque a mi siempre me lo dieron todo así. Esto es así, así y así. Y no fue de otra manera. Yo, con las matemáticas siempre me pasa lo mismo. Siempre las veo de una misma manera y no soy capaz de verlas de otra. Si lo veo así, me es muy difícil, muy complicado de... darle la vuelta o hacerlo de otra forma. Por eso me sorprendió eso de decir. ¡Todas! [muchas figuras] [risas, con expresión de sorpresa].

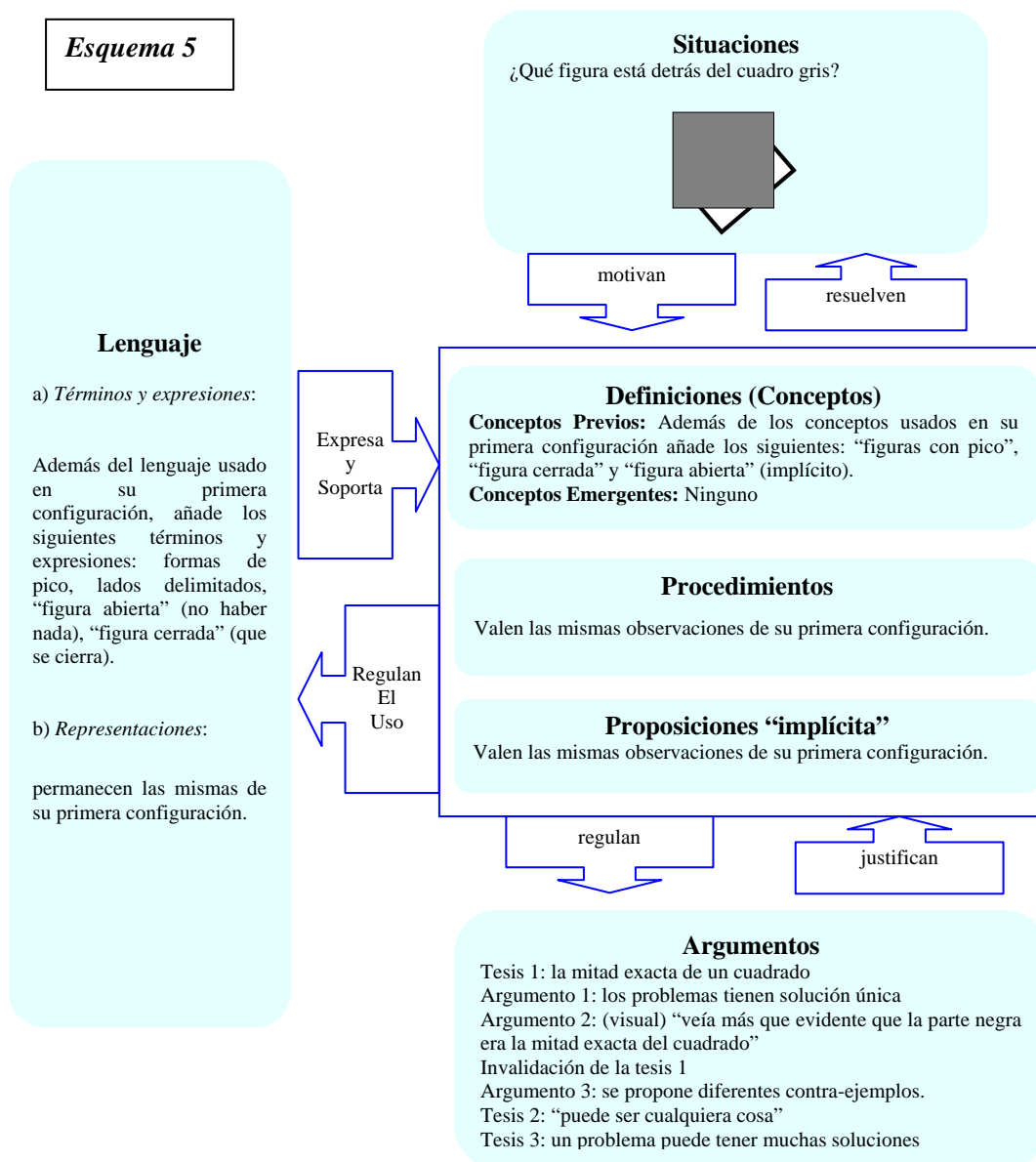
E: ¿Algo más?

NEREA: No...

E: Muchas gracias.

Con esta entrevista, Nerea explicita elementos no declarados en el primer momento, de manera que podemos representar sus nuevos matices en otra configuración (diferentes registros semióticos).

1) SEGUNDA CONFIGURACIÓN COGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA



Algunas consideraciones sobre la configuración anterior

Lenguaje (términos y expresiones): en relación a este objeto lenguaje, en concreto, se observa una mayor claridad de lo que considera como soluciones múltiples factibles, al hacer mención de expresiones como: figuras cerradas, figura abierta, formas de pico. Parece que su concepción de rectángulo está esquematizada en una imagen particular de mitad de un cuadrado y, aún, observamos que su lenguaje continúa limitado a figuras

poligonales. *Representaciones*: no se produce ninguna consecuencia sobre las representaciones gráficas anteriores.

Procedimientos: no hay variación respecto de los procesos que utiliza en su primera configuración.

Definiciones. Se hace explícito el concepto de figura cerrada. Se hace referencia al concepto de figura abierta, que no aparecía en el 1º momento. Hace explícitas las nociones de solución múltiple (cualquier cosa) y forma de pico.

Proposiciones: sigue utilizando las mismas proposiciones de su configuración anterior.

Argumentos: su proceso argumentativo permite apreciar con más claridad cuáles son sus tesis, qué argumentos validan estas tesis y qué argumentos las invalidan.

2) SUCESIÓN DE ACCIONES DISCURSIVAS DURANTE LA ENTREVISTA

Como consecuencia de la intervención de la entrevistadora, Nerea realiza acciones discursivas en las que sus argumentos se hacen más explícitos. Lo más relevante de sus argumentaciones consiste en la descripción que realiza del desequilibrio de sus esquemas de pensamiento (provocado por acciones deliberadas de supervisión, “darle vueltas”, del significado de la no existencia de restricciones al problema) que le permite evolucionar del pensamiento restrictivo que aflora en un primer momento (al admitir una única solución) a un esquema de pensamiento más general (al admitir múltiples soluciones) lo que le provoca un impacto emocional importante. No obstante, no parece haber superado la limitación de identificar figura cualquiera y figura poligonal cualquiera.

3) SEGUNDA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA

En relación a la configuración metacognitiva anterior de Nerea, esta entrevista nos permitió corroborar la existencia de los dos niveles de la metacognición primaria y secundaria que habíamos inferido de su protocolo escrito. Sus respuestas ponen claramente de manifiesto la metacognición primaria (lectura poco reflexiva, primera solución...) pero

lo que resulta más relevante es que confirma plenamente la existencia de metacognición secundaria (supervisión, regulación y evaluación). Los indicadores empíricos que, en nuestra opinión, muestran la existencia de este nivel secundario de metacognición se hallan en ciertas expresiones de la entrevista:

*NEREA: Pues... en un principio, creí que solamente tenía una solución. Porque no sé... lo veía más que evidente que la parte negra era la mitad exacta del cuadrado. No sé por qué pero fue la impresión que me dio, pero claro, **me dije**, “hay una parte que no se ve absolutamente nada y puede ser cualquier cosa”. No lo sé... puede haber... creo que puede haber, que puede ser la mitad de un cuadrado, que puede ser un rectángulo más grande, que puede tener incluso una forma de picos, que de muchas cosas. No sé. **Yo di muchas vueltas**. Yo creo que puede ser cualquier cosa.*

...

*NEREA: No lo sé, porque a mi siempre me lo dieron todo así. Esto es así, así y así. Y no fue de otra manera. Yo las matemáticas siempre me pasa lo mismo. Siempre las veo de una misma manera y **no soy capaz de verlas de otra**. Si lo veo así, **me es muy difícil, muy complicado de... darle la vuelta o hacerlo de otra forma**. Por eso me sorprendió eso de decir. **¡Todas!** [muchas figuras] [risas, con expresión de sorpresa].*

Por último, consideramos que en esta entrevista aparece de manera incipiente el tercer nivel de metacognición ya que, en una de sus respuestas, Nerea considera que una respuesta válida sería que no existe ninguna figura, que nosotros consideramos como solución original:

*NEREA: Porque hay una parte que no sé ve absolutamente nada. Y puede haber cualquier cosa **o no haber nada también**. Pero bueno, suponemos que se cierra [la figura visible]...*

TERCER MOMENTO: DEBATE EN GRUPO

Al reunirse en grupo para debatir dicha cuestión, Nerea fue la primera que intervino.

NEREA Yo lo primero que pensé fue que... la figura esa tenía que ser la mitad del cuadrado. Aunque después... intenté hacer y dije yo que no tiene porqué... porque como ese lado no se ve... puede haber cualquier cosa. Puede haber algo que termine así en pico... podemos ver cualquiera cosa, como aquí no hay nada. Mientras que entre en el cuadrado puede haber cualquiera cosa.

ROCIO Pero solo hay una que no puede ser. Un cuadrado no puede ser.

NEREA El cuadrado no.

...

NOA Pero no puede ser, por ejemplo, un círculo, no puede ser triángulo, no puede ser...

NEREA Sí que puede haber. Puede haber a lo mejor la mitad de un círculo.

ROCIO ¡Hombre!, tenía que tener siempre como premisa quien es eso [se refiere a la forma visible con la que enlazar la figura escondida]. A partir de ahí puede meter la forma que quiera.

NEREA Pero, ¿no puede ser un círculo toda esa figura? [preguntando en asentimiento de los demás]

ROCIO Sí.

NOA ¿Cómo así? [dibujando un trozo de circunferencia que enlaza con la forma visible]

JUAN Un círculo no sería. Tendría un lado circular.

NOA Sí. Esto es lo que me equivocó. O sea, he considerado sólo una figura completa: círculo, triángulo, hexágono... y la primera cosa que miré era así... antes de leerlo también. Me pareció poder ver un rectángulo, uniendo el segmento este con esto. Y después he dicho: no! demasiado fácil.

JUAN Fácil porque tú pensabas que el rectángulo iba por el medio. Tal y como está aquí parece que no, que no va por el medio. Nerea, dijiste que partiera el cuadrado a la mitad.

NEREA Yo pensaba que al hacer así que era justamente la mitad de un cuadrado.

...

NOA Pensé en excluir todo. Todas las figuras conocidas...

JUAN ¿Qué figuras más conocidas puede haber? Un pentágono...

ROCIO Rectángulo, trapecio...

NEREA Pentágono yo creo que no

(Hablan todos)

NEREA Que no. Un pentágono que no. [implícitamente está pensando en polígono regular, la figura dibujado por ella no es identificada como un polígono, sino como una figura con pico]

JUAN ¡Que sí, j.....!. [dibuja un pentágono irregular]

NEREA: Yo no pensé eso!. No pensé que fuera otra cosa [aparte de un cuadrilátero]

JUAN: Tú dijiste: pensé que había un rectángulo que pasaba justo por la mitad de un cuadrado...

NEREA: Esto poniéndolo así... o sea...[uniendo los extremos de la forma visible]

JUAN ¡Ja, ja, ja, ja!

NEREA Claro. No hace falta que sea un cuadrado...

...

El siguiente episodio, se aparta del objetivo del problema, por unos momentos, al ocuparse el debate de la forma del cuadro:

NOA ¿Literalmente el cuadro es un cuadrado o no?

ROCIO No.

NEREA Yo creía que era un cuadrado. Por eso pensé en la mitad de un cuadrado.

JUAN Pero aquí no te dice que es un cuadrado.

NEREA No. Dice cuadro.

ROCIO Claro.

NOA Yo pensé que cuadro era cuadrado porque creía que era la misma palabra.

JUAN Un cuadro puede ser un rectángulo... [risas]

ROCIO: Sí. Eso va con la moda [risas]

...

A continuación, el debate se dirige de nuevo a tratar de dar respuesta a la situación-problema:

JUAN: No sé, vi la silueta y la primera figura que me vino, después del rectángulo, fue una así y tal que abarcara la máxima superficie por detrás del cuadro: un decágono.

[irregular, enlazando con los límites del cuadro]

[Se produce el silencio durante unos segundos]

ENTREVISTADORA: *Juan, ¿por qué se te ocurre que tiene que abarcar la máxima superficie?*

JUAN: *No sé. Quizás porque estudié economía y siempre estábamos pensando en sacar el máximo beneficio a las cosas....*

...

ROCIO: *Yo pensé en un círculo pero no, porque puede complicarse mucho.*

NEREA: *Ah claro.!. Sí, yo creo que es esto [aceptando y apuntando la propuesta de Juan]*

ROCIO: *Yo creo que es esto. [Asintiendo]*

NEREA: *Sí, pero una figura que vaya hasta aquí [señalando el borde del cuadro] te sale por fuera.*

JUAN: *Así como ésta que he hecho ahora.*

ROCIO: *Sí. Pero si tu cojes una figura que vaya hasta aquí y después cubre hasta allí...*

NEREA: *No.*

ROCIO: *Te queda justo debajo.*

NEREA: *¡No, no... Esto sale para fuera, no te queda justo debajo!*

ROCIO: *No.*

NEREA: *¿Cómo que no te queda justo?*

ROCIO: *¡Vamos a ver! Si esto lo cojo y ahora haces, si lo bordeas, chas, chas, chas....*

NEREA: *Te queda justo.*

JUAN: *Si pillas desde esta raya, la pillas por dentro, pues claro que te sales.*

ROCIO: *Claro, tienes que ajustarte al tamaño de los bordes.*

NEREA: *Lo que yo digo es que, si tu sigues por aquí y por aquí [bordeando el cuadro, intentando dibujar un decágono regular] al final yo creo que te sales [del cuadro]*

JUAN: *Con las medidas exactas es imposible que te salgas.*

NEREA: *Pero es que tiene parte por fuera*

ROCIO: *Que no... mira, si coges simplemente la parte que se ve y simplemente coges justo el área que ocupa la figura, lo tapa... hombre, desde luego, si mueves esto se va a ver, pero si no lo... aquí no dice que... dice ahora mismo.*

JUAN: *Calculando las medidas...*

(Hablan todos a la vez.)

ROCIO: *[volviendo a recuperar el objetivo de la tarea] Pero aquí no te esta diciendo que tú no tengas... o sea que... la figura tenga que ser más pequeña, o que no tenga que ver que si lo mueves de otra manera, simplemente te esta diciendo... tienes este cuadro gris y esto.... Piensa lo que puede haber debajo simplemente, en esta posición. Que tú desde luego, si tienes, yo que sé...*

NEREA: *Ah bueno, claro, no tiene porqué... [referirse a la superficie]*

ROCIO: *¡Claro!!*

(Hablan juntas)

...

ROCIO: *Estamos condicionados por lo que sabemos de pequeños.*

NEREA: *Es lo que decías [refiriéndose a Juan]. Es como si estuviera algo por debajo que sigue el mismo "orden".*

JUAN: *Si estuviera una mesa, por ejemplo, una carpeta y un folio que se sale por fuera. Estás viendo eso! [se refiere al rectángulo]*

NOA: *Y también porque es lo más simple: una línea recta, para llegar de un punto a otro. Puede ser así [uniendo los extremos de la forma visible]*

...

NEREA: *Directamente es la forma que yo puse aquí. Primero empecé por el rectángulo.*
ROCIO: *Lo primero que se te ocurre es lo conocido.*
...
NEREA: *No. No es por lo conocido, sino por lo que decía Noa, la línea recta, lo más rápido de una esquina a otra. Pero después vi que podía haber cualquier cosa, no tenía porqué haber esquinas...*
JUAN: *Incluso si lo piensas puede ser un dibujo, un polígono, una figura geométrica. Puede haber una casita pintada con un tejado rojo con su ventana azul, puede...*
NEREA: *Como si no hay nada! Como si a lo mejor es una caja que no tiene tapa!*
ROCIO: *No tiene porqué haber ninguna figura. A lo mejor ya es así [tal como muestra el gráfico del enunciado]*
JUAN: *Puede haber muchas figuras...*
ROCIO: *Por poder... puede haber infinitas, salvo el cuadrado.*
JUAN: *Ya, ya, bueno. A lo mejor existe el vacío.*
ENTREVISTADORA: *[dirigiéndose a Noa] ¿Piensas como ellos que puede haber infinitas?*
NOA: *Sí, sí. Por ejemplo, si consideramos que lo que no se puede ver, pero que completa a ésta [la forma visible]. Tirando esta manera “no regular” yo estoy convencida que puede haber infinitas.*
...
Todos hablan.

Durante el debate en grupo, Nerea considera nuevos elementos a tener en cuenta en la resolución de la tarea que no había hecho explícitos en los dos primeros momentos. Estos nuevos elementos nos permiten diseñar nuevas configuraciones cognitivas y metacognitivas que en cierta medida, amplían, pero también introducen modificaciones con respecto a las anteriores.

1) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS DURANTE EL DEBATE EN GRUPO (TODOS LOS PARTICIPANTES):

Los protagonistas de este debate actúan como proponentes y oponentes del discurso. Las siguientes tesis tienen lugar en el debate:

T1 (*Nerea*): “mientras entre en el cuadrado puede haber cualquiera cosa”.

T2 (*Rocio*): “un cuadrado no puede ser”.

T3 (*Noa*): “no puede ser un círculo, no puede ser un triángulo...”.

T4 (*Nerea*): “puede ser una parte de un círculo”.

T5 (*Juan*): “puede haber un pentágono...”

T6 (*Nerea*): “un pentágono, no”.

T7 (*Juan*): “un cuadro puede ser un rectángulo”.

T8 (*Juan*): “un figura que abarque la máxima superficie, un decágono”.

T9 (*Nerea*): “un decágono, no”.

T10 (*Nerea*): “un decágono irregular puede ser la solución”.

T11 (*Rocio*): “una figura que se ajuste al tamaño de los bordes”.

T12 (*Nerea*): “un decágono regular no puede ser”.

T13 (*Juan*): “puede ser un dibujo, un polígono, una figura geométrica, una casita pintada...”.

T14 (*Nerea*): “como puede no haber nada... una caja sin tapa”.

T15 (*Juan*): “puede haber muchas figuras”.

T16 (*Rocio*): “puede haber infinitas, salvo el cuadrado”.

Damos a continuación la trayectoria argumentativa individual, de cada participante:

Nerea: Hay distintos segmentos en el discurso de Nerea en que ella actúa como proponente y oponente del discurso. En un primer segmento, explica su respuesta dada en el protocolo de entrevista y, además, la matiza y la reformula con la tesis (T1). Matizando esta tesis concuerda con la tesis (T2) e invalida parcialmente la tesis (T3), llegando a un consenso con los otros miembros del grupo sobre la validez de tesis (T4). En un segundo segmento, se opone a la tesis (T5). En un tercer segmento, juntamente con los demás trata sobre sí el cuadro gris puede ser un cuadrado. En un cuarto segmento, en conformidad con (T1) concuerda con (T8) y propone (T10) y a continuación (T12). En el último segmento, propone (T14) y llega al acuerdo con (T16).

Juan: También hay distintos segmentos en el discurso de Juan. Entra en el discurso concordando con las tesis (T3) y (T4). A continuación, propone la tesis (T5) que reafirma ante la oposición de sus compañeros. Posteriormente, a partir de la discusión sobre la forma que puede adoptar el cuadro gris propone la tesis (T7). En otro segmento Juan, apoyado en sus conocimientos metacognitivos derivados de experiencias anteriores, propone la tesis (T8) que es aceptada con restricciones por otros compañeros y que lo lleva a justificarla. A continuación amplía el campo de posibilidades de soluciones admisibles, proponiendo las tesis (T13) y (T15).

Rocio: También Rocio actúa como proponente y oponente, como los demás. Su primera tesis (T2) consiste en un contraejemplo que invalida parcialmente la tesis (T1). Admite las

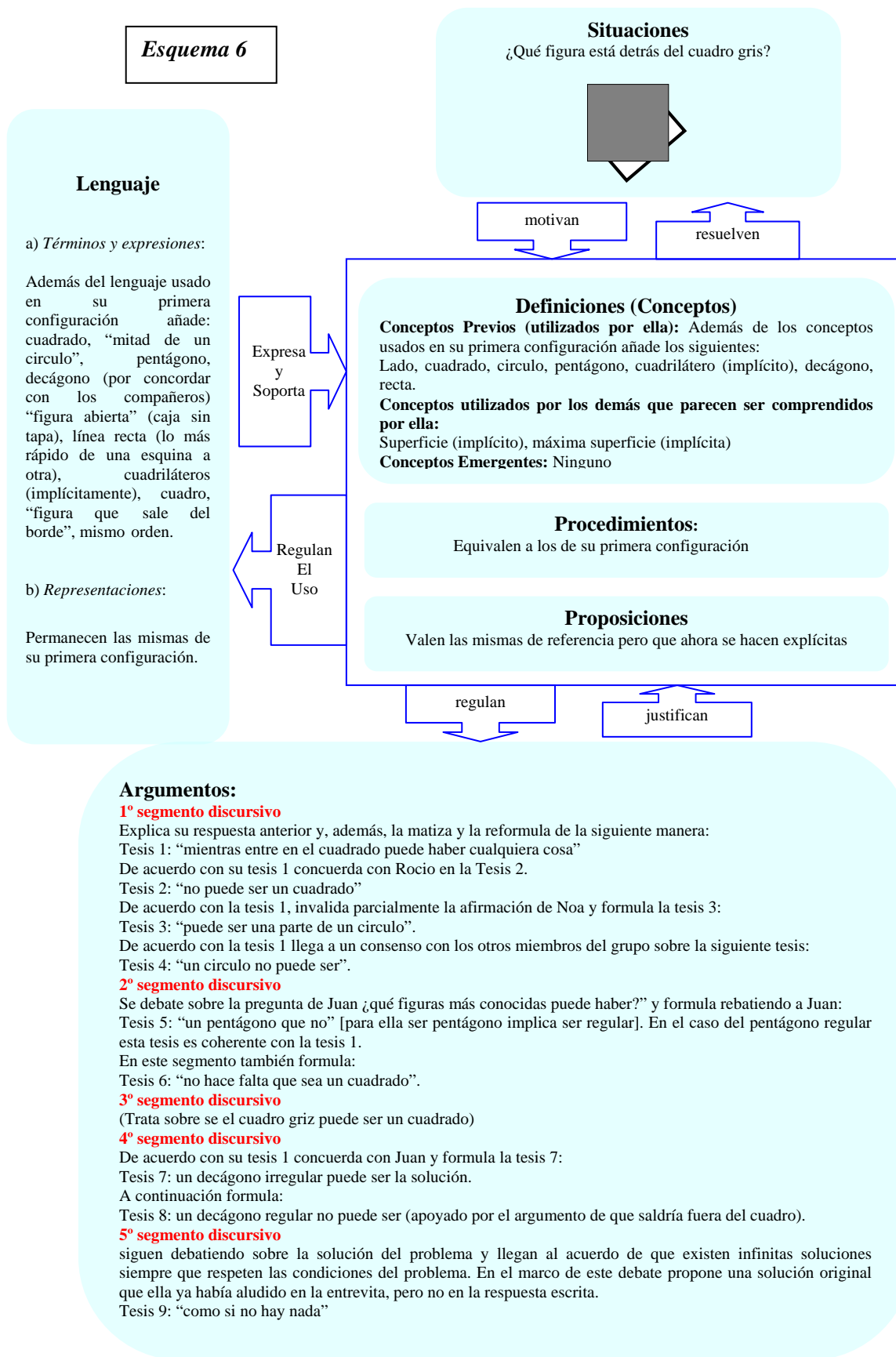
tesis (T3) y (T4). Añade, en la dirección de la tesis (T5) otras figuras factibles. En otro segmento parece concordar con la tesis (T7). Refuerza la tesis (T8) al tiempo en que trata de aclarar dicha tesis a otros participantes. Concuerta en el último segmento del debate con las tesis (T13), (T14) y (T15), formulando a su vez la tesis (T16).

Noa: Al igual que Rocio, entra en el discurso proponiendo la tesis (T3) que incluye contraejemplos a la tesis (T1) y, además, justifica su tesis. Presenta la confusión entre las nociones de cuadro y de cuadrado, que genera un debate entre sus compañeros y que llevó a Juan a proponer la tesis (T7). Al final del debate, Noa apoya su primera visión de la solución con el argumento de que podría ser un rectángulo, puesto que se podrían prolongar los extremos de la poligonal visible por medio de una “recta”. Por fin, llega al acuerdo con la tesis (T16).

2) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS DE NEREA DURANTE EL DEBATE EN GRUPO:

La evolución de sus acciones actuativas y discursivas quizás constituye el cambio más notable de sus configuraciones. Las aportaciones que realiza y recibe del grupo le llevan a aceptar y rechazar diferentes tipos de figuras como posibles soluciones de la tarea. En particular, podemos identificar que sus concepciones de polígonos se restringen, a nivel discursivo, en principio, a la noción de polígono regular. También se reconoce una evolución de la idea de rectángulo que al principio parecía asociarla a la mitad de un cuadrado, restricción que ahora supera. Por otra parte, identifica ahora una figura abierta con una caja sin tapa, hecho que amplía su primera concepción de figura abierta como figura vacía. Sus argumentaciones justifican algunos conceptos de momentos anteriores y, a la vez, confirman sus concepciones confusas de polígono (e.g. representando polígonos irregulares como soluciones factibles, mientras invalida estas representaciones a nivel discursivo). De modo general, sus argumentaciones son más ricas y se revelan aún con mucho más detalle en relación con las otras dos configuraciones anteriores. El debate le permite reconocer de forma más deliberada algunas limitaciones que posee, como por ejemplo, que el rectángulo no es sólo la mitad de un cuadrado, que otras figuras no pensadas pueden ser soluciones al problema. Sin embargo, sus concepciones “confusas” sobre la “idea” de polígono le llevan a rechazar, en principio, soluciones factibles.

3) TERCERA CONFIGURACIÓN COGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA



Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje: Nerea maneja ahora, nuevos términos y expresiones debido al propio desarrollo del debate, algunos de los cuales son fruto de las aportaciones de otros miembros del grupo y que ella acepta o rechaza en función de sus esquemas de pensamiento.

Definiciones: Los conceptos mencionados en este tercer momento, que se encuentran en el cuadro anterior, aparecen como consecuencia de las aportaciones comunes al debate, entre ellas podemos citar los de pentágono y decágono, que asocia a los pentágonos y decágonos regulares, porque generan discusiones de interés a cerca de si pueden ser o no consideradas soluciones factibles: “un pentágono que no”, “no te queda justo” (porque se saldría del borde del cuadro). Al afirmar Nerea que el pentágono no puede ser solución al problema, mientras que lo representa en su protocolo escrito (primer momento) como una posible solución, nos permite deducir que su concepción de pentágono está asociada a la de pentágono regular. Del mismo modo ha ocurrido en relación con el decágono. De nuevo, su concepción errónea de identificar polígono con polígono regular le conduce a dudar sobre la viabilidad de la propuesta de Juan (uno de sus compañeros del debate).

Proposiciones: La proposición (2) el conjunto de puntos de la figura tiene que ser un subconjunto de la unión del conjunto de puntos del cuadro gris y del conjunto que corresponde con la figura que se ve por fuera del cuadro, se hace explícita por concordar con los compañeros.

4) TERCERA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA (PERSONAL) DE NEREA:

Tabla 9 – 3ª configuración metacognitiva de Nerea

<p>Gestiones primarias (<i>metacognición primaria</i>)</p> <p>Además de la (1) de su configuración anterior, destaca:</p> <p>2) <i>Reconoce</i> que algunas figuras regulares (e.g. pentágono y decágono) no pueden ser soluciones.</p> <p>3) <i>Dar por válido</i> un argumento (para uno mismo, aunque haya sido dado por otros; por ejemplo reconoce que el círculo no puede ser, que el decágono irregular puede ser, etc.)</p>
<p>Gestiones secundarias (<i>metacognición secundaria</i>)</p>

- 1) *Supervisa*: “esta figura puede (o no puede) ser solución de la tarea”.
- 2) *Regula* sus acciones mediante reflexiones que surgen del debate.
- 3) *Evalúa/verifica*: lo más destacable es que se ha producido un proceso de evaluación que transcurre entre la entrevista y la formulación de su resolución para el resto del grupo (aproximadamente 20 minutos). Durante este proceso matiza y reformula la solución expuesta en la entrevista “mientras entre en el cuadrado puede haber cualquiera cosa”.

Gestiones para una metacognición ideal

Consideramos que hay indicios porque aporta una solución original y la justifica con la contextualización: “como si no hay nada. Como si a lo mejor es una caja que no tiene tapa” (que se podría considerar como el caso de generalización máxima).

Gestiones primarias (*metacognición primaria*)

Así como ha ocurrido con la entrevista (segundo momento) el debate en que participa Nerea nos ha permitido corroborar lo dicho en el primer nivel de su primera configuración. *Ella* da por válidos los argumentos mencionados en su configuración epistémica cognitiva y también algunos argumentos de los demás. En cuanto al nivel de metacognición secundaria, merece ser destacado que:

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

De modo general, los tres procesos que se siguen están íntimamente relacionados en este debate. Como consecuencia del debate se tiene que, al mismo tiempo que Nerea contribuye a la supervisión, regulación y evaluación de los procesos de pensamiento por parte de los demás compañeros de debate, los demás también contribuyen a la supervisión, regulación y evaluación que Nerea hace de sus propios procesos de pensamiento.

1) *Supervisa*: en los momentos en que pone a prueba sus propios procesos de pensamiento y de los demás: “esta figura puede (o no puede) ser solución de la tarea”.

2) *Regula*: al poner a prueba la afirmación “esta figura puede (o no puede) ser solución de la tarea”, hay un cambio en su forma de pensar; o cuando, por ejemplo, abandona su

primera concepción de rectángulo o cuando parece “aceptar” la existencia del decágono como una solución factible.

3) *Evalúa/verifica*: cuando por ejemplo lleva a cabo la verificación de la afirmación “esta figura puede (o no puede) ser solución de la tarea”, o sea, evalúa si las formas sobrepasan los límites del cuadro anticipándose a su representación ostensiva.

Gestiones para una metacognición ideal

Las consideraciones para este apartado son las mismas que se encuentran en el cuadro.

ALGUNAS CONCLUSIONES PARA EL CASO NEREA

De modo general, consideramos que nos hemos podido acercar con un poco más de detalle y de forma progresiva, en los tres momentos, a la manera como Nerea razona sobre la tarea propuesta.

Así, es posible decir que, el “caso Nerea” nos permite deducir una evolución relevante (a pesar de sus limitaciones cognitivas y metacognitivas) de sus esquemas de pensamiento, que pasan por considerar en un primer momento una única solución al problema a considerar múltiples soluciones (lo que le provoca, incluso, un sentimiento de sorpresa) proporcionando representaciones gráficas de las soluciones.

En su primera respuesta escrita sólo considera formas poligonales, aunque no se refiera a ellas de forma explícita. En cambio, en el debate admite como soluciones figuras con contornos de los que pueden formar parte, en particular, trozos de círculo. También admite cualquiera figura que respete la forma visible, excluyendo algunos polígonos regulares por no respetar la restricción y, además, aporta una solución original que consideramos de máxima generalización (“como puede no haber nada”). En esta evolución es fundamental la intervención del “otro” (bien entrevistadora o bien compañeros del debate).

Las acciones restrictivas que al principio emprende Nerea parecen ser reflejo de una instrucción “cerrada”, que ha generado actitudes restrictivas de su autonomía personal, como podemos observar en sus declaraciones, en el momento de la entrevista individual y, también, en las de sus compañeros durante el debate en grupo que apoyan esta idea:

NEREA: *No lo sé, porque a mí siempre me lo dieron todo así. Esto es así, así y así. Y no fue de otra manera. Yo, con las matemáticas siempre me pasa lo mismo. Siempre las veo de una misma manera y no soy capaz de verlas de otra. Si lo veo así, me es muy difícil, muy complicado de... darle la vuelta o hacerlo de otra forma. Por eso me sorprendió eso de decir. ¡Todas! [muchas figuras], [risas, con expresión de sorpresa].*

NOA: *Sí. Ésto es lo que me equivocó. O sea, he considerado solo una figura completa: círculo, triángulo, hexágono... y la primera cosa que miré era así... antes del leerlo también. Me pareció poder ver un rectángulo, uniendo el segmento éste con éste. Y después he dicho: no!, demasiado fácil.*

ROCIO: *Yo pensé en un círculo pero no, porque puede complicarse mucho.*

Desde el punto de vista metacognitivo, podemos señalar que hubo una evolución continua. Del protocolo escrito hemos deducido que, en la resolución, Nerea activó el primer y segundo niveles de la metacognición de referencia. En relación al segundo momento, la entrevista con la investigadora nos permitió corroborar la existencia de los dos niveles de la metacognición primaria y secundaria que habíamos inferido de su protocolo escrito y observar indicios de un tercer nivel de metacognición cuando considera como válida la siguiente respuesta, que consideramos original “puede haber cualquier cosa o no haber nada también”. Estos procesos metacognitivos son aún más activos durante el debate. De entrada, Nerea reformula la solución expuesta en la entrevista diciendo que “mientras entre en el cuadrado puede haber cualquiera cosa”, matiz ese que pensamos puede ser consecuencia de una evaluación ocurrida en el intervalo de tiempo (de más o menos 20 minutos) entre la entrevista y el debate, o incluso en el propio momento del debate, durante su “discurso”.

De modo general, durante el debate en grupo se produce una importante labor de supervisión y evaluación de las sucesivas soluciones que se van aportando por parte de cada uno de sus miembros, situación en la que Nerea participa activamente cuando señala aquellos tipos de forma que pueden ser o no admitidos como solución, siempre apoyándose en sus concepciones confusas de la idea de polígono.

También, haciendo una confrontación de los tres momentos en que hemos acompañado a Nerea, nos permitió reconocer que cualquier análisis realizado sobre pruebas escritas o incluso entrevistas individuales (y aquí incluimos nuestros instrumentos de recogida de datos) serán de hecho restrictivos, simples ... dado que estos análisis no conseguirán revelar matices de pensamiento “escondidos” detrás de las palabras y expresiones y, por tanto, pueden inducirnos a extraer conclusiones poco fiables en relación

con los conocimientos reales del sujeto. De este modo, reconocemos el valor del debate y por tanto del diálogo y pensamos que sería el diálogo espontáneo (en clase y entre todos) el que mejor lograría aproximarse a una información más precisa de los conocimientos reales de cada sujeto. En el “caso Nerea” observamos este hecho cuando inferíamos, en los dos primeros momentos (prueba escrita y entrevista) que ella manejaba la idea de que “no existen restricciones que limiten los tipos de formas”, avalada por las representaciones gráficas que había hecho de formas poligonales irregulares y que, en el tercer momento, se contradice cuando discute la imposibilidad de considerar pentágonos o decágonos como soluciones factibles (al restringir su pensamiento a los polígonos regulares). El diálogo (consigo mismo y con los demás) le ha permitido hacer cambios y avanzar en sus configuraciones metacognitiva y cognitiva. En esta dirección D’Amore (1997) señala la importancia de las reflexiones personales explícitas antes, durante y después del proceso de RP y, como tal, observa que concluir precipitadamente que uno “no sabe resolver los problemas” es algo arriesgado y vago, buscar las causas del porqué se ha bloqueado parece ser un ejemplo de diagnóstico mucho más serio.

La activación, durante la entrevista, del nivel secundario de metacognición de referencia, en concreto, la acción evaluativa que actúa sobre la solución encontrada en su respuesta escrita, facilita la solución del problema y mejora su configuración cognitiva, puesto que hace explícita una propiedad que antes la tenía como implícita. Todo este contexto converge en la dirección de aceptar la hipótesis **H3** de trabajo: *El hecho de que una persona tenga adquirido y controle el **conocimiento metacognitivo** indicado para afrontar nuevos aprendizajes, aunque no siempre es garantía de éxito, en muchos casos consigue mejorar su configuración cognitiva, facilitando la adquisición de dichos aprendizajes.*

En definitiva, observamos la importancia del diálogo en grupo para estar favoreciendo desarrollos de estructuras de pensamiento, principalmente de orden metacognitivo. Los distintos caminos que ofrecen unos participantes a otros, durante el debate/diálogo, proporcionan discusiones, reflexiones activas, comprobación de hipótesis, ideas emergentes, establecimiento de relaciones... y más oportunidades para aprender cognitiva y metacognitivamente. El diálogo en grupo proporciona procesos de regulación y supervisión propios, o sea, Nerea se auto-supervisa y se auto-regula y también regula a los demás. Unos regulando a los otros y a sí mismos.

Aún sobre el “caso Nerea”, queremos señalar que las distintas configuraciones cognitivas y metacognitivas, diseñadas son ampliaciones consecuentes, en un primer momento, con el modo en cómo hemos actuado (a través de nuestros instrumentos para recogida de datos) para aproximarnos cada vez más a su forma de pensar.

EL CASO DEBATE EN GRUPO

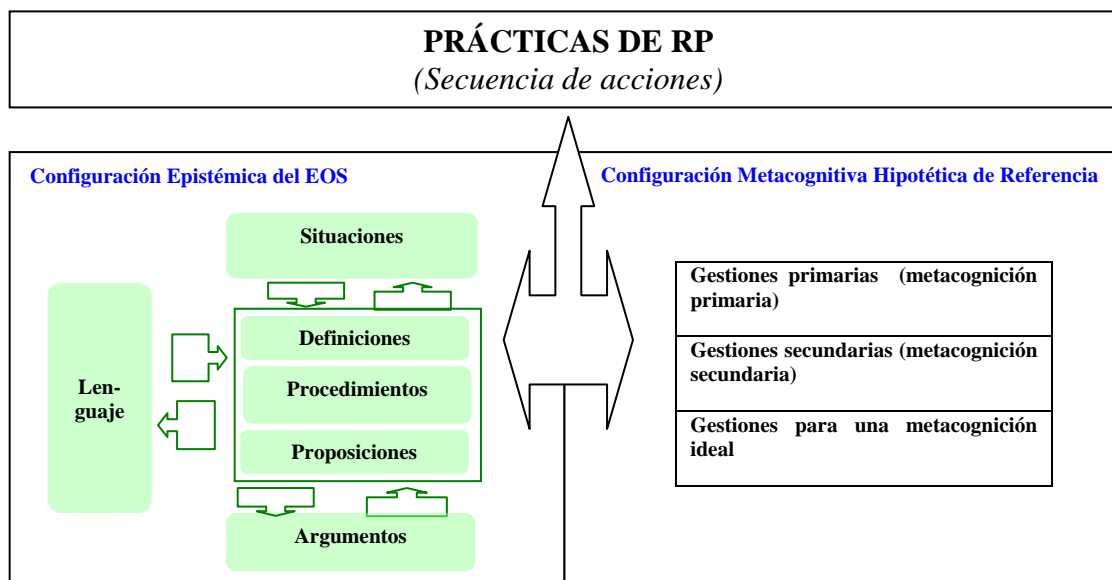
En el estudio que sigue, hemos propuesto un problema -que se enuncia a continuación- y que fue sometido a la consideración de cuatro estudiantes para maestro de Educación Primaria (Noa, Nerea, Rocio y Juan) quienes, de manera conjunta, intercambiaron sus opiniones en voz alta durante aproximadamente 60 minutos acerca de los distintos aspectos de la tarea. Recordamos que, con anterioridad, cada uno de los participantes, de manera individual, había tenido la oportunidad de estudiar la tarea, resolverla, primero por escrito y, luego dando sus opiniones en una entrevista corta, llegando al debate con una posición concreta respecto de la situación-problema planteada. El “caso Debate en Grupo” que aquí presentamos seguirá una metodología similar a la del “caso Nerea”.

PROBLEMA DEL PESCADOR

Un pescador llevó al mercado 50 kilos de jurel. Durante la mañana vendió el kilo a 3 € y, por la tarde, para venderlo todo, rebajó el precio a 2 €. Si vendió los 50 kilos, ¿cuánto dinero recaudó?

En la elaboración de este problema tuvimos en cuenta dos aspectos: 1) que los participantes dispusiesen de los conocimientos necesarios para su resolución y 2) que se prestase a múltiples respuestas, dependiendo de la venta de una cantidad variable de pescado cada media jornada, con la condición de que se vendieron en total 50 kilos.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA Y METACOGNITIVA INSTITUCIONAL
ACTIVADAS EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA



Solución Experta:

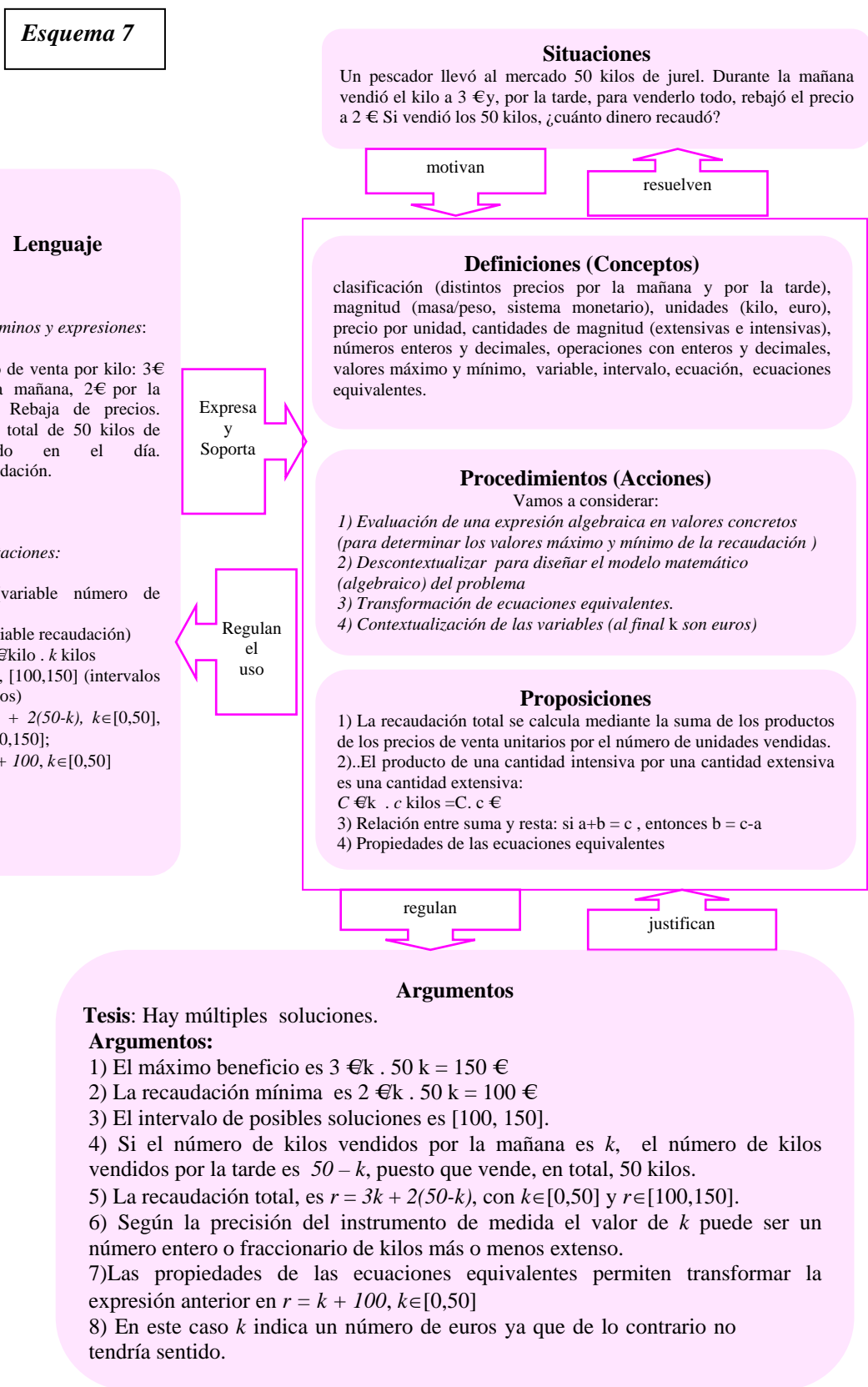
*Protocolo de un profesor (resolutor experto)*⁴: Al no precisarse el número de kilos que se venden por la mañana o por la tarde, y al ser los precios de venta por kilo distintos en cada media jornada (3 y 2 € respectivamente) del enunciado del problema cabe percibir que la situación posee *múltiples* soluciones. Se dispone de información acerca del número total de kilos vendidos en la jornada (50). No se dice, en cambio, si ha podido vender “casi” todo por la mañana, “casi” todo por la tarde, o parte que del total en cada media jornada, por lo que puede darse cualquier hipótesis “a priori”. Se trata de determinar un intervalo de soluciones, utilizando las hipótesis de obtención del máximo y mínimo beneficio: a) si vende todo por la mañana, alcanza el máximo beneficio: 3 €k. 50 k = 150 €; b) si vende todo por la tarde, obtiene la recaudación mínima: 2 €k . 50 k = 100 €. Así, el intervalo de posibles soluciones es [100, 150] (para simplificar incluimos los extremos). En general, el número de kilos vendidos por la mañana es una variable *k*, que determina, a su vez, el

⁴ Tal y como hemos procedido metodológicamente, realizamos unas preguntas relacionadas con la cuestión al resolutor experto (e.g. ¿por qué considera que se pudo vender cualquier cantidad comprendida entre 0 y 50 kilos en cada media jornada? ¿en algún momento pensó que dado el enunciado del problema debería considerar infinitas soluciones? ¿estima necesario resolver algunos casos particulares? ¿por qué ha elaborado, de partida, un modelo algebraico del problema?)

número de kilos vendidos por la tarde: $50 - k$, puesto que vende, en total, 50 kilos. La recaudación total, entonces, es otra variable r , que vendrá dada por la ecuación $r = 3k + 2(50-k)$, con $k \in [0,50]$ y $r \in [100,150]$. También ha de tenerse en cuenta que, según la precisión del instrumento de medida de la masa/peso del pescado de que se disponga, el valor de k puede ser un número entero o fraccionario de kilos más o menos extenso (en todo caso decimal) por lo que la variable k tomará valores en un conjunto, más o menos amplio, de número decimales del intervalo $[0,50]$. También podría proceder a la manipulación algebraica del modelo anterior para obtener una ecuación equivalente $r = k + 100$, $k \in [0,50]$. Debe tenerse en cuenta que k , en estas expresiones, ya no representa un número entero o fraccionario de kilos, sino de ¡euros! ($3 \text{ €} \cdot k \text{ kilos} - 2 \text{ €} \cdot k \text{ kilos} = (3-2) \text{ €} \cdot k \text{ kilos} = 1 \text{ €} \cdot k \text{ kilos} = k \text{ €}$). Es decir, el resolutor experto es consciente de la manipulación de cantidades intensivas y extensivas que le permiten contrastar que suma cantidades de una misma magnitud –de lo contrario la última ecuación no tendría sentido–.

