Significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en una Institución Educativa de Nivel Superior

Disertación que para obtener el grado de:

Doctor en Innovación Educativa

presenta:

Efraín Soto Apolinar

Registro CVU: 254171

Asesor titular:

Dr. Juan Antonio Alanís Rodríguez

Monterrey, Nuevo León, México Noviembre 2014

Agradecimientos

Este trabajo ha sido resultado de un gran esfuerzo y del apoyo de muchas personas. Agradezco a mi esposa Ana Gloria y a mi hijo Isaac Andani por el esfuerzo que han realizado durante los últimos años. También a mis padres y hermanos que me han estado apoyando de diversas maneras durante mis estudios.

Particularmente quiero agradecer a los revisores de este trabajo: Dra. Patricia Salinas y Dr. Manuel Flores por su guía para la mejora de este trabajo. Asimismo, a mi director de tesis, Dr. Juan Antonio Alanís, por toda la paciencia y el valioso apoyo que me ha brindado desde el inicio de mis estudios durante los últimos cuatro años y medio.

Finalmente, deseo agradecer al Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey campus Monterrey, al Departamento de Matemáticas del mismo y a la Universidad TecVirtual del Sistema Tecnológico de Monterrey por el apoyo otorgado para la realización de mis estudios de doctorado, que concluyen con la elaboración de esta tesis doctoral.

Resumen

En esta disertación doctoral se estudia la implementación de una propuesta innovadora para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, centrando la atención en los factores que intervienen en la comprensión del concepto de Integral Definida de funciones de una variable. Dicha implementación se llevó a cabo en un curso dirigido a estudiantes de carreras de ingeniería en una institución privada de nivel superior. La innovación mencionada fue elegida porque de ella se han reportado resultados alentadores en términos de la comprensión alcanzada por los estudiantes que asisten a cursos en los que dicha innovación se usa como referencia por parte del profesor.

Para el desarrollo de este trabajo de corte cualitativo se utilizó el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Tras un análisis ontosemiótico de la obra de referencia en la que se expone dicha innovación se realizó la observación de una parte de un curso en el cual ésta se implementó, y se aplicó un instrumento a los estudiantes asistentes al curso para identificar las prácticas matemáticas que estos ganaron después de la instrucción. Lo observado se complementó con una entrevista semi-estructurada hecha a algunos estudiantes seleccionados. Considerando la implementación de la innovación como la unidad de análisis de un estudio de caso, y con el apoyo del mencionado marco teórico, se encontró que en la innovación estudiada se muestra reiteradamente un mismo esquema de proceder ante una clase de problemas que allanan las dificultades para la comprensión del concepto. Se concluye mencionando algunas de las áreas de oportunidad encontradas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto bajo dicha innovación.

Tabla de Contenidos

Capítulo 1. Planteamiento del problema

En este capítulo se plantea el problema de investigación que motiva el desarrollo de este trabajo. En la primera parte se destaca la importancia del Cálculo para diversas áreas del conocimiento en la actualidad, pero muy en particular, para la ingeniería y la física. Después se mencionan algunos de los problemas que se han reportado en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, centrando la atención en el Cálculo Integral. Luego se describe una innovación que, según se ha reportado, ha logrado que algunos estudiantes apliquen el concepto de Integral –algo bastante alentador en comparación con los acercamientos tradicionales. La implementación en el aula de dicha innovación y la consecuente comprensión alcanzada por los estudiantes es el principal objeto de estudio de la investigación que aquí se reporta.

Se finaliza el capítulo con las preguntas de investigación que guiaron el trabajo, los objetivos propuestos y la justificación del mismo. También se hace una delimitación de este proyecto de investigación y se definen algunos términos de utilidad para la lectura de este trabajo.

Importancia del Cálculo en la actualidad

El Cálculo es la materia que delimita las matemáticas elementales de las matemáticas avanzadas. Esta rama de las matemáticas permite estudiar fenómenos naturales de interés para diversas áreas del conocimiento, entre las que destacan las aplicaciones en la ingeniería y en la física. Todo programa de estudios de las carreras de estas dos áreas la incluye entre los primeros cursos, pues es por excelencia, la herramienta que permite modelar, calcular, predecir y diseñar. El Consejo Nacional de Ciencias de EE.UU (NRC, en lo sucesivo, por sus siglas en Inglés: National Research

Council), desde 1989 afirmaba que el Cálculo “es la principal puerta de entrada por la cual pasará la mayoría de los estudiantes como parte de su preparación para carreras basadas en las matemáticas, … El lenguaje del Cálculo se ha extendido a todos los campos de la ciencia; la visión que transmite acerca de la naturaleza del cambio es algo que ninguna persona educada puede darse el lujo de prescindir.” (National Research Council, 1989, p. 51-52).

Debido al avance de la ciencia y la tecnología, aunado al aumento en la complejidad de los problemas que enfrentamos como sociedad, se espera que lo estipulado por el NRC hace unas décadas se acentúe cada vez más. No es una exageración decir que una pobre preparación en Cálculo afecta considerablemente la preparación de los futuros matemáticos, físicos e ingenieros, pues esta materia es considerada como parte fundamental en la preparación de estos profesionales. Esto también es aplicable a oceanógrafos, astrónomos, químicos, ecólogos, economistas, estadistas, entre muchas otras profesiones de diversas áreas en las que se requiere del Cálculo para resolver problemas de diversa índole. Por la importancia del Cálculo en nuestra sociedad se debe prestar particular atención a los resultados observados debidos a su instrucción, pues una buena parte del avance de la ciencia y la tecnología, al igual que la toma de decisiones relacionada con la economía de los países, descansa sobre él.

Durante las últimas décadas se han investigado y reportado algunas de las dificultades que involucra el aprendizaje de esta importante rama de las matemáticas. Enseguida se mencionan algunos de esos reportes.

Problemas en la enseñanza y en el aprendizaje del Cálculo

Dada la importancia del Cálculo en la formación de ingenieros, sería deseable contar con una enseñanza que garantice que los estudiantes logren aplicar sus conceptos fundamentales en la resolución de problemas en contextos que encontrarán en los cursos durante sus estudios y (potencialmente) en su carrera profesional. Sin embargo, durante las últimas décadas se han reportado serios problemas en su enseñanza y aprendizaje (Alanís y Soto, 2012; Henao, Lerner, Gil y Esteban, 2004; Pulido, 2008; Rising, 1961; Tall, 1981, 1992). Diversos estudios evidencian que esta problemática ha sido motivo de preocupación alrededor del mundo, al menos desde la década de 1980 (Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992; Robert y Speer 2001).

Profesores de matemáticas de diversas universidades también han advertido este problema. Por ejemplo, Douglas (1987) al respecto afirmaba que "… muchos de los estudiantes que inician un curso de Cálculo no logran completarlo, … y los que lo completan, toman un curso simplificado al estilo de recetario, en donde aprenden recetas sin saber qué es aquello que cocinan" (Douglas, 1987, p. iv). En ese reporte indicaba que aún los estudiantes más sobresalientes no lograron entender los conceptos del Cálculo y que la mayoría de los estudiantes tenían una pobre preparación (en sus conocimientos de las matemáticas) a la vez que la cantidad de estudiantes que ingresaban a los cursos de Cálculo iba en aumento. Más aún, declararon que los esfuerzos que se habían llevado a cabo con la intención de aminorar los efectos negativos de esta problemática habían sido en vano, pues el impacto era imperceptible.

La magnitud del problema quedó evidenciada con lo reportado por el NRC de EE.UU., a finales de la década de 1980, cuando afirmó que: "el Cálculo que se enseña actualmente, tiene poco que ver con la forma en que se le utiliza. Muchos estudiantes que se inscriben en un curso de Cálculo, no lo logran completar, y muchos de los que lo terminan, aprenden poco más que una serie de técnicas memorizadas que una computadora normalmente puede llevar a cabo" (National Research Council, 1989, p. 52), coincidiendo con lo reportado por Douglas (1987).

El consenso casi universal de que los problemas de la enseñanza del Cálculo eran graves y urgentes motivó en EE.UU. el denominado 'Movimiento de Reforma del Cálculo'. Este movimiento estimuló la creación de una gran cantidad de proyectos, los cuales fueron implementados en diversas instituciones de nivel superior de EE.UU. (Maggelakis y Lutzer, 2007); no obstante, no se alcanzaron los resultados esperados. Steen (2003) comenta al respecto, que en una evaluación realizada una década después de iniciado dicho movimiento de reforma, se reportaron más de una docena de metas, pero muy pocas relacionadas con el contenido de los cursos de Cálculo. Este investigador indica que en esos proyectos, se dio énfasis al uso de la tecnología, a las conexiones y las aplicaciones del Cálculo, pero no se consideraron suficientes cambios en la forma en que se presentan sus conceptos fundamentales.

En algunos reportes (Judson y Nishimori, 2005; Liu, Lin, Chen, Chung, Liao, Lin, Tseng y Chen, 2009) se indica que muchos matemáticos y educadores del área de las matemáticas perciben que las habilidades matemáticas de sus estudiantes que han pasado por cursos que operan bajo dicha reforma se han deteriorado en las últimas décadas. Al parecer, la omisión de la componente epistemológica en los proyectos que se desarrollaron bajo el movimiento de reforma del Cálculo acarreó consecuencias no deseadas.

Tal reclamo parece aún estar presente en la mayoría de las universidades de EE.UU. Klingbeil, Mercer, Rattan, Raymer y Reynolds (2004) –profesores de la Wright State University– indicaban que las universidades han tenido la necesidad de proponer cambios curriculares, al observar que más de la mitad de los estudiantes de recién ingreso a las carreras del área de ingeniería y de computación tienen que cambiar a otras carreras en las que los cursos de Cálculo no son obligatorios o definitivamente desertar de la universidad. Ante tal evidencia empírica, aceptaron que el currículo tradicional envía un mensaje desalentador a aquellos estudiantes que muestran dificultades con el Cálculo: que no podrán ser ingenieros y que sería mejor que cambien a otra carrera de estudio (Klingbeil et al, 2004). Esta situación parece seguir vigente, pues en un reporte reciente, este mismo grupo de profesores de la Wright State University indica que los estudiantes de recién ingreso a los programas de ingeniería en EE.UU. no logran avanzar por la secuencia tradicional del Cálculo universitario (Klingbeil y Bourne, 2013).

Estos problemas en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo no han sido exclusivos de los EE.UU.; por el contrario, se han publicado reportes semejantes en prácticamente todo el mundo. Francia, Australia, Inglaterra, Canadá, Taiwán, Puerto Rico, entre otros países, han realizado renovaciones globales del currículo con la intención de mejorar esta situación. Con ello, también se generaron una gran cantidad de innovaciones en la enseñanza del Cálculo con el propósito de remediar la problemática o al menos disminuir sus efectos negativos (Dimiceli, Lang y Locke, 2010; Leng, 2011; Milanovic, Takaci y Milajic, 2011).

En México los problemas también han sido reportados como muy graves. Por ejemplo, en el año 2002 Petriz (Petriz, 2006, referido en Petriz et al, 2010) aplicó una evaluación de Cálculo Diferencial e Integral a 60 alumnos de la Facultad de Contaduría Administración e Informática de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Los resultados fueron alarmantes: en una escala de cero a diez, los participantes en el estudio obtuvieron en promedio, 0.7 (siete décimas) para Cálculo Diferencial y 0.2 (dos décimas) para Cálculo Integral. Evidentemente, estos resultados preocupantes exigen una atención urgente.

Como se puede ver, a pesar de la implementación de una gran cantidad de proyectos de innovación en la enseñanza del Cálculo alrededor del mundo, al menos durante las últimas tres décadas, los problemas en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo han persistido, por lo que sigue siendo necesario trabajar en esta dirección.

Problemas en la enseñanza y en el aprendizaje del Cálculo Integral

Respecto de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral, se han reportado problemas que son, al menos, igual de preocupantes que los mencionados para el Cálculo en general (Ferrini-Mundy y Graham, 1991; González-Martín y Camacho, 2011; Gravemeijer y Doorman, 1999). Algunos trabajos hacen hincapié en los problemas acarreados en la enseñanza tradicional del Cálculo, tanto con un enfoque mecanicista (caracterizado por una algoritmia carente de significados) como con un enfoque formal (que otorga importancia a la construcción lógico-deductiva de los contenidos). Por ejemplo, Alanís y Soto (2012) afirman que la enseñanza tradicional del Cálculo no logra que los estudiantes reconozcan, entiendan o apliquen el concepto de Integral de funciones de una variable en contextos que no han estudiado en clase.

Cordero (2005) ha reportado que en la enseñanza, la Integral se ha reducido a la definición de Riemann [sic] y a la ejercitación de los procedimientos propios del algoritmo subyacente. Apunta que en la ejercitación mecánica de las técnicas de Integración la componente conceptual no se considera con la importancia debida, y que algunas nociones del concepto se cubren hasta que se estudian sus aplicaciones. Varios estudios coinciden en señalar que el desequilibrio entre las componentes conceptual y algorítmica en la enseñanza del concepto de Integral acarrea problemas en su comprensión (Chappell y Killpatrick, 2003; Mahir, 2009; Muñoz, 2000, 2001, 2003; Pesek y Kirshner, 2000; Petterson y Scheja, 2008).

Respecto de la enseñanza formal del concepto de Integral, visto como un límite sin contexto alguno fuera de lo algebraico, Scheja y Petterson (2010) afirman que puede resultar difícil aún para estudiantes avanzados [sic]. Este es un hecho alarmante, pues como mencionan estos autores, este concepto "es un punto de partida para muchas áreas matemáticas" (Scheja y Petterson, 2010, p. 228). El acercamiento al concepto de Integral como un límite (sin algún contexto concreto) atiende a una enseñanza tradicional. Con ello, según se ha reportado, se aumentan las dificultades para su aprendizaje y comprensión al incrementar la abstracción de las ideas utilizadas en la construcción de dicho concepto (Artigue, 2001; Cordero, 2003; Hoban, Finlanson y Nolan, 2012; Mallet, 2012; Törner, Potari, Zachariades, 2014).

Estos resultados ocasionados por la enseñanza tradicional parecen bastante entendibles al considerar que este tipo de enseñanza no encamina a los estudiantes para que adquieran la habilidad de utilizar el concepto de Integral en situaciones nuevas; más bien, por la forma en que se evalúa a los estudiantes, este tipo de enseñanza sugiere que lo importante es dominar los procedimientos para resolver ejercicios (enfoque mecanicista), o bien, memorizar las definiciones y entender la demostración de los teoremas (enfoque formal), dejando al margen la utilidad de este concepto matemático para la resolución de problemas en diversos contextos.

Respecto del aprendizaje de la Integral, Artigue (2002) indica que las imágenes mentales de los estudiantes de dicho concepto son pobres y están restringidas a una dimensión. Esta investigadora reporta que las varias concepciones del concepto de Integral compartidas entre matemáticos (operación inversa de la diferenciación, el proceso para el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc., forma lineal continua sobre el espacio de funciones, un proceso de métrica) con frecuencia causan confusión a quienes se les expone por primera vez. También ha identificado diversos obstáculos que los estudiantes no logran sortear cuando intentan calcular el área delimitada por una curva (por ejemplo, presencia de valores negativos de la curva, discontinuidades, curvas de la forma $x = f(y)$). Asimismo, de distintas maneras muestra cómo la falta de comprensión ocasiona que los estudiantes no puedan explicar por qué en un caso un procedimiento funciona y en otro no.

Otro trabajo en el que se estudian las imágenes que se forman los estudiantes de la Integral Definida es el desarrollado por Thompson y Silverman (2008). Consideran para ello dos acercamientos: en el primero –más tradicional–, interpretan a la Integral Definida como un área delimitada por el eje x, la gráfica de una función $f(x)$ conocida, dentro de un intervalo $[a, b]$ dado. En el segundo, consideran el proceso de acumulación, a partir de una función escalón, equivalente a la suma de Riemann. Reportan que bajo el segundo acercamiento, los estudiantes pueden entender la Integral Definida, pero acarrea el inconveniente de que tiene muchos elementos que varían simultáneamente, lo cual dificulta su tratamiento. Por otra parte, afirman que con el primer acercamiento se dificulta el abordaje de problemas distintos al cálculo del área. También reportan que cuando los estudiantes no logran comprender que el límite superior de integración es una variable, es muy difícil que entiendan la relación existente entre la acumulación y la razón de cambio, y por tanto, que la función de acumulación por sí sola no puntualiza su importancia en el Teorema Fundamental del Cálculo. En la literatura se encontraron otros reportes que estudian las imágenes mentales del concepto de Integral Definida (Camacho y Depool, 2003B; Rasslan y Tall, 2002; Rösken y Rolka, 2007).

Existen otros trabajos de investigación que se centran en la caracterización de las estrategias que son utilizadas por los estudiantes cuando intentan resolver problemas equivalentes a la integración, antes de conocer el concepto de Integral Definida. Uno de esos trabajos es el desarrollado por Cabañas y Cantoral (2007), quienes identifican las estrategias (que ellos denominan como modelos) utilizadas por los estudiantes ante la problemática de calcular el área bajo la curva en un intervalo dado: algorítmico, de congruencia, de semejanza, de paralelismo, dinámico, gráfico y analítico (y combinaciones de éstas). Asignan como actividades asociadas a la noción de área: (1) repartir, (2) comparar y reproducir, (3) medir y cuantificar y (4) conservar.

Poniendo atención en la última, observan las nociones de 18 estudiantes de tercer semestre de la carrera de matemáticas acerca de la propiedad de conservación del área con el apoyo de una secuencia didáctica diseñada para tal fin. Reportan en sus observaciones que aquellos estudiantes que utilizan la idea dinámica de generación del área bajo la curva son los que tienden a mencionar de manera explícita la propiedad de conservación del área. Por otra parte, encontraron que aquellos estudiantes que se basan en la parte algorítmica hacen patente tomar en cuenta tal propiedad al hacer uso de fórmulas para el cálculo del área. Olave (2005) también desarrolló un trabajo de investigación en esta misma dirección.

En resumen, la enseñanza tradicional no ha logrado dotar a los estudiantes de la capacidad de aplicar el concepto de Integral Definida en contextos distintos a los que ha visto en clase (acaso esto último ocurra). Por ello se hace patente la necesidad de estudiar qué es lo que permite a los estudiantes tal nivel de comprensión de dicho concepto matemático.

Innovaciones en la enseñanza del Cálculo Integral

Parte de la reacción a la problemática antes mencionada incluyó también la generación de una gran cantidad de enfoques o acercamientos a la enseñanza del Cálculo que intentan mejorar e incrementar los aprendizajes que alcanzan los estudiantes. Enseguida se mencionan algunos de los reportes de tales propuestas, poniendo atención en lo concerniente al concepto de Integral.

El uso de la noción de acumulación para introducir el concepto de Integral ha sido considerado en algunas propuestas para su enseñanza. Arcos (2007), por ejemplo, para cuantificar el área bajo la gráfica de una función en un intervalo, considera un punto móvil sobre su gráfica. Para calcular el valor de una cantidad variable P considera una variación infinitesimal de la variable independiente dx y calcula el incremento infinitesimal dP correspondiente. Esto es,

$$dP = f(x) \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad P = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

También Kouropatov y Dreyfus (2009) utilizan la idea de acumulación como la base para la enseñanza del concepto de Integral, relacionando los conceptos de razón de cambio y acumulación como procesos mutuamente dependientes, y con ello de paso, logran mostrar de una manera concreta la relación entre los conceptos de Integral y Derivada en el Teorema Fundamental del Cálculo. Afirman que la idea de acumulación les permite abordar las aplicaciones con una mayor comprensión por parte de los estudiantes, al igual que generalizar el concepto a otros más avanzados (específicamente ir de la Integral de Riemann a la Integral de Lebesgue).

Alineada con las dos propuestas anteriores se encuentra la de Muñoz-Ortega (2010), quien ante el desequilibrio de las dimensiones conceptual y algorítmica del Cálculo, busca entender qué elementos permiten establecer una conexión entre los conceptos del Cálculo Integral y los algoritmos que les caracterizan. Señala que a pesar de que las nociones de acumulación y función primitiva están claramente relacionadas en el Teorema Fundamental del Cálculo, en el discurso matemático escolar esta conexión se omite. Sugiere basar la enseñanza del concepto de Integración en la idea de acumulación, al ser ésta una actividad social que constituye un campo de problemas que le permite al estudiante darle un significado al concepto.

Esta propuesta es producto de estudios en las dimensiones: (a) epistemológica, que atiende la génesis histórica del concepto, (b) cognitiva, en atención a las dificultades que los estudiantes deben sortear cuando enfrentan las problemáticas abordadas con el concepto de Integral, y (c) didáctica, donde se proponen situaciones problemáticas que pretenden enriquecer el campo de prácticas sociales que se abordan con el concepto. Concluye que es necesario “rediseñar el discurso escolar del Cálculo teniendo como columna vertebral a la predicción, la acumulación y la constantificación de lo variable” (Muñoz-Ortega, 2010, p. 299), pues es a través de estas prácticas sociales que se pueden tender puentes entre distintas ramas del conocimiento que dan sentido al Cálculo como herramienta de resolución de problemas. Así, por medio de problemas que requieran la aplicación del proceso de integración, encuentra el enlace entre las dimensiones algorítmica y conceptual del Cálculo Integral. Otros trabajos que se basan en la idea de acumulación como base para enseñar la Integral Definida han sido reportados en la literatura (Carlson, Persson y Smith, 2003; Thompson y Silverman, 2008; Yerushalmy y Swidan, 2012).

Por su parte, Tall (2010) considera que el Cálculo elemental puede basarse en las ideas intuitivas de continuidad natural y linealidad local. Este investigador sugiere introducir el concepto de Integral Definida como el proceso del cálculo del área delimitada por el eje x y la gráfica de una función conocida dentro de un intervalo dado (a, b). Con este fin, realiza una partición del intervalo y aproxima el área con una suma de Riemann. Argumenta que, conforme el tamaño de la partición disminuye, el valor aproximado al área se acerca al valor exacto. Con este acercamiento también justifica el Teorema Fundamental del Cálculo.

Camacho y Depool (2003, 2003B) proponen el uso de un software de cálculo simbólico (DERIVE) para el tratamiento gráfico y numérico del concepto de Integral Definida de funciones de una variable. Estos investigadores afirman que la asimilación del concepto de Integral Definida (en el sentido de Riemann) por parte de los estudiantes se ve favorecida a partir de la consideración de aproximaciones sucesivas al valor del área delimitada por el eje horizontal y una curva cuya expresión algebraica es conocida en forma de función. Indican que la comparación de los resultados de las aproximaciones tanto gráficas como numéricas al área (rectángulos superiores, rectángulos al punto medio, trapecios, regla de Simpson) permite al estudiante dar un significado a ese concepto matemático. Justifican el uso del mencionado software al considerar Integrales no inmediatas que exigen el uso de las técnicas no abordadas en esa propuesta.

En otro trabajo más reciente, Camacho, Depool y Garbín (2008), sugieren el software DERIVE para la enseñanza de la Integral Definida de funciones de una variable en un curso de Cálculo. A lo largo de cuatro prácticas en las que se aproxima el área encerrada por una función (continua o continua a trozos) con el apoyo de dicho software representan la situación de manera gráfica o numérica comparando distintos acercamientos (rectángulos, trapecios o trapecios parabólicos [sic]) y problemas en contexto extra-matemático. En su reporte identifican la causa de algunos errores cometidos por los estudiantes: (a) por el significado que éstos han creado del concepto de Integral relacionado con el área bajo la curva, (b) por una coordinación insuficiente entre distintas representaciones del concepto, (c) por errores al abordar problemas que involucran funciones continuas a trozos, (d) por deficientes habilidades de interpretación de los resultados cuando el contexto del problema no es matemático, entre otras cuestiones.

Thompson, Byerley y Hatfield (2013) proponen un acercamiento conceptual al Cálculo por medio del uso de los recursos tecnológicos (específicamente simulaciones) dividiendo el trabajo en dos fases. En la primera, los estudiantes deben encontrar funciones de acumulación a partir de funciones que dan la razón de cambio; en la segunda, la función de razón de cambio debe ser calculada a partir de la función de acumulación. Estos autores afirman que este acercamiento hace natural [sic] la deducción del Teorema Fundamental del Cálculo, debido a que las actividades están diseñadas para involucrar a la variación y la acumulación simultáneamente. Cabe resaltar que en esta propuesta para la enseñanza de la Integral no se utiliza el cálculo del área delimitada por una curva, como tradicionalmente se hace, sino que las actividades se llevan a cabo dentro de contextos correspondientes a situaciones concretas. De hecho, estos autores consideran "como una imitación grotesca el hecho de que el Cálculo tradicional tome como 'área bajo la curva' al significado esencial de la integración" (Thompson et al., 2013, p.18). Consideran que bajo su propuesta, la tecnología es la que posibilita la construcción de esquemas y significados que permiten a los estudiantes comprender la relación entre acumulación y razón de cambio.

Otras propuestas sugieren reordenar los contenidos para la enseñanza del Cálculo, con la intención de estar acorde con la secuencia de descubrimientos por parte de los creadores de esta importante rama de las matemáticas o, en otros casos, para hacer pertinente algún contenido impartido en un curso de Cálculo y que será utilizado en otra asignatura. Sauerheber (2012) propone secuenciar los temas del curso de Cálculo con base en su origen histórico, de acuerdo a como Isaac Newton los descubrió –aunque utiliza la notación de Leibniz. Propone dos formas de interpretar la Integral (a) como una función que calcula el área bajo su integrando, y (b) como el resultado de antiderivar.

Esto, según se ha reportado (Czarnocha, Loch, Prabhu y Vidakovich, 2001; Steiner y Dana-Picard, 2004), puede ocasionar confusión en el estudiante al tratar a dos conceptos matemáticos distintos (Antiderivada e Integral Definida) como uno mismo. En su propuesta, este investigador muestra cómo los conceptos de (1) Integral y Derivada, (2) acumulación y razón de cambio y (3) área debajo de la gráfica de una función y recta tangente a una curva, están relacionados como procesos inversos uno del otro. Este autor sugiere eliminar el uso, tanto de los límites como de los infinitesimales, para "la preservación del excepcional, avanzado, definitivo y permanente trabajo matemático de Newton" (Sauerheber, 2012, p. 98).

Por su parte, Schrörer (2006) sugiere reordenar los contenidos de los cursos de Cálculo con el fin de cubrir primero aquellos conceptos matemáticos que se requieren en otros cursos de las carreras de ingeniería. Esta necesidad surge por la naturaleza de los cursos de las carreras de ingeniería y ciencias, algunos de los cuales requieren de los conceptos del Cálculo. Schrörer indica que han obtenido resultados sorprendentes [sic] al mostrar el poder del Cálculo en la resolución de problemas. La forma de medir dichos resultados se basó en la eficiencia terminal de egresados (porcentaje de los estudiantes que ingresaban que efectivamente obtuvo el grado de ingeniero). Cabe mencionar que no se hacen cambios en los contenidos, sino en la secuenciación de éstos en los cursos, lo que implica que los estudiantes deben sortear las mismas dificultades al aprender los conceptos del Cálculo. Este autor advierte beneficios ocasionados por la motivación en el estudiante, cuando éste reconoce la utilidad de las matemáticas a través de sus aplicaciones en los cursos de ingeniería a los que debe asistir.

Por su parte, Abramovitz, Berezina, Berman y Shvartsman (2009) proponen una secuencia de actividades que facilite la comprensión del concepto de Integral como una función del límite superior de integración (algo equivalente a una función de acumulación mencionada en las propuestas de Arcos (2007), Kouropatov y Dreyfus (2009) y Muñoz-Ortega (2010)). Para Abramovitz et al (2009), dicha secuencia de actividades permite al estudiante observar patrones que lo guían a conjeturar y formular un teorema, para después explorar las suposiciones y conclusiones requeridas en dicho teorema con la intención de demostrarlo y validarlo. Estos autores afirman que con este acercamiento –

con un claro enfoque formalista–, los estudiantes adquieren confianza al iniciar con una revisión de sus conocimientos previos y la resolución de actividades relativamente sencillas. Han observado que esto motiva a los estudiantes a explorar y a encontrar ejemplos y contraejemplos de los patrones observados, permitiéndoles comprender la parte teórica del concepto [sic], lo cual, a su vez, les facilita el desarrollo de investigación en matemáticas.

También han surgido propuestas en las que se sugiere el uso de las cantidades infinitamente pequeñas denominadas ‘infinitesimales’. Su uso se justifica en la dificultad de dar un significado a los conceptos del Cálculo, debido a lo abstracto de los elementos que se utilizan al definirlos, al igual que por su utilidad para la deducción de modelos matemáticos de diversos fenómenos. Una de estas propuestas es hecha por Cordero (2006), quien indica que la toma del elemento diferencial es lo que permite dar significado al proceso de integración, al dar una base para el entendimiento de la evolución de un sistema al considerar su variación infinitesimal $F(t+dt)-F(t)$ a través de la toma de un elemento diferencial y su ulterior integración. Afirma que el discurso escolar del Cálculo debería descansar sobre estas nociones, actualmente usurpadas por un discurso algorítmico predominante en la enseñanza tradicional del Cálculo.

Por su parte, Arcos (2007) propone evitar los argumentos que dan peso a los conceptos de función, número real y límites, y dar preferencia al uso de las cantidades infinitamente pequeñas. Propone estudiar primero el concepto de Integral como el proceso inverso al de derivación (Integral indefinida o Antiderivada) y a partir de éste, abordar el concepto de Integral Definida. En su propuesta, el concepto de Integral

Definida está fuertemente ligado al concepto de área, lo cual, como se ha reportado en diversos estudios (Camacho y Depool, 2003; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovich, 2001), es contraproducente para el desarrollo de ideas que toman al concepto de Integral como base.

Kleiner (2001) también se posiciona a favor del uso de los infinitesimales cuando afirma que los físicos y los ingenieros no han dejado de utilizarlos por la sencillez manipulativa de su aparato técnico, su atractivo intuitivo y la sencillez de su teoría. Asimismo, recalca que durante más de dos milenios distintos matemáticos sobresalientes han hecho uso de ellos, gracias a lo cual se han hecho descubrimientos importantes. Este investigador critica severamente la presentación de los conceptos del Cálculo de una manera lógicamente constructiva (a partir de la definición de límite) afirmando que este acercamiento es pedagógicamente destructivo. Propone en su lugar dar definiciones tentativas (a través de heurísticas) que estén adecuadas a los objetivos de la enseñanza y que se revisen cuando surja la necesidad de afinarlas. Asimismo, para mejorar el aprendizaje de los estudiantes exhorta a darles muchos ejemplos en diversos contextos antes de definir, generalizar o demostrar. Sugiere dar mayor realce a las ideas centrales del Cálculo en lugar de las diversas técnicas y fórmulas utilizadas comúnmente en la enseñanza tradicional.

Otros autores e investigadores también han reportado algunas de las bondades del uso de los infinitesimales para la enseñanza del Cálculo Integral. Entre ellos se encuentran Ely (2010), Freudenthal (1973), Katz y Katz (2010), López-Gay y Martínez-Torregrosa (2005), Tarvainen (2008), Valdivé (2008), entre otros. Por ejemplo, Demidov y Shenitzer (2000) reportan algunos comentarios de Vygotskii acerca de los libros de texto de Cálculo publicados previo a la década de 1930, en los cuales el Cálculo se presentaba en una manera lógicamente constructiva, lo cual criticó de erróneo y dañino.

Vygotskii apostó por introducir las nociones propias del Cálculo a partir de las aplicaciones, dejando el rigor como una necesidad secundaria que se puede atender posteriormente. Luzin, escribió a Vygotskii que sólo veía "una fuerte contradicción entre las intuitivamente claras fórmulas fundamentales del Cálculo Integral y lo incomparablemente artificial y compleja labor de su 'justificación' y sus 'demostraciones'." (Demidov y Shenitzer, 2000, p. 80). Por otra parte, Ímaz y Moreno (2009), afirman que "el modelo infinitesimal del análisis es, no sólo el más conveniente, sino de hecho necesario, en concordancia con la filosofía de que las mejores teorías son aquellas que más o mejor explican" (Ímaz y Moreno, 2009, p. 107).

Con lo analizado hasta este punto, se puede observar que las propuestas de la enseñanza del Cálculo Integral se basan en

- la aproximación del área debajo de una curva, lo cual según se ha reportado, no es lo más conveniente para la formación de los usuarios del Cálculo, pues se ha observado que cuando el concepto de Integral se basa exclusivamente en la noción de área, los estudiantes no logran abordar nuevas problemáticas que requieren del uso de la Integral;
- la acumulación como noción que permita construir un significado al proceso de Integración, a lo cual se imputa cierto nivel de complejidad por incluir diversos elementos que varían simultáneamente, aumentando la dificultad para su aprendizaje y comprensión;

- un interés por construir el concepto de Integral con base en los infinitesimales, de los cuales se han reportado algunas bondades, aunque también ciertas concepciones erróneas –como algo muy pequeño, pero distinto de cero (Turégano, 1998); y
- un alejamiento de la enseñanza tradicional, particularmente el acercamiento formal, basado en los conceptos de función, límite y número real, porque se ha observado que este acercamiento no es apropiado para la enseñanza del Cálculo en general (no solamente del concepto de Integral).

Estas consecuencias (al igual que las expresadas en otros reportes de investigación del área) apuntan a la necesidad de un acercamiento que tome en cuenta los resultados de las investigaciones en el tema. Esto es, un acercamiento que, además de estar alejado de las abstracciones que el formalismo matemático impone, permita a los estudiantes que serán usuarios del Cálculo en sus carreras, construir el concepto de Integral de funciones de una variable con base en contextos acordes a sus intereses. Estas características han sido observadas en la propuesta de innovación de enseñanza del Cálculo que se estudia en este trabajo, la cual se describe a continuación.

Innovación a estudiar

Como parte de la renovación de los programas de matemáticas de las carreras de ingeniería en una universidad privada ubicada en el norte de México, un grupo de profesores e investigadores del Departamento de Matemáticas de dicha institución ha diseñado una innovación para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo concretada en la obra de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012). Esta innovación se distingue por considerar los resultados de diversas investigaciones en el área de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo (Salinas y Alanís, 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011). En particular, la mencionada obra está fundamentada en las tesis doctorales de Alanís (1996), Pulido (1997) y Salinas (2010). Para su diseño se consideraron las dimensiones epistemológica, psicopedagógica y social del currículo, y en ella se propone un nuevo acercamiento en el que se plantean nuevos contenidos del curso de Cálculo apuntando a la necesidad del estudiante de utilizar a dicha rama de las matemáticas como una herramienta de resolución de problemas de interés en la ingeniería (cálculo de la longitud de un arco, cálculo del área de una región del plano, cálculo del volumen de un sólido de revolución, cálculo de la masa de un material de densidad variable, cálculo de la fuerza sobre una pared debido a la presión ejercida por un fluido, entre otros contextos.)

En la obra de Salinas et al (2012), se construye un esbozo de la teoría, y la aplicación –tanto de los procedimientos construidos como de la teoría que los explica y justifica– a nuevas situaciones que puedan abordarse con el mismo proceder. Así, logran "integrar, didácticamente hablando, un acercamiento newtoniano con un acercamiento leibniziano a la génesis del Cálculo" (Salinas y Alanís, 2009, p. 377). Salinas y Alanís (2010) afirman haber observado que al alejar las actividades del curso de Cálculo de la teoría formal, se mejora considerablemente la actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje del Cálculo. En dicha obra, los conceptos fundamentales del Cálculo emergen de la resolución de ciertas problemáticas, secuenciadas con la intención de que, una vez que el lector atienda a cada una de ellas, adquiera la habilidad de resolver una clase particular de problemas. La consideración de los usos del Cálculo en cursos posteriores (durante la preparación de ingenieros), les posibilitó la identificación de las dificultades que los estudiantes deben sortear en esos contextos lo cual permitió orientar y delimitar la propuesta. En este sentido, el para qué ("en su calidad de herramienta útil para resolver problemas", Salinas et al, 2012, p.ix) sirve como señal que marca las pautas para definir el cómo ("la didáctica", Salinas et al, 2012, p.ix) y el qué (los contenidos) de tal propuesta, y la resolución de problemas acordes con los intereses de los estudiantes de ingeniería se utiliza como incentivo para aprender Cálculo.

La intención de los autores de dicha innovación para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo es "hacer emerger procedimientos, nociones, procesos y resultados del Cálculo, en atención al interés de resolver una problemática rica en contextos reales afines al interés de los estudiantes" (Salinas et al., 2012, Vol. 2, p. ix). Cabe mencionar que esta innovación de la enseñanza del Cálculo se encuentra en consolidación actualmente, implementándose en los primeros cursos de las carreras de ingeniería de la institución de nivel superior antes referida.

En resumen, el acercamiento al concepto de Integral definida de funciones de una variable fue diseñado con base en una serie de actividades (situaciones problema) que permiten al estudiante adquirir de inicio, un conocimiento intuitivo e informal del procedimiento que se lleva a cabo (implícitamente) cuando se calcula una Integral Definida. Luego de trabajar con cada actividad, se discute su solución con la intención de que el estudiante logre la transición a la parte más formal del concepto y adopte la terminología y la notación aceptada culturalmente entre los matemáticos.

De esta innovación se han reportado bondades que la hacen interesante para la comunidad de especialistas en el área de matemática educativa, en particular, de la enseñanza del Cálculo. Respecto de esta obra, Alanís afirma que "en implementaciones de la propuesta se ha logrado que estudiantes establezcan por cuenta propia la Integral con la cual calcular el área superficial de un sólido de revolución, lo cual es difícil o imposible de lograr en los cursos tradicionales" (Alanís, 2008, p. 6). Estos resultados empíricos promueven un interés por conocer mejor esta innovación y la manera en que se implementa en el aula, pues su estudio puede potencialmente conducir a entender mejor los fenómenos de aprendizaje de la Integral Definida de funciones de una variable y a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto matemático.

Preguntas de Investigación

Se ha reportado que la enseñanza tradicional del Cálculo no propicia que los estudiantes apliquen el concepto de Integral de funciones de una variable en diversos contextos. A causa de esto ha surgido una gran cantidad de innovaciones para la enseñanza del Cálculo, muchas de las cuales no han considerado los resultados de la investigación en el área de Matemática Educativa. Al parecer, esto explica el que los resultados obtenidos de las implementaciones de tales propuestas no han sido los esperados. La innovación para la enseñanza del Cálculo planteada en la obra de Salinas et al. (2012), en particular del concepto de Integral Definida de funciones de una variable, surge a partir de la consideración de reportes de investigaciones del área de Matemática Educativa. Respecto de la implementación de dicha innovación, en Alanís (2008) se reportan resultados alentadores para aquellos que laboran en la búsqueda de mejorar los aprendizajes y la comprensión que alcanzan los estudiantes en los cursos de Cálculo.

Entender mejor qué, cómo y por qué ocurre, en la implementación de la referida innovación en el aula, permitirá mejorar la enseñanza de dicho concepto matemático. Con este fin, se desarrolló una investigación a profundidad de las dimensiones que a continuación se mencionan, las cuales están interrelacionadas en los resultados reportados por Alanís (2008).

A. Dimensión epistémica, esto es, el acercamiento al concepto de Integral propuesto en Salinas et al (2012).

B. Dimensión cognitiva, es decir, la comprensión que alcanzan de dicho concepto los estudiantes.

C. Dimensión interaccional, en otras palabras, la implementación en el aula del acercamiento al concepto Integral Definida.

La obra de Salinas et al (2012) es considerada como referencia para la planeación de la instrucción en los cursos de Cálculo para las carreras de ingeniería ofertadas en la Institución de Nivel Superior antes referida. Por ello, el estudio del acercamiento al concepto de Integral planteado en dicha obra, permitió conocer mejor: (1) cómo la consideración de una aproximación previa al cálculo exacto participa en la construcción del concepto de Integral; (2) cómo el planteamiento a la Integral Definida encontrado en dicha obra interviene para que el estudiante logre aplicar ese concepto; y (3) si las problemáticas planteadas en la introducción de la Integral Definida muestran un mismo esquema de proceder que facilite al estudiante la comprensión de dicho concepto matemático.

Por su parte, la observación de la implementación de la propuesta en el aula (y su posterior análisis) informaron acerca de: (1) el énfasis otorgado al procedimiento planteado en Salinas et al (2012) durante la instrucción; (2) el número y la naturaleza de las situaciones problemáticas cubiertas antes de la primera evaluación; (3) cómo la mediación entre los dos puntos anteriores contribuyen a la comprensión del concepto por parte de los estudiantes; y (4) la concordancia entre las situaciones problemáticas utilizadas durante la instrucción con las usadas en la evaluación.

Respecto de los aprendizajes de los estudiantes, se logró conocer (1) la capacidad de resolver problemas que involucren a la Integral Definida (no abordados previamente); (2) el procedimiento utilizado para la resolución de dichos problemas; y (3) cuáles factores (potencialmente) favorecen la comprensión del concepto por parte de los estudiantes.

Ante la problemática discutida, y considerando la situación del aula del curso de Cálculo en el nivel superior en los que se implementa la innovación de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo ya descrita, se planteó la siguiente pregunta para el desarrollo del trabajo de investigación aquí expuesto:

¿Cuáles condiciones intervienen en la comprensión (por parte del estudiante) del concepto de Integral de funciones de una variable acorde al planteamiento encontrado en Salinas et al (2012)?

Con la intención de atender las dimensiones en las que este trabajo se enfocó, de la pregunta de investigación general se derivaron las siguientes preguntas específicas.

1. ¿Cuál es el planteamiento del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en la obra de Salinas et al (2012)?

2. ¿Cuáles son las prácticas de enseñanza de dicho concepto matemático bajo el planteamiento propuesto en dicha obra?

3. ¿Cuáles son los aprendizajes y la comprensión que alcanzan los estudiantes de dicho concepto? (después de su instrucción bajo el acercamiento planteado en Salinas et al (2012))

4. ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender el concepto de Integral Definida de funciones de una variable?

Aún y cuando las dimensiones consideradas no son las únicas involucradas en la construcción de los aprendizajes del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes, parecen ser las que tienen un mayor peso en esos procesos y podrían explicar mejor cómo se favorece la comprensión. Por esto se consideró pertinente abordar la implementación de dicha innovación como un caso de estudio, para obtener información respecto de su funcionamiento y los productos (en términos de aprendizaje y comprensión) que obtienen los estudiantes que asisten a dicha implementación.

La primera pregunta se atendió por medio de la caracterización de las acciones y expresiones utilizadas en el planteamiento de Salinas et al (2012). Respecto de la segunda pregunta, se estudiaron las acciones y expresiones que el profesor utiliza durante la instrucción de dicho concepto matemático. La tercera pregunta guio la caracterización de las acciones y expresiones que utiliza el estudiante al abordar problemas cuya solución involucra a una Integral Definida. La cuarta y última pregunta buscaba encontrar mejoras a la innovación al igual que a su implementación.

Objetivos

El presente trabajo de investigación tuvo por objetivo general identificar, describir y analizar las acciones que los estudiantes llevan a cabo al enfrentar problemas que requieren del uso del concepto de Integral de funciones de una variable, después de la instrucción en un curso en el que se implementó la obra de Salinas et al (2012).

A lo largo de este trabajo se intenta esclarecer los factores y fenómenos didácticos que intervienen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, del objeto matemático denominado Integral Definida de funciones de una variable. La información obtenida permitió emitir algunas recomendaciones que pretenden mejorar los procesos de instrucción que actualmente se llevan a cabo en la enseñanza del concepto de Integral de funciones de una variable en los cursos en que se implementa dicha innovación.

Justificación

Como se mencionó, la adecuada preparación de los futuros ingenieros, al igual que profesionales de otras áreas y disciplinas, depende en gran medida de la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo por parte de los estudiantes de esas carreras. Esto se debe a que una gran cantidad de resultados, procedimientos o métodos de las matemáticas avanzadas descansan en tales conceptos fundamentales. En particular, para el caso de la Integral Definida de funciones de una variable, algunos de dichos resultados son los coeficientes de Fourier, la transformada de Laplace, el teorema de Stokes, el teorema de Green, el teorema de la divergencia, entre muchos otros. Asimismo, una gran cantidad de fenómenos físicos estudiados por los ingenieros, en su modelación matemática, involucran una Integral Definida de funciones de una variable o tienen alguna conexión con este concepto matemático (vibraciones en dinámica, velocidad de reacción en balance de materia, conducción térmica en transferencia de calor, esfuerzo cortante en mecánica de materiales, campo electromagnético en electromagnetismo, ecuaciones del fluido newtoniano en mecánica de fluidos, etc.)

Por lo anterior, se revisaron algunas propuestas de innovación para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, en particular, para el Cálculo Integral. Algunas evaluaciones hechas a proyectos de innovación para la enseñanza del Cálculo, en particular, para muchos de los implementados bajo la Reforma del Cálculo en EE.UU., han reportado resultados poco alentadores (Artigue, 2002; Steen, 2003; Young, Georgiopoulos, Hagen, Geiger, Dagley-Falls, Islas, Ramsey, Lancey, Straney, Forde y Bradbury, 2011). Debido a la importancia de este concepto matemático en la formación de profesionales de diversas áreas, particularmente de ingenieros y físicos, éstos deberían tener la habilidad para resolver problemas con su uso.

Cantoral y Farfán (2004) indican que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social asociado a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. Cantoral (2005) afirma que, a pesar de esto, la mayoría de los estudios desarrollados en torno a la enseñanza y al aprendizaje del Cálculo se han llevado a cabo omitiendo la consideración de que la matemática escolar está al servicio de otras disciplinas en donde sus conceptos adquieren sentido. La innovación de la enseñanza del Cálculo de interés en este trabajo, fue elaborada con base en estudios que tomaron en cuenta dicha consideraron, y debido a esto, es de interés para la comunidad de investigadores en el área de Matemática Educativa conocer los resultados (en términos de aprendizajes) en los estudiantes que asisten a un curso en el que se implementa dicha innovación. Por otra parte, en la literatura existen muy pocos reportes en los que se indiquen cómo los resultados de la investigación en el área de Matemática Educativa están interviniendo en el aula y en los aprendizajes de los estudiantes.

En su afirmación, Alanís (2008) adjudica al planteamiento encontrado en la obra de Salinas et al (2012) la comprensión alcanzada por los estudiantes del concepto de Integral de funciones de una variable. Por esto, se consideró apropiado un estudio que analizara los fenómenos que ocurren durante la implementación de dicho acercamiento en el aula para advertir qué factores son determinantes para el aprendizaje y la comprensión de dicho concepto matemático.

Por todo esto, se consideró que la implementación del acercamiento al concepto de Integral de funciones de una variable, acorde con el planteado en Salinas et al. (2012), debía ser estudiada con el fin de caracterizar los aprendizajes promovidos en los estudiantes. Aún y cuando se trató de un caso particular, el análisis de dicho escenario brindó información que ayudó a describir y arrojar luz sobre el aprendizaje y la comprensión de dicho concepto matemático.

Delimitación del estudio

La innovación de la enseñanza del Cálculo mencionada, está siendo implementada en los cursos de Matemáticas 1, Matemáticas 2 y Matemáticas 3, impartidos por profesores del Departamento de Matemáticas de una Institución privada de Nivel Superior ubicada al Norte de México. En particular, el concepto de Integral Definida de funciones de una variable, se estudia en el curso de Matemáticas 2.

Con base en el Enfoque Ontosemiótico para la Cognición e Instrucción Matemática (marco teórico utilizado durante el desarrollo de este trabajo de investigación para esclarecer los fenómenos que ocurren durante la implementación de la referida innovación en el aula), es necesario detallar las acciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos y estrategias) que se llevan a cabo al resolver los problemas que se abordan en la introducción del concepto de Integral Definida en Salinas et al (2012). Dado que esta obra sirve como referencia para la planeación de la instrucción de dicho concepto, su análisis ayudó en la identificación de algunos factores que intervienen en la comprensión del concepto de Integral por parte de los estudiantes, así como también reconocer si las acciones que se llevan a cabo durante la instrucción coinciden con las de dicha obra, al igual que las acciones llevadas a cabo por los estudiantes al enfrentar problemáticas que requieren del uso del referido concepto matemático.

Los procesos de interpretación (semiosis) que deben llevar a cabo los estudiantes para alcanzar la comprensión pueden ser favorecidos o dificultados por la instrucción. Por tanto, además del análisis de dicha obra, se consideró pertinente la observación de su implementación en un curso de Matemáticas 2 (dirigido a estudiantes de ingeniería) y el posterior análisis de las acciones llevadas a cabo, tanto por parte del profesor como de los estudiantes durante la instrucción. El tiempo que duró la observación corresponde con el utilizado por el profesor en introducir el concepto de Integral Definida de funciones de una variable (primeras seis sesiones de instrucción) y duró hasta que se evaluó por primera vez a los estudiantes (sesión de instrucción número nueve).

Asimismo, con la intención de conocer la comprensión alcanzada por los estudiantes, se diseñó un instrumento cuya aplicación posibilitó la obtención de datos que permitieron elaborar dicha tarea. El análisis de estos datos contribuyó a la identificación de los elementos o factores que intervienen en la comprensión de la Integral Definida de funciones de una variable. Con la intención de profundizar en los hallazgos encontrados en las respuestas al instrumento diseñado, dicho análisis fue complementado con los datos obtenidos a través de una entrevista semi-estructurada a estudiantes seleccionados.

Definición de conceptos

A continuación se presentan (en orden alfabético) las definiciones de algunos términos que se mencionan en este trabajo de investigación.

Función Semiótica: correspondencia que realiza una persona o institución entre una expresión y su contenido, con base en un criterio de correspondencia (Contreras y

Ordoñez, 2006). Este constructo permite reconocer las relaciones que se dan entre distintos objetos matemáticos que entran en juego durante una interacción didáctica.

Lenguaje: Recurso simbólico que permite el intercambio de significados. Dado que los intercambios de significados se dan en un contexto social y cultural, el lenguaje es considerado como una construcción socio-cultural.

Objeto matemático: Cualquier cosa que participe o a la que se haga referencia durante la comunicación de ideas matemáticas o resolución de problemas matemáticos (D'Amore y Godino, 2007).

Principio leibniziano: consiste en considerar en lo infinitamente pequeño los segmentos de curvas como segmentos de recta. Esto es, bajo el principio leibniziano, una curva es una línea poligonal con todos sus vértices sobre la curva. La longitud de cada lado de dicha poligonal es infinitamente pequeña.

Representación: proceso que consiste en poner algo en lugar de otra cosa. Jovchelovitch (2007) afirma que el elemento más importante de la representación yace en su capacidad de producir significado en lo que se refiere al acto comunicativo. Invariablemente, la comunicación y el tratamiento de las ideas matemáticas están mediadas por las representaciones. Al respecto Godino (2003) indica que la representación de un objeto matemático específico puede variar, dependiendo del contexto o de su uso. Godino divide las representaciones de los objetos matemáticos en externas e internas. La representación externa es ostensiva y está basada en el sistema simbólico convencional de las matemáticas. La representación interna es no ostensiva y permite caracterizar las cogniciones (simbolización personal, asignación de significado) que pueden construir los estudiantes de las representaciones externas. Las representaciones internas de los objetos matemáticos pueden hacerse ostensivas a través de sus representaciones externas.

Semiosis: proceso cognitivo (en tiempo real) que consiste en atribuir un significado a un signo. El contenido asociado a una expresión particular depende del contexto en el que se dé el acto comunicativo y del conocimiento previo de quien realiza la semiosis (Godino, 2003). Dado que los procesos de instrucción matemática consisten (en su mayor parte) en procesos semióticos, es importante entender cómo éstos se llevan a cabo para entender la creación de significado de los objetos matemáticos por parte del que aprende.

Significado (de un objeto matemático): el significado de un objeto matemático está referido al uso que se le da en el juego de lenguaje en que participa. Depende del contexto en el que se utiliza un objeto matemático el significado que tenga (Godino, 2003). Es decir, el significado (de un objeto matemático) está ligado a los problemas en los que se le involucra y a las acciones llevadas a cabo para resolver dichos problemas. Durante la comunicación de las ideas matemáticas, el significado de un objeto matemático es relativo a quien hace la interpretación de la expresión: si es el emisor o el receptor del mensaje.

Signo: Entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido (Godino, 2003).

Símbolo: Representación ostensiva de una idea u objeto por una convención socialmente aceptada.

Capítulo 2. Marco teórico

El problema de investigación que se aborda en este trabajo busca identificar factores que intervienen en la comprensión (por parte del estudiante) del concepto de Integral Definida de funciones de una variable acorde al planteamiento encontrado en Salinas et al (2012). Por su naturaleza, éste se aborda en la disciplina científica denominada como Matemática Educativa. En esa rama del conocimiento se han creado marcos teóricos para el desarrollo de proyectos de investigación de los fenómenos que acontecen en la instrucción de las matemáticas. En este capítulo se describe el marco teórico utilizado para el desarrollo de este trabajo de investigación, el cual es denominado Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.

Marcos teóricos en matemática educativa

La matemática educativa, como disciplina científica, "se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático" (Cantoral y Farfán, 2003, p.29). Por tanto, ahí se estudian los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Esta rama del conocimiento "tiene en la actualidad una posición consolidada en muchos países" (Font, 2002, p. 127). En ella, actualmente existen una gran variedad de enfoques de investigación en los reportes de investigación que se desarrollan alrededor del mundo, cada uno de los cuales ha surgido por la necesidad de poder abordar problemas específicos. Algunos de los marcos teóricos y metodológicos con mayor presencia en la literatura actual son la teoría de situaciones didácticas (Brousseau), la teoría de representaciones semióticas (Duval), la etno-matemática (D'Ambrosio), el enfoque APOE (Dubinsky), la teoría antropológico de la didáctica (Chevallard), la teoría de campos conceptuales (Vergnaud), la socio-epistemología (Cantoral y Farfán), entre otros (Nieto, Viramontes y López, 2009).

Cada uno de los enfoques a la investigación en Matemática Educativa presta atención a ciertos aspectos de la problemática didáctica, pero todos persiguen, en última instancia, mejorar los procesos de instrucción de las matemáticas. Al respecto, Socas (2008) indica que un acercamiento enfocado en un aspecto del fenómeno didáctico (epistemológico, didáctico o cognitivo) ocasiona que la mayoría de las investigaciones queden limitadas en sus hallazgos al no considerar las interrelaciones que existen entre estas componentes. Conscientes de esto, un grupo de investigadores españoles han trabajado en el desarrollo del denominado Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, en un intento por unificar de una manera congruente y sistemática los principales enfoques de investigación existentes en la Matemática Educativa actual. Este enfoque teórico es el que se utilizó en el desarrollo del trabajo de Investigación que aquí se reporta.

Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática

Los fenómenos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son muy complejos. Están compuestos por varias dimensiones (acciones del profesor, acciones del estudiante, uso de medios tecnológicos, ambiente en el aula, etc.) y se relacionan entre ellas de una manera intricada. Esto explica, al menos parcialmente, por qué no existe un paradigma predominante (en el sentido kuhnniano) en Matemática Educativa. Por otra parte, la Matemática Educativa, como disciplina científica, es relativamente nueva, al mismo tiempo que existe una gran variedad de antecedentes académicos e intereses particulares de los investigadores de esta área –factores que dificultan la unificación de acercamientos a la investigación en esta disciplina científica.

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007) es resultado de la búsqueda de un marco teórico unificador de los enfoques predominantes en la Matemática Educativa, llevada a cabo por Godino y sus colaboradores. Enseguida se describen elementos de este marco teórico utilizados en el desarrollo de este trabajo.

Entidades primarias

En el EOS se considera que las situaciones problemáticas son el punto de partida de toda la actividad matemática, y a causa de esto la noción de las matemáticas cambia. En este marco teórico, las matemáticas son consideradas con tres aspectos de igual importancia para el estudio de los procesos de instrucción (Godino y Batanero, 1994): (1) como una actividad humana (socialmente compartida) involucrada en la resolución de problemas; (2) como un lenguaje simbólico, creado con el propósito de comunicar los problemas que se abordan en las matemáticas, la forma de resolverlos, de validar los métodos de resolución utilizados y generalizarlos a otros contextos y problemas, y (3) como un sistema conceptual lógicamente estructurado, producto del proceso de construcción de las matemáticas como cuerpo de conocimiento organizado (esto es, surge del proceso de matematización).

Debido a que en el EOS se considera que las prácticas matemáticas y los objetos matemáticos emergen de la necesidad de resolver situaciones problemáticas, los creadores de este enfoque encontraron la necesidad de crear una ontología de los objetos matemáticos acorde a esta postura. Con base en esto, se considera como objetos matemáticos, no son solamente los conceptos y procedimientos matemáticos –como tradicionalmente se considera–, sino también lo son las situaciones problemáticas que se abordan, el lenguaje utilizado (símbolos, gráficos, etc.), las propiedades y atributos asignados a los conceptos matemáticos y los argumentos utilizados para validar los procedimientos empleados en la resolución de problemas (Godino, Batanero y Font, 2007). En el EOS los objetos matemáticos (también denominados 'entidades primarias') son considerados como símbolos de unidades culturales, al ser emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas compartidos por ciertos grupos de personas (Godino, Batanero y Font, 2007). En otras palabras, los objetos matemáticos no se pueden reducir a su definición matemática (como comúnmente se hace en la enseñanza tradicional).

Por otra parte, una práctica matemática se define como toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero y Font, 2007). En la figura 1 se muestra la relación entre los problemas que se abordan en las matemáticas, las prácticas que se desarrollan para su resolución y los objetos matemáticos que emergen de esa actividad (Godino, 2014).

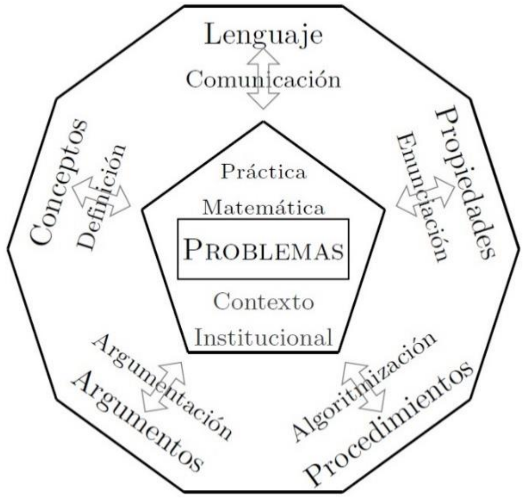


Figura 1. Relación entre los problemas, las prácticas y los objetos matemáticos.

Facetas de las entidades matemáticas

De acuerdo con el EOS, los objetos matemáticos intervienen en las prácticas matemáticas y, dependiendo de su participación en el uso de lenguaje, pueden ser considerados desde las siguientes facetas duales (Contreras y Ordoñez, 2006):

Personal – Institucional

Cuando los sistemas de prácticas son referidos a una persona, se reconocen como prácticas personales, mientras que cuando son referidos a una institución, como prácticas institucionales. En este contexto, una institución "está constituida por todas aquellas personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas" (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006B, p. 122).

Ostensivo – No ostensivo

Se dice que un objeto es ostensivo si es público y observable. Los conceptos matemáticos tienen una naturaleza no ostensiva, pero se pueden hacer públicos a través de sus representaciones lingüísticas (notación, gráficos, símbolos, diagramas, etc.)

Expresión – Contenido

Corresponden a los elementos (antecedente y consecuente) que se relacionan a través de la función semiótica.

Extensivo – Intensivo (Ejemplar – Tipo)

Dependiendo del papel que ocupe en el uso del lenguaje, un objeto matemático puede ser considerado como un caso particular (instancia o ejemplo, como $y = 5x + 3$) o bien como una clase de objetos del mismo tipo (como $y = mx + b$).

Unitario – Sistémico

Los objetos matemáticos pueden ser considerados como entidades unitarias (que se suponen conocidos en el momento de su uso) o bien como sistemas que requieren de una descomposición para su estudio (que emergen a partir de la actividad llevada a cabo).

Significados

Considerando la visión de las matemáticas y la ontología de los objetos matemáticos antes mencionadas, el análisis de los procesos de instrucción matemática sugiere el estudio de las situaciones problemáticas abordadas, el lenguaje matemático utilizado para su comunicación y tratamiento, y las interacciones que se dan entre los objetos matemáticos involucrados. Esto es, se hace necesario considerar las formas de representación de los objetos matemáticos (carácter representacional del lenguaje matemático: símbolos, gráficos, notación, etc.), cómo estas representaciones se utilizan en la actividad matemática (carácter instrumental del lenguaje matemático) y cómo los procesos de interpretación permiten la construcción de significados en los actores involucrados. Debido a la riqueza de representaciones que existen en la instrucción matemática y a las relaciones existentes entre los distintos objetos matemáticos, con el fin de advertir aquellos fenómenos que de alguna manera intervienen durante la instrucción, resulta pertinente un análisis de los procesos de interpretación de los sistemas de representación (utilizados en las matemáticas) que los estudiantes deben realizar en las interacciones didácticas.

El sistema de representación que se utiliza para la transmisión de las ideas durante la instrucción, de alguna manera acarrea consigo los objetos matemáticos. En este sentido se puede decir que el sistema de representación utilizado en matemáticas sirve como instrumento que ocasiona que el aprendizaje ocurra. En otras palabras, el aprendizaje y la comprensión están vinculados directamente con el significado. Por tanto, la caracterización del significado de los objetos matemáticos promovido durante los procesos de instrucción matemática (esto es, la identificación de las prácticas matemáticas efectivamente llevadas a cabo) puede ser de utilidad para los análisis de dichos procesos.

En el EOS, el significado de un objeto matemático se obtiene de una manera pragmática: depende del contexto en el que se utilice, lo que significa un objeto matemático. Así, el uso que se le da a un objeto matemático determina qué significados emergerán de esas prácticas. Es decir, los objetos matemáticos adquieren significado en base a sus usos dentro de una comunidad de prácticas, o en otras palabras, se considera que existe un sistema de prácticas ligado a cada objeto matemático (Contreras y Ordoñez, 2006). Por otra parte, la diversidad de representaciones de un objeto matemático particular permite un aumento de las representaciones cognitivas (internas, no ostensivas) que los estudiantes pueden construir.

Significado personal e institucional de los objetos matemáticos

El significado personal de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas que una persona manifiesta ante un tipo de problemas del cual emerge tal concepto matemático (Contreras y Ordoñez, 2006). Por otra parte, el significado institucional se define como el sistema de prácticas compartidas en el seno de una institución ante un campo de problemas (Godino et al, 2007).

Godino et al (2007), proponen clasificar los significados personales de los objetos matemáticos como sigue:

- Significado personal global: se refiere a la totalidad del sistema de prácticas que una persona puede (potencialmente) manifestar, relativa al objeto matemático.

- Significado personal declarado: es el conjunto de prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones. En este conjunto se podrán encontrar algunas prácticas que estén alineadas a las institucionales como otras que no lo estén.

- Significado personal logrado: subconjunto del significado personal declarado que está acorde a la pauta institucional.

Desde luego, existe la posibilidad de que el significado personal global incluya prácticas no manifestadas en las evaluaciones que estén acordes con las institucionales. Éstas no están consideradas dentro del significado personal logrado porque son de naturaleza no ostensiva. En la figura 2 se muestra esquemáticamente cada uno de los tipos de significados personales ya mencionados (Godino, 2014).

Figura 2. Relación entre los distintos tipos de significados personales.

Con relación al significado institucional, Godino et al (2007) proponen los siguientes tipos:

- Significado institucional de referencia: sistema de prácticas que se utilizan como referencia para la planificación de la instrucción.
- Significado institucional pretendido: sistema de prácticas que se incluyen en la planificación de la instrucción.
- Significado institucional implementado: sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente durante el proceso de instrucción.
- Significado institucional evaluado: sistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

En la figura 3 se muestra esquemáticamente la relación que guardan los distintos tipos de significados institucionales antes mencionados (Godino, 2014).

Figura 3. Relación entre los distintos tipos de significados institucionales.

Análisis ontosemiótico

Bajo este enfoque, la actividad matemática en el aula fundamentalmente consiste en una interacción entre el sistema de representación externo (notacional y formal) utilizado durante los procesos de instrucción y las representaciones cognitivas (mentales internas, no ostensivas) de las nociones matemáticas, bajo ciertas reglas dictadas por los objetos matemáticos empleados en dicha interacción. Dado que el sistema de representación externo sirve como medio de representación de los objetos matemáticos (no ostensivos), las representaciones son las responsables de la construcción de la asignación de significado de dichos objetos matemáticos en la mente de los estudiantes. Un análisis del uso de las representaciones de los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, lenguaje, situaciones problemáticas abordadas, proposiciones, argumentos) involucrados durante las interacciones didácticas posibilita la explicación de la dinámica y evolución de los aprendizajes por parte de los estudiantes. Asimismo, debido a que las representaciones semióticas son utilizadas como el medio de exteriorización de los significados personales de los objetos matemáticos, un análisis de las producciones de los estudiantes (tareas, evaluaciones, participaciones en clase) también puede ser utilizado para explicar los aprendizajes y la comprensión que ellos alcanzan debido a un proceso de instrucción.

En el EOS, la función semiótica es el constructo que permite analizar los procesos de interpretación que los estudiantes deben realizar cuando intentan construir significados de los objetos matemáticos. Cuando dos individuos asignan distintos contenidos a una misma expresión, se ocasiona un impedimento para el aprendizaje y la comprensión, lo cual se denomina ‘conflicto semiótico’ en este marco teórico. Un conflicto semiótico se define como una disparidad entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por dos personas o instituciones en interacción didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Este constructo permite identificar y explicar las potenciales dificultades que tendrán los estudiantes en los procesos de instrucción recibidos. Asimismo, “permite identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego” (Godino, 2003, p. 289).

La función semiótica es, por tanto, el constructo utilizado para el análisis de la complejidad ontosemiótica de los objetos matemáticos en base a textos o clases observadas. Este tipo de análisis permite la identificación de potenciales conflictos semióticos que son tomados en cuenta para el diseño de futuras intervenciones y materiales instruccionales. El análisis ontosemiótico se basa en el análisis del uso del lenguaje matemático, las dependencias que se dan entre distintos objetos matemáticos que intervienen en la comunicación de las ideas matemáticas y las conexiones existentes entre los distintos escenarios (intramatemático, contextual) y las producciones emanadas de tales prácticas. El análisis ontosemiótico de una interacción didáctica consiste en “identificar la trama de funciones semióticas que establecen los agentes participantes (manual-profesor, manual-alumnos, profesor-alumnos) en los procesos de comunicación” (Contreras y Ordoñez, 2006, p.72). Este tipo de análisis indaga en el significado involucrado (en un texto, en una clase), de aquella parte que transmite ideas en la que se explica un concepto o sus aplicaciones (y por tanto, promueve la construcción de su significado en los estudiantes al abordar el sistema de prácticas que le corresponde).

Con este fin se toma en cuenta qué objetos matemáticos (lenguaje, problemas, etc.) participan en la interacción didáctica, bajo qué faceta dual se presentan, qué procesos se llevan a cabo (representación, asignación de significado, generalización, particularización, idealización, etc.), y a partir de la forma en que se configuran éstos en dicha interacción se pueden identificar potenciales conflictos semióticos. En la figura 2 (Godino, 2014) se representa la configuración que se da entre los procesos potencialmente llevados a cabo durante una interacción didáctica.

En este sentido, la faceta personal-institucional permite la identificación de conflictos semióticos, la faceta ostensivo-no ostensivo permite reconocer los signos y sus tipos, la faceta expresión-contenido permite identificar las funciones semióticas involucradas en dichos procesos, la faceta extensivo-intensivo permite identificar el nivel de abstracción de los objetos intervinientes, y la faceta unitario-sistémico permite reconocer los objetos (y sus tipos) que participan en la interacción bajo estudio.

Para llevar a cabo este tipo de análisis, Godino (2003) clasifica las funciones semióticas atendiendo al plano de contenido (significado) como a continuación se menciona.

Significado lingüístico: cuando el contenido de la función semiótica es un elemento lingüístico (expresión, gráfica, etc.)

Significado situacional: cuando el contenido es una situación problema.

Significado conceptual: cuando su contenido es un concepto-definición.

Significado proposicional: cuando su contenido es una propiedad o atributo de un objeto matemático.

Significado actuativo: cuando su contenido es una acción u operación (algoritmo o procedimiento).

Significado argumentativo: cuando su contenido es una argumentación.

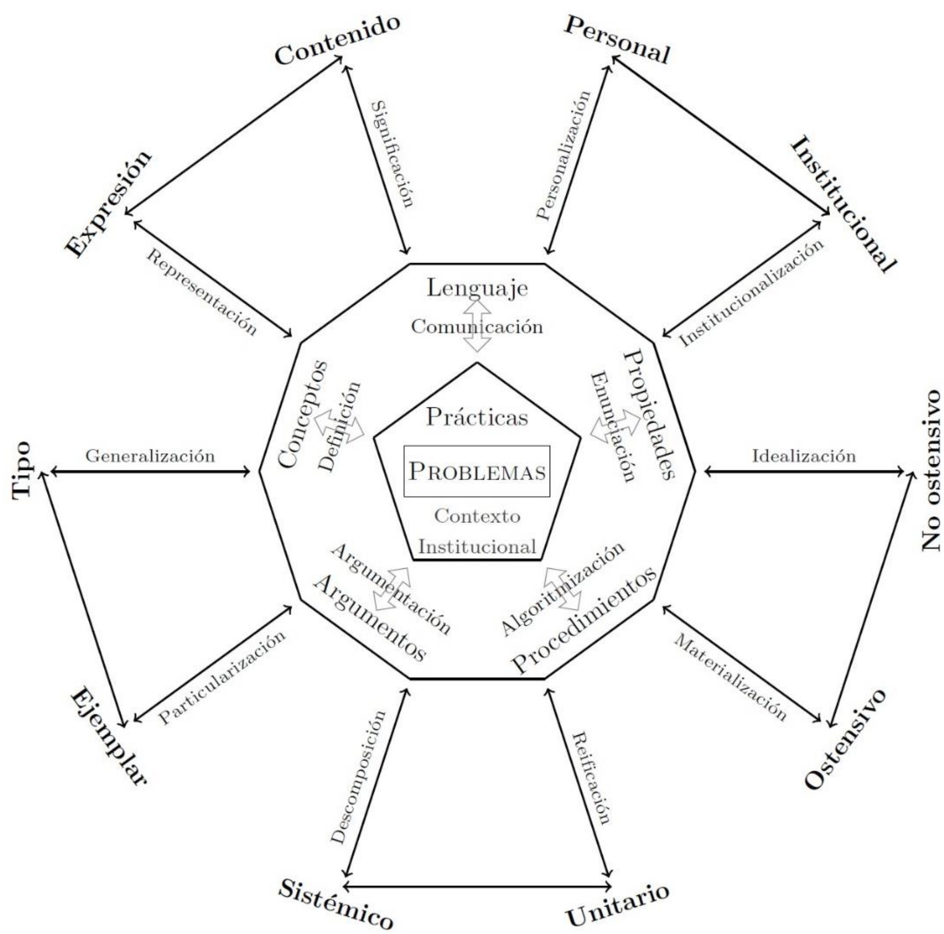


Figura 4. Configuración de los objetos matemáticos en una interacción didáctica.

En el EOS, aprender y comprender se explican en términos de las funciones semióticas identificadas en una persona o institución respecto de un objeto matemático (Godino, 2002). En este marco teórico se considera que el aprendizaje tiene lugar “mediante la participación del sujeto en las comunidades de práctica, el acoplamiento progresivo de los significados personales a los institucionales y la apropiación de los significados institucionales por los estudiantes” (Godino et al, 2006). En la figura 5 se representa esquemáticamente lo anterior.

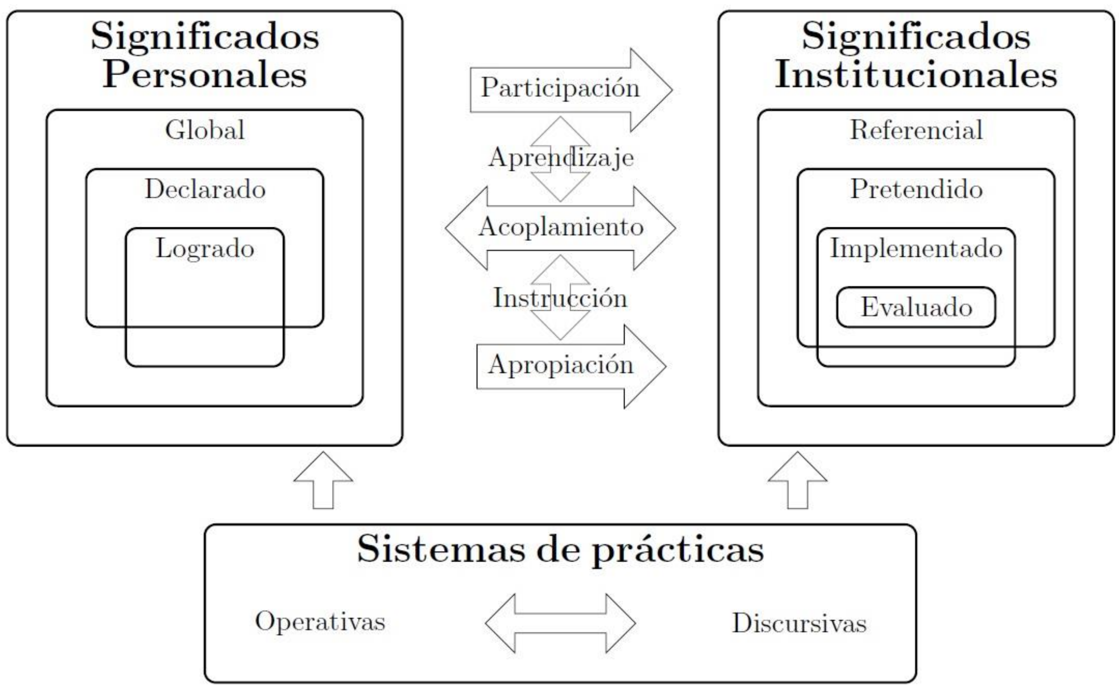


Figura 5. El aprendizaje como un acoplamiento de los significados.

La comprensión en el EOS se entiende, más que como un proceso mental, como una competencia que puede ser evaluada públicamente. Se dice que una persona comprende un objeto matemático cuando lo puede utilizar competentemente en diversas prácticas (Font, 2002). También, la comprensión se entiende en el EOS en términos de las funciones semióticas que una persona puede establecer, en circunstancias fijas, en las que un objeto matemático específico interviene como expresión o como contenido (Godino et al, 2007).

Preguntas de investigación revisitadas

Con este marco teórico como plataforma de visión, considerando un curso en el que se implemente la propuesta dada en Salinas et al (2012), las preguntas de investigación particulares antes mencionadas, se enuncian como:

1. ¿Cuál es el significado institucional de referencia del concepto de Integral de funciones de una variable planteado en Salinas et al (2012)?
2. ¿Cuál es el significado institucional implementado de dicho concepto matemático?
3. ¿Cuál es el significado personal logrado que los estudiantes logran construir?
4. ¿Cuáles son los conflictos semióticos encontrados? (y ¿cómo pueden ser subsanados?)

En atención a la primera pregunta se caracterizaron los significados institucionales de referencia. Para atender la segunda pregunta se caracterizó el significado institucional implementado que promovió el profesor durante la instrucción de dicho concepto matemático. Respecto de la tercera pregunta se caracterizaron los significados personales logrados por los estudiantes relativos al concepto de Integral Definida. Las dificultades para la construcción de dicho concepto fueron reveladas por la identificación de conflictos semióticos tras el contraste de los significados personales y los significados institucionales de referencia e implementado.

El análisis del significado institucional implementado permitió la identificación de potenciales conflictos semióticos durante las interacciones didácticas, lo cual atiende a la cuarta pregunta particular de investigación. En la respuesta a ésta se busca encontrar áreas de oportunidad para la obra de Salinas et al (2012) al igual que para su implementación.

Este trabajo de investigación está centrado en la descripción y análisis de los resultados de la implementación del acercamiento al concepto de Integral Definida planteado en Salinas et al (2012) en el aula con un grupo de estudiantes de primeros semestres de ingeniería. Asimismo, se identifican potenciales conflictos semióticos que pueden ocasionar problemas en el aprendizaje de los estudiantes que asisten a los cursos en los que se implementa dicha obra. Finalmente, se emiten algunas recomendaciones que intenta evadir tales problemas de manera que represente una mejora en la instrucción y puedan ser consideradas para futuras implementaciones de la misma.

En resumen, este trabajo de investigación enfoca su atención prioritariamente a dos dimensiones importantes del fenómeno de interés. Los significados institucionales apuntan a la dimensión epistemológica, al caracterizar el concepto de Integral Definida de funciones de una variable en el acercamiento planteado en Salinas et al (2012) e implementado durante la instrucción. Los significados personales consideran la dimensión cognitiva, pues para el EOS, éstos son considerados como el producto de los procesos de representación e interpretación (semiosis) que ocurren durante la instrucción y aprendizaje de dicho concepto matemático. Otras dimensiones (instruccional, interaccional, etc.) también son consideradas, pero como un medio que permita delimitar con mayor precisión los significados tanto institucionales como personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en un curso en el que se implemente la obra de Salinas et al (2012). Las actividades llevadas a cabo durante la elaboración de este trabajo de investigación se describen en el siguiente capítulo.

Capítulo 3. Metodología

En este capítulo se detallan las actividades que se llevaron a cabo para dar respuesta a las preguntas de investigación específicas ya planteadas, a saber:

1. ¿Cuál es el significado institucional de referencia del concepto de Integral de funciones de una variable planteado en Salinas et al (2012)?
2. ¿Cuál es el significado institucional implementado de dicho concepto matemático?
3. ¿Cuál es el significado personal logrado que los estudiantes logran construir?
4. ¿Cuáles son los conflictos semióticos encontrados? (y ¿cómo pueden ser subsanados?)

Con dicho fin, se llevó a cabo la caracterización de los significados institucionales del concepto de Integral de funciones de una variable que se promueven en la obra mencionada así como los significados personales que los estudiantes construyen tras una instrucción basada en la innovación de interés. Para ello se recolectaron datos cuyos análisis evidencian cómo las dimensiones epistémica, cognitiva e interaccional, se relacionan e intervienen durante la construcción de dichos significados. Específicamente, este estudio tomó en cuenta:

1. El planteamiento presentado en la obra de Salinas et al (2012), específicamente las primeras tres situaciones problemáticas incluidas en la Unidad 1 del tomo dos de dicha obra, en donde se introduce el concepto de Integral,

2. la observación no participante de la implementación en el aula de dicho planteamiento, particularmente de aquellas sesiones en las que se presentó el concepto de Integral Definida, y

3. el aprendizaje y la comprensión alcanzada por los estudiantes, muy particularmente, las respuestas que éstos emitieron a problemas que requieren de la aplicación del concepto de Integral en contextos que no fueron discutidos en clase.

Enseguida se describe el enfoque metodológico empleado en este trabajo de investigación. Asimismo, se detallan algunas cuestiones que aclaran el contexto en el que desarrolló el mismo.

Enfoque metodológico: Estudio de caso

A partir de lo afirmado por Alanís (2008) en torno a lo observado tras la implementación de la obra de la obra de Salinas et al (2012) en cursos de Cálculo a nivel superior, –que estudiantes han logrado establecer la Integral con la cual se calcula de manera exacta el área superficial de un sólido de revolución–, se infiere que el estudio de su implementación podría arrojar luz acerca de las dificultades que deben enfrentar los estudiantes para comprender la Integral Definida de funciones de una variable (y cómo podrían ser allanadas). Con el fin de ahondar más en los procesos de enseñanza y aprendizaje del dicho concepto matemático efectivamente llevados a cabo durante la instrucción, se consideró pertinente tratar metodológicamente la investigación como un estudio de caso. La unidad de análisis constó de aquella parte de la instrucción durante la cual se introdujera el concepto de Integral Definida y hasta la sesión en que se evaluaran los aprendizajes de los estudiantes por parte del profesor.

Un estudio de caso consiste en el estudio de un sistema delimitado (el caso) a lo largo del tiempo a través de la recolección de datos, detallada y a profundidad, utilizando diversas fuentes de información, como observaciones, entrevistas, documentos y material audiovisual (Cresswell, 2007). Merriam (2009) afirma que el estudio de caso cualitativo usualmente se elige por lo que éste puede revelar del fenómeno, por ello conviene utilizarse cuando se está interesado en ganar intuición de lo que está ocurriendo, interpretar observaciones realizadas o descubrir relaciones. Merriam indica que la unidad de análisis es lo que caracteriza al estudio de caso. Stake (2005) sugiere elegir un estudio de caso cuando el entendimiento del caso guíe a un mejor entendimiento de los fenómenos involucrados y posiblemente a una ampliación de la teoría. El estudio de caso permite observar esas relaciones al enfocarse en un tema, considerando la dinámica de la interacción a lo largo de un intervalo de tiempo definido, o bien, enfocándose en un punto del tiempo en particular para observar a profundidad los distintos aspectos del fenómeno observado. Yin (2003) apunta que en el estudio de caso, contrario a los experimentos, de manera deliberada se tienen en cuenta las condiciones contextuales porque se considera que éstas intervienen en el fenómeno de interés.

Naturaleza del caso

La obra de Salinas et al (2012) actualmente está siendo implementada en una institución educativa privada de Nivel Superior al Norte de México. Los cursos denominados “Matemáticas 1”, “Matemáticas 2” y “Matemáticas 3”, utilizan como libro de texto los tomos 1, 2 y 3 de dicha obra, respectivamente. Generalmente a estos cursos se inscriben estudiantes de los primeros semestres de las carreras de ingeniería que se ofrecen en dicha Institución de Nivel Superior. En las fechas en que el trabajo de investigación que aquí se reporta se llevó a cabo, estos cursos duraban 15 semanas y regularmente tenían asignadas dos sesiones de instrucción por semana, cada sesión con una duración de 90 minutos.

El concepto de Integral Definida de funciones de una variable se estudia al inicio del curso Matemáticas 2. El número de sesiones dedicada a su impartición, así como el tipo y la cantidad de tareas asignadas al tema, depende de la planeación elaborada por el profesor del curso. En dicha Institución la aplicación de exámenes está calendarizada desde el inicio del semestre, por lo que la planeación del profesor contempla las fechas en las que aplicará cada evaluación con base en el calendario oficial de la Institución. La primera evaluación generalmente ocurre alrededor de las semanas 5 y 6 después del inicio del semestre.

Todas las sesiones de instrucción del curso observado se llevaron a cabo en una misma aula de clases. La pared frontal del salón soporta una pizarra blanca en la que se puede escribir utilizando marcadores. En el escritorio del salón se contaba con una computadora conectada a un proyector de video que permite exhibir en la pizarra o una pantalla blanca (retráctil) lo que se transmite al monitor de la computadora. También tenía acceso a Internet vía conectividad alámbrica e inalámbrica. En el aula había aproximadamente 40 sillas (tipo “Node”, así denominadas por su fabricante) que facilita el cambio en la distribución de los estudiantes (ubicación dentro del aula), de manera que con facilidad se pueden formar equipos, distribuirse en semicírculo, en líneas o bloques, etc.

Todos los cursos de nivel superior que se ofrecen en la institución sede incorporan una plataforma digital (en línea) de aprendizaje, que con frecuencia fue accedida durante la instrucción por parte del profesor para informar a los estudiantes acerca de la estructura del curso, los contenidos, materiales de apoyo para el estudio, etc. Cabe mencionar que la mencionada plataforma fue utilizada durante el curso, más como un sistema de almacenamiento de los materiales de apoyo y menos como ambiente virtual de aprendizaje.

Participantes

La unidad de análisis de este estudio de caso se seleccionó porque ofreció la oportunidad de estudiar el fenómeno de interés. Específicamente, se consideró que el lugar idóneo para observar la afirmación reportada por Alanís (2008), era un curso en el cual ya se hubiera observado dicha afirmación previamente (en el que se utilizara como referencia para la instrucción la obra de Salinas et al (2012)). El curso de Matemáticas 2 observado fue impartido durante el semestre enero – mayo 2014, y tuvo una asistencia de 35 estudiantes de primeros semestres de alguna ingeniería (25 varones y 10 mujeres).

La mayoría de ellos contaba con una computadora portátil (laptop) y una buena proporción llevaba a clase una calculadora científica de bolsillo. Esta última fue utilizada con frecuencia durante la instrucción para el desarrollo de las actividades programadas por el profesor. Durante la instrucción, generalmente mostraban buena disposición al trabajo, tanto individual como en equipo.

De esos estudiantes inscritos al curso se eligió a seis para ser entrevistados, los cuales nombraremos en este trabajo como Amanda, Bernardo, Claudia, Daniel, Ernesto y Fabiola. Más adelante se analizan las entrevistas elaboradas a Daniel, Claudia y Ernesto. Daniel era un estudiante de segundo semestre de ingeniería en tecnologías computacionales. En sus estudios de bachillerato aprobó un curso de Cálculo cuyo enfoque fue muy tradicional (mecanicista). Daniela era una estudiante de segundo semestre de ingeniería biomédica. Ernesto era estudiante de segundo semestre de ingeniería mecánica eléctrica. De los estudiantes entrevistados, los tres cuyos análisis se incluyen en este trabajo coincidieron en que llevaron un curso de Cálculo (con enfoque tradicional, según comentaron en la entrevista) en bachillerato; de estos tres, Ernesto fue el único que leyó con cierta frecuencia el libro de texto utilizado durante el curso.

Instrumentos

En esta sección se describen los instrumentos utilizados durante el estudio para la obtención de datos cuyo análisis conduzca a dar respuesta a las preguntas de investigación antes enunciadas.

La caracterización del significado institucional se dividió en tres partes. El significado institucional de referencia se caracterizó con el análisis ontosemiótico de una parte de la obra de Salinas et al (2012), el significado institucional implementado a través de la observación de la instrucción y el significado institucional evaluado consistió en la aplicación de un instrumento que permitió reconocer la comprensión alcanzada por los estudiantes. A continuación se dan más detalles de cada uno.

El planteamiento al concepto de Integral Definida de funciones de una variable encontrado en la innovación de interés es importante en este trabajo porque la planeación de la instrucción se lleva a cabo con base en él. La caracterización de dicho planteamiento equivale a la determinación del significado institucional de referencia. Éste consistió en el análisis ontosemiótico de las primeras tres situaciones problema abordadas en la primera unidad del tomo dos de la obra de Salinas et al (2012). En este reporte se incluye el análisis de la situación problema 1. El análisis de las otras dos situaciones problema se incluye de manera sintética con la intención de reconocer un esquema invariante de proceder encontrado en dicho planteamiento a la Integral Definida.

En este trabajo se considera que la instrucción del concepto de Integral Definida de funciones de una variable con base en el planteamiento encontrado en Salinas et al (2012), es una componente importante porque es la que promueve la construcción de los significados de ese concepto matemático en los estudiantes. Por ello se realizó la observación de las sesiones de instrucción en las que se discutieron las primeras tres situaciones problema, utilizadas por el profesor para motivar la emergencia de dicho concepto matemático. Con la intención de influir lo mínimo posible el desarrollo natural del curso, dicha observación se realizó bajo la modalidad no participativa.

Se grabaron en video las primeras siete sesiones de instrucción, las cuales fueron codificadas como sesión 0, sesión 1, etc., hasta la sesión 6. Durante estas sesiones de instrucción, el observador ocupó un lugar en el salón de clase, en una esquina al fondo del salón. Junto a él ubicó la videocámara que estaba soportada por un trípode. La mayor parte del tiempo (salvo cuando trabajan en equipos) los estudiantes participantes en el estudio miraban al frente del salón (donde se encontraba la pizarra sobre la que el profesor con frecuencia proyectaba información relacionada con la clase). El observador realizó notas de campo a lo largo de cada sesión de instrucción que después se detallaron tras el análisis de los videos obtenidos. El análisis de estas notas de campo detalladas permitió caracterizar el significado institucional implementado.

El significado institucional evaluado consiste en el instrumento diseñado ex profeso para este trabajo. Dado que el acercamiento al concepto de Integral Definida implementado durante la instrucción es distinto al acercamiento tradicional, y uno de los objetivos de este trabajo persigue reconocer la comprensión que los estudiantes alcanzan del concepto de Integral Definida –esto es, si los estudiantes pueden aplicar ese concepto matemático en problemas que no han estudiado previamente–, se encontró pertinente el diseño de un instrumento que permitiera el cumplimiento del mencionado objetivo considerando la innovación bajo observación. El instrumento diseñado (incluido en el apéndice A) consta de tres problemas no abordados en clase y cuya resolución necesariamente requiere del uso de la Integral Definida de funciones de una variable. Los problemas incluidos en este instrumento son: (1) cálculo del área de la superficie de un sólido de revolución, (2) cálculo de la masa de un sólido de revolución de densidad variable, y (3) cálculo de la masa de una lámina de densidad variable. La validación de este instrumento estuvo a cargo de uno de los autores de la obra de Salinas et al (2012). En particular, el primer problema incluido en el instrumento es el que Alanís (2008) afirma, estudiantes logran resolver tras la implementación de la innovación mencionada, y que es difícil que resuelvan estudiantes después de una enseñanza tradicional.

Para la caracterización del significado personal logrado, se aplicó a los estudiantes asistentes al curso el instrumento diseñado para tal fin en dos partes. La primera constaba del problema del cálculo del área de la superficie de un sólido de revolución y se incluyó en la primera evaluación aplicada a los estudiantes participantes en el estudio. En la segunda evaluación aplicada por el profesor durante el curso se incluyeron los otros dos problemas del instrumento.

Una vez obtenidas las respuestas de estos problemas, se analizaron para determinar las prácticas manifestadas por los estudiantes y con base en la técnica de máxima variación se seleccionaron a seis estudiantes para invitarlos a una charla (entrevista semi-estructurada) con el observador del curso. A cada uno de ellos se les informó acerca de la naturaleza del trabajo en el que participarían (en caso de aceptar), y una vez que cada uno aceptó, se convino la fecha, lugar y hora de la entrevista. La entrevista semi-estructurada se preparó con la intención de ahondar más en los significados personales que los estudiantes lograron manifestar al contestar dicho instrumento. Al inicio de la entrevista se solicitó permiso (por medio de un consentimiento informado, incluido en el apéndice B) de utilizar la información que se obtuviera de la entrevista, al igual que de las sesiones de instrucción. Todos los entrevistados amablemente aceptaron participar en el estudio y permitieron el uso de la información recabada con fines de investigación. Cada entrevista se transcribió y se analizó en la búsqueda de elementos que permitieran corroborar o desmentir lo encontrado en el análisis de las respuestas a los problemas incluidos en el instrumento que cada participante respondió.

En resumen, los instrumentos utilizados para la caracterización de los significados institucionales fueron:

(1) el análisis ontosemiótico de las primeras tres situaciones problema abordadas en la Unidad 1 del tomo 2 de la obra de Salinas et al (2012),
(2) observación (no participativa) y análisis de las sesiones de instrucción,
(3) diseño de un instrumento para determinar si los estudiantes alcanzan la comprensión del concepto de Integral Definida.

Y para la determinación de los significados personales se utilizaron los siguientes instrumentos:

(1) aplicación del instrumento diseñado,
(2) análisis de las respuestas expresadas por los estudiantes y

(3) entrevista (semi-estructurada) con participantes seleccionados y su respectivo análisis.

La validación de los resultados de cada parte se realiza por medio de la triangulación. Los significados institucionales fueron validados por triangulación de los resultados del análisis ontosemiótico, lo observado en clase y la verificación de los resultados respectivos por parte del profesor del curso. De manera semejante, los significados personales son validados por la triangulación de los resultados del análisis del instrumento aplicado, la entrevista y los resultados de los significados institucionales.

En el siguiente capítulo se desarrolla cada uno de los análisis mencionados y se mencionan los principales resultados observados.

Capítulo 4. Análisis y discusión de resultados

En este apartado se describen los análisis elaborados para la caracterización de los significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable (acorde a lo que se mencionó en la metodología). Primero se incluyen los análisis utilizados para la caracterización del significado institucional, y después los utilizados para la determinación de los significados personales. Los resultados más sobresalientes de estos análisis serán sintetizados antes de finalizar el presente capítulo.

Caracterización del significado institucional de referencia

Para caracterizar el significado institucional de referencia se realizó el análisis ontosemiótico del concepto de Integral acorde a la obra de Salinas et al (2012). Este concepto matemático se introduce con base en problemáticas en la Unidad 1 del tomo dos de dicha obra. Las situaciones problemáticas que se utilizan para introducir el acercamiento al referido concepto matemático consisten en cálculo de las siguientes cualidades: (1) longitud de arco de la gráfica de una curva, (2) área de una región del plano delimitada por una curva, (3) volumen de un sólido de revolución, (4) masa de un cable con densidad variable y (5) fuerza hidrostática sobre una pared vertical debida a la acción del agua.