Otros expertos han aceptado esta solución como válida sin aportar respuestas alternativas esencialmente distintas de ésta.

1) CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA



Argumentos

Tesis: Hay múltiples soluciones.

Argumentos:

- 1) El máximo beneficio es $3 \text{ €} \cdot 50 \text{ k} = 150 \text{ €}$
- 2) La recaudación mínima es $2 \text{ €} \cdot 50 \text{ k} = 100 \text{ €}$
- 3) El intervalo de posibles soluciones es $[100, 150]$.
- 4) Si el número de kilos vendidos por la mañana es k , el número de kilos vendidos por la tarde es $50 - k$, puesto que vende, en total, 50 kilos.
- 5) La recaudación total, es $r = 3k + 2(50-k)$, con $k \in [0,50]$ y $r \in [100,150]$.
- 6) Según la precisión del instrumento de medida el valor de k puede ser un número entero o fraccionario de kilos más o menos extenso.
- 7) Las propiedades de las ecuaciones equivalentes permiten transformar la expresión anterior en $r = k + 100$, $k \in [0,50]$
- 8) En este caso k indica un número de euros ya que de lo contrario no tendría sentido.

Algunas consideraciones sobre la configuración epistémica anterior

Lenguaje: Los términos (kilo, euro, euros/kilo, precio de venta, rebaja, recaudación, venta total, importe total de la recaudación) se suponen conocidos por el resolutor. No se indica el número de kilos vendido por la mañana y por la tarde, pero sí el número total de kilos vendidos en el día. Por tanto, la técnica de resolución del problema depende de las decisiones (hipótesis) que tome el resolutor, limitadas por los valores máximo y mínimo de la recaudación, en función del número (variable) de kilos que pueda vender por la mañana y por la tarde.

Definiciones: Desde el punto de vista institucional, los *conceptos* implicados, mencionados en el esquema anterior, se suponen ya conocidos por el resolutor. También se supone conocida la noción de modelo matemático (algebraico en este caso).

Procedimientos: En la planificación de la resolución, los procesos esencialmente relevantes se organizan según la secuencia: 1) Evaluación de una expresión algebraica en valores concretos (para determinar los valores máximo y mínimo de la recaudación), fijando el dominio de la variable; 2) Descontextualizar para diseñar el modelo matemático (algebraico) del problema, introduciendo variables para proceder a la búsqueda de un modelo general, que sustituya, con ventaja, al estudio de casos particulares; 3) Transformación de ecuaciones equivalentes, en otras más simples mediante el uso de las reglas de manipulación algebraica y 4) Contextualización de las variables (al final k son euros) mediante la interpretación adecuada de las cantidades intervinientes.

Proposiciones: La primera propiedad que se ha de precisar es que la recaudación total es la *suma* de las recaudaciones obtenidas por la mañana y por la tarde. Cada una de ellas, debido a la proporcionalidad de magnitudes, es el producto del precio de venta por kilo, en cada caso, *multiplicado* por el número de kilos vendido. La segunda propiedad tiene que ver con la comparación de cantidades de magnitud: se han de comparar cantidades de la misma magnitud, por lo tanto debe tenerse en cuenta que el producto de una cantidad intensiva (euros/kilo) por una cantidad extensiva (n° de kilos) resulta una cantidad extensiva (n° de euros). La tercera propiedad, que se deriva de las dos anteriores, es una proposición que permite establecer el modelo algebraico de las soluciones del problema:

“Si k es el número de kilos vendido por la mañana, entonces $50-k$ es el número de kilos vendido por la tarde y la recaudación total viene dada por la ecuación: $r = 3k + 2(50-k)$ con $k \in [0,50]$ ”. De la segunda propiedad se deduce que, en una manipulación algebraica de la ecuación anterior, que conduce, por ejemplo, a $r = k + 100$, debe entenderse que k ya no representa kilos sino euros, con lo que comparamos cantidades de la misma magnitud (nº de euros). Para esta manipulación, debe tener en cuenta las reglas algebraicas siguientes: a) Relación entre suma y resta: si $a+b = c$, entonces $b = c-a$; b) Propiedades de las ecuaciones equivalentes (simplificar, sacar factor común, etc.)

Argumentos: La posición del resolutor delante de este problema le lleva a formular la tesis enunciada, aportando como argumentos las consecuencias derivadas de las condiciones del problema, esto es, que la cantidad de pescado vendido en cada media jornada es una variable limitada por el total de kilos vendidos: si vende k kilos por la mañana, por la tarde vendrá $50-k$, (k con dominio, por tanto, en el intervalo $[0,50]$) lo que permite concluir que los valores de la recaudación son múltiples, y oscilan entre 100 y 150 euros, debido a la diferencia de precios, y esta multiplicidad dependerá, en todo caso, de la precisión del instrumento de medida. La transformación del modelo algebraico $r = 3k + 2(50-k)$ en la ecuación equivalente $r = k + 100$, se debe apoyar en el argumento de que ahora k representa un número de euros, sino no tendría sentido.

2) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA TAREA

La estrategia central de este problema reside en reconocer los valores máximo y mínimo de la recaudación que se puede obtener al cabo de la jornada. Así, desde el punto de vista actuativo, el resolutor debe calcular estos valores estableciendo como hipótesis factibles que puede vender la práctica totalidad del pescado por la mañana o por la tarde, *multiplicando* el precio de venta del kilo por el número total de kilos. Cualquier valor intermedio se debe calcular mediante la *suma* de las recaudaciones matutina y vespertina. Como estos valores intermedios son múltiples, se debe de establecer un modelo matemático –fórmula- que considere la totalidad de los posibles valores. De modo general se trata de realizar las siguientes acciones: a) Partiendo de la hipótesis de que por la mañana se venden un número variable k de kilos ($k \in [0,50]$) establecer que por la tarde se

venden $50-k$ kilos, que resultan de resolver la ecuación $k + y = 50 \Rightarrow y = 50-k$; b) Calcular el valor de la recaudación teniendo en cuenta los precios de venta distintos, por la mañana y por la tarde (3 y 2€/kilo respectivamente), mediante la ecuación: $r = 3k + 2(50-k)$. Así se cumple la condición de que el número total de kilos vendidos es de 50.

Desde el punto de vista discursivo, estas acciones le llevan a la tesis central formulada: “hay múltiples soluciones” que se sustenta razonadamente en que *se puede vender cualquier cantidad variable k de kilos tanto por la mañana como por la tarde, con $k \in [0,50]$* . Además, supuesta una venta de kilos (k) por la mañana, queda determinada unívocamente otra cantidad de kilos ($50-k$) a vender por la tarde. De esta manera:

- a) Puede argumentar que la recaudación mínima es de $2 \times 50 = 100$ € si vende todo el pescado por la tarde y que la recaudación máxima (tiene por cota) $3 \times 50 = 150$ €, si lo vende todo por la mañana. Así pues las soluciones estarán comprendidas en el intervalo $[100, 150]$.
- b) La consideración de que la cantidad de kilos vendidos por la mañana es una variable k , con $k \in [0,50]$, permite argumentar que la recaudación total es otra variable r que se obtiene mediante la fórmula: $3k + 2(50 - k)$. Esta fórmula se puede manipular mediante reglas algebraicas para obtener otra equivalente: $k + 100$. En este caso como 100 representa una cantidad de euros, hay que deducir que k , -que representaba nº de kilos- pasa ahora a representar una cantidad de euros, lo que puede argumentarse mediante el significado de la operación $3k-2k = (3-2)k = 1 \cdot k = k$. Como 1 representa 1 €/k y k representa un nº de kilos, entonces $1 \cdot k = k$ representa un número de euros.
- c) Por último, debe razonar sobre el tipo de número que resulta de realizar, en casos concretos, la operación indicada por la fórmula $3k + 2(50 - k)$. Dependiendo de la precisión del instrumento de medida de masa/peso utilizada por el vendedor, el resultado puede ser cualquier número entero o decimal de kilo, por lo que los valores de la recaudación serán números enteros o decimales en el intervalo $[100,150]$.

Para la realización de la sucesión de acciones que resuelven la tarea es necesario, activar los componentes de la configuración epistémica anterior simultáneamente a una configuración metacognitiva como la que se sigue a continuación.

3) CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA HIPOTÉTICA DE REFERENCIA

Como venimos indicando, dada la simplicidad de la tarea para el experto sus acciones metacognitivas se producen de manera rápida, simultánea y semi-automática. Específicamente, para este problema, estas son: 1) Lectura reflexiva de la situación problema; 2) Reconocimiento de que la cantidad de kilos vendida en cada media jornada es variable; 3) Planificar la solución más general posible; 4) Intentar establecer un modelo algebraico de la situación para vehicular la solución; y, todo esto acompañado de aplicaciones de automatismos algebraicos, sin excluir gestiones de monitoreo. Enfatizamos que al resolutor experto le bastará un nivel primario de metacognición para alcanzar la solución del problema.

También, tal y como ya hemos indicado, para analizar las gestiones metacognitivas de los alumnos tomaremos como referencia una configuración metacognitiva institucional hipotética.

Tabla 10 – configuración metacognitiva hipotética

<p>Gestiones primarias (metacognición primaria)</p> <p>1) <i>Lectura reflexiva</i> de la situación-problema 2) <i>Ser consciente</i> de proponer un modelo matemático que él considere que representa adecuadamente la situación planteada. 3) <i>Dar por válido un argumento</i> (para uno mismo)</p>
<p>Gestiones secundarias (metacognición secundaria)</p> <p>1) <i>De supervisión</i> 2) <i>De regulación</i> 3) <i>De evaluación/verificación</i></p>
<p>Gestiones para una metacognición ideal</p> <p>1) <i>Generalización</i>: Tener consciencia de que la teoría de ecuaciones algebraicas representa el tipo “<i>intensivo</i>” del que este problema es un ejemplar “<i>extensivo</i>”. 2) <i>Interpretación contextualizada</i>: Ser consciente de las propiedades del producto de cantidades intensivas y extensivas, para interpretar el significado de los valores de las variables en diferentes transformaciones del modelo algebraico: si se multiplica una cantidad intensiva por otra extensiva el resultado es una cantidad extensiva.</p>

Gestiones primarias (metacognición primaria)

1) *Lectura reflexiva de la situación problema*: para un resolutor ideal, la lectura reflexiva fluye en paralelo a la construcción de significados apropiados para responder a la situación,

evocando los conocimientos matemáticos precisos para resolverla, de la forma más eficiente posible. Sobre la propia lectura, el resolutor tomará conciencia de que la información que se facilita en el enunciado del problema posibilita al resolutor establecer hipótesis “a priori” (venta total prefijada, distintos precios por kilo por la mañana y por la tarde) para determinar las decisiones y las acciones que debe realizar a posteriori. Después de esta lectura, la consciencia deliberada de todos los aspectos que ha de tener en cuenta para proceder a la acción subsiguiente le lleva a las dos siguientes consideraciones:

2) *Ser consciente de que ha propuesto un modelo algebraico de la situación que constituye una adecuada representación simbólica de la tarea y sus soluciones.*

3) *Dar por válidos los argumentos que sustentan el modelo que ha propuesto.*

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

1) *De supervisión.* Un examen sobre las acciones inducirá cuestionamientos del tipo: ¿estoy adaptándome a las condiciones de la tarea? Tal supervisión le garantiza una mayor eficacia a la hora de establecer el modelo algebraico adecuado a la situación. En el caso hipotético de haber formulado el modelo: $k + h = 50$; $r = 3k + 2h$, la supervisión del proceso debería conducirlo a reconocer de forma explícita que es más “económico” el modelo alternativo: $r = 3k + 2(50 - k)$. Estos cuestionamientos deberán permitir el control de las acciones garantizando mayor eficacia en la resolución de la tarea.

2) *De regulación.* En caso de no cumplir alguna de las condiciones, el resolutor, de forma consciente, deberá emprender nuevas acciones que cumplan los requerimientos de la situación (e.g. si se decide en un primer momento por resolver casos particulares con cantidades enteras de kilos, en el nivel de supervisión deberá detectar que está imponiendo una restricción no contemplada en el enunciado de la tarea y, por tanto, debe regular sus acciones, considerando cantidades fraccionarias que le permitirán un estudio más completo de la tarea y sus soluciones).

3) *De evaluación/verificación.* Los cuestionamientos hipotéticos de estar respondiendo o no a las condiciones impuestas por la tarea son indicios de la existencia consciente de un

proceso de evaluación/verificación constante de las acciones emprendidas (p.e. evaluar si el modelo simbólico propuesto respeta las condiciones de la tarea, validándolo empíricamente con valores enteros y fraccionarios).

Gestiones para una metacognición ideal

1) *Generalización.* Considerar la *teoría algebraica de ecuaciones* como la *teoría que explica y justifica el modelo de la situación problema*, esto es, darse cuenta de que la teoría de ecuaciones lineales representa el tipo “*intensivo*” del que este problema es un ejemplar “*extensivo*”. En este caso el resolutor experto situaría el modelo dentro del marco teórico de resolución de sistemas lineales. Si el modelo elegido es: $r = 3k + 2(50 - k)$, con $k \in [0, 50]$, se trata de un sistema lineal de 1 ecuación con 2 incógnitas con matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rango 1 que posee, teóricamente, infinitas soluciones $r = k + 100$, con $k \in [0, 50]$. Dadas las condiciones del problema, los valores de k serían enteros o decimales, en función de la precisión del instrumento disponible para pesar el pescado, con lo que el conjunto de soluciones será finito. Si el modelo elegido es $k + h = 50$; $r = 3k + 2h$, con $k, h \in [0, 50]$, se trata de un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ de rango 2, con soluciones $r = k + 100$ ó $r = 150 - h$, dependiendo de las 2 columnas independientes elegidas. En ambos casos, con las restricciones para el conjunto de valores-solución ya comentados. Para el estudiante universitario (en este caso, futuro maestro) sería exigible una aproximación a esta discusión experta. No así para el estudiante de ESO, que aplicaría cualquiera de los métodos de resolución de sistemas que conoce (sustitución, reducción...).

2) *Interpretación contextualizada:* Reconocimiento de las propiedades del producto de cantidades intensivas y extensivas: si se multiplica una cantidad intensiva por otra extensiva el resultado es una cantidad extensiva. Permite interpretar modelos matemáticos equivalentes en los que una determinada variable puede representar cantidades de magnitudes diferentes. En el caso anterior, este reconocimiento lleva al resolutor experto a interpretar correctamente las soluciones anteriores, al convertirse k y h en cantidades de euros y no de kilos que expresaban en un principio, puesto que su significado es 1 €k .
 $k(h)$ kilos = $k(h)$ €

Presentadas las configuraciones de referencia, acompañaremos a los cuatro participantes en el debate, diseñando y discutiendo sus configuraciones cognitivas y metacognitivas.

ANÁLISIS DEL DEBATE EN GRUPO CON 4 ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

Noa, Nerea, Rocio y Juan son 4 estudiantes de Magisterio de la Carrera de Maestro de Educación Primaria que han participado asiduamente en esta investigación. De manera conjunta, intercambiaron sus opiniones en voz alta. El protocolo oral consiguiente fue grabado en vídeo y en audio. A continuación, analizamos las configuraciones cognitiva y metacognitiva derivadas de dicho protocolo.

1) CONFIGURACIONES COGNITIVAS Y METACOGNITIVAS

Para el análisis del debate, primero hemos trazado *la trayectoria argumentativa*, dividiéndola en diversos segmentos (SG) que se agrupan en dos bloques (SG1-SG2 y SG3-SG8). Cada segmento se divide, a su vez, en episodios numerados (EP) extrayendo de éstos sus tesis y argumentos que contribuyen a la elaboración de las configuraciones cognitivas y metacognitivas. El análisis por bloques está motivado por la evolución discursiva y actuativa experimentada en el debate.

Trayectorias argumentativas

La transcripción del primer segmento del debate (SG1) refleja la discusión de procesos aritméticos (fundamentalmente basado en acciones con cantidades enteras de magnitud) cuya justificación se apoya, en ocasiones, en “saberes culturales” que no forman parte de las hipótesis del problema:

SG1: Argumentación basada en “saberes culturales” acerca del mercado de compra/ venta de pescado:

1. NEREA: Yo no sé lo que vendió porque... bueno, no se puede, todo lo que quedaba por la mañana venderlo por la tarde para compensar. Entonces yo supuse que le quedaban 5 kilos por la tarde, entonces bueno, si vende 45 por la mañana y 5 por la tarde... ya que si vende todo por la mañana saca 150 euros y si le quedan menos de 5 kilos para la tarde no le compensa volver por la tarde...

2. JUAN. Tú lo hiciste con 5 y yo lo hice con 1 kilo ¿sabes?...

3. NEREA: Bueno, yo pensé que con menos de 5 kilos no le compensa, por que por muy poco no le compensa volver al mercado.

4. JUAN: Y ¿cómo sabes que va y vuelve.

5. NEREA: Porque no vive en el mercado...

6. JUAN: Pero, puede ir a comer ahí a un bar al lado y ya está...

7. NEREA. ...Yo creo que tiene que haber un mínimo, sino no le compensa... Yo no volvería al menos.

8. ROCIO: Yo por un kilo no vendría por la tarde, ni por 5, prefiero ir de compras. Mínimo 10 kilos para volver por la tarde.. Yo puse 10 kilos mínimo, por la tarde, porque si vendes muy poquito por la mañana...

9. JUAN: Pero es un problema de matemáticas, tampoco tienes que pensar....

10. ROCIO: En probabilidades. Pero yo calculo una cantidad posible. Yo por ejemplo puse un mínimo de 20 kilos de venta por la mañana, y por la tarde 30. Una estimación así, más o menos por lógica. Lo máximo que podía ganar según esto sería 140 euros (si vende 10 kilos por la tarde) y mínimo 120 [20 y 30 k. respectivamente].

11. NOA: Ahora que lo decís no he pensado, bueno he pensado que no podía ganar 150 euros porque sino no volvía [por la tarde]. He pensado que no lo había hecho porque volvía por la tarde. Pero si tengo que hacerlo ahora no voy a poner el mínimo que puede vender, porque si tengo que contestar a este problema, claro que puede ser cualquier cosa, porque si está muerto de hambre y no va a comer al bar porque no tiene dinero, tiene que esperar toda la tarde, tiene ganas de sacar 2 euros [risas]. Así que no se puede excluir un número indicativo de kilos para vender.. Pero no sé... Así que he puesto que una posibilidad es haber vendido todo a 2 euros/kilo, porque aquí no esta escrito que por la mañana vendió algo. Así obtendría 100 euros. Luego he hecho una media entre 100 y 150 euros que es lo máximo que puede sacar, y salió 125 euros, pero puede sacar o 100 euros o una cantidad comprendida entre 100 y 150 No 150, porque está claro que no puede ser 150, pero aproximadamente.

Tesis 1 (implícita): “hay múltiples soluciones para este problema”

Argumentos: Reconocimiento de que se pueden vender diferentes cantidades por la mañana y por la tarde (Todos los participantes)

Tesis 2: “por menos de una cierta cantidad de pescado [sin vender] no compensa volver por la tarde” (Nerea, Rocio)

Argumentos:

-“si le quedan menos de 5 kilos no le compensa volver por la tarde”; “por muy poco no le compensa volver al mercado” (Nerea, EP1, 3, 7)

- “ni por un kilo ni por 5, vendría por la tarde”; “mínimo 10 kilos [sin vender] para volver por la tarde” (Rocio, EP8)

Invalidación de la Tesis 2:

-“es un problema de matemáticas, tampoco tienes que pensar..” (Juan, EP9)

-“he pensado que volvía por la tarde, por lo que no podía ganar 150 €” (Noa, EP11)

Argumentos a favor de la invalidación:

-“¿Cómo sabes que va y vuelve?”; “puede ir a comer a un bar al lado [del mercado]” (Juan, EP4, 6).

-“puede ser cualquier cosa, porque si está muerto de hambre y no va a comer al bar porque no tiene dinero, tiene que esperar toda la tarde, tiene ganas de sacar 2 euros... no se puede excluir un número indicativo de kilos para vender” (Noa, EP11)

Argumentos en contra de la invalidación: “porque no vive en el mercado” (Nerea, EP 5)

El análisis de este primer bloque de intervenciones permite detectar, en primer lugar, que hay conciencia colectiva (implícita) de la multiplicidad de soluciones para esta tarea. A nivel metacognitivo, todos los participantes realizan acciones de *supervisión*, argumentando sobre su toma de decisiones, a partir de las demandas de la tarea, y de consideraciones “culturales” (conocimientos disponibles) que no forman parte explícita de su enunciado. En primer lugar Nerea asume metacognitivamente que a) la totalidad de la venta se puede realizar por la mañana, pero esta posibilidad no sería la más adecuada al contexto del problema; b) para volver por la tarde, exige un número mínimo de kilos (*...si le quedan menos de 5 kilos para la tarde, no le compensa volver por la tarde*). Esta última postura también es asumida por Rocio (*Yo por un kilo no vendría, ni por 5. Mínimo 10 kilos para vender por la tarde*). Noa, por su parte, había asumido que debería volver por la

tarde, aunque ahora, con los argumentos de sus compañeros reconsidera su posición (revisión) (*...si tengo que hacerlo ahora no voy a poner el mínimo que puede vender, porque si tengo que contestar a este problema, claro que puede ser cualquier cosa..*). Juan, no juega con estas hipótesis: supone directamente que se puede vender cualquier cantidad por la mañana, y por la tarde el resto, y se fija como situación concreta hipotética la venta de 1 kilo por la tarde (por tanto, 49 por la mañana). La polémica de si compensa o no volver por la tarde no es un objetivo para él, en función de la tarea que están analizando (*¿cómo sabes que va y vuelve?...Pero es un problema de matemáticas, tampoco tienes que pensar....*). Sin embargo, a través del ejemplo que propone, pudiera inferirse que considera, como hipótesis de trabajo (decisión) que debe de venderse “algo” por la mañana y el resto por la tarde.

Esta introducción de nuevos elementos de análisis, no explícitos en el problema, pero relacionados con el conocimiento de circunstancias externas que pueden interactuar con la situación propuesta, nos permite observar la manera en que aspectos metacognitivos, como la *reflexión sobre el propio conocimiento* y los *conocimientos acerca del contexto de la tarea*, interfieren con la situación, ayudando o dificultando la elección de estrategias concretas para su resolución, distinguiéndose posiciones más pragmáticas y objetivas (Juan) frente a otras más subjetivas, no exentas de realidad cultural (Nerea, Rocio).

Por su parte, Noa y Rocio toman las primeras decisiones cognitivas basadas en estimaciones de la cantidad de kilos de pescado que puede vender por la mañana y por la tarde (EP10, 11), calculando recaudaciones particulares, si bien muestran dificultades para determinar los valores extremos de la recaudación, lo que, finalmente, Noa sí consigue hacer.

SG2: Argumentaciones sobre estimación de cantidades de venta de pescado y sobre la cantidad de ventas en cada media jornada.

12.JUAN: 149..

13.NOA: Si... No... 148... 147...

14.JUAN: Si vende 49 kilos por la mañana y 1 por la tarde son $49 \times 3 + 1 \times 2 = 147 + 2 = 149$.

15.NOA: Ah! Sí.

- 16.JUAN: Yo he pensado algo por el estilo. Si vende todo por la tarde, porque no vendió nada por la mañana, saca 100 euros. Si vende 25 y 25 respectivamente saca 125 euros.
- 17.NEREA: Bueno yo creo que más de 100 siempre saca, porque se supone que por la mañana vende algo, por que ahí [en el enunciado] dice “para vender todo”, entonces se supone que ya vendió algo por la mañana ¿no?
- 18.JUAN: Lo mínimo [cantidad vendida por la mañana] tampoco lo sabes...¿cómo lo sabes?
- 19.NEREA: Porque dice “para venderlo todo”, se supone que ya vendió algo por la mañana.
- 20.JUAN: ¿Por qué? Eso también lo pensé yo al principio, pero....
- 21.NEREA: (interrumpiendo a Juan): Es que si no diría: “como no vendió nada por la mañana...”
- 22.JUAN: Para vender todo, según tú, algo ya tendría que haber vendido por la mañana. Si lo lees bien, no tiene por qué. Sólo dice que por la mañana vendió el kilo a 3 € y por la tarde, para venderlo todo, a 2.
- 23.NEREA: Pero se lee que por la mañana vendió el kilo a 3€. Si no vendió algo...
- 24.JUAN: Estaba el producto a la venta a 3€. A lo mejor no hay.. [ventas]
- 25.NEREA: Lo que dice la frase, tal como está yo imagino que vendió algo por la mañana.
- 26.ROCIO: Yo calculé los mínimos...
- 27.NEREA: Yo calculé los mínimos y los máximos, pero ¿de cuánto?
- 28.JUAN: 25 kilos por la mañana no los pudo vender, ya que si vendió esta cantidad, ¡para que vas a bajar el precio, si estás vendiendo bien!.
- 29.ROCIO: Porque [el pescado] se vende mejor por la mañana (risas). Por la mañana se vende para los restaurantes... y está más fresco. Bueno si es el Corte Inglés, no te hace esas diferencias (risas).
- 30.JUAN: Yo creo que no se puede saber el resultado porque cualquier resultado... [es posible].
- 31.ROCIO: Es cosa de conjeturas y poco más.

Tesis 3: “hay que estimar una cantidad de ventas (y de recaudación) por la mañana y por la tarde” (Rocio, EP10, SG1).

Argumentos:–“ puse un mínimo de 20 kilos de venta por la mañana, y por la tarde 30... máximo 140 €y mínimo 120 €” (Rocio. EP10, SG1).

-“ una posibilidad es haber vendido todo a 2 euros/kilo, porque aquí no esta escrito que por la mañana vendió algo. Así obtendría 100 euros. Luego he hecho una media entre 100 y 150 euros que es lo máximo que puede sacar ,y salió 125 euros, pero puede sacar o 100 euros o una cantidad comprendida entre 100 y 150 No 150, porque está claro que no puede ser 150, pero aproximadamente. (Noa, EP11, SG1).

Argumentos basados en cálculo aritmético:

-“ $49 \times 3 + 1 \times 2 = 149$ ” (Juan, EP14)

Tesis 4: “*se supone que vendió ‘algo’ por la mañana*” (Nerea, EP17).

Argumentos:

-“yo creo que más de 100 siempre saca porque se supone que por la mañana vende algo”; “como dice ‘para venderlo todo’, se supone que ya vendió algo por la mañana”; Es que si no diría: “como no vendió nada por la mañana...”; “se lee que por la mañana vendió el kilo a 3€ Si no vendió algo..” (Nerea, EP17, 19, 21, 23).

Argumentos para invalidar de la tesis 4 (Juan EP18, 22 ,24, 30):

- “lo mínimo [cantidad vendida por la mañana] tampoco lo sabes...¿cómo lo sabes?”; “si lo lees bien, no tiene por qué. Sólo dice que por la mañana vendió el kilo a 3 €y por la tarde, para venderlo todo, a 2”; “estaba el producto a la venta a 3€ A lo mejor no hay.. [ventas]”; “yo creo que no se puede saber el resultado porque cualquier resultado... [es posible]”.

Tesis 5: “es cosa de conjeturas” (Rocio, EP31)

Al estimar distintas cantidades de venta, Rocio (EP10, SG1), Noa (EP11, SG1) y Juan (EP14, 16) para determinar recaudaciones particulares realizan operaciones aritméticas (implícitas o explícitas) con cantidades enteras, que utilizan la propiedad de que la recaudación se obtiene mediante la suma de productos de las cantidades vendidas por sus precios respectivos (diferentes por la mañana y por la tarde).

El análisis de la posibilidad de establecer un beneficio máximo y mínimo en función de la cantidad de ventas por la mañana y por la tarde, es objeto de la siguiente preocupación de los participantes: (Nerea, EP1, SG1), (Rocio, EP10, SG1), Noa (EP11, SG1). En este nivel de debate, se observa la dificultad para establecer la recaudación máxima posible (lo que significaría considerar que se puede vender todo el pescado por la

mañana). Las condiciones explícitas en el enunciado de la tarea parecen hacer dudar a los participantes cuando deben decidir acerca de esta cuestión.

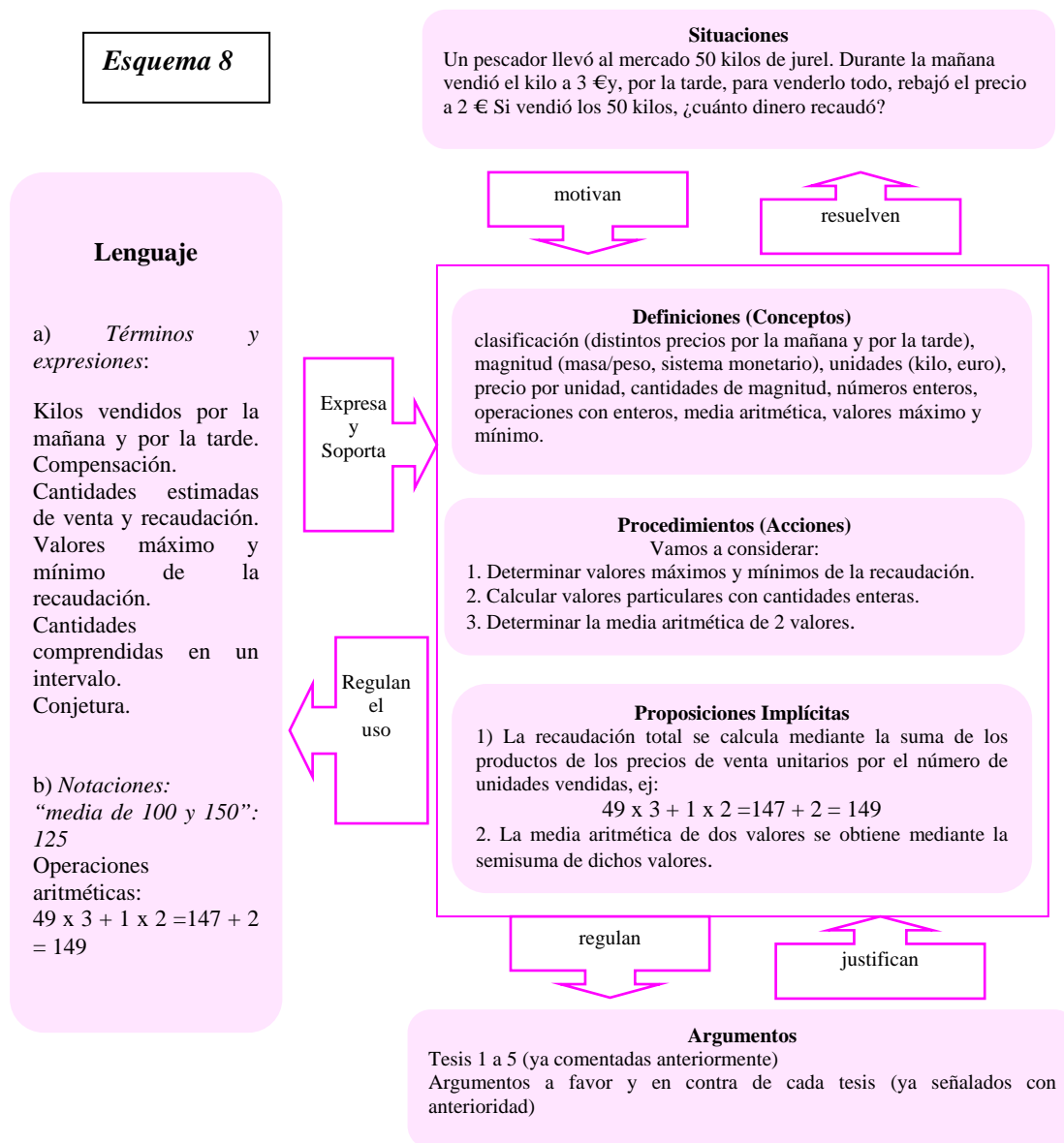
Por tanto, la *estrategia básica para afrontar la tarea*: la cuestión de decidir cuál puede ser la recaudación máxima y mínima resulta problemático, y origina un debate rico en matices, en el que afloran aspectos cognitivos y metacognitivos muy interesantes para el análisis. Sin embargo, la sola consideración de cantidades enteras dificulta, de manera decisiva, entrever la necesidad de considerar un marco más general que el aritmético para construir un modelo adecuado para representar la situación y sus soluciones.

En la discusión precedente entre Juan y Nerea, se observan dos posiciones enfrentadas acerca de la estrategia básica que estamos considerando, sobre la que no logran ponerse de acuerdo. Para Juan (EP16, 18, 20, 22, 24) de la lectura del problema no puede concluirse que venda “algo” por la mañana. Juan reconoce que, en algún momento también pensó que debería vender “algo” por la mañana, pero cambió de opinión (*Eso también lo pensé yo al principio, pero...*) [seguramente tras una relectura del problema –revisión-]. Nerea (EP17, 19, 21, 23, 25) por el contrario, en su configuración metacognitiva primaria, considera que del enunciado de la tarea se deduce que necesariamente debió haber ventas por la mañana. Nerea parece exigir más datos al enunciado de la tarea para poder considerar la posibilidad de que por la mañana pudo no haber ventas. Esta exigencia la lleva a reafirmarse en su postura, pese a los argumentos de Juan.

Por su parte, Rocio (EP26, 29, 31) duda cómo calcular los valores extremos, aunque asume, con Nerea, que la mayor parte del pescado se debe vender por la mañana (por consideraciones “culturales”, al margen del enunciado). En todo caso afirma que sobre las soluciones sólo pueden realizarse conjeturas.

Estos dos segmentos del debate (1º bloque) nos permiten elaborar una primera configuración cognitiva (basada en el marco aritmético) en donde las acciones de cálculo se limitan a operaciones con cantidades enteras.

2) PRIMERA CONFIGURACIÓN COGNITIVA (ARITMÉTICA)



Algunas consideraciones sobre la configuración anterior

Lenguaje (términos y expresiones): En los episodios 1 al 8 se observa la introducción de expresiones derivadas de saberes culturales de los participantes: “ *si le quedan menos de 5 ó 10 kilos no compensa volver por la tarde*” (se supone que es mejor rebajar o incluso regalar el pescado sobrante, a última hora de la mañana). Entre los episodios 9 al 16, se introducen expresiones como valores máximo y mínimo, media aritmética de dos valores, y diferentes numerales y expresiones aritméticas (*notaciones*) siempre con valores enteros,

para expresar la recaudación total obtenida por las ventas. En los episodios 17 al 29, el lenguaje es básicamente de tipo argumentativo, en donde cada participante expresa sus opiniones sobre su interpretación del problema, en términos de cantidades máximas y mínimas que se venden por la mañana y por la tarde.

Definiciones: Los conceptos que emergen de esta primera fase del debate tienen que ver con la clasificación de las cantidades recaudadas por la mañana y por la tarde (al aplicarse distintos precios) y con el uso de cantidades de magnitudes diferentes (masa/peso, precio por unidad y recaudación) contemplando, en la práctica, la totalidad de cantidades enteras de magnitud respecto de las unidades explicitadas en el problema. Las nociones de valor máximo y mínimo de la recaudación son objeto de múltiples discusiones en esta parte del debate, aunque no se logra consenso sobre dichos valores. También usan correctamente la noción de media aritmética de dos valores.

Procedimientos: Los procesos contemplados por los participantes, en esta fase del debate, se refieren al intento de determinar los valores extremos de la recaudación (aspecto que no consiguen determinar con precisión) así como al cálculo de algunas recaudaciones particulares; para determinar algunos de estos valores, proponen la media aritmética de dos valores, aunque con dudas respecto a los valores a emplear.

Proposiciones: La propiedad que utilizan para realizar los cálculos de valores particulares de la recaudación, mediante operaciones aritméticas con números enteros (incluso mediante cálculo mental) es correcta: suma de los productos de las cantidades vendidas por sus respectivos precios unitarios. También utilizan correctamente la definición de media aritmética de dos valores.

3) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS DURANTE LA PRIMERA FASE DEL DEBATE

Las primeras acciones consisten en el análisis de las diferentes posibilidades de venta del pescado por la mañana y por la tarde (episodios 1 a 8). A nivel actuativo, el cálculo de posibles recaudaciones examinando casos particulares, siempre a través de operaciones aritméticas con valores enteros, incluye la noción de “media aritmética”, así como las

distintas hipótesis que realizan acerca de los valores máximos y mínimos de la recaudación (episodios 9 a 29) permiten concluir que, aún con reticencias razonadas por parte de Juan, los valores extremos de la recaudación son mayores que 100 euros y menores o iguales a 149 €. A nivel discursivo: a) se introducen nuevamente elementos, no contemplados en el enunciado del problema, que tienen que ver con “saberes culturales” de los participantes, que les conducen a formular diferentes hipótesis, entre las que cabe reseñar que no compensa volver por la tarde, si quedan por vender “pocos” kilos; b) se aportan justificaciones, debidas a la interpretación de la situación-problema, que les llevan a dudar sobre si pudo vender la totalidad del pescado por la mañana o por la tarde, que limitan sus decisiones acerca de los valores extremos de la recaudación. No hay acuerdo unánime sobre los argumentos que aporta cada uno de los participantes, pero parece sostenerse la idea mayoritaria de que estos valores son mayores que 100 € y menores o iguales que 149. Es Juan el que mantiene una postura más alejada de suposiciones no explícitas en el problema, pero no consigue, por el momento, aportar una justificación concluyente

Podríamos caracterizar a esta fase como de tentativas, basadas en pensamiento aritmético limitado a operaciones con números enteros aplicados a casos particulares (ejemplar, en la dualidad ejemplar/tipo) en el modelo del EOS, con justificaciones apoyadas en saberes culturales que interfieren con la alternativa de establecer el conjunto de soluciones posibles.

4) PRIMERA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA

Tabla 11 – 1ª configuración metacognitiva del debate

<p>Gestiones primarias (<i>metacognición primaria</i>)</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>Lectura parcialmente reflexiva</i> de la situación problema2) <i>Ser consciente</i> de proponer soluciones particulares en el marco de los números enteros.3) <i>Dar por válido un argumento</i> (para uno mismo).
<p>Gestiones secundarias (<i>metacognición secundaria</i>)</p> <ol style="list-style-type: none">1) <i>De supervisión</i>2) <i>De regulación</i>3) <i>De evaluación/verificación (implícita)</i>

Gestiones para una metacognición ideal

No hay, al menos explícitamente.

Gestiones primarias (*metacognición primaria*)

1) *Lectura parcialmente reflexiva* de la situación-problema. En esta fase del debate, se observa la introducción de “saberes culturales” relacionados con la compra/venta de pescado, que tienden a crear confusión sobre las condiciones explícitas del problema; en particular, la obtención de los valores máximo y mínimo de la recaudación. Solamente Juan, parece mantenerse al margen de estos elementos perturbadores, de carácter metacognitivo.

2) *Ser conscientes de proponer* algunas soluciones particulares mediante operaciones con números enteros, que limitan el número de soluciones factibles del problema, al tiempo que siguen dificultando la obtención de los valores extremos de la recaudación. Las acciones que se emprenden a partir de estas reflexiones nos llevan a inferir que los conocimientos matemáticos que se utilizan para resolver con eficacia dicha situación son de tipo restrictivo y, tal como se insinúa en los episodios (67 y 69) del debate que sigue, están condicionados probablemente por los tipos de instrucción que han recibido en su trayectoria escolar.

3) Los argumentos derivados de: 1) la consideración de que no compensa volver por la tarde, si no queda una cantidad mínima; y 2) que puede haber ventas de pescado por la mañana, les parecen a dos participantes un razonamiento válido. Sin embargo hay otros argumentos discrepantes, al no considerar que éstos deban ser tenidos en cuenta por no formar parte de las condiciones del problema.

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

1) *De supervisión*: Todos los participantes realizan acciones de *supervisión*, argumentando su toma de decisiones a partir de las demandas de la tarea y de consideraciones “culturales” (conocimientos disponibles) que no forman parte explícita de su enunciado.

Juan se ciñe a las condiciones del problema y supervisa las acciones de los demás en función de esta posición.

2) *De regulación*: la regulación, consecuencia de la supervisión, hace que los participantes consideren implícitamente la multiplicidad de soluciones, aunque las decisiones metacognitivas se sustentan sobre el pensamiento aritmético, basado en operaciones con números enteros. No se considera, en este momento, la posibilidad de contemplar la venta de fracciones de kilo, lo que impone limitaciones sobre los valores posibles de la recaudación, entre los que figuran sus valores máximos y mínimos.

3) *De evaluación/verificación*: Se observa una evaluación primaria al obtener varias soluciones particulares, de la tarea contemplando diversas cantidades enteras sujetas a las condiciones del problema, con las que operan aritméticamente que, en principio, consideran que son el tipo de soluciones viables del problema.

Gestiones para una metacognición ideal

Non hay, al menos explícitamente.

Proseguimos con el segundo bloque del debate, en el que se producen cambios sustanciales en la trayectoria argumentativa y que originarán otras configuraciones.

SG3: *Argumentaciones que producen cambios esenciales en las configuraciones cognitiva y metacognitiva anteriores.*

32.JUAN. *Sí... hallar la media...pero la media ¿de cuántos resultados?*

33.ROCIO: *Claro! Hay infinitos resultados...Desde medio kilo por la mañana hasta “tanto” por la tarde, como... Es que ¡son infinitos! Bueno, infinitos no...*

34.NOA: *Bueno a partir de 100 €.*

35.ROCIO: *Lo mínimo que se puede conseguir es 100€.*

36.JUAN: *Esto seguro que se puede hacer con alguna regla estadística..*

37.ROCIO: *Lo mínimo que se puede conseguir es 100 y lo máximo 148...*

38.JUAN: *Había que sacar una función....*

Tesis 6: “Se pueden considerar fracciones de kilo. Hay infinitos resultados posibles [todavía con dudas]” (Rocio, EP33).

Argumentos:

-“ desde medio kilo por la mañana, hasta ‘tanto’ por la tarde.. ¡es que son infinitos! Bueno, infinitos no”; (Rocio, EP33,)

Tesis 7: “es necesario encontrar un modelo más general” (Juan, EP36, 38)

Argumentos:

- “esto seguro que se puede hacer con alguna regla estadística”; “había que sacar una función” (Juan. EP36, 38)

La aportación de Rocio (EP33) a pesar de sus dudas, que muestran unas dificultades de orden cognitivo acerca del significado de “infinito”, introduce una *hipótesis crucial* a debatir, de cara a planificar una estrategia para resolver el problema: el reconocimiento explícito de que hay que considerar muchas más soluciones que las particulares (ejemplares) que venían considerando en el marco de los números enteros. A partir de aquí, Rocio parece asumir que la recaudación mínima es 100 € que se apresura a acompañar de una hipótesis (sin justificar) para el valor máximo: (*Lo mínimo que se puede conseguir es 100 y lo máximo 148...*). Por su parte, Juan parece mantenerse al margen de este debate, situándose en un nivel de razonamiento más general (EP36, 38).