Para este trabajo se consideró la elaboración del análisis ontosemiótico de las primeras tres situaciones problemáticas por dos razones: (1) durante la instrucción se cubren estas tres situaciones problema (en el mismo orden que en la obra de referencia) antes de evaluar por primera vez el aprendizaje de los estudiantes, y por tanto, el sistema de prácticas que los estudiantes pueden potencialmente externar al responder dicha evaluación está basado en la instrucción de estas tres; (2) en Salinas et al (2012), estas tres situaciones problema se abordan bajo un mismo esquema de solución, evidenciado por la semejanza de la trama de funciones semióticas que aparecen en el análisis, siendo éstas la misma cantidad en número y del mismo tipo (en orden una a una, respectivamente). En este sentido, la naturaleza de cada función semiótica en la trama que éstas establecen es muy semejante, pues varían solamente en la expresión o el contenido al cual apuntan, en cada respectivo caso, dependiendo de la situación problema (longitud de arco, área de una región del plano, volumen). Por ello en este reporte se muestra explícitamente el análisis ontosemiótico de una situación problemática y después con base en éste, se sintetizan los análisis de las otras dos situaciones problema.

Enseguida se incluye el análisis ontosemiótico de la primera situación problemática, el cual se realiza en dos partes. En la primera se enlistan los objetos matemáticos que intervienen en la discusión de dicha situación problemática. Ahí se caracteriza el lenguaje utilizado, la situación problemática abordada, los procedimientos empleados, los conceptos involucrados, sus respectivas propiedades y los argumentos utilizados en dicha discusión. En la segunda parte se muestra la secuencia de funciones semióticas que el lector debe llevar a cabo para la construcción del significado ahí promovido. Para la elaboración del análisis ontosemiótico, la situación problema 1 fue dividida en unidades textuales de análisis tal y como se muestra en el apéndice C (texto extraído de Salinas et al (2012), Vol. 2, pp. 4-11). La parte principal del análisis ontosemiótico se describe en términos de las funciones semióticas que se establecen en la presentación de la situación problema 1 y de su respectiva discusión.

La codificación utilizada para nombrar las unidades textuales de análisis es la siguiente: U-A-B, donde A es un dígito que indica la situación problema abordada (1 corresponde al cálculo de la longitud de arco, 2 corresponde al cálculo del área, 3 al cálculo del volumen) y B es el número de la unidad de análisis de la situación problema analizada. Por otra parte, para las funciones semióticas se nombraron como FS-A-B, donde A es un dígito que indica la situación problema en la cual se encuentra y B es un dígito que identifica a cada función semiótica. Los valores asignados a estos dígitos (A, B) son siempre consecutivos, de acuerdo al orden de aparición, tanto para las unidades de análisis como para las funciones semióticas encontradas. En las figuras que se incluyen durante el análisis ontosemiótico (correspondientes a las funciones semióticas detectadas) invariablemente se muestra, a la izquierda, la expresión de la función semiótica y a la derecha su contenido. Sobre la línea que une ambos elementos (expresión y contenido) se muestra el título asignado a la función semiótica, de acuerdo con la codificación antes mencionada.

Análisis ontosemiótico de la situación problema 1

Objetos matemáticos involucrados

Situaciones problemáticas

Cálculo de la longitud de arco de la gráfica de la función $y = x^2$ en el intervalo $(0,2)$.

Lenguaje (Expresiones)

Gráfica (de una función), función, segmento (de recta), arco de curva, longitud, valor aproximado (aproximación), dividir (un arco de curva), $y = y(x) = x^2$, x (para denotar el eje horizontal, para denotar la variable independiente en una relación de dependencia funcional), y (para denotar el eje vertical, para denotar la variable independiente en una relación de dependencia funcional).

Procedimientos

Para calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de la función $y = x^2$ desde el punto $\left(0, y(0)\right)$ hasta el punto $\left(2, y(2)\right)$:

1) dividir el intervalo $(0,2)$ sobre el eje x en n (primero en dos y luego en cuatro) subintervalos de igual longitud;
2) calcular las coordenadas de los extremos del arco de curva para cada uno de esos subintervalos ($(0, y(0))$, $\left(x_1, y(x_1)\right)$, $\cdots$, $\left(2, y(2)\right)$);
3) calcular la distancia entre pares de puntos consecutivos (en este paso se supone que el arco de curva con extremos en $\left(x_{i-1}, y(x_{i-1})\right)$ y $\left(x_i, y(x_i)\right)$ es parecido a un segmento de recta, y ello permite aproximar la longitud de arco de esa parte);
4) sumar las distancias obtenidas.

Para calcular de manera exacta la longitud de arco de la gráfica de la función $y = y(x)$ desde el punto $\left(a, y(a)\right)$ hasta el punto $\left(b, y(b)\right)$:

1) dividir el intervalo (a, b) sobre el eje x en una cantidad infinita de subintervalos (cada uno de longitud infinitamente pequeña);
2) calcular las coordenadas de los extremos del arco de curva para uno de esos subintervalos ($(x, y(x))$, $\left(x + dx, y(x + dx)\right)$);
3) calcular la longitud del arco de curva aplicando el teorema de Pitágoras (en este paso se supone que el arco de curva con extremos en $\left(x_{i-1}, y(x_{i-1})\right)$ y $\left(x_i, y(x_i)\right)$ es un segmento de recta);
4) sumar las distancias obtenidas desde $x = a$ hasta $x = b$.

Conceptos

Calcular, valor aproximado (aproximación), gráfica (de una función), función, segmento (de recta), arco de curva, longitud de arco.

Propiedades

Un arco de curva infinitamente pequeño es recto (U-1-22; U-1-24)

Argumentos

"al ir considerando un número mayor de divisiones del arco en partes cada vez más pequeñas, éstas son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para la longitud de cada parte suponiendo que es recta, es intuitivamente más cercana a su valor exacto." (U-1-11)

"Concibamos al arco de la gráfica de una función $y = y(x)$,… como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que, por su pequeñez, cada uno de ellos sea recto" (U-1-22)

Funciones semióticas

En U-1-1 se hace referencia a la gráfica de la función $y = x^2$. Se establece con esto una función semiótica FS-1-1 (representada en la figura 6), cuya expresión es U-1-1 y cuyo contenido es un ostensivo gráfico (la gráfica de la función $y = x^2$). Tanto en U-1-2 como en U-1-3 se muestra una parte de dicha gráfica (ostensivo).

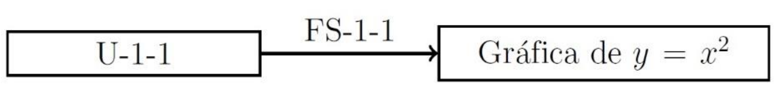


Figura 6. Función semiótica FS-1-1.

En U-1-2 se establecen dos funciones semióticas. La primera, FS-1-2 se encarga de delimitar el objeto (gráfica de $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$) del cual se desea calcular una cualidad (la longitud de arco) y se denota la magnitud de dicha cualidad con la literal L. La expresión de FS-1-2 es, entonces, "Calcula un valor aproximado de la longitud L del arco de la gráfica de $y = y(x) = x^2$ desde el punto $(0, y(0))$ hasta el punto $(2, y(2))$”, y su contenido es “El todo”, es decir, aquello que se desea calcular. A la parte de U-1-2 que funciona como la expresión de FS-1-2 se denomina U-1-2A para representar la función semiótica en la Figura 7.

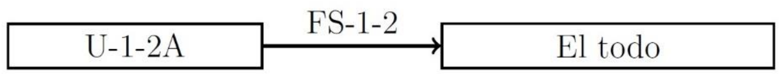


Figura 7. Función semiótica FS-1-2.

Cabe mencionar que la notación utilizada en U-1-2-A para denotar a la función matemática indica, en una misma expresión ($y = y(x) = x^2$) que el valor de la variable dependiente y depende del valor de la variable independiente x ($y = y(x)$), y al mismo tiempo, se explicita la forma de esa dependencia ($y = x^2$).

La otra función semiótica, denotada por FS-1-3 (representada en la figura 8), promueve un significado actuativo al indicar cómo se debe realizar el cálculo aproximado solicitado en U-1-2A. La expresión de FS-1-3 es “Para ello divide al arco en dos partes, tal y como se indica en la siguiente figura, y supón que esas dos partes son segmentos de recta”, expresión que denominaremos por U-1-2B y el contenido de FS-1-3 es un significado actuativo.

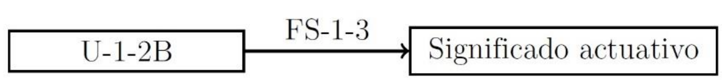


Figura 8. Función semiótica FS-1-3.

En U-1-3 se hace referencia a U-1-2, promoviendo el mismo significado actuativo, con una ligera modificación: la cantidad de partes en las que se divide al todo aumenta en 2. Aquí se forma la función semiótica FS-1-4 (representada en la figura 9), cuya expresión es U-1-3 y cuyo contenido es un significado actuativo.

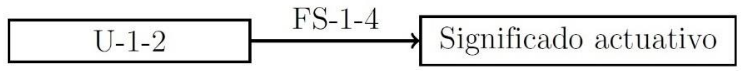


Figura 9. Función semiótica FS-1-4.

Dado que las funciones semióticas FS-1-3 y FS-1-4 promueven el mismo significado actuativo, en conjunto establecen un esquema que permite calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica considerada en la situación problema 1.

En U-1-4 se establece una función semiótica del tipo argumentativo, al solicitar la justificación de que las aproximaciones mejoran con un aumento en la cantidad de divisiones del todo. Se establece una función semiótica (FS-1-5, representada en la figura 10) cuya expresión es U-1-4 y cuyo contenido es un significado argumentativo.

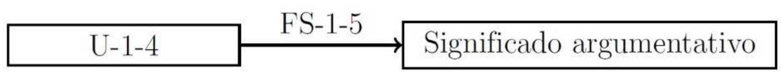


Figura 10. Función semiótica FS-1-5.

La situación problema 1 está conformada por las unidades de análisis U-1-1, U-1-2, U-1-3 y U-1-4. En conjunto, éstas forman la expresión de una función semiótica (FS-1-6, representada en la figura 11) cuyo contenido es la situación problema 1.

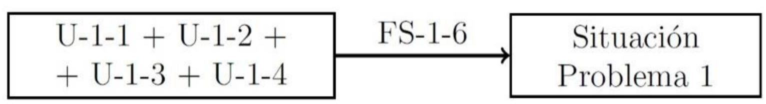


Figura 11. Función semiótica FS-1-6.

La discusión de esta situación problema abarca desde la unidad de análisis U-1-5 hasta la U-1-13. Enseguida se da el análisis ontosemiótico de esta parte del texto.

En U-1-5 se da el procedimiento para el cálculo de la distancia entre dos puntos, con base en el teorema de Pitágoras, aún y cuando se supone que el lector tiene este conocimiento previo (la obra analizada está dirigida al nivel superior y todo curso de Cálculo incluye en el conocimiento previo dicho teorema). Esta unidad de análisis está justificada en la discusión de la situación problema por ser el segmento de recta el objeto geométrico utilizado para aproximar la longitud de arco. En U-1-6 se expresa de manera algebraica la forma de calcular dicha distancia que corresponde a la longitud del segmento cuyos puntos extremos P y Q son conocidos. Se establece por tanto una función semiótica FS-1-7 (representada en la figura 12) cuya expresión es el teorema de Pitágoras y cuyo contenido es la longitud de un segmento de recta con extremos son conocidos.

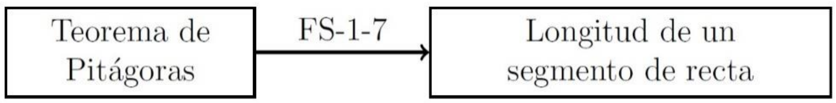


Figura 12. Función semiótica FS-1-7.

Con base en FS-1-7 y FS-1-5 en U-1-7, se hace un primer cálculo aproximado del valor de L. En esta oportunidad, se especifican las coordenadas de los puntos que sirven de extremos de los segmentos de recta que son utilizados para estimar la longitud de arco en cada una de las partes en que el todo fue dividido. Esto corresponde con la analogía del principio leibniziano para un número finito de divisiones del todo. Con ello se muestran cada una de las partes en que el todo se dividió para la resolución de lo solicitado en U-1-2. Así, se establece una función semiótica (FS-1-8) cuya expresión es el arco de curva de la gráfica de $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$ (esto es, el todo) y cuyo contenido es la poligonal con vértices en los puntos $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$ y $P_2(2,4)$. En la figura 13 se representa esta función semiótica.

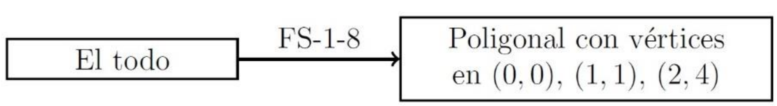


Figura 13. Función semiótica FS-1-8.

Sin embargo, en U-1-7 no se especifica la forma para determinar esos puntos, solamente se dan sus coordenadas. Asimismo, ni en U-1-2, ni en U-1-3 se indica la forma en que se debe dividir al todo. En esas unidades de análisis se menciona “tal y como se indica en la siguiente figura”. Los autores consideran transparente para el lector el hecho de que las abscisas de puntos consecutivos P_i y P_{i+1} están igualmente espaciados.

El significado actuativo evocado en FS-1-3 se desarrolla en U-1-7 promoviendo el proceso de semiosis mostrado en FS-1-8. Esto es, el cálculo aproximado de L se realiza con base en la fórmula para el cálculo de la distancia entre dos puntos incluido en U-1-6, y el ostensivo gráfico incluido en U-1-7, apoya al lector en la construcción del mencionado significado actuativo. En concreto, se dividió al arco de curva en dos partes y se utilizan las literales L_1 y L_2 para denotar las longitudes de cada una de ellas, cuyos valores se aproximan suponiendo que cada arco de curva es un segmento recto.

En U-1-8 se obtiene la aproximación de la longitud del arco considerado en la situación problema 1 al sumar las aproximaciones de las partes en las que éste ha sido dividido. Es decir, L queda expresado como la suma de las longitudes de cada una de las partes en que fue dividido el todo. Se tiene aquí una función semiótica FS-1-9 cuya expresión es el valor de L y cuyo contenido es la suma de las longitudes de las partes en las que fue dividido el todo: $L_1 + L_2$. Esta función semiótica se representa en la figura 14.

$$\boxed{L} \xrightarrow{\text{FS-1-9}} \boxed{L_1 + L_2}$$

Figura 14. Función semiótica FS-1-9.

En U-1-9 se realiza la misma acción que en U-1-7: se considera al arco de la gráfica de la función $y = x^2$ (el todo) como dividido en cuatro partes; cada una de ellas se especifica con base en sus extremos: $P_0(0,0)$, $P_1(0.5,0.25)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1.5,2.25)$ y

$P_4(2{,}4)$. Se establece una función semiótica (FS-1-10, representada en la figura 15) muy similar a FS-1-8, pero en este caso, el contenido consiste de una poligonal con vértices en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, recién mencionados.

$$\boxed{\text{El todo}} \xrightarrow{\text{FS-1-10}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Poligonal con vértices en } (0,0),\\ (0.5, 0.25),\ (1,1),\ (1.5, 2.25),\ (2,4),\end{array}}$$

Figura 15. Función semiótica FS-1-10.

En esta ocasión, los valores de las longitudes de cada una de las cuatro partes se denota con las literales L_1, L_2, L_3 y L_4, las cuales se aproximan aplicando el mismo supuesto: que en cada parte la curva puede reemplazarse por un segmento de recta tal que los extremos de ambos (la curva y el segmento) coincidan. Al igual que en U-1-7, no se indica la forma en que se hace la división del todo.

De manera semejante a U-1-8, en la unidad de análisis U-1-10, se vuelve a calcular una nueva aproximación del valor de L, pero en este caso, sumando las correspondientes aproximaciones obtenidas de L_1, L_2, L_3 y L_4. Con ello se tiene una función semiótica (FS-1-11, representada en la figura 16) muy similar a FS-1-9, pero en esta ocasión con cuatro sumandos en su contenido, acorde a lo que se indica en U-1-10: $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

$$\boxed{L} \xrightarrow{\text{FS-1-11}} \boxed{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}$$

Figura 16. Función semiótica FS-1-11.

En U-1-11 se da un significado argumentativo, al indicar que “al ir considerando un número mayor de divisiones del arco en partes cada vez más pequeñas, éstas son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para la longitud de cada parte suponiendo que es recta, es intuitivamente más cercana a su valor exacto.” Por esto se tiene una función semiótica FS-1-12, cuya expresión es U-1-11 y cuyo contenido es un significado argumentativo. Esta función semiótica se representa en la figura 17.

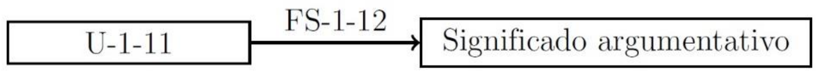


Figura 17. Función semiótica FS-1-12.

En conjunto, las unidades de análisis, U-1-7, U-1-8, U-1-9 y U-1-10, promueven un esquema de proceder (procedimiento) cuya pertinencia queda justificada en U-1-11. En U-1-12 se muestra más evidencia de lo argumentado en U-1-11, al presentar una tabla en cuya primera columna se muestran valores de n (el número de partes en que se dividió el todo) y en su segunda columna sus correspondientes valores aproximados de L. Aquí se tiene otra función semiótica FS-1-13 cuya expresión es U-1-12 y cuyo contenido apunta a un significado argumentativo que se basa en evidencia numérica. La función semiótica FS-1-13 se representa en la figura 18.

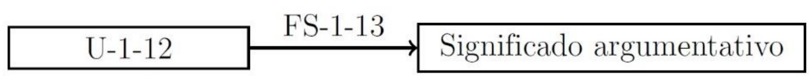


Figura 18. Función semiótica FS-1-13.

Se considera que el proceso de semiosis promovido en FS-1-13 es un paso crucial en la construcción del significado actuativo planteado para resolver la SP-1, pues además de evidenciar su veracidad, presenta de una manera lingüística el terreno para favorecer la construcción de una faceta intensiva a partir de casos extensivos (además de los presentados en las funciones semióticas FS-1-8 y FS-1-10). También se puede afirmar que FS-1-13 sintetiza el significado actuativo que se promueve en FS-1-4 y se justifica en FS-1-12.

En U-1-13 se indica que el valor exacto de L se podrá calcular con un método simbólico más adelante. Sirve como una preparación para la discusión de las consideraciones de la SP-1. La primera parte de dicha discusión se inicia generalizando el proceso del cálculo de la longitud de arco a cualquier gráfica.

En U-1-14 se hacen, al menos, dos generalizaciones de la discusión previamente hecha (que incluye desde la U-1-1 hasta la U-1-13). En primer lugar, se generaliza la función, pues pasa de un extensivo ($y = x^2$) a su intensivo correspondiente ($y = y(x)$, que representa cualquier función). En segundo lugar, de inicio se consideró el arco de curva con extremos en los puntos $(0, y(0))$ y $(2, y(2))$ y se pasa a tomar en cuenta el arco de curva con extremos en cualesquiera dos puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$ sobre la gráfica de dicha función. Por tanto, la función semiótica que se construye en este párrafo (FS-1-14, representada en la figura 19) tiene por expresión al todo en su forma extensiva (ejemplar) y su contenido es el todo, pero en su forma intensiva (tipo).

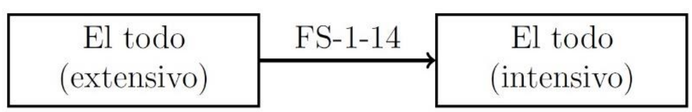


Figura 19. Función semiótica FS-1-14.

El ostensivo gráfico que se muestra en U-1-14 ayuda a la construcción del significado promovido en FS-1-14. La notación $y = y(x)$ utilizada en esta unidad de análisis permite indicar dos cosas: (1) que los valores de la variable y dependen de los valores de la variable x, al igual que (2) la dependencia entre las variables x y y es del tipo funcional (en el sentido de función matemática). La primera vez que se menciona, se trata de un extensivo (explícitamente, $y = y(x) = x^2$), pero en el segundo caso, de un intensivo ("cualquier función $y = y(x)$"). Por tanto, se puede afirmar que el símbolo

“$y = y(x)$” aparece en dos facetas en una misma oración, lo cual aumenta la complejidad ontosemiótica de las unidades de análisis en las que este símbolo se incluye. Esto puede evitarse utilizando $y = x^2$ en lugar de $y = y(x) = x^2$. Cabe resaltar que la notación utilizada en el mencionado símbolo parece tener la intención de indicar la forma de calcular las ordenadas de los puntos que delimitan el arco de curva de interés en la situación problema.

En U-1-15 se indica la forma apropiada de dividir el arco curva con extremos en $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$ en n partes, algo que se consideró transparente en U-1-2, U-1-3, U-1-7 y U-1-9. Aunque, el procedimiento queda explícito, se transmite con un mayor nivel de abstracción que, comparado con el utilizado en las previas unidades de análisis, porque ahora se trata de un intensivo (tipo) mientras que antes se consideraron extensivos (ejemplar), los cuales sirven de guía. El ostensivo gráfico incluido en U-1-15 ayuda en la construcción del significado actuativo para el caso general.

Hasta este punto (U-1-15) se menciona que es el arco con extremos en los puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$ el que se dividirá, pero se indica solamente que se divide el intervalo $[a, b]$ en el eje x en n partes iguales. Con base en el conocimiento previo al Cálculo, el lector debe reconocer que las ordenadas de los puntos P_0, P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}, P_n se calculan a partir de x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, x_n, respectivamente, utilizando la expresión $y = y(x)$.

En U-1-16 se indica, a primera vista, la forma de calcular el valor de Δx dependiendo de los valores de a, b y n. Pero considerando el ostensivo gráfico incluido en U-1-15, se percibe entonces que para dividir el todo (el arco de curva cuya longitud se desea calcular), primero se particiona el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual tamaño (Δx). A partir de los extremos x_{i-1} y x_i de cada subintervalo, se calculan las ordenadas $y(x_{i-1})$ y $y(x_i)$ de los extremos P_{i-1} y P_i de la parte correspondiente del arco. Esto no se especifica cuando se realizan las aproximaciones iniciales (U-1-7 y U-1-9, faceta extensiva), sino hasta que se cubre el caso general (U-1-16, faceta intensiva).

La forma en que se debe dividir al todo se transmite a través de una función semiótica (FS-1-15) con U-1-15 y U-1-16 como expresión, cuyo contenido es un significado actuativo. En la figura 20 se representa la función semiótica FS-1-15.

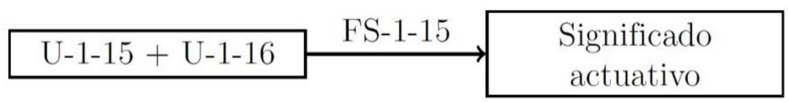


Figura 20. Función semiótica FS-1-15.

En U-1-17, con base en el ostensivo gráfico incluido en U-1-15, se hace corresponder una literal L_i con el valor de la longitud de una parte genérica del arco (intensivo, con extremos en P_{i-1} y P_i). Después, con esta notación, se realiza el proceso semiótico llevado a cabo en FS-1-9 y FS-1-11 (faceta extensiva), pero ahora con el caso general (faceta intensiva), pues el número de divisiones (n) no tiene asignado un valor específico, sino que puede ser cualquier número natural. Aquí se establece, por tanto, otra función semiótica (FS-1-16) cuya expresión es L y cuyo contenido es $L_1 + L_2 + \cdots + L_{n-1} + L_n$.

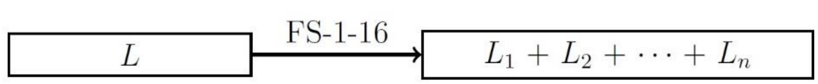


Figura 21. Función semiótica FS-1-16.

Algo que debe tomarse en cuenta es que se utiliza la notación sigma para indicar la suma de todas las L_i. Específicamente,

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Los autores suponen que el lector está familiarizado con esta notación, lo cual no parece fuera de lugar, pues el texto está dirigido a estudiantes de los primeros semestres de ingeniería (Nivel Superior). Sin embargo, Lee y Martínez-Planell (2013), indican que el uso de la notación sigma sin su contraparte numérica en la presentación de las integrales (de dos y tres variables) afecta a una gran cantidad de estudiantes. Con todo, se considera que la tabla incluida en U-1-12 podría utilizarse como referencia a la contraparte numérica del contenido de la función semiótica FS-1-16 para allanar la dificultad reportada por los referidos investigadores.

En U-1-18 en primer lugar se aplica el análogo del principio leibniziano a la curva (para el caso n finito), al afirmar que “los arcos P_0P_1, P_1P_2, $\cdots$, $P_{n-1}P_n$, son ‘casi’ segmentos de recta”. Este argumento justifica el procedimiento utilizado para obtener la aproximación. Éste tiene como base el parecido visual que tienen las partes del arco y los segmentos (lados) de la poligonal utilizada para representar a la curva, cuando n es suficientemente grande y la curva es suave (como lo es la gráfica de $y = x^2$, la cual fue utilizada en la primera parte de esta situación problema). Aquí se tiene una función semiótica (FS-1-17, representada en la figura 22) que tiene en su expresión la gráfica de la función, es decir, la curva como ente geométrico y en su contenido a la poligonal que se utiliza para sustituirla.

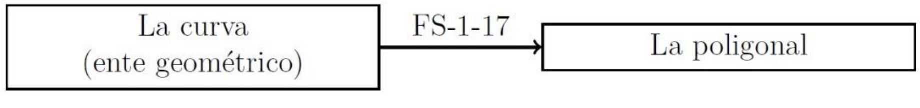


Figura 22. Función Semiótica FS-1-17.

En segundo lugar, se expresan los valores aproximados de L_1, L_2, $\cdots$, L_n, en el lenguaje algebraico, con base en la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

En U-1-19 algebraicamente se establece que el valor de la longitud de arco de la parte de la gráfica de $y = x^2$ (la cualidad del todo a calcular), denotado por la literal L, es aproximadamente igual a la suma de las longitudes de la poligonal con vértices en los extremos de las partes en la que la curva se dividió. Con ello se establece otra función semiótica (FS-1-18), cuya expresión es L y cuyo contenido es la longitud de dicha poligonal. La figura 23 muestra una representación de FS-1-18.

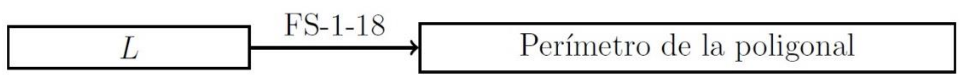


Figura 23. Función semiótica FS-1-18.

En conjunto, las unidades de análisis U-1-15, U-1-16, U-1-17, U-1-18 y U-1-19 transmiten un procedimiento para calcular de manera aproximada la longitud de arco de una parte de la gráfica de una función. Se establece con ello la función semiótica FS-1-19 (representada en la figura 24) cuya expresión es la concatenación de las unidades de análisis desde U-1-15 hasta U-1-19 y cuyo contenido es un significado actuativo que permite resolver la situación problema abordada.

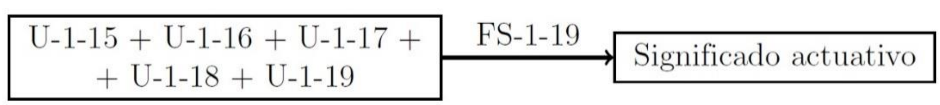


Figura 24. Función semiótica FS-1-19.

En U-1-20, con base en el infinito potencial, se modifica dicho significado actuativo (contenido de FS-1-19) para obtener un procedimiento con el cual es posible calcular de manera exacta la longitud de arco de una parte de la gráfica de una función. Ahí se argumenta que conforme los arcos (refiriéndose a las partes en las que se dividió la curva) son más pequeños, las estimaciones obtenidas con el procedimiento planteado son cada vez más precisas. En realidad, se está extrapolando el significado actuativo promovido en FS-1-19 partiendo de un número finito de divisiones a una cantidad infinita de partes. Es entonces cuando se produce la emergencia del concepto de Integral Definida de funciones de una variable a cambio de un incremento en el nivel de abstracción y generalidad del significado actuativo promovido en FS-1-18.

Cabe mencionar que, en este punto, el significado de la Integral Definida es de naturaleza actuativa más que conceptual (entendido conceptual como un concepto matemático). Es decir, hasta este punto, se tiene una faceta sistemática más que unitaria del concepto de Integral Definida de funciones de una variable. La faceta unitaria (vista la Integral como un concepto matemático) interviene hasta la siguiente sección (representando el valor exacto como una Integral) en donde se introduce la notación respectiva del símbolo de Integral $\left(\int\right)$. En efecto, en la actual unidad de análisis (U-1-20) se afirma: "De hecho el valor exacto de L es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito" e inmediatamente después se expresa con la notación convencionalmente aceptada en matemáticas:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2}$$

La sección titulada "representando el valor exacto como una Integral" comprende las unidades de análisis U-1-22 a U-1-29. En la primera de ellas, en primer lugar se delimita al todo, en este caso, en su faceta intensiva (tipo) cuando se menciona: "Concibamos al arco de la gráfica de una función $y = y(x)$, desde el punto donde $x = a$ hasta el punto donde $x = b$". Esto se ha llevado a cabo repetidas veces antes, por lo que, aún y cuando se trata de un caso general (de abstracción elevada respecto de los anteriores), se considera que no conlleva dificultades mayores en su interpretación, pues en este caso, se trata de una reiteración cuyo andamiaje ha sido establecido previamente. Después, también en U-1-22, se menciona que se considera al arco “como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, cada uno de ellos sea recto”. Aquí se hace uso del principio leibniziano, por medio de un proceso análogo al que se realiza en la FS-1-17. En este caso, se considera que la poligonal está formada de lados “infinitamente pequeños”, lo cual aumenta considerablemente el nivel de abstracción del proceso llevado a cabo para su interpretación. Esta es la primera ocasión en que se hace referencia a las cantidades “infinitamente pequeñas”, lo cual implica que no han sido ni explicadas ni definidas. Este vacío de significado podría ocasionar dificultades para la cabal comprensión del significado institucional, pues de éste depende la definición del concepto de Integral Definida planteada en la obra analizada.

Cabe mencionar que en U-1-20 se menciona que “el valor exacto de L es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito” y en U-1-21 se indica que “el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes produce aproximaciones para la longitud de arco que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto”. Aunque en estas dos citas se utiliza la idea dinámica de límite (infinito potencial) y en U-1-22 se refieren a las cantidades infinitamente pequeñas como algo estático (infinito actual), éstas pueden servir como andamiaje (en el sentido de Vygotsky) que permita la construcción del significado de la expresión “infinitamente pequeño”, requerida.

De los procesos de semiosis que se llevan a cabo en U-1-22 conviene resaltar (para los fines de este trabajo) el análogo con la función semiótica FS-1-17. Para ello, definimos U-1-22B ("como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, cada uno de ellos sea recto") y con base en esta subunidad de análisis, consideraremos la función semiótica FS-1-20, cuya expresión es la parte de la gráfica de la función cuya longitud se desea cuantificar (el todo, visto como ente geométrico) y cuyo contenido es la línea poligonal (vista como ente geométrico) con todos sus vértices sobre la gráfica de la función $y = y(x)$ y cuyos lados tienen longitud infinitamente pequeña. Esta función semiótica se representa en la figura 25.

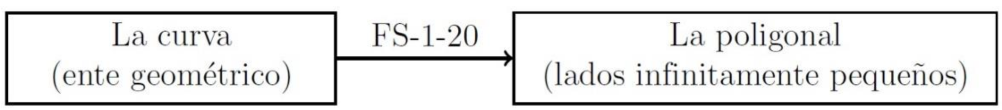


Figura 25. Función semiótica FS-1-20.

En U-1-22C ("en la siguiente figura se muestra de manera genérica uno de esos segmentos, cuya longitud infinitamente pequeña representaremos por el símbolo dL"), se hace referencia a un ostensivo gráfico (incluido en U-1-22). En esta parte, se introduce un elemento del lenguaje, específicamente la notación empleada en las cantidades infinitamente pequeñas, la cual consiste en anteponer la literal d a la literal que representa el valor de la cantidad variable referida (en el caso de la SP-1, L). Cabe mencionar que en la figura incluida en U-1-22 se incluye también $x + dx$; los autores suponen que para el lector es transparente que, dado que dL es infinitamente pequeño, necesariamente el término dx también lo es. Podría ser de utilidad en este punto aclarar que la notación utilizada para la cantidades infinitamente pequeñas dL no es la multiplicación de d por L, para evitar esa confusión.

En U-1-22C también se hace uso de una faceta intensiva, al hacer referencia a un elemento diferencial de arco (mostrado en la figura incluida en U-1-22) que representa a cada una de las partes en que se dividió el arco de curva. De la referida figura se puede deducir que los extremos de dicho elemento diferencial de arco son los puntos $\left(x, y(x)\right)$ y $\left(x + dx, y(x + dx)\right)$, y con base en lo anterior, puede inferirse cómo calcular su longitud, denotada por dL. En este punto, sin mencionarlo explícitamente, se está suponiendo que las propiedades algebraicas de los números reales aplican a las cantidades infinitamente pequeñas.

En U-1-23 se concluye indicando que el valor exacto de L es igual a la suma de todas las distancias dL, hecho que denotan como: $L = \int dL$. La idea que los autores desean transmitir en esta unidad de análisis consiste en la generalización del procedimiento llevado a cabo para aproximar la longitud de arco con un número n finito de divisiones del todo (en donde se sumaron las longitudes de los segmentos de la poligonal que sustituyó a la curva para realizar la aproximación) al caso de una cantidad infinita de partes, donde la longitud de una parte genérica se representa por dL. Esta manera de denotar la suma de una cantidad infinita de cantidades infinitamente pequeñas parece bastante pertinente desde el punto de vista lingüístico, pues la forma del símbolo de Integral ($\int$) evoca una "S", proveniente de la palabra "suma". Sin embargo, la notación utilizada para expresar este resultado no es la más apropiada (desde el punto de vista matemático), pues dicha notación corresponde a la de Antiderivada, y en realidad el concepto matemático al que se refiere el texto es a la Integral Definida. Lo que estrictamente se está haciendo (desde el punto de vista matemático) en esta expresión algebraica es igualar un número real (L) con una familia de funciones ($\int dL$).

Dado que esta obra está dirigida a cursos de nivel superior, es posible que algunos lectores ya conozcan la Antiderivada (Integral Indefinida). Esto puede ocasionar un conflicto semiótico, que consiste en considerar a la Integral Definida como una Antiderivada o Integral Indefinida. Respecto del resultado incluido en U-1-23, éste debe expresarse como: $L = \int_a^b dL$ (lo cual se hace hasta la unidad de análisis U-1-27).

Se puede ver que, en conjunto, las unidades U-1-7 a U-1-11 muestran un procedimiento (fase extensiva) que permite resolver la situación problema 1. El mismo significado actuativo, pero en su fase intensiva, se promueve desde U-1-14 hasta U-1-20, en donde se dividió al arco en un número finito de partes para calcular de manera aproximada la longitud de arco. El mismo significado actuativo queda sintetizado en las unidades de análisis U-1-22 y U-1-23, pero considerando ahora una cantidad infinita de partes del todo y obteniendo con ello, el valor exacto de la longitud de dicho arco de curva.

La reiteración del mismo significado actuativo, empezando en un nivel concreto y elevando en cada ocasión el nivel de abstracción, se considera una bondad de este planteamiento para introducir el concepto de Integral Definida. De esta manera se ofrece al lector una transición sutil, que lo lleva del tratamiento aritmético (fase extensiva, procedimiento sistémico) al algebraico (fase intensiva, procedimiento sistémico) y finalmente al trabajo con las cantidades infinitamente pequeñas (fase intensiva, procedimiento sistémico, introducción del concepto Integral Definida como un objeto matemático en su fase unitaria). En todo este trayecto una misma situación problema sirve de pretexto para utilizar los mismos argumentos y atributos de las partes que se utilizan para su resolución, con la emergencia de nuevos objetos matemáticos (triángulo característico, cantidad infinitamente pequeña, etc.) que pueden ser vistos como elementos del lenguaje que no se encuentran en los libros tradicionales del Cálculo ni en su enseñanza.

El principio leibniziano –la consideración de intervalos de curva infinitamente pequeños como si fueran rectos– proviene del hecho de que una curva que no cambia de dirección bruscamente (es decir, si es “suave”), un trozo pequeño de curva, se parece a un segmento de recta, y mayor es el parecido cuanto más pequeño sea el trozo de curva. Al extrapolar este hecho a un arco de curva infinitamente pequeño, se concluye que un trozo de curva infinitamente pequeño, es en realidad un segmento de recta (infinitamente pequeño). En U-1-22 se hace uso del principio leibniziano al afirmar: “Concibamos al arco de la gráfica de la función $y = y(x)$, desde el punto donde $x = a$ hasta el punto donde $x = b$, como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, cada uno de ellos sea recto”. También en U-1-24, se afirma: “Siendo cada segmento infinitamente pequeño y por ende recto, …” En ambos casos se implica que trozos de curva de longitud infinitesimal son segmentos de recta. Esta propiedad de las curvas emerge por lo argumentado en unidades de análisis previas. En particular en U-1-11 se afirma: “al ir considerando un número mayor de divisiones del arco en partes cada vez más pequeñas, éstas son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para la longitud de cada parte suponiendo que es recta, es intuitivamente más cercana a su valor exacto”; asimismo en la unidad de análisis

U-1-20, se menciona que “a medida que los arcos son cada vez más pequeños, las estimaciones obtenidas para sus longitudes son cada vez más precisas”.

La idea de infinito potencial (utilizada en las referidas unidades de análisis) podría ocasionar un potencial conflicto semiótico, consistente en considerar a las cantidades infinitamente pequeñas como números reales muy pequeños pero distintos de cero, conflicto semiótico reportado por Turégano (1998). Evidentemente, dado que las cantidades infinitamente pequeñas no tienen exactamente las mismas propiedades que los números reales, no deben ser consideradas como tales.

En U-1-24 se introduce el “triángulo característico”, el cual asiste en el establecimiento del valor exacto de dL, el cual, con ayuda de la idea fundamental, permite establecer la Integral Definida con la cual se calcula el valor exacto de la longitud de arco. El triángulo característico es un triángulo rectángulo con catetos de longitud infinitesimal, denotadas por dx y dy; en U-1-25 se calcula el valor de la longitud de su hipotenusa, denotada por dL, con base en el teorema de Pitágoras, procedimiento que queda justificado por el principio leibniziano. En U-1-26 se expresa el valor de dL en términos de la derivada de la función $y = y(x)$, y finalmente en U-1-27, este resultado se utiliza para expresar el valor exacto de L como una Integral Definida.

Como se mencionó antes, en U-1-23 se utiliza: $L = \int dL$ para denotar el valor exacto de L, (notación que corresponde a una Integral Indefinida). A partir del resultado $dL = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$, obtenido en U-1-26, tras la sustitución del valor de dL en la expresión obtenida para L, en U-1-27 se cambia la notación a la correspondiente de la Integral Definida:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

En la unidad de análisis U-1-28 se hace referencia a la situación problema 1, para expresar la Integral Definida con la que se calcula de manera exacta el valor de la longitud de arco de la gráfica de la función $y = x^2$ desde $(0{,}0)$ hasta $(2{,}4)$.

Finalmente, en U-1-30 se unifican los dos acercamientos discutidos. El primero, basado en la idea del infinito potencial, cubierto en las unidades de análisis U-1-15 a U-1-20 y el segundo, basado en el infinito actual, que se explica desde U-1-22 y hasta U-1-27. Se concluye en U-1-30, que ambos acercamientos son equivalentes y por tanto arrojan el mismo resultado para L, de donde se deduce que:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Tras un análisis más detallado de las unidades de análisis U-1-1, U-1-2, U-1-3 y U-1-4 se encontró la secuencia de funciones semióticas encontrado en el previo análisis, pero de manera sintetizada. Por tanto se considera que en caso de que el lector realice la situación problema antes de leer su discusión en el texto, verá una reiteración más del significado actuativo ahí promovido.

Síntesis del análisis ontosemiótico de la discusión de la situación problema 1.

El tratamiento de la situación problema 1 se desarrolla de manera que el mismo significado actuativo, basado en la aplicación del principio leibniziano (o su análogo para los casos de n finito), se lleva a cabo varias veces. Primero en su faceta extensiva (casos particulares), como se estableció en las funciones semióticas FS-1-7, FS-1-10, y finalmente en su faceta intensiva (caso general) como se muestra en FS-1-17. A cada uno de estos casos geométricos, le acompañó su contraparte numérica como lo indican las funciones semióticas FS-1-9, FS-1-11 para la faceta extensiva y FS-1-18 para el caso general, en su la faceta intensiva.

Se considera que esta reincidencia en el mismo significado actuativo, primero con un tratamiento numérico de un caso particular (una función específica $y = x^2$, con un intervalo concreto $(0,2)$, con $n = 2$ primero y luego con $n = 4$), después con un caso general (función genérica $y = y(x)$ con un intervalo n genérico), y finalmente, extrapolándolo para obtener el valor exacto de L (n infinito), es uno de los factores que podría allanar las dificultades que los estudiantes deben superar cuando intentan aprender el concepto de Integral Definida de funciones de una variable.

Análisis ontosemiótico de las situaciones problema 2 y 3

En la situación problema 1 se discute un procedimiento para calcular la longitud de arco de la gráfica de una función $y = f(x)$ conocida. La situación problema 2 aborda el cálculo del área delimitada por la gráfica de una función $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Por otra parte, la Situación problema 3 discute el cálculo del volumen de un sólido de revolución que se produce al hacer girar una región del plano similar a la tratada en la situación problema 2. Estas primeras tres situaciones problemas del contexto geométrico son abordadas en la obra de Salinas et al (2012) con el mismo procedimiento: primero se hace un cálculo aproximado con un caso concreto; después se utiliza ese primer acercamiento a la resolución del problema para aproximar la misma cualidad para cualquier función definida en un intervalo genérico $[a, b]$. Finalmente, el procedimiento se ajusta para obtener el valor exacto de la cualidad que se desea cuantificar.

Tras el análisis ontosemiótico elaborado a las tres primeras situaciones problema abordadas en el tomo dos de la obra de Salinas et al (2012) se encontró que en cada una de ellas se utiliza la misma cantidad de funciones semióticas, y al comparar la trama de esas funciones semióticas (que se lleva a cabo en la lectura de cada una de las situaciones problema), se puede afirmar que los procesos de interpretación que se llevan a cabo en cada una es equivalente a su correspondiente en las otras dos situaciones problema. Las únicas variantes encontradas son (1) las expresiones y contenidos de las funciones semiótica ocasionadas por la naturaleza de la cualidad que se desea calcular del todo en cada caso (2) en ciertas funciones semióticas, la complejidad asociada al proceso de semiosis cuando se involucran figuras tridimensionales, para el caso de la situación problema 3, que trata el cálculo del volumen de un sólido de revolución.

Enseguida se incluye una síntesis de la estructura que presenta el acercamiento a la situación problema (genérica) abordada en dicha obra e inmediatamente después los principales hallazgos con base en el análisis de la situación problema 1, previamente incluida en este reporte. Por lo antes mencionado, estos hallazgos son aplicables a las tres situaciones problema con las adaptaciones pertinentes, de acuerdo a lo mencionado respecto de las variantes encontradas en la trama de funciones semióticas promovida en cada caso.

Síntesis del análisis ontosemiótico

Estructura de la situación problema (cualidad a calcular de naturaleza geométrica)

Considera la gráfica de la función $y = y(x)$.

a) Calcula un valor aproximado de Q (cantidad relacionada con la gráfica de $y = y(x)$) desde el punto $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$. Para ello divide a Q en dos partes tal y como se muestra en la figura (esto es, aplicando un símil del principio leibniziano).

b) Calcula de nuevo un valor aproximado de Q, pero ahora dividiéndolo en cuatro partes (aplicando el símil del principio leibniziano).

c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme Q se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?

Estructura de la discusión de la situación problema

Se inicia explicando cómo se interpreta geométricamente la aplicación del símil del principio leibniziano en el cálculo de Q. A partir de una figura en la que se detalla una de las partes (representativa) en las que se dividió Q, se explica cómo calcular la aproximación del aporte de esa parte (representativa) a la cantidad Q (el todo). Después se hacen los cálculos (aproximación numérica) de acuerdo a la explicación dada, y se realiza la primera estimación. Enseguida se vuelve a hacer la aproximación numérica, con un número mayor de divisiones. Finalmente, se argumenta que, entre más y más partes se divida Q, la aproximación calculada es cada vez mejor. La justificación de esto último se basa en el parecido visual entre cada parte en la que se divide Q (el todo) y la utilizada para la aproximación en el cálculo.

Luego se generaliza este bosquejo de técnica de solución de la situación problemática. Para ello se muestra algebraicamente el resultado de la aproximación resultante de dividir Q en n partes. Después se utiliza un acercamiento dinámico de la idea de límite, en donde se argumenta que las partes aproximada y exacta de Q utilizadas en el cálculo elaborado, son más parecidas conforme n aumenta. Finalmente, se afirma que el valor exacto de la cualidad que se desea calcular (Q) se obtiene cuando la cantidad de particiones (n) es infinita.

Establecido lo anterior, se representa a la cantidad Q como la suma de las aportaciones de todas y cada una de las infinitas partes en las que ésta fue dividida (aquí emerge el concepto de Integral definida). En esta ocasión (acercamiento estático) se considera de inicio que Q ha sido dividida en una cantidad infinita de partes, cada una de ellas infinitamente pequeña, denotada con dQ. Por tanto, se concluye que Q se puede calcular a partir de la suma de cada una de esas partes dQ, lo cual se representa con la notación: $Q = \int dQ$.

Finalizan la discusión de la situación problemática unificando ambos acercamientos: en primer lugar se consideró un acercamiento dinámico que involucra a un infinito potencial; después un acercamiento estático, que involucra al infinito actual. Esto les permite definir a la Integral Definida a la vez como un proceso de límite y como la suma de una cantidad infinita de infinitesimales.

El análisis ontosemiótico muestra que el planteamiento para introducir el concepto de Integral Definida de funciones de una variable de la obra de Salinas et al (2012) lleva al lector por tres distintos niveles de abstracción. El primero, comprendido por las unidades de análisis U-1-1 hasta U-1-13 con un nivel de abstracción muy bajo, en el que se trata numéricamente un caso concreto (faceta extensiva), ejemplar en el cual se consigue calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de la función $y = x^2$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,4)$. Ahí se muestra de manera práctica el proceso requerido para resolver la situación problema a través de su tratamiento numérico.

En el segundo nivel, que comprende desde U-1-14 hasta U-1-20, se considera un caso general (faceta intensiva). Ahí se trata el cálculo aproximado de la longitud de arco de la gráfica de la función $y = y(x)$ desde el punto $\big(a, y(a)\big)$ hasta el punto $\big(b, y(b)\big)$. En esta parte, el proceso llevado a cabo en el primer nivel (caso concreto, faceta extensiva) se transforma en un procedimiento matemático (representado algebraicamente) que aplica a una función matemática genérica $y = y(x)$. En estos primeros dos niveles, el arco de la curva se divide en un número (n) finito de partes, por lo que se obtiene una aproximación del valor de la longitud del arco considerado.

En el tercer nivel de abstracción, que comprende las unidades de análisis de U-1-22 hasta U-1-30 se desarrolla un procedimiento que finaliza con el establecimiento de la Integral Definida (entendido como un concepto, elemento del lenguaje en el que se resume el significado actuativo llevado a cabo) que permite calcular de manera exacta la longitud de arco de una parte de la gráfica de una función genérica (la misma que fue considerada en el segundo nivel de abstracción). La introducción del infinito y de las cantidades infinitamente pequeñas son las principales responsables de la elevada abstracción de este tercer nivel.

Este paso de lo concreto a lo abstracto es producido gracias a la reiteración de un mismo significado actuativo (utilizado para resolver la situación problema), de manera que, con base en una dialéctica entre los consecutivos niveles de abstracción, se manifiesta un mismo esquema de proceder para resolver dicha situación problema. Con ello se favorece la emergencia del concepto (fase unitaria) de Integral Definida que sintetiza un procedimiento (fase sistémica) para resolver problemas de la misma clase.

Gracias al análisis ontosemiótico llevado a cabo, se puede ver que, en términos de los procesos semióticos llevados a cabo, U-1-22 es el análogo de lo que se lleva a cabo en las unidades U-1-15 a U-1-18. En U-1-15 como en U-1-22A se delimita el arco de curva al que se desea calcular su longitud, mientras que en U-1-17 como en U-1-22B se asocia al valor de la cualidad a cuantificar del todo con la suma de sus partes y, finalmente, en U-1-18 como en U-1-22C se muestra cada una de las partes en las que se ha dividido el todo, partes que servirán para cuantificar la cualidad que se desea calcular. Por tanto, se puede afirmar que el hecho de utilizar el mismo proceder repetidas veces para abordar el mismo problema, permite, en primera instancia, la emergencia de un esquema invariante de proceder que, a su vez, en cada oportunidad mejora la solución previa, hasta obtener la solución exacta del mismo. Esto permite la emergencia del concepto de Integral Definida y facilita su aprendizaje por parte del lector.

Caracterización del significado institucional implementado

La caracterización del significado institucional implementado permite reconocer la pertinencia de las situaciones problemáticas abordadas por el profesor, en tanto los procedimientos y argumentos utilizados por éste estén acordes con el significado institucional de referencia. Enseguida se hace una reseña de lo acontecido en las primeras siete sesiones de instrucción. En la primera sesión de instrucción (denominada sesión cero en este trabajo) se dio una introducción a la forma de calificar el curso y un repaso del conocimiento previo requerido para las primeras tres situaciones problema. En las siguientes seis sesiones se resolvieron las primeras tres situaciones problemáticas consideradas en la obra de referencia. En esta parte de este reporte se destacan las actividades que fueron llevadas a cabo con la intención de caracterizar apropiadamente los significados institucionales implementados. Se informa al lector que para resguardar la privacidad de los participantes, los nombres que se incluyen en algunos fragmentos de la transcripción de lo que ocurrió en clase, son ficticios. Cabe mencionar que nombres coincidentes a lo largo de este reporte de investigación se refieren a un mismo participante.

Sesión 0

Objetos matemáticos puestos en juego

Lenguaje: Trapecio, cono truncado, área, volumen, cálculo.

Situaciones problemáticas abordadas: Calcular el área de un trapecio, calcular el área lateral de un cono truncado, calcular el volumen de un cono truncado.

Conceptos: Trapecio, cono truncado, área, volumen.

Observaciones

La sesión inicial del curso se utilizó para concientizar a los estudiantes en los objetivos que persigue la institución y con ello se justificó el enfoque del curso. Se mencionó que se espera que los estudiantes tengan disposición a aprender y a colaborar a lo largo del curso para aprender los conceptos estudiados en el mismo.

El profesor argumenta que tradicionalmente, los contenidos de los cursos de Cálculo se han “parcelizado” para su enseñanza. Asimismo afirmó que las competencias que persigue que los estudiantes adquieran son: (a) aplicar el Cálculo Integral de una variable en la identificación y solución de problemas de ingeniería, lo cual se descompone en dos partes: (1) plantear Integrales haciendo uso de la estrategia de la toma del diferencial y (2) Calcular Integrales. El objetivo general del curso es “conocer y comprender las ideas fundamentales del Cálculo al abordar problemas cuya solución requiera necesariamente de las nociones y procedimientos propios del Cálculo y cuya importancia permita valorar el papel del aprendizaje de esta ciencia en la formación profesional del estudiante".

El profesor introduce al cálculo como "… la rama de las matemáticas que estudia el cambio." También comentó la existencia de dos versiones del Cálculo: newtoniano y leibniziano. Después mencionó los contenidos del curso en tres vertientes: (a) los problemas, (b) esbozo de la teoría y (c) aplicaciones. Indicó que la Integral "aparece como respuesta (formal) de la solución de cierta clase de problemas". También dijo que el libro que va a utilizar como referencia para el curso es el volumen 2 de la obra de Salinas et al (2012).

Enseguida dio una rápida reseña de los orígenes del Cálculo, terminando con los acercamientos leibniziano y newtoniano al Cálculo. Inmediatamente después mostró un formulario que constituye el conocimiento previo que se requiere para abordar los problemas que se resolverán en el curso. Luego propuso la situación problema 0. Les explicó en qué consiste tal situación problema: calcular el área de los trapecios. Se cercioró que los estudiantes reconozcan que cada una de las partes de las que deben calcular el área es un trapecio. La segunda parte de la situación problema consiste en calcular el área lateral y el volumen de conos truncados. Este problema se abordó en equipos de tres estudiantes.

Sesión 1

Objetos matemáticos puestos en juego

Situaciones problemáticas abordadas: calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de la función $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$.

Lenguaje: Representación gráfica de una función, longitud de arco (de una curva), trapecio, arco de curva, $L = L_1 + L_2$, $L_1 \approx \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(f(x_2) - f(x_1)\right)}$, $\approx$ (aproximadamente igual a), $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$ (notación funcional).

Procedimientos: Para calcular de manera aproximada la longitud de arco de una curva: (1) dividir el arco en dos partes, (2) aproximar la longitud de arco de cada parte de la gráfica (suponiendo que cada arco de curva es recto), (3) sumar las aproximaciones; (4) luego elaborar el mismo procedimiento dividiendo el arco en cuatro partes.

Conceptos: Longitud de arco, abscisa y ordenada (de un punto), distancia entre dos puntos, teorema de Pitágoras, valor exacto y aproximación, función, evaluar una función en un punto, graficación de una función, infinito.

Argumentos: “si tomo trozos pequeños de curva, parecen rectos”, “Supongo que esto es recto…”, “Bueno… quiero mejorar la aproximación, ¿qué es lo que hago? Divido el arco en más partes… de la misma manera como lo estamos haciendo.”, “Quiero mejorar la aproximación, ¿qué hago? Lo divido en más partes… ”

Observaciones

En esta sesión se planteó la situación problema 1 (SP-1) que consistía en calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de la función $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $\left(2, 2^{\frac{3}{2}} + 1\right)$. Para ello, se propuso una actividad a los estudiantes en la que se daba un procedimiento para resolver dicha situación problemática. El procedimiento planteado consiste en dividir el intervalo $(0,2)$ sobre el eje x en 2 partes del mismo tamaño; para cada una de esas partes determinar una parte de la gráfica de la función, considerar a los arcos de curva así obtenidos como si fueran segmentos de recta; calcular la longitud de cada parte y sumarlas. La aproximación se mejora realizando el mismo procedimiento aumentando a 4 el número de partes en que se divide el arco de curva de interés. Se finaliza reflexionando qué efecto tiene en la aproximación aumentar el número de partes en que se divide el arco de curva. Esto, al parecer, con la intención de que el estudiante infiera que cuando el intervalo se divide en una cantidad infinita de partes, se obtiene el valor exacto de la longitud de arco que se desea cuantificar.

Los estudiantes trabajaron en equipos de tres en la resolución de la SP-1 durante aproximadamente 15 minutos. Después, el profesor explica la solución de la misma detallando el esquema de solución, paso a paso. Durante su explicación, el profesor insistió en un esquema de solución que permitiría a los estudiantes resolver problemas que no han abordado previamente. Por ejemplo, mencionó en su discurso que "… aunque ya sepan cómo resolverlos, sigan el esquema de solución que vamos a plantear en este curso porque los orillará a aprender con comprensión, y por lo tanto, a potenciarlos para resolver nuevos problemas…"

El esquema al que se refería el profesor consta de los siguientes pasos:

1. Darse cuenta de que se trata de un problema. Esto es, que no se puede resolver de manera directa con el conocimiento previo.
2. Darse cuenta de qué se está hablando, es decir, reconocer al todo del cual se requiere calcular algo (en el caso de la SP-1, la gráfica de la función correspondiente al intervalo $x \in (0,2)$).
3. Nombrar lo que se desea calcular del todo (en el caso de la SP-1, la longitud de arco, cuyo valor se denota por la literal L).

4. Dividir al todo (arco de curva del cual se desea calcular su longitud) en varias partes apropiadamente.
5. Nombrar la cualidad (el valor de la longitud de arco, L_i en este caso) de cada parte en que se dividió al todo.
6. Expresar la magnitud del todo (L, en el caso de la SP-1) como la suma de las magnitudes de todas las partes en que ésta se dividió (L_i).
7. Calcular de manera aproximada la magnitud de cada parte (L_i, suponiendo que el arco de curva es recto, esto es, aplicando el símil del principio leibniziano).
8. Calcular una aproximación de la cualidad a cuantificar (L, en el caso de la SP-1) sumando las aproximaciones (L_i) obtenidas para cada parte en la que se dividió al todo (el arco de curva).

En este caso, este objeto matemático todavía se encuentra en una fase sistémica, pues funciona como un procedimiento que se lleva a cabo (significado actuativo), aún no se ha sintetizado en un concepto (elemento del lenguaje). Sin embargo, éste sirve como andamiaje que permitirá la construcción del concepto más adelante, conformado por la componente actuativa del mismo.

Durante la instrucción reiteradamente se hizo énfasis en que el procedimiento planteado para resolver la SP-1 permite obtener un resultado aproximado. En la última pregunta de la SP-1 se considera el efecto que tiene en la aproximación un incremento en la cantidad de partes en las que se dividió al todo. Con base en esto el profesor guía a los estudiantes a reconocer que este mismo esquema de solución puede ser utilizado para obtener mayor exactitud en el resultado obtenido. Enseguida se incluye una parte de la transcripción de la sesión de instrucción en la que se evidencia lo antes mencionado.

Profesor: “¿Qué va a pasar si tomo más… partes? La aproximación se va haciendo mejor. De tal manera que si el número de partes en las cuales divido se hace cada vez más y más y más grande, es decir, tiene a ¿dónde?”

Alumnos: “infinito.”

Profesor: “… a infinito. ¿Qué le va a pasar a las aproximaciones? ¿A dónde tienden?”

Alumno: a cero.

Profesor: “¿A cero?”

Alumnos: “No. Al valor exacto.”

Profesor: “Al valor exacto. Al valor exacto. ”

Sesión 2

Objetos matemáticos puestos en juego:

Situaciones problemáticas abordadas: Calcular la longitud de arco de la gráfica de una función en un intervalo (a, b).

Lenguaje: dx representa la longitud infinitamente pequeña de un subintervalo (genérico). También se utiliza para representar una diferencia de abscisas (infinitamente próximas); Δx representa la longitud de un subintervalo (resultado de dividir el intervalo (a, b) en n partes de igual longitud, donde n es finito), el profesor lo nombra como “incremento” y como “diferencia”; arco de curva; longitud de un arco de curva; dL, representa la longitud de un arco (genérico) infinitamente pequeño; L representa la longitud del arco de la gráfica correspondiente al intervalo (a, b) sobre el eje x; $y = f(x)$, denota a una función matemática (intensivo); $f'(x)$, denota a la derivada de dicha función; $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, representan los extremos del arco de curva cuya longitud se desea cuantificar; L_1, L_2, L_3, $\cdots$, L_n, representan las longitudes de las partes en las que se dividió el arco de curva para su aproximación; P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n, representan los extremos de las partes en que se dividió el arco de curva de interés; x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n, representan las abscisas de los extremos de las partes en que se dividió el arco de curva de interés; $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $\cdots$, $f(x_n)$, representan las ordenadas de los extremos de las partes en que se dividió el arco de curva de interés.

Procedimientos: Para calcular de manera aproximada la longitud de arco de una curva en un intervalo (1) dividir el intervalo (a, b) en n partes iguales (n es un número natural finito); (2) para cada subintervalo se determina una parte del arco de curva de la gráfica de la función; (3) aproximar la longitud de arco de cada parte del arco de curva (suponiendo que cada parte es recto); (4) sumar las longitudes. Para calcular de manera exacta la longitud de arco de una curva en un intervalo (1) dividir el intervalo (sobre el eje x) (a, b) en una cantidad infinita de subintervalos; (2) considerar un subintervalo genérico $(x, x + dx)$, que los represente a todos; (3) para dicho subintervalo se determinar una parte del arco de curva de la gráfica de la función, cuya longitud dL es infinitamente pequeña; (4) calcular dL aplicando el teorema de Pitágoras (la parte considerada del arco de curva es recto, por el principio leibniziano); (5) sumar todos los dL desde $x = a$ hasta $x = b$.

Conceptos: Arco de curva; segmento (de recta); Teorema Fundamental del Cálculo:$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, como herramienta para calcular la Integral Definida con base en la Antiderivada; Idea fundamental del Cálculo: “pequeños trozos de curva parecen rectos, pero si son infinitamente pequeños son [efectivamente] rectos”, matemáticamente: $f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx$; teorema de Pitágoras; sumatoria:

$\sum_{i=1}^{n} L_i$; derivar una función potencia: $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$; antiderivada; antiderivar una función potencia: $\int u^n \cdot du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; Integral Definida de una función: $\int_a^b f(x) \cdot dx$; infinito; infinitamente pequeño.

Propiedades: Pequeños arcos de curva parecen rectos. En lo infinitamente pequeño, un arco de curva es recto (principio leibniziano); "… cuando tomo un arco infinitamente pequeño de curva, -con lo que eso signifique- ese arco va a ser recto…".

Argumentos: "¿cómo voy a calcular L_1, L_2, L_n? Pues vamos a suponer que esos segmentos de curva son rectos".

Observaciones

En esta sesión de instrucción se refinó, generalizó y sistematizó y el procedimiento utilizado (en la sesión previa) para calcular (de manera aproximada, entonces) la longitud de arco de la gráfica de una función conocida (pero ahora de manera exacta, de ahí la refinación) para cualquier función continua (de ahí la generalización). Al mostrar (con base en la sesión previa) una manera sistemática de mejorar la aproximación (de ahí la sistematización), los estudiantes logran reconocer que al dividir el todo en una cantidad infinita de partes, se obtiene el valor exacto de la longitud de arco de la parte de la gráfica de la función de interés.

Al inicio de la sesión, el profesor hace una síntesis de lo que se llevó a cabo en la sesión anterior en la que se calculó de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de una función (particular) y a partir de ello hace una introducción de lo que expondrá en esta sesión. En la exposición utiliza una presentación elaborada en PowerPoint de Microsoft-Office©. En dicha presentación se incluye un ostensivo que permite ver a los estudiantes la representación gráfica de la función a la cual se le calculará la longitud de arco. Con base en ese ostensivo se explica el procedimiento general para calcular de manera exacta la longitud de arco.

El profesor indica que lo elaborado en la sesión anterior era un caso particular de lo visto en la sesión actual: "¿Qué fue lo que hicimos? Ah. En la actividad, pues hicimos casos particulares. Aquí estoy describiendo el procedimiento general… O sea, vamos a dividir el arco en partes. ¿En cuántas? Pues ya no en dos, ya no en cuatro, ocho, sino genéricamente, en ene [n] partes."

"Lo que sigue es ver cómo recursivamente vamos a dividir, el arco en ene [n] partes. Les decía, para ello vamos a dividir el intervalo a-b [(a, b)] en ene [n] partes de igual longitud. Entonces, todas ellas van a medir la longitud del intervalo, que es, be menos a entre ene [$(b-a)/n$]".

"Entonces, lo que está dicho ahí [refiriéndose a la figura que se proyecta en la pizarra], simbólicamente es, cómo se dividió el arco en ene [n] partes. ¿Cómo se hizo? El intervalo a-b [(a, b)] se dividió en ene [n] intervalos de igual longitud, y para cada intervalo obtuvimos 'una partecita', para cada intervalo obtuvimos 'una partecita', ¿sí?".

"Bueno, si llamamos ele-uno, ele-dos, ele-tres [L_1, L_2, L_3], etcétera, ele-ene [L_n] a las longitudes de las partes, pues es claro que ele [L] va a ser la suma de las longitudes de esas partes, ¿no? Todavía esa suma se puede escribir simbólicamente de esta manera [refiriéndose a la expresión $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$] La sumatoria desde i igual a uno hasta ene [n]. O sea, en lugar de poner todos estos sumandos, los matemáticos usan esta notación para indicarlo" [refiriéndose a la notación sigma].

"Ah, bueno, pero ¿cómo voy a calcular ele-uno, ele-dos, ele-ene [L_1, L_2, L_n]? Pues vamos a suponer que esos segmentos de curva son rectos.".

“Y entonces, lo que queremos es calcular, cuánto vale, ele-uno [L_1], pues ahí está, cuánto vale ele-dos [L_2], ahí está; cuánto vale ele-ene [L_n], ahí está, y si lo sumo, tendría un valor aproximado de ele [L], que también, simbólicamente se puede escribir de esa, de esa manera” [refiriéndose a la notación sigma].

“Entonces, ahí, en un solo ‘slide’, ya completo, tenemos simbólicamente, descrito el procedimiento para calcular de manera aproximada, la longitud de un arco de curva que es parte de la gráfica de una función. Lo que está dicho ahí es: el intervalo de a a b se divide en ene [n] intervalos de igual longitud; para cada subintervalo determino una parte del arco; supongo que esas partes son rectas, y entonces, ele-uno [L_1] es aproximadamente esto, ele-dos [L_2] es aproximadamente esto, –la fórmula de la distancia– y si sumo, pues tendría un valor aproximado. ¿Quién va a ser el valor exacto? … a donde tienden las aproximaciones cuando ene [n] tiende a infinito.”

“¿Por qué aquí dice ‘aproximado’ y no ‘exacto’? Porque estos arcos de curva, lo estamos tomando ¿como una qué?”

Alumno: “línea recta”

Profesor “una línea recta, y no lo son… bueno, pues entonces tómalos para que sí sean rectos. Entonces, ¿de qué tamaño tendría que tomarlos para que fueran rectos? Los que ya vieron Cálculo en este rediseño, allá en Mate uno, se habló, de que cuando tomo un arco infinitamente pequeño de curva –con lo que eso signifique–, ese arco va a ser recto”.

“Entonces, ¿qué haría? Pues en lugar de tomar segmentos pequeños, cuando ene [n] es grande, pero finitos, tomo segmentos infinitamente pequeños, y de esa manera, cuando escriba ele-uno, ele-dos $[L_1, L_2]$, cuando son infinitamente pequeños, pues entonces pondría la igualdad cuando use la fórmula de la distancia".

La diapositiva final (Figura 26) de la presentación proyectada en esta sesión, representa una síntesis del procedimiento utilizado para el cálculo aproximado de la longitud de arco en la sesión previa.

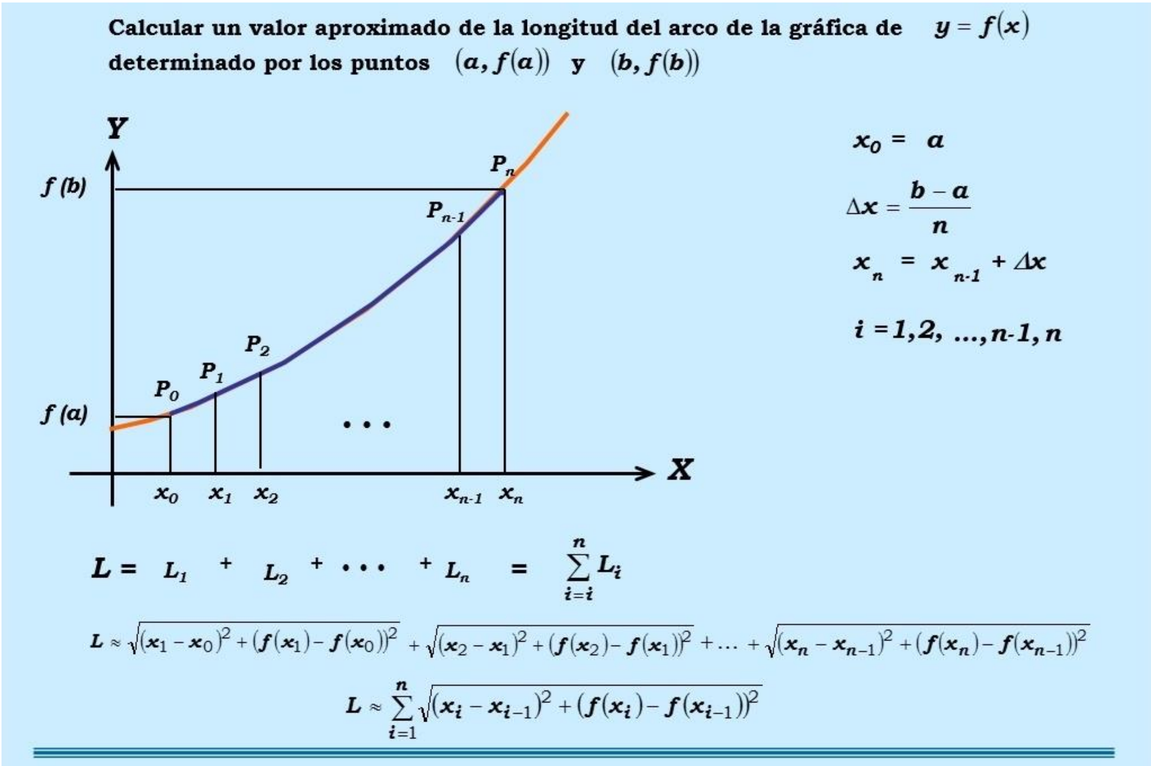


Figura 26. Diapositiva final de la presentación proyectada en la sesión 2.

"… y estamos interesados, interesados en calcular la longitud de este arco. Primer intento, la clase pasada, de manera aproximada, y además de una manera, procedimos de una manera muy sistemática, de manera que pudiéramos ir calculando cada vez más precisa, la aproximación. Pero entonces, ¿qué voy a hacer para encontrar la exactitud? Dividir el arco en partes infinitamente pequeñas, y entonces, obviamente tendrán que ser un número infinito de partes. Entonces, dividir el arco en un número infinito de partes infinitamente pequeñas. Y para ello igual, pues vamos a dividir el intervalo, no en dos, no en cuatro, no en ene [n], sino en un número infinito de partes infinitamente pequeñas."

Para explicar la manera de calcular la longitud de arco de una de las partes en que se dividió al arco de curva, el profesor hace uso de un intensivo, que representa a todas y cada una de las partes en que dividió el arco de curva de interés: "Pero no puedo poner todas. Entonces, los matemáticos, hacen sus convenciones, con el lenguaje y dicen, bueno, no voy a poner a todas, pero voy a poner a una que represente a todas. Entonces, tengo el intervalo a-b [(a, b)], lo divido en un número infinito de intervalos infinitamente pequeños. Entonces, voy a tomar aquí genéricamente, uno de esos intervalos infinitamente pequeños en los que dividí, que genéricamente represente a todos. Y entonces, como esto es infinitamente pequeño, yo escribo este equis [x], que es genérico, ¿cuál es?, pues quién sabe, ese equis [x] es cualquier valor entre a y b. Entonces aquí sería equis [x] más algo. Pero este 'algo' es la longitud de ese pedacito. ¿Y ese pedacito cómo es? Infinitamente pequeño."

El profesor introdujo la notación para representar las cantidades infinitamente pequeñas con base en un contraste con las cantidades reales, cuando mencionó: "Acá llamábamos delta-equis [Δx] a los incrementos, a las diferencias, pero a las diferencias pequeñas pero finitas. Entonces cuando la diferencia es infinitamente pequeña, se escribe de esta manera, de-equis [dx]. Entonces, este intervalo, su extremo izquierdo es equis [x] y su extremo derecho es equis más de-equis [$x + dx$]. Su longitud pues, es de-equis [dx]. Entonces, de-equis [dx] es una cantidad infinitamente pequeña."

También, con base en el procedimiento utilizado en la situación problema uno logra obtener el correspondiente para resolver dicha situación problema de manera exacta: “Con este intervalo voy a determinar como lo hacía acá, para cada intervalo determinaba la parte del arco, esta parte. Pero si esto es infinitamente pequeño [señalando el intervalo $(x, x + dx)$ sobre el eje x], el arco de curva va a ser infinitamente pequeño, y por lo tanto, ¿cómo va a ser?”

Alumnos: “Recto”

Profesor: “Recto, ¿verdad? Entonces, si yo llamo a la longitud de este arquito que me representa a todas las partes, le llamo de-ele [dL], entonces, si yo sumo todas las de-ele [dL], ¿qué me va a dar?... Si yo sumo todas las de-ele [dL], si yo sumo ésta, ¿qué me va a dar? Pues todo ele [L], ¿verdad?”

El profesor aprovecha el hecho de que con el procedimiento se está resolviendo la situación problema de manera exacta con base en las cantidades infinitamente pequeñas para introducir el símbolo de Integral. Para ello, justifica la notación como una parte del lenguaje matemático motivado con un contraste entre el caso concreto ya discutido en la sesión uno y el que actualmente se discute: “Entonces, tomo ele [L], igual, como aquí, [apuntando a la gráfica de la diapositiva utilizada para explicar la aproximación]. Pero aquí eran ene [n]: eran ele-uno más ele-dos [$L_1 + L_2$], ¿acá cuántas son?”

Alumnos: “Infinitas”

Profesor: “Infinitas. Otra vez, el lenguaje lo uso, y digo: en lugar de poner la, la S griega, mayúscula [refiriéndose a $\sum$], pongo una ‘S’ larga [refiriéndose al símbolo de integración $\int$]”.

El significado actuativo empleado para resolver la situación problema uno, queda sintetizado en la integral definida cuando el profesor conceptualiza este objeto matemático como una suma de cantidades infinitamente pequeñas, fundamentado en una analogía que permite generalizar dicho significado actuativo: “Voy a sumar, todos estos [señalando la gráfica de la diapositiva]. Hagan de cuenta que esto [señalando $L = \int dL$] es esto de aquí [señalando $L \approx L_1 + L_2 + \cdots + L_n$], este de aquí [Señalando $L \approx \sum_{i=1}^{n} L_i$], nada más que para el caso en que estoy sumando una cantidad infinita de sumandos infinitamente pequeños”.

“¿Qué hacía acá? [señalando la expresión $L_1 \approx \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + \left(f(x_1) - f(x_0)\right)^2}$] Calculaba ele-uno [$L_1$] con esta fórmula, pero ponía,... aproximado [apuntando al símbolo ≈] porque esto [apuntando a un intervalo del arco de curva] no era recto; pero ahora sí va a ser recto. Entonces, cuando yo calcule dé-ele [dL], voy a poner igual aquí (refiriéndose al signo de igualdad, mientras lo escribe en la pizarra), y voy a poner, la fórmula para la distancia entre dos puntos, entre estos dos puntos [mientras remarca los extremos del intervalo correspondiente a dL sobre el arco de curva en la gráfica de la diapositiva], la distancia.”

También, para el uso de la Idea Fundamental del Cálculo hace referencia a una idea estudiada en el curso Matemáticas uno (en el cual también se utiliza como base la obra de Salinas et al (2012)). Ésta sirve de argumento que justifica el uso del principio leibniziano: “Allá en [el curso de] matemáticas uno… establecieron algo que podemos llamar ‘la idea fundamental del Cálculo’, y aquí la idea fundamental es la misma que allá, pero geométricamente, es que pequeños trozos de curva parecen rectos, pero si son infinitamente pequeños son rectos.”

También el profesor hace énfasis en la notación para las cantidades infinitamente pequeñas con la intención de evadir conflictos semióticos (posiblemente observados por éste) "… pero observen, de-equis [dx] no es dé [d] por equis [x]; todo junto es un símbolo."

El profesor introduce primero la notación de la Integral Definida primero de manera incompleta, mientras argumenta que L es la suma de todos los diferenciales de arco: "… Ah!, bueno, entonces, ¿cuánto vale ele [L]? Decíamos, es sumar todos los dé-ele [dL]. O sea, ¿qué sería aquí? Sumar, ¿qué? los dé-ele [dL], que valen, raíz de uno más efe prima de equis al cuadrado, de-equis. $\left[\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot dx\right]$" [mientras escribe en la pizarra: $L = \int \sqrt{1+(f'(x)\,)^2}\cdot dx$]

Después termina la notación de la Integral Definida respondiendo a la pregunta de dónde a dónde se requiere calcular L: "... aquí estamos interesados en la longitud de este arco; pero esta dL puede estar también por acá [indicando una parte de la gráfica de la función fuera del intervalo de interés], pero yo no quiero sumar todos. Quiero sumar nada más aquellos que me barran el arco del cual estoy interesado en calcular su longitud. Entonces, para precisarlo diríamos: ¿de dónde a dónde correría la equis [x] para que este arco me barra nada más esto [refiriendo se a la parte de la gráfica de la curva correspondiente al intervalo [a, b]]?"

Alumno: "de a a b."

Profesor: "De a a b. Entonces, … [el profesor entonces se aproxima a la pizarra y completa la notación de Integral Definida agregando los límites de integración a y b: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x)\,)^2}\cdot dx$]."

Finalmente sintetiza el significado actuativo recién creado en el concepto de Integral Definida: "Entonces, hemos expresado el valor exacto de ele [L] como una suma infinita de cantidades infinitamente pequeñas. Pero cada cantidad significa algo, ¿no?, significa la longitud de las partes. Entonces, en esas, que está ahí escrito, que es lenguaje simbólico, lo que estamos diciendo: al arco completo, lo dividimos en un número infinito de partes infinitamente pequeñas, calculamos el valor exacto de las partes y las sumamos. Y eso te tiene que dar la longitud completa.”

El profesor también hace explícito el peso que él otorga a la componente conceptual del aprendizaje del concepto de Integral Definida cuando afirma: “Y entonces, ¿qué es lo importante? Pues no es calcular las integrales, ¿sino qué? Plantearlas. Plantearlas como la solución a un problema.”

Asimismo hace hincapié en que el procedimiento utilizado es un esquema que se puede utilizar para abordar distintas problemáticas, al afirmar: “Entonces, ahorita, te vas a ir haciendo de este hecho, porque lo que vamos a observar en las primeras tres sesiones es que vamos a estar contando, por decirlo así, la misma historia, nada más que con diferentes personajes. Eso son los esquemas, eso son los métodos, esos son los algoritmos. Entonces vamos a ver, esquemáticamente como establecer una Integral [refiriéndose a la Integral Definida], esto es importante, establecer una Integral, con la cual,… calcular una cualidad de un objeto, una cualidad de un todo. Entonces, aquí es, calcular la longitud de un arco. El arco es el objeto, el todo. La cualidad es su longitud. Entonces, en algunos casos para lograr esa cuantificación, el procedimiento óptimo, es justamente establecer una Integral.”

E inmediatamente después vuelve a hacer la síntesis del significado actuativo, pero ahora bajo la consideración del caso particular abordado en la situación problema uno: “¿Qué significa eso? Al todo, el arco, divídelo en partes. Calcula en las partes lo que quieres calcular para el todo. Suma y ya tienes el valor del todo. Es aproximado si en las partes fue aproximado, y es exacto si en las partes fue exacto. ¿Sí? Y la exactitud vamos a ver que se logra justamente dividiéndolo en partes infinitamente pequeñas, porque esas partes van a ser muy simples de calcular. Porque aquí la parte es una recta, puedo calcular cuál es su longitud."

El profesor indica que se utilizará una rúbrica (analítica) para evaluar los ejercicios de tarea. Explica paso a paso cómo se debe realizar cada paso de la rúbrica, la cual sirve como procedimiento (esquema invariante de proceder) para el establecimiento de la Integral.

El profesor vuelve a insistir en la importancia de la parte conceptual del concepto de Integral al indicar que calcular la antiderivada lo puede realizar cualquier computadora; lo importante, enfatiza, el establecimiento de la Integral. "Porque lo más importante es esto [encerrando en un rectángulo la Integral Definida, escrita en la pizarra]… Lo más importante es esto. Lo otro [refiriéndose al resultado numérico y posiblemente al procedimiento utilizado para obtenerlo a partir de la Integral Definida], pues ya, la máquina lo hizo."

También en esta sesión, el profesor indica la diferencia entre Integral (definida) y una Antiderivada (o Integral Indefinida). Cabe mencionar que menciona explícitamente que los términos 'Integral Indefinida' y 'Antiderivada' son sinónimos: "¿Qué vamos a hacer para calcular esta Integral?, para calcular esta Integral … ¿Qué vamos a hacer? Pues poner aquí, ¿una qué?, … ¿Qué es esto?"

Alumno: "Una Antiderivada."

Profesor: "¿Y qué voy a hacer con esa Antiderivada? ¿Evaluarla dónde?, en dos y restarle la evaluación en cero. Entonces, ¿cuál va a ser mi problema para usar el Teorema Fundamental [refiriéndose al Teorema Fundamental del Cálculo]: calcular Antiderivadas… yo quiero calcular esta, antiderivada. ¿Cuál antiderivada? O esta Integral Indefinida, también le dicen así, ¿no? ".

Más adelante vuelve a hacer énfasis la parte conceptual del Cálculo al recalcar la importancia de saber establecer Integrales (definidas), más que calcular la antiderivada: "Ahorita vamos a usar la tecnología para darnos tiempo, a reforzar, recordar, cosas que ya deberíamos saber, pero más que todo porque lo importante es, establecer la Integral."

Por otra parte, el profesor supone que los estudiantes conocen el Teorema Fundamental del Cálculo; asimismo, sugiere que se calculan antiderivadas de funciones (y se integran diferenciales): "Hay funciones cuya antiderivada no es tan fácil sacar, como aquí, y hacerlo por el Teorema Fundamental. Aunque lo puedo hacer la tecnología, nada más para dar ese mensaje. Ojo, hay funciones cuya antiderivada no es fácil de obtener. Inclusive, a veces es imposible obtener."

El profesor se apega a la rúbrica analítica que provee a los alumnos a través de la plataforma (en línea) del curso para explicar el establecimiento de la Integral Definida que permite calcular de manera exacta la longitud de arco de la gráfica de una función. Con ello, se espera que el estudiante, además de que adquiera y/o fortalezca el esquema de solución de ese tipo de problemas, sepa contestar los ejercicios y problemas que se dejen de tarea (extraclase), pues éstos tienen exactamente la misma estructura que la situación problema uno abarcando ejercicios de cálculo aproximado de longitud de arco de funciones, al establecimiento de la Integral que permite calcular de manera exacta dicha longitud de arco y hasta calcularla de manera exacta (resultado numérico).

"Aquí por ejemplo, miren que, allá en preparatoria cuando vieron Cálculo Integral, el problema con el cual, si es que motivaron la construcción de la Integral, fue la del cálculo de áreas. Y entonces, ese va a ser nuestro segundo problema. Pero vamos a hacerlo, –y quiero que me sigan así– de una manera distinta a como lo abordaron allá en preparatoria, para poder hacer un patrón de cómo resolver cierta clase de problemas. Por eso les decía, en estas por lo menos tres sesiones déjense guiar; ya después, ahora sí, si quieren caminar solos, caminen solos, que es la idea, hasta que se vuelvan, independientes, autónomos…"

Sesión 3

Objetos matemáticos involucrados

Situaciones problemáticas abordadas: Calcular el área de una región del plano delimitada por la gráfica de la función $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

Lenguaje: A, para denotar el área de la región de interés; A_1, A_2, A_3, A_4, para denotar el área de cada una de las partes en las que se dividió la región cuya área se desea aproximar; $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$, la función que delimita la región del plano cuya área se desea cuantificar, (cabe mencionar que en el texto que se proyectó donde se describe la situación problema es: $y = f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$, pero en la figura de la proyección se expresa: $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$); x, y, las variables que sirven para denotar los ejes coordenados, al igual que las variables independiente y dependiente de la función matemática; x_1, x_2, x_3, x_4, valores asignados a la variable independiente para evaluar la función; y_1, y_2, y_3, y_4, imágenes devueltas por la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$ al evaluarla en los valores x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente.

Procedimientos: Para calcular de manera aproximada el área de una región del plano: (1) dividir la región en partes, suponiendo que en las partes los arcos de curva son segmentos de recta; (2) calcular el área de cada parte como si fuera un polígono (trapecio) y sumar las áreas de las partes; (3) mejorar la aproximación aumentando el número de partes en que se divide la región.

Conceptos: Dividir (un objeto): "un objeto está dividido en partes, cuando al juntar las partes obtengo todo el objeto, como un rompecabezas, pero además que las partes no se empalmen, nada más tienen fronteras comunes"; Área, Trapecio, Polígono. Evaluar una función en un punto x_i de su dominio.

Propiedades: Análogo del principio leibniziano para el caso de segmentos de recta de longitud finita real: "haz el mismo supuesto que en la actividad anterior, de que estos arcos de curva son… rectos."

Argumentos: "… Entonces, lo que estamos suponiendo es lo mismo que supusimos en la situación anterior. Sí, que esto es, recto [apuntando al arco de curva]"

Observaciones

En esta sesión se estudió un procedimiento para calcular de manera aproximada el área de una región del plano delimitada por la gráfica de la función $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$. Dicho procedimiento consiste en dividir el intervalo $(1,4)$ sobre el eje x, (que delimita la parte de la gráfica de la función cuya longitud se desea aproximar) en 2 regiones con bases del mismo tamaño; para cada una de esas partes, se consideran las partes de la curva como si fueran segmentos de recta; calcular el área de cada región (como si se tratara de trapecios) y sumar las aproximaciones. La aproximación se mejora realizando el mismo procedimiento pero aumentando a 3 el número de partes en que se divide la región de interés. Se finaliza reflexionando qué efecto tiene aumentar el número de divisiones del intervalo $(1,4)$ en la aproximación. De manera semejante a la SP-1, esto pretende que el estudiante infiera que cuando el intervalo $(1,4)$ se divide en una cantidad infinita de partes, se obtiene el valor exacto del área de esa región del plano.

El profesor inicia explicando que se abordará una nueva situación problemática, "el primer módulo son cuatro problemas, tres de ellos, geométricos: longitud de arco, que abordamos la sesión anterior, hoy entramos a áreas de regiones planas, y la próxima semana vemos volúmenes."

El profesor inmediatamente después indica que para abordar cada una de las situaciones problemáticas se utiliza el mismo procedimiento: "Y vamos a observar, como ya lo había dicho, que prácticamente son la misma historia, pero con distintos personajes. Los personajes son un arco de curva, una región plana, un sólido de revolución, y la historia que se va a contar, pues es cómo calcular la longitud del arco, el área de la región y el volumen del sólido."

Después el profesor solicita a los estudiantes su colaboración en el curso afirmando que espera que éstos alcancen la compresión al seguir la metodología propuesta en la instrucción: "… déjense guiar completamente por el diseño del curso, con la intención de que los va a capacitar; algunos ganarán la competencia de poder hacer problemas distintos; probablemente en un nuevo contexto geométrico, o en un contexto físico, pero distintos a los que hemos abordado."

El profesor insiste en que se utiliza un mismo esquema de resolución de las situaciones problema y aprovecha la oportunidad para mencionar el uso de la rúbrica, la cual muestra explícitamente dicho esquema de resolución: "… Entonces, si abrimos el folder de áreas de regiones planas [refiriéndose a la plataforma en línea utilizada como apoyo para distribuir los materiales didácticos utilizados en el curso], vemos que tiene la misma estructura de los anteriores. Hay una situación problema… que va a marcar la pauta para que emerja conocimiento y evolucione. Luego hay una hoja de cálculo que va a hacer más eficiente el análisis de esta situación problema. El problema se va a acotar o resolver completamente, y pues, habrá ejercicios para reforzar ese conocimiento y las tareas. Y el último folder, un folder que dice, síntesis, y la rúbrica correspondiente para evaluar esta segunda tarea."

El profesor enfatiza que la situación problema 2 tiene la misma estructura (es la misma historia) que la situación problema 1: "Fíjense, que si no leemos lo que está ahí arriba, la figura que aparece es prácticamente la misma que apareció en la situación problema número 1." En efecto, la única diferencia consiste en que en la figura mostrada en la pizarra tiene resaltada la región del plano cuya área se desea calcular. El profesor utiliza como conocimiento previo la situación problema 1 para introducir la situación problema 2. "… A ver, ¿cuál es la única diferencia entre la figura, ésta, a la de la situación problema número uno? ¿Alguien observa alguna diferencia?"

Alumno: "Está resaltada la parte de abajo de la curva."

Profesor: "… está resaltada esa región. Es una región limitada por la gráfica de una función, el eje de las equis [x] y las rectas equis es igual a 'a' [$x = a$] y equis es igual a be [$x = b$]. Deliberadamente la función que hemos puesto es exactamente la misma función de la situación [refiriéndose a la SP1], pero ahora esa función y ese intervalo de 0 a 2 me están sirviendo, no para fijar la atención ahora en esa longitud, en ese arco y calcular su longitud, sino en esta región [indicando con la mano la región en la pizarra] y lo que queremos es calcular el área."

Entonces aprovecha para hacer énfasis que utiliza el mismo procedimiento que utilizó para resolver la situación problema uno: "… Pero yo les decía, vamos a hacerlo de una manera igualita que el otro, para dejar sistemáticamente una manera de proceder ante ciertos problemas."

El profesor acorde al significado actuativo empleado en la situación problema uno, afirma: "… Entonces, lo que estamos suponiendo es lo mismo que supusimos en la situación anterior. Sí, de que esto es, recto [apuntando al arco de curva], por eso estoy diciendo que es un polígono… y que esto es recto, por eso esto es un polígono [apuntando una de las partes en la que se dividió la región del plano cuya área se desea calcular]. En todo caso, me quedan dos polígonos, y bien reconocibles, ¿no? ¿De qué polígonos se tratan?"

Alumno: "Trapecios."

El profesor reiteradamente hace énfasis en que el esquema de solución de esta situación problema es equivalente a la utilizada en la primera situación problema (cálculo de la longitud de arco), al hacer referencia al mismo para abordar la actual situación problema: "Luego, se hace el cálculo, y traten de decir, a ver, ¿cómo resolví el problema anterior? Para escribir el mismo esquema, nada más que adecuado a la nueva situación. Porque fíjense, la segunda parte de esta actividad pues es igualito que el anterior. Nada más que ahora esta está dividiendo el arco en cuatro partes, porque ya no estamos fijando la atención en el arco, estamos fijando la atención en la región sombreada. Queremos calcular su área.”

“Bueno, de momento se pide que hagas otro cálculo aproximado, pero ahora a la región, a la región, completita, divídela en cuatro partes como se indica, y supón que cada parte es un polígono. Es decir, haz el mismo supuesto que en la actividad anterior, de que estos arcos de curva son rectos.”

Se asigna la situación problema dos a los estudiantes, quienes forman equipos en ternas, sugeridos por el profesor en base a la ubicación en el salón (los tres más cercanos que estén sin equipo aún, forman un equipo). Los estudiantes trabajan colaborativamente alrededor de 17 minutos. Todos muestran muy buena disposición para el trabajo en equipo. Hacen uso del formulario (conocimiento previo) para realizar los cálculos. Mientras trabajan, continuamente discuten entre ellos la solución. Cuando tienen duda de algún elemento del polígono (trapecio en este caso) preguntan a un elemento del equipo para verificar o corregir. En un equipo en particular, los estudiantes se retroalimentan para identificar cada lado del trapecio y relacionarlo con la figura del formulario con el fin de hacer el cálculo del área. Después de cierto tiempo, un equipo pregunta a otro qué resultado obtuvieron de la primera parte con la intención de validar el resultado obtenido.

Después de que los estudiantes intentaron resolver la situación problema 2 (SP-2), el profesor muestra cómo se espera que los estudiantes la hayan resuelto. En particular, inicia caracterizando la región cuya área se desea aproximar. Luego la denota con una literal (A) el valor de su área: “… vamos a llamar a el área de esa región A.”

El profesor da indicios de que la forma en que se divide el todo en este caso, no es la única forma en que éste puede dividirse, y de hecho no es en todos los casos, la más conveniente, cuando afirma: “De hecho, en las tareas no va a estar esta división [señalando un segmento de recta vertical que indica en la figura cómo se divide la región del plano para su aproximación], porque esa división es la sugerencia que se está haciendo en el problema…”.

En cada oportunidad, el profesor hace patente el símil del principio leibniziano, al cual se denomina en el curso idea fundamental del Cálculo: “Si llamamos A-uno [A_1] al área de la primera parte y A-dos [A_2] al área de la segunda parte, pues es claro que el área que queremos calcular es la suma de las áreas de las partes. Bueno, ¿cómo voy a calcular A-uno [A_1]? Si también tengo el problema de que esto [refiriéndose al arco de curva] es curvo. Ah, bueno, supón que es recto. No lo es, ¿verdad?, pero supón que es recto. Entonces, bajo ese supuesto, de que esto es recto, [audio ininteligible]… ¿qué me quedaría? Un trapecio. Y entonces, uso la fórmula del área de un trapecio, ¿no? pero aquí no pongo una igualdad, sino pongo aproximación, porque a final de cuentas no es un trapecio, y calculo.”

También recuerda a los estudiantes que el conocimiento previo requerido para todo el curso se encuentra en el formulario que se utilizó en la sesión cero: “Decía la primera sesión, esta hojita… donde venían las fórmulas de geometría, tráiganla todos los días, porque… con esa información van a poder sacar cien en el primer parcial. Es el único conocimiento previo que van a requerir.”