En el próximo segmento veremos que esta última apreciación parece obligar a los participantes a una reflexión más profunda, de otro nivel, que conduce, en particular, al cambio de configuración cognitiva (algebraica) y se produce una pausa en el debate. Para desbloquear esta situación y avanzar en esa dirección, es necesaria la participación de la entrevistadora, que no se había producido hasta ahora.

SG4: *Argumentaciones sobre el conjunto de soluciones y los límites de la recaudación.*

39.ENTREVISTADORA (E): *Juan acaba de decir que “había que sacar una función”, ¿podéis hablar algo de eso?*

40.NEREA: *¡Es que yo de estadísticas! Puede ser, pero yo no sé como..*

41.ROCIO: *Con una tabla comparativa. Calcular que tanto de la mañana...si aumenta un kilo por la mañana, gana tanto, si aumenta por la tarde...*

- 42.NOA: *Si juegas con las posibilidades siempre sale más de un resultado. En una tabla puedes ver todas las posibilidades de si vendes 1, 2, 3,12...*
- 43.ROCIO: *¡Es que ¡son infinitas!*
44. JUAN: *Si vas de medio gramo en medio gramo...*
- 45.ROCIO: *Si vendes 49,5 k por la tarde, o 1 y medio por la mañana... Bueno, infinitas no, hay un tope, pero te puedes pasar horas y horas...*
- 46.JUAN: *No hay tope si te pones a medir con precisión los gramos de sardinas*
- 47.ROCIO: *Tope hay, porque hay una partida determinada, si no fuese determinada..*
- 48.JUAN: *Tope de datos en la tabla esa.... Puedes poner los que te dé la gana.*
- 49.ROCIO Y NEREA (al unísono): *Ah! Vale... Vale.*
- 50. E: ¿Hay un máximo que se puede alcanzar? Parece, hace poco que tenían dudas...**
51. NEREA: *Yo pienso que 149 ¿no?*
- 52. E: ¿Tienen dudas sobre el máximo?**
53. ROCIO: **149 no puede ser**
54. JUAN: *¿Por qué?*
- 55.ROCIO: *¿No lo decías tú?.*
- 56.JUAN: *Incluso puede sacar más...*
- 57.NEREA: *Podemos hacer cálculos $49 \times 3 + 1 \times 2 = 149$.*
- 58.JUAN: *Pero claro, si tomas medio kilo ya te da más dinero [49,5 y 0,5].*
- 59.ROCIO: *¡Es que es eso!.*
60. JUAN: *El máximo andará por 150.*
- 61.ROCIO: *“Ciento cincuenta cinco” [risas].*
- 62. E: ¿Pensáis que habéis encontrado la solución del problema?**
- 63.JUAN: *No, no hay un tope que marque...*
- 64.E: ¿Por qué?**
- 65.JUAN: *Al menos no es un número entero, ahí, concreto.*
- 66.NEREA: *No, sí que la solución es un número entero entre 100 y 150, entonces ahí puedes encontrar la solución, pero, es eso, como no la tienes. Pero yo..*
- 67.JUAN: *No es una solución de las que estamos acostumbrados a decir: ésta es la solución [única]. No puedes saber cuánto dinero se llevó a casa en la cartera.*

Tesis 8: “hacer una tabla” (Rocio, EP41, Noa, EP42)

Argumentos:

-“ . Calcular que tanto de la mañana...si aumenta un kilo por la mañana, gana tanto, si aumenta por la tarde...” (Rocio, EP41)

-“ Si juegas con las posibilidades siempre sale más de un resultado. En una tabla puedes ver todas las posibilidades de si vendes 1, 2, 3, ...12... (Noa, EP42)

Tesis 9. “En la tabla no hay un ‘tope’ de valores” (Juan, EP46).

Argumentos:

-“si vas de medio gramo en medio gramo”; “no hay un tope si te pones a medir con precisión los gramos de sardinas” (Juan, EP44, 46)

Argumentos que intentan invalidar la tesis 9:

-“bueno, infinitas no, hay un tope, porque hay una partida determinada [de pescado]” (Rocio, EP47)

Argumentos que reafirman la tesis 9:

-“ tope de datos en la tabla esa.... Puedes poner los que te dé la gana” (Juan, EP48).

Aceptación de la tesis 7 (Rocio, Nerea, EP 49)

Tesis 10: “el máximo andará por 150, pero no hay un tope que lo marque [exactamente], al menos no es un número entero” (Juan, EP60, Rocio, EP61)

Argumentos que intentan invalidar la tesis 10:

-“149. Podemos hacer cálculos $49 \times 3 + 1 \times 2 = 149$.” , “la solución es un número entero entre 100 y 150, entonces ahí puedes encontrar la solución, pero, es eso, como no la tienes...”(Nerea, EP57, 66)

Argumentos para reafirmar la tesis 10:

-“149 no puede ser” (Rocio, EP53)

-“si tomas medio kilo, ya te da más dinero”; “el máximo andará por 150” (Juan, EP58, 60)

- ‘ciento cincuenta cinco’ (Rocio, EP61); “no hay un tope que marque.. al menos no es un número entero...”; “no es una solución de las que estamos acostumbrados a decir: ésta es la solución[única]. No puedes saber cuánto dinero se llevó a casa en la cartera” (Juan, EP63, 65, 67).

Nerea parece desistir. Metacognitivamente, decide que sus conocimientos le impiden la búsqueda de un modelo representacional que se adapte a las condiciones de la tarea. La propuesta de Rocio de construir una tabla con diferentes valores para la cantidad

de pescado, y la recaudación obtenida en cada caso, constituye un primer paso importante. Significa haber localizado una representación semiótica específica para poder manipular distintos valores (concretos) y decidir en función de los resultados obtenidos. A esta propuesta se suman Noa y Juan, aportando argumentos que avalan la multiplicidad de soluciones posibles para la tarea. Sin embargo, podemos clasificar los diferentes tipos de argumentos aportados. Por un lado, Noa sólo considera valores enteros, lo que originaría una tabla con un número relativamente pequeño de posibilidades para el análisis. Este plan obstaculiza el acercamiento a los valores máximo y mínimo de la recaudación, en caso de seguir manteniendo que se vende “algo” por la mañana y el resto por la tarde. La manera de razonar de Noa podría estar influida, metacognitivamente, por conocimientos previos elaborados a partir de la construcción de tablas de funciones, en donde es práctica habitual, en la enseñanza secundaria, el uso de valores enteros. Rocio dispone de (o ha conseguido fruto de la reflexión conjunta sobre la tarea) conocimientos más elaborados que evidencia con las expresiones [*Es que ¡son infinitas!*]... [*Si vendes 49,5 k por la tarde, o 1 y medio por la mañana...*], que permiten constatar que considera, además, valores no enteros. Juan apoya el razonamiento de Rocio, estableciendo, a su vez, un nuevo nivel de precisión: [*Si vas de medio gramo en medio gramo...*]. Pero hay una discrepancia entre ambos que pone de manifiesto que Juan utiliza conocimientos matemáticos más profundos que Rocio. Rocio vuelve a manifestar conflictos ligados a la noción de “infinito”: [*Bueno, infinitas no, hay un tope, pero te puedes pasar horas y horas...*], con lo que parece negar que un intervalo de números decimales pueda incluir infinitos valores (...*hay un tope...*), opinión que es rebatida por Juan: [*No hay tope si te pones a medir con precisión los gramos de sardinas*]. No obstante, también podemos suponer que esta discrepancia podría estar influida porque Rocio percibiese que la precisión del instrumento de medida usada por el vendedor no permite apreciar más que fracciones de kilo en un número finito, cosa que no parece tener en cuenta Juan. Sin embargo, los siguientes argumentos permiten concluir que la primera hipótesis es más plausible, ya que Rocio (conjuntamente con Nerea) acepta las razones que esgrime Juan. Obsérvese que la noción de “tope” es distinta para Rocio y Juan. Para Rocio es el extremo de un intervalo, mientras que para Juan tiene, al menos, un doble significado: en este caso, es el “tamaño máximo” del conjunto de valores en un intervalo, pero también puede ser el extremo de un intervalo. No obstante, su nivel de conocimientos en relación con la posibilidad de fraccionar la unidad de masa/peso, le permite aproximarse al valor máximo [*Pero claro, si tomas medio kilo ya te da más dinero [49,5 y 0,5]*]...[*El*

máximo andaré por 150]. Rocio se suma a los argumentos de Juan, aunque no es capaz de apreciar adecuadamente sus conclusiones [*¡Es que es eso...!*, “Ciento cincuenta cinco”].

Juan reconoce que aún no han cumplido su objetivo de localizar los límites del intervalo de soluciones, argumentando que “no hay un tope que marque...”. Su justificación discurre de nuevo por el terreno de la aproximación: [*al menos no es un número entero, ahí, concreto*], refiriéndose a la recaudación máxima. El pensamiento de Nerea no concuerda con la problemática en la que está sumido Juan. Ella se esfuerza en argumentar sobre la posibilidad de encontrar una solución concreta [*..la solución es un número entero entre 100 y 150, entonces ahí puedes encontrar la solución, pero, es eso, como no la tienes..*], que no se siente capaz de localizar. Juan percibe claramente que el tipo de solución de esta tarea es de naturaleza distinta a las soluciones con las que está familiarizado: [*No es una solución de las que estamos acostumbrados a decir: esta es la solución [única]. No puedes saber cuánto dinero se llevó a casa en la cartera*].

SG 5: Argumentaciones para una primera aproximación al diseño de un modelo algebraico que represente la situación y sus soluciones.

68.E: *¿Sabrías expresar en términos matemáticos la solución de este problema? ¿Que tipo de objeto matemático sería la solución?. Rocio hablaba de soluciones que son un número...*

69.ROCIO: *Una solución terminada. Te tiene que dar esto y si no lo has hecho, todo mal. Y vuelta atrás.*

70. NEREA: *Una incógnita.*

71.ROCIO: *O como máximo dos. Más menos. Y ya está. Pero así no. No sabría ponerla en términos matemáticos.*

[pausa]

72.E: *¿Podéis intentarlo?*

73.NOA: *Puede ser cuando se necesita una solución única. Pero cuando la solución requiere el símbolo gráfico de infinito, no puede.... No sé que hacer.*

74.ROCIO: *No sé. Podríamos poner x (lo que sacó por la mañana) + y (por la tarde) igual a ... [risas]. ¡Otra incógnita!*

75.JUAN: *$ax + bx = c$ (c es el dinero que sacó).*

76.ROCIO: *Pero ¿cuántas incógnitas tienes ahí?*

77.JUAN: 4.

78.ROCIO: x es un valor. x es el número de kilos. $y.2$...

79. JUAN: x kilos por....(pausa): $3x + 2y = 50$. 3 euros/kilo por la mañana por x (el número de kilos) más 2 euros/kilo por la tarde por y (el número de kilos)...

80.ROCIO: No, pero no te da el número de kilos.

81.JUAN: Esto da el dinero recaudado! c que es el dinero que saca: $3x + 2y = c$ ¿Ese podía ser el resultado?.

Tesis 11: “una solución terminada” (Rocio, EP69)

Argumentos: “Te tiene que dar ‘esto’ y si no lo has hecho, todo mal. Y vuelta atrás” (Rocio EP69)

Tesis 12: “una incógnita o, como máximo, dos” (Nerea, EP70, Rocio EP71)

Argumentos: “no sabría ponerla en términos matemáticos” (Rocio, EP71)

Argumentos tratando invalidar la tesis 12:

“cuando la solución requiere el símbolo gráfico de infinito, no puede..” (Noa, EP73)

Tesis 13: “ ex (lo que sacó por la mañana) + ey (lo que sacó por la tarde) igual a.. otra incógnita” (Rocio, EP74)

Tesis 14: (evolución de la anterior) “ $ax + by = c$ (c es el dinero que sacó)” (Juan EP75)

Argumentos que intentan invalidar la tesis 13:

-“pero ¿cuántas incógnitas tienes ahí?” (Rocio, EP76)

Tesis 15: (evolución de la tesis 13): :” $3x + 2y = 50$. 3 euros/kilo por la mañana por x (el número de kilos) más 2 euros/kilo por la tarde por y (el número de kilos)...(Juan, EP79)

Argumento que invalida la tesis 15:

-“No, pero no te dá el número de kilos [$3x + 2y$]” (Rocio, EP80)

Tesis 16: “Esto da el dinero recaudado! c que es el dinero que saca: $3x + 2y = c$ ” (Juan, EP81).

La iniciativa surte efecto. Hace emerger conocimientos previos que, hasta ahora, permanecían “dormidos”, o no se consideraban pertinentes, en Rocio y Juan. En el episodio precedente Juan, a iniciativa de Rocio, percibe un modelo algebraico, todavía incipiente, sobre el que Rocio ejerce una labor de supervisión muy útil, que ayuda a Juan a

mejorarlo y adaptarlo a las condiciones de la tarea. Sin embargo, el modelo parcial, $3x + 2y = c$, elaborado plantea dudas a su autor: [*¿Ese podía ser el resultado?*], que aún no pueden clarificar ninguno de los participantes. Es también necesario constatar cómo la posibilidad de que puedan existir eventualmente infinitas soluciones para el problema, bloquea a Noa [*..cuando la solución requiere el símbolo gráfico de infinito, no puede..*] que confunde expresión y contenido. Ante el prolongado silencio que se produce, la entrevistadora intenta que supervisen sus acciones y controlen si se adaptan a las condiciones de la tarea.

SG6: Argumentos que intentan mejora el modelo algebraico introducido, que evidencian dificultades para reconocer sus ventajas.

82.E: *En esta fórmula que está usando Juan ¿habéis utilizado todos los datos del problema?*

83.JUAN: *No. El 50 no.*

84.E: *¿Podrías verificar con esta fórmula algún dato?*

85.JUAN: *Sí: 3€ de la mañana por 1 kilo + 2€ por 49 kilos de la tarde = 101 [euros]*

86.E: *Bien. ¿Qué piensas entonces de esta fórmula?*

87.JUAN: *Que estoy igual que antes. O sea lo puse con “letritas” pero es lo mismo. Lo que pasa es que no sé si puedo hacer otra fórmula con ese 50 por ahí.*

88.E: *Sí. ¿Qué puedes hacer con ese otro valor?*

89.JUAN. *Con el 50.... [pausa]*

90.E: *Es el peso. ¿puedes hacer algún cálculo con 50?.*

91.JUAN: *No, pero decía que para poder poner en el otro lado de la igualdad, 50 en el otro lado debo poner algo. No sé cómo relacionar los euros que cuesta cada kilo con el número de kilos.*

92.ROCIO: *Nunca te va a dar igual a 50*

93.E: *¿Por qué?*

94.ROCIO: *Porque, o sea, no va...*

95.JUAN (cortando a Rocio): *Una división, tantos euros recaudados entre tantos kilos más tantos euros recaudados entre tantos kilos igual a 50 kilos.*

96. ROCIO: *Igual a valor máximo. No puede ser. No puedes relacionar kilos con euros.*

Tesis 17: “no hay ventajas en usar fórmulas” (Juan, EP87)

Argumentos: “lo puse con “letritas” pero es lo mismo [que antes]”, “no sé cómo relacionar los euros que cuesta cada kilo con el número de kilos” (Juan, EP87, 91)

Tesis 18: “tantos euros recaudados entre tantos kilos, más tantos euros recaudados entre tantos kilos, igual a 50 kilos” (Juan, EP95)

Argumentos que invalidan la tesis 18.

-“ no puede ser, no puedes relacionar kilos con euros” (Rocio, EP 96)

Juan, que evidencia un saber práctico-técnico, no parece percibir la diferencia esencial de disponer de un modelo algebraico (generalización) sobre una particularización del mismo (es decir, no percibe la diferencia entre ejemplar y tipo): [*Que estoy igual que antes. O sea, lo puse con “letritas” pero es lo mismo*]. En el segmento anterior Rocio refleja un saber más tecnológico que Juan, que ya se venía manifestando con anterioridad (aunque no pueda expresarlo con precisión). Ello le permite ejercer una labor de supervisión de las técnicas sugeridas por Juan: [*Nunca te va a dar igual a 50*]. [*No puede ser. No puedes relacionar kilos con euros*]. Juan, por su parte, manifiesta debilidades cognitivas en el trabajo con cantidades de magnitudes distintas: [*Una división, tantos euros recaudados entre tantos kilos más tantos euros recaudados entre tantos kilos igual a 50 kilos*].

SG 7: Argumentaciones que permiten construir el modelo algebraico del problema

97.E: *¿Porqué queréis que en esa fórmula aparezca un “igual a algo”?*

98.JUAN: *Para tener más datos. Cuantos más datos mejor puedo relacionar una ecuación con la otra. A lo mejor puedo sacar algo.. Un sistema de ecuaciones. No se puede porque no hay...*

99.E: *¿Qué piensas Noa?*

100.NOA: *No sé. Lo que veo es que se puede poner $3x + 2y = c$, en lugar de la fórmula.*

101.ROCIO: *Si x es el número de kilos vendidos por la mañana.....*

102.JUAN: *(cortando a Rocio) Yo creo que esta ecuación [$3x + 2y = c$] valdría como resultado.*

103.E: *No sé lo que quería decir Rocio.*

104.ROCIO: *Que si contamos que x es el número de kilos vendidos por la mañana e y el de por la tarde, $x+y=50$.*

105.E: *¿Esa información os da alguna pista?*

106.JUAN: *Si, que $y = 50 - x$. Se te eliminan incógnitas solas. O no. Pero esto está bien x kilos por la mañana, y kilos por la tarde.... Por la mañana por 3 y a la tarde por 2...*

[pausa]

107.ROCIO: *¿Tienes que multiplicar o sumar?*

108.JUAN: *(Haciendo cuentas en un papel). Se llega a otra ecuación que no sé si sirve para algo.*

109.E: **Intenta explicar**

110.JUAN: *La verdad es que estoy perdido. Por una parte $x+y=50$, y por otra $3x + 2y = c$, que es el dinero, c es lo que quieres hallar. Entonces despejas $y = 50 - x$.*

111.ROCIO (interrumpiendo a Juan): *Lo intenté y sale una cosa extrañísima...*

112.JUAN: *Sale otra ecuación.*

113.ROCIO: *¿Si?, no veo...*

114.JUAN: *(interrumpiendo a Rocio): Entonces $3x + 2(50-x) = c$. Entonces operas eso: $3x + 100 - 2x = c$, $x + 100 = c$, $x + c = 100$ [error de cálculo] . Entonces viene siendo que al número de kilos de la mañana sumándole 100 te da el dinero total. Te da otra ecuación pero, ¿qué haces con eso?.*

115.ROCIO: *Es un sistema de ecuaciones, pero...*

Tesis 19: “con más datos se puede relacionar una ecuación con otra” (Juan, EP98)

Tesis 20: “se puede poner $3x + 2y = c$, en lugar de la fórmula.” (Noa, EP100, apoyando a Juan, EP87, SG6)

Tesis 21: “La ecuación [$3x + 2y = c$] valdría como resultado” (Juan, EP102)

Tesis 22: “ además hay que considerar otra ecuación: $x+y = 50$ ” (Rocio, EP104)

Argumentos a favor del sistema de ecuaciones como modelo:

“Por una parte $x+y=50$, y por otra $3x + 2y = c$, que es el dinero, c es lo que quieres hallar. Entonces despejas $y = 50 - x$.” ; “Entonces $3x + 2(50-x) = c$. Entonces operas eso: $3x + 100 - 2x = c$, $x + 100 = c$, $x + c = 100$ [error de cálculo] . Entonces viene siendo que al número de kilos de la mañana sumándole 100 te da el dinero total “(Juan, EP110, 114),

Argumentos que expresan dudas acerca de la interpretación del modelo:

-¿Tienes que multiplicar o sumar? “Lo intenté y sale una cosa extrañísima”; “Es un sistema de ecuaciones, pero...” (Rocio, EP107, 111, 115).

-“La verdad es que estoy perdido”; “Te da otra ecuación pero ¿qué haces con eso?” (Juan, EP110, 114)

Juan realiza un trabajo de la técnica eficiente: [*Por una parte $x+y=50$, y por otra $3x + 2y = c$, que es el dinero, c es lo que quieres hallar. Entonces despejas $y = 50 - x$]. [*Entonces $3x + 2(50-x) = c$. Entonces operas eso: $3x + 100 - 2x = c$, $x + 100 = c$, $x + c = 100$*] [error de cálculo]. Pero muestra cómo su saber tecnológico (la justificación de las técnicas empleadas) es muy débil: [*Se llega a otra ecuación que no sé si sirve para algo*]...[*La verdad es que estoy perdido*]...[*Te da otra ecuación pero, ¿qué haces con eso?*]. [*Entonces viene siendo que al número de kilos de la mañana sumándole 100 te da el dinero total* (refiriéndose a la ecuación $x + 100 = c$)]. Como puede observarse, Juan asume explícitamente que ¡sumando kilos con euros, obtiene la recaudación total! Por el contrario, Rocio “se pierde” en el trabajo de la técnica: [*¿Tienes que multiplicar o sumar?*]... [*Lo intenté y sale una cosa extrañísima*]...[*Es un sistema de ecuaciones, pero...*]. En esta ocasión Rocio no detecta la incongruencia de sumar cantidades de diferentes magnitudes y su labor supervisora falla.*

Como veremos en los episodios que siguen, ninguno de los 4 estudiantes percibe el problema de la necesidad de justificar la homogeneidad de las cantidades de magnitud que se manejan en la suma $x + 100$ del modelo algebraico y, por tanto, no pueden explicar que en la ecuación $x + 100 = c$, x ya no representa una cantidad de masa/peso, sino de dinero, ya que: $3 \text{ €/k} \cdot x \text{ k} - 2 \text{ €/k} \cdot x \text{ k} = (3-2) \text{ €/k} \cdot x \text{ k} = 1 \text{ €/k} \cdot x \text{ k} = x \text{ €}$, que hace razonable la suma $x + 100$.

SG 8: Argumentaciones sobre la validez del modelo mediante uso de casos particulares, transformación del modelo en otros equivalentes y evidencia de la no detección de suma de cantidades de magnitud distintas.

116. E: *¿Veis alguna solución que concuerde con lo que pensabais al principio?*

117. JUAN: *Vamos a ver. 1 kilo de la mañana + 100 = 101 que era el de antes ¿no?*

[una evidencia más de que no detecta que suma kilos con euros]

118.NEREA: Sí que vale. Si vendiese todo por la mañana sería $50 \text{ kilos} + 100 = 150$.

Entonces sí que valdría.

[Ahora es Nerea la que acepta o no se da cuenta de que suma kilos con euros]

119.JUAN: Esto es estresante (hace cálculos en voz baja, hasta llegar a $c+y=150$,

[cambiando de variable]. Entonces el dinero ganado más los kilos de la tarde dan 150.

Vale lo mismo ¿no?

[de nuevo explicita que suma kilos con euros]

120.E: ¿Entonces los resultados se están verificando?

121.JUAN: Sí. Cualquiera de éstas es una solución. Sustituyendo cualquier valor de kilos por la mañana y por la tarde se cumple la igualdad. Entonces es que está bien. Vale cualquier resultado.

122.ROCIO: Yo aquí despejé algo mal. Cuando haces 2 por $50 - x$..¿ Como haces?

123.JUAN: (ayudando a Rocio) 2 por 50, 100. 2 por $-x$, $-2x$. Luego es $100 - 2x$.

124.ROCIO: Claro!: $3x - 2x = x$; $x = c - 100$.

125.JUAN: $3x - 2x = x$. $x + 100 = c$. ¿no?.

126.ROCIO: Claro!. Tu despejas x ...

127.JUAN: No, ya se queda así...ya no hace falta... Pero bueno, sí, $x = c - 100$.

128.E: Entonces, ¿Qué tipo de fórmula creéis que es el modelo del problema?

129.JUAN: $x = c - 100$. $y = 150 - c$. Es que valen todas!

130.NOA: Es una fórmula.. ¿cómo se llama?

131.E: ¿Fórmula algebraica?

132.NOA: ¡Eso! Fórmula algebraica.

133.ROCIO: (haciendo comprobaciones con datos concretos). Son 60 ... Sí, se cumple en todos [los casos]

134.JUAN: (hacia Rocio). ¿Cuánto dinero pudo sacar?: c dinero ¿Vale?

135.NEREA: (haciendo también comprobaciones). Yo supongo que sí. Se cumple siempre. Pero yo ahí no hubiera llegado “ni muerta” ... “Ni muerta”.

136.E: Entonces ¿podrías decir la fórmula final a la que has llegado Juan?

137.JUAN: Cualquiera vale: $x = c - 100$. O sea, los kilos que vende por la mañana es igual al dinero que va a ganar menos 100.

[de nuevo identifica kilos con euros]

138.E: (insistiendo, para ver si se da cuenta de su error) ¿Qué representan x y c , entonces?

139.JUAN: x los kilos que vende por la mañana y c el dinero que se lleva para casa.

Bueno es el dinero que gana.

140.E: Vosotras, ¿lo habéis entendido?

141.NEREA: Yo... viendo así sí, pero...No llegaría nunca...

142.ROCIO: Sí, sí.

143.E: Noa ¿tú?

144.NOA: Más o menos. Yo creo que estoy perdida en la mitad de lo que ha hecho [Juan], pero...

145.ROCIO: (tratando de ayudar a Noa). Noa porque la relación entre x e y es que $x+y = 50$.

146.NOA: Esto lo entiendo.

147.ROCIO: Entonces tú despejas: por ejemplo y y te queda..

148.NOA (interrumpiendo a Rocio): Sí, $50-x$.

149.ROCIO: Entonces 3 € es el precio por kilo de la mañana y 2 € el de la tarde. Entonces sustituyes $2y$ por $2(50-x)$. Al operar te sale 100.

150.NOA: Sí.. sí. Ahora sí.

[silencio y fin del debate]

Tesis 23: “como modelo algebraico del problema podemos proponer $x=c-100$ ó $y = 150-c$ ”
“(Juan, EP129).

Argumentos:

- “ x los kilos que vende por la mañana y c el dinero que se lleva para casa”(Juan, EP139)

-Tesis 24. “las comprobaciones con casos concretos validan el modelo” (Rocio, EP133).

Argumentos para lograr la comprensión del modelo por parte de otros participantes:

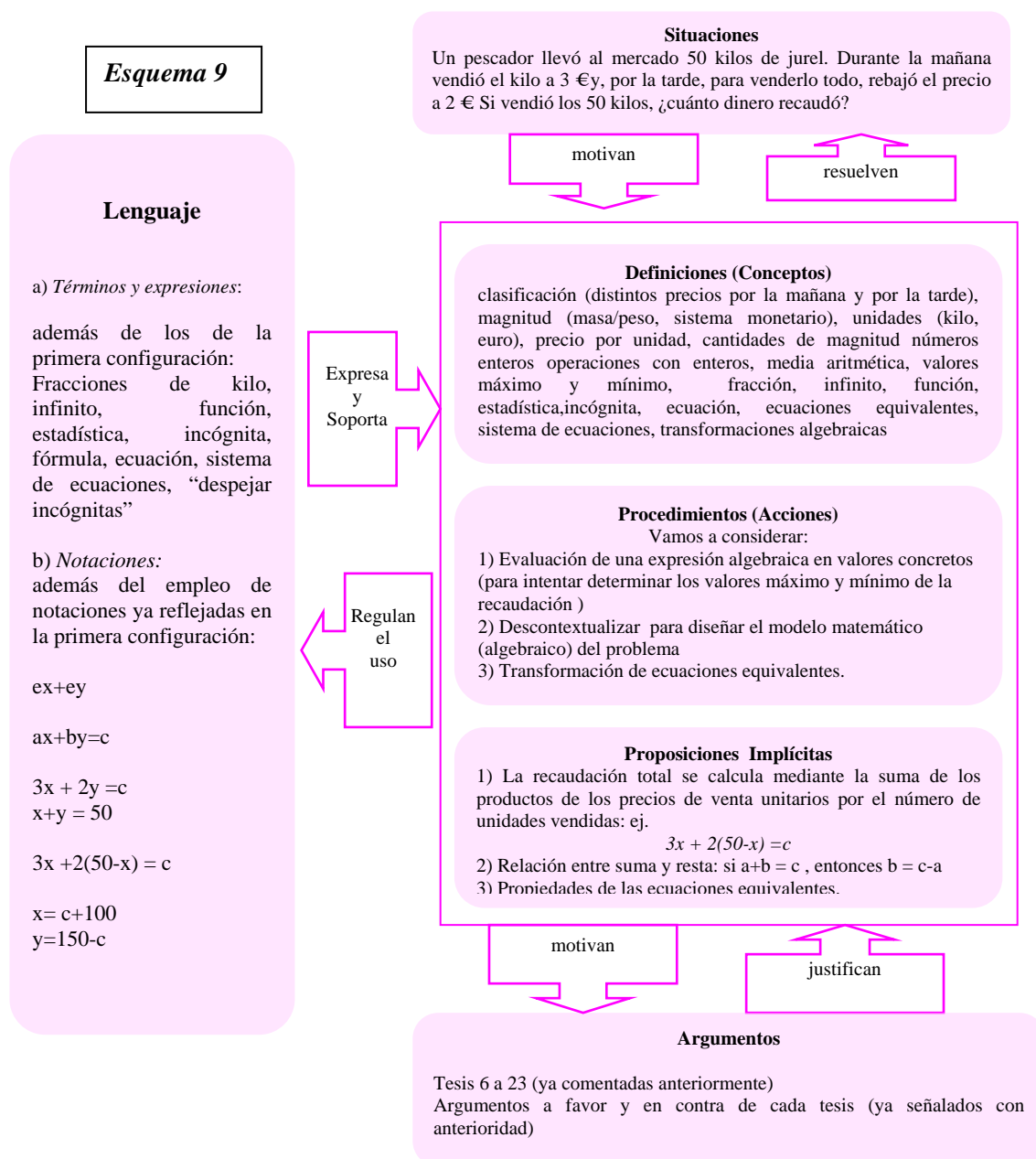
(Rocio, dirigiéndose a Noa, EP149) “Entonces 3 € es el precio por kilo de la mañana y 2 € el de la tarde. Entonces sustituyes $2y$ por $2(50-x)$. Al operar te sale 100.”

En este último segmento del debate, el trabajo de la técnica constituye el centro de atención, con petición de aclaraciones sobre la manipulación de expresiones algebraicas, en donde la “autoridad” de Juan se impone y es aceptada por los demás. Nerea, además, reconoce explícitamente que ella no sería capaz de obtener el modelo. Noa también reconoce que está algo perdida. Con estas aclaraciones a la conversión del modelo $3x +$

$2(50-x) = c$, en su equivalente algebraico: $x=c -100$, finaliza el debate sobre la resolución de la tarea.

Destacamos en este último bloque de segmentos (del SG3 al SG8), el segmento SG3 que fomentó la necesidad de contemplar un modelo más general para representar el problema y sus soluciones, que aún presidido por dudas y dificultades, discutidas en los siguientes segmentos del debate, permitió a los participantes elaborar un modelo algebraico aceptable, desde el punto de vista institucional, posibilitando la elaboración de una segunda configuración cognitiva (basada en el uso del marco algebraico) que presentamos a continuación:

5) SEGUNDA CONFIGURACIÓN COGNITIVA (ALGEBRAICA)



Algunas consideraciones sobre la configuración anterior

Lenguaje: En esta segunda configuración, los términos y expresiones evolucionan a partir de la consideración de las fracciones de kilo como cantidades válidas para determinar recaudaciones. Las expresiones del tipo “hay infinitas soluciones” son el punto de partida para debatir con mayor precisión sobre los valores máximos y mínimos de la recaudación y para la elaboración del modelo algebraico de la solución. En el ámbito de representación, se manejan fórmulas algebraicas que representan ecuaciones y sistemas de ecuaciones, así como sus manipulaciones algebraicas para transformarlas en ecuaciones equivalentes.

Definiciones: Además de los conceptos utilizados en la primera configuración, se incluyen aquí los de fracción, infinito, función, estadística, incógnita, ecuación, ecuaciones equivalentes, sistema de ecuaciones y transformaciones algebraicas, que constituyen los tipos de objetos necesarios para el diseño del modelo algebraico que representa el problema y sus múltiples soluciones.

Procedimientos: En esta segunda fase del debate, los procesos que manejan los participantes, son semejantes a los señalados en la configuración epistémica de referencia, aunque con una puesta en práctica más lenta y dificultosa debida a ciertas debilidades cognitivas sobre el diseño de modelos matemáticos de situaciones contextualizadas.

Proposiciones: La propiedad que manejan (de forma implícita) es la que les permite escribir el modelo algebraico de la recaudación: “la recaudación total se calcula mediante la suma de los productos de los precios de venta unitarios por el número de unidades vendidas: $3x + 2(50-x) = c$ ”. También usan determinadas propiedades algebraicas par transformar ecuaciones en otras equivalentes más sencillas de manejar, aunque no perciben el problema del resultado del producto de cantidades extensivas e intensivas.

Argumentos: Las tesis y justificaciones que se ponen en juego a lo largo de esta fase del debate son muy variados y se han recogido con detalle en la trayectoria argumentativa.

6) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS DURANTE LA SEGUNDA FASE DEL DEBATE

Recogemos aquí, en síntesis, la evolución del discurso de esta fase, cuya meta final fue establecer el modelo algebraico que representa el problema y sus soluciones:

- a) Acciones discursivas sobre la necesidad de contemplar un marco más amplio que el de los números enteros para representar las soluciones múltiples del problema. Para ello se introducen las fracciones de kilo, la discusión sobre si hay o no infinitas soluciones, la elaboración de tablas de valores de ventas y la consideración de valores máximos y mínimos de la recaudación (Tesis 1 a 10 y sus correspondientes argumentaciones y contraargumentaciones). Incluye acciones actuativas de cálculo de valores particulares todavía en el nivel aritmético.
- b) Acciones actuativas y discursivas para una primera aproximación al diseño de un modelo algebraico que represente la situación. Dentro de las argumentaciones se incluyen las tesis 11 a 16 y sus justificaciones a favor y en contra. Lo más relevante de este segmento es la dificultad inicial para representar el problema y sus soluciones simbólicamente, así como las acciones actuativas para intentar diseñar un modelo algebraico ($ex + ey$; $ax + bx = c$; $3x + 2y = 50$), aunque todos actúan como proponentes-oponentes, hasta llegar a un esbozo de modelo todavía incompleto pero eficaz para la evolución del discurso $3x + 2y = c$ (recaudación).
- c) Argumentos que intentan mejorar el modelo algebraico introducido. Hay dificultades para reconocer las ventajas del modelo algebraico (general) sobre el modelo aritmético, basado en la resolución de casos particulares. Al mismo tiempo, se observan debilidades cognitivas que provocan confusión acerca de cómo utilizar correctamente los datos del problema para plantear las ecuaciones adecuadas, comparando cantidades de diferentes magnitudes (kilos con euros), incongruencia detectada por una participante.
- d) Acciones actuativas y argumentaciones que permiten construir el modelo algebraico del problema. Las acciones actuativas se centran en determinar, primero, el sistema de ecuaciones que representa el problema y sus soluciones, y las manipulaciones algebraicas que dan lugar al modelo adecuado: $3x + 2(50-x) = c$, (tesis 19 a 22). Sus justificaciones incluyen transformaciones del modelo anterior mediante manipulación algebraica (con algún error de cálculo, p.e.: $x + c = 100$).

- e) En el último segmento del debate, se aportan argumentaciones sobre la validez del modelo mediante uso de casos particulares, transformación del modelo en otros equivalentes, y se evidencia la no detección de suma de cantidades de magnitudes distintas (tesis 23 y 24, con sus correspondientes justificaciones). Algún participante acepta el modelo pero señala que no sería capaz de construirlo personalmente. Las acciones actuativas se centran, en esta fase, en la realización de manipulaciones con el modelo y en el intento de convencer a los oponentes de cómo obtener los diferentes modelos equivalentes, aunque sin pararse a pensar en las nuevas interpretaciones que se originan sobre el tipo de magnitudes que representa cada variable del modelo.

7) SEGUNDA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA

Tabla 12 – 2ª configuración metacognitiva del debate

<p>Gestiones primarias (<i>metacognición primaria</i>)</p> <p>1) <i>Lectura más reflexiva</i> de la situación problema 2) <i>Ser consciente</i> de la existencia de cantidades fraccionarias y, como consecuencia, de la necesidad de diseñar un modelo más general para el problema 3) <i>Dar por válido un argumento</i> (para uno mismo).</p>
<p>Gestiones secundarias (<i>metacognición secundaria</i>)</p> <p>1) <i>De supervisión</i> 2) <i>De regulación</i> 3) <i>De evaluación/verificación (implícita)</i></p>
<p>Gestiones para una metacognición ideal</p> <p>1. <i>Generalización</i>: diseñando un modelo algebraico que representa el problema y sus soluciones, con transformaciones equivalentes de dicho modelo, para obtener otros más simples. 2. <i>Particularización</i> del modelo, resolviendo casos concretos para validar el modelo.</p>

Gestiones primarias (*metacognición primaria*)

- 1) *Lectura más reflexiva* de la situación-problema, que conduce a Rocio a plantear que las cantidades de pescado pueden ser un número fraccionario de kilos, lo que la conduce a

formular “infinitas” soluciones para el problema (con dudas acerca del significado de infinito). También proporciona argumentos a Juan para plantear que la solución general del problema debe pasar por consideraciones de tipo estadístico o funcional. La posterior consideración de tablas de valores por parte de Rocio y Noa, apoya esta tesis de Juan.

2) *Ser conscientes de que para proponer* soluciones generales, debe dar un paso crucial: pasar de soluciones particulares mediante operaciones con números enteros, a diseñar un modelo algebraico, que permite representar el problema y sus soluciones a nivel general. Las acciones que se emprenden a partir de estas reflexiones permiten tanto observar dificultades y dudas en relación con la construcción del modelo, como las ventajas de disponer del modelo general sobre la resolución de casos particulares.

3) La validez personal de los argumentos, derivados de la obtención del modelo algebraico general, parece tener que ver más con el carácter activo (construcción del modelo, manipulación algebraica del mismo mediante reglas algebraicas, etc) que con el carácter discursivo-comprensivo (interpretación de las variables del modelo en términos que cada variable, en función del contexto, puede representar cantidades de magnitudes distintas, etc...

Gestiones secundarias (*metacognición secundaria*)

- 1) *Supervisión:* Durante el diseño del modelo algebraico de la situación, se produce una continua supervisión, por parte de Rocio, de las tesis y argumentos de Juan, que lleva el peso del diseño de dicho modelo, durante el que comete determinados errores (como e.g. establecer igualdades entre cantidades de distintas magnitudes). Por otra lado, Juan y Rocio se ayudan mutuamente en la elaboración del sistema de ecuaciones que representa la situación, y sus posibles transformaciones. Nerea y Noa siguen este proceso con dificultades, admitiendo sus carencias de tipo cognitivo y metacognitivo para acompañar de manera eficiente los argumentos de sus dos compañeros.
- 2) *Regulación:* Como consecuencia de la supervisión, se produce una regulación constante del modelo algebraico que pasa por diferentes niveles de concreción, desde formulaciones confusas e ineficaces ($ex+ey$, $ax+bx = c$), a otras más

precisas (pero sin tener en cuenta algún dato: $3x + 2y = c$), hasta encontrar el modelo adecuado: un sistema de ecuaciones: $x+y=50$, $3x+2y=c$, o sus correspondientes transformaciones en ecuaciones equivalentes, más sencillas de manejar: $x=c+100$, $y=150-c$.

- 3) *Evaluación/revisión*: La evaluación del modelo se produce cuando los participantes validan el modelo mediante la comprobación con casos particulares. Sin embargo, en el proceso de revisión no detectan que las variables x e y , representan cantidades de diferentes magnitudes (kilos o euros), en función del modelo algebraico (en el sistema de ecuaciones representan cantidades de pescado, y en el modelo simplificado representan cantidades de euros).

Gestiones para una metacognición ideal

1. *Generalización*: El haber logrado diseñar un modelo algebraico que representa el problema y sus soluciones, con transformaciones equivalentes de dicho modelo para obtener otros más simples, revela haber alcanzado un nivel de generalización adecuado por parte de los participantes, aunque no hayan plasmado esta generalización como un caso particular de la teoría de ecuaciones lineales.
2. *Particularización*: Al mismo tiempo, los participantes son conscientes de que dicho modelo puede aportar soluciones particulares del problema, resolviendo para ello casos concretos (preferentemente con cantidades enteras)

ALGUNAS CONCLUSIONES DERIVADAS DEL DESARROLLO DEL DEBATE

De manera general, podemos observar la continua evolución de los procesos cognitivos y metacognitivos de los participantes en el debate. Así, en la primera parte del debate, que origina las primeras configuraciones cognitiva y metacognitiva, se pone de manifiesto que, a pesar de reconocer de partida (al menos implícitamente) que el problema posee múltiples soluciones, las acciones actuativas y argumentativas de esta fase evolucionan lentamente, al introducir en el debate “saberes culturales” que crean cierta confusión adicional a la propia interpretación del enunciado de la situación-problema. Esta confusión provoca, en particular, dificultades para establecer los valores máximo y mínimo de la recaudación. Por

otra parte, las acciones actuativas se centran en operaciones aritméticas con cantidades enteras, con el objeto de obtener algunos valores particulares de la recaudación, que intentan justificar con argumentos basados en suposiciones no explícitas en el enunciado del problema. Sólo Juan parece mantenerse al margen de estas suposiciones, que le permiten invalidar (o, al menos, poner en duda) los argumentos de los demás participantes, que van evolucionando a medida que transcurre el debate hacia posiciones más centradas en el enunciado del problema.

El argumento que, a nuestro juicio, resulta crucial para pasar de una forma de reflexión, basada en uso del marco aritmético como referencial actuativo, a otros planteamientos más generales, que deben usar el marco algebraico para interpretar el problema y sus soluciones, se produce cuando se considera *la introducción de la fracción de kilo como cantidad factible a tener en cuenta*.

A partir de este momento, el incremento de posibilidades de obtener más soluciones del problema hace surgir nuevas propuestas, acompañadas de una supervisión y revisión del proceso de resolución, que se basan en la búsqueda de un modelo algebraico adecuado a la tarea, a la vez que permiten aproximar mejor los valores extremos de la recaudación. Se generan así nuevas configuraciones cognitivas y metacognitivas, mucho más próximas a las de referencia. Debemos destacar aquí algunas dificultades debidas, sobre todo, a debilidades cognitivas y metacognitivas derivadas de la interpretación del concepto de modelo matemático: por una parte, el no reconocimiento explícito de las ventajas de disponer de un modelo simbólico general para un determinado problema, sobre las simples comprobaciones particulares de algunas soluciones (dualidad tipo/ejemplar) y, por otra, de las dificultades para diseñar un modelo simbólico (en este caso algebraico) que responda fielmente a las condiciones de la situación planteada. Sin embargo, la supervisión y revisión continuas del proceso y las sucesivas formulaciones de tesis y justificaciones permitieron que, de un modelo muy poco adecuado a la situación, se pasara, poco a poco, a un modelo simbólico adecuado, que fueron transformando paulatinamente en otros equivalentes más simples y operativos.