Asimismo, repetidas veces hace énfasis en que se está creando un esquema de proceder ante una clase de problemas: “Además, lo voy a hacer así, con este lujo de detalle, porque el caso particular, la particularidad del caso no quita la generalidad del procedimiento. Voy a hacer exactamente lo mismo, no importa quién sea la función, no importa quién sea el intervalo. La única restricción en este caso es que la función sea no negativa, para que me quede una región allí. … Es la misma historia. ¿Qué sigue? Allá puse, ele-uno [L_1], ¿cómo lo voy a calcular? Aquí, cómo voy a calcular a-uno [A_1]. ”

El profesor continuamente utiliza la figura proyectada sobre la pizarra como apoyo para indicar aquello de lo que habla. “Pues si supongo que esto es recto [remarcando un arco de curva en la figura de la pizarra], que no lo es… entonces esto es un trapecio [remarcando una parte de la región del plano que se desea calcular], que no lo es, pero pongo aproximado [refiriéndose al símbolo $\approx$] y uso la fórmula del trapecio.”

A través de preguntas el profesor guía a los estudiantes y los involucra en la construcción del significado actuativo con base en el esquema de solución utilizado en la situación problema uno y adaptándolo para la situación problema actual: “¿Cuál de las dos –es la pregunta, ¿no? – aproximaciones es mejor? También lo importante es, ¿y por qué? ¿Cuál es mejor? ”

Alumno: “La segunda.”

Profesor: “La segunda. ¿Y por qué?”

Alumno: “… porque en la segunda partición se divide en más intervalos la recta”

Profesor: “¿Por qué Bernardo?”

Bernardo: “… porque eso hace que la curva que se supone que es, pues curva, sea una línea recta.”

Profesor: “Bien. O sea, el hacer más intervalos, más partes, de la misma manera… [audio ininteligible]… si hago más, si divido en más partes, pero de la misma manera, entonces, [apuntando a un subintervalo sobre el eje x en la figura proyectada en la pizarra] éste es más pequeño que el anterior, [apuntando a un segmento del arco de curva en la figura proyectada en la pizarra] este trozo de curva es más pequeño que el otro, y entonces, al ser más pequeño es más parecido a una recta.”

El profesor hace uso de una hoja de cálculo para evidenciar numéricamente que conforme se aumenta la cantidad de partes en las que se divide al todo, las aproximaciones son cada vez mejores y se acercan cada vez más a su valor exacto: “Pues si las cosas, si las aproximaciones mejoran, en cuanto dividamos la región en más partes de la manera como lo hemos estado haciendo, ah!, pues vamos a calcular valores aproximados cuando tomemos, más partes. Y para eso, pues vamos a valernos de esta hoja de cálculo. … A la larga, cuando voy aumentando el número de partes éstas [refiriéndose a las aproximaciones del área obtenidas] se van estabilizando a un cierto valor, ése es el valor exacto… De tal manera que diríamos, cuando el número de partes tiende a infinito, las aproximaciones tienden al valor [esperando que los estudiantes contesten]”

Alumno: “exacto.”

El profesor sintetiza el significado actuativo desarrollado para resolver la SP-2 cómo partir el todo, calcular para cada parte y sumar los resultados cuando menciona: “Si ya vieron [audio ininteligible] …, o en preparatoria antes de ver Cálculo, porque no es más que una idea muy elemental. Una idea muy elemental de partir, calcular y sumar. El área del todo es la suma de las áreas de las partes. Claro que si en las partes, los cálculos fueron aproximados, al sumar las áreas de las partes, pues me da una aproximación. Aproximación que puedo ir mejorando tanto como quiera.”

Enseguida aprovecha para hacer de nuevo énfasis en que el significado actuativo desarrollado es una instancia de un proceder que aplica a una clase de problemas: “Para fines prácticos, ya el problema está resuelto. Claro que, el calcular el valor exacto, es un… problema más de carácter teórico. Pero justamente, la teoría nos va a permitir, ensanchar… nuestro campo de aplicaciones. Es decir, ampliar el conjunto de problemas que puedo resolver más allá de los que resolvía cuando no tenía la teoría.”

Y remata afirmando que este esquema particular de proceder les permitirá resolver por propia cuenta problemas nuevos: “Pero, les decía, esa manera como lo estamos haciendo, les va a permitir, que en un momento ustedes puedan, por propia cuenta, establecer una Integral.”

Sesión 4

Objetos matemáticos puestos en juego

Situaciones problemáticas abordadas: Calcular el área de una región del plano delimitada por el eje x (horizontal), la gráfica de una función $y = f(x)$ conocida y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Lenguaje: A, representa el valor del área de la región del plano; x_i, representa un extremo del intervalo (x_{i-1}, x_i), en que se divide el intervalo (a, b) (los valores de i van desde 1 hasta $n - 1$); $i = 1,2,3, \cdots, n - 1, n$, indica que hay n subintervalos de la forma (x_{i-1}, x_i); $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, representa la longitud del subintervalo (x_{i-1}, x_i); $y = f(x)$, representa la función que delimita la región del plano cuya área se desea cuantificar; X, representa el eje x; Y, representa el eje y.

Procedimientos: Para calcular de manera aproximada el área de una región del plano delimitada por el eje x, la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$: (1) dividir el intervalo (a, b) en n subintervalos de igual tamaño (Δx); (2) evaluar la función en los extremos x_{i-1} y x_i de los subintervalos; (3) considerar los valores $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$ como bases de un trapecio de altura Δx; (4) calcular el área de un trapecio (genérico) que representa a todos los trapecios que se encuentran en el intevalo (a, b); (5) sumar las áreas de los trapecios. Para calcular de manera exacta el área de una región del plano delimitada por el eje x, la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$: (1) dividir el intervalo (a, b) en una cantidad infinita de subintervalos de la forma (x_{i-1}, x_i) cada uno de longitud dx; (2) considerar un subintervalo genérico $(x, x + dx)$, que los represente a todos; (3) para dicho subintervalo se determina una parte de la región del plano, cuya área dA es infinitamente pequeña; (4) calcular dA (aplicando el principio leibniziano); (5) sumar todos los dA desde $x = a$ hasta $x = b$.

Propiedades: (de las cantidades infinitamente pequeñas) “cuando tenga una expresión de este tipo, un número ordinario por dx, otro número ordinario por dx^2, otro número ordinario por dx^3, otro número ordinario por dx^4, y así, cuando tengan esto, … para todos los fines, se pueden quedar solamente con el primer término” (es decir, los términos que incluyen potencias mayores a 1 de cantidades infinitamente pequeñas, se eliminan ante la presencia de una cantidad infinitamente pequeña de grado 1.)

Argumentos: “trozos pequeños de curva parecen rectos, pero si los tomo infinitamente pequeños, entonces son rectos.”

Observaciones

En esta sesión de instrucción se refinó y generalizó el procedimiento utilizado en la sesión previa para calcular (de manera aproximada primero y luego de manera exacta) el área de la región del plano delimitada por la gráfica de una función conocida ($y = y(x)$, no negativa), el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Con base en la SP-2 (discutida en la sesión previa) se muestra una manera sistemática para mejorar la aproximación obtenida. Ésta sirve como justificación del hecho de que al incrementar el número de divisiones a una cantidad infinita, se obtiene el valor exacto del área de la región del plano mencionada.

Al inicio de la sesión, el profesor sintetiza lo realizado en la sesión anterior y generalizando para obtener el valor exacto del área bajo la curva correspondiente a la SP-2. Utiliza como apoyo visual una presentación elaborada en PowerPoint. Conforme avanza en la explicación va especificando los pasos de la rúbrica que se utilizan para evaluar las tareas: "La clase anterior vimos un procedimiento para calcular el área de un tipo de región de manera aproximada, pero sistemática en cuanto a que podemos ir mejorando las aproximaciones. Nuevamente aquí, simbólicamente vamos a dar cuenta de ese procedimiento."

El profesor utiliza la rúbrica que proveyó a los estudiantes para la elaboración de la tarea y que se utilizó para evaluar las mismas para explicar el procedimiento que utiliza para plantear la Integral Definida: "En la rúbrica, el primer paso que tienen que hacer es justamente, señalar la región de la cual van a calcular su área. El segundo paso, es justamente nombrar al área con un símbolo, en este caso con la letra… A. Tercer paso, es señalar las partes en que se divide y la manera como se hizo esa división. Bueno, aquí ya sabemos que la división es dividiendo al intervalo (a, b) en partes, en este caso específico, en ene [n] partes. Entonces, empezando en a, y tomando que la longitud común de los ene [n] intervalos, que sería, be menos a entre ene [$(b-a)/n$] empezamos a formar los demás extremos de los intervalos con esa fórmula recursiva."

El profesor muestra que el esquema de proceder utilizado para resolver de manera aproximada la SP-2 será adaptada para obtener el resultado exacto: "… pero ahorita no nos interesa eso, en este momento, porque vamos a encontrar el valor exacto. Entonces, vamos a poner por aquí, igual, esa región, ya limitada [mientras el profesor dibuja a mano la región del plano en la pizarra], la función, $y = f(x)$. A es su área, y entonces, la pregunta aquí es: bueno, por qué pusimos aproximado, … ¿y cuándo sería recto ese pedazo de curva?"

Alumno: "…cuando sea infinitamente pequeño."

Profesor: "… cuando sea infinitamente pequeño, con lo que eso signifique. Entonces, vamos a dividirlo [mientras señala una a una las partes en que se dividió la región del plano proyectada en la pizarra] en partes, pero en partes de tal manera que estos sean, ¿qué? [motivando la respuesta por parte de los estudiantes] infinitamente pequeños. Y en todo caso, que estos intervalitos [señalando un subintervalo sobre el eje x que se muestra en la figura proyectada en la pizarra] sean infinitamente pequeños."

El profesor en su explicación, intenta introducir el caso general tomando como modelo la instancia resuelta la sesión previa (fase extensiva). De esta manera, aborda el cálculo de una parte genérica (infinitamente pequeña) del todo para cuantificar en ella el área y utilizarla para denotar a todas las partes (fase intensiva): "Entonces, vamos a dividir el intervalo de a a b en un número infinito de intervalos infinitamente pequeños. Y como son una infinidad, bueno, los matemáticos usan el lenguaje simbólico para dar cuenta de que están haciendo una división, en este caso infinita de partes infinitamente pequeñas, y para ello solamente toman uno de ellos que represente a todos." [En ese momento el profesor traza en la pizarra un intervalo $(x, x + dx)$ complementando la figura en la que se muestra la región del plano cuya área se desea calcular] “Al poner aquí equis [x] y aquí equis más de-equis [$x + dx$], como equis [x] no es ningún número [refiriéndose a un valor específico], son todos a la vez, pues ahí, con ese intervalo digo, ese intervalo, genéricamente me representa a todos los subintervalos infinitamente pequeños en los cuales se dividió el intervalo (a, b) [señalando, la figura que está elaborando a mano]. Y acá, [señalando la figura proyectada en la pizarra] para cada intervalo determinamos una parte de la región.”

De nuevo, utiliza la idea fundamental, es decir, el principio leibniziano, para justificar el procedimiento utilizado como una continuación natural del esquema de proceder utilizado para resolver la SP-2: “Entonces, igual, [mientras dibuja un diferencial de área] para cada intervalo, determinamos una parte de la región. Como esto es infinitamente pequeño [señalando el subintervalo $(x, x + dx)$ que trazó sobre el eje x en la figura que está dibujando en la pizarra], esto es, infinitamente pequeño [señalando el arco de curva correspondiente al intervalo $(x, x + dx)$], y por lo tanto, esa partecita, ¿qué sería? [pausa] un trapecio. Porque siendo infinitamente pequeño, esto sería recto [señalando el arco de curva correspondiente al intervalo $(x, x + dx)$]. Y como estos lados son paralelos [señalando las rectas verticales ubicadas en x y $x + dx$], se trata de un trapecio. … Si llamamos de-A [dA] al área de esa parte, entonces ¿quién sería A? Sumar todos, y vamos a usar de nueva cuenta este símbolo [mientras escribe el símbolo de Integral $\int dA$] que indica que estoy sumando todos las áreas de cada una de las infinitas partes infinitamente pequeñas en las cuales se dividió la región. Entonces vamos a calcular de-A [dA]. Ahora, de-A [dA] es un trapecio, ahora sí puedo poner en lugar de aproximado, voy a poner igual [mientras escribe el símbolo $=$], y pongo el área del trapecio.

Enseguida el profesor hace énfasis en la diferencia en la notación utilizada entre las cantidades reales (finitas) y las infinitesimales (infinitamente pequeñas): “efe de equis más delta equis [$f(x + dx)$]. Ojo, delta equis [Δx] se usa… cuando el incremento es pequeño pero finito, y de-equis [dx] se usa cuando el incremento es infinitamente…”

Alumnos: “pequeño.”

Profesor: “… pequeño. Entonces, de-equis [dx].”

Luego, con base en el conocimiento adquirido en el curso previo (Matemáticas 1), el profesor justifica la idea fundamental del Cálculo: “Bueno, observen, –y para eso son los ejercicios complementarios y las tareas, ¿no?– observen que voy a hacer prácticamente lo mismo… acá está, si no mal recuerdo, el fantasma de lo que llamé la idea fundamental, que decía, que efe de equis más delta-equis es igual a efe de equis más efe prima de equis por de-equis [$f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx$]. Esto no es otra cosa que poner algebraicamente el hecho de que ese trocito de curva es recto [mientras señala el arco de curva correspondiente al subintervalo $(x, x + dx)$]… En este curso y el anterior, decíamos, que el objetivo es conocer, comprender y aplicar las ideas fundamentales del Cálculo, ¿verdad? Allá vieron una, la que es prácticamente la misma, pero el contexto geométrico, la idea fundamental es que trozos pequeños de curva parecen rectos, pero si los tomo infinitamente pequeños, entonces son rectos. Y ese hecho, algebraicamente se escribe de esta manera [refiriéndose a la expresión $f(x + dx) = f(x) + f'(x) \cdot dx$]”

Después el profesor explica cómo se deduce el diferencial de área (dA) a partir de los elementos que se encuentran mostrados en la figura que elaboró para calcular de manera exacta el área de la región del plano. También explica las propiedades algebraicas de las cantidades infinitamente pequeñas postulando que los términos de orden superior se eliminan en presencia de las de primer orden: “Y entonces aquí, lo que hemos introducido de nuevo, en el primer curso y en este, son esas cantidades, esos números, ¿no?, infinitamente pequeños. Y entonces, sobre ellos desde allá, desde el curso de ‘mate 1’, –y acá lo recuerdo si no lo vieron en ese curso–, nada más se postularon dos cosas: una, que se operan algebraicamente como los demás números que ya conocen, que fue lo que hice aquí [señalando el procedimiento algebraico en donde deduce dA]. Y la otra, lo voy a poner aquí, este postulado sobre las cantidades infinitamente pequeñas, que cuando tenga una expresión de este tipo, un número ordinario por de-equis [dx], otro número ordinario por de-equis cuadrada [dx^2], otro número ordinario por de-equis cúbica [dx^3], otro número ordinario por de-equis cuarta [dx^4], y así, cuando tengan esto, todo esto, para todos los fines que estamos poniendo en este curso y en el curso anterior, se pueden quedar solamente con el primer término. O sea, todo esto [refiriéndose a los términos que incluyen múltiplos de infinitesimales de segundo y mayor orden] lo pueden tachar.” En la figura 27 se muestra lo expresado por el profesor al explicar dicho postulado a los estudiantes.

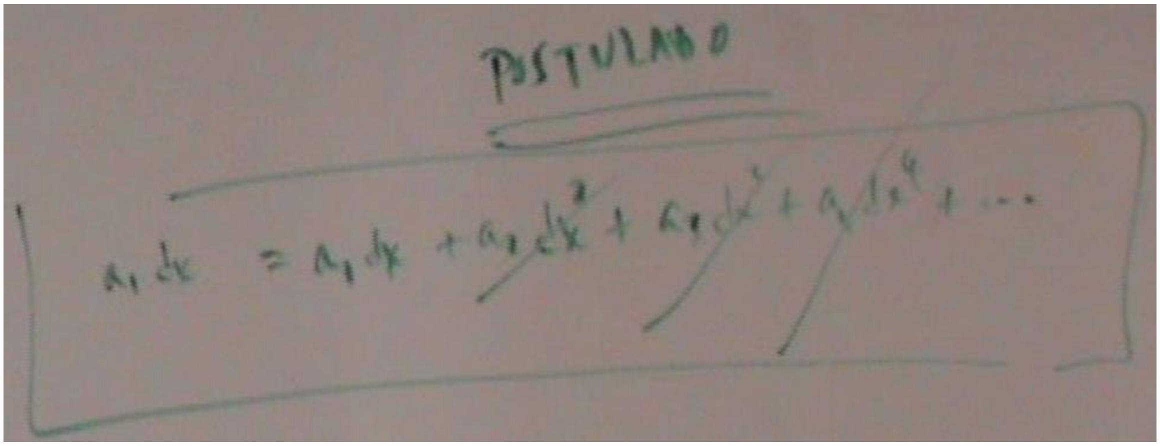


Figura 27. Postulado convenido para la simplificación de expresiones polinómicas en dx.

Sesión 5

Objetos matemáticos puestos en juego

Situaciones problemáticas abordadas: Cálculo del volumen de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región del plano delimitada por la gráfica de la función $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Lenguaje: Sólido de revolución; región (del plano); aproximación; V, para denotar el volumen del sólido de interés; V_1, V_2, V_3, V_4 para denotar el volumen de cada una de las partes en las que se dividió el sólido cuyo volumen se desea aproximar; $y = y(x) = f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$, la función que delimita la región del plano que al girarse alrededor del eje x genera el sólido cuyo volumen se desea cuantificar; x, y, las variables que sirven para denotar los ejes coordenados, al igual que las variables independiente y dependiente de la función matemática; x_1, x_2, x_3, x_4, valores asignados a la variable independiente para evaluar la función; y_1, y_2, y_3, y_4, imágenes devueltas por la función $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$ al evaluarla en los valores x_1, x_2, x_3, x_4, respectivamente.

Procedimientos: Para el cálculo aproximado del volumen de un sólido de revolución: (1) dividir el todo en dos partes; (2) calcular el volumen de cada parte considerándola como un cono truncado; (3) sumar los resultados obtenidos. Para mejorar la aproximación se repite el procedimiento pero dividiendo el sólido de revolución en cuatro partes.

Observaciones

En esta sesión se adaptó el procedimiento (usado en las sesiones uno y tres) para calcular de manera aproximada el volumen de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x una región del plano delimitada por la gráfica de la función $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$. De manera semejante a las situaciones problemáticas previamente discutidas, se dividió el sólido de revolución con base en el intervalo $(0,2)$ sobre el eje x, (que delimita la parte del sólido cuyo volumen se desea aproximar) en dos subintervalos del mismo tamaño; para cada subintervalo se consideró las partes del sólido correspondientes, los cuales fueron tratados como conos truncados; se calculó el volumen de cada parte y se sumaron las aproximaciones así obtenidas. Al final, como en las previas situaciones problema analizadas, se finaliza reflexionando qué efecto tiene aumentar el número de divisiones del intervalo $(0,2)$ en la aproximación.

El profesor inicia subrayando que la situación problema que se aborda en esta sesión es ‘la misma historia’ que las situaciones problema ya discutidas, y por tanto, se tratan con el mismo esquema de solución: “… En la clase anterior, abordamos el segundo tema. Y les decía, como vimos era prácticamente la misma historia, nada más que aquí el personaje es un arco de curva, y aquí el personaje es una región plana. Tercer tema: volúmenes de sólidos de revolución.”

Por la naturaleza del todo al que alude la problemática a discutir en esta sesión, el profesor siente la necesidad de aclarar que es un sólido de revolución. Por ello, inicia la sesión destacando esa primera parte de la metodología empleada: identificar al todo al cual se le calculará algo: "En las rúbricas el primer punto, obsérvenlo ahí, es 'señala el arco', 'señala la región plana'. Ahora sería 'señala el sólido'. Ese paso es muy importante, porque es identificar el objeto sobre el cual se va a cuantificar algo. La longitud del arco, el área de la región. Hasta ahí puede haber no mucho problema, porque ambos, el arco y la región, están en un plano. Sin embargo, el tercer tema habla de sólidos de revolución. Y en primer lugar habrá que tener claro qué entendemos por un sólido de revolución."

El profesor muestra varios ejemplos concretos de sólidos de revolución haciendo preguntas a los estudiantes para que identifiquen cada sólido. Una vez obtenido esto, justifica su acercamiento indicando que de esta manera podrán comprender el concepto de Integral Definida. Específicamente, menciona que cuando se realizan cálculos, se idealiza un objeto. Por ejemplo, se supone que una cuerda es unidimensional cuando en realidad es un sólido. Inicia intentando que los estudiantes visualicen correctamente el sólido que se genera al girar una función constante y cómo se forma un cilindro: "¿Qué pasa si esa región la giro alrededor del eje de las ye [y]?, perdón equis [x], ¿qué se generaría? [mientras el profesor hace un movimiento con ambas manos simulando la rotación de la figura alrededor del eje x] Lo giro. Quienes tienen los tornos, ¿no? [audio ininteligible] ¿Qué se generaría si lo giro?"

Estudiante: "Un cilindro."

Profesor: “Un cilindro, ¿verdad? Entonces, decía: muy importante, que visualicemos el objeto; es un cilindro, pero no es un tubo. ¿El tubo qué sería? Sería hueco por dentro, ¿cierto? Es un sólido.”

El profesor involucra a los estudiantes entregándoles un vaso sin fondo para que reconozcan una superficie y lo diferencien de un sólido. Después les pregunta qué se debe girar para obtener un sólido particular (el cilindro, el cono truncado, etc.) Después hace énfasis en la diferencia entre los conceptos de ‘área’ y de ‘superficie’ de un cono truncado explicando la diferencia entre cono (sólido) y su área lateral: “… pero si nada más, de esto lo que es razonable calcular es… el área. Ésta es una superficie. A veces en la práctica, le llamamos igual. ¿Cuál es el área? Esta es una superficie y lo que vamos a calcular es su área [mientras sostiene con la mano izquierda el vaso sin fondo, con los dedos de la otra mano toca la superficie externa del mismo simulando la rotación de su generatriz].”

A partir de entonces muestra que el esquema de proceder es aplicable a una clase de problemas y mencionando los pasos incluidos en la rúbrica que utiliza para evaluar los reactivos incluidos en las tareas: “… lo primero que tienen que tener claro, es el objeto del cual van a cuantificar algo, porque la manera como van a hacerlo, va a ser igual que estas dos [mientras señala los primeros dos temas (longitud de arco y área) que se proyectan en la pizarra]. ¿Qué hicimos aquí para cuantificar el arco? Lo dividimos en partes. ¿Qué hicimos aquí para cuantificar el área de la región? La región la dividimos en partes. ¿Qué vamos a hacer aquí? Lo mismo, ¿no?, pero hay que saber qué es lo que estamos dividiendo porque a eso vamos a dividirlo. Entonces, vamos a abrir [refiriéndose al archivo que se encuentra en la plataforma en línea] y vamos a ver que tenemos la misma estructura”, refiriéndose al esquema de proceder para resolver las situaciones problema.

Hace énfasis en dicho esquema con base en la analogía con las situaciones problemáticas previamente resueltas: “En la situación problema uno estuvimos interesados en qué,… en la longitud de este arco de curva [mientras remarca la figura proyectada sobre la pizarra]. En la situación problema dos, estuvimos interesados en el área de limitada por estas, o sea, toda el área. Ahora esa área la estamos girando alrededor del eje de las equis [x] y me queda un sólido de revolución. ¿Es alguno de estos tipos? ¿Sí? ¿Cuál?”

Estudiantes: [audio ininteligible].

Profesor: “Ninguno. Se parece a esto, ¿por qué se parece? Porque parece que esto es recto [mientras señala una parte del arco de curva, recorriéndolo con la mano] pero no lo es. Pero entonces, ¿qué vamos a hacer? Cuando lo dividamos en partes, se va a parecer más, ¿verdad? Y entonces, calculamos para las partes el volumen y sumamos. Y finalmente encontraríamos el valor exacto. O sea, vamos a repetir, la misma historia y eso es para todos los problemas.”

El profesor sugiere formar equipos de 3 para abordar la situación problemática 3. Los estudiantes trabajan aproximadamente 17 minutos en la resolución de dicha problemática. Después, con base en la rúbrica utilizada en las previas situaciones problema abordas, el profesor explica paso a paso cómo se resuelve.

“Ok. Ése es el sólido. ¿Qué me están pidiendo calcular de él?”

Alumno: “El área.”

Profesor: “Ojo. A ver. Un valor aproximado del volumen, del volumen. ¿Qué me están sugiriendo?”

Alumno: “Que divida.”

Profesor: “Que divida al sólido, ¿no? ¿Qué me van a dar si lo divido en dos partes? Pues dos sólidos. ¿Sí? Entonces, dice, ‘tal y como se muestra en la siguiente figura.’… señala las partes. Ahí está. Ahora, señala o indica cómo obtuviste esas partes. ¿Cómo se obtuvieron? Ah!, pues el intervalo de cero a dos, se dividió en dos intervalos [mientras remarca los intervalos en la figura en la pizarra]. Con este intervalo obtuve esta regioncita, la giré y me queda esa partecita. Con el otro intervalo, obtengo esta regioncita, la giré y obtengo esta otra parte. Entonces, debe de estar en su figura estos dos subintervalos. Bueno, ya indiqué las partes, ahora vamos a nombrar a los volúmenes de ellas como ve-uno [V_1], ve-dos [V_2]. Y entonces, nuestro volumen, pues es obviamente, ve-uno más ve-dos [$V_1 + V_2$], ¿verdad?”

Luego el profesor hace evidente que los estudiantes han adquirido parte del significado institucional al suponer que el arco de curva puede considerarse recto con fines de calcular de manera aproximada el volumen del sólido de revolución: “Bueno, pero ¿cómo voy a calcular ve-uno [V_1]? Pregunta, ¿cómo calcular ve-uno [V_1] ahí? Ustedes [dirigiéndose a los estudiantes] ¿Cómo calcular?”

Estudiantes: [audio ininteligible]

Profesor: “¿Con qué fórmula?”

Estudiantes: [audio ininteligible] Con la del [pausa]

Profesor: “¿Ésta?”

Estudiante: “Con la del truncado, sí, con la del cono truncado.”

Profesor: “Ojo, fíjense, lo que es la instrucción, ¿no? ya no dice ahí, que supongas que esto es recto. Pero ya los instruí. Ya el cerebro trabaja solito. Bajo el supuesto de que esto es recto [remarcando el arco de curva], esta partecita sería un cono [pausa esperando que los estudiantes terminen la frase]

Alumnos: “Truncado.”

Profesor: “Truncado. Y entonces, no lo es, pongo aquí, aproximado [mientras escribe en la pizarra: $V_1 \approx$] y ahora sí, uso la fórmula, y vamos a hacerlo así, para ver que la particularidad del caso no quita la generalidad del proceder. Vamos a proceder igual, no importa quién sea esta función, salvo que sea no negativa y no importa quién es este intervalo. La región que se tiene al generar, al girarla alrededor del eje de las equis [x] me da un sólido y de esa manera que estoy procediendo va a ser sistemática en cuanto a que vamos a ir, ya saben mejorando las aproximaciones.”

Y aprovecha la ocasión para hacer énfasis en la importancia de la parte conceptual del curso: “Entonces, no es ejercitar de esa manera, hacer muchos ejercicios, sino más bien hacer, unos cuantos, inclusive unos, pero con el lujo de detalle correspondiente.”

También menciona que la forma en que se divide al todo es de tal manera que se pueda mejorar la aproximación conforme se aumenta la cantidad de partes en que se divide al todo: “Entonces, fíjense, que la manera como se dividió el sólido fue para poder calcular en las partes lo que no podía calcular de manera directa, aunque fuera de manera aproximada en las partes. Entonces, puedo dividir de otra manera, y obtener una aproximación, pero queremos que la cosa sea sistemática, que hacerlo de igual manera otra vez, es este caso, me va a permitir mejorar la aproximación. Nada más que, en lugar de dividirlo en dos partes, se divide en cuatro de la misma manera, justamente para poder en las partes calcular los volúmenes, pero exactamente igual, de la misma manera que se hizo en el punto anterior. Y si hay una recursividad, entonces puedo usar un programa, una hoja de cálculo y hacer todo lo demás."

El profesor se esfuerza por mostrar que, de inicio se tiene una aproximación, porque el arco de curva no es recto: "¿Cómo voy a calcular ve-uno [V_1]? Ah, pues voy a suponer que esto es recto… [mientras remarca el arco de curva correspondiente a la primera parte del sólido de revolución] Si esto es recto, esta regioncita [mientras remarca la región debajo de la curva correspondiente a la primera parte del sólido de revolución] es un trapecio. Y si la giro, me va a quedar aquí un cono truncado. Entonces uso la fórmula del cono truncado, pero ya sé que no lo es, pongo de manera aproximada." Después, con ayuda de los estudiantes, realiza el cálculo de la aproximación del volumen del sólido de revolución.

El profesor finaliza la explicación con la argumentación de que conforme se aumenta la cantidad de partes en que se divide al sólido, se mejora la aproximación: "¿Cuál es mejor aproximación?"

Estudiante: [Audio ininteligible]

Profesor: "La segunda. Pero, ¿por qué? … porque, las partes que estamos suponiendo que son rectas, son más pequeñas y entonces ese supuesto es más contundente. ¿Cómo mejoraría? Pues dividiéndolo en más partes de la misma manera, para que esas partecitas que suponemos que son rectos, ¿verdad?, sea más contundente ese supuesto."

El profesor utiliza una herramienta tecnológica (una hoja de Cálculo en Excel de Microsoft©) para verificar que el resultado que han dado los estudiantes al problema de aproximar el volumen de un sólido de revolución es correcto. Aprovecha para obtener aproximaciones más precisas, aumentando el número de particiones. Con ello, argumenta, se puede obtener tanta precisión como se requiera: "… cuando ene [n] es igual a 4, bueno,… vamos a nuestra hoja de cálculo… y aquí tenemos una hoja de cálculo [pausa] y ahí está el valor. Cuando ene [n] vale, 8, si hago lo mismo, pero ahora ya no lo voy a hacer… el haberlo hecho de manera detallada me permite construir esta hoja de cálculo y entonces, pues nada más la actualizo, ¿no? ¿Qué vamos a cambiar? El número de partes. Si no pasan cosas raras, puedo decir, que es 33 y algo. Quiero llegar a las décimas, pues le doy más. ¿Y qué tendríamos? Pues que cuando esto tiende ¿qué? a infinito, ¿esto a dónde va a tender? [pausa] al valor, exacto. Y entonces, al leer esto, vean cómo se estabiliza y diría: es el valor exacto hasta la parte entera, el valor exacto hasta las décimas, el valor exacto hasta las centésimas, y hasta donde ya el error no sea grave."

Y después sintetiza el significado actuativo utilizado para la resolución de las primeras tres situaciones problemáticas ya cubiertas: "De nueva cuenta, observen que es la misma historia. Van a ver que cuando en cualquier libro de texto que vean de especialidades vean una Integral, está detrás esta historia: hay algo que se cuantificó y que para cuantificar a ese todo se dividió en partes de manera apropiada, para poder calcular en las partes lo que no podía calcular en el todo. Luego sumo, lo que obtuve en las partes y obtengo el valor del todo; si en las partes era aproximada, pues en el todo es, aproximado."

Después hace énfasis en que la manera apropiada para dividir el todo permite calcular lo que se le desea cuantificar: "Si como mero ocio, si quieren, agarren una fruta que sea un sólido de revolución; pueden agarrar la sandía, ¿verdad?, la pueden cortar. Si cortan la sandía así [señalando con las manos la forma de los cortes], ¿qué les queda?... como si fueran conos truncados, ¿no? O una pera, si la cortan, les quedan conos truncados [algún estudiante también menciona "conos truncados" casi simultáneamente con el profesor]. Conos truncados. Y pueden calcular, de manera aproximada, el volumen de la pera, la sandía."

Después muestra ejemplos distintos en los que se requiere dividir al todo de manera distinta a como se ha hecho en las situaciones problemáticas ya resueltas. Con ello, introduce el principio general para el establecimiento de una Integral Definida: "La papa, ¿es un sólido de revolución?"

Alumno: "Algunas, Algunas."

Profesor: "Algunas, verdad, pero la mayoría no. Pero fíjense, ¿cómo podrían calcular el volumen de una papa? [Algunos estudiantes intentan dar propuestas, audio ininteligible; el profesor indica] Pues háganla papas a la francesa, ¿no? Vean las tiritas de la papa. ¿Qué parecen?

Alumno 1: "Rectángulos."

Alumno 2: "Prismas."

Profesor: "Parecen prismas rectangulares, ¿no? Es una manera distinta. No es única. Aquí [señalando al pizarrón] no es un sólido de revolución, pero si la parto de esa manera, cada parte, puedo calcular de manera aproximada el volumen. La parte se parecen prismas rectangulares. Entonces, el arte para construir integrales es saber dividir apropiadamente el todo en partes. ¿Qué quiere decir apropiadamente? Que en las partes pueda calcular. Uso mis fórmulas para las partes, y sumo. O sea, al menos de manera aproximada… hagamos papas a la francesa más delgaditas, y entre más delgaditas más parecen un prisma rectangular. Pero en algunos casos, como los que vamos a ver nosotros, podemos encontrar el valor exacto construyendo la Integral correspondiente.”

Sesión 6

Objetos matemáticos puestos en juego

Situaciones problemáticas abordadas: Calcular el volumen de un sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región del plano delimitada por la gráfica de una función, el eje x y dos rectas verticales.

Lenguaje: Sólido; volumen; $y = f(x)$, para denotar la función considerada; x para denotar el argumento de la función, para denotar un valor genérico sobre el eje horizontal ($x = a$, $x = b$), para denotar al eje horizontal (en el párrafo); X para denotar el eje horizontal (en la figura proyectada en la pizarra); y para denotar la imagen del argumento de la función (escrito por el profesor en la pizarra); Y para denotar el eje vertical; V para denotar al volumen del sólido de revolución; V_1, V_2, V_n para denotar al volumen de cada una de las partes en que se dividió el sólido de revolución; Δx para denotar la longitud (real) de un subintervalo; a y b para denotar extremos de un intervalo sobre el eje x; $\sum_{i=1}^{n} V_i$ para indicar la suma $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$; $\approx$ para indicar “aproximadamente”; evaluar (una función en un punto).

Procedimientos: Para el cálculo aproximado del volumen de un sólido de revolución generado al girar una región del plano (similar al considerado en la SP-2) alrededor del eje x: (1) dividir el todo en n partes (n es un número natural); (2) calcular el volumen de una parte genérica considerándola como un cono truncado; (3) sumar los volúmenes de cada una de las partes en que se dividió al todo. Para calcular de manera exacta el volumen de un sólido de revolución generado al girar una región del plano (similar al considerado en la SP-2) alrededor del eje x: (1) dividir el intervalo (a, b) en una cantidad infinita de subintervalos de la forma (x_{i-1}, x_i) cada uno de longitud dx; (2) considerar un subintervalo genérico $(x, x + dx)$, que los represente a todos; (3) para dicho subintervalo se determina una parte del sólido, cuyo volumen dV es infinitamente pequeño; (4) calcular dV (aplicando el principio leibniziano); (5) sumar todos los dV desde $x = a$ hasta $x = b$.

Conceptos: Cono truncado, volumen.

Observaciones

En esta sesión de instrucción se refinó y generalizó el procedimiento utilizado (en la sesión previa) para calcular (de manera aproximada primero y luego de manera exacta) el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor del eje x la región del plano delimitada por la gráfica de una función conocida ($y = y(x)$, no negativa), el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Con base en la SP-3 (discutida en la sesión previa) se muestra una manera sistemática de mejorar la aproximación obtenida. Ésta sirve como justificación del hecho de que al incrementar el número de divisiones a una cantidad infinita, se obtiene el valor exacto del volumen de dicho sólido.

El profesor inicia haciendo una síntesis de lo que se vio en la sesión previa. Para ello utiliza una presentación en PowerPoint© proyectada en la pizarra: "¿Qué vimos la sesión anterior? Un procedimiento para calcular un valor aproximado del volumen [de un sólido de revolución] que se obtiene al girar una región del tipo del tema dos alrededor del eje de las equis [x]. Es decir, una región limitada por la gráfica de una función no negativa, ahí está la gráfica, el eje de las equis [x], ahí está el eje, y las rectas equis es igual a [$x = a$], ahí está la recta, y la recta equis es igual a be [$x = b$]. Ahí está la recta.

Esa región [refiriéndose a la región del plano proyectada en la pizarra], de la cual en el tema anterior vimos cómo calcular su área, tanto de manera aproximada como de manera exacta. Ahora, esa región, se va a girar alrededor del eje de las equis [x], y lo que obtenemos pues es un sólido, llamado de revolución. Y entonces, en este apoyo, en este archivo de PowerPoint, tenemos simbólicamente la síntesis de lo que hicimos la clase anterior."

El profesor vuelve a hacer mención de la importancia de saber dividir apropiadamente al todo: "¿Qué hicimos la clase anterior para calcular un valor aproximado? Ah, pues dividimos el sólido apropiadamente en partes. Y aquí lo apropiado, ya lo hemos insistido, es en cuanto a que en las partes podamos calcular lo que de entrada no podemos hacer con todo el sólido."

"Entonces, en este caso, la manera de partirlo apropiadamente es dividiendo el intervalo a-be [(a, b)] en ene [n] intervalos de igual longitud. Si el primer intervalo comienza en a, vamos a llamarle equis cero [x_0], y luego vamos a irnos tomando intervalos de longitud be menos a entre ene [$(b - a)/n$]. Esa longitud vamos a llamarle delta-equis [Δx]. Y entonces, de manera recursiva encontramos, equis uno [x_1], equis dos [x_2], hasta equis ene [x_n], sumándole al anterior la longitud del intervalo en cuestión."

También vuelve a hacer uso del análogo del principio leibniziano en su explicación: "Ahí está [refiriéndose a la diapositiva proyectada en la pizarra], genéricamente la manera como hemos dividido a ese sólido convenientemente para que en las partes podamos calcular su volumen, aunque sea de manera aproximada al suponer que esto [señalando un arco de la gráfica correspondiente a un subintervalo, en la figura que aparece en la diapositiva proyectada en la pizarra] es recto, ¿no? Por lo tanto las partes son conos truncados. Bueno, pero ¿cómo vamos a calcular ve-uno [V_1]? Ah, suponiendo que esa partecita es un cono truncado. Como no lo es, ponemos de manera aproximada [refiriéndose a escribir el símbolo $\approx$ en lugar de $=$].”

De manera reiterada, el profesor, insiste en reconocer el esquema que se está utilizando para resolver la situación problema: “Ahorita lo que estamos haciendo es bien simple: a un todo pártelo de manera apropiada para que en las partes puedas calcular lo que querías calcular del todo; ya calculadas, lo sumas. Claro, si el cálculo de las partes es de manera aproximada, pues el cálculo del todo también sería de manera aproximada. ”

Y aprovecha en ocasiones, la oportunidad para hacer mención, además del esquema, de la aplicación del análogo del principio leibniziano como estrategia para mejorar las aproximaciones en las iteraciones sucesivas: “Entonces, ahí en pantalla está simbólicamente sintetizado lo que hicimos la clase anterior. Un procedimiento, que no importa quién es la función efe de equis [$y = f(x)$], salvo que sea no negativa, no importa quién es la recta equis es igual a a [$x = a$], quién es a, quién es be [b]; el sólido que se genera al girar esa región alrededor del eje de las equis [x], su volumen se puede calcular de manera aproximada de esta manera; pero esta manera es sistemática, sistemática en cuanto a que si tomo cada vez más partes, las aproximaciones que voy tomando van siendo mejores. Porque al tomar más partes de la manera como lo estamos haciendo, éstos [apuntando los arcos de curva de cada una de las partes en que dividió al sólido de revolución mostrado en la pizarra] y en todo caso, el supuesto de que son rectos es más contundente.”

Después de esta síntesis introductoria del cálculo del volumen de un sólido de revolución, explica cómo se establece la Integral Definida que permite calcular de manera exacta el volumen de dicho sólido. Su explicación es una derivación del esquema ya aludido, con la consideración de conos truncados, pero en este caso, de altura infinitesimal: “Aquí, lo que estamos haciendo es dividiendo al sólido en un número infinito de conos truncados infinitamente pequeños.”

Con la intención de que los estudiantes reconozcan otras formas de partir el todo, el profesor sugiere a los estudiantes observar cómo lo que se estudia en el curso aparece en la naturaleza: “… la naturaleza parte al todo en partes, no infinitamente pequeñas, pero en partes en donde cada parte, algo hay de común. Por ejemplo, vean la naranja. ¿En qué las divide? En gajos, ¿no? Querrá decir que los gajos, cada gajo tiene algo en común. Entonces, lo que los invito, entre comillas, es a observar a nuestro alrededor lo que estamos viendo en el curso. O sea, ver sólido de revolución o ver objetos partidos de una manera que convendría para ciertos, para ciertos fines. ¿Nunca ha visto un tronco, los del rancho, como dicen, un tronco cortado transversalmente?”

Alumno: “Sí.”

Profesor: “¿Qué ves?”

Alumno: [audio ininteligible]

Profesor: “Anillos. La naturaleza así los hizo. Cada anillo se formó en una época. Quiere decir que ahí, toda esa parte tiene algo en común. Entonces, aquí, al sólido, allí el tronco, es la unión de esos anillos. Aquí, el cilindro, me conviene, bueno, el sólido, me conviene visualizarlo como formado por un número infinito de conos truncados infinitamente pequeños. … Aquí [señalando la figura proyectada en la pizarra] eran ene [n], acá [refiriéndose a la figura que está dibujando en la pizarra] tengo una infinidad; usamos esta simbología, ¿no? [mientras escribe $V = \int dV$ en la pizarra] Con ese símbolo están representando el hecho de que están cuantificando algo, y para hacerlo, lo dividen en partes. Cuantifican las partes y suman. Entonces, esto es una manera de ver una realidad: el todo es la suma de las partes." Después el profesor deduce el valor de la expresión dV con base en preguntas hechas a los estudiantes para involucrarlos.

Cuando sintetiza el procedimiento utilizado para resolver la tercera situación problema, el profesor vuelve a insistir en el esquema utilizado para establecer una Integral Definida a través de la rúbrica para evaluar las actividades de tarea: "Si ven las rúbricas de las dos actividades anteriores, cuando establecimos las Integrales, decíamos, 'Señaló el sólido', Sí; 'Llamó ve [V] al volumen', Sí; 'Señaló la parte genérica', Sí; 'Le llamó de-ve [dV] a su volumen', Sí; 'Estableció ve [V] como la suma de eso', Sí; 'Calculó de-ve [dV]', Sí. Ahora, 'Lo expresó de una manera apropiada' Allá era, para de-ele [dL] era: raíz de 1 más efe-prima al cuadrado, por de equis [$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$]. Y el otro era, efe de equis por de-equis [$f(x)\cdot dx$]. Es decir, una función en equis [x] por de-equis [dx]. Entonces, la idea es que esto que tengo aquí es expresarlo finalmente como una función de equis por de-equis [$dV = r(x)\cdot dx$]. Esa es la función cuya Integral me va dar el volumen."

De inicio, el profesor muestra la notación de una Antiderivada, sin los límites: "Y entonces, ¿quién sería ve [V]? Pues justamente [detiene su discurso para escribir: $V = \int \pi[f(x)]^2 \cdot dx$], la suma de todos los de-ve [dV]."

Pero inmediatamente después argumenta: "Aquí, para precisar que [los conos truncados]… me están barriendo el sólido, en cuestión, vamos a precisar diciendo que desde que la equis [x] es [va desde] a hasta que la equis [x] es b [mientras completa la expresión que escribió en la pizarra, agregando los límites de integración: $V = \int_a^b \pi f(x) \cdot dx$]"

Poco después, el profesor transmite el principio que subyace a la metodología para establecer la Integral Definida. Esto le sirve para enunciar la parte conceptual sobre la que descansa la Integral Definida con base en la notación utilizada: "Ustedes cuando ven ese símbolo [refiriéndose a la expresión $V = \int_a^b \pi f(x) \cdot dx$] lo saben leer desde Prepa. … La Integral de a a b de π por efe de equis cuadrada de-equis. Pero aquí, esa es la Integral, pero fíjense en lo que es la Integral: es una suma [mientras remarca el símbolo de Integral $\int$] infinita de cantidades infinitamente pequeñas [mientras subraya el integrando: $\pi[f(x)]^2 \cdot dx$]; pero en este caso particular, cada sumando me indica, tiene un significado, que es el volumen de las partes. Y si sumo, pues me da el volumen del todo. Entonces, la misma notación me está diciendo, en este curso a qué le estamos llamando Integral: a una suma de cantidades infinitamente pequeñas, pero donde cada sumando, en cada uno de los tres casos [refiriéndose a las situaciones problema abordadas] tiene un significado, ¿no? Se está cuantificando algo de una parte de un todo, y al sumar esas cuantificaciones pues me da la cuantificación del todo."

En su discurso, el profesor menciona la diferencia entre Integral Definida e Integral Indefinida cuando explica cómo se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo para cuantificar el volumen del sólido de revolución: "¿Qué hay que hacer para calcularlo usando el teorema fundamental? Es calcular una antiderivada de esta función, y evaluarla, ¿qué? en, en dos y restarle la evaluación en cero. O sea, una antiderivada [mientras escribe en la pizarra: $\int \pi \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right)^2 \cdot dx$], o lo que también, sería, una ¿qué? Integral Indefinida.”

Cuando el profesor explica la resolución de los problemas complementarios, insiste en el uso de la rúbrica como una guía del procedimiento planteado. No promueve el uso de las fórmulas ya encontradas como un recetario; más bien, sugiere que cada vez se deduzca por medio de su establecimiento. También menciona que el hecho de llevar a cabo el establecimiento de la Integral Definida correspondiente a cada una de las situaciones problemáticas ya discutidas, les dará la capacidad de aplicar este concepto matemático en otras situaciones: “Ya con estos tres problemas, a quien les caiga el veinte, como dicen vulgarmente, pues han prácticamente ganado la competencia de aplicar el Cálculo Integral, en cuanto a reconocer un problema de este tipo. ¿De qué tipo? Cuantificar una cualidad de un todo, y que para hacerlo, a ese todo se divide en partes, apropiadamente para calcular en las partes lo que se quiere calcular en el todo y sumar. O sea, cualquier Integral de este tipo, o de otro, pero de este tipo en particular, que vean, cuando aparezcan, es que lo que está en juego es eso; que ahí hubo ese tipo de problema, en donde aparecen las derivadas y las Integrales, pues son los que dan cuenta del pan de cada día de los cursos de Cálculo.”

Síntesis del significado institucional implementado

Durante las sesiones impares (sesión 1, sesión 3 y sesión 5) el profesor propuso una situación problema que consistía en calcular de manera aproximada una cualidad de un todo (la longitud de arco de la gráfica de una curva, el área de una región del plano y el volumen de un sólido de revolución, respectivamente). Cada situación problema fue explicada por parte del profesor para que los estudiantes la entendieran y después la abordaran en equipos de tres, trabajando aproximadamente 15 minutos. Después el profesor detalló la resolución de cada situación problema y finalizó con una síntesis del procedimiento utilizado. Esta síntesis preparó a los estudiantes para las sesiones pares.

En las sesiones pares (sesión 2, sesión 4 y sesión 6) se generalizó el procedimiento utilizado para resolver cada situación problemática abordada en las sesiones previas de tal manera que aplicara a una clase de funciones. También se consideró un intervalo general denotado por (a, b), con base en el cual se determinaba el todo al que se le deseaba calcular alguna cualidad. El procedimiento también se refinó, en el sentido de que el resultado obtenido no era una aproximación, como en las respectivas sesiones previas, sino el valor exacto de la cualidad de interés. Como base para el establecimiento del significado institucional se utilizó una rúbrica diseñada por el profesor para valorar las tareas desarrolladas por los estudiantes.

Algo que no se mencionó en la caracterización del significado implementado ya incluida y que es conveniente mencionar, es que al final de cada sesión par, el profesor solicitó a los estudiantes la elaboración de una tarea (elaborada extraclase), la cual se podía obtener a través de la plataforma en línea utilizada en el curso. Cada una de esas tareas incluía seis ejercicios: los primeros tres solicitaban calcular de manera aproximada la cualidad correspondiente a la situación problema discutida en clase, los siguientes dos establecer y calcular una Integral Definida con la cual se cuantifica de manera exacta dicha cualidad y el último ejercicio requería solamente el establecimiento de la Integral Definida para cuantificar de manera exacta la misma cualidad. En cada tarea, los pares de ejercicios 1 y 4, 2 y 5, y 3 y 6 consideraron la misma función matemática, pero distinta de los otros dos pares de ejercicios. En cada caso, los estudiantes tenían acceso a la rúbrica correspondiente a cada tarea para su elaboración, la cual servía como una guía para la solución de cada ejercicio incluido en ellas.

Se observó que los estudiantes estuvieron expuestos continuamente (tanto en las sesiones de instrucción como en las tareas extraclase) al mismo significado actuativo aplicable a una misma clase de situaciones problemáticas. Por la forma en que el profesor diseñó los ejercicios incluidos en las tareas, se insistió una y otra vez en dicho significado actuativo. Esta reiteración buscaba favorecer que los estudiantes adoptaran dicho significado actuativo.

En el Apéndice D se incluye una versión genérica de la rúbrica analítica que fue utilizada en la valoración de cada una de las tareas extraclase elaboradas por los estudiantes. La rúbrica particular empleada en la valoración de cada tarea hacía referencia "al todo" específico de la situación problema correspondiente (longitud de arco para la SP-1, y así sucesivamente). Asimismo, estaba adecuada a lo solicitado en cada ejercicio incluido en cada tarea, dependiendo si se solicitara un cálculo aproximado de la cualidad, el establecimiento y cálculo de la Integral Definida que determinara dicha cualidad de manera exacta o únicamente el establecimiento de dicha Integral Definida. La rúbrica correspondiente a este último caso fue utilizada durante la instrucción para puntualizar el procedimiento empleado para abordar las situaciones problemas discutidas. La rúbrica que se incluye en el apéndice D corresponde al caso en el que se solicita establecer y calcular una Integral Definida que permita cuantificar de manera exacta la cualidad que se desea conocer del todo.

Se observó que el significado institucional implementado estuvo alineado al significado institucional de referencia: la estructura y el tipo de problemas abordados en clase y de los ejercicios incluidos en las tareas, el lenguaje utilizado (tanto simbólico, verbal y gráfico), los procedimientos empleados en la resolución de los problemas, los conceptos utilizados, las propiedades atribuidas a los conceptos involucrados en la discusión y los argumentos que justificaban dichas propiedades y procedimientos estaban en concordancia con lo que se encuentra en la obra de Salinas et al (2012).

Cabe mencionar que en cada uno de los problemas cubiertos durante la instrucción se requería dividir al todo de la misma forma: se divide el intervalo (a, b) en un número infinito de partes, para cada una de esos subintervalos se determina una parte correspondiente del todo, se considera una de esas partes (genérica del todo) para calcular en ella la cualidad que se desea cuantificar. Con base en ese resultado, se cuantifica la cualidad para el todo como la suma de la cualidad de todas las partes. Algunas veces el intervalo (a, b) estaba sobre el eje x mientras que otras veces sobre el eje y (o vertical, en caso de que se hubiese denotado con otra literal). Hasta la primera evaluación, no se discutió algún problema que requiriera otra forma de dividir al todo. Sin embargo, durante la instrucción el profesor hizo referencia a contextos en los cuales la partición del todo se debía hacer distinta a como se había discutido. También mencionó que el establecimiento de una Integral Definida tiene su base en saber dividir convenientemente al todo, esto es, de manera que para cada parte se pueda calcular lo que se desea cuantificar de él. Estas dos acciones llevadas a cabo por el docente son importantes porque el paso de dividir convenientemente al todo es, de acuerdo con el análisis ontosemiótico realizado, el de mayor complejidad en el significado institucional actuativo ahí encontrado.

Por otra parte, se hizo mucho énfasis en la instrucción en la denominada idea fundamental, algebraicamente, $y(x + dx) = y(x) + y'(x) \cdot dx$. Con base en esta idea se obtiene la expresión algebraica que representa la cuantificación de la cualidad de una parte (infinitamente pequeña) del todo. La idea fundamental viene a ser la representación algebraica del principio leibniziano (contraparte geométrica de la idea fundamental). Igual de importante es que en el proceso de obtención de la expresión que permite cuantificar la cualidad (de una parte genérica) que se desea calcular del todon se utilizó el postulado para la simplificación de las expresiones polinomiales en dx.

Enseguida se finaliza la caracterización de los significados institucionales con la correspondiente al significado institucional evaluado.

Caracterización del significado institucional evaluado

El significado institucional evaluado considerado para este trabajo consta de tres problemas cuya solución óptima se encuentra en la aplicación del concepto de Integral Definida de funciones de una variable. El diseño de este instrumento estuvo guiado por el objetivo de caracterizar la comprensión que alcanzan los estudiantes del concepto de Integral Definida tras la instrucción bajo la innovación de interés en este trabajo. Uno de los autores de la obra de referencia para la instrucción validó los problemas incluidos en el instrumento (el hecho de que los reactivos incorporados en dicho instrumento efectivamente atienden la comprensión de la Integral Definida alcanzada por el estudiante). La aplicación de dicho instrumento a los estudiantes se llevó a cabo en dos partes, el primer problema en la primera prueba aplicada a los estudiantes por parte del profesor en la sesión nueve y los otros dos problemas del instrumento en la segunda prueba aplicada en la sesión 23. A continuación se dan más detalles de cada prueba.

En la novena sesión de instrucción el profesor aplicó la primera prueba (examen) a los estudiantes para valorar sus aprendizajes y comprensión. En esa prueba se incluyeron cinco reactivos que debían ser contestados por el estudiante, de los cuales uno (el último) fue considerado para determinar la comprensión que alcanzan los estudiantes, pues no fue discutido en clase.

El primer reactivo de la prueba constaba de dos incisos. El primero de ellos solicitaba calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de una función dada. El segundo inciso solicitaba establecer la Integral Definida con la cual se calcula de manera exacta la longitud de arco de la gráfica de la misma función considerada en el primer inciso. El segundo reactivo solicitaba calcular de manera aproximada el área delimitada por la gráfica de una función conocida, el eje horizontal y dos rectas verticales. En el tercer reactivo se solicitaba establecer y calcular una Integral con la cual se obtiene el valor exacto del área de la región del plano delimitada por la gráfica de una función conocida, el eje horizontal y dos rectas verticales. El cuarto reactivo constaba de dos incisos. El primero de ellos solicitaba calcular un valor aproximado del volumen del sólido de revolución generado al girar la región del plano delimitada por la gráfica de una función del plano, el eje horizontal y dos rectas verticales. En el segundo inciso se solicitó establecer una Integral con la cual obtener el valor exacto del volumen del sólido de revolución mencionado en el primer inciso. Los primeros cuatro reactivos de dicha evaluación tienen la misma estructura que las situaciones problemáticas abordadas durante la instrucción, al igual que en las tareas extraclase. Con ello, se volvía a hacer referencia al esquema empleado para la solución de este tipo de problemas.

El último reactivo incluido en la primera prueba consiste en el problema del cual Alanís (2008) afirma que estudiantes logran resolver tras la instrucción del concepto de Integral Definida bajo la innovación de interés en este trabajo, lo cual es muy difícil o imposible que se logre en cursos tradicionales. Este problema consiste en establecer y calcular una Integral Definida con la cual se obtenga el valor exacto del área de la superficie del sólido de revolución que se obtiene cuando se gira alrededor del eje x la región del plano delimitada por la gráfica de una función conocida, el eje horizontal y dos rectas verticales. Este último reactivo incluido en la primera prueba aplicada por el profesor en el curso es el primer problema considerado para la caracterización del significado personal y la compresión alcanzados por los estudiantes.

La segunda evaluación aplicada por el profesor a los estudiantes durante el curso ocurrió en la sesión 23. Esta evaluación incluía 6 reactivos, cuya solución implicaba el uso del esquema de solución planteado durante la instrucción. El primer reactivo constaba de dos incisos. El primero solicitaba calcular de manera aproximada el área superficial de un sólido de revolución y el segundo inciso establecer la Integral Definida con la cual se calcula dicha área. El segundo reactivo solicitaba calcular la masa de un cable de densidad variable. El tercer reactivo solicitaba calcular la masa de una lámina de densidad variable cuya forma estaba dada en términos de la región del plano delimitada por la gráfica de una función conocida, el eje horizontal y dos rectas verticales. El cuarto reactivo de la evaluación solicitaba calcular la masa de un cable de densidad variable cuya forma coincidía con la de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$.

Los dos últimos reactivos de la segunda prueba (quinto y sexto reactivos) fueron parte del instrumento diseñado para este trabajo de investigación. En el quinto reactivo de la segunda prueba se solicitaba calcular la masa de un sólido de revolución cuya densidad dependía de la altura. Durante la instrucción se estudió cómo calcular la masa de cables y de láminas de densidad variable. En estos casos se estudió la relación entre la masa, la densidad y el volumen, conocimiento previo requerido para la resolución del quinto reactivo.

El último reactivo de la segunda evaluación era un problema de cálculo de la masa de una lámina cuadrada, pero cuya densidad en cada punto dependía de su distancia al lado (orilla de la placa) más cercano. El instrumento formado por estos tres problemas se incluye en el apéndice A y sus resultados se analizan en la sección titulada "Caracterización de los significados personales logrados" de este trabajo.

Cada estudiante debía resolverla prueba individualmente en a lo más 90 minutos. El profesor les permitió utilizar calculadora científica, formulario (conocimiento previo con las fórmulas de geometría elemental) y la rúbrica utilizada para evaluar las tareas y empleada como esquema para el establecimiento de la Integral Definida frecuentemente durante la instrucción.

Análisis del instrumento aplicado

Como se mencionó, el instrumento considerado para este estudio consta de tres problemas, los cuales fueron incluidos como parte de las evaluaciones aplicadas a los estudiantes por el profesor del curso:

- el quinto reactivo de la primera prueba aplicada a los estudiantes en la sesión 9 (establecimiento y cálculo de una Integral Definida con la cual se obtenga el valor exacto del área superficial de un sólido de revolución particular)

- el quinto reactivo de la segunda prueba aplicada a los estudiantes en la sesión 23 (cálculo de la masa de un sólido de revolución cuya densidad variable dependía de la altura), y
- el sexto reactivo de la segunda prueba (cálculo de la masa de una placa cuadrada cuya densidad en cada punto depende de su distancia al lado más cercano de la placa).

Debido a que se han observado con antelación dificultades en el tratamiento del problema del cálculo del área superficial del sólido de revolución por parte de los estudiantes, en particular, tienden a calcular o el área debajo de la curva (situación problema 2 de la innovación de interés), o el volumen del sólido de revolución (situación problema 3 de la innovación de interés), se consideró pertinente la elaboración de un manipulable sólido (material concreto ostensivo) mostrado en la figura 28. Con el apoyo de este material concreto, el profesor del curso explicó a cada estudiante de manera individual en qué consistía el problema exactamente (esto es, qué es lo que se solicitaba calcular), una vez que éstos levantaban la mano, indicando que estaban por iniciar el último problema de la primera prueba (primer problema del instrumento). Esto se hizo con la intención de evitar los conflictos semióticos (antes mencionados) observados en los estudiantes que intentan resolver este problema.

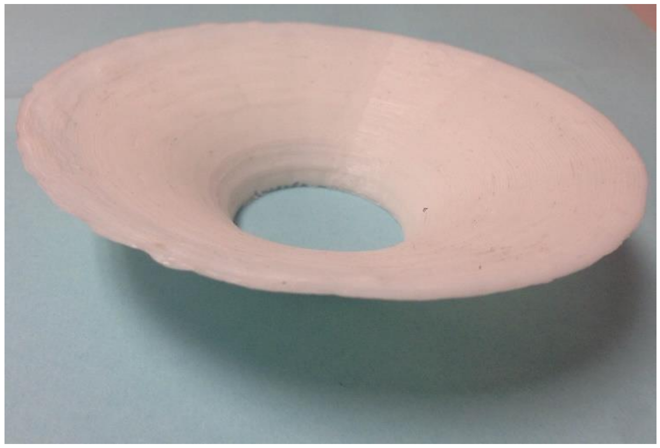


Figura 28. Material concreto mostrado a los estudiantes durante la aplicación del instrumento.

Aún y cuando durante la instrucción se resolvieron problemas de masa y de volumen, no se había considerado el cálculo de la masa de un sólido de revolución (es decir, con base en la densidad volumétrica), sino solamente de cables (que considera densidad lineal) y láminas (que involucra densidad superficial). Por ello se considera que el segundo problema del instrumento tampoco había sido abordado en clase. Para la resolución de este problema se requiere primero observar que el sólido de revolución se formó haciendo girar la gráfica de una función alrededor del eje y. Luego, el estudiante debe observar que la densidad varía con la altura ($\rho = \rho(y)$). Esto sugiere dividir el sólido de revolución formando conos truncados con bases paralelas al eje horizontal (eje x). La altura de estos conos truncados debe ser infinitamente pequeña para que en ellos la densidad sea constante (así la masa de cada parte puede cuantificarse) y utilizar la relación ya conocida: $dm = \rho \cdot dV$. Luego, expresar dV como $dV = \pi\big(g(y)\big)^2 \cdot dy$, y a partir de aquí, obtener $M = \int_0^{36} \rho \cdot dV$.

En las situaciones problemáticas abordadas antes de la primera evaluación utilizan la misma forma de partir el todo para la cuantificación de la cualidad a calcular en cada caso: se divide el intervalo sobre eje en un número infinito de subintervalos, se considera un subintervalo genérico (con extremos en los puntos x y $x + dx$); se calculan las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo considerado ($f(x)$ y $f(x + dx)$) y con base en estos puntos se calcula la cualidad deseada que le corresponde a este subintervalo genérico. Con este resultado se calcula el valor de la cualidad requerida. Por otra parte, el análisis ontosemiótico indicó que el significado actuativo promovido (esquema utilizado para resolver las situaciones problemáticas abordadas) tiene mayor complejidad en el paso en donde se realiza la división del todo, pues en realidad éste consiste en todo un proceso. Con estos antecedentes, se consideró pertinente incluir en el instrumento un tercer problema que requiere una forma de dividir al todo distinta a lo que se utilizó en las situaciones problema abordadas en clase y en los otros dos problemas del instrumento. Las respuestas emitidas por los estudiantes a este problema permitieron evidenciar que uno de los pasos de mayor complejidad ontosemiótica del significado actuativo promovido en la instrucción es la determinación de la forma de dividir al todo apropiadamente.

Caracterización de los significados personales logrados

Con base en las prácticas manifestadas por los estudiantes como respuesta a los reactivos de las primeras dos pruebas aplicadas por el profesor, evidencian que ellos adoptan los significados institucionales en lo que respecta al procedimiento que se utiliza para resolver problemas de manera aproximada (los primeros cuatro reactivos de la primera prueba y el primer reactivo de la segunda). Por tanto, el significado institucional implementado durante las sesiones impares (uno, tres y cinco) antes descrito, caracteriza los respectivos significados personales logrados por los estudiantes. En términos del

EOS: la mayoría de los estudiantes adoptan bastante aceptablemente las prácticas institucionales de las cuales emerge el concepto de Integral Definida de funciones de una variable.

Acerca de la comprensión, de los 35 estudiantes que respondieron la prueba, cinco (5) de ellos lograron establecer la Integral Definida con la cual se calcula el área de la superficie de un sólido de revolución aplicando el procedimiento planteado durante la instrucción. Esto es, (estrictamente hablando) se puede afirmar que al menos uno de cada siete estudiantes asistentes al curso alcanzó la comprensión del concepto de Integral Definida tras la instrucción de tres situaciones problemáticas y actividades relacionadas a éstas. De estos cinco estudiantes, uno calculó incorrectamente la antiderivada cuando intentó determinar el valor numérico de la Integral Definida y otro no lo intentó. Los otros tres determinaron correctamente el valor del área superficial solicitada. Enseguida se describen los resultados resumidos en la tabla 1.

Tabla 1.
Resultados de los significados personales logrados con base en la rúbrica relativos al problema 1 del instrumento aplicado.

No.	Paso	Frecuencia
1	Señaló la superficie de revolución	24
2	Expresó con el símbolo S el área de la superficie del sólido de revolución	24
3	Señaló la parte que genéricamente representa a las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió la superficie del sólido	19
4	Indicó cómo obtuvo las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió la superficie del sólido de revolución	19
5	Expresó con el símbolo dS al área de la parte que genéricamente representa a las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió la superficie del sólido de revolución	13
6	Expresó a S como la suma de las áreas de las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió la superficie	13
7	Calculó el valor exacto de dS / Lo expresó de la forma $r(x) \cdot dx$	13 / 5
8	Expresó a S como una Integral Definida	5
9	Calculó dicha Integral	3

Un análisis detallado de las prácticas expresadas por los estudiantes con base en la rúbrica de evaluación diseñada por el profesor (adecuada a dicho problema), mostró que 19 estudiantes lograron dividir al todo adecuadamente (en conos truncados). De ellos, 13 lograron calcular el valor exacto del área superficial del elemento diferencial de área superficial (denotado por dS). Este paso consistía en identificar elementos correspondientes en el diferencial de área superficial y el cono truncado para después hacer la sustitución (apropiadamente) en la expresión correspondiente al elemento diferencial (que permite calcular el área lateral del cono truncado de altura infinitesimal).

Para llegar al siguiente paso –expresar el valor exacto del área superficial del sólido de revolución como una Integral Definida–, se requiere primero simplificar la expresión algebraica para dS en la forma $r(x) \cdot dx$, aplicando la propiedad de las cantidades infinitesimales (en las expresiones polinomiales en dx, se conservan solamente aquellas de grado menor y las demás se eliminan) con lo que se obtiene: $dS = 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx$. Llama la atención que de los 13 que expresaron dS en términos de $f(x)$, $f(x+dx)$, dx y $f'(x)$ correctamente, solamente cinco realizaron la simplificación algebraica requerida para obtener $dS = r(x) \cdot dx$. Esos cinco estudiantes son los que expresaron el valor exacto del área superficial del sólido de revolución como una Integral Definida. Los otros ocho cometieron errores algebraicos en esa parte del procedimiento.

Gracias a que abordan apropiadamente el problema, estos ocho estudiantes logran llevar a cabo los pasos más difíciles del procedimiento: (1) identifican correctamente el todo y la cualidad que se le requiere calcular, y (2) dividen apropiadamente al todo para que en cada una de esas partes se pueda calcular de manera exacta lo que se desea calcular del todo. En este sentido, (siendo menos estricto que en el caso de los otros cinco estudiantes) se puede afirmar que estos ocho estudiantes lograron la comprensión, pues abordaron el problema utilizando adecuadamente los significados institucionales, pero las deficiencias en sus habilidades algebraicas –que son parte del conocimiento previo del curso observado– no les permiten obtener la expresión correcta para la cuantificación exacta del área superficial del sólido de revolución.

Del resto de los estudiantes, cuatro no intentaron resolver el problema. No se conoce si el tiempo asignado para la resolución del examen fue insuficiente o si no intentaron resolverlo por no saber cómo abordarlo. Otros dos iniciaron el procedimiento para la resolución de dicho problema, pero lo dejaron inconcluso. No se encontró error alguno en el desarrollo que muestra cada uno de ellos. Se encontraron errores algebraicos diversos en los intentos de varios estudiantes. Todos estos obtuvieron una Integral Definida que no corresponde con la solución del problema planteado.

Algunos estudiantes resolvieron un problema ya resuelto en clase, y por tanto, que no correspondía al problema planteado. De éstos, tres calcularon el volumen del sólido de revolución, otros tres calcularon el área bajo la curva y otros siete calcularon la longitud de arco de la gráfica de la función involucrada en el problema. En este último caso, algunos estudiantes pretendían calcular el área de la superficie del sólido de revolución a partir de la longitud de arco. Un estudiante calculó de manera aproximada el área de la superficie del sólido de revolución dividiéndolo en partes. Cabe mencionar que este estudiante realizó la división apropiadamente, pero no cuantificó el área solicitada de manera exacta, pues no estableció la Integral Definida requerida para tal fin. Finalmente, un estudiante no mostró procedimiento alguno, solamente un resultado numérico que no coincidía con el valor del área superficial buscada. En la tabla 2 se resumen estos resultados.

Tabla 2.

Problemas abordados por los estudiantes al intentar resolver el problema del cálculo del área superficial del sólido de revolución.

Problema	Frecuencia
Cálculo del volumen del sólido de revolución	3
Cálculo del área bajo la curva	3
Cálculo de la longitud del arco de curva	7
Cálculo aproximado del área superficial del sólido de revolución	1

Cabe mencionar que una buena fracción de los estudiantes no consultó la rúbrica analítica propuesta por el profesor que sirvió como guía en el planteamiento de una Integral Definida durante la instrucción. También se observó que la mayoría de los estudiantes se apegó al significado institucional actuativo (esquema) respectivo. Como muestra se incluye la caracterización del significado personal logrado que tres alumnos expresaron al responder el primer problema del instrumento diseñado: un alumno que alcanzó la comprensión (Daniel), un segundo alumno que utilizó el procedimiento planteado durante la instrucción, pero cometió errores algebraicos que lo condujeron a obtener un modelo que no corresponde con el solicitado (Claudia) y un estudiante que no logró establecer la Integral, aún y cuando logró reconocer la forma apropiada de dividir al todo para cuantificar el área superficial de una de sus partes (Ernesto). Se muestran los significados personales de estos tres estudiantes porque, tras las entrevistas, más adelante reportadas, se encontró que con los datos obtenidos de sus respuestas al instrumento y lo mencionado en dichas entrevistas, son los que permitieron revelar lo que este trabajo de investigación indaga.

Significados personales expresados por Daniel ante el problema 1

En la figura incluida en el reactivo (ostensivo gráfico) se muestra cómo Daniel indica cuál es el todo al cual desea cuantificar el área (paso 1 de la rúbrica). La cualidad que le desea cuantificar (refiriéndose al área superficial) es indicada por medio de una llave ({) acompañada de la literal A (paso 2 de la rúbrica). Ahí mismo muestra una parte genérica de las infinitas partes en las que dividió al todo, por medio de líneas auxiliares para dibujar secciones transversales del sólido, sugiriendo que dividió al todo en conos truncados de altura infinitesimal (paso 3 de la rúbrica). También indica con las expresiones x, $x + dx$, $f(x)$ y $f(x + dx)$ la forma en que procedió a dividir el todo (paso 4 de la rúbrica). Atendiendo al paso 5 de la rúbrica, utilizó la expresión dA para representar el valor del área de una parte (infinitamente pequeña) del todo (apuntando a la superficie de la parte con una flecha dibujada sobre la gráfica en la figura 29).

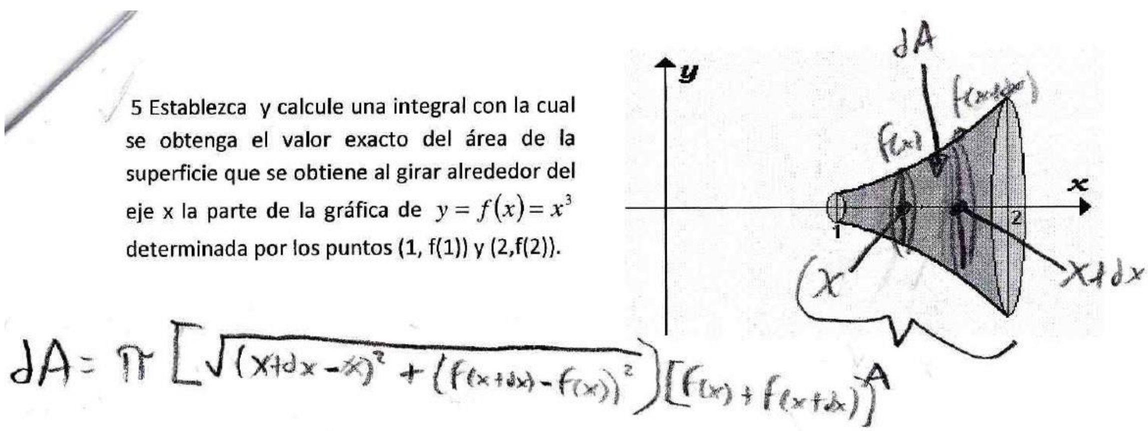


Figura 29. Prácticas expresadas por Daniel ante el primer problema del instrumento (primera parte).

Después, y de acuerdo con la fórmula para calcular el área lateral de un cono truncado, expresa el área de la parte genérica que muestra en la figura 29, como:

$$dA = \pi\sqrt{(x + dx - x)^2 + \big(f(x + dx) - f(x)\big)^2} \cdot [f(x) + f(x + dx)]$$

Después de simplificar obtiene: $dA = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$, realizando así el paso 7 de la rúbrica. En este proceso de simplificación aplica convenientemente el postulado enunciado durante la instrucción respecto de la suma de términos que involucren infinitesimales de distinto grado: se deben considerar solamente los términos de menor grado y eliminar todos los demás. Finalmente, desarrolla el punto 8 de la rúbrica al expresar el área superficial del sólido de revolución como una Integral definida. Al parecer, la evaluación de esta Integral definida la realiza con una calculadora, pues no muestra el procedimiento llevado a cabo para ello (básicamente, evaluar la antiderivada del integrando en los límites de integración). En la figura 30 se muestra el procedimiento utilizado por el estudiante ante el primer problema del instrumento.

$$dA = \pi\left[\sqrt{(x+dx-x)^2 + (f(x+dx)-f(x))^2}\right]\left[f(x)+f(x+dx)\right]$$

$$dA = \pi\left[\sqrt{dx^2 + (\cancel{f(x)}+f'(x)dx-\cancel{f(x)})^2}\right]\left[f(x)+f(x)+f'(x)dx\right]$$

$$dA = \pi\left[\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx\right]\left(2f(x) + f'(x)dx\right)$$

$$dA = \left(2\pi f(x) + \pi f'(x)dx\right)\left[\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx\right]$$

$$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx + \cancel{\pi f'(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx^2}$$

$$\underline{dA = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx}$$

$$A = \int_1^2 dA$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$[f'(x)]^2 = [3x^2]^2 = 9x^4$$

$$A = \int_1^2 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

$$A = \int_1^2 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\ dx$$

$$\boxed{A = 199.4804}$$

Figura 30. Expresiones empleadas por Daniel ante el primer problema del instrumento (segunda parte).

Cabe mencionar que aún y cuando no llevó a cabo el paso 6 de la rúbrica sugerida por el profesor como guía para el establecimiento de la Integral Definida, éste puede considerarse incluido en el paso 8 de la misma.

Significados personales expresados por Claudia ante el problema 1

Claudia indica en la figura incluida en su examen (figura 31) el todo al cual desea calcular el área superficial, por medio de una llave acompañada de la expresión "*A* lateral”, que hace referencia al valor del área buscada (pasos 1 y 2 de la rúbrica). En esa misma figura indicó cómo dividió al todo (paso 4 de la rúbrica) y muestra una de esas partes (paso 3 de la rúbrica). Para ello, dibuja elipses que aluden a cortes transversales del sólido en los puntos x y $x + dx$ del eje horizontal, al igual que sus imágenes respectivas ($f(x)$ y $f(x + dx)$), tal y como realizó en clase por el profesor.

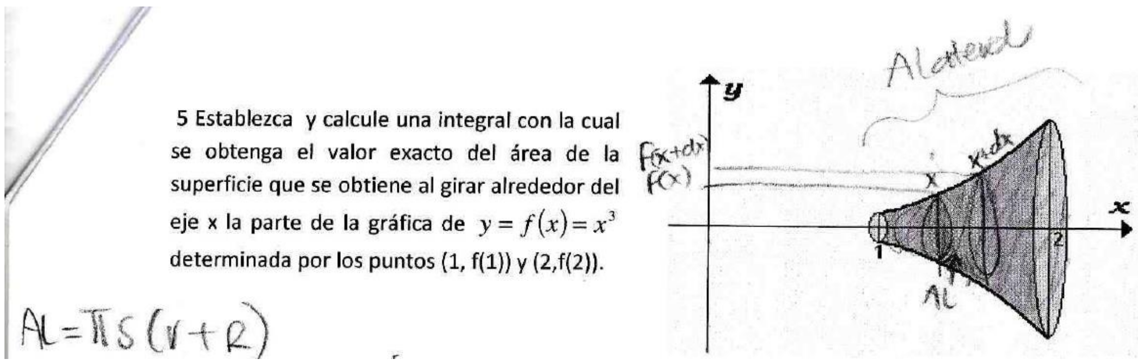


Figura 31. Prácticas expresadas por Claudia ante el primer problema del instrumento (primera parte).

Claudia muestra el paso 5 de la rúbrica en la misma figura a través de la expresión A_L, cuyo contenido es el valor del área superficial de un cono truncado. Cabe mencionar que en esta parte genérica del todo, se esperaba que escribiera dA, para indicar que el área lateral del cono truncado es infinitamente pequeña (esto es consecuencia de elegir las bases del cono truncado infinitamente cercanas, precisamente en los puntos x y $x + dx$). Debajo del texto que describe el problema (figura 31), Claudia escribió la fórmula para calcular el área lateral del cono truncado. Con ello evidencia que logró reconocer que debía dividir el sólido en conos truncados para cuantificar el área superficial de dicho cuerpo geométrico.

Siguiendo la rúbrica, Claudia escribe $A_L = \int dA_L$, para indicar que el área superficial (A_L) del sólido de revolución es igual a la suma ($\int$) de las áreas laterales

(dA_L) de los conos truncados de altura infinitesimal (figura 32). Este significado personal concuerda con el significado institucional promovido durante la instrucción.

Después de esto, procede a expresar el área lateral de una de las partes (intensivo) en la que ha dividido al sólido de revolución, con base en la fórmula del área lateral del cono truncado y sus respectivos valores con base en la figura incluida en el reactivo (figura 31). En esta oportunidad, Claudia utiliza la expresión A_L para denotar el valor del área de esa parte, la cual de acuerdo al significado institucional (notación para las cantidades infinitamente pequeñas) debió escribir: dA_L. Más adelante invierte la notación al asignar a la expresión dA_L una cantidad real, pues escribió: $dA_L = \int_1^2 \pi s f(x)^2 + \pi s f(x) f'(x) dx$.

Claudia comete un error al intentar simplificar la expresión que obtuvo para calcular el valor del área (dA_L) de un elemento diferencial, el cual consistió en aplicar incorrectamente la ley distributiva al realizar una multiplicación. Como consecuencia, el modelo obtenido para calcular de manera exacta el área superficial requerida por el problema es incorrecto, produciendo con ello un valor que no corresponde con el buscado. Estas prácticas expresadas evidencian carencias en sus habilidades algebraicas, requeridas para cualquier curso de Cálculo.

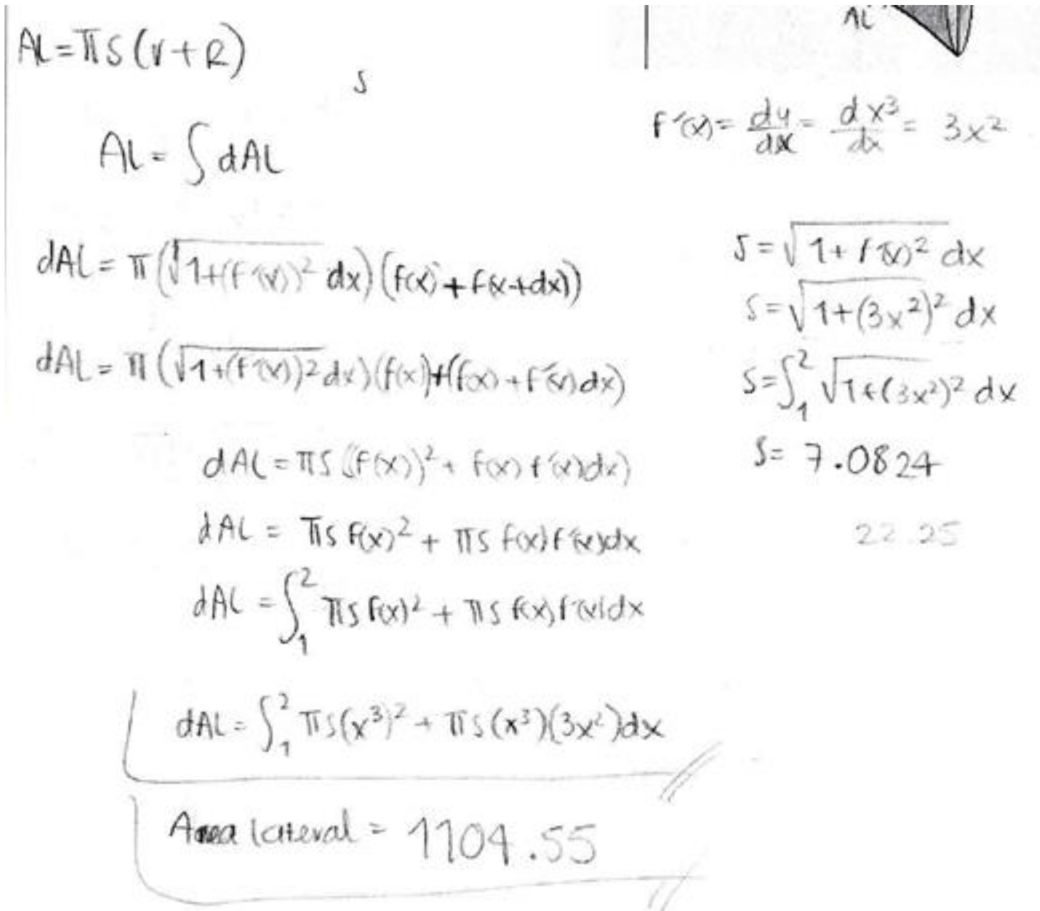


Figura 32. Expresiones empleadas por Claudia ante el primer problema del instrumento (segunda parte).

Llama la atención lo expresado por Claudia en la columna derecha: calculó correctamente la longitud de arco de la parte de la gráfica de la función considerada en el problema (7.0824), y debajo de este resultado escribió el número 22.25, que es aproximadamente π veces 7.0824 (el valor de la longitud de arco). Al parecer, ella intentó verificar el resultado que obtuvo del área de la superficie del sólido de revolución del problema (columna izquierda) imaginando que el arco de curva gira alrededor del eje (si es el caso, olvidó multiplicar por 2). Evidentemente este procedimiento omite el hecho de que la distancia de giro de la curva al eje x cambia continuamente, con lo que habría calculado (si se incluye al 2 como factor) el área superficial de un cilindro de 7.0824 unidades de altura y radio unitario.

Significados personales expresados por el Ernesto ante el problema 1

En la figura 33 se muestran una parte de las prácticas manifestadas por Ernesto para resolver el primer problema del instrumento. En la figura incluida en el examen, escribió A_{sup} para denotar el valor del área de la superficie del sólido a calcular (paso 2 de la rúbrica). Aquí utiliza correctamente la notación correspondiente a cantidades reales. Sin embargo, indica los puntos x y $x + dx$ en los extremos izquierdo y derecho del todo, respectivamente. Dado que la diferencia entre estos dos números es dx, una cantidad infinitamente pequeña, se espera que el estudiante las ubique uno cerca del otro como extremos de un subintervalo dentro del intervalo $(1,2)$ sobre el eje x. Por la representación que Ernesto usa de estos puntos infinitamente cercanos, se evidencia un conflicto semiótico. La noción (idea mental, no ostensiva) que el estudiante ha construido de las cantidades infinitamente pequeñas no corresponde con el significado institucional. De hecho, lo expresado por el estudiante se contrapone al procedimiento utilizado para aproximar la cualidad que se desea calcular del todo: para hacer un cálculo aproximado, se divide el todo en un número finito de partes.

Durante la instrucción se hizo énfasis en que para calcular de manera exacta la cualidad de interés se divide el todo en una cantidad infinita de partes, y por tanto, cada una de esas partes es infinitamente pequeña. También se mencionó reiteradamente la notación empleada para diferenciar las cantidades infinitamente pequeñas de las reales (u ordinarias): se anteponía la literal d a la literal utilizada para denotar el valor de la cualidad de interés (M), y en el caso de las cantidades reales se anteponía la letra griega

Δ. Así, una cantidad infinitamente pequeña se escribe dM y una cantidad real se expresa como ΔM.

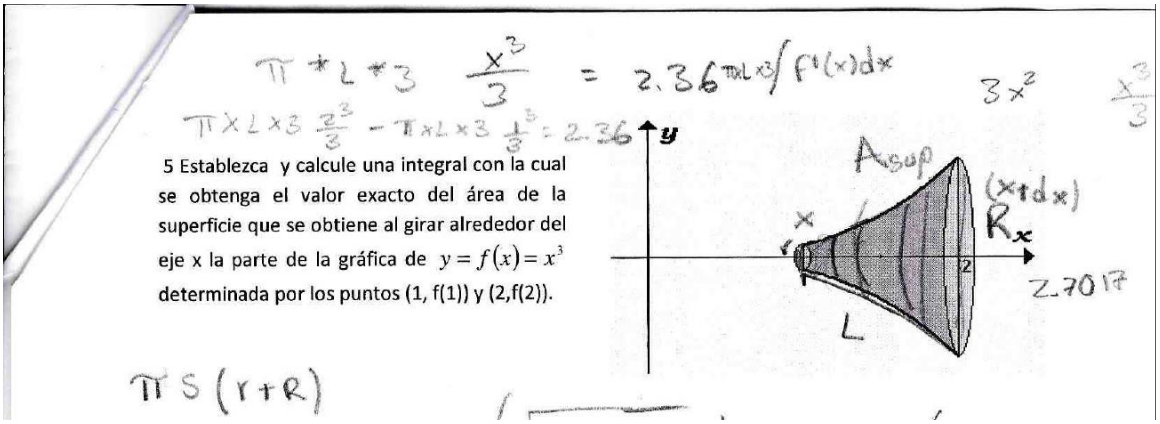


Figura 33. Prácticas expresadas por Ernesto ante el primer problema del instrumento (primera parte).

En su intento por calcular de manera exacta el valor del área de la superficie del sólido de revolución, Ernesto escribió algunas expresiones que involucran integrales, cuyo integrando tiene forma semejante al utilizado cuando se calcula la longitud de arco. También escribió $\pi s(r + R)$, lo cual apunta a las operaciones que debe realizar para calcular el área lateral de un cono truncado. Cabe mencionar que no escribió el signo de igualdad, por lo que no se trata de una fórmula propiamente (figura 34).

Al parecer, cuando Ernesto expresó: $\pi s[1 + 8] = 2.70$, intentó calcular el área de la superficie del sólido de revolución a partir de $f(1)$, $f(2)$, π y s, en donde se combinan el análogo del principio leibniziano (al considerar las alturas de los extremos del arco de la gráfica) y un proceder semejante a lo que elaboró Claudia. Los demás cálculos parecen intentos de desarrollo de ideas aparentemente aisladas entre sí y sin un orden claro. Evidentemente no aborda el problema aplicando el procedimiento promovido en el significado institucional, por lo cual puede afirmarse que no alcanzó la comprensión del concepto de Integral Definida de funciones de una variable.

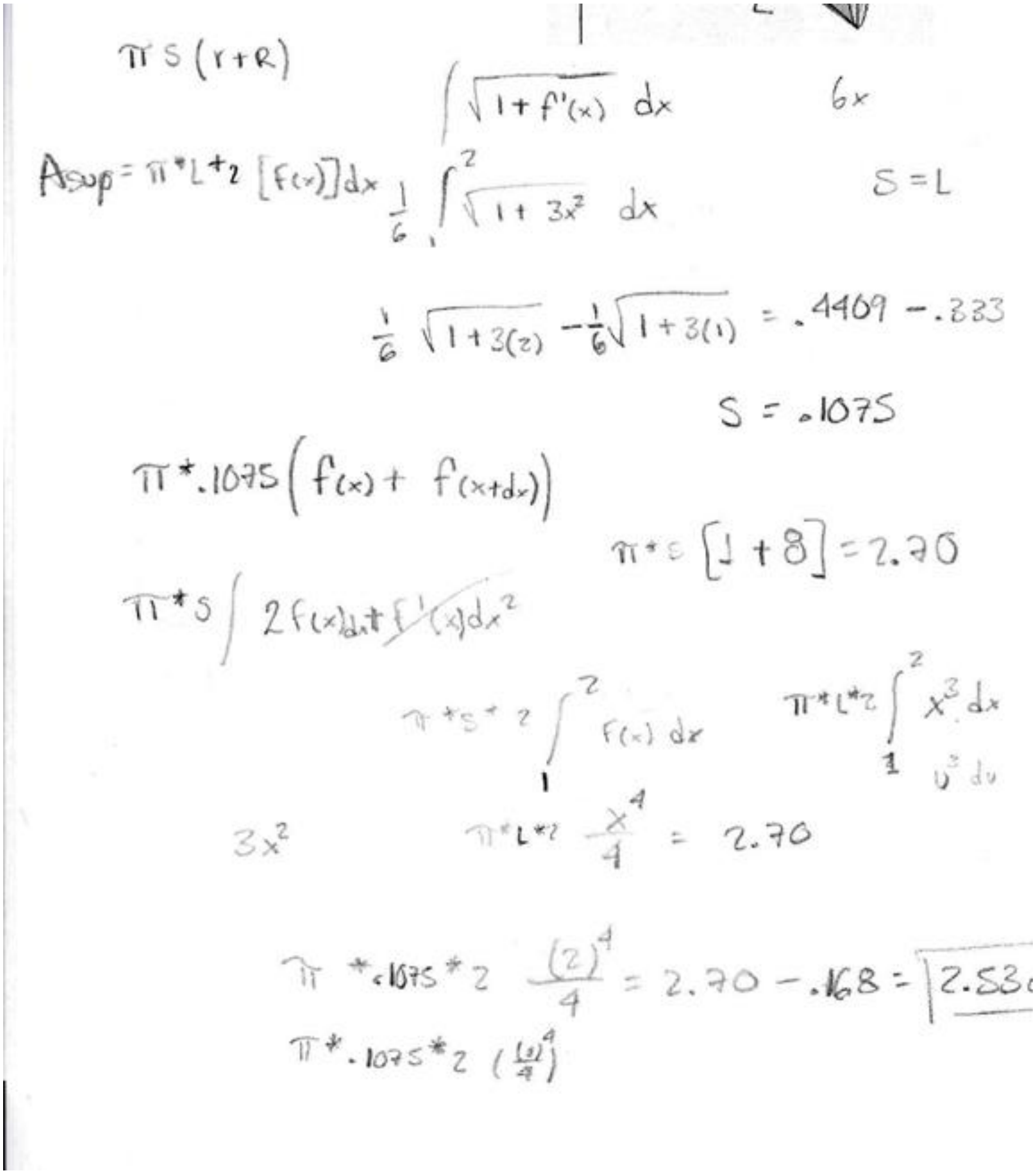


Figura 34. Expresiones empleadas por Ernesto ante el primer problema del instrumento (segunda parte).

Selección de participantes a entrevistar

Con el fin de profundizar en los significados personales logrados del concepto de Integral Definida de funciones de una variable, al final del curso se invitó a seis estudiantes a una entrevista semi-estructurada. La primera parte de la entrevista cubrió cuestiones relacionadas con la estructura del curso (cómo les pareció el curso, por el hecho de que no se trata de un curso tradicional), acerca de su formación previa en matemáticas (para conocer si estudiaron algún curso de Cálculo en el bachillerato y si éste era un curso tradicional) y de la propia apreciación de sus habilidades en matemáticas. La segunda parte de la entrevista consistió en pedir al entrevistado que explicara al investigador cómo resuelve tres problemas en los que se solicita establecer una Integral Definida para calcular alguna cualidad de un todo. Específicamente, los problemas que se solicitó a cada participante resolver fueron: (1) el primer problema del instrumento que se encuentra en el apéndice A, (2) el tercer problema de dicho instrumento, y (3) el cálculo de la masa de una esfera de radio cinco cuya densidad en cada punto depende de su distancia al centro de la misma ($\rho(r) = 1/(1 + r^3)$, donde r es la distancia al centro de la esfera).

En esta segunda parte de la entrevista se buscaba: (a) conocer las prácticas que los estudiantes manifestaban ante la solución de problemas (del mismo tipo que se discutieron durante la instrucción), (b) indagar en lo que estos estudiantes expresaron cuando resolvieron los primeros dos problemas incluidos en el instrumento diseñado para este trabajo de investigación, (c) verificar si efectivamente el paso de mayor complejidad del procedimiento utilizado en la instrucción para el planteamiento de una Integral Definida es dividir al todo apropiadamente, (d) aplicar un problema nuevo a los estudiantes para corroborar la comprensión demostrada, y (e) obtener evidencia que facilitara la validación los resultados con base en una triangulación de lo encontrado en el análisis ontosemiótico y los significados personales declarados.