También, desde el punto de vista metacognitivo, la evolución continua a que hemos hecho referencia, pasa por una *primera fase* en la que la introducción de nuevos elementos de análisis, no explícitos en el problema, pero relacionados con el conocimiento de circunstancias externas que pueden interactuar con la situación propuesta, nos permite observar la manera en que aspectos metacognitivos, como la *reflexión sobre el propio*

conocimiento y los *conocimientos acerca del contexto de la tarea*, interfieren con la situación, ayudando o dificultando la elección de estrategias concretas para su resolución, distinguiéndose posiciones más pragmáticas y objetivas (Juan) frente a otras más subjetivas, no exentas de realidad cultural (Nerea, Rocio). Nerea, en su configuración metacognitiva primaria, considera que, del enunciado de la tarea, se deduce que necesariamente debió haber ventas por la mañana. Nerea parece exigir más datos al enunciado de la tarea para poder considerar la posibilidad de que por la mañana pudo no haber ventas. Esta exigencia la lleva a reafirmarse en su postura, pese a los argumentos de Juan. Por su parte, Rocio duda cómo calcular los valores extremos, aunque asume, con Nerea, que la mayor parte del pescado se debe vender por la mañana (por consideraciones “culturales”, al margen del enunciado). Sin embargo, considera que sobre las soluciones sólo pueden realizarse conjeturas. Existen, en esta fase del debate, indicios evidentes de la existencia de metacognición secundaria, enmarcados en justificaciones que tienen lugar en un contexto aritmético en el que se consideran sólo soluciones particulares, obtenidas mediante operaciones con cantidades enteras que ponen en evidencia que la supervisión, revisión y evaluación de las soluciones tienen un carácter restrictivo. A estas acciones de carácter restrictivo sumadas a las insinuaciones de tipo “no es una solución de las que estamos acostumbrados...”, “una solución determinada. Te tiene que dar esto y si no lo ha hecho todo mal...” inferimos que las conductas metacognitivas y, por tanto, la autonomía personal, de los participantes están condicionadas probablemente por los tipos de instrucción “cerrada” que han recibido en su trayectoria escolar.

Es a partir del episodio 33 cuando surgen estrategias metacognitivas, que consideramos centrales para la evolución de la toma de decisiones: la contemplación de valores fraccionarios de kilo y la subsiguiente necesidad de buscar un modelo más general para representar el problema y sus soluciones (al considerar que puede haber “infinitos” resultados). Supone el paso del pensamiento “aislado” al “denso”, y cambia radicalmente la configuración cognitiva puesta en juego hasta ese instante. Las nuevas decisiones, a partir de ese instante, se dirigen prioritariamente a la búsqueda de ese modelo general.

A pesar de las dificultades en construir un modelo algebraico adecuado, con cierto rechazo de sus ventajas intrínsecas con respecto al modelo basado en la obtención de soluciones particulares mediante operaciones aritméticas, se observa una reflexión consciente, más adaptada a la representación de la situación, que permite concluir que los argumentos (tesis y justificaciones) que se utilizan en la segunda fase del debate

representan una evolución positiva en las gestiones primaria y secundaria de la configuración metacognitiva de los participantes (sobre todo por parte de Rocio y Juan) que culmina con la generalización y particularización de soluciones (como una aproximación a la metacognición ideal) que se acercan a las configuraciones epistémica y metacognitiva de referencia. A este respecto, debemos mencionar las específicas dificultades de Nerea y Noa para sumarse a los argumentos de los otros dos participantes, que relacionamos con debilidades cognitivas relativas al trabajo con modelos algebraicos, aunque asuman, al final, la validez de dicho modelo.

Resaltamos los elementos positivos del debate y, por tanto, del diálogo para confrontar argumentos, validar o invalidar propuestas, aportar tesis y justificaciones que son sometidas a la crítica de los participantes, como un juego de lenguaje que, en este caso, permitió una evolución positiva de las configuraciones cognitiva y metacognitiva que, con sus matices y dificultades, nos permitió aproximarnos a una información más precisa de los conocimientos reales de cada sujeto.

Desde el punto de vista cognitivo, se observa una evolución muy acentuada entre la primera y segunda configuración. Se pasa de conocimientos restrictivos, basados en decisiones actuativas centradas en operaciones aritméticas con cantidades enteras, a la evidencia de la necesidad de contemplar modelos simbólicos generales, que representen todas las soluciones de un problema. La construcción de dicho modelo reveló ciertas deficiencias en el trabajo con modelos matemáticos, que se superaron, para este contexto concreto, a lo largo del debate, y la constatación de la primacía de la manipulación algebraica sobre los procesos interpretativos.

EL CASO VÍCTOR Y EL PROBLEMA DE LAS 9 BOLITAS

Víctor es un estudiante de 3º de E.S.O. que, pasados algunos días después de responder a la Prueba de Habilidades Metacognitivas, nos ha concedido 20 minutos de su tiempo (bajo el permiso de su profesor) para contestar algunas de las preguntas que nos proponemos hacerle relativas a dicha Prueba. De su entrevista, recortamos las aclaraciones dadas por él al *problema de las 9 bolitas*. Para el “Caso Víctor” tendremos dos momentos de análisis, primeramente de su protocolo escrito y después del oral. Todavía, antes presentaremos

nuestros comentarios y las configuraciones cognitiva y metacognitiva de referencia para dicho problema.

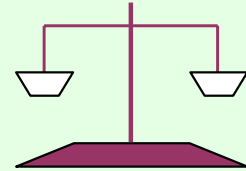
PROBLEMA DE LAS 9 BOLITAS

Fíjate cómo pensó Rocío la forma de averiguar cuál era la bolita más “ligera”, efectuando una única pesada:

Cogió dos cualquiera de las bolitas y puso una en cada plato:

- a) Si una pesaba menos, esa sería la más ligera;
- b) Si pesaban lo mismo, la que quedó sin pesar sería la más ligera.

Ahora tienes **nueve** bolitas semejantes, también una de ellas más ligera que las otras. ¿Cómo podrías descubrir cuál es, en **dos pesadas**?



1º MOMENTO: EL PROTOCOLO ESCRITO

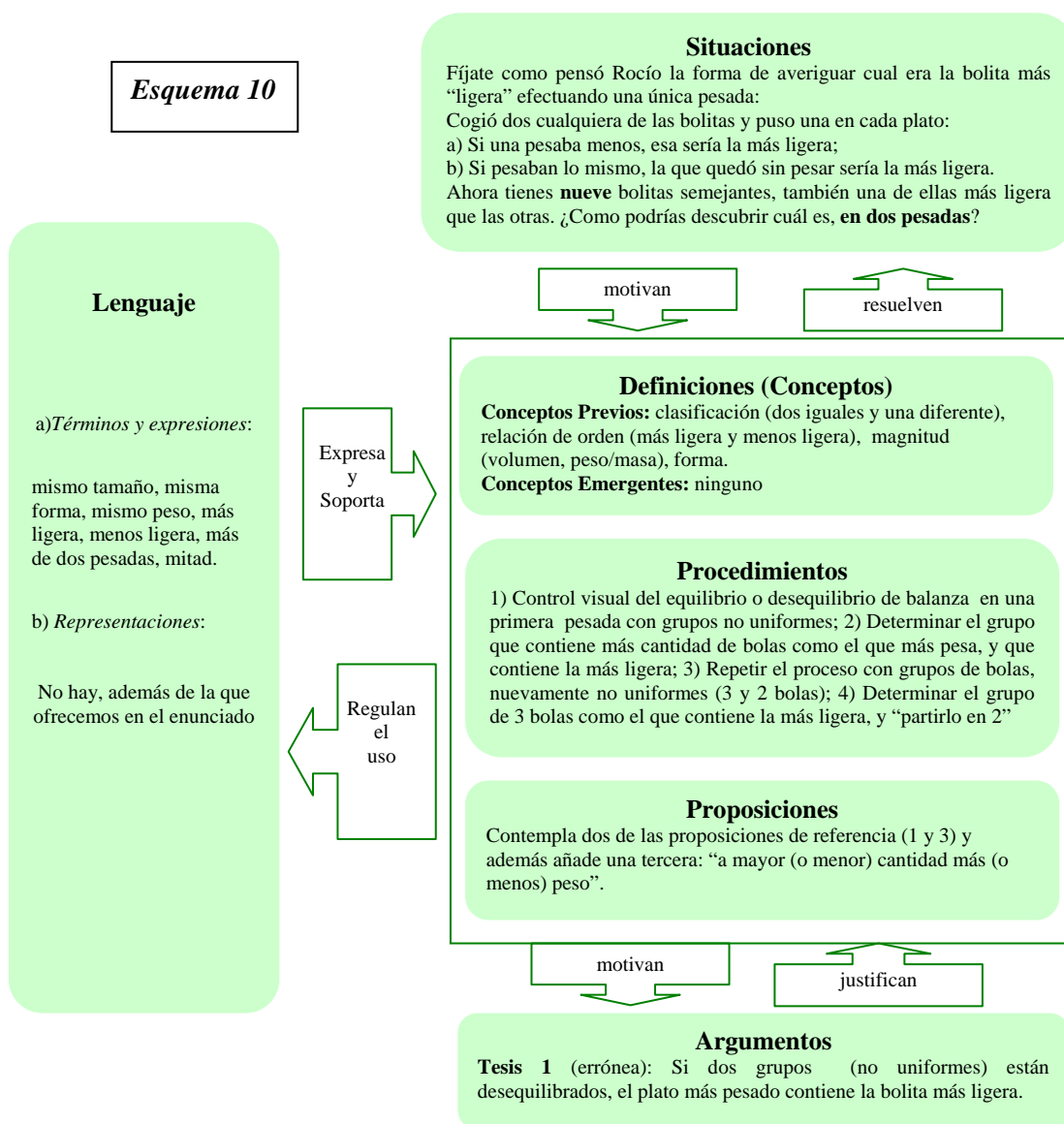
Pones 4 en un lado y cinco en el otro
El lado que pese más está la más ligera
Donde está la más ligera lo divides a la mitad
y el lado que pese más está la más ligera. ~~Donde están~~
las 3 y eso lo divides en dos y ya está

Pones 4 en un lado y cinco en el otro.

El lado que pese más está la más ligera.

Donde está la más ligera lo divides a la mitad y el lado que pese más está la más ligera. Donde están las 3 y eso lo divide en dos y ya está.

1) CONFIGURACIÓN COGNITIVA ACTIVADA EN LA RESPUESTA DE VÍCTOR



Algunas consideraciones sobre la configuración cognitiva de Víctor

Lenguaje: Además de lo señalado en el cuadro, podemos añadir los agrupamientos no uniformes y que ha usado más de dos pesadas, no cumpliendo con la condición exigida en la tarea. Muestra confusión al identificar la posición de la bola más ligera dentro del grupo que “pesa más”. No tiene un lenguaje muy clarificador, pero el limitado discurso que utiliza lo hace de manera parcialmente correcta (conceptualmente) pero en algún momento

tiene errores de expresión (por ejemplo, cuando se refiere a la mitad de cinco). No hay representaciones además de la ofrecida en el enunciado.

Procedimientos: Los procesos diseñados por Víctor revelan una estrategia errónea (debida al uso de agrupamientos no uniformes de bolas) al asociar mayor cantidad de bolas con mayor peso (correcto) y con el grupo que contiene la bola más ligera (incorrecto). Esta estrategia le conduce hacia la consideración de que sólo los grupos con mayor cantidad de bolas pueden contener la bola más ligera.

Definiciones: Además de lo indicado en el cuadro, un concepto evidente utilizado por Víctor es el de magnitud (masa), que le permite asociar mayor cantidad de bolas con más peso. Es un concepto emergente de otras prácticas y se muestra confuso en este contexto.

Propiedades: La respuesta de Víctor parece tener en cuenta dos de las propiedades apreciadas en el contexto institucional de referencia (1 y 3), pero es evidente en su razonamiento una tercera propiedad: “a mayor (o menor) cantidad de bolas, más (o menos) peso”.

2) SUCESIÓN DE ACCIONES ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LA TAREA

Al no percibir que se podría establecer el “rango” (peso relativo) de las bolitas sin necesidad de contrastarlas todas entre sí, las acciones actuativas de Víctor se centran en hacer comparaciones, primeramente con todas las bolas por bloques (no uniformes) después, tras la observación, elige el grupo que tiene más cantidad de bolas y vuelve a hacer comparaciones por bloques (no uniformes) hasta agotar los agrupamientos. Utiliza varias pesadas sin tener en cuenta las exigencias de la tarea. Reconoce el grupo que contiene más cantidad como el grupo que pesa más y como el que contiene la bola más ligera. Tiene dificultades para interpretar el grupo con menos cantidad de bolas.

A pesar de aplicar una estrategia incorrecta, las acciones discursivas de Víctor van en el sentido de justificar sus acciones mediante inferencias a partir de las posiciones de los platos de la balanza: si los dos grupos están desequilibrados, el plato más bajo contiene la bolita más ligera (sin considerar que la posición de la bola más ligera, no modifica la

condición de mayor peso del grupo que tiene más cantidad de bolas). Sus justificaciones se basan en la propiedad de “a más cantidad, más peso”. Son argumentaciones limitadas, pero pensamos que reflejan el entorno (en el sentido de que no está solo, estando presentes, por ejemplo, los conceptos de masa y tamaño) de su objeto personal.

3) CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA PERSONAL DE VÍCTOR

Tabla 13 – 1ª configuración metacognitiva de Víctor

<p>Gestiones primarias (metacognición primaria)</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Realiza una <i>lectura parcialmente comprensiva</i> de la situación problema, reconociendo, también de forma parcial, las exigencias y condiciones de la tarea; 2) Realiza <i>observaciones poco cuidadosas y poco conscientes</i> de la posición de los platos para decidir en qué grupo se encuentra la bola más ligera. 3) <i>Argumenta</i> en función de la posición de los dos platos, de forma <i>automática y poco consciente</i>, concluyendo que la más ligera está en el grupo de 5 (argumento erróneo) y, después, que está en el grupo de 3 (argumento erróneo).
<p>Gestiones secundarias (metacognición secundaria)</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) <i>Nivel de supervisión</i> (el alumno concluye que ha resuelto el problema). Se trata de una supervisión errónea, ya que cree que ha resuelto correctamente el problema. 2) y 3) <i>No hay Nivel de regulación ni de evaluación</i> (no se produce regulación puesto que Víctor considera que ha cumplido su propósito de resolver el problema)
<p>Gestiones para una metacognición ideal</p> <p>No hay</p>

Gestiones primarias (metacognición primaria)

1) *Realiza una lectura parcialmente comprensiva de la situación problema*: Víctor no ha comprendido el texto en su totalidad y eso se ve reflejado en sus acciones, cuando no se da cuenta de la información que se ofrece en texto (el problema de las 3 bolitas resuelto) y no tener en cuenta la exigencia de la tarea (dos pesadas). La no comprensión de las condiciones del problema durante la lectura es evidente por las acciones a posteriori que llega a tomar, o sea, *decide realizar una pesada hipotética con dos grupos no uniformes de*

bolitas, uno de 4 y otro de 5. Al no percibir que se podría establecer el “rango” (peso relativo) de las bolitas sin necesidad de contrastarlas todas entre sí, así como de no percibir la información explícita en el texto (solución del problema de las 3 bolitas) Víctor hace uso de una estrategia primaria de comparación por bloques, todas las bolas a la vez. Con esta acción, Víctor tuvo la intención de valorar el desequilibrio entre los platos de la balanza y también puede que en éste momento tuviera la intención de usar dos pesadas, conforme requiere el problema.

2) Realiza observaciones poco cuidadosas y conscientes de la posición de los platos. A partir de la planificación de su estrategia (primaria de comparación) y en este momento, Víctor evalúa su acción, valorando el desequilibrio de la balanza. Tras esta primera observación decide realizar una segunda pesada, dividiendo el grupo de 5 en 3 y 2: después de su elección vuelve a hacer comparaciones por bloques (no uniformes). Sus argumentaciones se mantienen en las mismas premisas a lo largo del proceso de resolución. Su segunda observación se da también en las mismas condiciones anteriores, al valorar el desequilibrio de la balanza. A partir de esta observación, Víctor decide realizar una tercera pesada con dos grupos no uniformes de bolitas, uno de 2 y otro de 1 y, por fin, agota los agrupamientos y da como resuelto el problema (conclusión errónea).

3) Sus argumentos son poco conscientes y están en función de la posición de los dos platos. Primeramente, concluye que la más ligera está en el grupo de 5 (argumento erróneo) y, en este momento, Víctor no sólo valora el desequilibrio de la balanza, sino que “explica” las razones de su acción: elegir el lado que pese más como el lado que contiene la más ligera y, en este instante, tiene su intención satisfecha. Al elegir el grupo que tiene más cantidad de bolas como el que “pesa más” se pone de manifiesto el objeto personal “masa”. Después, concluye que la más ligera está en el grupo de 3 (argumento erróneo) y, en este otro momento, reconoce el grupo que contiene más cantidad como el grupo que pesa más y como el que contiene la bola más ligera. No es consciente de la necesidad de interpretar el grupo con menos cantidad de bolas.

Gestiones secundarias (metacognición secundaria)

1) Nivel de supervisión (el alumno concluye que ha resuelto el problema). Se trata de una supervisión errónea, ya que cree que ha resuelto correctamente el problema. Además,

observamos que la acción de valorar el desequilibrio de la balanza requiere también una acción de supervisión, con el intento de garantizar que se está en dirección de alcanzar su propósito.

2) *No hay nivel de regulación* (no se produce regulación puesto que Víctor considera que ha cumplido su propósito de resolver el problema). No ha tenido en cuenta las exigencias de la tarea; de lo contrario, habría intentado cambiar de estrategia.

Gestiones para una metacognición ideal

No hay aplicación de la *ANALOGÍA*: no se da cuenta de la analogía que hay con el caso de las tres bolitas y, por tanto, no sólo no decide agrupar las 9 bolitas en grupos de 3, sino que incluso cuando llega al caso de 3 las agrupa en 2 y 1.

Sorprendentemente, Víctor había resuelto correctamente el “problema de las 3 bolitas” siguiendo un proceso totalmente análogo al que se describe en el texto de las 9 bolitas. Todo ello nos lleva a considerar que el razonamiento por analogía no forma parte todavía de las competencias metacognitivas de Víctor.

ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE ESTE 1º MOMENTO

Observamos que el objeto personal “masa”, emergente de otras prácticas, es evocado aquí como fundamental para la realización de la práctica que Víctor describe y para la interpretación de los resultados. A partir de ese momento, sus acciones de comparar las bolas por bloques y de elegir el grupo que tiene más como el grupo donde está la bola más ligera se repiten. Sus acciones pasan por un nivel de experimentaciones selectivas en función del contexto que, por carencias de actividades de monitoreo (supervisión, regulación y evaluación) adecuados, no pueden discriminar el grupo en donde se encuentra la bola más ligera y opta por elegir el que tiene más cantidad de bolas como el que “pesa más” y como el que contiene la bola más ligera. Estas carencias de acciones (o actividades) metacognitivas le llevan a proseguir con este criterio selectivo hasta el final del proceso.

Víctor no puede generalizar, ya que no percibe ninguna conexión con el problema anterior, lo que dificultó la aparición de estrategias alternativas. Esto le conduce a hacer

uso de una acción de experimentación ingenua no sujeta a las condiciones del problema (dos pesadas).

Desde el punto de vista global de las intenciones y propósitos, las acciones sucesivas de distribuir las bolas en grupos no uniformes tienen la intención de encontrar la bolita más ligera y, además, la intención de usar varias pesadas. Intenciones que son satisfechas. El propósito de resolver el problema (que consiste en encontrar la bolita más ligera), y que coincide con una de las intenciones, parece ser satisfactorio para Víctor, al no tener en cuenta las condiciones impuestas por la tarea. Si Víctor fuese consciente de estas condiciones su propósito no quedaría satisfecho, ya que optó por un método incorrecto de resolución. Quizás el nivel de satisfacción, consecuencia de la estrategia tomada (que para él era correcta) y el abandono de las condiciones del problema, le han impedido supervisar, evaluar y, por tanto, regular sus acciones tomando otro rumbo.

A la luz del análisis de este primer momento del “caso Víctor” bajo la óptica de las dos configuraciones aquí desarrolladas (cognitiva y metacognitiva) parece confirmar la hipótesis **H1**. *El hecho de que una persona tenga adquiridos los **conocimientos cognitivos** suficientes para la realización exitosa de una práctica no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias o uso incorrecto de conocimientos metacognitivos.* En otras palabras, y para un caso en particular, *el error de Víctor parece que no se debe a fallos en su configuración cognitiva, puesto que sólo tiene dificultades con el componente argumentativo de la configuración epistémica. Su respuesta errónea parece que se debe básicamente a su configuración metacognitiva.*

Para comprobar esta hipótesis realizamos una entrevista oral con Víctor, la cual caracteriza el segundo momento del “caso Víctor”.

2º MOMENTO: LA ENTREVISTA.

VICTOR(V): (momento de lectura)

1.V: Pones 4 en un lado y 5 en el otro y el lado que pesa más está la más ligera. Donde está la más ligera lo divide a la mitad y el lado que pese más, estará la más ligera.

2.ENTREVISTADORA(E): La mitad, ¿cómo?

3.V: Coge 3 y 2. Donde están las 3 y eso lo divide en 2 y ya está. 2 y 1.

4.E: Y si la más ligera estuviera en el plato de las 2?

5.V: Lo divides nuevamente.

6.E: Pero estarás usando más de dos pesadas, ¿no? [pausa]. ¿Crees que con esas dos pesadas descubrirás la bolita más ligera?

7.V: No.

8.E: ¿Puedes imaginar entonces otra forma de descubrir la más ligera?

9.V: No lo sé.

10.E: ¿Otra forma de agrupar? [larga pausa].

Volvamos, entonces, a lo que has dicho anteriormente, al principio. Agrupas en 4 y 5. Explícame eso despacito.

11.V: Con 5 y 4... como una es más ligera... va pesar más incluso... la que tenga así [hace gestos con la mano]... Espera. [pausa]... No se puede saber tampoco así... [larga pausa]... No se puede saber.

12.E: ¿No?

13.V: No, porque si la ligera está donde pones las de 4, va pesar menos pero aunque... aunque la ligera estuviese donde las 5, iba a ser lo mismo.. [siempre pesará más el plato donde están las 5].

14. E: Y... que más?

15.V: No, no se puede.

Trayectoria Argumentativa:

Tesis 1. “Pones 4 en un lado y 5 en el otro y en el lado que pesa más está la más ligera”. (episodio 1a (EP1a).

Tesis 2. “Donde está la más ligera lo divide a la mitad y en el lado que pese más, estará la más ligera” (EP1b).

Argumentos que invalidan la tesis 2: “La mitad, ¿cómo?” (EP2) “¿y si la más ligera estuviera en el plato de las 2?” (EP4).

Argumentos que intentan avalar la tesis 2: “Coge 3 y 2” [para dividir a la ‘mitad’]. (EP3a); “donde están las 3, lo divide en 2 y ya está: 2 y 1” (EP3b); “lo divides nuevamente” (EP5)

Tesis 3. “En dos pesadas [con este proceso] no se resuelve el problema” (EP6).

Argumento que valida la tesis 3: “No” [reconocimiento de la validez de la tesis 3] (EP7).

Argumento que da cuenta de un bloqueo metacognitivo: “No lo sé” [como emprender otras estrategias] (EP9).

Argumento para intentar un desbloqueo: “Agrupas en 4 y 5. Explícame eso despacito”. (EP10)

Tesis 4: “Con 5 y 4 [agrupando en] no se puede saber [donde está la más ligera]” (EP11).

Argumentos: “El plato donde están las 5 siempre pesará más” (EP13); “No, no se puede” (EP15)

1) EVOLUCIÓN DE LA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA DE VÍCTOR, COMO CONSECUENCIA DE LA ENTREVISTA:

Tabla 14 – 2ª configuración metacognitiva de Víctor

<p>Gestiones secundarias (metacognición secundaria)</p> <p>1) <i>Nivel de supervisión: Reconocimiento consciente</i> de que la estrategia elegida no permite decidir, en dos pesadas, dónde está la bola más ligera.</p> <p>2) y 3) <i>Nivel de regulación/evaluación. Consciencia</i> de haber aportado una justificación errónea: <i>el grupo “que pesa más” (identificado, correctamente, con el que tiene mayor cantidad de bolas) no tiene por qué contener la bola más ligera. Evidencia de no disponer, en ese momento, de una estrategia alternativa para planificar acciones que le permitan alcanzar la meta respetando las condiciones de la tarea.</i></p>
<p>Gestiones para una metacognición ideal</p> <p>No hay (<i>no percibe la aplicación de la analogía/transferencia del problema de las 3 bolitas al problema actual</i>)</p>

2) CONSIDERACIONES SOBRE LA EVOLUCIÓN DE LA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA DE VÍCTOR, TRAS LA ENTREVISTA:

La primera pregunta de la entrevistadora tiene por objetivo una aclaración del método seguido por Víctor (*La mitad, ¿cómo?*)

La segunda pregunta de la entrevistadora tiene por objetivo hacerle ver a Víctor que no ha terminado de resolver el problema (*¿Y si la más ligera estuviera en el plato de las 2?*). Víctor se da cuenta de que no ha terminado el problema, es decir, que no ha satisfecho su propósito y responde explicando cómo terminaría el problema (*Lo divides nuevamente*) con lo que ahora sí que considera que ha satisfecho el propósito de resolver el problema.

La tercera pregunta de la entrevistadora tiene por objetivo hacerle ver a Víctor que la manera en la que él cree haber resuelto el problema no cumple las condiciones del

enunciado (*Pero estarás usando más de dos pesadas, ¿no?... ¿Crees que con esas dos pesadas descubrirás la bolita más ligera?*). Las preguntas dos y tres de la entrevistadora pretenden que Víctor realice acciones metacognitivas secundarias de supervisión. Este objetivo se logra, ya que Víctor se da cuenta de que no ha respetado las condiciones del enunciado (*No*).

La pregunta cuatro de la entrevistadora pretende que Víctor realice acciones metacognitivas secundarias de regulación sin ninguna ayuda externa, es decir que emprenda un nuevo camino para resolver el problema (*¿Puedes imaginar entonces otra forma de descubrir la más ligera?*). Este objetivo no se logra ya que Víctor no es capaz de realizar acciones metacognitivas ideales, o sea de darse cuenta de la analogía que hay entre este problema y el problema de las tres bolitas (*No lo sé.*)

La pregunta cinco de la entrevistadora pretende que Víctor realice acciones metacognitivas secundarias de regulación gracias a su ayuda, es decir que emprenda un nuevo camino para resolver el problema agrupando las bolitas de otra manera (*¿Otra forma de agrupar?... Volvamos, entonces, a lo que has dicho anteriormente, al principio. Agrupas en 4 y 5. Explícame eso despacito.*). Este objetivo se logra en parte, ya que en el resto del protocolo Víctor se da cuenta de que su argumentación inicial de que la bolita más ligera estará en el grupo de 5 bolitas no es correcto:

11.V: *Con 5 y 4... como una es más ligera... va pesar más incluso... la que tenga así (hace gestos con la mano)... espera. (pausa)... no se puede saber tampoco así... (larga pausa)... no se puede saber.*

12.E: *¿No?*

13.V: *No, porque si la ligera está donde pones las de 4, va pesar menos pero aunque... aunque la ligera estuviese donde las 5, iba a ser lo mismo...*

14.E: *Y... ¿qué más?*

15.V: *No, no se puede..*

Víctor no es capaz, en este momento, de analizar estrategias nuevas para intentar resolver el problema. La evolución de sus competencias metacognitivas queda, por tanto, limitada a la consciencia de que su estrategia no es la idónea para resolver la tarea, sin poder aportar estrategias alternativas.

ALGUNAS CONCLUSIONES SOBRE ESTE 2º MOMENTO

Lo que resulta significativo es que, para darse cuenta de su error, Víctor utiliza las componentes de su configuración cognitiva de manera correcta (cuando reconoce que donde hay más bolas siempre pesa más, al margen de donde esté la bola más ligera). De modo que, en la entrevista, se confirma la hipótesis *H1*, en el sentido de que, para este caso en específico, *la dificultad que tiene Víctor para resolver el problema propuesto se debe más a su configuración metacognitiva que a su configuración cognitiva*: después de haber usado, previamente, una estrategia óptima para resolver el problema de las 3 bolitas, no es capaz de aplicar la analogía para reducir el caso de las 9 bolitas (agrupando uniformemente en grupos de 3) a pesar de ser (implícitamente) sugerida en el propio enunciado del problema.

III BLOQUE

ANÁLISIS DE CORRELACIONES

En este tercer bloque de análisis haremos un estudio de correlaciones entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el contexto de nuestra Prueba de Habilidades Metacognitivas (PHM) y las siguientes calificaciones: Evaluación Estimada de los Profesores (EEP) con respecto a sus alumnos en relación a la PHM, Calificaciones Finales de Matemáticas (CFM) y Calificaciones Finales Curso (CFC) considerando el conjunto de todas las asignaturas correspondientes a los cursos de 3º y 3º/4º da ESO de un colectivo de 185 estudiantes.

Como hemos indicado en el apartado sobre procesos de instrucción, uno de los intereses de esta investigación es contrastar algunos de nuestros resultados, más específicamente, los obtenidos en la correlación de las variables PHM y EEP, para ver, en primer lugar, si se confirman lo subrayado por Mayor et. al., (1993) de que la percepción que tienen los profesores con respecto a metacognición de sus alumnos está basada en el rendimiento académico de éstos y, a continuación, identificar las relaciones que pueda haber entre la PHM y el rendimiento académico, en la perspectiva ya enunciada de que *las competencias metacognitivas del estudiante inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas*.

Fueron 10 (diez) el total de grupos de 3º y 3º/4º de ESO que participaron en esta investigación. Así, inicialmente, presentamos los análisis con toda la muestra y, después, por grupos de clase, que nos permitirá encontrar explicaciones a los datos obtenidos.

Estudio de correlación global

Al considerar toda la muestra tenemos los siguientes resultados:

Cuadro 1 – Correlaciones globales

		Correlaciones			
		PHM	EEP	CFC	CFM
PHM	Correlación de Pearson	1	,346**	,368**	,326**
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,000
	N	185	181	182	182
EEP	Correlación de Pearson	,346**	1	,681**	,814**
	Sig. (bilateral)	,000	,	,000	,000
	N	181	181	180	180
CFC	Correlación de Pearson	,368**	,681**	1	,818**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,000
	N	182	180	182	182
CFM	Correlación de Pearson	,326**	,814**	,818**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,
	N	182	180	182	182

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Destacamos en primer lugar el resultado de 0,814 correspondiente a la correlación entre la predicción o evaluación estimada que el profesor hace de sus alumnos en relación a nuestra prueba y las calificaciones finales de matemática (EEP/CFM). Este resultado indica, en nuestra opinión, que las expectativas y creencias del profesorado respecto a las competencias metacognitivas de sus alumnos(as), se verían reflejadas en la PHM. En otras palabras, podríamos decir que el profesorado cree que las “ideas” de la prueba están implícitas en la actividad matemática de clase y, por tanto, parece estar de acuerdo en que el nivel de exigencia metacognitiva de la PHM está en correspondencia con las capacidades de rendimiento académico de los mismos en su asignatura. Sin embargo, estas expectativas no se corresponde a la realidad: las correlaciones PHM/EEP (0,346) y PHM/CFM (0,326) muy bajas y casi coincidentes indican claramente que el profesorado no evalúa, al contrario de lo que cree, competencias metacognitivas con sus procedimientos ordinarios de calificación.

Recordemos algunas características de nuestra Prueba: ensayar y testar hipótesis diversas; tomar decisiones; poner en práctica pensamientos flexibles; en fin, accionar procesos de monitoreo. En la medida de lo posible, buscábamos que el alumno se exprese libremente, huyendo de respuestas estereotipadas. Una prueba de naturaleza más subjetiva que objetiva (a pesar de que muchas cuestiones presentan múltiples elecciones), dado que era preciso presentar siempre las justificaciones para sus elecciones o decisiones. También nos parece conveniente recordar algunas cosas de la variable EEP: la estimación que el

profesor hizo de sus alumnos, en relación a la PHM, fue con base a criterios previamente establecidos (parámetros que les orientaron en la corrección) y, al menos al principio, los profesores han reconocido la PHM como un instrumento “fidel” a la realidad cognitiva y metacognitiva de sus alumnos. Ahora, apoyados en otra de nuestra premisa de que el desarrollo de la metacognición forma parte de los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, consideramos además que lo que exigimos con la PHM debería formar parte, también, de un conjunto de exigencias asequibles y deseables desde una perspectiva educativa general.

Intentaremos ahora, al paso que iremos analizando las correlaciones entre la PHM y demás variables, inferir algunas respuestas para los resultados presentados en el Cuadro anterior.

1) PHM/EEP: a pesar de que esperábamos que después de un año de contacto con sus alumnos, el profesor pudiera tener una percepción significativa de la conducta metacognitiva de estos, el resultado de la correlación entre las variables PHM y EEP no confirma esta expectativa, que constituía el ítem (a.) de la hipótesis **H6** de trabajo que, consecuentemente, no podemos confirmar. O sea, si el estudio de correlaciones entre estas dos variables fuera significativo, podríamos confirmar la hipótesis de que el profesor reconocería los conocimientos y capacidades metacognitivas de sus alumnos, reflejados en nuestro instrumento PHM. Al comparar, más de cerca, estas variables, observamos que hay una nota media baja de la PHM en relación a la EEP (también en relación a las demás variables) que alcanza a un 60% de toda la muestra. Pero, al considerar la muestra fragmentada por clases, vemos que gran parte de este porcentaje recae sobre las 3 clases consideradas mejores por los centros (más adelante comentaremos eso) en donde cerca de 87% de los resolutores son sobrevalorados, incluso llegando en ocasiones a que la estimación sea 2 ó 3 veces mayor que la nota real (discrepancia ésta que perturba bastante el estudio de correlaciones) y donde aproximadamente el 13% restante son subvalorados con poquísimas diferencias entre ambas calificaciones (podemos decir que casi no hay subvaloración en relación a los “mejores” alumnos). Así que, si prescindimos en la muestra total de estas tres clases (70 alumnos), resulta que un 58% de los resolutores fueron subvalorados por sus profesores (la situación queda invertida). De modo que, por un lado, el profesor tiende a sobrevalorar las competencias metacognitivas de sus mejores estudiantes, que piensa que logran alcanzar practicando los tipos de tareas rutinarias (que, aún exigiendo implícitamente procesos metacognitivos, inferimos que no son trabajados

conscientemente), aspecto que puede ser ampliamente cuestionado por la baja correlación obtenida y, por otro lado, tiende a subvalorar estas mismas competencias de sus estudiantes de rendimiento medio y, más aún, en aquellos de bajo rendimiento académico. Todo este contexto parece ir en la dirección de aceptar el ítem (b.) de la hipótesis **H6**, que va en el sentido opuesto al ítem anterior, o sea, que la baja correlación entre ambas variables parece indicar una baja presencia de un trabajo enfocado al desarrollo de la metacognición, toda vez que podemos inferir que puede haber un predominio en clase de los procesos rutinarios basados en la memorización y práctica de técnicas específicas para resolver ejercicios “tipo” que escasamente fomentarían procesos metacognitivos.⁵

2) PHM/CFC: la correlación entre las variables PHM y CFC, a pesar de superar muy poco los resultados anteriores, continúa siendo muy baja y, de esta forma, no se puede confirmar el ítem (b.) de la hipótesis **H5**. O sea, que *el dominio/control de los procesos metacognitivos por parte de los estudiantes vendría reflejado a través de la PHM si resultara significativa la correlación entre ambas variables*. Lo que quiere decir que, no siendo significativa la correlación, los resultados parecen apuntar hacia un *bajo dominio (o carencias) de estos procesos por parte de los estudiantes en un contexto más amplio, confirmando, por contra, el ítem (c.)* de la hipótesis **H5**. Dado que la PHM perseguía la observación de procesos metacognitivos de carácter general que no sólo son específicos de las matemáticas, de esta baja correlación también podríamos inferir que la metacognición “explícita” no parece ser un objetivo de desarrollo dentro de otras materias curriculares, o no se considera que requiera una planificación específica.

3) PHM/CFM: observamos que aún es más baja la correlación entre estas dos variables, por lo cual tampoco se confirma el ítem (a.) de la hipótesis **H5** que, en las mismas condiciones anteriores, supondría que el dominio/control de los procesos metacognitivos por parte de los estudiantes vendría reflejado a través de la PHM si resultara significativa, también, la correlación entre estas dos variables. No siendo significativas las correlaciones, los resultados parecen apuntar, una vez más, hacia un bajo dominio de los procesos metacognitivos por parte de los estudiantes, confirmando nuevamente, por el contrario, el ítem (c.) de la hipótesis **H5**. Sin embargo, nuestra

⁵ No obstante, pensamos que nuestras consideraciones pueden ser vistas más como conjeturas, toda vez que ésta fue una práctica que el profesor no tenía la costumbre de hacer y que, por tanto, las capacidades del profesor para predecir las actuaciones de sus alumnos son un ejercicio que puede ser mejorado con la práctica y el tiempo. Aunque la alta correlación EEP/CFM podría, al contrario, indicar una notable capacidad predictiva.

expectativa preveía una bajada respecto de la PHM/EEP, toda vez que somos conscientes de que en las notas (puntuaciones) atribuidas a los alumnos se incluyen otros parámetros de evaluación, por ejemplo actitudinales, relativos a su conducta personal. De nuevo inferimos que el sistema de instrucción tradicional puede haber incidido en este bajo índice de correlación ya que, en general, las pruebas que permiten obtener la CFM suelen basarse en la propuesta de ejercicios para averiguar el dominio de técnicas rutinarias más que en la comprensión de conceptos y en la resolución de situaciones-problemas contextualizados (Cajaraville et. al. 2003; Plata, 1998) en los que los procesos metacognitivos se manifiestan relevantes para alcanzar la solución de los mismos. Enfatizamos que la diferencia fundamental entre los ítems de la PHM y los instrumentos para calificar el rendimiento en matemáticas reside precisamente en que las primeras demandan procesos de tipo metacognitivo que pueden ser obviados en el segundo tipo de instrumento.

Sí, por un lado, las correlaciones entre las variables PHM y CFC y, también, PHM y CFM, no resultaron significativas, no confirmando los ítems (b.) y (a.) respectivamente de la hipótesis **H5**, por otro, las correlaciones van en dirección de aceptar el ítem (c.) que iba en el sentido opuesto, o sea, al no ser significativas las correlaciones, el estudio parece apuntar un bajo dominio (o carencias) de los de procesos metacognitivos por parte de los alumnos, tanto en el contexto específico de las matemáticas como en el contexto general.

En otro orden de cosas, apreciamos la proximidad entre las correlaciones PHM/EEP y PHM/CFC, que puede indicar que las competencias metacognitivas son similares en el conjunto de todas las disciplinas, ya que esta última también está próxima a la PHM/CFM. La homogeneidad de los resultados (0,346; 0,368: 0,326) es un indicador a favor de la bondad de la PHM.

Aún con el Cuadro de correlaciones inicial observamos un alto nivel de correlación entre las variables EEP y CFM (0,814). Se podría esperar esto toda vez que es difícil separar el juicio que el profesor hace de sus alumnos, delante de la PHM (y de cualquier otro test) y el juicio que él tiene de la conducta matemática de éstos, es decir, por una parte, estamos ante resultados que podemos contrastar y confirmar con lo subrayado por Mayor et. al. (1993) cuando nos parece indicar que la percepción (aquí, añadimos valoración) que el profesor hace de las competencias metacognitivas de sus alumnos está basada en el rendimiento académico de los mismos en su asignatura. Sin embargo, los resultados pondrían en cuestionamiento la premisa de que las competencias metacognitivas del estudiante inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas.

Estudio de correlación parcial

Presentamos ahora las correlaciones por grupos de clase con respecto a la PHM y las variables EEP, CFC y CFM distribuidas en el siguiente cuadro:

Cuadro 2 – Correlaciones Parciales

	PHM / EEP	PHM / CFC	PHM / CFM
Grupo A1	0,712	0,473	0,574
Grupo A2	-0,293	0,540	0,678
Grupo B1	0,573	0,314	0,478
Grupo B2	-0,042	0,145	0,247
Grupo C1	0,514	0,492	0,415
Grupo C2	-0,214	0,029	0,070
Grupo D	-0,267	-0,421	-0,226
Grupo E	0,240	0,355	0,394
Grupo F	0,141	0,248	0,265
Grupo G	0,440	0,243	0,270

Estos números parecen decirnos algo más cuando los asociamos con algunas informaciones particulares de cada clase.

Las clases nombradas con la misma letra corresponden al mismo profesor. Las clases A1, B1 y C1 son consideradas (por la institución) como las “mejores”. Al observar los coeficientes de la PHM y las demás variables resulta que en estas tres clases las correlaciones son en general más altas que en las demás... Centrando nuestra atención en la correlación entre PHM/EEP parece que los profesores consiguen evaluar con más precisión los alumnos “mejores” (a pesar de sobrevalorarlos, como comentamos anteriormente). Este hecho viene a confirmar el ítem (a.) de la hipótesis **H7**: *el profesor reconocerá mejor los conocimientos y capacidades metacognitivas de los alumnos de buena conducta académica general (de rendimiento y comportamiento) y, en este caso, este reconocimiento vendrá indicado si resulta significativo el estudio de correlaciones entre PHM y EEP de los grupos considerados “los mejores” por sus respectivos centros.*

De aquí, preguntamos: ¿será siempre más fácil hacer predicciones, juicios, sobre las capacidades de los alumnos para usar estrategias o conocimientos cuando estos son considerados “buenos” o con menos dificultades (de rendimiento y comportamiento)? ¿o esta correlación puede ser explicada simplemente porque ya tenemos la convicción de que “aquellos poseedores de mayores capacidades cognitivas son también los poseedores de mayores capacidades metacognitivas? En esta dirección, pero en sentido opuesto, vimos que hay una baja expectativa de los profesores cuando se trata de alumnos de bajo rendimiento académico.

Como hemos dicho en el capítulo de la metodología, nos reunimos con los profesores para solicitar su predicción (Evaluación Estimada) en relación a sus alumnos. Para ello, se proporcionaron los criterios o parámetros de correcciones de cada ítem de la prueba. En una segunda reunión, los profesores nos prestaron aclaraciones sobre sus alumnos. La correlación aumenta sensiblemente cuando tomamos en consideración algunas de las aclaraciones (más bien impresiones considerando el rendimiento de los alumnos en el momento en que estos habían realizado el test y que había ocurrido más o menos 3 meses antes de la estimación de profesor), hechas por algunos profesores, sobre las posibles variables que podrían escapar de su control a la hora de estimar /predecir y causar alguna distorsión en el resultado (comparativo) de su predicción y lo ejecutado en la PHM. Veamos una nueva tabla al excluir del estudio determinados alumnos considerando las aclaraciones de sus profesores:

Cuadro 3 – Correlaciones después de aclaraciones

	PHM / EEP (antes de las aclaraciones)	PHM / EEP (después de las aclaraciones)
Clase A2	-0,293	0,048
Clase B1	0,573	0,772
Clase B2	-0,042	0,158
Clase D	-0,267	0,118
Clase F	0,141	0,312

Las aclaraciones aquí consideradas, que generaron un aumento de los coeficientes de correlación de la evaluación estimada por los profesores, no fueron, normalmente,

atribuidas a los “buenos” alumnos, ya que éstas casi siempre fueran acertadas (no perturbando tanto los resultados). Así, señalan respecto a las siguientes clases:

1. A2: se trata de una clase pequeña (8 alumnos, cantidad que por sí sola no es significativa en el estudio de correlaciones); es tratada como un “agrupamiento específico” para refuerzos en matemáticas; a continuación, los alumnos se incorporaban a su grupo ordinario de referencia. De acuerdo con las declaraciones del profesor, es una clase de alumnos(as) con bastantes dificultades y falta de interés; los de menos dificultades de aprendizaje no suelen tener interés y viceversa. Del total de 8 suprimimos 2 alumnos, uno calificado por tener dificultades especiales y otro porque no quería intentar hacer las cosas.
2. B1: se trata de una clase con 19 alumnos, considerada la mejor por la institución. Siguiendo las aclaraciones del profesor, suprimimos 4 alumnos, siendo uno que trabaja poco debido a la adolescencia, uno que no tienen un comportamiento “correcto”⁶ en clase, es “pesada” y “no sabe estar en clase”, otro que es simple y le falta sentido de la realidad y uno con muchos fallos en el manejo de técnicas operatorias.
3. B2: suprimimos los alumnos que, según el profesor, posiblemente no se interesaron en hacer la prueba, que “no son conscientes de lo que es estudiar” o que tienen alguna irregularidad emocional. Del total de 15 suprimimos 4.
4. D: Esta es una clase de 3º/4º de E.S.O. de alumnos adultos, con una media de edad de 20 años. El profesor ha expresado que no conoce mucho a los alumnos, que les da clase apenas dos días a la semana, que éstos no tienen tiempo para el trato personal, que son adultos y no dan informaciones, que van a clase cuando quieren, que prácticamente dos chicas son las que tienen interés (una es mayor que los demás, está casada, tiene hijos, trabaja y tiene muchísimo interés y emoción por los estudios; la otra, también casada y con hijos, intelectualmente es más “válida”, pero no demuestra tanta emoción y interés como la anterior). Han participado 13 alumnos de esta clase, pero el

⁶ “Correcto” en el sentido del contrato didáctico tradicional: no hablar con el compañero, perturbar la “buena” marcha de las explicaciones del profesor, etc.

profesor ha puntuado apenas 10 (porque los otros han marchado del Centro). Así que, de los diez, suprimimos apenas un alumno que, según el profesor, parece no tener interés por los estudios. Vale la pena destacar que además de las aclaraciones hechas personalmente por el profesor a la investigadora, entre los escritos de sus estimaciones, pudimos encontrar la siguiente observación:

“La evaluación [estimación] la hice pensando en que primero haríamos una lectura comprensiva de cada cuestión, contestándola a continuación. Y aún así, los resultados podrían variar dependiendo de la “situación anímica” del momento. Si están cansados o no les interesa el tema, posiblemente contesten aleatoriamente, sin preocuparse lo más mínimo del enunciado o, simplemente, no contesten. La mayoría son alumnos con situaciones personales complejas, unos tienen trabajos temporales, otros están haciendo otros estudios como peluquería, auxiliar de geriatría, música, etc. y otros son alumnos que tuvieron que dejar la ESO en otros Centros por sobrepasar la edad, estos últimos son alumnos con ciertas dificultades de adaptación, aunque con conocimientos académicos en general superiores a los primeros”.