Con la intención de obtener datos que permitieran aclarar lo observado en lo tocante a los significados personales logrados que los estudiantes construyeron, la selección de participantes se llevó a cabo bajo la técnica de máxima variabilidad. Con base en lo evidenciado en la resolución del problema del cálculo del área superficial del sólido de revolución se invitó a participar a dos estudiantes que evidenciaron comprensión del concepto de Integral Definida, a otros dos que lograron dividir al todo pero no lograron establecer la Integral Definida solicitada en dicho problema y otros dos que no evidenciaron haber adquirido los significados institucionales. Aquí se reportan tres entrevistas, una para cada uno de los casos antes mencionados.

Entrevista a participantes

Todas las entrevistas se llevaron a cabo en una sala que contaba con una mesa para juntas y algunas sillas. Cada entrevista duró entre 45 minutos y una hora, tiempo durante el cual se mantuvo cerrada dicha sala. De inicio se explicó al participante en qué consistía el trabajo de investigación, se le solicitó permiso para videograbar la entrevista y se le informó que lo dicho durante la entrevista no le afectaría académicamente y que en los reportes que se obtuvieran con los datos recabados, su nombre sería reemplazado por un alias (asignado por el investigador) con la intención de resguardar su privacidad.

Las entrevistas se videograbaron en su totalidad y después se hizo la transcripción de lo que ahí se dijo. Las prácticas manifestadas por los entrevistados en la resolución de cada problema se registró en papel, el cual fue digitalizado con un escáner y fue utilizado para detallar los significados personales logrados al igual que para revisar los resultados encontrados en el análisis ontosemiótico ya descrito. El análisis a los datos obtenidos a partir de las entrevistas consistió en la identificación de las prácticas utilizadas con la intención de reconocer los productos de la instrucción en el aprendizaje y comprensión del concepto de Integral Definida por parte de los participantes y la búsqueda de conflictos semióticos en dichas prácticas.

Análisis de la transcripción de las entrevistas a estudiantes

Enseguida se muestra una síntesis del análisis llevado a cabo para refinar la caracterización del significado personal logrado que construyeron tres estudiantes tras la instrucción. El primero (Daniel) evidenció haber alcanzado comprensión del concepto matemático de interés en este trabajo en la prueba; la segunda (Claudia), a pesar de manifestar las prácticas institucionales, no logró establecer la Integral para calcular el área superficial del sólido de revolución que se le solicitó en la prueba y el tercero (Ernesto), en su discurso oral sí evidencia algunas de las prácticas institucionales, pero no siempre logra expresarlas ni completa ni correctamente cuando las externa en el papel. Las partes de las transcripciones que se incluyen en el apéndice E se seleccionaron porque ahí ocurren los sucesos de interés en este trabajo y porque reflejan lo que se menciona en la síntesis cada entrevista que se reporta a continuación.

Síntesis del análisis de la entrevista a Daniel

Al solicitarle que explique cómo se resuelve el primer problema (cálculo del área superficial de un sólido de revolución), primero intenta entender qué se solicita en el mismo. Después al dividir al sólido, se da cuenta de que las partes son conos truncados y utiliza la fórmula para calcular el área lateral de este cuerpo geométrico. Con ella establece el valor del área de la parte genérica del sólido de revolución. En este desarrollo, argumenta utilizando el principio leibniziano y logra hacer la correspondencia entre los elementos de la parte genérica que representa a las partes en las que dividió al todo y los del cono truncado. Cuando requiere simplificar la expresión correspondiente al diferencial de área superficial, aplica correctamente el postulado establecido durante la instrucción para simplificar expresiones polinomiales en dx. Finalmente, establece la Integral Definida solicitada.

Cabe mencionar que en su discurso utiliza prácticas institucionales, aunque no lleva a cabo todos los pasos que se consideran en la rúbrica analítica utilizada durante la instrucción como una guía para el establecimiento de la Integral Definida. En la figura 35 se muestran las expresiones externadas por Daniel para establecer la Integral Definida que permite cuantificar de manera exacta el área superficial de dicho sólido de revolución.

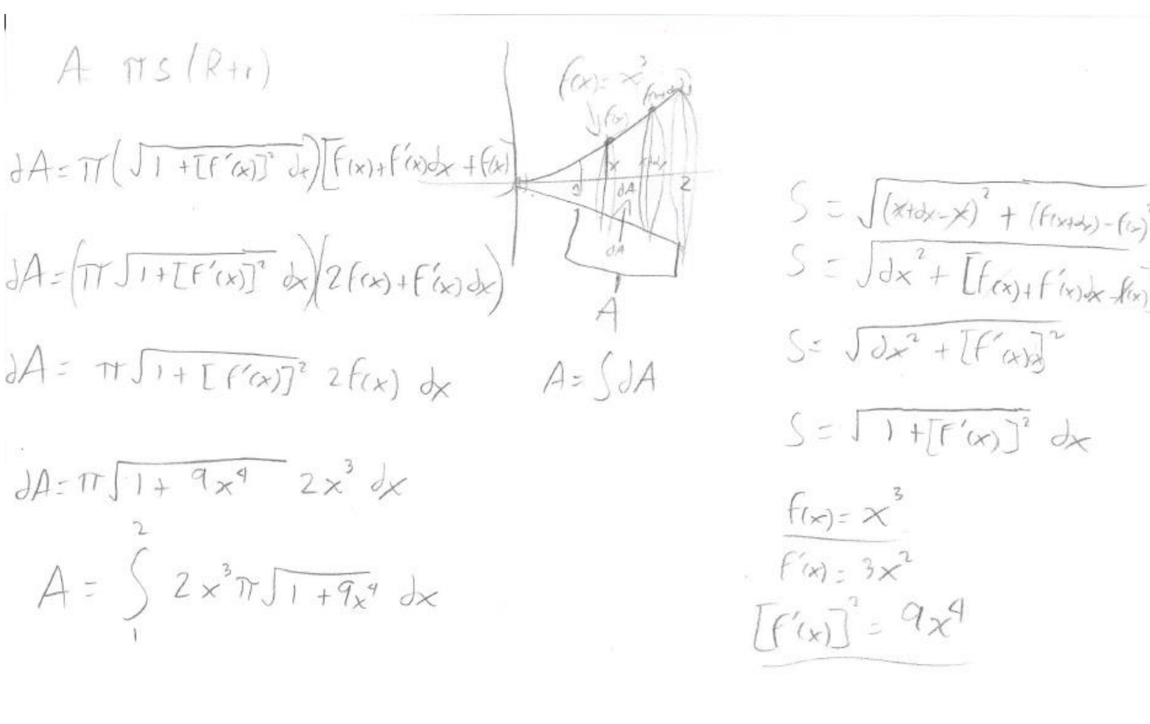


Figura 35. Expresiones externadas por Daniel para resolver el primer problema.

Al finalizar este problema el investigador le solicita a Daniel que resuelva el segundo problema. Éste empieza leyéndolo. Representa el todo con una figura en la hoja en la que se dispone a resolver el problema. Al reconocer que el problema pertenece a la clase de problemas que se aborda con el establecimiento de una Integral Definida, intenta dividir la placa de manera que se pueda calcular en cada parte la masa. En este caso, utiliza una partición incorrecta, similar a la que se utilizó para resolver las primeras tres situaciones problema discutidas durante la instrucción. A causa de esto, obtiene una Integral Definida que no corresponde con la solicitada. En la figura 36 se muestran las prácticas manifestadas por Daniel al abordar este problema. En ella se puede ver que Daniel tomó como elemento diferencial a un rectángulo de base dx y altura 10 (la longitud del lado del cuadrado). La forma correcta de dividir al todo se debió realizar con base en dos cuadrados concéntricos, ambos con lados paralelos a las orillas de la lámina descrita en el texto del problema.

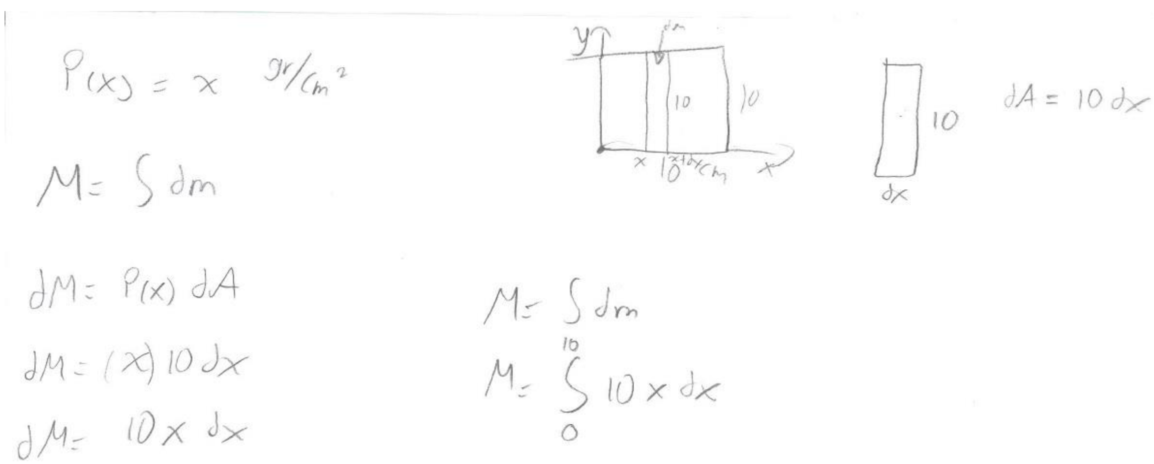


Figura 36. Prácticas manifestadas por Daniel al abordar el segundo problema durante la entrevista.

Para resolver el tercer problema (cálculo de la masa de una esfera cuya densidad varía con la distancia al centro), inicia leyendo el problema. Se hace bastante evidente que tiene dificultades para reconocer la forma conveniente para dividir al todo para cuantificar la masa del diferencial de volumen. Una vez que logra darse cuenta cómo dividir al todo apropiadamente, calcula la masa de un elemento diferencial y después establece la Integral Definida solicitada.

Resalta el hecho de que para resolver este último problema durante la entrevista, Daniel no dibujó la esfera, sino que trabajó con ella de manera no ostensiva. En la figura 37 se muestran las expresiones que él utilizó para resolver este problema.

$$\cancel{\rho(r)}$$

$$\rho(r) = \frac{1}{1+r^3}$$

$$M = \int dM$$

$$dM = \rho(r)\, dV$$

$$dM = \left(\frac{1}{1+r^3}\right)\left(4\pi r^2 dr\right)$$

$$dM = \frac{4\pi r^2}{1+r^3}\, dr$$

$$M = \int_0^5 \frac{4\pi r^2}{1+r^3}\, dr$$

$$dV = \left[\frac{4}{3}\pi (r+dr)^3\right) - \left[\frac{4}{3}\pi (r)^3\right]$$

$$dV = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left[(r+dr)^3 - r^3\right]$$

$$dV = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left[\cancel{r^3} + 3r^2 dr + \cancel{3r\,dr^2} + \cancel{dr^3} - \cancel{r^3}\right]$$

$$dV = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(3r^2 dr\right)$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Figura 37. Expresiones externadas por Daniel para resolver el problema del cálculo de la masa de una esfera de densidad variable.

Síntesis de la entrevista a Claudia

Claudia, al intentar resolver el primer problema, basa su procedimiento en lo que el profesor explicó una sesión después de la aplicación de la primera prueba. Acertadamente divide al todo en conos truncados y utiliza la fórmula para calcular el área superficial de un elemento diferencial de área. Incluso, logra hacer la correspondencia entre los elementos del cono truncado y los del elemento diferencial de área para expresarlo en términos de x, dx, $f(x)$ y $f(x+dx)$. No obstante, muestra ciertas deficiencias en sus habilidades algebraicas al no identificar cómo evaluar una función y después no desarrolla un binomio al cubo, lo cual ocasiona que obtenga un integrando en el que se incluye en dos ocasiones la expresión 'dx'. En la figura 38 se muestran las expresiones que utilizó Claudia al intentar resolver este problema durante la entrevista.

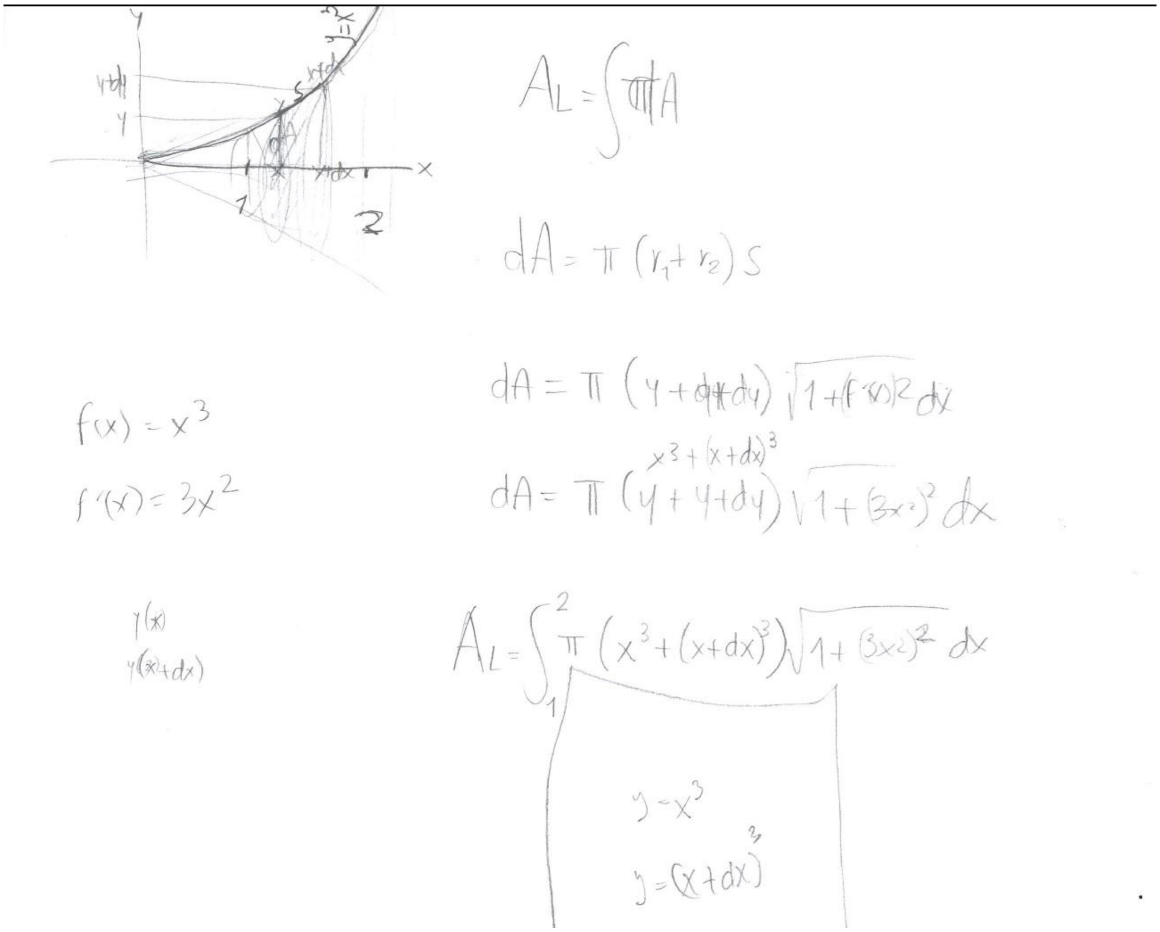


Figura 38. Expresiones externadas por Claudia al intentar resolver el primer problema durante la Entrevista.

Respecto del segundo problema (cálculo de la masa de una placa cuadrada), Claudia logra identificar correctamente al todo e incluso dividirlo convenientemente, de manera que en cada una de sus partes se pueda calcular la masa. Ella se confunde porque asigna varios contenidos a la literal x: (a) representa el eje horizontal que propone para medir distancias desde el centro de la placa; (b) representa la distancia del eje y a un punto cualquiera sobre la placa, y (c) representa la distancia desde la orilla de la placa a cualquier punto sobre ésta. La forma en que se redactó el problema sugiere una función semiótica cuya expresión es la literal x y su contenido es la distancia de la orilla de la placa a cualquier punto sobre ésta. El conflicto semiótico se ocasiona porque Claudia asigna a la literal x otros dos contenidos, y esto ocasiona que no pueda expresar la distancia de cualquier punto sobre la placa a la orilla en términos de la distancia al eje vertical. En la figura 39 se muestra lo externado por Claudia al intentar resolver este problema.

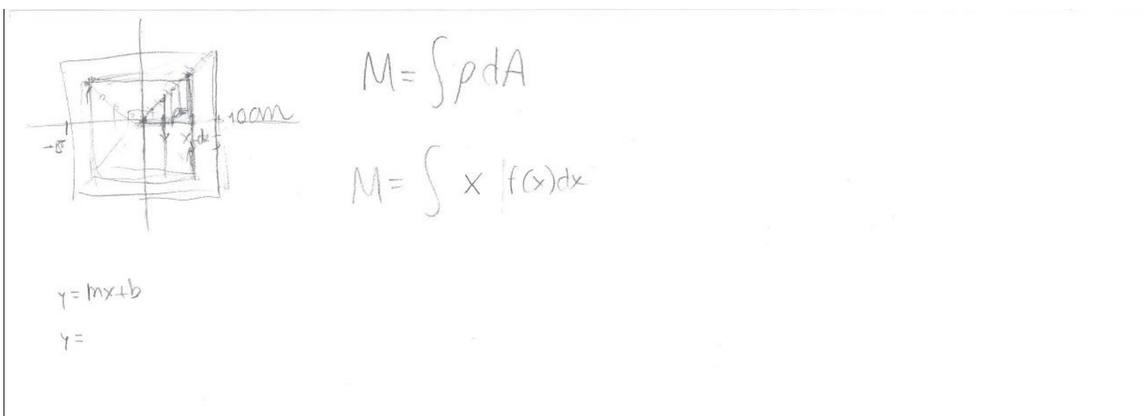


Figura 39. Expresiones externadas por Claudia al intentar resolver el segundo problema durante la entrevista.

Cuando Claudia intenta resolver el tercer problema, reconoce inmediatamente por qué es un problema y rápidamente deduce cómo se distribuyen los puntos con igual densidad. Ella misma ocasiona un conflicto semiótico en sus prácticas manifestadas, que consiste en asignar a la literal r dos contenidos distintos: (1) la distancia del centro de la esfera a cualquiera de sus puntos, y (2) el grosor del diferencial de volumen de la esfera. Esto ocasiona que no logre establecer correctamente la Integral Definida requerida. Las expresiones utilizadas por Daniela al resolver el tercer problema durante la entrevista se muestran en la figura 40, la cual se incluye enseguida.

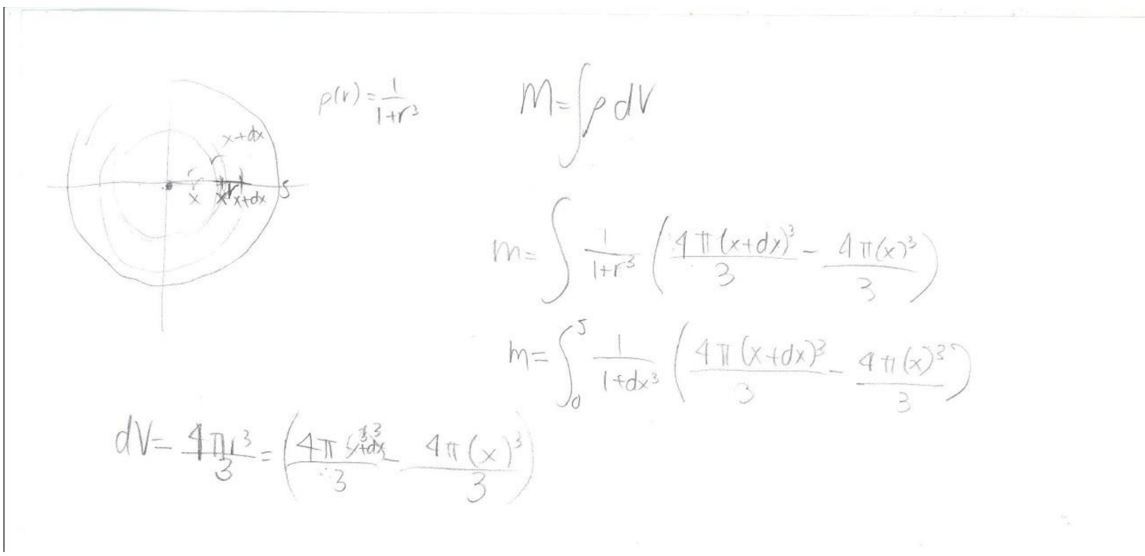


Figura 40. Expresiones externadas por Claudia al intentar resolver el tercer problema durante la Entrevista.

Síntesis de la entrevista a Ernesto

Ernesto logra resolver el primer problema exitosamente. Primero señala que requiere la fórmula para calcular el área lateral del cono truncado para cuantificar el área lateral de la parte genérica en la que dividió (convenientemente) al sólido de revolución. No muestra dificultad para identificar cómo se divide al todo. Aplica correctamente el postulado relativo a las expresiones polinomiales en dx, y finalmente establece la Integral Definida que se le solicitó. Luego calcula la antiderivada del integrando, pero no la evalúa en los límites de integración para obtener de manera numérica el valor del área. La figura 41 muestra lo expresado por Ernesto cuando intenta resolver este problema.

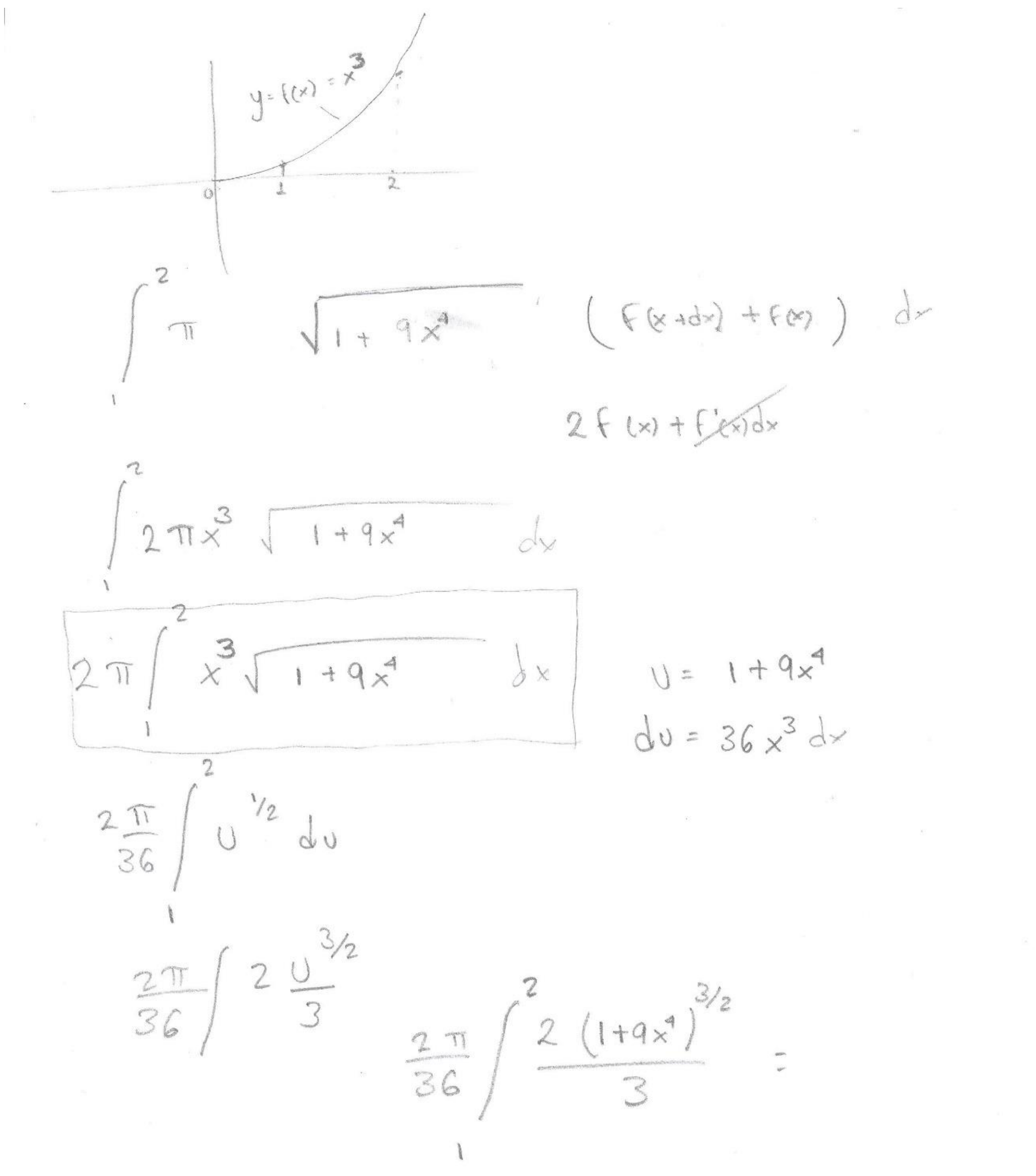


Figura 41. Expresiones externadas por Ernesto al intentar el primer problema durante la entrevista.

Al abordar el segundo problema, Ernesto primero identifica correctamente cómo se distribuyen los puntos que tienen la misma densidad en la placa. Inmediatamente después, utiliza el resultado para calcular el diferencial de área ($dA = f(x) \cdot dx$) obtenido en la discusión de la segunda situación problema durante la instrucción, pero ésta no aplica a la situación problemática que está resolviendo en ese momento. Esto ocasiona que obtenga una Integral Definida que no corresponde a dicho problema ($M = \int_0^5 \rho(x) f(x) \cdot dx$). En la figura 42 se muestra lo externado por Ernesto durante esta parte de la entrevista.

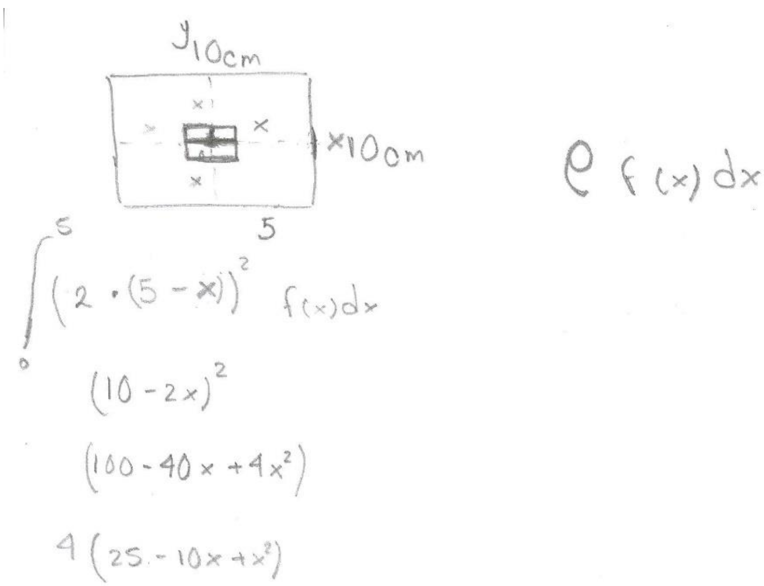


Figura 42. Expresiones externadas por Ernesto al intentar resolver el segundo problema durante la entrevista.

Cuando aborda el tercer problema Ernesto se da cuenta de inicio que la densidad varía de manera que disminuye conforme se aleja del centro de la esfera. Al no tener una fórmula general para calcular el elemento diferencial de volumen para el caso de una esfera, no logra expresar el valor de la masa para el diferencial de masa de la esfera considerada en el problema. Más tarde requiere conocer la función que le permite delimitar la esfera, bajo la idea de generarla como un sólido de revolución. Abandona el problema al ver que no logra calcular el mencionado diferencial de volumen.

Como apoyo para la verificación y contrastación de los resultados mencionados y que a continuación se discuten, se utilizó un archivo (hoja de cálculo) en el que se capturaron los resultados de las tareas que los estudiantes inscritos al curso debían realizar durante el mismo. Cabe mencionar que no se analizaron las tareas escritas entregadas por los estudiantes, pues el archivo mencionado indicaba específicamente qué pasos de la rúbrica había elaborado cada estudiante en cada ejercicio en cada tarea entregada por éste. Tras una contrastación expedita de los resultados reportados en dicho archivo y las pruebas, se encuentra que en general, aquellos estudiantes que siguen la rúbrica en la elaboración de las tareas son los que lograron resolver los primeros cuatro reactivos de la primera prueba aplicada por el profesor del curso (esos primeros cuatro reactivos presentaban la misma estructura que los ejercicios incluidos en las primeras tres tareas extraclase que los estudiantes debían realizar).

Discusión de los resultados

De acuerdo al análisis ontosemiótico, el paso de mayor complejidad ontosemiótica de los incluidos en la rúbrica para la evaluación de las tareas es el paso 1 (identificar la cualidad del todo que se desea cuantificar). Tras el análisis de las respuestas de los estudiantes al primer problema del instrumento aplicado se concluyó que esto no explica en su totalidad la comprensión alcanzada por los estudiantes. La evidencia muestra que la naturaleza del problema incide en la complejidad ontosemiótica de cada uno de los pasos utilizados para el establecimiento de la Integral Definida. En particular, para el problema de la cuantificación del área de la superficie del sólido de revolución, el paso de mayor complejidad es identificar el todo y la cualidad que se le calculará. Por otra parte, en las primeras tres situaciones problemáticas abordadas en la instrucción, se puede afirmar que el paso de mayor complejidad consistió en reconocer la forma en que se debe dividir al todo, de manera que para cada una de sus partes se pudiera calcular la cualidad que se desea cuantificar. La obra de Salinas et al (2012) y los materiales en los que se propusieron dichas situaciones problema durante la instrucción, indicaron a los estudiantes cómo se debía hacer dicha división, pero sin explicarlo.

Por una parte, en estos cuatro problemas (cálculo de la longitud de arco, cálculo de área de una región del plano, cálculo del volumen de un sólido de revolución y cálculo del área de una superficie de un sólido de revolución) se utiliza exactamente la misma forma de dividir al todo: se divide primero el intervalo (a, b) sobre el eje x, para cada parte se obtiene una parte correspondiente del todo, después se calcula la cualidad que se desea calcular del todo para una parte genérica a partir de la cual se cuantifica el valor de la cualidad para el todo a través de una suma. Por tanto, se puede afirmar que los primeros tres problemas sirven como andamiaje para el cuarto. No obstante, esto es contraproducente cuando se abordan problemas en los que la división del todo no se realiza de la misma manera.

En efecto, la respuesta al tercer problema incluido en el instrumento (calcular la masa de una lámina cuya densidad en cada punto depende de la distancia del punto a la orilla de la placa) requiere dividir al todo de una manera distinta a los mencionados problemas. Las prácticas manifestadas por los estudiantes al intentar resolver este problema evidenciaron que algunos (17 de 35) tienden a utilizar la forma de dividir al todo de la misma manera que en las primeras tres situaciones problemáticas abordadas en la instrucción. De los 35 participantes, solamente cuatro lograron dividir apropiadamente el todo, de acuerdo a como se requería para la correcta resolución del problema. El resto de los estudiantes, o no mostró cómo dividió al todo o lo dividió de manera incorrecta.

Cabe mencionar que en la obra de Salinas et al (2012) se explica este procedimiento en el segundo tema de la segunda unidad. Ahí se afirma que “el hacernos conscientes de la manera en que se construye el diferencial abre la posibilidad de utilizar este recurso en circunstancias nuevas donde se requiera conocer cuantitativamente las relaciones entre magnitudes en el estudio de determinado fenómeno” (Salinas et al, 2012, p. 137). Más adelante, en la página 149 se muestran tres distintas formas de dividir al círculo para cuantificar su área: con tiras verticales, con anillos concéntricos y con sectores circulares. Se espera que la implementación temprana de prácticas institucionales recién referidas durante la instrucción permita a más estudiantes alcanzar la comprensión de la Integral Definida.

En el análisis de los significados personales logrados se mencionó que 13 estudiantes lograron expresar dS (el valor del área superficial del elemento diferencial de área superficial del sólido de revolución) en términos de sus elementos (x, dx, $f(x)$, $f(x + dx)$, $f'(x)$), pero solamente cinco lograron simplificar esa expresión algebraica inicial a la forma $dS = r(x) \cdot dx$ (los mismos que establecieron correctamente la Integral Definida requerida en el primer problema del instrumento utilizado en este estudio). Esto indica que las deficiencias algebraicas de los estudiantes funcionan como un cuello de botella que les impide obtener la Integral Definida solicitada. Cabe mencionar que en los conocimientos previos al curso de Cálculo se incluye el álgebra elemental.

También se encontró de manera reiterada evidencia de dificultades en algunos estudiantes para comprender las cantidades infinitamente pequeñas. Por mencionar un caso específico, Claudia, en las prácticas exteriorizadas en la resolución del primer problema, expresa una cantidad infinitamente pequeña (el área lateral de un cono truncado de altura infinitesimal) por A_L, cuando debió utilizar dA_L, y por otra parte, igualó una cantidad infinitesimal con un número real cuando escribió: $dA_L = \int_1^2 \pi s f(x)^2 + \cdots$ Esto invita a poner mayor interés durante la instrucción en el uso de las cantidades infinitamente pequeñas: en cuanto al lenguaje, un mayor énfasis en la notación, y respecto de sus propiedades, justificarlas con base en argumentos que emerjan de casos numéricos concretos.

El hecho de que uno de cada cinco estudiantes calcule la longitud de arco como estrategia para calcular el área de la superficie de un sólido de revolución es un resultado inesperado. El profesor durante la instrucción reiteradamente insistió en justificar por qué un problema era un problema y no un ejercicio, y con base en ello explicaba por qué el problema pertenecía a la misma clase de problemas antes tratados, y así sugería el uso de significado institucional para establecer una Integral Definida para resolver el problema.

En lo tocante a las entrevistas que se hicieron a algunos de los participantes en el estudio, se puede mencionar lo siguiente. Dado que Daniel logró resolver el problema del cual se ha afirmado, es muy difícil resuelvan estudiantes que son sometidos a una exposición tradicional del concepto de Integral Definida (Alanís, 2008), podríamos asumir que el entrevistado ya había alcanzado la comprensión de dicho concepto matemático. Sin embargo, en la resolución del segundo problema aplicado en la entrevista (cálculo de la masa de una lámina cuadrada, en el cual se requiere dividir al todo de manera distinta a como se hace en las primeras tres situaciones problema), no logra dividir al todo convenientemente y como consecuencia, la Integral Definida que obtiene no es la que correctamente resuelve dicho problema. Por otra parte, se volvió a hacer evidente la dificultad de este paso (dividir al todo convenientemente) cuando abordó el tercer problema durante la entrevista. En ese caso la división del todo debía hacerse con base en esferas concéntricas, lo cual descubrió (acertadamente) tras pensarlo durante un momento. Esto afianza lo revelado en el análisis ontosemiótico respecto de la dificultad del proceso de dividir al todo apropiadamente como parte del significado actuativo utilizado para el establecimiento de la Integral Definida bajo el acercamiento planteado en Salinas et al (2012).

Cabe mencionar que al tomar en cuenta la naturaleza de cada problema abordado, se puede ver que los estudiantes presentan particular dificultad al abordar problemas en los cuales el todo se representa en tres dimensiones. Ciertamente, los problemas en los que se solicitó calcular (a) el área superficial de un sólido de revolución, (b) la masa de un paraboloide de revolución y (c) la masa de la esfera, son los que resultaron más difíciles para los estudiantes. Esto, a pesar de que en los primeros dos problemas mencionados la forma en que se divide al todo coincide con la utilizada para resolver las primeras tres situaciones problema abordadas durante la instrucción.

Las prácticas manifestadas por estudiantes al intentar calcular el área superficial de un sólido de revolución (primer problema del instrumento aplicado en la primera evaluación) sugieren la misma conclusión: a pesar de que el profesor explicó qué era lo que se solicitaba calcular en el problema, algunos estudiantes calcularon la longitud de arco de la curva o el área bajo la curva o el volumen del sólido (siendo éste el último problema resuelto durante la instrucción días antes de la prueba). Incluso, aún y cuando algunos lograron dividir apropiadamente al todo e identificar que debían utilizar la fórmula para calcular el área lateral de un cono truncado (para cuantificar el área superficial del diferencial de área), las figuras que elaboraban los estudiantes para indicar un elemento diferencial como parte del todo, con frecuencia eran trapecios en lugar de conos truncados.

Por otra parte, resalta el hecho de que durante la entrevista, Claudia logró dividir el todo adecuadamente en cada uno de los tres problemas que se le propusieron, pero esto no le fue suficiente para establecer la Integral Definida solicitada en los últimos dos problemas. En el primer problema, estableció una Integral Definida cuyo integrando requiere ser simplificado para poder ser calculada. Según se observó, la causa yace en habilidades algebraicas deficientes.

Al intentar resolver el segundo problema, Ernesto evidencia una tendencia de los cursos tradicionales de Cálculo a aplicar las fórmulas sin analizar a profundidad los problemas. Al observar que se requería calcular el área de la lámina, infirió que el diferencial de área tenía una forma rectangular y su área se calcula con $f(x) \cdot dx$, cuando en realidad se trataba de una región delimitada por dos cuadrados concéntricos y lados paralelos a los ejes coordenados que ya había definido en la figura que él mismo había trazado. Esta actuación es fuente de conflictos semióticos como se evidenció en la entrevista a Ernesto. Esto ocurrió a pesar de que durante la instrucción el profesor varias veces hizo énfasis en dichas prácticas y advirtió a los estudiantes de las consecuencias con problemas discutidos en clase.

Con base en los resultados observados en las tareas extraclase, se puede afirmar que los estudiantes adoptan bastante bien la mayoría de las prácticas para resolver éstas. En lo tocante a las pruebas aplicadas, se encontró que la mayoría de los estudiantes logra calcular de manera aproximada diversas cualidades de un todo. Sin embargo, para el caso de los problemas que involucraban el establecimiento y/o cálculo de una Integral Definida, las dificultades encontradas en el procedimiento utilizado en la instrucción (mencionadas en los resultados de los análisis de los significados personales y en las transcripciones de las entrevistas) ocasionaron que una pequeña cantidad de estudiantes establecieran Integrales Definidas para la resolución de los problemas abordados.

En otros casos, se observó que los estudiantes no conocían la relación entre las variables asociadas en el cálculo de la cualidad que se deseaba cuantificar del todo, por lo que no lograban determinar el valor de la cualidad para una parte genérica. A su vez, esto ocasionó que no establecieran la Integral Definida requerida o en algunos casos, la establecieran incorrectamente.

En la rúbrica analítica utilizada durante la instrucción se sintetiza eficientemente el significado institucional actuativo correspondiente al establecimiento de la Integral Definida. Sin embargo, se identificaron algunos conflictos semióticos que podrían evadirse si ésta se modifica convenientemente. Particularmente, el paso cuatro, en el que se solicita que se indique cómo se obtuvieron las partes (infinitamente pequeñas) en las que se dividió al todo.

En la versión genérica de la rúbrica analítica utilizada durante la instrucción, el séptimo paso a valorar, indica: "Calculó el valor exacto de dM y lo expresó en la forma $r(x) \cdot dx$". Se sugiere que este paso se divida en dos: 7A) Calculó el valor exacto de dM y 7B) expresó dM en la forma $r(x) \cdot dx$. De esta manera, se podrá distinguir entre aquellos estudiantes que, además de indicar cómo se divide el todo adecuadamente calculan el valor de dM en términos de sus elementos (x, dx, $f(x)$, $f(x + dx)$) y aquellos que también logran expresar dM en su forma $dM = r(x) \cdot dx$, después de simplificarla algebraicamente. Así, se esperaría que la mayoría de los estudiantes que logren realizar el paso 7B sean los que establecen la Integral Definida requerida en el problema.

Finalmente, la forma en que se redactó el tercer problema del instrumento pudo haber ocasionado conflictos semióticos en aquellos estudiantes cuyas habilidades de modelación matemática no estuvieran suficientemente desarrolladas. El hecho de asignar a la literal x (expresión) la distancia de la orilla de la placa a cualquier punto sobre ésta (contenido), ocasionó que varios estudiantes no lograran expresar el valor del área de un diferencial de área, a pesar de haber logrado dividir al todo (la placa) convenientemente de acuerdo a la situación.

Capítulo 5. Conclusiones

Enseguida se mencionan las conclusiones a las que se llegaron al final de este trabajo de investigación.

El significado institucional de referencia considerado para el desarrollo de este trabajo incluye solamente tres situaciones problema. La discusión de dichas situaciones problema permiten la emergencia de un esquema de proceder ante una clase de problemas, pero allí no se hace énfasis alguno en uno de los pasos de mayor complejidad de dicho esquema de proceder: el procedimiento para determinar cómo se debe realizar la partición del todo adecuadamente. En el significado institucional implementado el profesor sí hizo hincapié en ese paso, mencionando ejemplos en los que la partición del todo se hace de manera distinta a las situaciones problema abordadas. Sin embargo, durante las sesiones de instrucción observadas no se discutieron situaciones problema en las que se llegara a establecer una Integral Definida utilizando distintas formas de particionar al todo. La denominada "estrategia de la toma del elemento diferencial" (Salinas et al, 2012, Vol. 2, p. 135) fue cubierta hasta después de la primera evaluación.

Con base en las respuestas de los estudiantes a los problemas del instrumento aplicado, se recomienda considerar más temprano durante la instrucción y a lo largo del curso, discusión de situaciones problema en las que la forma en que se divide al todo para la cuantificación de una de sus cualidades varíe. Se espera que la consideración (durante la instrucción) de más casos y en distintos contextos en los que la estrategia de la toma del elemento diferencial sea distinta, más estudiantes logren realizar este paso exitosamente.

Un constructo que se considera central para la comprensión del concepto de Integral Definida es el de cantidad infinitamente pequeña. Un potencial conflicto semiótico encontrado durante el análisis ontosemiótico desarrollado y que se puso en evidencia tras los análisis de los significados personales que alcanzan los estudiantes y durante las entrevistas, es el que se ocasiona por un vacío de significado en lo que respecta a las cantidades infinitamente pequeñas cuando se trabaja con ellas a lo largo de la primera unidad de la obra aquí analizada. Esto ocurrió a pesar de que durante la instrucción se postularon dos propiedades para operar con ellas. Por ello se recomienda reubicar en la primera unidad de la obra de Salinas et al (2012) las propiedades de las cantidades infinitesimales (actualmente se encuentran enunciadas en la segunda sección de la segunda unidad de dicha obra). Asimismo, se debe explicar durante la instrucción la diferencia entre una cantidad real y una cantidad infinitamente pequeña.

Durante la instrucción también se hizo uso de una rúbrica analítica la cual también sirvió como guía para el establecimiento de la Integral Definida. Por lo encontrado en las respuestas de los estudiantes a los problemas del instrumento que se les aplicó, se sugiere que el paso 7 de la rúbrica –de complejidad considerable, de acuerdo con lo observado–, sea dividido en dos partes: (7A) Calculó el valor exacto de dM, y (7B) Expresó dM en la forma $r(x) \cdot dx$. De esta manera, al calificar las tareas extraclase se identificará a aquellos estudiantes que logran particionar al todo convenientemente, pero a causa de su falta de habilidad en el álgebra, no logran establecer la Integral Definida. También esto facilitará poner atención a dos puntos importantes para el establecimiento de la Integral durante la instrucción cuando ésta se base en dicha rúbrica.

Uno de los conflictos semióticos encontrados en el análisis ontosemiótico ocurre cuando se introduce la notación de la Integral en cada una de las situaciones problema discutidas en la unidad uno del segundo tomo de Salinas et al (2012). En primer lugar se utiliza la notación correspondiente a la Integral Indefinida ($\int dm$, también denominada Antiderivada) cuando por primera vez se concibe como la suma de una cantidad infinita de infinitesimales. Más adelante, justificado por la delimitación del todo del cual se desea calcular una cualidad, se da la notación correspondiente a la Integral Definida ($\int_a^b dm$).

Lo anterior puede ocasionar que los lectores confundan a la Integral Indefinida y a la Integral Definida como un mismo concepto. Este conflicto semiótico ha sido reportado por varios investigadores (González-Martín y Camacho, 2011; Steiner y Dana-Picard, 2004) y al parecer se debe a que ambos conceptos matemáticos utilizan algoritmos y procedimientos muy semejantes. Se sugiere que se omita la parte en la que se introduce la notación propia de la Integral Indefinida y se introduzca únicamente más adelante, cuando se expresa por primera vez la Integral Definida. Cabe mencionar que durante la instrucción el profesor sí hizo énfasis en la diferencia entre estos dos conceptos atendiendo el origen de dicho conflicto semiótico. Durante las entrevistas, los participantes utilizaron los términos “Integral” e “Integral Definida” como sinónimos y cuando se refirieron a la Integral Indefinida o Antiderivada mencionaban explícitamente “Antiderivada”.

Respecto de la implementación observada, se encontraron las siguientes cuestiones. Los datos obtenidos en la entrevista a tres estudiantes evidenciaron dificultades para el tratamiento de objetos en tres dimensiones al igual que deficiencias en sus habilidades algebraicas. Por ello se considera pertinente el diseño de estrategias para mejorar las habilidades de los estudiantes en la representación y visualización de objetos geométricos en tres dimensiones. Asimismo, sugerir a los estudiantes que de manera independiente (extraclase) refuercen estas habilidades (tanto de manipulación algebraica como la visualización y representación de objetos sólidos). Se espera que esto redunde en mejores resultados (en términos de aprendizaje y comprensión de los contenidos) tanto en los cursos de Matemáticas como en otros cursos de ingeniería.

Alineado con los puntos anteriores, se considera lo siguiente: durante la instrucción el profesor hizo uso de la plataforma (en línea), principalmente para dar acceso a los estudiantes a los materiales utilizados en el curso y a las tareas extraclase. Por los resultados encontrados en este trabajo de investigación, se encuentra conveniente la elaboración de materiales didácticos ex profeso para el curso (simulaciones interactivas, videos explicativos, cuestionarios en línea, listas de ejercicios, etc.) que englobe aquellas áreas que potencialmente podrían aumentar la cantidad de estudiantes que alcancen la comprensión (áreas como el desarrollo de habilidades algebraicas, la manipulación de objetos en tres dimensiones, la explicación de los fenómenos físicos involucrados en las situaciones problema abordadas, la modelación matemática requerida para el tratamientos de dichos fenómenos físicos, etc.)