5. F: suprimimos uno, de 15 alumnos, que, según el profesor, es de una “absoluta” irregularidad en los exámenes escritos. El profesor consideró y puntuó la PHM como una actividad complementaria entre las demás, objetivando mayor aplicación, por parte de los alumnos, en estar contestando la misma. Esta fue nuestra clase estudio piloto.

Los profesores de las demás clases no hicieron aclaraciones particulares, justificando que el concepto que ellos tenían respecto de sus alumnos no haría cambiar la nota estimada por ellos.

En el cómputo general tenemos, por la hipótesis **H6**, que los profesores no fueron capaces de pronosticar las competencias metacognitivas de sus alumnos en nuestra prueba, y por la hipótesis **H7**, que para casos particulares, alumnos de buena conducta académica (de rendimiento y comportamiento), los profesores sí fueron capaces de pronosticar tales competencias. Ahora, con estos nuevos datos, observamos como las correlaciones, sensiblemente, aumentaron en las 5 clases en que han participado más activamente los profesores, después de excluir de la muestra los casos que podrían perturbar los resultados, basándonos (por aceptación) en las aclaraciones hechas por los profesores a los alumnos de “mala conducta” académica general (de rendimiento y comportamiento). Es decir, hemos

hecho exclusiones con base en aspectos actitudinales. De modo que parecen ser estos aspectos responsables por la subida de la correlación entre estas dos variables.

Este fue un dato apreciable que nos ha llevado a percibir que los aspectos actitudinales parecieron interferir en la percepción que hicieron los profesores de sus alumnos, pero en particular, de aquellos de “mala conducta” académica y, sobre todo parecieron ser los responsables de la subvaloración que hicieron de las reales competencias metacognitivas de éstos.

Para más información, en los anexos aportados al final del trabajo es posible encontrar una plantilla (en el SPSS) con los resultados de toda la muestra separados por grupos de clases.

IV BLOQUE

ANÁLISIS DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

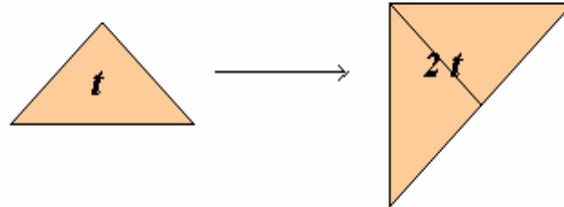
El proceso de instrucción que vamos a describir fue considerado por el profesor (y por la institución) como formal y, en este momento, el profesor no tenía la intención (al menos conscientemente) de desarrollar capacidades metacognitivas en sus alumnos(as). Se trata de una clase de 26 estudiantes de 14 años que cursaban el equivalente al actual 2º de E.S.O. La clase duró 1h. 20 m. y su objetivo central era hacer aflorar diferentes concepciones sobre las magnitudes longitud y superficie, utilizando como recurso didáctico el tangram de Fletcher. Para ello se diseñó una propuesta didáctica, basada en una metodología de enseñanza por diagnóstico, en la que el profesor proponía una tarea determinada y, sobre ella, formulaba preguntas que los alumnos debían discutir, argumentar y aportar posibles soluciones, al mismo tiempo que se demandaban acuerdos o desacuerdos argumentados con respecto a cualquier tesis que formulara en particular un determinado alumno. En este nivel, los alumnos habían recibido instrucción sobre propiedades básicas relacionadas con fórmulas de áreas de triángulos y cuadriláteros y, en particular, habían estudiado el teorema de Pitágoras. En el análisis de esta práctica, nos detendremos en exclusiva *en identificar y discutir aspectos metacognitivos*, que pueden estar presentes tanto en el discurso (y actitudes) del profesor como de los alumnos. La mutua interrelación condicionará los discursos y las actitudes de ambos en tanto que sujetos participantes (emisor y receptor) del discurso en clase.

Conviene aclarar que la metodología empleada (por diagnóstico) en este proceso de instrucción no suele ser la que habitualmente se usa en las clases tradicionales de matemáticas, resultando una opción metodológica que promueve la reflexión y la actividad matemática de los estudiantes.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN

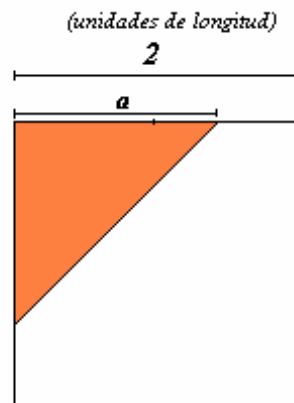
Se realiza previamente una práctica con el tangram de Fletcher que consiste en observar las piezas, manipularlas y establecer las equivalencias entre ellas. Los alumnos disponían cada uno de un juego de tangram y habían realizado distintas construcciones para observar

dichas equivalencias. Tenían varias copias en cartulina del triángulo pequeño (pieza base del tangram) y podían manipular libremente las piezas. Por ejemplo:



Se realiza conjuntamente con ellos una construcción que incluye todas las piezas del tangram, observando distintas formas de realizarla, bajo simetrías o giros de las piezas. Una vez transcurridos unos 25 minutos, se les plantea el siguiente problema, que actúa como motor de la propuesta didáctica anunciada:

CÁLCULO DEL ÁREA DEL TRIÁNGULO SOMBREADO



PROFESOR (P) El lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. A mí me gustaría saber cuánto vale el área del triángulo sombreado. ¿Tenéis alguna opinión así, a ojo, de lo que puede valer?

1) PRÁCTICAS ACTUATIVAS Y DISCURSIVAS ENTRE PROFESOR Y ALUMNOS

SEGMENTO (SG1): Posicionamiento de los estudiantes acerca del valor del área del triángulo:

1. PROFESOR (P) *El lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. A mí me gustaría saber cuánto vale el área del triángulo sombreado. ¿Tenéis alguna opinión así, a ojo, de lo que puede valer?*

2. ALUMNO (A1): *Unas 5 unidades cuadradas.*

3. A2: *Yo pienso que 3.*

4. A3: *Yo creo que 6.*

[Pausa. Algunos alumnos manipulan el juego del tangram que tienen a su disposición]

5. P: *A ver, a ver ¿cuántos se apuntan a cada una de las 3 respuestas?*

[A mano alzada, 8 estudiantes se adhieren a la respuesta “3”. Los demás no se manifiestan.

Algunos siguen manipulando las piezas del tangram y otros dialogan entre sí]

Trayectoria argumentativa

Tesis 1. “unas 5 unidades cuadradas”. A1, EP2

Tesis 2. “3 unidades cuadradas”. A2, EP3

Tesis 3. “6 unidades cuadradas”. A3, EP 4.

Argumentos: No hay, salvo las adhesiones a cada tesis: ninguna a las tesis 1 y 3, ocho a la tesis 2.

Se constata, pues, que existen muchas dudas en relación con la validez de sus respuestas, debidas a la escasa reflexión metacognitiva inicial en que las han basado.

Segmento SG2: *Primera regulación de la tarea por parte del profesor, solicitando justificación para las tesis anteriores.*

6. P: *A ver. (refiriéndose a A2), ¿cómo has obtenido tu respuesta?*

7. A2: *Si el lado a [del triángulo] vale más de una unidad [lo que se evidencia en la figura] y los dos catetos son iguales, entonces he sumado y creo que aproximadamente da 3: “1 + 1 + el resto”.*

8. P: *¿Cuántos están de acuerdo con este razonamiento?*

[Levantán la mano 6 alumnos, mostrando su acuerdo con A2]

9. P: *¿Por qué dices “catetos”?*

10. A2: *Son los lados más pequeños.*
- 11.P: *¿Todos los triángulos tienen catetos?*
12. A2: *Sí.*
13. A4: [corrigiendo a A2]: *No. Sólo los triángulos rectángulos.*
- 14.P: *¿De acuerdo todos?.*
15. VARIOS ALUMNOS (VA), [al unísono]: *Sí.*
16. P: *¿De acuerdo A2?.*
- 17.A2: *Sí... [dubitativo].*
- 18.P. *Volvamos al problema. ¿Crees que el “resto” de la longitud del lado pequeño (a) es la mitad de 1?*
- 19.A2. *Sí, aproximadamente.*

Argumento apoyando la tesis 2: “he sumado los catetos y creo que aproximadamente da 3: $1 + 1 + \text{resto}$ ” . A2, EP7., y seis alumnos que se adhieren a este argumento.

Tesis 4: “ Los dos catetos son iguales”, A2, EP7.

Tesis 5: “Todos los triángulos tienen catetos”. A2, EP12.

Argumentos que invalidan la tesis 5: “No. Sólo los triángulos rectángulos”. A4, EP13, y varios alumnos que apoyan este argumento. A2 parece aceptar este argumento, pero sin mucho convencimiento (EP 17).

Tesis 6. “Aproximadamente el ‘resto’ de la longitud del cateto es $\frac{1}{2}$ ”, A2, EP19.

A2 ha interpretado que la interpelación tiene que ver con la determinación del valor de a y, metacognitivamente, decide que la estrategia adecuada para responder al problema es sumar las longitudes de los dos catetos, dando un valor aproximado aceptable, inicialmente, para dicha suma. El profesor intenta averiguar la concepción de A2 sobre la noción de “cateto” al que ha hecho referencia, confirmando que el significado de “cateto” para A2, está relacionado con “lado más corto” de un triángulo cualquiera. El profesor detecta que un número significativo de alumnos o no han entendido cuál es el objetivo de la tarea (calcular el área del triángulo), o muestran conflictos relacionados con la confusión perímetro/área. Por ello, retoma la pregunta original.

Segmento SG3: Segunda regulación y evidencia de la aparición de una estrategia.

20. P: Bien. Yo había preguntado por el área del triángulo sombreado, no por la suma de los catetos.

21.VA: El área vale 2 unidades cuadradas.

22. A6: Vale 1 unidad cuadrada.

23. A7: Vale 1 y “un poquito”.

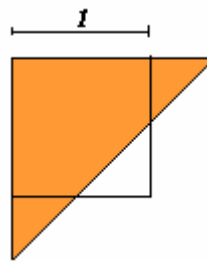
[la mayoría de los estudiantes siguen indecisos].

24. P: A ver, ¿quién se adhiere a cada respuesta?

[Hay mayoría, ahora, que se adhieren a la respuesta “2 unidades cuadradas”]

25. P: A7 ¿por qué dices que vale 1 y “un poquito”?

26. A7: [dibujando la siguiente figura]:



Hay un cuadrado de 1 unidad cuadrada que se puede construir dentro del triángulo pero sobra algo. Lo que sobra no se completa con las partes del triángulo que quedan fuera del cuadrado.

27. A6: Yo he pensado lo mismo pero sí que se completa... [y por tanto el área vale 1]

Tesis 7: “el área vale 2 unidades cuadradas”. VA, EP21.

Argumentos: No hay argumentos, sino adhesiones de la mayoría a la tesis 7.

Tesis 8: “ el área vale 1 unidad cuadrada”. A6, EP22.

Argumentos a favor de la tesis 8: “ se puede construir un cuadrado unidad cuya área equivale a la del triángulo, [con ayuda de representación gráfica]”. A6, EP27

Tesis 9: “el área vale 1 ‘y un poquito’”, A7, EP23

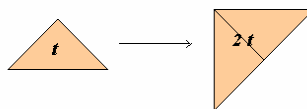
Argumento a favor de la tesis 9, que rebate la tesis 8. “lo que sobra [parte del cuadrado que sobresale al triángulo], no se completa con las partes del triángulo, que quedan fuera del cuadrado”, A7, EP26.

A6 y A7 discuten entre ellas pero no llegan a acuerdo. Cada una mantiene su postura. La estrategia de descomposición/recomposición, elegida por estas dos alumnas no había sido, a priori, contemplada por el profesor (según su propia confesión) como una de las posibilidades para resolver la tarea. Se trata de una decisión metacognitiva primaria en este nivel educativo, pero con un nivel de eficacia no despreciable. Al no disponer de medios para recortar y componer trozos del triángulo, la estimación es diferente en A6 y A7 pero, en todo caso, les permite aproximarse de forma efectiva a la solución del problema.

SEGMENTO SG4: *Supervisión de todo el proceso anterior y nueva regulación de la tarea, con la propuesta de una nueva estrategia que provoca conflictos semióticos en los estudiantes, que habían usado previamente una estrategia inadecuada.*

28. P: *La mayoría afirma, sin embargo, que el área es de 2 unidades cuadradas. ¿Quién se mantiene en esta postura?. A ver, A3, tú que has sido uno de los que han afirmado esto ¿cómo lo justificas?*

29. A3: *Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram. Si cada uno de ellos es la unidad de área, entonces este triángulo tiene 2 unidades.* [Se vale de una composición realizada al principio de clase]:



30. P: *¿Alguien sabe una manera de conocer el área de un triángulo sabiendo cuáles son su base y su altura?*

31. VA: *Base por altura. $(b \times h)$*

32. P: *¿Es base por altura?*

33. VA: [Autocorrigiéndose]: *Es base por altura partido por 2.*

34. P [Escribiendo la fórmula $(b \times h)/2$ en una transparencia] *¿La mitad de la base por la altura?*

[Varios alumnos se ponen, en ese momento a hacer cálculos].

35. A4: *La base mide 1,3.... $(1,3 \times 1,3)/2 = 1,3$.*

36. P: [escribiendo esa “igualdad” en la pizarra]: *¿Estáis de acuerdo?*

37. VA: *Sí.*

38. A7 y A8: *No. Eso sería si fuese $(1,3 + 1,3)/2 = 1,3$*

39. P: *¿Cuál de las dos expresiones es correcta?*

[Toda la clase parece adherirse a la expresión $(1,3+1,3)/2=1,3$, salvo A4 que parece dudar].

40. P. A4, *¿lo tienes claro?*

41. A4: [Haciendo cálculos]. *Sí, es correcta la segunda. $(1,3 \times 1,3)/2 = 1,69/2 = 0,845 \text{ u}^2$
El área vale $0,845 \text{ u}^2$*

42. P. [Escribiendo esta expresión en la transparencia]. *¿Quiénes defienden que el área del triángulo vale $0,845 \text{ u}^2$?*

[Se produce el silencio, mientras algunos alumnos siguen haciendo cálculos]

Argumentos a favor de la tesis 7: *“Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram”* A3, EP29.

Tesis 9: *“el área del triángulo es base por altura. $(b \times h)$ ”*. VA, EP31.

Tesis 10 (que sustituye a la 9): *“Es base por altura partido por 2”*. VA, EP33.

No hay argumentos para justificar (o rebatir) las tesis 9 y 10.

Tesis 11: *“La base mide 1,3.... $(1,3 \times 1,3)/2 = 1,3$ ”*. A4, EP35.

Varios alumnos se adhieren a esta tesis.

Argumentos que invalidan la tesis 11: *“No. Eso sería si fuese $(1,3 + 1,3)/2 = 1,3$ ”*. A7, A8, EP38.

Toda la clase, incluso A4 que contra-ejemplifica, se adhiere a este último argumento.

A3 y los compañeros que opinan como él no tienen en cuenta un dato del problema (el valor del lado del cuadrado). Evidencian dificultades con el significado de “unidad de medida”. Puesto que habían trabajado previamente con el triángulo base del tangram como unidad de medida de superficie (no convencional), lo extrapolan a la actual tarea y obvian que a , el lado del cuadrado (cantidad de longitud), se le ha asignado un valor numérico que indica cuántas unidades de longitud contiene. Además, se trabaja simultáneamente con longitudes y superficies, mientras que, al principio, se hacía sólo con superficies. Han

aplicado una “analogía directa”, sin considerar que hay una transformación de la misma debida al uso de diferentes magnitudes (longitud y superficie). Sin embargo, de haber considerado que la longitud del cateto del triángulo base del tangram valiera 1, entonces habrían llegado a la conclusión de que el cateto del triángulo sombreado (equivalente a dos triángulos base) mide $\sqrt{2}$, lo que les podría haber permitido deducir que el área de este triángulo sería $(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) / 2 = 1 \text{ u}^2$ (solución correcta).

El profesor, a la vista de que ningún alumno ha hecho referencia a la fórmula usual del área de un triángulo, a pesar de discutir valores para a , (en particular 1,5 o 1,3) y, por tanto, no intentar buscar una fórmula para determinar el área, reconduce la situación, en la que se evidencian dudas con la fórmula del área de un triángulo que se salvan al compartirse los conocimientos. Sin embargo, esta *regulación* tiene más que ver con la memorización de una fórmula que con su comprensión efectiva. También emerge, en varios alumnos, el obstáculo $(b \times b)/2 = b$ por analogía con $(b+b)/2 = b$. En el caso de A4, contra-ejemplifica para reconocer su error. La nueva pregunta del profesor (EP 42) produce un bloqueo.

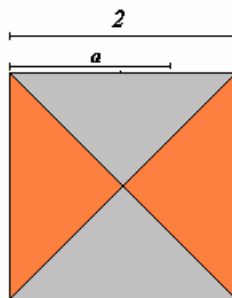
SEGMENTO SG5: Nueva regulación del proceso con la propuesta de otra nueva estrategia para deshacer una situación de bloqueo.

43. P: *¿Veis alguna otra forma de calcular el área del triángulo?*

[No hay nuevas respuestas, los estudiantes siguen haciendo cálculos. Luego de un intervalo de aproximadamente 1 minuto el profesor pregunta]:

44. P: *El cuadrado de la figura (original), ¿a cuántos triángulos (como el sombreado) equivale?*

[No hay respuesta. El profesor anima a que manipulen las piezas del tangram, pero no surgen nuevas estrategias. Entonces el profesor compone la siguiente figura]:



45. TODOS LOS ALUMNOS: ¡A cuatro!

46. P: A ver. Los que decían que el área del triángulo valía 2, ¿cuál es el área del cuadrado?

47. VA: Vale $8 u^2$ [4 x 2].

48. P: ¿Alguna otra opinión?

49. MAYORÍA DE ALUMNOS: ¡Es 4!

50. P: (refiriéndose a A9 -uno de los que afirman que vale 4-) ¿En que te basas para decir que vale $4 u^2$?

51. A9: Por que el área del cuadrado es **lado x lado** y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es $4 u^2$.

52. P: Entonces ¿cuánto mide el área del triángulo sombreado?

53. A9. Mide $1 u^2$.

Tesis 12: “el cuadrado equivale a 4 triángulos”. EP45.

Argumentos a favor: por la simple visualización de la figura.

Tesis 13: “el área del cuadrado vale $8 u^2$ [4 x 2]”. VA, EP47.

Argumentos que invalidan la tesis 13: “¡Es 4!”, “por que el área del cuadrado es **lado x lado** y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es $4 u^2$ ”. VA, A9, EP49 y 51.

Tesis 14: “el área del triángulo sombreado mide $1 u^2$ ”. A9, EP53.

Se constata que los alumnos no han derivado estrategias eficientes de pavimentación de superficies, a partir de su trabajo previo, manipulando las piezas del tangram (en este caso, la más rápida y eficiente). Esta estrategia no ha surgido, en este caso, de las acciones de los alumnos y ha tenido que ser introducida por el profesor. Probablemente, si se hubiera dado más tiempo, podría haber aparecido, pero las estrategias que eligieron siguieron otro rumbo.

SEGMENTO SG6: Supervisión de las distintas acciones emergentes de las diversas estrategias puestas en juego.

54. P: Entonces, ¿por qué antes A4 había deducido que el área valía $0,845 u^2$?

55. VA: Porque el lado del triangulo mide más de 1,3.

56.P: *¿Mucho más?*

57.A2: *1,5 (haciendo cálculos) $(1,5 \times 1,5)/2 = 2,25/2 = 1,125$. Sobra.*

58.P: *Así que con 1,3 falta y con 1,5 sobra...*

59.VA: *1,4*

60.A2: *1,3 y medio (tiene dificultades para expresar 1,35)*

[El profesor va escribiendo en la transparencia todas las opciones que dan los alumnos y confecciona una lista con ellos].

$$1,3 \rightarrow 0,845$$

$$1,5 \rightarrow 1,125$$

$$1,4 \rightarrow 0,98$$

61.P: *¿Entre qué valores estará comprendida la longitud del cateto?*

62.VA: *Entre 1,4 y 1,5.*

63.P: *Con esta forma de proceder, podríamos, por tanteo, aproximarnos poco a poco al valor de esta longitud, pero quiero que inventemos alguna estrategia nueva que nos permita calcularlo con más exactitud. Como los catetos del triángulo son iguales, entonces la base y la altura ¿Cómo son?*

64.VA: *Iguales.*

65.P: *Bien, entonces $b=h$ y $(b \times h)/2$ ¿cuánto vale?*

66.VA: *El área del triángulo, 1 u^2 .*

67.P: *Entonces, si la mitad de $b \times h$ vale 1, ¿cuánto vale b y cuánto vale h ?*

68.A6: *$b \times h$ vale 2.*

69.P: *Muy bien A6. ¿Sabeis decirme dos números cuyo producto sea 2?*

70.VA: *$b=1, h=2$; $b=2, h=1$.*

El profesor construye una tabla con estos valores.

71.P: *¿Alguna otra posibilidad?*

[Se produce un silencio prolongado]

Argumento que apoya la tesis 14: “el área vale más de $0,845 \text{ u}^2$ porque el lado del triángulo mide más de 1,3”. VA, EP55.

Se realizan tanteos para aproximar el valor de un cateto.

Tesis 15: “la longitud del cateto está comprendida entre 1,4 y 1,5”. VA, EP62.

Tesis 16: “la base y la altura del triángulo son iguales”. VA, EP64.

Tesis 17: “si $b \times h$ vale 2 entonces $b=1, h=2$ ó $b=2, h=1$ ”. VA, EP70.

En el episodio anterior se constata que los alumnos han descubierto una estrategia para ir acotando los posibles valores de la longitud del cateto, expresada en números decimales, que les permitiría aproximar cada vez más el valor de a . En lugar de proseguir con esta estrategia, el profesor les anima a buscar otra, más eficaz, usando conocimientos de otras técnicas.

Los estudiantes de este nivel todavía presentan resistencias para pensar en más tipos de números que los enteros, a pesar de que acababan de hacerlo en episodios anteriores. La costumbre institucional adquirida de asignar valores enteros a las variables de una fórmula se revela como aquí como un obstáculo.

SEGMENTO SG7: Nueva regulación que permite la emergencia de un nuevo problema: resolver $b^2 = 2$, y supervisión de las acciones de los estudiantes enfrentados a dicho problema..

72.P: *Estos valores ¿se adecúan a nuestro caso?*

73.A6: *No, porque $b=h$*

74.P. *Muy bien, ¿entonces, que otros valores podemos considerar?.*

De nuevo silencio.

75.P: *Como $b=h$, podemos poner, en lugar de $b \times h$, $b \times b$*

76.A2: *2b.*

77.VA: *No, no... $b \times b = b^2$.*

78.A5: *1,42. (haciendo cálculos) $(1,42 \times 1,42) / 2 = 1,008$*

79.P: *¡Qué cerca andamos!. Pero quiero que todavía nos acerquemos más. Pensad en estas igualdades $b \times b = 2$, o sea $b^2 = 2$. Si $b^2 = 2$ ¿cuánto debe valer b ?*

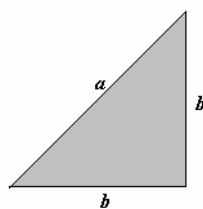
80.A2: *1*

81.P *¿Cuál es el cuadrado de 1?*

82.A2 *No...no...[reconoce su error]*

83.VA: *No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2.*

84.P: *¿No? A ver. Fijaros en el triángulo:*



¿Conocéis como medir la longitud de la hipotenusa **a**, conociendo el valor de los catetos?

[Silencio prolongado].

85.P: *¿No os suena el teorema de Pitágoras?*

[silencio]

86.P: *Bien, os lo recuerdo. $b^2 + b^2 = a^2$ (en nuestro caso $a=2$) Volvamos a donde estábamos ¿creéis posible encontrar un número cuyo cuadrado sea 2?*

87.A6: *Raíz cuadrada de 2.*

88.P: *¿Podeis decirme, en el dibujo, a quien representa exactamente ese número?.*

89.A5: $\sqrt{2} = 1,41$

90.A6: *No hay*

91.A10: *Es un número muy largo*

92.A2: *Tiene 7 cifras decimales*

93.A10: *¿Tiene más!*

94.P: *¿Cuántas más?*

95.VA: *Tiene infinitas.*

96.A6: $\sqrt{2}$ *no existe.*

97.P: *¿Cómo que no existe? ¿Y la longitud de este lado (señalando a uno de los catetos del triángulo) cuánto vale?*

98.A5: $\sqrt{2}$

99.P: *Entonces ¿existe o no existe $\sqrt{2}$?*

[Silencio prolongado, con el que finaliza la clase].

Tesis 18: “ $b \times b = 2b$ ”. A2, EP76.

Argumentos que invalidan la tesis 18: “No, no... $b \times b = b^2$ ”. VA, EP77.

Argumentos sobre el valor del cateto: “1,42. (haciendo cálculos) $(1,42 \times 1,42) / 2 = 1,008$ ”. A5, EP78.

Tesis 19: “No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2”. VA, EP83.

Argumentos que invalidan la tesis 19: “Raíz cuadrada de 2”. A6, EP87. (consecuencia de los argumentos del profesor). EP86.

Argumentos que niegan la existencia de la raíz cuadrada de 2: EP90 y 96.

Argumentos que revelan concepciones acerca de la raíz cuadrada de 2: EP91-3 y 95.

De nuevo aparece en A2 un error algebraico típico: “ $b \times b = 2b$ ”, que rápidamente es corregido por otros compañeros. En este momento llamamos la atención por el papel que desempeñan los compañeros en el proceso metacognitivo, ora examinando ora regulando interactivamente las actividades de los demás.

El profesor va marcando, poco a poco y en todo el proceso instruccional, su papel de conducir a los alumnos a reflexionar sobre las acciones que realizan.

La tesis 19, así como los episodios 90 y 96, ponen de manifiesto el obstáculo epistemológico de la existencia de irracionales. Los alumnos, al no encontrar valores enteros ni decimales que cumplan la condición $b^2 = 2$, niegan su existencia.

Los alumnos admiten que no recuerdan un teorema (Pitágoras) que había sido estudiado en clase recientemente. Ello refleja que no han dotado de significado a dicho resultado, incluso en contexto similar al estudiado, pero formulado en otros términos “longitud de la hipotenusa, en función de la longitud de los catetos”. No entienden la expresión.

El silencio con que finaliza la clase revela que los estudiantes no parecen haber percibido el sentido de la pregunta de la existencia de raíz cuadrada de 2 como una longitud concreta. Aún no pueden relacionar (en este caso) un irracional con una cantidad de longitud.

ASPECTOS DE LA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA DEL PROFESOR

1. DECISIONES DEL PROFESOR

A pesar de que el profesor declara no haber incluido en sus objetivos, de forma explícita, el desarrollo de conocimientos metacognitivos en sus alumnos, lleva a cabo determinadas acciones, encaminadas a lograr el objetivo de la tarea (conseguir que los estudiantes pongan en práctica estrategias adecuadas para la resolución del problema), que activan

decisiones de gestión (planificación, supervisión/control, regulación, revisión/evaluación) que deben ser consideradas como acciones “a priori”, cuando diseña la tarea; “en acto”, cuando se trata del momento de la realización de la práctica en clase con sus alumnos; y “a posteriori”, cuando se trata de evaluar su propia práctica (auto-evaluación) y la práctica de sus alumnos(as). Se trata de gestiones en las que se ponen en juego sus conocimientos metacognitivos y podrían ser descriptos de la siguiente forma:

Tabla 15 – configuración metacognitiva del profesor

<p>Gestiones preliminares (<i>metacognición a priori</i>)</p> <p>1) <i>El profesor planificó una tarea abierta que promueve la reflexión y abre la posibilidad de utilizar diversas estrategias de solución.</i></p> <p>2) <i>Tuvo conciencia previa de posibles dificultades y conflictos por parte de los alumnos al enfrentar la tarea, derivados de la existencia de una topología de errores y obstáculos en el trabajo con medidas de longitud y superficie.</i></p> <p>3) <i>Hizo una auto-evaluación previa de la tarea.</i> Al planificar la tarea y prever las posibles estrategias y dificultades que los alumnos puedan tener con ella, el profesor estará haciendo una auto-evaluación de la misma.</p>
<p>Gestiones durante la instrucción (<i>metacognición en acto</i>)</p> <p>Parece haber <i>supervisado, regulado y evaluado</i> constantemente sus acciones en función del diálogo consigo mismo y con los alumnos durante el proceso de instrucción.</p>
<p>Gestiones de finales (<i>metacognición a posteriori</i>)</p> <p>Una vez finalizado el proceso de instrucción, el profesor declaró haber evaluado las estrategias, dificultades, errores y obstáculos surgidos durante la ejecución de la tarea, reflexionando, a su vez, sobre las posibles implicaciones de sus propias acciones sobre este proceso de instrucción.</p>

CONSIDERACIONES SOBRE LA CONFIGURACIÓN METACOGNITIVA DEL PROFESOR:

1) Gestiones Preliminares:

El profesor se ha fijado como meta que los estudiantes reflexionen sobre sus conocimientos previos para resolver una determinada tarea, valiéndose de un material

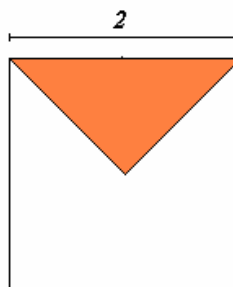
didáctico (como el tangram) que posibilite la emergencia de estrategias alternativas de solución. El profesor es consciente de que los conocimientos previos que supone, a priori, adquiridos por los estudiantes (obtenidos a lo largo de la formación académica), pueden no corresponderse con los que en realidad poseen. Por ello uno de los objetivos previstos en la planificación de la tarea fue tratar de hacer visible esta discrepancia hipotética y prever posibles conflictos semióticos, errores y obstáculos. En consecuencia diseña y planifica esta práctica con varios objetivos:

a) Planificar una tarea abierta

El profesor se ha decidido por una tarea de tipo abierta y, en este sentido, puede hacer surgir en los estudiantes la aparición de distintas estrategias tanto cognitivas como metacognitivas. La pregunta inicial *cómo obtener un valor estimativo del área del triángulo a partir del dato del problema* tiene por objeto provocar la reflexión en los alumnos.

b) Conciencia previa de posibles dificultades y conflictos:

El profesor es consciente de los conflictos y obstáculos que existen en relación con la confusión perímetro/área, evidenciada en múltiples investigaciones. Para poder evidenciar este posible conflicto, introduce un distractor: la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles: a , cuya determinación permitiría calcular directamente el área del triángulo. Este distractor puede, a su vez, ser fuente de emergencia de estrategias alternativas para resolver la tarea. Por otra parte, la “colocación” del triángulo dentro del cuadrado intenta que el problema no resulte demasiado sencillo, como en el caso de que la figura de partida fuese:



(que con seguridad se relacionaría directamente con la cuarta parte del área del cuadrado)

c) Auto-evaluación previa:

El profesor considera, a priori, que una posible *estrategia* de los alumnos puede consistir en manipular el triángulo dentro del cuadrado, hasta obtener una figura como la última (para ello disponen del tangram), lo que les conduciría a una respuesta rápida y eficiente. De ser ésta la estrategia elegida, se evidenciaría un aprendizaje de determinación de superficies mediante pavimentado, por repetición de una unidad de medida. Al mismo tiempo, permitiría reconocer que la hipotenusa del triángulo rectángulo tiene la misma medida que el lado del cuadrado.

Otra estrategia posible estaría basada en intentar *calcular el valor de a* , para, a continuación, aplicar la conocida fórmula del área del triángulo, que ya han manejado en múltiples ocasiones en etapas académicas anteriores. En este caso, dicho cálculo podría conducir a aplicar el teorema de Pitágoras, para obtener el valor de *a* .

Otros tipos de estrategias que podrían surgir durante la realización de la práctica, no fueron previstas “a priori”, ya que el profesor consideró que sería el propio desarrollo de la discusión en clase el que las pondría en evidencia.

Gestiones durante la Instrucción

a) Decisiones sobre el desarrollo de la tarea (supervisión, regulación y evaluación)

A nivel de *supervisión* y, de modo general, de control de las estrategias que puedan surgir de los alumnos, el profesor decide focalizar sus acciones en moderar el debate que pueda acontecer en el desarrollo de la tarea, realizando preguntas, aclarando terminología y fomentando nuevas discusiones, intentando que afloren el mayor número de estrategias posibles, tanto si evidencian progresos en la solución de la tarea, como si –y sobre todo– plasman conflictos y dificultades cognitivas.

A nivel de *regulación*, el profesor pretende fomentar la reflexión en sus alumnos, demandando justificaciones de sus estrategias y acciones; sugiere alguna nueva estrategia (en caso de producirse bloqueo generalizado en la consecución de la meta propuesta) para que sea tenida en cuenta y discutida en clase, con el fin de deshacer dicho bloqueo y está atento a la aparición de nuevos problemas, relacionados con la tarea propuesta, para

garantizar la regulación (y supervisión) de las nuevas estrategias y acciones que emprendan los alumnos para resolver estos problemas paralelos.

A nivel de *evaluación*, el profesor, de forma paralela, evalúa las estrategias empleadas por sus alumnos analizando su pertinencia o detectando los conflictos, errores y obstáculos que impiden o dificultan alcanzar el objetivo de resolver correctamente la tarea, valorando las distintas opciones, las tesis y argumentos presentes en el discurso de sus alumnos, que le permitan controlar los aprendizajes logrados y detectar las carencias cognitivas (y metacognitivas), para proceder en consecuencia.

Gestiones de Reflexión

Para la valorar la consecución de los objetivos propuestos, el profesor reflexiona sobre sus propias acciones durante el proceso de instrucción a la hora de intervenir en el desarrollo de la tarea: formula preguntas, sugiere nuevas estrategias, provoca la discusión de nuevos problemas derivados de las propias respuestas y estrategias usadas por los estudiantes, etc.

La trayectoria argumentativa derivada de las prácticas realizadas en clase, que hemos desarrollado anteriormente, permite ejemplificar las diferentes fases de la configuración metacognitiva del profesor que acabamos de exponer.

CONSIDERACIONES DERIVADAS DEL PROCESO DE INSTRUCCIÓN.

El desarrollo de la clase ha mostrado que:

- a) El profesor no ha tenido la intención, al menos explícitamente, de desarrollar conocimientos metacognitivos en sus alumnos(as). Sin embargo, los comentarios que podemos hacer de esa práctica abarcan un sentido general, toda vez que apreciamos que una clase o una práctica bien planeada y bien intencionada para desarrollar el conocimiento cognitivo de los alumnos(as) (teniendo en cuenta las competencias deseables y asequibles para un nivel de estudios concreto, así como la competencia que debe tener el profesor en el uso de procesos didácticos basados en la investigación matemática y didáctica y el dominio del contenido de las matemáticas que se están manipulando), hace que, paralelamente, se desarrollen competencias metacognitivas. Podemos reafirmar así las interacciones entre

cognición y metacognición, aunque posiblemente con grados de desarrollo distintos.

- b) Podemos observar que el profesor, al animar a los estudiantes a manipular las piezas del tangram, a fin de que descubran algunas estrategias alternativas, sugiriéndoles que intenten averiguar a cuántos triángulos equivale el cuadrado superpuesto, está estimulando la reflexión metacognitiva de los estudiantes. Pero la iniciativa fracasa, y se produce un bloqueo, por lo que es el propio profesor el que indica expresamente dicha estrategia. Su puesta en práctica, sin embargo, parece no ser interpretada adecuadamente por varios estudiantes, que siguen defendiendo una postura previa: el área del triángulo es de 2 unidades cuadradas (basada en una concepción restrictiva del concepto de unidad de medida: 1 triángulo “grande”= 2 triángulos “pequeños”) que extrapolan ahora, ante la evidencia de que el cuadrado equivale a 4 triángulos, afirmando que el área del cuadrado es de 8 unidades (no teniendo en cuenta que su lado es 2). Otra parte de la clase, basándose más en criterios algorítmicos que en cuestiones de significado, pasan a deducir que el área del cuadrado es de 4 unidades, por lo que el área del triángulo es de 1 unidad.
- c) La constatación, por parte del profesor, de que la solución correcta no está consensuada, al existir sobre el papel varias posibles respuestas, hace que la supervisión de los diferentes procesos puestos en marcha (fórmula del área con valores aproximados, equivalencia entre 4 triángulos y el cuadrado, triángulo “grande” = 2 triángulos “pequeños, composición/recomposición de A6 y A7), motiva la intervención del profesor para que los alumnos reflexionen sobre la relación entre las dos primeras estrategias mencionadas, surgiendo así una nueva estrategia relacionada con la búsqueda de valores aproximados más precisos para la longitud de la base (y de la altura). En este punto, cabe destacar que la estrategia tiene cierto éxito, obteniéndose valores aceptables como 1,42.
- d) La reflexión que hacen los estudiantes sobre los propios conocimientos que deben poner en práctica para elaborar un plan para resolver la tarea es, en general, deficiente, si bien debemos resaltar el caso de las alumnas A6 y A7, elaborando una estrategia para dar respuesta al problema, que podemos considerar original, en la medida en que no había sido objeto de discusión previa. El alumno A3 ha elaborado un discurso que pone de manifiesto sus concepciones personales de las nociones de cateto, suma de longitudes de catetos y área de un triángulo, que

permiten detectar conflictos y errores relacionados con la confusión perímetro/área. Este alumno y otros compañeros también evidencian conflictos derivados de un significado personal de la noción de “unidad de medida”, todavía poco elaborado. Las decisiones iniciales que toman no son reflejo de un discurso justificado, sino que hay que interpretarlas como una emisión de juicios poco reflexivos acerca de la cuestión que se les plantea. No obstante, podemos observar que a pesar de tener un dominio primario de la metacognición, éste no fue suficiente para garantizar el éxito de los alumnos (el caso específico de A3) en la tarea. El error de A3 no se debe a carencias en la configuración metacognitiva (aunque elemental) que posee, puesto que supo transferir o usar la estrategia basada en la “analogía” con la tarea anterior (en donde se mostraba la equivalencia entre triángulos “grande” y pequeño”), pero el hecho de que aplique la analogía en este nuevo contexto no garantizó un aprendizaje contextualizado y, por tanto, no le permite resolver el problema. Así que el error de A3 se debe básicamente a su configuración cognitiva (dificultades con el significado de “unidad de medida”, cuando se manipulan cantidades de longitud y superficie). Este caso, en particular, nos sugiere justificar que la metacognición, por sí sola, no permite explicar la realización de una práctica y, por tanto consideramos que se verifica la hipótesis **H2**: *El hecho de que uno tenga adquirido y controle aspectos del conocimiento metacognitivo suficiente para afrontar una nueva tarea, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias de conocimientos cognitivos.* Por tanto, justificamos la necesidad de contemplar simultáneamente una configuración cognitiva, como la propuesta en el EOS.

- e) También queremos remarcar el papel que desempeñan los compañeros en el desarrollo o incremento de aspectos metacognitivos, bien a través de sus argumentaciones con estilos de razonamiento (aprendizaje) variados, bien haciendo correcciones puntuales a los demás e incluso a través de preguntas dirigidas al profesor.
- f) Se evidencian dificultades para usar, en este contexto, la fórmula usual del área de un triángulo, conocidas su base y su altura, como una estrategia posible que tiene que ser sugerida por el profesor. La puesta en práctica de la misma, hace surgir en la clase un interesante debate, alrededor de los valores estimados para la longitud de la base y la altura, manifestándose conflictos derivados del uso inapropiado de la

analogía (debido a obstáculos en la configuración cognitiva que poseen), para realizar cálculos aritméticos con fracciones. El uso de la fórmula permite obtener un valor aproximado para el área del triángulo, que no concuerda con decisiones previas tomadas sobre este valor, lo que produce una situación de cierto desconcierto y bloqueo entre los estudiantes, ante la falta de acuerdo sobre lo que debe medir su superficie.

- g) Resulta notoria la dificultad para usar el teorema de Pitágoras en un contexto en principio nada extraño, ya que se ve con claridad que se trata de un triángulo rectángulo. La ausencia de referentes metacognitivos para establecer conexiones entre contextos próximos se observa aquí con nitidez. Por otra parte, hay que incidir en la dificultad de interpretar los números irracionales como medidas en este nivel educativo, las dificultades que crea la noción de infinito y las dudas consecuentes para reconocer la existencia de números irracionales.

Este proceso de instrucción nos ha mostrado que aspectos metacognitivos fueron activados y, a pesar de una instrucción responsable que los estimula, dichos aspectos fueron limitados. Pensamos que éstos podrían haber sido mejorados (incluso comprometiendo el avance del contenido) si el profesor fuera consciente de los mismos prestándoles una mayor atención.

Terminamos este bloque de análisis con la siguiente reflexión: una instrucción bien planeada, intencionadamente cognitiva y responsablemente ejecutada consigue activar aspectos metacognitivos de forma limitada. El profesor, dispuesto a reconocer la relevancia educativa de las habilidades metacognitivas ¿no debería remodelar la planificación y ejecución de la instrucción, en aras de una decidida activación y desarrollo de dichas habilidades?

Capítulo 5

Conclusiones

Ha llegado el momento de revisar todo el trayecto recorrido hasta aquí, para enlazar las reflexiones realizadas, a lo largo del trabajo, sobre el estudio teórico y empírico, con miras a construir respuestas a las cuestiones de la investigación, presentadas en la introducción y metodología de trabajo. Todavía, creemos necesario resaltar que la naturaleza de nuestras reflexiones está condicionada por las opciones teóricas y metodológicas elegidas, lo que nos lleva a entender las conclusiones más bien como consideraciones relevantes del estudio.

Hemos pretendido comprender las prácticas manifestadas por estudiantes, específicamente de 3º y 3º/4º Curso de Educación Secundaria Obligatoria y de Magisterio (educación primaria) respectivamente en un contexto de Resolución de Problemas. Para alcanzar este objetivo, hemos elaborado unos instrumentos y seguido unas pautas que podemos resumir en las siguientes palabras-clave: transcripción, identificación, categorización y análisis de las prácticas orales y escritas manifestadas por los participantes del estudio. Todo ello a la luz de nuestra interpretación del marco teórico utilizado.

Organizamos este capítulo orientándonos por las cuestiones de investigación, que retomaremos a continuación. Hemos efectuado consideraciones parciales al cabo de nuestros análisis, e intentado construir respuestas a las hipótesis de trabajo, de manera que una síntesis de estas consideraciones la trasladamos aquí, pretendiendo poner más énfasis en el conjunto de reflexiones. Dada la estrecha relación entre cuestiones de investigación e hipótesis de trabajo, estas serán tratadas, aquí, conjuntamente.

CG1. *¿De qué manera podemos comprender las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de RP a través de la integración de ciertos constructos teóricos del EOS y de la Metacognición?*

Sobre esta cuestión se han podido verificar las siguientes hipótesis:

H1. *El hecho de que una persona tenga adquirido los **conocimientos cognitivos** suficientes para la realización exitosa de una práctica, no siempre es garantía de éxito y, puede que no consiga resolverla, debido a carencias o uso incorrecto de conocimientos metacognitivos.*

H2. *El hecho de que uno tenga adquirido y controle aspectos del **conocimiento metacognitivo** suficientes para afrontar una nueva tarea, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias de conocimientos cognitivos.*

H3. *El hecho de que una persona tenga adquirido y controle el **conocimiento metacognitivo** indicado para afrontar nuevos aprendizajes, aunque no siempre es garantía de éxito, en muchos casos consigue mejorar su configuración cognitiva, facilitando la adquisición de dichos aprendizajes.*

H4. *En la realización de una práctica se activan las dos configuraciones, cognitiva y metacognitiva, que mutuamente se apoyan e interactúan para el progreso común.*

A pesar de haber, en un principio, dedicado nuestra atención a hablar de la cognición a través del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, en la trayectoria real de esta investigación los primeros estudios se centraron en la temática de la Metacognición.

De la revisión de la literatura pertinente sobre la metacognición y de su aplicación en este estudio particular nos gustaría subrayar, por una parte, la **importancia y contribución** de esta temática para nuestra investigación, en particular a la hora de analizar y comprender las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP y, por otra parte, presentar las aportaciones de la investigación, consecuencia del estudio empírico realizado.

- *La Metacognición se muestra relevante a la hora de realizar una práctica; especialmente para el profesor, ofrece una perspectiva profunda a la hora de comprenderla. Corroborando lo señalado en otras investigaciones, pudimos verificar con este estudio que la Metacognición es de gran utilidad para comprender mejor las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas. Vimos que, para resolver una tarea, el estudiante normalmente pone en práctica o activa una serie de gestiones metacognitivas más o menos declaradas sobre las componentes cognitivas en uso. Incluso es posible activar conocimientos cognitivos que se hallen en estado latente, a través de adecuadas gestiones metacognitivas, y observar la función de apoyo que desempeñan dichas gestiones para hacer progresar los*

conocimientos cognitivos. Pero, por otro lado, no se puede reflexionar sobre aquello que no se conoce, de modo que la cognición acaba por servir de apoyo para que la metacognición emerja. A medida que se utilizan configuraciones cognitivas más elaboradas, las configuraciones metacognitivas se muestran como un catalizador para la evolución de las primeras, aproximándolas paulatinamente a una configuración epistémica de referencia. Recíprocamente el poseer una configuración cognitiva desarrollada hace paralelamente aflorar una configuración metacognitiva que, a su vez, se aproxima a una configuración metacognitiva de referencia. Todo esto viene a confirmar que estos dos aspectos están íntimamente relacionados. Simultáneamente se ponen de manifiesto configuraciones cognitivas y metacognitivas que se apoyan e interactúan para un progreso mutuo, apoyando la verificación de la hipótesis H4, mencionada. Tener claro cómo discriminar las gestiones metacognitivas de las cognitivas, el grado de manifestación de las mismas, así cómo, cuándo y por qué ocurren, es esencial para comprender mejor las prácticas de RP; el dominio de los procesos metacognitivos puede, en ocasiones, proporcionar al sujeto una aplicación exitosa de los conocimientos cognitivos que posee e, incluso, incrementarlos (es este el sentido de la hipótesis H3); sin embargo, en otras ocasiones, puede no ser garantía de éxito, al existir carencias cognitivas que impiden la resolución de la tarea (hipótesis H2); la instrucción que tiene en cuenta los procesos metacognitivos contribuye al desarrollo de las habilidades de los estudiantes para resolver problemas.

- *La metacognición puede ser el hilo conductor de una acción a otra acción.* Se puede considerar, por ejemplo, que el paso de una acción inicial a otra final puede ser un indicador indirecto y observable de la existencia de “competencias metacognitivas” en el sujeto y, que por tanto influye (junto a otros factores) en el diseño y ejecución de una acción (o de nuevas acciones).
- *El constructo configuración metacognitiva puede dar una orientación adecuada a la hora de comprender la práctica.* El constructo que hemos organizado, nos ha permitido discriminar con más detalle el razonamiento metacognitivo de los estudiantes y percibir matices de razonamiento normalmente no contemplados en un proceso de análisis estándar. Se si organiza una configuración metacognitiva hipotética de referencia, podrá servir de pauta orientativa tanto para el profesor, para discriminar las configuraciones metacognitivas personales de sus alumnos,

como para que éstos observen la transparencia con que se pretende enseñarles y evaluarlos y, al mismo tiempo, para que aprendan y se organicen. Por ello, el constructo configuración metacognitiva puede ser visto como una herramienta heurística de análisis, muy útil a la hora de evaluar las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP. Pensamos que la transparencia, por parte del profesor, de los procesos metacognitivos que se pretenden desarrollar, a través del diseño de configuraciones metacognitivas hipotéticas (en un principio), puede ser tenida en cuenta para analizar sus implicaciones didácticas en estudios futuros.

- *La Metacognición como una heurística teórico-práctica para ser utilizada en clase.* Por todo lo dicho anteriormente creemos que la Metacognición, en el contexto del aula, puede ser vista como una heurística teórico-práctica que invita a alumnos y profesores a participar de un objetivo común: despertar su interés por conocer mejor la naturaleza de la matemática, desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje; despertar la toma de conciencia por parte de profesores y alumnos de los procesos mentales (cognitivos y afectivos) y socioculturales implicados en el aprendizaje y la enseñanza; y, quizás, (o lo que realmente se espera), despertar a la autonomía en el proceso educativo de nuestro protagonista principal, el estudiante¹. También, en un contexto metodológico, podrá tener implicaciones para estudios posteriores si se considera el conjunto de las propuestas² o intentos llevados a cabo en el aula para ayudar al estudiante a mejorar la gestión de sus recursos matemáticos, lo que redundará en una más profunda comprensión de las matemáticas.

Pero también de este contexto nos gustaría subrayar algunos momentos en que hemos experimentado **dificultades y limitaciones** en el manejo de esta temática.

- *Definiciones que no resultan fáciles a la hora de aplicar. Dificultades a la hora de evaluar.* A pesar de que una gran parte de la literatura se dedica a comprender e identificar estrategias y habilidades de tipo metacognitiva, manifestadas por los estudiantes cuando resuelven problemas y, de resultar clara la definición ofrecida por Flavell que distingue estrategias cognitivas de las metacognitivas, fueron

¹ No en el sentido solamente cognitivista –tener al alumno como centro de atención–. Tampoco nos referimos a un constructivismo radical. La idea es transformar el monólogo en diálogo, transferir el protagonismo del profesor al alumno en el sentido de favorecer y/o fomentar el diálogo socialmente compartido.

^{2[2]} Nos referimos a las propuestas metodológicas como, por ejemplo, el aprendizaje basado en proyectos, la ingeniería didáctica y, en general, todas aquellas propuestas que utilizan la resolución de problemas y la actividad matemática como fuente para la construcción del conocimiento matemático.

múltiples las ocasiones en que nos encontramos con dificultades para hacer dicha diferenciación. Se nos presentaron dudas durante el intento de reconocer la frontera entre las acciones y los matices que caracterizaban el razonamiento cognitivo y el metacognitivo de los estudiantes/participantes, ante la resolución de la tarea que propusimos. Por una parte, pensábamos que lo que resultaría ser para nosotros una estrategia cognitiva podría ser vista como metacognitiva por otros, y viceversa. Por otra, también nos cuestionábamos sobre ¿dónde estaría la frontera entre cognición y metacognición? ¿existiría realmente esta frontera? Son cuestiones que nos parecieron pertinentes, incluso teniendo en cuenta la estrecha relación entre ambos tipos de conocimiento. De ahí que percibimos que uno de los grandes problemas en el entorno de esa temática, era realmente el de cómo evaluarla.

- *Muchas terminologías, un terreno movedizo.* Otro punto que nos ha incomodado bastante, y que acabamos por reconocer y concordar con muchos autores, fue la gran dificultad en tratar semejante temática que poco a poco se mostraba como un terreno movedizo. Demasiadas terminologías e interpretaciones distintas para los mismos términos, contribuyen más a fragmentar que a fortalecer la red de pensamientos en torno a una Teoría de la Metacognición. Pero si, por un lado, se percibe que los intentos de ofrecer un modelo general y completo de la metacognición son pocos, por otro, parece que las necesidades actuales y la apertura y aplicabilidad de esta temática a diversas áreas de conocimiento claman por una definición clara de un modelo operacional consistente y por un cuerpo teórico capaz de sostener los estudios en este campo que actualmente recibe el nombre de Metacognición.
- *Puede ser engañoso pensar que ya no hay de qué hablar sobre Metacognición.* En reuniones científicas en las que participamos, en este proceso de elaboración de la tesis, así como en conversaciones informales, escuchábamos que sobre la metacognición todo estaba dicho. De algún modo esto parecía mostrar que aquellos que así lo asumen aún están dentro de un paradigma positivista (Comte ya decía que nada más había por descubrir en la ciencia). Una creencia que, a nuestro entender, responde al número reducido de trabajos en nuestra área científica, y que acaba por poner límites al estudio de esta temática. En clase, urge un trabajo más transparente y explícito de éstos procesos; de modo que resaltamos la necesidad de

investigar el aula y de concienciar al profesorado. En ese sentido se podrían fomentar investigaciones futuras.

- *Si se considera sólo, la metacognición, como herramienta de análisis, nos encontramos con dificultades a la hora de comprender una práctica matemática.* Al utilizar fundamentalmente las herramientas teórico-metodológicas del campo de la metacognición para comprender las prácticas de los estudiantes en el contexto de nuestras tareas, hemos constatado que de forma aislada, los constructos de la metacognición no permitían explicar las dificultades y conflictos puestos de manifiesto por los estudiantes en la realización de una práctica para resolver problemas. Tal reflexión nos enfrenta con la problemática de la evaluación de este conocimiento y de plantear lo que sería de orden cognitivo o metacognitivo.
- *La metacognición aún viene ocupando poco espacio en los sistemas educativos.* La importancia de trabajar la metacognición abiertamente en clase fue resaltada por muchos investigadores (por ejemplo, Fernandes, 1988). Parece constituirse en un trabajo casi siempre extra-académico debido a que compromete el tiempo destinado al contenido programático. Observamos que en los Principios y Estándares Curriculares del NCTM (2000) y en el Informe PISA (OCDE, 2003) hay reservado un lugar concreto para hablar de las “competencias metacognitivas” cuando se refieren a “competencias específicas” o “estándares específicos”. Aunque la bibliografía que concierne a los procesos de aprendizaje de las matemáticas privilegia la metacognición (Cabral, 1998, entre otros), nos parece que las cosas están en el plano de la investigación, de las propuestas, de las ideas, pero no en el plano de la práctica. El aula aún parece distanciarse de lo que se afirma o sugiere en la teoría. Necesitamos, todavía, una mayor apertura y atención para los procesos metacognitivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Todo ello sumado a la inquietud e inseguridad que inicialmente tuvimos, en trabajar con algo que nos parecía tan resbaladizo hizo que buscáramos otras fuentes de apoyo, otros marcos teóricos. La decisión de elegir el EOS fue debido a que, a nuestro juicio, proporcionaba herramientas teórico-prácticas más finas para realizar nuestros análisis.

De la revisión de la literatura pertinente al EOS, modelo teórico de la cognición e instrucción matemática que se basa en supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos, nos han servido específicamente los objetos del constructo configuración

epistémica y cognitiva, o sea, situaciones, lenguaje, procedimientos, definiciones (conceptos), proposiciones y argumentos. Si bien cada uno de estos elementos nos ha aportado información relevante sobre las prácticas de RP, también consideramos esencial tener en cuenta las facetas elemental-sistémico, institucional-personal e intensivo-extensivo.

De forma general, vimos que este Enfoque trata no solo de distinguir las entidades emergentes (objetos) del sistema de prácticas de donde provienen, sino también las entidades psicológicas (personales) de las entidades epistemológicas (institucionales). Esa diferenciación entre el objeto (entidad emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable a partir de las prácticas) supone, entre otras cosas, el reconocimiento de la problemática de la evaluación de los conocimientos. Vimos que para el EOS la naturaleza del conocimiento de un objeto se infiere de las prácticas explicitadas durante la resolución de problemas, y esas prácticas serían los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento.

En relación a este enfoque podemos destacar, por una parte, **algunas contribuciones** para nuestra investigación y a la hora de intentar comprender las prácticas de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas y, por otra parte, presentar las aportaciones de la investigación consecuencia del estudio empírico realizado.

- *El EOS representó el soporte teórico que necesitábamos, pero sobre todo nos sirvió como soporte metodológico.* Metodológicamente, el constructo configuración epistémica y cognitiva nos ha proporcionado una mayor claridad a la hora de percibir los matices en la frontera de lo cognitivo y lo metacognitivo, todavía sin demarcar divisiones; a pesar de ser nuestro análisis más bien de tipo ontológico, nos ha servido de orientación e inspiración la “técnica del análisis semiótico” presentada por Godino y Batanero (1994) y Font (2005), por ello podemos decir que el EOS nos ha proporcionado una mayor organización de las informaciones y un análisis más fino y consistente de los objetos matemáticos puestos en juego en la práctica de RP. Como implicación didáctica para futuros estudios que podemos extraer de este contexto, estaría el planteamiento de las herramientas de análisis del EOS en el trabajo de clase, para hacer más explícitos los tipos de objetos matemáticos puestos en juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *El EOS nos ha hecho percibir y comprender el carácter pragmático-didáctico de la metacognición.* Así, en el mismo sentido en el que el EOS considera que la

naturaleza del conocimiento de un objeto se infiere de las prácticas explicitadas durante la resolución de problemas y que esas prácticas son los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento, contemplamos las prácticas, también, como indicadores empíricos para evaluar los conocimientos metacognitivos, y de ahí inferimos un carácter pragmático para la metacognición. Es decir, de la misma forma que los objetos cognitivos emergen de las prácticas, también podríamos pensar en la metacognición emergiendo de esas prácticas, tanto de prácticas personales significativas como de prácticas socialmente compartidas en el seno de una institución, y además, podríamos inferir que el proceso de instrucción, intencionado (o no) hacia el desarrollo de procesos metacognitivos, como mediador de esas prácticas, legitima aspectos de la metacognición. Desde el punto de vista pragmático, poner en práctica el conocimiento metacognitivo se convierte en un requisito esencial para usar con eficacia los elementos de la configuración cognitiva en la resolución de una tarea en un determinado contexto. Es decir, una eventual debilidad en el conocimiento metacognitivo puede imposibilitar para establecer relaciones, para seleccionar estrategias pertinentes, para hacer generalizaciones, etc.. La metacognición es un conocimiento que sufre constantes influencias de agentes sociales y procesos externos diversos. De aquí también inferimos que la metacognición tiene sus raíces en los hechos, en el uso, y es ante todo un constructo que emerge de la práctica, que representa una porción de las experiencias y del conocimiento que uno adquiere del mundo, con el mundo y en el mundo.

- *A un problema se le pueden asociar diferentes configuraciones epistémicas.* El hecho de contemplar la situación problema en el marco de una configuración epistémica nos ha permitido entender que a un determinado problema se le pueden asociar diferentes configuraciones epistémicas (en función de las diferentes formas de resolución).
- *Es destacable la gran utilidad del constructo configuración epistémica y cognitiva para poder explicar las prácticas de RP de los estudiantes.* Estos constructos nos han permitido confeccionar configuraciones epistémicas de referencia que pudiesen ser utilizadas para evaluar las prácticas de los alumnos y nos han permitido describir y analizar con más detalle los objetos matemáticos presentes en estas prácticas. Por ello, los constructos configuración epistémica y cognitiva pueden ser

vistos como una herramienta heurística de análisis, muy útil a la hora de evaluar las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP. En el EOS, hasta esta investigación, no se habían utilizado esos constructos para analizar las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP. Así, hemos puesto de manifiesto la gran versatilidad y operatividad de estos constructos, que invitan a pensar que, a partir de aquí, se puedan abrir nuevas perspectivas para investigaciones futuras.

- Por todo lo dicho creemos que *el EOS nos ha servido de referencia fundamental para intentar relacionar los aspectos cognitivos y los metacognitivos.*

Sin embargo, a pesar de su apoyo relevante a la hora de evaluar las prácticas y, por tanto, los conocimientos cognitivos (e, indirectamente, los metacognitivos) de los participantes de esta investigación, nos encontramos aún con **algunas limitaciones**:

- *Si se considera el EOS apenas como única herramienta de análisis, nos encontramos con dificultades a la hora de comprender una práctica matemática.* En nuestros análisis, al utilizar solamente los constructos “configuración epistémico” y “cognitiva” elaborado por dicho enfoque, no conseguíamos explicar algunas de las dificultades y conflictos manifestados por estos estudiantes a la hora de realizar una práctica. Fue posible observar que los conocimientos cognitivos no siempre garantizaban el éxito en una tarea, debido a un uso inadecuado o a las carencias de conocimientos y habilidades metacognitivas (hipótesis H1). Tal conclusión, por otro lado, nos hizo reflexionar sobre la problemática de la evaluación del conocimiento cognitivo.

Así, la necesidad de ampliar las explicaciones que conseguíamos con el EOS acerca de la realización de una práctica, justifica nuestro intento de buscar nuevas herramientas teóricas que tuvieran su origen en las investigaciones sobre la Metacognición. Para ampliar el EOS diseñamos otro constructo que llamamos “configuración metacognitiva”, que, tal como vimos, tampoco, de forma aislada, podría explicar dichas dificultades. De modo que la complementariedad entre ambas configuraciones representó, a nuestro juicio, una herramienta más eficaz para explicar la “realización de una práctica”. Bajo esta perspectiva, consideramos haber cumplido los objetivos construyendo respuestas a la cuestión planteada.

En definitiva, en esta investigación, por una parte, hemos utilizado el Enfoque Ontosemiótico para explicar la incidencia de los procesos metacognitivos en la realización de una práctica y, por otra, hemos, de igual modo, utilizado el marco teórico de la Metacognición para explicar la incidencia del EOS, en tanto que enfoque cognitivo, en dicha realización. De esta forma incorporamos las dos componentes (cognitiva y metacognitiva) como una unidad mínima y esencial, un complemento relevante, para explicar mejor los fenómenos didácticos asociados a la ejecución de una práctica.

CE1. *¿Cómo podemos describir, analizar e interpretar las prácticas que realizan los estudiantes de dos niveles educativos, E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) y Magisterio, considerados individualmente, en grupo y con el apoyo del profesor, en el proceso de RP a través de la integración de los constructos del EOS y de la Metacognición?*

Para la comprensión que hemos propuesto de las prácticas de los estudiantes de estos dos niveles educativos, hemos buscado, en una primera instancia, organizar configuraciones epistémicas y metacognitivas que sirvieran de referencia, para comparar con las configuraciones personales cognitivas y metacognitivas de los estudiantes. A partir de ahí analizamos los protocolos escritos. No resultando suficientes los análisis de los protocolos escritos, nos ocupamos de describir los protocolos orales (entrevistas y debates en grupo) para proceder a un análisis más eficaz y recabar datos para una mejor interpretación de los resultados. Al considerar las prácticas de los estudiantes individualmente y en grupo, hicimos dos estudios de casos individuales (Nerea, alumna de magisterio, y Víctor, alumno de E.S.O.) y un estudio de caso en grupo (un debate con 4 alumnos de magisterio). Fue en estos estudios de casos donde quisimos mostrar con detalle *cómo describir, analizar e interpretar* la práctica de los estudiantes en una tarea de RP utilizando conjuntamente, de manera integrada, los constructos del EOS y de la Metacognición. Metafóricamente, podemos decir que tomamos la práctica de RP escrita y oral del estudiante como un “iceberg” ya que, desde una perspectiva sistémica, es posible identificar y caracterizar los objetos, los elementos de una configuración cognitiva (lenguaje, proposiciones, argumentos...), la secuencia de acciones actuativas y discursivas, así como los elementos de una configuración metacognitiva involucrada en esta práctica. Al “abrir” la práctica (escrita y oral) del estudiante buscando identificar los componentes

de las configuraciones propuestas, fuimos demarcando lo que consideramos de naturaleza cognitiva y metacognitiva sin todavía establecer fronteras y, al mismo tiempo fuimos percibiendo la relación entre ambas componentes, puesto que el surgimiento de una implicaba el aflorar de otra y constatar que estaban armónicamente desarrolladas. En otras palabras, al utilizar conjuntamente las dos perspectivas de análisis, fue posible percibir las competencias de los estudiantes para usar los objetos matemáticos y cómo estas competencias están en armonía con sus respectivas competencias metacognitiva. Vimos que: a) cuando el nivel cognitivo era bajo, también lo era el nivel metacognitivo; si, por el contrario, era alto también era alta la metacognición; b) el uso inadecuado de gestiones metacognitivas impedía resolver con éxito una tarea; c) en ocasiones, el uso adecuado de gestiones metacognitivas sobre los conocimientos previos favorecía el avance o mejora de la configuración cognitiva en uso, pero también las debilidades (carencias) en la configuración cognitiva podían limitar la utilización de gestiones metacognitivas más avanzadas. De modo que podemos señalar la existencia de una relación de interdependencia manifiesta entre conocimientos cognitivos y metacognitivos.

Lejos de presentar modelos o técnicas, sólo tenemos la intención de mostrar cómo se pueden percibir y comprender dichos conocimientos en la práctica de RP y cómo organizar configuraciones que sirvan de referencia para estudiar las configuraciones personales de los alumnos y, a su vez, cómo organizarlas y percibir las con más detalle para centrar los esfuerzos en conseguir que el alumno se aproxime a una conducta matemática deseable. Otra cosa que nos gustaría señalar, en este contexto, incluso como perspectiva para estudios futuros, sería, como hemos referido anteriormente, la consideración de la Metacognición y la “técnica de análisis” del EOS como una heurística teórico-práctica para ser utilizada en clase y “abrir paso” a encontrar medios para evaluar y comprender mejor estos procesos.

CG2. *¿Qué relaciones podemos identificar entre las competencias metacognitivas de los estudiantes, evaluadas en el contexto de nuestras tareas de RP, y su rendimiento académico?*

Para intentar construir respuestas, comenzaremos por considerar la cuestión específica **CE2.** *¿Qué relaciones podemos identificar entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en el contexto de nuestras tareas y sus Calificaciones Finales de Curso*

(CFC) (medidas por la media obtenidas en el conjunto de todas las asignaturas) y, en particular, en la asignatura de Matemáticas (MAT)?

Sobre estas cuestiones formulamos la siguiente hipótesis:

H5. *El instrumento PHM que refleja el dominio/control de los procesos metacognitivos por parte de los estudiantes,*

será un buen predictor de ese dominio/control si:

a. la correlación entre las variables PHM y CFM resulta significativa;

b. la correlación entre PHM y CFC resulta significativa;

No será un buen predictor si

c. el estudio de las correlaciones anteriores no resulta significativo.

Al correlacionar el resultado de la prueba (PHM) y el resultado de las calificaciones finales de curso (CFC) en el conjunto de todas las asignaturas y en particular con la calificación final de matemáticas (CFM), *no fue posible confirmar* las componentes *a.* y *b.* de la hipótesis H5. Los resultados parecen apuntar hacia un bajo dominio o carencias de procesos metacognitivos por parte de los estudiantes en un contexto más amplio, cuando se consideran todas las asignaturas, y en un contexto más restrictivo, cuando se considera sólo las matemáticas.

Estos resultados ponen en cuestión, incluso en jaque, la premisa asumida en el estudio de que las competencias metacognitivas del estudiante inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas. Es decir, esos resultados, presentados sin otras consideraciones, parecen contradecir cualquier posibilidad de encontrar relación entre las competencias básicas relevantes, identificables en el conjunto de la PHM, y el rendimiento académico. O que, en definitiva, el rendimiento académico no parece ser una variable que determine la competencia metacognitiva.

La PHM perseguía la observación de procesos metacognitivos de carácter general y no sólo específicos de las matemáticas. De acuerdo con esta perspectiva, se detecta la homogeneidad de las correlaciones en las variables CFM y CFC pareciendo indicar que las competencias metacognitivas “esperadas” (validez atribuida a las mismas por parte de los profesores de los estudiantes implicados en esta investigación) son similares en el conjunto de esas variables.

De todo esto inferimos, entre otras cosas, que la metacognición “explícita” no parece ser un objetivo de desarrollo dentro de las materias curriculares y en particular en las matemáticas; que el sistema de instrucción tradicional *puede* haber incidido en este bajo

índice de correlación, ya que, en general, las pruebas que permiten obtener la CFM suelen basarse en la propuesta de ejercicios para averiguar el dominio de técnicas rutinarias, más que en la comprensión de conceptos y la resolución de situaciones-problema contextualizados (Cajaraville et. al., 2003; Plata, 1998) en los que los procesos metacognitivos se manifiestan relevantes para alcanzar la solución de los mismos.

Así, consideramos importante resaltar que el hecho de considerar estos procesos como obvios en el trabajo diario de clase supone perder la oportunidad de un trabajo explícito y consciente de los mismos.

CG3. *¿Qué relaciones podemos identificar entre los niveles de competencia metacognitiva que los profesores presuponen a sus alumnos y los niveles observados a través de una prueba externa?*

Sobre esta cuestión formulamos las siguientes hipótesis:

H6. *Reconociendo el profesor los conocimientos y capacidades metacognitivas de sus alumnos con respecto a los reflejados en nuestro instrumento PHM,*

este reconocimiento vendrá indicado si

a. el estudio de correlaciones entre PHM y EEP es significativo.

En el caso opuesto,

b. indicará baja presencia de un trabajo explícito enfocado al desarrollo de la metacognición.

H7. *El profesor reconocerá mejor los conocimientos y capacidades metacognitivas de los alumnos de buena conducta académica general (en rendimiento y comportamiento) y, en este caso,*

el reconocimiento vendrá indicado si

a. el estudio de correlaciones entre PHM y EEP referidos a los alumnos considerados “mejores” por sus respectivos centros, resulta significativo;

No vendrá indicado si

b. el estudio de correlaciones no resulta significativo.

En el estudio de correlaciones entre las variables PHM (en tanto que prueba externa) y EEP (estimación del profesorado) *no fue posible confirmar* el primer punto “a”. de la hipótesis H6 mencionada. Por otra parte, la estimación del profesorado tiene una correlación alta (0,814) con la CFM (su asignatura), lo que nos hizo pensar que las expectativas y creencias del profesorado concordaron con la PHM, pero que todavía no habían evaluado lo que daban por cierto porque creían que las “ideas” (competencias

metacognitivas exigidas en la prueba) estaban implícitas en las actividades matemáticas que proponían en clase y que estas “ideas” estaban en correspondencia con las capacidades académicas de los mismos en su asignatura. Sin embargo, esta expectativa no se corresponde con la realidad, dado que esta expectativa dista del resultado real obtenido por sus alumnos en la PHM.

El estudio global nos mostró que, a pesar de haber pasado un curso completo con sus alumnos, el profesor no hizo una buena predicción sobre las competencias metacognitivas de éstos. Sin embargo, en el estudio parcial, cuando analizamos separadamente las diez clases, distribuidas en tres instituciones, fue posible observar que la predicción del profesorado se vuelve significativa cuando se trata de estimar los alumnos “buenos”. Tal hecho ha ocurrido, exactamente, en las 3 clases (una de cada institución) consideradas las “mejores” por los centros, y vino a confirmar el primer punto (*a*) de la hipótesis H7 relativo a que el profesor reconocería mejor los conocimientos y capacidades metacognitivas de los alumnos de buena conducta académica general (en rendimiento y comportamiento). En cambio, observamos una baja expectativa de los profesores cuando se trata de alumnos de bajo rendimiento académico. Mientras un 87% de los alumnos de las “mejores” clases fueron sobrevalorados en sus competencias metacognitivas, casi un 60% de alumnos de medio y, más aún, de bajo rendimiento fueron infravalorados, en esas mismas competencias, por sus respectivos profesores.

Los resultados parecen corroborar el segundo punto (*b*) de la hipótesis H6, donde suponíamos una baja presencia de un trabajo explícito enfocado al desarrollo de la metacognición.

Aparte de dicha predicción, 4 de estos profesores, responsables de 5 de un total de 10 clases en estudio, ofrecieron aclaraciones sobre sus alumnos, sobre las posibles variables que podrían escapar de su control a la hora de hacer su estimación y causar alguna distorsión en el resultado comparativo (entre EEP y PHM). Al tener presentes las aclaraciones del profesorado, fue posible observar cómo las correlaciones aumentaron sensiblemente en las 5 clases, después de excluir de la muestra los casos que podrían perturbar los resultados, basándonos (por aceptación) en las aclaraciones hechas a los alumnos de “mala conducta” académica general (en rendimiento y comportamiento). O sea, hemos hecho exclusiones con base en aspectos actitudinales. Ante la presencia de estas nuevas informaciones, pudimos señalar que es apreciable cómo los aspectos actitudinales fueron responsables de la subida de las correlaciones entre estas dos

variables. Todo ello nos hace pensar que ambos son aspectos que realmente parecen interferir en la percepción que tienen los profesores de sus alumnos, en particular, de los alumnos de “mala conducta” académica y, sobre todo, parecen ser los responsables de la subvaloración que hacen de las reales competencias metacognitivas de éstos. En ese sentido, volvemos a reflexionar sobre los resultados globales y a pensar que las bajas correlaciones pueden deberse más a las expectativas negativas acerca de las capacidades de los alumnos(as) de bajo rendimiento académico, que a las reales capacidades metacognitivas de éstos. Quizás ésto pueda ser explicado por el simple hecho de que son movidos por la creencia de que aquellos de buena conducta académica son los poseedores de más cognición, mejor estado afectivo (más seguridad) y más éxito (más acierto), y que, por tanto, serán también poseedores de más metacognición. En cambio, será todo lo contrario para los demás; o sea, los de “mala conducta” académica serán los que menos cognición poseen, estarán propicios a estados afectivos negativos (menos seguridad), a condiciones de fracaso, a equivocarse más y por tanto poseerán menos metacognición.

CG4. *¿De qué manera la metacognición emerge en los procesos de instrucción estándar (entendidos como aquellos que no han sido programados expresamente para desarrollar y/o incrementar la metacognición)?*

Sobre esta cuestión, se verifica la siguiente hipótesis:

H8. *La instrucción no programada para desarrollar y/o incrementar aspectos de la metacognición acaba, de forma espontánea o inconsciente, impulsando el desarrollo de habilidades metacognitivas.*

Describimos e intentamos analizar un proceso de instrucción estándar, entendido como aquel que no ha sido programado expresamente para desarrollar la metacognición. En otras palabras, el profesor no ha tenido la intención, al menos explícitamente, de desarrollar conocimientos metacognitivos en sus alumnos, y sin embargo:

- Constantemente anima a los estudiantes a participar con el diálogo, a descubrir estrategias alternativas de resolución, a utilizar los recursos materiales de que dispone, etc.; por ejemplo, cuando una solución correcta no es consensuada, el profesor invita a reflexionar sobre dicha solución y sobre los procesos y estrategias

utilizados para alcanzarlas. Tal hecho lo interpretamos como una forma de estimular o activar la reflexión metacognitiva de los estudiantes.

- El profesor, al darse cuenta de concepciones personales erróneas en torno a los conceptos matemáticos implicados en la tarea, induce a los estudiantes a rescatar conceptos previos que puedan contribuir a la resolución (a que reflexionen sobre los hechos).
- Se observa el papel que desempeñan los compañeros en la activación de gestiones metacognitivas, bien a través de sus participaciones, con estilos de razonamiento (aprendizaje) variados, bien haciendo correcciones puntuales a los demás, o incluso, a través de preguntas dirigidas al profesor.

Esta situación nos permitió, además de verificar la H8 mencionada, avalar la H2, también enunciada al principio de este capítulo. O sea, fue posible observar intentos fallidos de establecer analogías, que se podrían justificar por carencias de conocimientos cognitivos. De modo que el uso de gestiones metacognitivas (aunque primarias) no fue suficiente para resolver el problema.

De modo general, profesor y alumnos contribuyen conjuntamente a activar, incrementar y/o desarrollar aspectos de la metacognición. A partir de las acciones y actitudes de los alumnos, el profesor regula sus propias acciones y actitudes. Usando conocimientos metacognitivos implícitos, se auto-monitorea y, a la vez, conduce a los alumnos a que monitoreen sus propios procesos de pensamiento, o reflexionen sobre sus propias acciones y las de los demás. Y así, de forma espontánea o inconsciente, estos agentes sociales van promoviendo y legitimando el aprendizaje de los mencionados procesos. Aunque el profesor no haya sido consciente de la importancia de trabajar deliberadamente con estos procesos, es inevitable la activación de los mismos en clase. Todavía son aspectos que se muestran ora incipientes ora limitados.

Rescatando para este punto algunas declaraciones orales de los participantes en dos de los problemas aquí considerados (la figura escondida y el pescador), es posible percibir la influencia que parece ejercer la instrucción recibida (en este caso parece haber sido “cerrada”) sobre la conducta metacognitiva de los estudiantes a la hora de resolver problemas:

NEREA: No lo sé, porque a mí siempre me lo dieron todo así. Esto es así, así y así. Y no fue de otra manera. Yo, con las matemáticas siempre me pasa lo mismo. Siempre las veo de una misma manera y no soy capaz de verlas de otra. Si lo veo

así, me es muy difícil, muy complicado de... darle la vuelta o hacerlo de otra forma. Por eso me sorprendió eso de decir. ¡Todas! [muchas figuras], [risas, con expresión de sorpresa].

NOA: *Sí. Ésto es lo que me equivocó. O sea, he considerado sólo una figura completa: círculo, triángulo, hexágono... y la primera cosa que miré era así... antes de leerlo también. Me pareció poder ver un rectángulo, uniendo el segmento éste con ésto. Y después he dicho: ¡no!, demasiado fácil.*

ROCIO: *Yo pensé en un círculo pero no, porque puede complicarse mucho.*

JUAN: *No es una solución de las que estamos acostumbrados a decir: ésta es la solución [única]. No puedes saber cuánto dinero se llevó a casa en la cartera.*

ROCIO: *Una solución terminada. Te tiene que dar esto y si no lo has hecho, todo mal. Y vuelta atrás.*

También parece converger en esta misma dirección el porcentaje de respuestas limitadas a formas geométricas básicas (sobre el 96% del total de la muestra para los estudiantes de ESO, para la figura escondida) y a razonamientos hipotéticos concretos (sobre el 85% el total de la muestra para los estudiantes de ESO, para el pescador). Todo ello nos lleva a considerar como hipótesis para futuras investigaciones (ya que no ha sido avalada en esta investigación) que una instrucción “cerrada” genera actitudes restrictivas de la autonomía personal.

Rescatando los resultados de la primera tabla de correlaciones, específicamente la correlación PHM/EEP con 0,814 de la expectativa del profesor, y relacionándolo con lo ahora expuesto, quizás se puede inferir que el profesor que planifica sin considerar explícitamente los aspectos metacognitivos cree que éstos están desarrollándose simultáneamente con los procesos cognitivos (PHM/EEP) adonde ellos dirigen sus esfuerzos. Lo que no deja de ser, en parte, cierto. Pero, pensando así, lo que se desarrolla es limitado. Tal como vimos con el resultado de las correlaciones PHM/EEP, PHM/CFM, PHM/CFC, la realidad de los resultados muestra que las habilidades metacognitivas se desarrollan de forma muy limitada. Entonces ¿no debería el profesor remodelar la planificación y ejecución de la instrucción, en aras de una decidida activación y desarrollo de dichas habilidades?

De ahí que volvamos a enfatizar que una instrucción que considere estos procesos como obvios pierde la oportunidad de un trabajo explícito y consciente de los mismos.

Tanto de modo general como en contextos específicos, los resultados de esta investigación nos mostraron que los estudiantes revelan carencias de actividades de monitoreo adecuadas para tomar una decisión acertada; las carencias de actividades

metacognitivas de monitoreo implican que prosigan con el mismo criterio selectivo erróneo hasta el final del proceso; no pretenden la generalización, debido a que no perciben la posible eficacia que en ella podrían encontrar; con frecuencia, hacen uso de acciones ingenuas no sujetándose a las restricciones de la tarea, incluso relegando el objetivo de la misma; no son capaces de abordar sistemáticamente, de forma efectiva, problemas no estándares incluso aquellos alumnos considerados de buen rendimiento académico; el nivel de satisfacción al seguir una estrategia que consideran correcta, les lleva al abandono de las condiciones del problema y les impide hacer uso de actividades de monitoreo que pudieran llevarles a otras formas de razonamiento; los errores que cometen se deben a falta o mal uso de conocimientos metacognitivos, o a falta de conocimientos cognitivos, o bien a ambos a la vez; normalmente toman como punto de partida aspectos parciales del enunciado de la tarea; hay ausencia de referentes metacognitivos para establecer conexiones entre contextos próximos, perdiendo el potencial inherente a los procesos de analogía.

Todavía, de todo el escenario de resultados aquí presentados, nos gustaría recabar la idea de que los mismos no son generalizables. Es decir, no es posible una generalización a partir de los casos analizados, dado que éstos fueron pocos y, así, podemos considerar que son válidos, apenas, para los alumnos estudiados. En este sentido, también podemos decir que las hipótesis confirmadas y las no confirmadas, se refieren a estos alumnos y a estas situaciones y, por tanto, una continuación de estos estudios, con nuevas clases, con otros estudiantes, podría hacer posible establecer cuales hipótesis efectivamente se confirmarían.

Atendiendo al plano didáctico, pensamos que los resultados de esta investigación nos han mostrado que si, por un lado, intentamos comprender mejor las prácticas de los estudiantes observándolas desde una doble perspectiva (cognitiva y metacognitiva), por otro observamos que estas mismas prácticas nos han facilitado condiciones para comprender mejor dichas perspectivas. Pensamos que en el trabajo de clase, el profesor, haciendo explícitas sus configuraciones metacognitivas en el contexto de resolución de problemas, estará promoviendo condiciones para que el estudiante sepa cómo estas funcionan, cuándo, cómo, porqué y dónde las utilizan. Estará ofreciendo oportunidades para que el estudiante observe las habilidades y reflexiones de su profesor, normalmente no percibidas por él. Lo mismo se puede decir en relación a la configuración epistémica. En definitiva, si se hacen explícitas las configuraciones de referencia (cognitiva y metacognitiva) deseadas en el proceso, el profesor estará, por una parte, ofreciendo al

alumno, además de lo dicho, medios para que él organice su propia configuración cognitiva y metacognitiva; por otra parte, estará creando condiciones para una mejor comprensión de las prácticas de sus alumnos. Es en todo este contexto que reforzamos nuestras sugerencias de que el planteamiento de las herramientas de análisis del EOS juntamente con las de la Metacognición en el trabajo de clase podría hacer más explícitos los tipos de objetos matemáticos y conductas metacognitivas puestas en juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Así que, las configuraciones que organizamos para alcanzar nuestros objetivos tienen consecuencias educativas que, pensamos, pueden ser importantes, en la medida en que pueden dotar al profesor de herramientas explícitas, flexibles y con intenciones orientativas, sin carácter tecnicista. Creemos que el trabajo en clase con la metacognición es una conquista diaria, que requiere sobre todo de práctica y tiempo, y que puede ser trabajada en el contexto de las diferentes tareas, contenidos y materias escolares que podrían ser vistos, en su conjunto, como elementos u objetos donde la metacognición debería actuar en un ambiente que favorezca, entre otras capacidades, las de evaluar conjeturas y construir argumentos que, en definitiva, promuevan el uso espontáneo y autónomo de los conocimientos.

Es con esa perspectiva que tiene sentido hablar de un reparto de responsabilidades entre los agentes sociales implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, rescatando algunas de las ideas que van en esta dirección, mencionadas en el trabajo, como por ejemplo, la propuesta de una Evaluación Formativa Alternativa (AFA) (Fernandes, 2005) en que presupone, en todo ese ambiente, un reparto de responsabilidades entre profesores y alumnos en materia de evaluación y de regulación de los aprendizajes. Interpretando a Cabral (1998) podemos decir que, en el proceso de aprendizaje conseguir que el alumno reconozca y, a partir de ahí, asuma la responsabilidad de sus propias acciones activas y discursivas sobre el saber institucionalizado, es algo que no ocurre gratuitamente, y, en ese sentido, pensamos en el importante papel que puede desempeñar la propuesta del AFA a la hora de asumirse dichas responsabilidades. Pero también, en ese contexto y volviendo a interpretar a Cabral, tiene sentido hablar del diálogo y volver a rescatar el aforismo “hablando se aprende, escuchando se enseña”. El proceso de enseñanza-aprendizaje debe buscar constantemente el diálogo, el habla del alumno. Es necesario estimular el habla (y por tanto, el diálogo) que le permite trascender a nuevos contextos y el acceso a procesos metacognitivos cada vez más avanzados y variados. La autonomía de ese proceso por parte

del alumno va a exigir toda una práctica de diálogos, de escuchar, de oportunidades, de participación conjunta y responsable de sus agentes.

Si, por un lado, esta investigación nos indica que tenemos que prestar atención a los conocimientos metacognitivos como un constructo relevante para comprender mejor las prácticas (escritas y orales) de los estudiantes cuando resuelven problemas, por otro, nos indica el gran protagonismo del sujeto que habla en el proceso de desarrollo (y activación) de dichos conocimientos y el del papel que desempeña el oyente. Observamos que el profesor tiene la gran función de motivar al alumno a hablar y tiene la posibilidad de ejercitar la escucha, pues es a través de este ejercicio que podrá tener acceso a lo que el alumno sabe y sólo después que el alumno hable (Cabral, 1998); y, quizás -interpretando a Brecha- enseñarlos a partir de su realidad (de la realidad de su habla) para intentar transformarla. Esta perspectiva del habla se hizo visible en la investigación, en la etapa de las discusiones promovidas en grupo, donde los sujetos hablantes se “hicieron” y “deshicieron” (en un proceso cíclico) a través de su habla (también, del lenguaje interno) y del habla de los demás. De ahí que considerar el habla como una poderosa fuente de diagnóstico, de información, cuando se pretenden buscar explicaciones a los problemas de comprensión y aprendizaje de las matemáticas, es dar la oportunidad de incorporar elementos que permitan, además, mirar otros aspectos del sujeto.

Aún en el plano educativo, rescatando lo señalado con las propuestas de los programas de intervención, destinados al desarrollo y aumento de la metacognición, se hace necesario que el espíritu de las actividades propuestas en estos programas sea compartido con el trabajo diario del profesor con sus alumnos, donde la actividad metacognitiva, normalmente, es despertada inconscientemente. En otras palabras, el desarrollo de la actividad metacognitiva debería estar conjugado con las actividades de contenidos convencionales. Hemos visto que la importancia de trabajar la metacognición explícitamente en clase, fue resaltada por muchos investigadores (e.g. Fernandes, 1988), señalando que los profesores contribuirían, entre otras cosas, a que sus alumnos mejoren la calidad de sus decisiones y tomen conciencia de su práctica matemática.

Entre las limitaciones del estudio consideramos que los resultados de carácter global, cuando se tiene en cuenta a los estudiantes de ESO bajo el análisis de las configuraciones cognitivas y metacognitivas, son limitados. Estos análisis se realizaron solo sobre los protocolos escritos de éstos, no siendo posible una mayor aproximación en términos de seguimiento de sus conductas (cognitivas y metacognitivas) dada las razones

explicitadas en el capítulo de metodología. Conseguimos hacer un mayor acercamiento a los estudiantes de Magisterio, sobre todo en el momento de discusión en grupo. Pero aún así, consideramos que dichos análisis todavía son limitados, toda vez que se pueden considerar otras variables que posiblemente afectaron al comportamiento del estudiante durante las actividades propuestas, como, por ejemplo, de orden afectivo. Consideramos también que la forma en que hemos actuado durante el proceso de recogida de datos, puede tener limitaciones o incluso provocar complicaciones al estudio, dado que no siempre actuamos como pretendíamos, interviniendo en el diálogo en momentos en los que quizás hubiera sido preferible dejarlos continuar, o haciendo preguntas que posiblemente modificaron (o desvirtuaron) sus argumentos.

Como implicaciones de orden personal, ya aludimos al principio (y aquí retomamos) la importancia que tiene este estudio para el propio desarrollo profesional de la investigadora, para mejorar su práctica educativa. La oportunidad de realizar este trabajo la consideramos como una experiencia única y gratificante, ampliando nuestros conocimientos sobre cognición y metacognición.

En definitiva, creemos haber construido respuestas para las cuestiones de la investigación y sus consecuentes hipótesis. Tuvimos la pretensión de intentar comprender las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP, mirándolas desde una doble perspectiva, el EOS y la Metacognición, planteando en este contexto una unidad mínima de análisis (básica y esencial), compuesta por los constructos configuración epistémica y cognitiva y configuración metacognitiva, sin descartar otras vertientes de análisis (como por ejemplo, motivacionales y culturales). En este sentido, creemos ser innovadora esta investigación que, por un lado, tiene el EOS, que hasta este estudio, no había utilizado sus constructos para analizar la práctica de los estudiantes en el proceso de RP y, por otro, la Metacognición, organizando algunos de sus constructos en configuraciones que, juntamente con las del EOS, nos han permitido comprender mejor dichas prácticas.

Para finalizar, si, por una parte, creemos haber obtenido respuestas para las cuestiones de investigación, por otra, no tenemos la seguridad de que éstas estén claras para cualquier lector, dado que, tras esta etapa que hemos recorrido, otras quedarán aún por recorrer, ya que no percibimos el trabajo como terminado, y nadie ve el mundo de la misma forma, bajo el mismo prisma. Así, las interpretaciones son intrínsecas a nuestra subjetividad. Pero quisiéramos poseer la capacidad metacognitiva para visualizar, en el sentido de Ítalo Calvino, otros paisajes, otras formas de interpretar más allá de estas

páginas.... Quisiéramos imaginar una clase en la que no existiera la concepción de que el trabajo con la metacognición comprometería el tiempo que debería ser dedicado a los contenidos de la materia que se está enseñando. Quisiéramos imaginar que dichos contenidos debieran ser modelados en función del desarrollo metacognitivo, y que el diseño de la materia y de las actividades debieran permitir, en primera instancia, dicho desarrollo. Y así quisiéramos imaginar que el problema del tiempo, o el compromiso con los contenidos cognitivos, no fueran excusa para desarrollar un trabajo en esa dirección. Pero, aún, quisiéramos imaginar un profesor promotor de inspiraciones y creatividad, que fuera, sobre todo, un formador de ciudadanos críticos y reflexivos y, así, una vez más, quisiéramos imaginar una práctica de “enseñanza liberadora” (en el sentido de Freire) que plasmara la autonomía del alumno en su aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

- APA Style Essentials and APA Style Sheet, (2004). American Psychological Association.
<http://www.vanguard.edu/faculty/ddegelman/index.cfm?doc_id=796>
- Arrieche, J.M.A. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. (Tesis Doctoral en Didáctica de las Matemáticas). Universidad de Granada. Granada.
- Aquino, J. G. (1997). O Mal-Estar Na Escola Contemporânea: Erro E Fracasso Em Questão. In: Aquino, J. G. (Org.). *Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas*. São Paulo: Summus, pp. 91-109.
- Bardin, L. (1979). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: edições 70.
- Beaud, M. (1990). *L'Art de la thèse: comment préparer et rédiger une thèse de doctorat, un mémoire de DEA ou de maîtrise ou tout autre travail universitaire*. Nouvelle éd. mise à jour. Paris: Editions La Découverte.
- Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In Weinert, F. y Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp.65-116). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- _____. (1978). Knowing when, where, and how to remember : a problem of metacognition. In R. Glaser (Ed.). *Advances in instructional psychology* (vol.1) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cabral, T. B. (1992). *Vicissitudes da aprendizagem em um curso de cálculo*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista –UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- _____. (1998). *Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: a lógica da intervenção nos processos de aprendizagem*. (Tese de doutorado). Universidade de São Paulo- USP. São Paulo.
- Cajaraville, J., Fernandez, T., Labraña, P., Salinas, M., De La Torre, H., Vidal, E. (2003a). *Avaliación do currículo de Matemáticas en 3º e 4º da ESO*. Investigación Educativa, (14). ICE. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

- Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A.; Gusmão, T.R.S. (2003b). Sistemas semióticos e comprensión das matemáticas. Aportacións ó debate. *Enciga Enseñantes de Ciencias de Galicia*. Cangas, A Coruña/España, v. 1, p. 63-70.
- Cajaraville, J. A.; Gusmão, T.R.S. (2004). Problemática didáctica da medida de magnitudes na formación de mestres de educación primaria. *Enciga Revista dos Enseñantes de Ciencias de Galicia*. Santiago de Compostela/España, v. 1, n. 54, p. 39-53.
- Calvino, Ítalo (1974). *Las Ciudades Invisibles*. Barcelona: Minotauro.
- _____. (2002). *Seis propostas para o próximo milénio*. 4ª ed. Tradução de José Colaço Barreiros. Lisboa: Teorema.
- Callejo, M. L, y Vila, A. (2003). Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 (2003).
- Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. (Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla). Sevilla, España.
- _____. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon, revista de la S.A.E.M. "Thales"*, nº 40, vol. 14(1), pp.15-26.
- Carrel, Gajdusek y Wise (2001). Metacognition and EFL/ESL reading. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.229-243). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Cerda, H. (2000). *Los elementos de la investigación*. Bogotá: El Buho.
- Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG*, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- _____. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG*, Université Joseph-Fourier, Grenoble.
- _____. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, n.1 pp. 73-112.
- _____. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3): 17-54.
- Chevallard, Y; Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre Enseñanza y Aprendizaje*. Barcelona. ICE – Horsori Editorial.

- Cobo B. M. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.
- Contreras, L.C. y Carrillo, J. (1997). La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo. *SUMA, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. nº 24, pp.21-25.
- Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2): 151–186.
- Crespo Allende N. M^a. (2000-2001). Metacognición, Metacomprensión y Educación. *Revista enfoques educacionales*, vol. 3, número 1. Universidad de Chile, de www.cpop.net/salalectura/0032.htm
- Crespo, F. (1993). *Metacognición y aprendizaje: influencia de los enfoques, conocimientos metacognitivos y práctica estratégica (como factores metacognitivos mediante los cuales el alumno regula sus procesos de aprendizaje) sobre el rendimiento académico, en alumnos de enseñanza secundaria obligatoria (12-16 años)*. (Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid). Editorial de la Universidad Complutense de Madrid. Madrid, España.
- Cury H. y Sampaio M. L. (200?). O Desafio de Substituir Letras por Números: que conteúdos e estratégias podem ser desenvolvidos?. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*. (aceptado).
- D'Ambrosio, B. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, 4 (1).
- D'Ambrosio, U. (1996). Um embasamento filosófico para as licenciaturas. Formação do educador: dever do Estado, tarefa da universidade. Organização: Ma. Aparecida Viggiani Bicudo, Celestino S. Júnior- São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista – (*seminários e debates*).
- D'Amore, B. (1997). *Problemas: pedagogía y psicología de matemática en la actividad de resolución de problemas*. Versión en Español: Francisco vecino Rubio. Madrid: Editorial Síntesis.
- Descartes, R. (1996). *Discurso do Método*. (Coleção Os Pensadores). São Paulo: Ed. Nova Cultural.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
- Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.

- Fernandes, D. (1988). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. Educação e Matemática N° 8, 4º trimestre de 1988. *Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa.
- _____. (1991). Resolução de Problemas e Avaliação. Comunicação convidada. *Actas do 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino*. Universidade de Aveiro. Aveiro-Portugal.
- _____. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In Brown, M., Fernandes D., Matos, J.F., y Ponte, J.P. *Educação Matemática*. Coleção Temas de Investigação. Instituto de Innovación Educacional. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Lisboa-Portugal.
- _____. (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas*. (1ª edição), Lisboa: Texto editores.
- Fernandes, D., Borralho, A y Amaro, G. (1994). Processos de Resolução de Problemas: revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. In Fernandes, D. Borralho A. y Amaro G. (Orgs). *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Instituto de Inovação Curricular. Lisboa, Portugal. Temas de investigação 2.
- Ferreira, A. (2003). *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo: Brasil.
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- _____. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 906-911.
- _____. (1981). Monitoring social cognitive enterprises: something else that may develop in the area of social cognition. In Flavell J. y Ross L. (Eds.), *Social cognitive development: frontiers and possible futures* (pp.272-287). New York: Cambridge university Press.
- _____. (1987). Speculation about the motive and development of metacognition. In Weinert, F. y Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp.21-29). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Flavell, J. y Wellman, H. (1977). Metamemory. In Kail y Hagan (Eds.). *Perspectives on the development of memory and cognition* (pp.3-33). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de matemática: a demonstração em geometria*. (Tese de Doutorado-Universidade de Aveiro). Aveiro: Portugal.

- Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix*, 18, pp. 33-36.
- _____. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, 338: 309-346.
- Freire, P. (1979). *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- _____. (1996). *Educação como prática da liberdade*. 22ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, (2/3): 237–284.
- _____. (2002b). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. *XVI Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica*. Castel San Pietro Terme (Bologna), 8-9. Novembre 2002.
- _____. (2002c). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29 p.9-19.
- _____. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Universidad de Granada. Documento publicado en Internet: [<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>].
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60: 3–36.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico para la Didáctica de las Matemáticas. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).
- Gonçalves, M^a. C. M. (1996). *A influência da Metacognição na aprendizagem: uma intervenção realizada na aula de matemática*. (Dissertação de Mestrado.

- Universidade Católica Portuguesa. Faculdade de Ciências Humanas). Lisboa, Portugal.
- González, F. (1993/1996). Acerca de la Metacognición. *Paradigma, XIV al XVII*, n.1, pp. 109 -135, jun.
- _____. (1998). Metacognición y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. *Zetetiké*, v.6, n. 9, p. 59-88, jan. / jun.
- _____. (1999). Procesos cognitivos y metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos. *Epsilon, SAEM Thales*, n° 43-44, 199-208.
- _____. (2003). Apuntes acerca de algunos Conceptos Básicos de Investigación Cualitativa. *Sapiens, Revista Universitaria de Investigación, Año 4, N° 1*; Junio de 2003. pp 107-132.
- _____. (2005). *Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas*. Cuadernos Educare. Cuaderno n° 5. Serie Roja, (2ª ed). Escuela de Educación. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela: Editorial Programa de Perfeccionamiento y actualización Docente (PPAD).
- Gourgey A. F. (2001). Metacognition in basic skills instruction. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.17-32). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Guzmán, M. (1995). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. 2ª edición. Madrid: Pirámide.
- Gusmão, T. R. S; Castro, J. A. (1997). Relação Aprendizagem de Matemática e o Estágio das Operações Formais: uma constatação necessária. In: *XIV ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DO PROEPRE*, 1997, São Paulo. XIV Encontro Nacional de Professores do PROEPRE, promovido pelo Laboratório de Psicologia Genética da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. p. 217.
- Gusmão, T. R. S. (2000a). *Razão e emoção na sala de aula de matemática*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista – UNESP, São Paulo, Brasil.
- Gusmão, T. R. S; Emerique, P. S. (2000b). Do Erro Construtivo ao Erro Epistemológico: um espaço para emoções. *Bolema*, Rio Claro - SP, v. 1, n. 14, p. 51-65.
- Gusmão, T.R.S; Cajaraville, J. A; Labraña, P. A. (2003). Competências metacognitivas e aprendizaxe das matemáticas. In: *XVI CONGRESO DO ENCIGA (ENSEÑANTES DE CIENCIAS DA GALICIA)*, Cangas/A Coruña. Enciga (Enseñantes de Ciências da Galicia). ENCIGA- ENSINANTES DE CIENCIAS DE GALICIA, v. 1, p. 55-61.
- _____. (2004a). Algunos matices de estrategias cognitivas-metacognitivas durante

- resolución de problemas con estudiantes de ESO. *Guia do XVII Congresso Enciga*, Santiago de Compostela/Espanha, v. 1, n. 56.
- _____. (2004b). Dificuldades estratégicas de alunos e professores em formação quando enfrentam problemas de medida de grandezas. *Veritati*, Salvador/Bahia/Brasil, v. 1, n. 4, p. 109-119.
- _____. (2005a). Percepciones e indagaciones en el reconocimiento de estrategias meta-cognitivas en el contexto de resolución de problemas. In: *V CIBEM: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, período 17-22 julho de 2005, Porto: Portugal.
- _____. (2005b). Metacognitive processes and mathematical competencies of junior high school students. In: *CONGRESSO EUROPEU DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2005, Barcelona/España.
- Hartman, Hope. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.33-68). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Hegedus, S. (1998). *A study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the Integral Calculus*. (Doctoral Thesis. University of Southampton). United Kingdom.
- Hoffmann. J. M. L. (1998). *Avaliação Mediadora: Uma Prática Em Construção Pré-Escola À Universidade*. 13ª edição. Porto Alegre: Educação & Realidade.
- Kilpatrick, J. (1996). Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. *Zetetiké*, Campinas, São Paulo, (Brasil), vol. 4, (5), 99-120.
- Klowe, R. (1987). Executive decisions and regulation of problem solving behavior. In Weinert, F. y Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp.31-64). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Labraña, A.B, Gusmão, T.R.S., Cajaraville, J. A. Al-Chabra: O regreso, ou de ecuacións e sistemas. Enciga (*Enseñantes de Ciencias da Galicia*) XVI congreso, novembro de 2003, p. 47-53, Cangas/A Coruña/España.
- Lafortune, Jacob y Hébert, (2003). *Pour guider la métacognition*. Collection éducation-intervention. Québec: Presses de l'université du Québec.
- Lester Jr. F. K. (1994a). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, n.6, pp. 660-675.
- _____. (1994b). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In Fernandes, D. Borralho A. y Amaro G. (Org). *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções de professores*

- e desenvolvimento curricular*. Instituto de Inovação Curricular. Lisboa: Temas de investigação 2.
- Lins, R. y Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, São Paulo: Papirus.
- LLinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En Chamorro, C. (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas*. Cap. 1. pp. 3-129. Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- Ludke, M. y André, M. E. (1986). *A Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Luna, S. V. (1998). *Planejamento de pesquisa: uma introdução*. São Paulo: EDUC.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1989). *Pensar Matemáticamente*. Barcelona: Centro de Publicaciones del MEC y Editorial Labor, S.A. Traducción: Mariano Martínez Pérez.
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Serie Psicología Cognitiva y Educación. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.
- Mayor, J., Suengas, A. y González, J. (1993). *Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar*. Madrid: Síntesis Psicología.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- _____. 1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA. The NCTM.
- _____. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA. USA. (Traducción castellana: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada).
- _____. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Edición electrónica: <http://standards.nctm.org/>
- Normas para publicações da UNESP*, (2003). Coordenadoria Geral de Biblioteca e Editora UNESP – São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista – (normas para publicação da UNESP), Brasil.
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París. (Traducción castellana: INECSE (2004). Marcos Teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid URL: <http://www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf>).
- Onuchic, L. R. y Allevato, N. S. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA,

- M. C. (Orgs.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2004. pp. 213-231.
- Pallascio, R. y Lafortune, L. (2000). *Pour un pensée réflexive en éducation*. In Pallascio, R. y Lafortune, L. (Eds.). Collection éducation-intervention. Québec: Presses de l'université du Québec.
- Pifarré, Manoli y Sanuy, Jaime. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto departamento de pedagogía y psicología. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.
- Plata, A. C. (1998). *A aprendizagem das matemáticas desde os modelos de mediação cognitiva: a prática avaliativa dos professores e as suas concepções sobre a área e o seu ensino como contexto de interação*. (Tese de Doutorado). Universidade de Santiago de Compostela – USC. Santiago de Compostela, España.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ª reimpresión). Serie matemáticas. (Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia). México: Editora Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la formación del profesorado. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. n.8, pp.83-90. Abril de 1996.
- Pressley M., Borkowski J. y O'Sullivan J. (1985). Children's metamemory and the teaching of memory strategies. In Forrest-Pressley, Mackinnon y Waller (Eds). *Metacognition, cognition, and human performance* (pp. 111-153). Vol.1, Theoretical Perspectives. London: Academia Press, Inc.
- Ramos, A.B.P. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales el caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales*. (Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica). Barcelona.
- Rodríguez, A. G. (2005). Flexibilidad del pensamiento y enseñanza de las matemáticas: revisión conceptual indispensable en educación básica. *EDUCAR*. Enero-Marzo 2005. Pp.9-14.
- Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving*. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.
- _____. (1985b). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. *La Enseñanza de la Matemática a Debate*. MEC, Madrid. pp. 25-30.
- _____. (1985c). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *La Enseñanza de la Matemática a Debate*. MEC, Madrid. pp. 31-65.
- _____. (1985d). *Mathematical problem solving*. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.

- _____. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.). *Handbook on research on mathematics teaching & learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Schraw G. (2001). Promoting general metacognitive awareness. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.3-16). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Serrano, L. R. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, December, 1976.
- Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Trillo, F. (1989). Metacognición y enseñanza. *Enseñanza, ICE*, 7, 107-118. Universidad de Salamanca.
- Trillo, F. et al. (1996). Evaluación de heurísticos y metacognición: una experiencia de innovación educativa en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, Santiago de Compostela 6, 89-96.
- Weinert, F. (1987). Introduction and Overview: metacognition and motivation as determinants of effective learning and understanding. In Weinert, F. y Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp.1-19). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Wellman H. (1985). The origins of metacognition. In Forrest-Pressley, Mackinnon y Waller (Eds). *Metacognition, cognition, and human performance* (pp.1-31). Vol.1, Theoretical Perspectives. London: Academia Press, Inc.
- Yussen S. (1985). The role of metacognition in contemporary theories of cognitive development. In Forrest-Pressley, Mackinnon y Waller (Eds). *Metacognition, cognition, and human performance* (pp.253-283). Vol.1, Theoretical Perspectives. London: Academia Press, Inc.
- Vianna, C. R. (2000). *Vidas e Circunstâncias na Educação Matemática*. (Tese de Doutorado – FEUSP). São Paulo.
- _____. (2002). Resolução de Problemas. In Futuro Congressos e Eventos (Org.). *Temas e educação I*, Jornadas 2002. pp.401-410.
- Viggiani, B. (1993). Pesquisa em educação matemática. *Pro-Posições*, Campinas, São Paulo (Brasil), vol. 4, nº1[10].

- Vilas, C. A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Barcelona.
- Vilas, C. A. y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

ANEXOS - A

PRUEBA DE HABILIDADES METACOGNITIVAS (PHM)

A cada cuestión de la PHM, siguen los criterios que propusimos para los alumnos de 3º de E.S.O. y que ofreceremos a los profesores como parámetros para sus predicciones.

Cuestionario principal

Para todos los problemas justifica las respuestas que das

1. Antiguamente las alcantarillas se cubrían con tapas rectangulares ; luego, a la vista de algunos inconvenientes, se cambió para tapas cuadradas ; aún se verían nuevos inconvenientes, por lo que se decidió hacer las tapas circulares . ¿De qué inconvenientes se trataba?

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

OBS. Para el profesor:

Comentario:

Se cambia la “forma”, por lo que la respuesta debiera referirse a ella en algún sentido, que no tendría por que ser necesariamente matemático. “¿Para qué es relevante la forma?”, es una formulación implícita de la cuestión. La respuesta puede darse por razones intrínsecas a la forma, por adecuación a determinados tipos de acciones, por evolución de las canalizaciones,...

Categorías de respuestas:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Evitar que se caiga por su propio hueco	Valor objetivo	9
B	Resistencia (las esquinas serían más frágiles), se gana estabilidad,...	Atribución de ventajas objetivas que presuponen una valoración.	7
B	Facilidad de manipulación de la propia tapa, accesibilidad (movimiento) al hueco interior,...	Atribución de objetividad a valoraciones sobre acciones (valor subjetivo implícito).	6
C	Estética	Valor subjetivo explícito.	5
D	Se adapta a las tuberías (pero no se percibe que puedan estar pensando en que antes fueran rectangulares o cuadradas, respectivamente, sin la que esta respuesta pierde solidez)	Adecuación a otro conocimiento	3
E	Facilita la entrada de agua, impide que se pierda por las esquinas,...	Errada, asociación empírica	2
F	Menor tamaño	Error ingenuo	2

2. Las definiciones de abajo están bien, pero una de ellas **no** caracteriza una técnica de pesca. ¿Cuál?

- a) arrastre: se echa la red al mar y se arrastra durante un tiempo.
- b) rasco: la red se echa al fondo, donde es movida por las corrientes.
- c) altura: es la pesca que se realiza lejos de la costa.
- d) palangre: es la pesca en la que se cubre una zona del mar con anzuelos.
- e) cerco: rodear una zona de pesca con una red.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

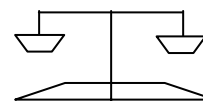
Comentario:

Se trata de mantener un criterio de enumeración (implícitamente de clasificación), de una misma categoría de información: en el apartado c) nos desvinculamos de las técnicas o formas de pescar para referirnos únicamente al lugar dónde se pesca.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	c) Indica lugar, no técnica	<i>Adopción de un criterio sustantivo.</i>	9
B	Discrimina uno de los casos, pero no según la condición enunciada (anzuelos, por ejemplo)	<i>Domínio de un elemento particular o circunstancial</i>	5
C	Eligen a menos conocida	<i>Frente a lo desconocido, dominio del sentido negativo general (partícula “no”) sobre el contenido particular de la frase</i>	3
D	Buscan una frase inconsistente en algún sentido, juzgan que una definición no es pertinente a lo que se define, el término definido es asociado a otros contextos,...	<i>Domínio del entorno de la tarea: contradicen el enunciado (“las definiciones están bien”)</i>	1
E		<i>Al azar</i>	0

3.- Tres bolitas son del mismo tamaño, color y forma; dos tienen el mismo “peso” y la otra es la más “ligera”. Usando una balanza con dos platos y efectuando **una única pesada**, ¿cómo es posible encontrar la bolita más “ligera”?



Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

OBS: (criterios ya tratados en los análisis)

4. Julia y Roberto partieron una bolla de pan. Julia comió **la mitad de la tercera parte** de la bolla y Roberto comió **la tercera parte de la mitad** de la bolla. ¿Quién comió más?

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

Analizar la posible conmutatividad de una situación, insinuada por el propio enunciado de la tarea.

Presenta dificultades de comprensión lectora, una especie de “trabalenguas”, pero permite responderse de forma gráfica (procedimiento familiar para representar situaciones de esta naturaleza), de una manera sencilla.

Cabe la respuesta genuinamente matemático-escolar, mediante el uso de fracciones, que puede ser algorítmica (fracción como operador) o constructiva (tengo la 3ª parte, cálculo la mitad;...).

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competências	Nota
A	Uso de fracciones simples, efectuando las operaciones (¿algorítmico / constructivo?) convenientes con ellas, y representación gráfica.	<i>Gráfico-cuantitativa (con corroboración)</i>	9
B	Uso de fracciones simples, efectuando las operaciones (¿algorítmico / constructivo?) convenientes con ellas.	<i>Cuantitativa</i>	8
C	Representación gráfica correcta, sin cuantificación.	<i>Gráfica</i>	7
D	Es igual, pero dicho de otra forma;...	<i>Acierto ingênuo</i>	2
E	Cálculos o gráficos inadecuados a la situación	<i>Imitativa</i>	1
F	Es más la mitad de la tercera parte que la tercera..., o a la inversa	<i>Error ingênuo</i>	0

5. Un pescador llevó el lunes al mercado 50 kilos de jurel. Durante la mañana, vendió el kilo a 3€, y, por la tarde, para vender todo, rebajó el precio a 2€. Si sabemos que vendió los 50 kilos, ¿Cuánto dinero sacó ese día?

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

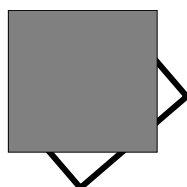
a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:
Se trata de detectar que la información disponible no es completa, y de tomar decisiones a partir de ahí.
Deberán buscar un resultado plausible.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Indica que faltan datos y acota superior e inferiormente	<i>Razonamiento hipotético generalizado.</i>	10
B	Indica que faltan datos y acota superior o inferiormente	<i>Razonamiento hipotético parcial.</i>	8
C	Indica que faltan datos y trabaja explícitamente con un supuesto	<i>Razonamiento hipotético concreto.</i>	6
D	Reparte, sin suposición, mitad a la mañana y mitad a la tarde	<i>Aceptación hipotética (resignada) de un término medio</i>	4
E	Indica que faltan datos y no continúa	<i>Detecta la insuficiencia</i>	3
F	Intenta construir una ecuación o un sistema	<i>Imitativa de un modelo (supervivencia escolar)</i>	2
G	Realiza cálculos con los números del enunciado, como si fuera necesario encajarlos, aún no consiguiendo que tengan sentido.	<i>Ingenuidad dependiente (supervivencia escolar)</i>	1

6. ¿Que figura está detrás del cuadro gris?



Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

La información coincide con experiencias familiares, pero es parcial, puede, pues, responder a diferentes situaciones, conocidas o no.

El contexto “matemático” puede limitar la amplitud de miras: el enunciado insinúa una solución poligonal.

Al preguntar por la figura y no por “figuras”, el resolutor puede admitir o no diferentes soluciones al problema.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Dibuja, indica o se refiere a cuadrados, rectángulos,..., figuras con algún contorno curvo, etc. e intenta agruparlas.	<i>Solución múltiple abierta; estructurante</i>	9
B	Dibuja, indica o se refiere a cuadrados, rectángulos,..., figuras con algún contorno curvo, etc.	<i>Solución múltiple abierta; enumerativa</i>	7
C	Dibuja, indica o se refiere a cuadrados, rectángulos,..., catalogándolos como de una determinada familia (polígonos)	<i>Solución múltiple cerrada; caracterizante</i>	6
D	Dibuja, indica o se refiere a cuadrado, rectángulo,...	<i>Solución múltiple cerrada; enumerativa</i>	4
E	Rectángulo y cuadrado	<i>Solución doble empirista.</i>	3

F	Rectángulo o cuadrado u, ocasionalmente, otra.	<i>Solución única</i>	1
---	--	-----------------------	---

7. Completa la secuencia de cálculos¹:

$$15 + 2 = 17 ; \quad 20 + 4 = 24 ; \quad 25 + 6 = 31 ; \quad \dots + \dots = \dots ; \quad \dots + \dots = \dots$$

a) Completa la secuencia anterior y justifica lo que realizaste.

b) Refuerza tu explicación con una nueva idea o suprímela del razonamiento anterior si te sobra.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

<p>Comentario:</p> <p>Se pretende que en una visión global se den cuenta de que en cada uno de los términos de la serie, el primer número aumenta en cinco unidades y el segundo en dos (o son la secuencia de números pares); y se obtiene el tercero como suma (explícita) de los anteriores, quedando determinado por ellos.</p> <p>En el refuerzo lo que esperamos es la búsqueda de una nueva idea que apoye la anterior: las sumas van de siete en siete; o, en el caso de tener ya incorporada esta idea, que la desglosen de la anterior.</p>

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Hace los dos razonamientos desglosados (percibe que el primer ya es suficiente).	<i>Condiciones suficientes y corroboración</i>	9
B	Hace un único razonamiento que contiene ya los dos anteriores, pero luego no desglosa.	<i>No dilucida el carácter de ser suficiente.</i>	7
C	Hace únicamente el primer razonamiento	<i>No corrobora</i>	5
D	No continúa adecuadamente alguna(s) de las series	<i>Error de seriación</i>	1

¹ Cuestión adaptada del modelo de Rômulo Lins y Joaquin Jiménez en su libro *Perspectivas en Aritmética e Álgebra para el Século XXI*, ed. Papyrus, 1997.

8. Una de las siguientes frases **no** puede ser correcta (contiene una contradicción interna).

¿Cuál es, y por qué?

- a) La población mundial aumenta una media de unos 100 millones anuales.
- b) Durante el siglo XX, en Europa y América descendió rápidamente la población ya que aumentó la mortalidad, por las grandes guerras mundiales.
- c) La población mundial crece continuamente: en 1995 era ya de unos 5.700 millones de personas, en 1996 de unos 5.500 millones de personas y, en 1997, de 5.800 millones de personas.
- d) Muchos de los avances sanitarios llegaron ya a muchos países pobres, aunque persisten en ellos grandes problemas de salud.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

Se trata de detectar informaciones contradictorias y diferenciar que no es lo mismo la “verdad” de lo que se afirma, que la consistencia lógica de la afirmación.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competências	Nota
A	Eligen la opción c)	<i>Detecta la contradicción intrínseca</i>	9
B	Compara las frases entre si	<i>No realiza la evaluación intrínseca</i>	5
C	Justifica otra opción	<i>Discute respecto de creencias previas válidas</i>	3
D	Rebate el contenido de alguna de las frases	<i>Discute respecto de creencias previas erradas</i>	1

9. Si voy en coche a 40 km/h a determinado lugar, tardo 20 minutos en llegar. ¿Cuánto tardaré en volver si regreso a 50 km/h?:

- a) 20 minutos b) 16 minutos c) 25 minutos d) 21'25 minutos

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

Hay una vía de respuesta basada en la simplicidad, avalada por la experiencia: si voy a más velocidad debo tardar menos tiempo.

Pueden hacer cálculos y, aún haciéndolos, la primera idea puede ser utilizada para evaluar estos.

Puede mezclarse este tipo de situación con aquellas de “relación causal”.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	A más velocidad menos tiempo, y realiza cálculos correctos	<i>Cualitativa e cuantitativa.</i>	9
B	A más velocidad menos tiempo, sin cálculos correctos	<i>Cualitativa</i>	8
C	Cálculos correctos: recordando las fórmulas de la velocidad (movimiento uniforme), estableciendo las proporciones (en este caso deben ser inversas).	<i>Cuantitativa</i>	7
D	Cálculos incorrectos: “regla de tres”,...	<i>Cuantitativa ingenua</i>	1

Cuestionario complementario

10. Una tarde, en el “chiringuito” de la playa, cuatro amigos toman varios helados del mismo tipo y varios zumos también iguales, cada uno de ellos lo que quiso de cada cosa.

Pagan todo junto y, para determinar el precio del helado (x) y el precio del zumo (z), cada uno de ellos escribe dos relaciones entre los precios:

Andrea escribe: a)	$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + 2z = 5 \end{cases}$	Bieito: c)	$\begin{cases} 2x + 2z = 6 \\ 4x + 4z = 12 \end{cases}$
Carol: b)	$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + 3z = 7 \end{cases}$	David: d)	$\begin{cases} 2x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 6 \end{cases}$

Comenta si cada una de las propuestas puede ser válida.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario: presentamos diferentes situaciones:

a) Contradicción no explícita (si un helado y un zumo cuestan 3, dos de cada deberán costar 6).

b) Compatible determinado (si no conoce los sistemas quizás se sienta desbordado).

c) Redundante: indeterminado (la información de la segunda ecuación no aporta nada nuevo).

d) Contradicción explícita (si algo es 5, no puede ser 6).

No se pretende indagar sobre los sistemas de ecuaciones (aunque aquellos alumnos que los conocen intentarían sistemáticamente resolver los sistemas), sino sobre el reconocimiento y valoración de contradicciones y redundancias.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Detectan las contradicciones, explícita/implícita, y la redundancia, que valoran negativamente, y se decanta por la opción b) por no apreciar inconvenientes en ella.	<i>Contrastación y relevancia de las informaciones.</i>	9

B	Detectan las contradicciones, explícita/implícita, y la redundancia, pero la valoran positivamente (coherencia).	<i>Contrastación de las informaciones: coherencia frente a relevancia.</i>	6
C	Se refieren solamente a la coherencia del caso c), que valoran positivamente, y de la cual los otros carecen.	<i>Excelencia de la coherencia.</i>	4
D	Interpretan los símbolos pero no confrontan las dos informaciones que cada personaje proporciona.	<i>Semántica</i>	2
E	Aceptan la c) porque está presente el número “4” y son cuatro los amigos.	<i>Ingenuidad dependiente</i>	0

11. Antiguamente las alcantarillas se cubrían con tapas rectangulares , pero en ocasiones se caían por el propio hueco.

- Explica como podía suceder esto.
- Explica de que forma deberían ser las tapas que evitasen la caída.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

Ahora se pretende hacer necesarias ideas matemáticas (no necesariamente formales) para dar una respuesta convincente, intentando eliminar del propio enunciado los elementos circunstanciales.

- La explicación sobre las tapas rectangulares parece sencilla de encontrar, pues el apoyo gráfico la facilita mucho y, además, es aquí explícito.

La propuesta “circular” como alternativa parece también fácil pues se apoyarían en la experiencia visual. La explicación es ya más exigente y puede darse o no en términos de “diámetro”.

Categorías:

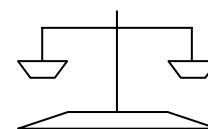
Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Circulares con alusión explícita al diámetro u otra formulación relevante.	<i>Abstracción, evaluación intrínseca correcta.</i>	9

B	Cuadradas (u otras formas) con explicaciones relevantes, aún que insuficientes.	<i>Abstracción, evaluación intrínseca errada.</i>	6
C	Circulares, (u otras formas, como triangulares) con explicaciones circunstanciales (más estables, más fáciles de manipular, se ajustan mejor,...)	<i>Evaluación extrínseca.</i>	4
D	Circulares, (u otras formas) sin explicaciones.	<i>Intuitiva/imitativa.</i>	3
E	La forma no es importante, sí lo es la colocación, la experiencia de quien manipula, las dilataciones por calor,...	<i>Empirista.</i>	2

13. Fíjate como pensó Rocío la forma de averiguar cual era la bolita más “ligera” efectuando una única pesada:

Cogió dos cualquiera de las bolitas y puso una en cada plato:

- Si una pesaba menos, esa sería la más ligera.
- Si pesaban lo mismo, la que quedó sin pesar sería la más ligera.



Ahora tienes **nueve** bolitas semejantes, también una de ellas más ligera que las otras.

¿Como podrías descubrir cuál es, **en dos pesadas**?

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

OBS: criterios ya tratados en los análisis

19. Si voy en bicicleta, a 12 km/h, a determinado lugar, tardo 20 minutos en llegar.

¿Cuánto tardaré en volver si regreso a 15 km/h?

- a) 16 minutos b) 18 minutos c) 20 minutos d) 25 minutos

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

- a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

Comentario:

Ahora, a diferencia del ítem correspondiente de la 1ª parte, sí es preciso realizar los cálculos, aunque el criterio simple permita discriminar entre los tiempos inferiores y los superiores.

Categorías:

Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	A más velocidad menos tiempo, y realiza cálculos correctos.	<i>Cualitativa y cuantitativa.</i>	9
B	A más velocidad menos tiempo, sin cálculos.	<i>Cualitativa</i>	7
C	Cálculos correctos: recordando las fórmulas de la velocidad (movimiento uniforme); estableciendo las proporciones (en este caso deben ser inversas).	<i>Cuantitativa</i>	6
D	Hay un cálculo erróneo que lleva a un tiempo superior. Se tacha y se elige un tiempo inferior.	<i>Dominio de la lógica sobre el cálculo.</i>	4
E	Hay un tiempo inferior tachado, un cálculo erróneo y un tiempo superior seleccionado.	<i>Dominio del cálculo sobre la lógica.</i>	3
F	Cálculos incorrectos: “regla de tres”,...	<i>Cuantitativa ingenua</i>	1

20. Si el lado de los cuadraditos mide 1, ¿cuál es el área de la figura?. Una vez que lo resuelvas, indica si tu respuesta es exacta o aproximada, y porqué.

a) 42

b) 25

c) 25'065

d) 24'065

e) 24

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de tener acertado esta cuestión.

a) muy seguro(a) b) bastante seguro(a) c) poco seguro(a) d) nada seguro(a)

<p>Comentario:</p> <p>Es una propuesta típica para hacer uso del pensamiento analítico: descomponer lo nuevo en algo más sencillo, ya conocido (rectángulos, triángulos, círculos,...).</p> <ul style="list-style-type: none"> - En ese caso, el uso de π puede ser rutinario o con consciencia de que está usando una aproximación. <p>Aún resultaría de interés una estimación directa por exhaustión y compensación, o indirecta, comparando con alguna otra figura más sencilla (construyendo otra aparentemente de área próxima).</p> <ul style="list-style-type: none"> - También aquí está presente la dicotomía exacto/aproximado.

Categorías:

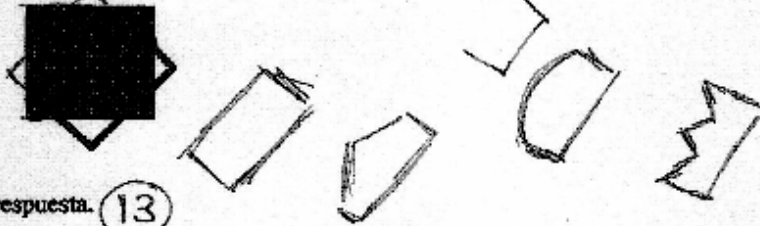
Tipo	Tipologías de Resolución	Competencias	Nota
A	Descompone en varias figuras básicas. Indica el carácter aproximado o elige un resultado decimal.	<i>Analítica estándar, con consciencia de la aproximación.</i>	9
B	Descompone en varias figuras básicas.	<i>Analítica estándar, sin consciencia de la aproximación.</i>	9
C	Descompone en franjas e indica que se trata de una aproximación.	<i>Analítica no estándar, con consciencia de la aproximación.</i>	7
D	Descompone en franjas.	<i>Analítica no estándar, sin consciencia de la aproximación.</i>	7
E	Cuenta cuadros enteros y reúne trozos de los otros.	<i>Exhaustión y compensación, con consciencia de la aproximación.</i>	6
E	Cuenta cuadros enteros y reúne trozos de los otros.	<i>Exhaustión y compensación, sin consciencia de la aproximación.</i>	6
F	La figura ocupa toda la zona, hay 42 cuadrados pequeños que miden 1,...	<i>Dominio de lo circunstancial.</i>	2

ANEXOS – B

ESCANERES DE LAS PRUEBAS DE LOS ESTUDIOS DE CASOS

(ROCIO)

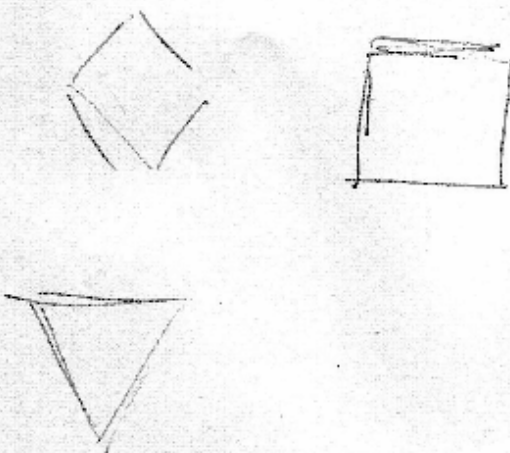
4. ¿Que figura puede estar detrás del cuadro gris?



Justifica tu respuesta. (13)

Puede haber cualquiera menos un cuadrado ya que se venía ~~los~~ las esquinas. Simplemente hay que considerar que un cuadrado tiene todos los lados iguales, así que tomándole la medida del visible se proyectan los lados y se comprueba que se ve. (17)
 La figura no tiene por qué ser conocida.

(18)



Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

- a) Muy seguro(a)
- b) Bastante seguro(a)
- c) Poco seguro(a)
- d) Nada seguro(a)

(ROCIO)

5- Un pescador llevó el lunes al mercado 50 kilos de sardinas. Durante la mañana, vendió el kilo a 3 € y por la tarde, para vender todo, rebajó el precio a 2 €. Si sabemos que vendió los 50 kilos, ¿Cuánto dinero pudo sacar ese día?

Justifica tu respuesta.

(21)

El dinero que ha conseguido va a depender de la cantidad de mercancía que vendiese por la mañana y cuanto por la tarde.

Si por la mañana vendió por ejemplo 30 k en todo el día ganó 120€⁽¹⁰⁾. Supongo que si rebajó el precio hay dos posibilidades: una que la cantidad de pescado que le quedó por la tarde era mucha y tenía prisa por vender con lo cual la ganancia sería la mínima; y dos que vendiese mucho por la mañana con lo cual le quedaba tan poco pescado que la pérdida era mínima y la ganancia máxima. Si le quedó poco por la tarde supongo que sería por lo menos 10 k porque sino no le compensa el viaje con lo cual el máximo beneficio desde esta perspectiva es 140€. Si por la mañana vendió poco supongo que sería más de 10 k porque sino ya habría rebajado el precio por la mañana así que pongamos 20 mínimo; la ganancia mínima sería entonces de 120€.

(10)

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.


a) Muy seguro(a) b) Bastante seguro(a) c) Poco seguro(a) d) Nada seguro(a)

(NOA)

4. ¿Que figura puede estar detrás del cuadro gris?

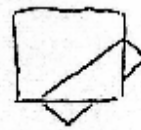


Justifica tu respuesta.

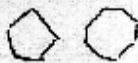
Antes de empezar a pensar, me parecía punto de poder imaginar (o imaginar?)
detrás del cuadro y de ver un rectángulo, mas o meno así 

Empieza a ~~pensar~~ pensar matemáticamente y
geométricamente, no tengo ni idea.

3

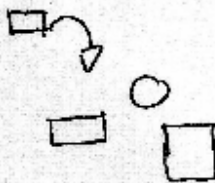


Voy excluyendo las figuras que no pueden estar; primero excluyo
el círculo porque no tiene angulos y lados. Puesto excluyo el
pentágono y tambien el hexágono porque no tienen dos angulos de 90° .



Puesto excluyo el triángulo y el trapecio.

No estoy segura pero creo de poder excluir tambien el cuadro porque
se podría ver ~~mas~~ una parte mas de la figura que está detrás.
Creo que se trata de un rectángulo pero me parece que me estoy olvidando
algo y que no estoy pensando en manera matemática ni geométrica.



h 18.59

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

- a) Muy seguro(a) b) Bastante seguro(a) c) Poco seguro(a) d) Nada seguro(a)

(NOA)

5- Un pescador llevó el lunes al mercado 50 kilos de sardinas. Durante la mañana, vendió el kilo a 3 € y por la tarde, para vender todo, rebajó el precio a 2 €. Si sabemos que vendió los 50 kilos, ¿Cuánto dinero pudo sacar ese día?

Justifica tu respuesta.

Suponendo que vendiera todo el día a 2 € el kilo, podría sacar 100 €.

Suponendo que vendiera todo el día a 3 € el kilo, podría sacar 150 €.

Así que lo que el pescador sacó en realidad, está comprendido (¿o compreso?)

entre 100 € y 150 € $\rightarrow 100 < ? < 150$

Ahora estoy un poquito más tranquila que antes de empezar porque, por lo menos, estoy segura que el pescador solo puede sacar un número de euros mayor de cien pero menor de 150. Pero en este mismo momento que estoy escribiendo otra vez me sale una duda: El problema no dice que el pescador ha vendido algo durante la mañana, así que el podría también sacar solo 100 € al final del día.

Ahora me parece que pueden estar 2 posibilidades: ① Sacar 100 €

② sacar $100 < x < 150$ donde se puede hacer una media (a lo mejor) entre 100 y 150 $\cdot \frac{100 + 150}{2} = \frac{250}{2} = 125 €$

y se puede decir que ~~se~~ sacó 125 € más o menos. Pero heo que están más posibilidades y no puedo decirlo con seguridad.

Se puede hacer también así:

$$\frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$2.5 \cdot 50 = 125$$

7

h 18.40



Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

a) Muy seguro(a)

b) Bastante seguro(a)

c) Poco seguro(a)

d) Nada seguro(a)

(NOA)

He aquí una relación de estados emocionales que pueden servir de parámetros para tus sentimientos durante la resolución de los problemas planteados:

1. el estado de nervios no me deja entender el enunciado del problema;
2. ese es un problema que desequilibra mi estado emocional;
3. no me gustan este tipo de problemas;
4. me siento bloqueado(a) en esta parte del problema;
5. me siento desesperado(a);
6. tengo prisa por terminar;
7. el problema despierta mi curiosidad y me estimula;
8. soy indiferente a los problemas, no siento nada;
9. me encontraba estimulado(a) al principio, pero ahora, en esta parte, ya no;
10. este problema me come el coco;
11. me encanta este tipo de problema;
12. estoy intranquilo(a);
13. estoy tranquilo(a);
14. estoy aburrido(a);
15. este problema me cansa;
16. es un problema complicado y me pierdo;
17. me hace ver como aplicar la matemática a un contexto real.
18. Miedo de no entender el problema por culpa del idioma diferente y de no conocer bastante el argumento tratado.
19. Ansia de acabar siempre por ultima.
20. Como veo algo que me recuerda la geometria, me pongo nerviosa asi que me pone miedo ver los dibujos del ~~es~~ rectangulo, cuadrado y circulo en este problema.

(NEREA)

4. ¿Que figura puede estar detrás del cuadro gris?



Justifica tu respuesta.

⑦

de primero que pense fue que que detrás del cuadrado había un rectángulo igual a la mitad del cuadrado.

Pero como hay una parte que no se ve nada, puede haber cualquier cosas, como por ejemplo:



También puede haber un ~~cuadrado~~ rectángulo que sea ~~la~~ más de la mitad del cuadrado.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

a) Muy seguro(a)

 b) Bastante seguro(a)

c) Poco seguro(a)

d) Nada seguro(a)

(NEREA)

5- Un pescador llevó el lunes al mercado 50 kilos de sardinas. Durante la mañana, vendió el kilo a 3 € y por la tarde, para vender todo, rebajó el precio a 2 €. Si sabemos que vendió los 50 kilos, ¿Cuánto dinero pudo sacar ese día?

Justifica tu respuesta.

⑬

Pudo sacar diferentes cantidades, porque no sabemos cuánto le quedó para la tarde. Suponemos que le quedó poco para la tarde (5 kilos) (porque si no, no le compensa volver para venderlo), sacaría un máximo de:

$$\begin{array}{l} 45 \times 3 = 135 \\ 5 \times 2 = 10 \end{array} \quad \left| \quad 135 + 10 = 145 \text{ €} \right.$$

Por otro lado, puede que por la mañana vendiera poco y por eso le sobrara para la tarde:

$$\text{p.ej: } \begin{array}{l} 45 \times 2 = 90 \\ 5 \times 3 = 15 \end{array} \quad \left| \quad 90 + 15 = 105 \text{ €} \right.$$

La verdad es que no sé cómo afrontar este problema, porque pudo sacar cantidades muy diferentes.

⑬

Lo no me gusta porque tiene la respuesta muy abierta; depende de muchos factores: del día de mercado, de la venta de la mañana ...

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

a) Muy seguro(a) b) Bastante seguro(a) c) Poco seguro(a) d) Nada seguro(a)

(NEREA)

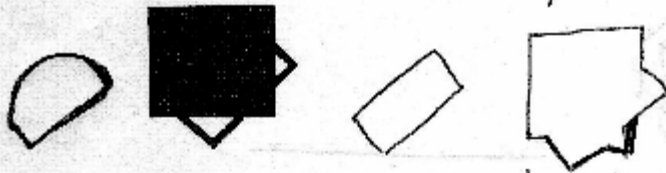
He aquí una relación de estados emocionales que pueden servir de parámetros para tus sentimientos durante la resolución de los problemas planteados:

1. el estado de nervios no me deja entender el enunciado del problema;
2. ese es un problema que desequilibra mi estado emocional;
3. no me gustan este tipo de problemas;
4. me siento bloqueado(a) en esta parte del problema;
5. me siento desesperado(a);
6. tengo prisa por terminar;
7. el problema despierta mi curiosidad y me estimula;
8. soy indiferente a los problemas, no siento nada;
9. me encontraba estimulado(a) al principio, pero ahora, en esta parte, ya no;
10. este problema me come el coco;
11. me encanta este tipo de problema;
12. estoy intranquilo(a);
13. estoy tranquilo(a);
14. estoy aburrido(a);
15. este problema me cansa;
16. es un problema complicado y me pierdo;
17. me hace ver como aplicar la matemática a un contexto real.

18. He hecho un lío.

(JUAN)

4. ¿Que figura puede estar detrás del cuadro gris? 7

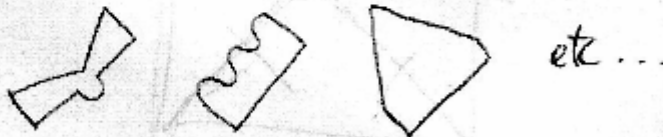


→ figura que ocuparía la mayor superficie sin salir fuera de la zona sombreada

Justifica tu respuesta.

decágono irregular

Lo primero que te viene a la mente es que detrás del cuadro hay un rectángulo pues es lo que te imaginas viendo lo que te muestran. Pero en realidad puede haber infinitas figuras; polígonos de 4, 5, 6 y más lados, la mayoría de las figuras que se pueden crear detrás del cuadro son irregulares, puede haber figuras circulares también; paralelogramos, etc...



Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

- a) Muy seguro(a) b) Bastante seguro(a) c) Poco seguro(a) d) Nada seguro(a)

(JUAN)

5- Un pescador llevó el lunes al mercado 50 kilos de sardinas. Durante la mañana, vendió el kilo a 3 € y por la tarde, para vender todo, rebajó el precio a 2 €. Si sabemos que vendió los 50 kilos, ¿Cuánto dinero pudo sacar ese día?

Justifica tu respuesta.

10 12 3

10 - 13 H 13 - 20 H

3 €/kg 2 €/kg

50
- ~~13~~ (35 kg)
47 kg 98 + 3 = 101 kg

3 x 1 = 3 € 49 L
x 2
98 €

$$3x + 2y = z$$

↓ ↓ ↓
kg mañana kg tarde dinero total

Vendiendo sólo 1 kg por la mañana y el resto por la tarde 101 € es lo que ^{saca} ~~gana~~

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 49 \\ \hline 27 \\ 12 \\ \hline 147 \end{array}$$

147 € por la mañana vendiendo 49 kg

$$1 \text{ kg} \times 2 \text{ €} = 2$$

149 € vendería en total si vendiera 49 kg por la mañana y 1 solo por la tarde

Si te dice que por la tarde, para vender todo bajó el precio a 2 € puede ser que no vendiera nada por la mañana, entonces sacarla $50 \times 2 = 100 \text{ €}$

En caso de que vendiera la mitad de kg por la mañana y la mitad por la tarde serían $25 \times 2 = 50$
 $25 \times 3 = 75$
125 €

Con los datos que se dan en el problema no se puede dar un dato exacto, hay múltiples variables y todas pueden ser correctas.

Ahora queremos que nos digas en qué medida estás seguro de haber acertado esta cuestión.

- a) Muy seguro(a) b) Bastante seguro(a) c) Poco seguro(a) d) Nada seguro(a)

(JUAN)

$$\begin{cases} 3x + 2y = z \\ x + y = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 50 - x \\ x = 50 - y \end{cases}$$

~~3x + 2y = z~~ $3x + 2(50 - x) = z$

$$3x + 100 - 2x = z$$

$$x - z = -100$$

$$x + 100 = z$$

\downarrow n° Kg mañana \downarrow dinero total

$$1 + 100 = 101$$

$$x = z - 100$$

$3(50 - y) + 2y = z$

$$150 - 3y + 2y = z$$

$$150 - y = z$$

$$150 = z + y$$

\downarrow dinero ganado \downarrow y tarde

$$y = 150 - z$$

He aquí una relación de estados emocionales que pueden servir de parámetros para tus sentimientos durante la resolución de los problemas planteados:

1. el estado de nervios no me deja entender el enunciado del problema;
2. ese es un problema que desequilibra mi estado emocional;
3. no me gustan este tipo de problemas;
4. me siento bloqueado(a) en esta parte del problema;
5. me siento desesperado(a);
6. tengo prisa por terminar;
7. el problema despierta mi curiosidad y me estimula;
8. soy indiferente a los problemas, no siento nada;
9. me encontraba estimulado(a) al principio, pero ahora, en esta parte, ya no;
10. este problema me come el coco;
11. me encanta este tipo de problema;
12. estoy intranquilo(a);
13. estoy tranquilo(a);
14. estoy aburrido(a);
15. este problema me cansa;
16. es un problema complicado y me pierdo;
17. me hace ver como aplicar la matemática a un contexto real.

ANEXOS – C

**BANCO DE DATOS
DE LA PRUEBA DE HABILIDADES METACOGNITIVAS**

La PHM fue aplicada en dos momentos. Entre las informaciones que siguen, en este primer bloque que llamamos variables generales, se encuentran el tiempo de realización de cada alumno y la media obtenida por cada uno.

VARIABLES GENERALES

estudiante	clase	tiempo1	tiempo2	EEP	CFC	CFM	media1	media2	PHM
1	A1	18	39	3,75	4,00	3,00	2,44	2,67	2,56
2	A1	18	40	6,25	5,50	6,00	4,11	4,33	4,22
3	A1	23	40	3,00	4,42	2,00	3,56	3,00	3,28
4	A1	30	45	7,00	,	,	5,89	5,50	5,69
5	A(dos)	23	18	4,00	4,75	3,00	3,00	2,83	2,92
6	A(dos)	24	30	3,00	4,67	3,00	4,11	2,67	3,39
7	A1	10	38	5,50	6,75	6,00	4,33	3,67	4,00
8	A1	22	35	2,50	3,50	2,00	2,78	3,00	2,89
9	A1	22	40	4,25	6,00	5,00	5,00	2,83	3,92
10	A1	23	38	5,00	5,58	3,00	3,89	3,33	3,61
11	A1	28	40	5,50	5,83	5,00	4,11	3,33	3,72
12	A1	27	40	6,75	8,00	7,00	5,44	2,83	4,14
13	A1	30	40	5,25	7,67	6,00	3,67	5,00	4,33
14	A1	32	25	2,50	5,75	5,00	3,44	5,17	4,31
15	A1	24	35	3,00	4,50	3,00	2,11	3,50	2,81
16	A(dos)	27	30	2,50	3,33	2,00	3,67	3,00	3,33
17	A1	32	30	4,50	4,83	3,00	5,44	5,00	5,22
18	A1	15	40	6,00	5,83	6,00	4,89	6,00	5,44
19	A(dos)	27	28	5,25	5,08	5,00	3,33	3,33	3,33
20	A(dos)	34	20	3,50	5,83	5,00	2,89	4,00	3,44
21	A1	20	33	2,50	5,00	2,00	2,67	3,83	3,25
22	A(dos)	20	16	4,00	3,92	2,00	3,33	2,50	2,92
23	A1	25	40	5,75	6,75	6,00	3,11	4,00	3,56
24	A(dos)	26	25	4,00	5,17	5,00	4,33	4,33	4,33
25	A1	35	50	5,75	6,00	6,00	5,44	4,50	4,97
26	D	34	50	4,30	4,60	6,00	2,11	3,50	2,81
27		24	46	4,60	5,40	6,00	4,89	3,50	4,19
28		39	50	2,80	4,40	2,00	1,44	3,17	2,31
29		40	65	4,60	7,00	6,00	2,78	3,83	3,31
30		35	49	4,60	7,20	6,00	1,78	2,67	2,22
31		34	58	4,30	5,60	7,00	5,33	4,67	5,00
32		30	47	4,00	5,20	5,00	3,22	2,17	2,69
33		28	45	4,00	5,00	3,00	5,78	4,33	5,06
34		28	55	,	,	,	3,22	5,00	4,11
35		25	39	6,10	9,00	10,00	3,56	2,33	2,94
36		23	40	3,00	4,80	2,00	3,11	2,67	2,89
37		19	35	2,00	2,60	1,00	5,33	5,83	5,58
38		40	63	,	,	,	1,89	2,33	2,11

39	B1	28	,	6,00	6,33	5,00	4,00	3,33	3,67
40		22	,	5,00	7,08	6,00	3,00	3,67	3,33
41		,	,	2,00	6,33	4,00	,	4,33	4,33
42		23	,	6,00	6,25	5,00	4,56	6,33	5,44
43		35	,	5,00	6,42	5,00	4,00	5,00	4,50
44		35	,	7,00	9,42	9,00	6,44	5,67	6,06
45		22	,	7,00	5,42	5,00	6,00	7,50	6,75
46		32	,	8,00	7,00	9,00	5,67	6,67	6,17
47		26	,	4,00	7,67	6,00	3,44	3,33	3,39
48		26	,	4,00	5,92	4,00	3,89	3,83	3,86
49		35	,	4,00	7,17	7,00	4,67	4,83	4,75
50		33	,	6,00	6,58	6,00	4,33	4,50	4,42
51		26	,	6,00	8,67	6,00	6,67	5,17	5,92
52		35	,	6,00	5,33	4,00	3,22	3,00	3,11
53		27	,	6,00	8,00	7,00	5,56	3,67	4,61
54		28	,	6,00	7,83	6,00	4,00	5,67	4,83
55		26	,	6,00	7,92	6,00	4,33	4,00	4,17
56		35	,	7,00	8,58	8,00	5,67	3,50	4,58
57		26	,	3,00	5,25	5,00	3,56	3,83	3,69
58		29	,	3,00	5,83	5,00	3,67	3,83	3,75
59	G	10	,	5,00	4,50	5,00	2,67	3,33	3,00
60		23	,	6,00	5,50	8,00	4,78	4,00	4,39
61		20	,	2,00	4,25	3,00	3,22	4,50	3,86
62		25	,	2,00	5,75	5,00	4,56	3,00	3,78
63		22	,	1,00	5,08	1,00	3,11	2,17	2,64
64		15	,	2,00	4,42	3,00	,78	,17	,47
65		20	,	2,00	5,92	5,00	1,67	2,67	2,17
66		20	,	2,00	5,00	5,00	1,33	2,33	1,83
67		18	,	1,00	2,42	,00	3,22	1,50	2,36
68		18	,	3,00	6,08	6,00	2,22	3,00	2,61
69		28	,	2,00	4,83	3,00	2,44	1,83	2,14
70		,	,	2,00	5,67	1,00	,	3,50	3,50
71	CI	,	31	4,00	4,58	3,00	5,44	4,67	5,06
72		,	42	7,00	7,83	8,00	4,00	4,50	4,25
73		,	,	6,00	5,92	5,00	3,89	5,67	4,78
74		,	40	10,00	9,75	10,00	8,89	10,00	9,44
75		,	,	8,00	9,33	10,00	6,00	,	6,00
76		,	,	9,00	8,83	9,00	3,11	,	3,11
77		,	45	8,00	8,08	9,00	5,33	7,17	6,25
78		,	45	6,00	5,08	6,00	4,00	6,33	5,17
79		,	40	7,00	6,50	7,00	4,56	6,50	5,53
80		,	,	9,00	8,58	9,00	3,11	,	3,11
81		,	36	7,00	7,25	8,00	2,89	3,83	3,36
82		,	42	5,00	4,92	5,00	2,00	3,67	2,83
83		,	26	7,00	4,92	6,00	3,33	6,17	4,75
84		,	40	6,00	6,17	6,00	4,56	5,50	5,03
85		,	29	5,00	4,75	6,00	1,67	2,67	2,17
86		,	25	6,00	6,25	6,00	3,00	3,17	3,08
87		,	29	5,00	7,25	6,00	5,33	5,00	5,17
88		,	40	8,00	6,50	6,00	5,11	7,17	6,14
89		,	43	9,00	8,00	9,00	3,67	7,83	5,75
90		,	,	5,00	5,50	6,00	2,78	,83	1,81
91		,	26	7,00	6,25	6,00	2,00	4,17	3,08
92		,	43	5,00	6,67	5,00	2,33	5,33	3,83
93		,	45	8,00	8,75	9,00	4,11	6,33	5,22
94		,	30	6,00	6,17	7,00	3,44	4,83	4,14
95		,	,	8,00	7,83	9,00	5,00	,	5,00

96		,	30	6,00	5,75	7,00	2,56	2,83	2,69
97		,	,	8,00	8,50	9,00	4,00	,	4,00
98		,	,	7,00	7,08	7,00	5,44	,	5,44
99		,	,	8,00	7,58	8,00	3,44	,	3,44
100		,	40	6,00	6,50	7,00	2,78	6,50	4,64
101		,	30	4,00	4,67	3,00	1,22	2,00	1,61
102		,	,	7,00	8,42	8,00	5,00	,	5,00
103		,	,	7,00	7,67	7,00	4,89	,	4,89
104	B(dos)	20	,	3,00	4,92	2,00	3,78	5,83	4,81
105		27	,	6,00	6,42	6,00	6,33	5,33	5,83
106		28	,	4,00	6,00	5,00	3,78	2,50	3,14
107		24	,	2,00	5,17	3,00	5,67	5,33	5,50
108		29	,	5,00	8,08	7,00	4,44	5,33	4,89
109		29	,	5,00	7,67	6,00	4,78	4,33	4,56
110		24	,	6,00	7,58	6,00	4,44	3,33	3,89
111		19	,	2,00	5,08	3,00	3,89	4,50	4,19
112		27	,	4,00	4,50	5,00	4,00	5,67	4,83
113		41	,	2,00	4,42	3,00	3,44	3,00	3,22
114		28	,	4,00	6,42	5,00	3,89	4,67	4,28
115		30	,	3,00	5,33	5,00	4,44	4,17	4,31
116		30	,	2,00	5,33	2,00	4,78	5,00	4,89
117		20	,	5,00	6,50	8,00	3,56	4,83	4,19
118		34	,	3,00	6,42	5,00	3,78	,	3,78
119		24	,	5,00	5,42	3,00	3,00	2,00	2,50
120		40	,	3,00	5,50	2,00	3,11	1,17	2,14
121		27	,	3,00	6,50	6,00	4,56	2,50	3,53
122		33	,	3,00	6,08	5,00	5,67	3,33	4,50
123		40	,	3,00	5,83	5,00	3,78	4,83	4,31
124		25	,	6,00	5,42	4,00	2,89	,	2,89
125	E	28	18	4,00	4,50	3,00	3,00	4,17	3,58
126		39	30	5,00	5,67	6,00	3,11	6,33	4,72
127		35	25	2,00	5,25	2,00	4,11	4,50	4,31
128		35	27	2,00	6,00	2,00	3,78	3,67	3,72
129		45	25	4,00	5,83	3,00	2,44	4,50	3,47
130		45	37	2,00	5,00	2,00	4,67	5,33	5,00
131		17	16	4,00	8,00	6,00	5,44	5,83	5,64
132		17	15	3,00	3,92	3,00	4,33	4,33	4,33
133		35	22	4,00	5,25	3,00	5,11	3,67	4,39
134		30	28	6,00	9,08	7,00	5,11	5,83	5,47
135		41	25	5,00	5,50	5,00	6,22	5,83	6,03
136		38	28	2,00	3,92	2,00	3,22	5,83	4,53
137		38	25	3,00	5,17	2,00	5,22	4,83	5,03
138		30	24	4,00	5,08	3,00	3,67	6,67	5,17
139		30	16	3,00	6,17	3,00	4,33	6,00	5,17
140		35	25	2,00	5,33	1,00	3,44	5,33	4,39
141		25	24	6,00	5,50	7,00	4,11	3,00	3,56
142		36	34	5,00	7,92	6,00	5,00	6,00	5,50
143		20	23	3,00	4,17	2,00	4,33	4,67	4,50
144		30	27	3,00	6,58	5,00	4,78	5,33	5,06
145		22	16	3,00	5,42	2,00	4,89	2,83	3,86
146		42	43	2,00	3,92	3,00	4,89	5,50	5,19
147		45	43	8,00	8,50	8,00	4,67	4,83	4,75
148		40	40	6,00	6,92	7,00	5,89	7,17	6,53
149		,	29	4,00	7,00	5,00	,	5,00	5,00
150		,	27	6,00	8,67	7,00	,	4,50	4,50
151	C(dos)	30	18	2,00	4,50	4,00	5,44	4,17	4,81
152		23	15	7,00	6,25	5,00	3,33	2,67	3,00

153		40	27	1,00	3,33	1,00	2,89	5,50	4,19
154		40	27	6,00	7,08	6,00	4,22	3,17	3,69
155		40	20	1,00	3,58	2,00	2,89	4,83	3,86
156		40	21	2,00	5,17	1,00	4,56	5,33	4,94
157		32	21	5,00	5,83	5,00	4,00	3,50	3,75
158		35	20	4,00	6,08	6,00	4,11	3,17	3,64
159		23	16	6,00	4,42	3,00	3,00	2,67	2,83
160		,	13	3,00	3,08	3,00	4,11	2,67	3,39
161		20	20	,	3,92	2,00	2,44	2,17	2,31
162		30	16	3,00	5,00	5,00	3,78	2,83	3,31
163		24	15	2,00	3,50	2,00	3,44	2,83	3,14
164		27	16	1,00	3,08	1,00	2,67	4,00	3,33
165		27	17	3,00	3,75	2,00	5,00	5,50	5,25
166		20	14	6,00	6,25	6,00	4,11	3,00	3,56
167		25	15	8,00	5,92	5,00	5,33	2,50	3,92
168		22	18	8,00	5,58	6,00	4,11	4,50	4,31
169		20	15	,	4,08	2,00	2,56	4,50	3,53
170		28	17	2,00	1,58	,00	3,44	4,00	3,72
171	F	50	,	4,00	5,50	5,63	4,44	,	4,44
172		,	,	5,00	6,75	6,88	6,67	,	6,67
173		40	,	6,00	6,75	5,25	4,67	,	4,67
174		50	,	6,00	7,75	5,88	5,22	,	5,22
175		30	,	2,00	6,25	3,75	4,56	,	4,56
176		30	,	3,00	4,50	3,50	5,22	,	5,22
177		60	,	8,00	6,25	7,38	4,78	,	4,78
178		30	,	6,00	6,00	5,88	5,11	,	5,11
179		45	,	4,00	5,50	4,50	3,78	,	3,78
180		60	,	3,00	5,00	3,88	6,78	,	6,78
181		60	,	7,00	5,75	7,13	4,78	,	4,78
182		65	,	8,00	6,00	6,13	4,22	,	4,22
183		30	,	8,00	7,00	7,25	6,89	,	6,89
184		60	,	6,00	5,00	4,38	4,67	,	4,67
185		70	,	4,00	5,50	4,63	1,44	,	1,44

En este según bloque presentamos la puntuación obtenida por cada estudiante en cada una de las cuestiones de la PHM.

CUESTIONES DE LA PHM

estudiante	alca	tipop	bol3	frac	pesc	figu	secu	pobl	prop	siste	alca2	bol9	bicic	area	sec2
1	0	2	1	3	1	1	5	1	8	0	2	1	8	0	5
2	0	2	7	6	0	1	5	8	8	0	2	6	8	2	8
3	6	0	3	0	3	1	7	4	8	2	5	6	0	1	4
4	7	3	8	7	3	1	8	9	7	3	3	8	6	6	7
5	2	2	1	3	1	1	2	8	7	0	5	0	6	5	1
6	2	1	8	2	3	8	5	1	7	0	4	2	0	5	5
7	6	9	6	3	3	2	1	1	8	0	3	9	0	5	5
8	2	3	9	0	3	1	7	0	0	0	2	5	1	3	7
9	6	3	9	9	4	1	5	0	8	3	3	3	0	3	5
10	3	3	10	0	5	1	5	0	8	0	2	1	7	3	7
11	2	3	2	0	1	5	8	8	8	0	2	0	6	5	7
12	7	9	2	3	3	1	7	9	8	0	3	0	8	0	6
13	6	2	6	3	3	1	0	2	10	4	6	0	8	6	6
14	7	4	4	3	4	3	5	1	0	0	8	4	5	7	7

15	2	1	4	0	1	1	1	1	8	0	5	0	4	6	6
16	2	3	1	7	0	1	6	6	7	0	4	2	2	5	5
17	0	3	8	8	5	1	5	10	9	3	6	6	5	5	5
18	2	4	8	1	7	1	7	8	6	8	6	4	6	5	7
19	7	3	1	2	3	1	5	1	7	0	5	0	6	5	4
20	2	1	1	0	5	1	7	8	1	2	4	2	6	5	5
21	6	2	1	2	1	1	2	1	8	2	4	3	6	6	2
22	2	3	3	1	5	1	6	8	1	0	1	5	0	2	7
23	2	3	1	2	3	1	7	1	8	0	2	3	6	6	7
24	7	1	1	0	6	1	7	8	8	0	5	6	4	6	5
25	2	10	8	7	3	6	8	5	0	4	6	10	0	0	7
26	4	1	2	0	1	3	6	2	0	0	5	1	4	5	6
27	6	1	7	3	3	1	6	9	8	0	8	2	5	0	6
28	1	0	1	3	1	1	5	1	0	0	2	1	6	5	5
29	6	3	0	0	0	1	6	9	0	0	5	6	0	6	6
30	1	3	1	0	1	1	6	3	0	0	5	5	0	0	6
31	6	6	4	3	3	1	8	9	8	0	5	5	5	5	8
32	6	3	7	0	1	1	1	2	8	0	6	2	4	0	1
33	6	5	1	10	6	1	6	9	8	0	8	5	5	2	6
34	1	3	1	2	6	1	6	2	7	8	4	1	6	5	6
35	1	1	2	6	5	1	6	3	7	0	3	1	1	3	6
36	6	5	2	0	2	1	1	3	8	0	5	6	4	0	1
37	6	5	5	4	3	1	7	9	8	7	3	8	5	5	7
38	1	3	5	0	0	1	5	1	1	0	2	1	1	5	5
39	7	3	0	4	6	1	7	0	8	0	4	1	4	6	5
40	6	3	1	1	0	1	7	0	8	0	5	5	1	6	5
41	0	5	6	4	6	5
42	6	3	4	8	3	1	7	9	0	4	9	7	6	6	6
43	2	6	3	7	0	1	7	1	9	0	7	7	5	6	5
44	9	1	10	8	3	3	7	9	8	0	8	9	5	5	7
45	3	9	8	7	3	1	7	8	8	6	8	10	8	6	7
46	3	5	8	4	6	1	8	9	7	2	8	10	6	7	7
47	3	3	2	9	3	3	0	8	0	0	6	1	0	6	7
48	2	3	3	7	3	1	7	0	9	0	5	2	6	5	5
49	6	1	4	7	2	1	5	8	8	0	9	4	6	3	7
50	0	9	1	0	3	4	5	9	8	0	8	5	8	5	1
51	7	5	8	10	3	1	8	9	9	9	5	1	9	0	7
52	3	6	1	2	7	1	8	1	0	0	9	0	4	0	5
53	7	3	9	0	2	6	7	8	8	0	4	5	6	0	7
54	7	2	1	2	3	6	6	8	1	0	8	5	8	6	7
55	2	1	8	3	3	6	7	1	8	2	8	0	1	6	7
56	7	1	8	7	3	1	7	8	9	0	7	2	0	5	7
57	1	4	9	0	3	1	5	1	8	0	3	5	4	6	5
58	7	1	2	3	3	1	7	1	8	0	8	0	4	6	5
59	2	1	8	0	3	1	1	0	8	0	3	2	7	3	5
60	6	10	7	6	3	1	8	1	1	0	0	10	0	9	5
61	6	4	2	0	0	1	7	1	8	0	3	6	5	6	7
62	2	10	0	2	1	5	5	8	8	1	5	2	0	5	5
63	2	1	1	3	4	1	7	1	8	0	2	5	0	5	1
64	0	3	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
65	0	2	1	2	0	1	7	1	1	0	3	0	6	5	2
66	0	2	1	3	0	1	5	0	0	0	3	2	4	0	5
67	6	3	0	3	3	1	5	0	8	0	2	0	6	0	1
68	0	1	0	3	3	1	2	9	1	4	3	1	1	2	7
69	0	4	0	0	1	1	7	8	1	0	3	0	0	3	5
70	2	2	7	4	6	0
71	6	2	8	7	3	5	8	9	1	2	3	2	8	5	8
72	2	0	8	8	5	2	5	6	0	5	1	2	8	6	5
73	6	0	9	0	7	4	8	0	1	0	2	7	8	9	8
74	10	6	9	9	9	10	10	9	8	10	10	10	10	10	10
75	7	0	9	7	3	4	8	9	7	0	0	0	0	0	0
76	0	0	9	8	0	1	8	1	1	0	0	0	0	0	0
77	3	0	9	8	3	1	8	9	7	7	3	6	10	9	8

78	2	0	8	4	5	1	8	8	0	6	2	5	8	9	8
79	8	0	8	7	8	1	8	0	1	5	7	5	8	6	8
80	0	0	8	8	0	1	4	0	7	0	0	0	0	0	0
81	0	0	2	8	0	1	8	0	7	0	3	5	1	6	8
82	0	0	0	3	6	1	1	0	7	0	2	5	6	8	1
83	8	0	1	8	3	1	8	1	0	4	7	5	8	5	8
84	6	0	8	3	6	1	8	9	0	6	4	0	8	7	8
85	4	0	4	0	0	1	5	0	1	2	3	5	1	0	5
86	6	0	9	8	1	1	1	0	1	4	3	5	1	5	1
87	7	0	0	9	5	4	8	8	7	3	7	6	1	5	8
88	1	0	9	8	0	4	8	9	7	7	4	7	7	10	8
89	0	0	9	8	0	1	8	0	7	7	5	7	10	10	8
90	7	0	9	3	0	1	5	0	0	0	0	0	0	0	5
91	7	0	0	3	0	4	4	0	0	7	2	1	6	5	4
92	7	0	0	0	0	1	7	6	0	4	6	1	6	8	7
93	6	0	8	7	8	1	7	0	0	3	3	6	10	9	7
94	8	0	9	0	3	4	7	0	0	3	5	7	1	6	7
95	7	0	9	9	3	1	8	8	0	0	0	0	0	0	0
96	0	0	8	8	3	1	1	1	1	4	2	3	1	6	1
97	6	0	0	8	6	1	8	0	7	0	0	0	0	0	0
98	3	0	9	8	7	4	8	9	1	0	0	0	0	0	0
99	0	0	9	0	3	1	8	9	1	0	0	0	0	0	0
100	3	0	0	8	3	3	8	0	0	6	3	2	10	10	8
101	7	0	3	0	0	1	0	0	0	0	4	7	1	0	0
102	1	0	9	8	3	1	7	9	7	0	0	0	0	0	0
103	7	0	0	8	5	3	5	9	7	0	0	0	0	0	0
104	3	3	4	1	6	1	8	8	0	3	7	6	5	7	7
105	7	8	8	3	6	1	8	8	8	3	7	5	5	6	6
106	7	4	0	2	3	1	2	8	7	0	5	0	0	5	5
107	6	1	8	7	5	1	8	8	7	0	4	10	4	7	7
108	2	4	8	10	2	5	7	1	1	5	4	9	2	7	5
109	2	10	8	7	3	1	5	6	1	2	6	5	3	5	5
110	2	10	1	2	3	1	5	8	8	0	4	1	4	6	5
111	4	3	1	0	2	1	8	8	8	0	6	4	4	6	7
112	6	3	1	3	5	1	8	1	8	2	8	5	8	6	5
113	2	1	4	0	1	1	5	9	8	2	5	1	0	5	5
114	7	5	1	2	3	1	8	8	0	4	5	1	6	5	7
115	7	4	8	2	5	1	4	1	8	0	5	2	8	5	5
116	2	1	8	2	5	1	8	8	8	2	6	5	4	6	7
117	2	3	2	0	6	1	8	8	2	3	3	5	6	5	7
118	0	3	8	3	3	1	8	0	8	0	3	0	4	0	.
119	2	3	1	4	1	1	6	1	8	2	5	0	4	0	1
120	9	0	0	4	1	1	4	9	0	0	5	0	1	0	1
121	6	4	1	0	6	1	7	8	8	0	3	2	4	1	5
122	6	4	4	3	8	1	8	9	8	0	4	6	4	1	5
123	7	0	5	3	2	1	7	1	8	0	5	8	4	7	5
124	2	1	8	2	6	1	4	1	1	0	0	0	.	.	.
125	2	3	1	0	4	1	7	8	1	1	2	1	8	6	7
126	6	3	1	0	5	1	6	4	2	5	8	6	6	6	7
127	3	5	3	9	0	1	7	1	8	0	2	5	10	2	8
128	7	2	1	2	5	1	7	1	8	0	5	1	4	6	6
129	0	1	0	0	5	1	7	0	8	0	3	3	8	6	7
130	0	4	8	0	3	1	8	9	9	2	2	9	6	6	7
131	7	3	9	2	3	1	7	9	8	5	8	8	4	3	7
132	6	1	1	6	3	1	5	8	8	6	2	2	4	5	7
133	2	9	3	0	6	1	8	9	8	0	2	5	6	2	7
134	7	5	5	3	7	3	5	3	8	8	5	4	6	7	5
135	6	5	9	3	6	6	8	6	7	0	3	8	8	9	7
136	2	3	2	3	3	1	7	0	8	2	2	7	10	6	8
137	7	6	4	0	6	1	6	9	8	1	9	6	6	1	6
138	1	1	2	8	3	1	8	1	8	5	10	6	6	6	7
139	2	5	0	2	5	5	8	4	8	9	9	2	2	7	7
140	3	1	1	7	5	1	5	8	0	8	5	4	4	6	5

141	6	1	1	8	6	1	5	1	8	1	2	0	4	6	5
142	7	1	2	2	6	3	7	9	8	0	8	8	6	6	8
143	2	5	1	0	3	4	7	9	8	1	1	10	8	3	5
144	8	4	9	0	5	1	7	1	8	2	2	6	10	7	5
145	2	5	8	0	3	5	5	9	7	1	2	6	1	2	5
146	6	0	8	7	3	3	1	8	8	2	5	7	8	6	5
147	6	4	8	2	3	4	6	8	1	3	6	10	1	2	7
148	7	1	5	7	3	6	7	9	8	4	8	9	8	6	8
149	4	4	4	10	1	7
150	2	3	1	7	7	7
151	7	1	8	7	3	1	5	9	8	0	2	9	1	6	7
152	5	3	1	0	3	1	7	9	1	0	2	1	7	6	0
153	2	3	2	0	3	1	5	2	8	3	5	8	4	6	7
154	6	0	10	0	0	6	8	0	8	0	4	2	1	5	7
155	2	0	2	3	1	4	6	8	0	2	3	8	4	6	6
156	6	0	9	7	3	1	7	0	8	6	2	6	8	5	5
157	6	4	4	7	5	3	6	0	1	0	2	5	1	8	5
158	8	1	0	4	3	5	5	2	9	0	5	0	1	6	7
159	2	4	1	0	1	1	1	9	8	0	5	5	1	1	4
160	6	3	1	0	3	1	7	8	8	0	3	2	4	0	7
161	0	3	3	3	5	3	5	0	0	0	2	5	0	1	5
162	6	1	2	3	5	1	7	1	8	0	3	3	4	2	5
163	6	4	3	0	3	1	5	1	8	2	3	0	6	1	5
164	2	3	1	0	1	3	5	8	1	2	7	4	4	2	5
165	8	3	8	9	7	1	7	2	0	3	5	10	8	2	5
166	6	1	3	3	3	1	4	8	8	2	5	6	1	2	2
167	7	4	2	7	7	5	7	1	8	0	5	1	7	2	0
168	1	3	9	0	3	1	4	8	8	2	5	5	4	6	5
169	2	1	1	1	1	1	0	8	8	2	7	1	6	6	5
170	6	3	1	0	6	1	5	1	8	5	4	1	6	6	2
171	2	1	3	2	5	4	6	9	8	.	.	.	4	4	.
172	8	3	8	3	6	8	7	8	9	.	.	.	6	6	.
173	8	3	8	0	5	1	8	0	9	.	.	.	4	8	.
174	2	10	9	2	5	1	8	1	9	.	.	.	4	2	.
175	2	5	3	3	3	1	8	8	8	.	.	.	9	1	.
176	3	10	8	3	3	1	8	10	1	.	.	.	8	2	.
177	3	3	9	2	1	6	8	10	1	.	.	.	1	3	.
178	7	10	2	2	6	1	8	9	1	.	.	.	1	8	.
179	7	1	9	0	5	1	8	1	2	.	.	.	1	6	.
180	8	5	8	8	3	5	6	9	9	.	.	.	6	7	.
181	2	9	9	0	2	4	8	1	8	.	.	.	4	5	.
182	3	10	2	3	5	1	6	8	0	6	.
183	7	10	8	8	6	6	6	10	1	.	.	.	1	6	.
184	4	10	0	3	1	1	6	9	8	.	.	.	8	7	.
185	0	1	0	2	2	1	6	0	1	.	.	.	1	5	.

ANEXOS – D

ESTUDIOS EN EL SPSS

Correlaciones

		PHM	EEP	CFC	CFM
PHM	Correlación de Pearson	1	,346**	,368**	,326**
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,000
	N	185	181	182	182
EEP	Correlación de Pearson	,346**	1	,681**	,814**
	Sig. (bilateral)	,000	,	,000	,000
	N	181	181	180	180
CFC	Correlación de Pearson	,368**	,681**	1	,818**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,000
	N	182	180	182	182
CFM	Correlación de Pearson	,326**	,814**	,818**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,
	N	182	180	182	182

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE A1

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,777**	,911**	,712**
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,001
	N	17	16	16	17
CFC	Correlación de Pearson	,777**	1	,851**	,473
	Sig. (bilateral)	,000	,	,000	,064
	N	16	16	16	16
CFM	Correlación de Pearson	,911**	,851**	1	,574*
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,020
	N	16	16	16	16
PHM	Correlación de Pearson	,712**	,473	,574*	1
	Sig. (bilateral)	,001	,064	,020	,
	N	17	16	16	17

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE A2

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,142	,271	-,293
	Sig. (bilateral)	,	,738	,516	,481
	N	8	8	8	8
CFC	Correlación de Pearson	,142	1	,906**	,540
	Sig. (bilateral)	,738	,	,002	,167
	N	8	8	8	8
CFM	Correlación de Pearson	,271	,906**	1	,678
	Sig. (bilateral)	,516	,002	,	,065
	N	8	8	8	8
PHM	Correlación de Pearson	-,293	,540	,678	1
	Sig. (bilateral)	,481	,167	,065	,
	N	8	8	8	8

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE B1

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,401	,583**	,573**
	Sig. (bilateral)	,	,080	,007	,008
	N	20	20	20	20
CFC	Correlación de Pearson	,401	1	,740**	,314
	Sig. (bilateral)	,080	,	,000	,178
	N	20	20	20	20
CFM	Correlación de Pearson	,583**	,740**	1	,478*
	Sig. (bilateral)	,007	,000	,	,033
	N	20	20	20	20
PHM	Correlación de Pearson	,573**	,314	,478*	1
	Sig. (bilateral)	,008	,178	,033	,
	N	20	20	20	20

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE B2

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,568**	,578**	-,042
	Sig. (bilateral)	,	,007	,006	,856
	N	21	21	21	21
CFC	Correlación de Pearson	,568**	1	,724**	,145
	Sig. (bilateral)	,007	,	,000	,531
	N	21	21	21	21
CFM	Correlación de Pearson	,578**	,724**	1	,247
	Sig. (bilateral)	,006	,000	,	,281
	N	21	21	21	21
PHM	Correlación de Pearson	-,042	,145	,247	1
	Sig. (bilateral)	,856	,531	,281	,
	N	21	21	21	21

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE C1

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,824**	,876**	,514**
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,002
	N	33	33	33	33
CFC	Correlación de Pearson	,824**	1	,887**	,492**
	Sig. (bilateral)	,000	,	,000	,004
	N	33	33	33	33
CFM	Correlación de Pearson	,876**	,887**	1	,415*
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,016
	N	33	33	33	33
PHM	Correlación de Pearson	,514**	,492**	,415*	1
	Sig. (bilateral)	,002	,004	,016	,
	N	33	33	33	33

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE C2

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,728**	,764**	-,214
	Sig. (bilateral)	,	,001	,000	,393
	N	18	18	18	18
CFC	Correlación de Pearson	,728**	1	,868**	,029
	Sig. (bilateral)	,001	,	,000	,904
	N	18	20	20	20
CFM	Correlación de Pearson	,764**	,868**	1	-,070
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,768
	N	18	20	20	20
PHM	Correlación de Pearson	-,214	,029	-,070	1
	Sig. (bilateral)	,393	,904	,768	,
	N	18	20	20	20

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE D

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,901**	,950**	-,267
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,427
	N	11	11	11	11
CFC	Correlación de Pearson	,901**	1	,841**	-,421
	Sig. (bilateral)	,000	,	,001	,197
	N	11	11	11	11
CFM	Correlación de Pearson	,950**	,841**	1	-,226
	Sig. (bilateral)	,000	,001	,	,503
	N	11	11	11	11
PHM	Correlación de Pearson	-,267	-,421	-,226	1
	Sig. (bilateral)	,427	,197	,503	,
	N	11	11	11	13

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE E

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,679**	,899**	,240
	Sig. (bilateral)	,	,000	,000	,237
	N	26	26	26	26
CFC	Correlación de Pearson	,679**	1	,763**	,355
	Sig. (bilateral)	,000	,	,000	,075
	N	26	26	26	26
CFM	Correlación de Pearson	,899**	,763**	1	,394*
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,	,046
	N	26	26	26	26
PHM	Correlación de Pearson	,240	,355	,394*	1
	Sig. (bilateral)	,237	,075	,046	,
	N	26	26	26	26

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE F

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,454	,823**	,141
	Sig. (bilateral)	,	,089	,000	,616
	N	15	15	15	15
CFC	Correlación de Pearson	,454	1	,594*	,248
	Sig. (bilateral)	,089	,	,019	,372
	N	15	15	15	15
CFM	Correlación de Pearson	,823**	,594*	1	,265
	Sig. (bilateral)	,000	,019	,	,340
	N	15	15	15	15
PHM	Correlación de Pearson	,141	,248	,265	1
	Sig. (bilateral)	,616	,372	,340	,
	N	15	15	15	15

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* . La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE G

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,262	,760**	,440
	Sig. (bilateral)	,	,410	,004	,152
	N	12	12	12	12
CFC	Correlación de Pearson	,262	1	,571	,243
	Sig. (bilateral)	,410	,	,053	,447
	N	12	12	12	12
CFM	Correlación de Pearson	,760**	,571	1	,270
	Sig. (bilateral)	,004	,053	,	,396
	N	12	12	12	12
PHM	Correlación de Pearson	,440	,243	,270	1
	Sig. (bilateral)	,152	,447	,396	,
	N	12	12	12	12

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE A2 (menos casos que perturban)

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,447	,580	,048
	Sig. (bilateral)	,	,374	,227	,928
	N	6	6	6	6
CFC	Correlación de Pearson	,447	1	,914*	,443
	Sig. (bilateral)	,374	,	,011	,379
	N	6	6	6	6
CFM	Correlación de Pearson	,580	,914*	1	,607
	Sig. (bilateral)	,227	,011	,	,201
	N	6	6	6	6
PHM	Correlación de Pearson	,048	,443	,607	1
	Sig. (bilateral)	,928	,379	,201	,
	N	6	6	6	6

* . La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

CLASE B1 (menos casos que perturban)

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,471	,617*	,772**
	Sig. (bilateral)	,	,065	,011	,000
	N	16	16	16	16
CFC	Correlación de Pearson	,471	1	,703**	,205
	Sig. (bilateral)	,065	,	,002	,446
	N	16	16	16	16
CFM	Correlación de Pearson	,617*	,703**	1	,407
	Sig. (bilateral)	,011	,002	,	,118
	N	16	16	16	16
PHM	Correlación de Pearson	,772**	,205	,407	1
	Sig. (bilateral)	,000	,446	,118	,
	N	16	16	16	16

*. La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE B2 (menos casos que perturban)

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,539*	,494*	,158
	Sig. (bilateral)	,	,026	,044	,545
	N	17	17	17	17
CFC	Correlación de Pearson	,539*	1	,696**	,299
	Sig. (bilateral)	,026	,	,002	,243
	N	17	17	17	17
CFM	Correlación de Pearson	,494*	,696**	1	,539*
	Sig. (bilateral)	,044	,002	,	,025
	N	17	17	17	17
PHM	Correlación de Pearson	,158	,299	,539*	1
	Sig. (bilateral)	,545	,243	,025	,
	N	17	17	17	17

*. La correlación es significativa al nivel 0,05 (bilateral).

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE D (menos casos que perturban)

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,849**	,944**	,118
	Sig. (bilateral)	,	,002	,000	,746
	N	10	10	10	10
CFC	Correlación de Pearson	,849**	1	,786**	-,145
	Sig. (bilateral)	,002	,	,007	,690
	N	10	10	10	10
CFM	Correlación de Pearson	,944**	,786**	1	,066
	Sig. (bilateral)	,000	,007	,	,855
	N	10	10	10	10
PHM	Correlación de Pearson	,118	-,145	,066	1
	Sig. (bilateral)	,746	,690	,855	,
	N	10	10	10	12

** . La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

CLASE F (menos casos que perturban)

Correlaciones

		EEP	CFC	CFM	PHM
EEP	Correlación de Pearson	1	,391	,801**	,312
	Sig. (bilateral)	,	,166	,001	,277
	N	14	14	14	14
CFC	Correlación de Pearson	,391	1	,548*	,424
	Sig. (bilateral)	,166	,	,043	,131
	N	14	14	14	14
CFM	Correlación de Pearson	,801**	,548*	1	,456
	Sig. (bilateral)	,001	,043	,	,101
	N	14	14	14	14
PHM	Correlación de Pearson	,312	,424	,456	1
	Sig. (bilateral)	,277	,131	,101	,
	N	14	14	14	14

** - La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

* - La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tablas de frecuencia

LAS 3 BOLITAS

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	A	68	36,8
	B	19	10,3
	C	11	5,9
	D	20	10,8
	E	35	18,9
	F	10	5,4
	Cajón	22	11,9
	Total	185	100,0

LAS 9 BOLITAS

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	A	23	12,4
	B	58	31,4
	C	8	4,3
	D	11	5,9
	E	12	6,5
	F	17	9,2
	G	10	5,4
	Cajón	46	24,9
	Total	185	100,0

FIGURA

	Frecuencia	Porcentaje
A	1	,5
B	2	1,1
C	13	7,0
D	20	10,8
E	11	5,9
F	134	72,0
Cajón	5	2,7
Total	186	100,0

PESCADOR

	Frecuencia	Porcentaje
A	1	,5
B	7	3,8
C	36	19,5
D	20	10,8
E	68	36,8
F	5	2,7
G	28	15,1
Cajón	20	10,8
Total	185	100,0