Con base en estas conclusiones, para el diseño de la instrucción del concepto de Integral Definida bajo el planteamiento encontrado en Salinas et al (2012), se recomienda tener en cuenta que la comprensión de dicho concepto matemático depende de las siguientes cuestiones:

a) El planteamiento de dicho concepto matemático tiene como base el uso de conceptos como el infinito y las cantidades infinitamente pequeñas, los cuales según se ha reportado en la literatura, son muy abstractos. Sin embargo, la resolución aproximada de las situaciones problema discutidas durante la instrucción observada y la reflexión acerca de cómo se puede mejorar dicha aproximación, proveen de una transición sutil que permite a algunos estudiantes comprender la Integral Definida.

b) El procedimiento para determinar la forma de particionar el todo apropiadamente (que el todo quede considerado en su totalidad y que en cada una de sus partes se pueda calcular lo que se desea calcular del todo) es un paso importante y difícil en el establecimiento de la Integral. Esto podría allanarse dando mayor atención al proceso denominado “la toma del elemento diferencial” y discutiendo problemas que impliquen distintas formas de dividir al todo.

c) El contexto del problema podría ocasionar que los estudiantes no logren calcular la cualidad que se desea cuantificar del todo, debido a que no conozcan la relación entre las cantidades involucradas. Para ello resulta conveniente seleccionar con cuidado los problemas que se incluirán en la instrucción y en las pruebas aplicadas a los estudiantes. En caso necesario, se deben explicar la relación entre cantidades involucradas para el cálculo de la cualidad de una parte genérica infinitamente pequeña, que permita el establecimiento de la Integral Definida.

d) El uso de cuerpos en tres dimensiones durante la discusión del problema resulta difícil para algunos estudiantes. Esto interviene en el entendimiento de la problemática en sí que se debe resolver (durante la identificación del todo y de la cualidad que se calculará de él).

Líneas de investigación futura

Los conceptos matemáticos están relacionados unos con otros. Esto ocasiona con frecuencia que la falta de comprensión de un concepto afecte el aprendizaje y comprensión de otros conceptos. Por ello, parece razonable hacer una evaluación diagnóstica que permita asegurar que los estudiantes tienen un nivel de comprensión aceptable de los conceptos matemáticos sobre los que descansa el concepto de Integral Definida de funciones de una variable. Particularmente, se encontró que las deficiencias en sus habilidades algebraicas de ciertos estudiantes ocasionan que no logren el establecimiento de la Integral Definida solicitada. Un estudio que observe estos prerrequisitos del curso de Matemáticas 2 servirá para ahondar más en lo que se reporta en este trabajo. Por ejemplo, puede atenderse la intervención de la modelación de fenómenos físicos para la comprensión del concepto de Integral Definida.

La rúbrica analítica de evaluación permitió a algunos estudiantes identificar el procedimiento utilizado para el establecimiento de una Integral Definida. Tras una búsqueda de reportes de investigación que involucren el uso de una rúbrica analítica para el curso de Cálculo, no se encontraron trabajos de esta índole, particularmente para guiar las acciones que llevan a cabo los estudiantes para la resolución de problemas. Esta línea de investigación debe ser considerada para otros de los conceptos fundamentales del Cálculo. También se observó que la forma en que se evalúan los aprendizajes sigue teniendo una fuerte tendencia tradicional en el curso observado. Posiblemente sea conveniente realizar un trabajo que explore el diseño de evaluaciones menos tradicionales (como el desarrollo de proyectos) que permitan al estudiante enfrentar problemas cuya solución óptima involucre el planteamiento de una Integral Definida que requieran de nuevas formas de particionar al todo (que como se mencionó, es una parte escabrosa del procedimiento utilizado para establecer la Integral Definida en el planteamiento estudiado). En este sentido, el uso de la ingeniería didáctica (como metodología de investigación) podría servir tal fin.

En el acercamiento al concepto de Integral Definida en Salinas et al (2012) se da por supuesto que la forma de hacer la partición del todo es transparente para calcular de manera aproximada la cualidad del todo. En efecto, las actividades que introducen el procedimiento que conduce al establecimiento de la Integral, piden en cada ocasión que se divida el todo correspondiente "tal y como se muestra en la siguiente figura". Con ello, no se da la oportunidad al lector de decidir cuál es la forma apropiada de realizar la división. Tampoco se indica por qué se eligió esa manera particular de realizar la división; simplemente se pide que se haga de esa manera. La importancia de este paso radica en que la forma de dividir el todo para la aproximación de la cualidad coincide con la forma de tomar el elemento diferencial para el establecimiento de la Integral Definida que permite cuantificar de manera exacta dicha cualidad. Más aún, el análisis ontosemiótico del libro reveló que, precisamente este paso, determinar la forma apropiada de realizar esa división del todo, presenta una complejidad sustancial en el procedimiento planteado (para establecer una Integral Definida) en la referida obra.

Al enfocar la atención en ese paso, se logró observar que consiste en todo un procedimiento, el cual puede descomponerse en los siguientes tres pasos: (1) identificar la forma en que varía la cualidad que se requiere calcular del todo; (2) determinar cómo se puede aplicar el supuesto leibniziano (para que en la división, la cualidad de interés se pueda calcular); (3) identificar cómo calcular la cualidad en una de esas partes. El paso (1) contesta a la pregunta: ¿cómo varía la cualidad que deseo calcular?, ¿de quién depende? Una vez determinado esto, en el paso (2) se requiere identificar cómo se puede dar un incremento (finito, Δx en la aproximación o infinitamente pequeño dx para obtener el valor exacto) para que la cualidad sea o se suponga constante. En el paso 3 se debe identificar un objeto geométrico cuya fórmula permita cuantificar la cualidad de interés.

Un potencial línea de investigación futura que se desprende de lo antes mencionado consiste en la indagación de un acercamiento a la Integral Definida articulando los acercamientos leibniziano (para permitir la emergencia del concepto a través del cálculo aproximado inicial de la cualidad que se desea cuantificar del todo) y newtoniano (para determinar la forma apropiada de dividir al todo para la toma del elemento diferencial). Se espera que una organización de actividades que permitan al estudiante hacerse de un esquema para identificar cómo se debe dividir al todo apropiadamente, incremente el número de estudiantes que alcancen la comprensión del concepto de Integral Definida.

En las situaciones problema analizadas (Salinas et al, 2012) se abordan primero con base en aproximaciones que se mejoran cada vez, luego se hace uso de las cantidades infinitesimales y con ello se obtiene el valor exacto de la cualidad que se desea calcular. Esto ocasiona la emergencia del concepto de Integral Definida como la suma de cantidades infinitamente pequeñas. Los conceptos de infinito y de cantidad infinitamente pequeña son abstractos y por ello resulta conveniente el desarrollo de un estudio que se enfoque en los fenómenos acaecidos durante el uso de dichos conceptos en el establecimiento de una Integral Definida.

Finalmente, la innovación estudiada en este trabajo de investigación fue observada mientras se implementó en el nivel superior. Algunos estudiantes mostraron cierta inercia que (se cree) fue ocasionada por los cursos preuniversitarios de Cálculo (mayoritariamente tradicionales, según indicaron estudiantes en las entrevistas llevadas a cabo). Esto invita a considerar un estudio de la implementación de esta innovación pero en el bachillerato. De esta manera, se conocerán resultados que no estarían afectados por un curso previo de Cálculo y posiblemente permita entender mejor los fenómenos acaecidos.

Relevancia del trabajo

En la literatura rara vez se encuentran estudios que muestren cómo la investigación en Matemática Educativa ha cambiado la instrucción (Törner et al, 2014). Este estudio enfoca la atención en una intervención didáctica en la que se implementa una innovación para la mejora de la enseñanza del Cálculo, la cual fue diseñada con base en resultados de investigación científica. Por ello, este trabajo abona un reporte de escaza frecuencia en la literatura. Por otra parte, pone en evidencia la utilidad y pertinencia del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, marco teórico desarrollado por Godino y colaboradores, en trabajos de investigación que busquen caracterizar y entender los procesos y fenómenos que acontecen durante la instrucción.

El concepto de Integral Definida es de suma importancia en diversas áreas del conocimiento, por ello un estudio que promueva la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje también será importante mientras no se mejoren sustancialmente los pobres resultados de los aprendizajes de los estudiantes respecto de dicho concepto matemático.

Referencias

Abramovitz, M. Berezina, A. Berman, L. Shvartsman. (2009). Some initiatives in Calculus teaching. En L. Paditz y A. Rogerson (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference Models in Developing Mathematics Education* (Dresde, Alemania) pp. 10-14.

Alanís, J. (1996). *La predicción: Un hilo conductor para el rediseño del discurso del Cálculo escolar*. (Tesis Doctoral). México, DF:CINVESTAV – IPN.

Alanís, J.A. (2008). Cálculo de una variable: Acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *Memorias del 11th International Congress on Mathematics Education*. Monterrey, México. Recuperado de: http://tsg.icme11.org/document/get/653.

Alanís, J.A. y Soto, A.E. (2012). La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual. *El Cálculo y su Enseñanza, 3*(1), 1-6.

Arcos, J. (2007). Un curso de Cálculo Infinitesimal para bachillerato. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 3-24). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at University level? En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 207-220). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2002). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52,*3-28.

Cabañas, M., y Cantoral, R. (2007). La conservación en el estudio del área. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 199-226). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.-Díaz de Santos.

Camacho, M.M, y Depool, R.R. (2003). Un estudio gráfico y numérico del Cálculo de la Integral Definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) DERIVE. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M.M, y Depool, R.R. (2003B). Using DERIVE to understand the concept of definite Integral. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning. 5*, 1-16. Recuperado de: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/matiascamacho.pdf

Camacho, M.M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral Definida en diversos contextos: Un estudio de casos. *Educación Matemática, 20*(3), 33-57.

Cantoral, R. (2005). Pensamiento matemático avanzado. En R. Cantoral, J. Alanís, F. Cordero, R. Farfán, A. Garza, R. Rodríguez (Eds.), *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México, D.F.:Editorial Trillas.

Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). A sociocultural Approach to Infinitesimal Calculus. En H. Fujita, Y. Hashimoto, B. Hodgson, B. Yee, S. Lerman, y T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical education* (pp. 108-110). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Carlson, M., Persson, J., y Smith, N. (2003). Developing connecting Calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 165-172). Honolulu, EE.UU.

Chappell, K.K., y Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students' conceptual understanding and procedural knowledge of Calculus. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 13*(1), 17-37.

Contreras, A., y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la Integral Definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 65-84.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamerica, S.A. De C.V.

Cordero, O.F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 256-286.

Cordero, O.F. (2006). Taking a differential element: Its formation and meaning in the didactic discourse of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(6), 869-872.

Cresswell, J.W. (2007). *Qualitative inquiry & research design. Choosing among five approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage publications.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovich, D. (2001). The concept of Definite Integral: coordination of two schemas. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Utrecht, Países Bajos: Freudenthal Institute.

D'Amore, B., y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218.

Demidov, S., y Shenitzer, A. (2000). Two letters by N.N. Luzin to M. Ya. Vygotskii. The *American Mathematical Montly, 107*(1), 64-82.

Dimiceli, V.E., Lang, A.S., y Locke, L. (2010). Teaching Calculus with Wolframalpha. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 41*(8), 1061-1071.

Douglas, R.G. (1987). *Toward a lean and lively Calculus*. Stony Brooks, NY: The Mathematical Association of America.

Ely, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 117–146.

Ferrini-Mundy, J., y Gaudard, M. (1992). Secondary school Calculus: Preparation or pitfall in the study of College Calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 56-71.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1991). Research in Calculus learning: Understanding of limits, derivatives and Integrals. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Mathematics Learning, Preliminary Analysis and Results. MAA Notes. No. 33* (pp. 31-45). Washington: The Mathematical Association of America.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, *7*(2), 127-170.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *18*(1), 7-33.

Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 5*(3), 673-702.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2-3), 237-284.

Godino, J.D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción en matemática educativa.

Godino, J.D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/.

Godino, J.D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: Motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007) The Onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *PARADIGMA, 27*(2), 221-252.

Godino, J.D., Font, V., Contreras, A., y Wilhelmi, M.R. (2006B). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 117-150.

González-Martín, A.S., y Camacho, M. (2011). What is first-year mathematics students' actual knowledge about Improper Integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(1), 73-89.

Gravemeijer, K, y Doorman, M. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: a Calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Henao, G.C., Lerner, M.J., Gil, G.L., y Esteban, D.P. (2004). Caracterización de las metodologías utilizadas en la enseñanza del Cálculo en la Universidad. *EFIAT. Revista Universidad EFIAT, 40*(133), 47-59.

Hoban, R.A., Finlanson, O.E., y Nolan, B.C. (2012). Transfer in Chemistry: A study of students' abilities in transferring mathematical knowledge to Chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2012.690895.

Ímaz, J.C. y Moreno, A. L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*(8), 99-112.

Jovchelovitch, S. (2007). *Knowledge in context: Representations, community and culture*. Nueva York, EE.UU.:Routledge.

Judson, T.W., y Nishimori, T. (2005). Concepts and skills in High School Calculus: An examination of a special case in Japan and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 24-43.

Katz, K., y Katz, M, (2010). Zooming in on infinitesimal: 1-.9… in a post-triumvirate era. *Educational Studies in Mathematics, 74*(3), 259-273.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitesimally small and the infinitesimally large in Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 28*(2), 137-174.

Klingbeil, N.W. y Bourne, A. (2013). A national model for engineering Mathematics Education: Longitudinal impact at Wright State University. *120th Annual Conference & Exposition*. Atlanta, GA: American Society for Engineering Education.

Klingbeil, N.W., Mercer, R.E., Rattan, K.S., Raymer, M.L. y Reynolds, D.B. (2004). Rethinking engineering Mathematics Education: A model for increased retention, motivation and success in engineering. *Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition*. Auburn, AL: ASEE.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2009). Integral as accumulation: A didactical perspective for school mathematics. En M. Tzekaki, M. Kladrimidou, y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 417-424). Thessaloniki, Grecia.

Lee, M.D., y Martínez-Planell, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the Definite Integral of functions of two and three variables. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 883-916.

Leng, N.W. (2011). Using an advanced graphing calculator in the teaching and learning of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 42*(7), 925-938.

Liu, P.H., Lin, C.C., Chen, T.S., Chung, Y.T., Liao, C.H., Lin, P.C., Tseng, H.E., Chen, R.M. (2009). A collaborative model for Calculus Reform: A preliminary report. En Paditz, L., y Rogerson, A. (Eds.), *Proceedings of the Mathematics Education – The 21st Century Project Meeting* (372-375). Dresden, Alemania. Recuperado de: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21Project_dresden_sept_2009.htm

López-Gay, R. y Martínez-Torregrosa, J. (2005). ¿Qué hacen y qué entienden los estudiantes y profesores de física cuando usan expresiones diferenciales? *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 321-334.

Maggelakis, S. y Lutzer, C. (2007). Optimizing student success in Calculus. *PRIMUS: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 17*(3), 284-299.

Mahir, N. (2009). Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(2), 201-211.

Mallet, D.G. (2012). An example of cognitive obstacles in advanced integration: The case of scalar line Integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. DOI: 10.1080:0020739X.2012.678897.

Merriam, S.B. (2009). *Qualitative Research. A guide to design and implementation*. San Francisco, CA: John Wiley & Sons.

Milanovic, M., Takaci, D., y Milajic, A. (2011). Multimedia approach in teaching mathematics –example of lesson about the Definite Integral application for determining an area. *International Journal of Mathematics Education, 42*(2), 175-187.

Muñoz, O.G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 131-170.

Muñoz, O.G. (2001). Tipos de mediación social en la didáctica del Cálculo Integral: Relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 14*(1), 532-539.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del Cálculo Integral: El caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa, 16*(2), 415-421.

Muñoz-Ortega, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 283-302.

National Research Council (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education* (Mathematical Sciences Education Board and the Board on Mathematical Sciences). Washington, DC: The National Academic Press.

National Research Council (2013). *The mathematical sciences in 2025*. (Committee on the Mathematical Sciences in 2025; Board on Mathematical Sciences and Their Applications; Division on Engineering and Physical Sciences). Washington, DC:The National Academic Press.

Nieto, N., Viramontes, J., y López, F. (2009). ¿Qué es la Matemática Educativa? *Cultura Científica y Tecnológica (CULCyT), 6(35)*, 16-21.

Olave, B.M. (2005). *Un estudio sobre las estrategias de los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva*. (Tesis de Maestría). CINVESTAV-IPN. México, DF: IPN.

Pesek, D.D., y Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 524-540.

Petriz, M.M., Barona, R.C., López, V.R., y Quiroz, G.J. (2010). Niveles de desempeño y actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de licenciatura en administración en una universidad mexicana. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 15*(47), 1223-1249.

Petterson, K., y Scheja, M. (2008). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(6), 767-784.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: La transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. (Disertación Doctoral). México, DF:CINVESTAV-IPN.

Pulido, R. (2008). De la regla de tres a la ecuación de continuidad (o la innovación en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo). En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (113-132). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. - Díaz de Santos.

Rasslan, S., y Tall, D. (2002). Definitions and images for the Definite Integral concept. In Anne D. Cockburn y Elena Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Norwich, Reino Unido), 4, 89–96.

Rising, G. (1961). Some Comments on the teaching of the Calculus in Secondary Schools. *The American Mathematical Montly*, *68*(3), 287-290.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. (283-299). Países bajos: Kluwer Academic Press.

Rösken, B., y Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Entusiast, 3*, 181-204.

Salinas, P. (2010). *Un estudio socioepistemológico sobre el método de Euler como generador de procedimientos y nociones del Cálculo en el contexto del estudio del cambio*. (Tesis Doctoral). México, DF: CINVESTAV-IPN.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Salinas, P., y Alanís, J.A. (2010). Cálculo de una variable: Acercamientos newtoniano y leibniziano integrados didácticamente. *El Cálculo y su Enseñanza, 2*(1), 1-14.

Salinas, P., Alanis, J.A., y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable: Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac, 56-57*(62-69).

Salinas, P., Alanís, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., Garza, J.L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos*. (3 Vols.) México, DF: CENGAGE Learning.

Sauerheber, R.D. (2012). Teaching the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(1), 85-143.

Scheja, M. y Petterson, K. (2010). Transformation and contextualisation: Conceptualising students' conceptual understanding of threshold concepts in Calculus. *Higher Education, 59*(2), 221-241.

Schrörer, B.S.W. (2006). Rearranging the Calculus sequence to better serve its partner disciplines. *The American Mathematical Monthly, 113*(7), 628-636.

Socas, M. (2008). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas: Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. Pilar (Eds.) *Comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, SEIEM. 19-52.

Stake, R. (2005). *Qualitative case studies. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.) The Sage handbook of qualitative research* (3ra Ed.) Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Steen, L.A. (2003). Analysis 2000: Challenges and opportunities. En D. Couray, D. Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B.R., Schubring, G. (Eds.), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathèmatique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*. Monograph No. 39 (pp. 91-210). Génova: L'Enseignement Mathèmatique.

Steiner, J.M., y Dana-Picard, T. (2004). Teaching mathematical integration: Human computational skills versus computer algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(2), 249-258.

Tall, D. (1981). Comments on the difficulty and validity of various approaches to the Calculus. *For the Learning of Mathematics, 2*(2), 16-21.

Tall, D. (1992). On students' difficulties in Calculus (Conferencia Plenaria). En M. Artigue & G. Ervynck (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 (13-28). ICME-7*, Québec, Canada.

Tall, D. (2010). *A Sensible Approach to the Calculus*. (Conferencia Plenaria en The National and International Meeting on the Teaching of Calculus, Septiembre 23 al

35, Puebla, México.) Recuperado de: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html

Tarvainen, K. (2008). Justifying differential derivations when setting up Integrals. *International Journal of Mathematical education in Science and Technology, 39*(1), 61-68.

Thompson, P.W., Byerley, C., y Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to Calculus made possible by technology. *Computers in the Schools, 30*, 124-147.

Thompson, P.W., y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in Calculus. En M.P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Törner, G., Potari, D. y Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: Curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM Mathematics Education*, 1-12. DOI: 10.1007/s11858-014-0612-0.

Turégano, P. (1998). Del área a la Integral: Un estudio del contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias, 16*(2), 233-249.

Valdivé, C. (2008). Los infinitesimales en el Cálculo: Un punto de vista sistémico. *Educere, 12*(42), 532-538.

Yeshuralmi, M., y Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 287-306.

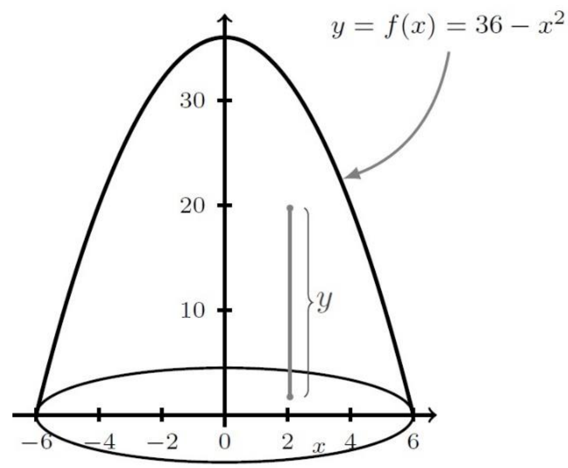
Yin, R.K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: SAGE publications.

Young, C.Y., Georgiopoulos, M., Hagen, S.C., Geiger, C.L., Dagley-Falls, M.A., Islas, A.L., Ramsey, P.J., Lancey, P.M., Straney, R.A., Forde, D.S., y Bradbury, E.E. (2011). Improving students learning in Calculus through applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(5), 591-604.

Apéndices

Apéndice A: Instrumento diseñado

1. Establezca y calcule una Integral con la cual se obtenga el valor exacto del área de la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje x la parte de la gráfica de $y = y(x) = x^3$ determinada por los puntos $\big(1, f(1)\big)$ y $\big(2, f(2)\big)$.
2. Calcule la masa de un sólido que tiene la forma de un paraboloide de 6 centímetros de radio en la base y 36 centímetros de altura, sabiendo que la densidad en cada punto del sólido depende de la distancia del punto a la base, y está dada por $\rho(y) = y$ gramos/centímetro cúbico.



3. Una lámina tiene forma de un cuadrado de lado 10 centímetros. La masa de la lámina está distribuida de tal manera que la densidad en cada uno de sus puntos es igual a x gramos por centímetro cuadrado, donde x es la distancia del punto al lado más cercano del cuadrado. Calcule la masa de la lámina.

Apéndice B: Consentimiento informado

Compromisos del participante durante el desarrollo del proyecto de Investigación

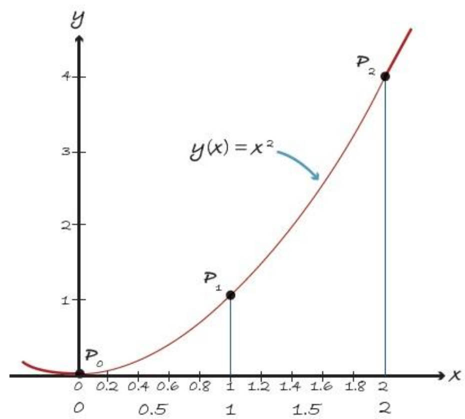
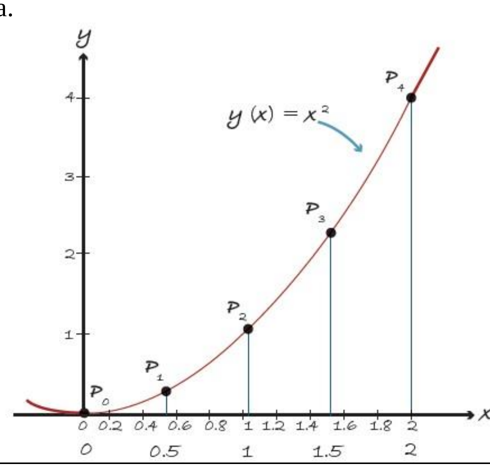
Por este medio autorizo el uso de videograbaciones, audio e imágenes recopiladas en el curso Matemáticas II (profesor titular: *Anónimo para el reporte de investigación*) para la generación y publicación de reportes con fines de investigación científica.

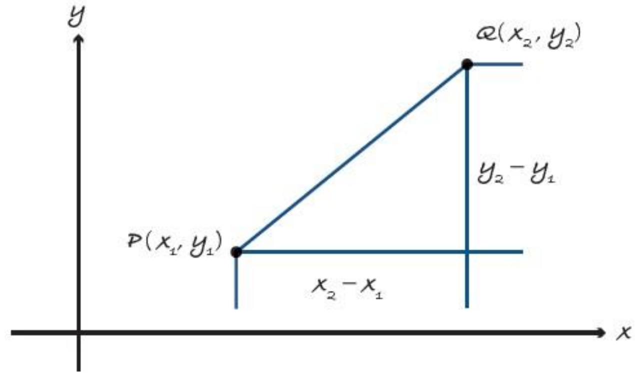
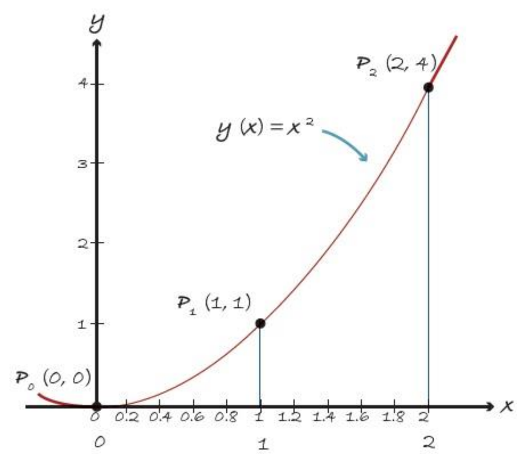
Entiendo que en todo momento se resguardará mi información personal y privacidad, y que la información recopilada y los resultados obtenidos no afectarán la evaluación académica que realiza el profesor titular del curso en forma alguna.

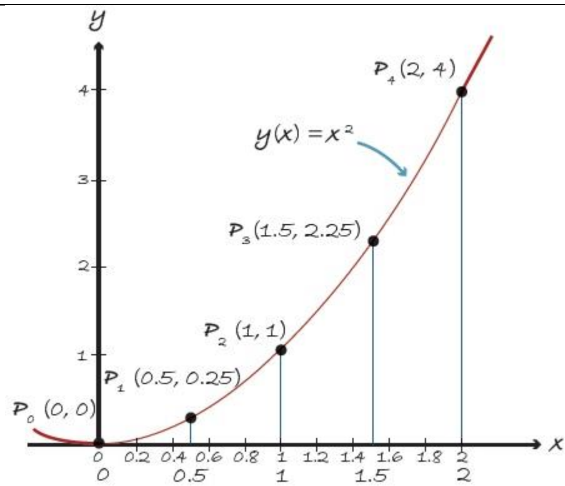
Nombre completo: ____

Firma:

Apéndice C: Unidades de análisis consideradas en el análisis ontosemiótico

Unidad	Contenido textual
U-1-0	En este tema consideraremos el problema de calcular la longitud de una curva; primero se verá que se pueden obtener valores aproximados para la longitud dividiendo la curva, calculando en cada porción de ella una aproximación de la longitud y sumando los valores obtenidos. Después, reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que a través de dividir convenientemente la curva se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto de la longitud como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, al incorporar la consideración infinitesimal de que las curvas en porciones infinitamente pequeñas son tramos rectos, lograremos expresar la longitud de la curva como una Integral.
U-1-1	Considera a la gráfica de la función $y = y(x) = x^2$.
U-1-2	a) Calcula un valor aproximado de la longitud L del arco de la gráfica de $y = y(x) = x^2$, desde el punto $\big(0, y(0)\big)$ hasta el punto $\big(2, y(2)\big)$. Para ello divide el arco en dos partes, tal y como se indica en la siguiente figura y supón que esas dos partes son segmentos de recta. 
U-1-3	b) Calcula de nuevo un valor aproximado de la longitud L del arco de curva del inciso anterior, pero ahora dividiendo el arco en cuatro partes, tal y como se indica en la siguiente figura, y suponiendo al igual que antes, que esas cuatro partes son segmentos de recta. 
U-1-4	c) ¿Por qué es razonable pensar que las aproximaciones mejorarán conforme el arco se divide en más y más partes de la manera como se está haciendo?
Discusión de la situación problema 1 (SP-1)	
U-1-5	La longitud del segmento de recta del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$ puede calcularse con el teorema de Pitágoras. Para ver esto, consideremos la siguiente figura, en donde se

	aprecia que el segmento de P a Q es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal tiene longitud $x_2 - x_1$ y cuyo cateto vertical tiene longitud $y_2 - y_1$. 
U-1-6	De donde se tiene que: $$\text{Longitud del segmento} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ Esta fórmula, que establece la distancia entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es válida, independientemente de la posición relativa de Q con respecto de P.
U-1-7	Para estimar la longitud L del arco de la SP-1 dividiéndolo en dos partes, consideraremos a los puntos $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$ y $P_2(2,4)$ sobre el arco. Si L_1 es la longitud del arco de P_0 a P_1 y L_2 es la longitud del arco de P_1 a P_2 tenemos por la fórmula de la distancia entre dos puntos que:  $$L_1 \approx \sqrt{(1-0)^2 + \big(y(1) - y(0)\big)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} = 1.414$$ $$L_2 \approx \sqrt{(2-1)^2 + \big(y(2) - y(1)\big)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10} = 3.162$$
U-1-8	Y en consecuencia: $$L = L_1 + L_2 \approx 1.414 + 3.162 = 4.576$$
U-1-9	Para estimar ahora la longitud L del arco de la SP-1 dividiéndolo en 4 partes, consideramos a los puntos $P_0(0,0)$, $P_1(0.5,0.25)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1.5,2.25)$, y $P_4(2,4)$ sobre el arco. Si L_1 es la longitud del arco de P_0 a P_1, L_2 es la longitud del arco de P_1 a P_2, L_3 es la longitud del arco de P_2 a P_3, y L_4 es la longitud del arco de P_3 a P_4, tenemos por la fórmula de la distancia entre dos puntos que:



$$L_1 \approx \sqrt{(0.5-0)^2 + \big(y(0.5)-y(0)\big)^2} = \sqrt{(0.5-0)^2 + (0.25-0)^2} = 0.559$$

$$L_2 \approx \sqrt{(1-0.5)^2 + \big(y(1)-y(0.5)\big)^2} = \sqrt{(1-0.5)^2 + (1-0.25)^2} = 0.901$$

$$L_3 \approx \sqrt{(1.5-1)^2 + \big(y(1.5)-y(1)\big)^2} = \sqrt{(1.5-1)^2 + (2.25-1)^2} = 1.346$$

$$L_4 \approx \sqrt{(2-1.5)^2 + \big(y(2)-y(1.5)\big)^2} = \sqrt{(2-1.5)^2 + (4-2.25)^2} = 1.82$$

U-1-10 Y en consecuencia:

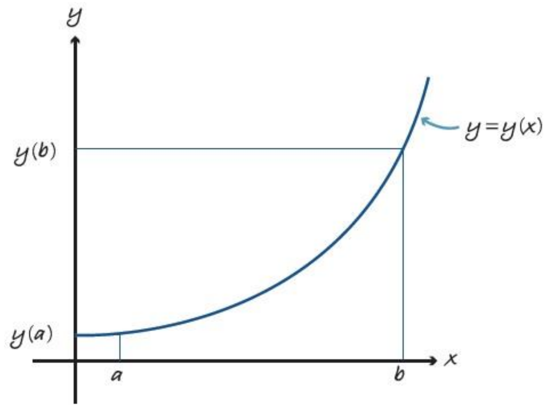
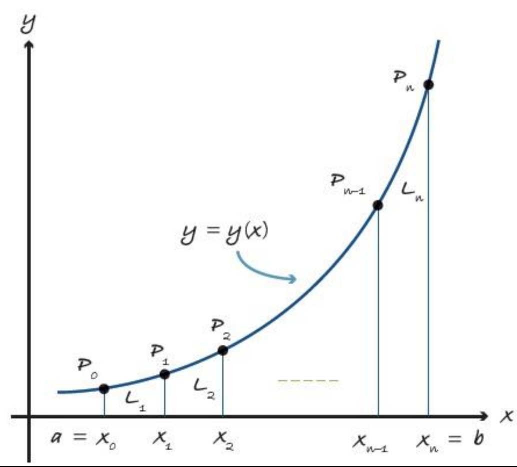
$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \approx 0.559 + 0.901 + 1.346 + 1.82 = 4.626$$

U-1-11 Con relación a la pregunta del inciso (c), podemos decir que entre más y más partes sea dividido el arco como se induce de los incisos (a) y (b), se espera que la aproximación obtenida sea mejor de acuerdo al siguiente razonamiento: al ir considerando un número mayor de divisiones del arco en partes cada vez más pequeñas, éstas son más parecidas a segmentos rectos, con lo cual, la aproximación para la longitud de cada parte, suponiendo que es recta, es intuitivamente más cercana a su valor exacto. Por supuesto que la suma de estas mejores aproximaciones nos conduciría consecuentemente a una mejor aproximación de la longitud total L.

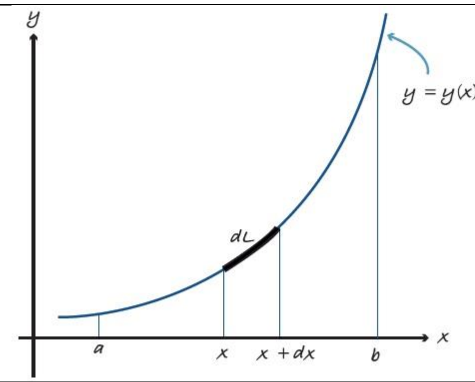
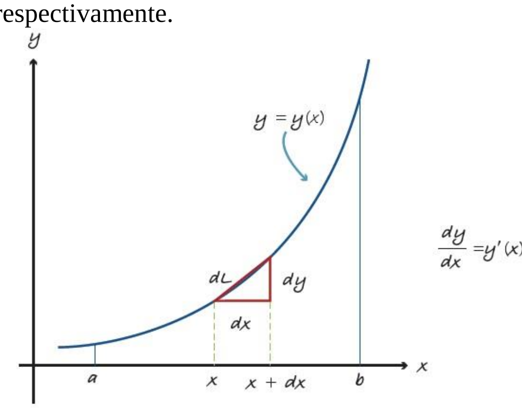
U-1-12 En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados de la longitud del arco de la curva de la SP-1 para un número n cada vez mayor de divisiones, en ella se puede observar que conforme n aumenta, las aproximaciones para la longitud van estabilizándose hacia un valor que puede asegurarse es la longitud del arco de la curva.

n	L
2	4.576
4	4.626
6	4.638
⋮	⋮
21	4.64605
30	4.64642
40	4.64658
⋮	⋮
90	4.64674
500	4.64678
1000	4.64678

U-1-13 Aunque el trabajo para lograr una buena estimación de la longitud L parece muy laborioso, en realidad no lo es si disponemos de un recurso de cómputo. Posteriormente en la Unidad 3

	veremos un método simbólico que nos permitirá calcular el valor exacto de la longitud L de este arco.
Consideraciones alrededor de la SP-1 1. Generalizando el proceso de cálculo de la longitud de arco a cualquier gráfica	
U-1-14	Muy probablemente notarás que el procedimiento utilizado para calcular de manera aproximada la longitud de la porción de la gráfica de $y = y(x) = x^2$ entre los puntos con coordenadas (0,0) y (2,4) se puede utilizar para calcular de manera aproximada la longitud de arco de la gráfica de cualquier función $y = y(x)$ de un punto $(a, y(a))$ a otro punto $(b, y(b))$ como lo veremos enseguida. Sea $y = y(x)$ una función y sean a y b dos valores de x, con $a < b$. A continuación mostramos su gráfica: 
U-1-15	Para calcular de manera aproximada la longitud del arco L de la gráfica de $y = y(x)$ determinado por los puntos $(a, y(a))$ y $(b, y(b))$, dividamos este arco en n partes. Para ello se divide el intervalo $[a, b]$ en el eje x en n partes iguales, tal y como se muestra en la siguiente figura: 
U-1-16	La distancia entre dos valores consecutivos de x es: $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$ Con $$x_i = x_{i-1} + \Delta x$$ Para $$i = 1,2,3,\cdots,n$$
U-1-17	En la figura anterior, L_1,L_2, $\cdots$,L_n son las longitudes de los arcos P_0P_1, P_1P_2,…, $P_{n-1}P_n$, respectivamente. Entonces $$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$ O bien:

	$$L=\sum_{i=1}^{n} L_i$$
U-1-18	Por otra parte, los arcos P_0P_1, P_1P_2, …, $P_{n-1}P_n$ son “casi” segmentos de recta, por lo que: $$L_1 \approx \sqrt{(x_1-x_0)^2+\left(y(x_1)-y(x_0)\right)^2},$$ $$L_2 \approx \sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(y(x_2)-y(x_1)\right)^2},$$ $$\vdots$$ $$L_n \approx \sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+\left(y(x_n)-y(x_{n-1})\right)^2}$$
U-1-19	Finalmente: $$L=\sum_{i=0}^{n} L_i \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left(y(x_i)-y(x_{i-1})\right)^2}$$ $$L=\sum_{i=0}^{n} L_i \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{\Delta x^2+\left(y(x_i)-y(x_{i-1})\right)^2}$$ Con lo que se consigue una aproximación para la longitud del arco del segmento considerado.
U-1-20	Ya comentamos en la “Discusión de la SP-1” que a medida que los arcos son cada vez más pequeños, las estimaciones obtenidas para sus longitudes son cada vez más precisas; en el análisis anterior, este hecho corresponde a tomar valores de n cada vez más “grandes”. De hecho, el valor exacto de L es el número al que tienden las aproximaciones obtenidas cuando n tiende a infinito, resultado que se denota de la siguiente manera: $$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} L_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\Delta x^2+\left(y(x_i)-y(x_{i-1})\right)^2}$$
U-1-21	En general no es fácil calcular el valor exacto de la longitud de arco a través de este proceso de límite, sin embargo, es posible determinar estimaciones de la longitud tan precisas como se desee tomando valores de n tan grandes como sea necesario y haciendo uso de un recurso computacional. Por ejemplo, en la tabla incluida en la Discusión de la SP-1 se observa que para conseguir una estimación del valor exacto de la longitud de arco de la curva considerada en dicha situación, con una precisión de tres decimales, fue necesario dividir la curva en 21 partes. Se puede probar que para una gama muy amplia de funciones $y(x)$ el proceso de tomar valores de n cada vez más grandes, produce aproximaciones para la longitud de arco que se estabilizan en un valor que es el límite del que estamos hablando y que representa el valor exacto.
2. Representando el valor exacto como una Integral	
U-1-22	Otra forma como se podría concretar el valor exacto de la longitud L es la siguiente. Concibamos al arco de la gráfica de una función $y=y(x)$, desde el punto $x=a$ hasta el punto donde $x=b$, como formado por un número infinito de segmentos infinitamente pequeños, de tal forma que por su pequeñez, cada uno de ellos sea recto; en la siguiente figura se muestra de manera genérica uno de estos segmentos, cuya longitud infinitamente pequeña representaremos por el símbolo dL.

	
U-1-23	De esta manera, la longitud L del arco de la gráfica considerado es la suma infinita de las longitudes infinitamente pequeñas dL de todos los segmentos que lo conforman, hecho que denotaremos como: $$L = \int dL$$
U-1-24	Siendo cada segmento infinitamente pequeño y por ende recto, su longitud dL puede expresarse considerando al triángulo infinitamente pequeño mostrado en la figura a la izquierda, el cual es llamado el triángulo característico. En él, dL es la longitud de la hipotenusa y, a su vez, dx y dy son las longitudes infinitamente pequeñas de los catetos horizontal y vertical respectivamente. 
U-1-25	Podemos concluir que: $$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$ $$dL = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$
U-1-26	Y como la derivada $y'(x)$ es el cociente $\frac{dy}{dx}$, tenemos que $$dL = \sqrt{(1 + [y'(x)]^2)dx^2}$$ $$dL = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$
U-1-27	De donde finalmente obtenemos que: $$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$
U-1-28	El tipo de suma infinita (de longitudes infinitesimales en este caso) que aparece en el lado derecho de la ecuación anterior, es un caso especial de lo que genéricamente se conoce con el nombre de Integral. En el caso particular de la SP-1, la longitud de arco L queda expresada como: $$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}dx$$
U-1-29	El procedimiento que consiste en tomar como punto de partida una parte infinitamente pequeña del arco de curva, obtener su longitud y a partir de ella expresar a la longitud total del arco como una Integral, forma parte de una estrategia más general y muy útil en la

	ingeniería que será discutida con detalle en la siguiente Unidad. Este procedimiento contrasta con la manera desarrollada para calcular la longitud de arco en la Discusión de la SP-1 y en la Consideración 1 de esta SP, en donde el punto de partida es el arco de curva completo, que luego se divide para estimar su longitud como la suma de aproximaciones a las longitudes de los pequeños arcos que la forman.
3. Ligando el límite y la Integral	
U-1-30	Hemos discutido dos procedimientos para conseguir la longitud de una curva dada por la gráfica de la función $y = y(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$. Debido a que tanto con uno como con el otro se obtiene el mismo valor, podemos escribir: Hemos discutido dos procedimientos para conseguir la longitud de una curva dada por la gráfica de la función $y = y(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$. Debido a que tanto con uno como con el otro se obtiene el mismo valor, podemos escribir: $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x^2 + \left(y(x_i) - y(x_{i-1})\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$ Vale la pena comentar que en esta igualdad se advierten dos maneras de proceder esencialmente distintas: la del límite, que involucra magnitudes finitas y una tendencia al infinito y la de Integral que considera una suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas. Ambos procesos envuelven al infinito, lo cual es natural en tanto que son propios de lo que se llama Cálculo Infinitesimal, a cuyo estudio se avoca en parte este libro.

Apéndice D: Rúbrica analítica para calificar tareas extraclase

No.	Paso	Sí	No
1	Señaló el todo (del cual se le calculará alguna cualidad)	2	0
2	Expresó con el símbolo M dicha cualidad	1	0
3	Señaló la parte que genéricamente representa a las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió el todo	3	0
4	Indicó cómo obtuvo las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió el todo	3	0
5	Expresó con el símbolo dM a la magnitud de la cualidad de la parte que genéricamente representa a las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió el todo	1	0
6	Expresó a M como la suma de los valores de la cualidad de las infinitas partes infinitamente pequeñas en las que dividió el todo	2	0
7	Calculó el valor exacto de dM y lo expresó en la forma $r(x) \cdot dx$	5	0
8	Expresó a M como una Integral Definida	3	0
9	Calculó dicha Integral	2	0

Apéndice E: Fragmentos de la transcripción de las entrevista a participantes

Fragmentos de la entrevista a Daniel (en donde aborda del primer problema)

Daniel: "Okay. [Pausa mientras lee el problema]. Aquí nada más, el área de la superficie se refiere al área externa de un [pausa]"

Investigador: [asentando con la cabeza], "del sólido."

Daniel: "De un sólido de revolución."

Investigador: "La pura superficie."

Daniel: "La pura superficie. Okay. [pausa] No me acuerdo del área. Área es igual a [pausa], pues el área superficial."

Daniel: "Sí, me acuerdo que lo hacíamos así. Okay, digamos que es esto [en voz baja]. De uno a dos… Bueno, la fórmula es π por ese [s] por erre [R] más erre-menor [r]."

Investigador: "Ajá."

Daniel: "Como esta línea [remarcando la gráfica de la función] no es una línea recta, es una curva, tengo que hacerla en pedazos chiquitos. Entonces, hago así como el pequeño espacio, equis [x] y equis más de-equis [$x + dx$]."

Investigador: "Okay."

Daniel: "Ahora saco el diferencial [pausa] y me queda un pequeño estilo, cono truncado."

Investigador: "Okay."

Daniel: "Entonces, tengo π, ese [s] es [pausa]; Ah, éste sería efe-equis [$f(x)$], y este sería efe-equis más de-equis [$f(x + dx)$]… Entonces, luego sustituyo en la fórmula. A [refiriéndose al valor del área de la superficie del sólido de revolución] es igual a, [pausa mientras lee] π por este pedacito de la línea [señalando al segmento de recta sobre la curva correspondiente al intervalo [$x, x + dx$]]. Okay. Hay que sacar la línea [en realidad se refiere a la longitud de arco de un trozo de curva infinitamente pequeño]. Eh, [pausa] distancia entre dos puntos; como, como estamos sacando un diferencial, hay que considerar como si esto fuera (de que) recto [refiriéndose al trozo de recta de longitud infinitesimal]."

Investigador: "¿Qué es esto que estás calculando?"

Daniel: "Es para sacar la distancia entre dos puntos. "

Investigador: “Okay, Okay. Ajá. Entonces, ¿qué representaría acá en la gráfica? [pausa para que conteste el estudiante] ¿Qué parte del…? [le interrumpe Daniel para contestar la pregunta]”

Daniel: “Es la ese [s], la ese [s] de la fórmula, y como esto es un espacio; es una línea curva [rectifica], pero como estamos sacando el diferencial, estamos considerando que es [pausa] recta.”

Daniel: “Entonces me queda, uno más efe-prima de equis al cuadrado, todo esto por de-equis [$s = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$]. O sea, este me quedaría, adentro, en ese [s]. Adentro es ese [s], entonces lo meto aquí [refiriéndose a sustituir el resultado que acaba de obtener en el integrando], raíz de uno más efe-prima de equis, esto al cuadrado, de-equis [$dA = \pi\left(\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx\right)$, pendiente lo que a continuación se comenta].”

Daniel: “Y luego siguen los radios, que es, el radio mayor dijimos que es efe-de-equis más de-equis [$f(x + dx)$], lo voy a pasar de una vez como efe-de-equis más efe-prima de equis, de-equis [$f(x) + f'\,(x) \cdot dx$], es lo mismo que esto. Esto más efe-de-equis [$f(x)$] Y tengo dos, pues los meto acá [está simplificando la expresión algebraica para continuar con su tratamiento.]”

Daniel: “Me queda [audio ininteligible]. Voy a, aquí [audio ininteligible], si multiplico por este término, me va a quedar al cuadrado. Entonces es innecesario que lo haga y simplemente lo voy a ignorar; voy a hacer nada más esta multiplicación con el primer término. [está aplicando el postulado que le permite simplificar las expresiones polinomiales en dx]”

Investigador:” Okay. ¿A qué te refieres con “me va a dar un cuadrado”?”

Daniel: “Porque multiplicar de-equis por de-equis [$dx \cdot dx$], me va a dar de-equis cuadrada [dx^2] y acá el primer término me va a dar de-equis [dx] y en el segundo término me va a dar de-equis cuadrada [dx^2], y [pausa] si el exponente es mayor, es irrelevante, entonces lo puedo eliminar.”

Investigador: “Okay, okay.”

Daniel: “En sí, esto quedaría como que A es igual a la integral de de-a [dA], estamos sacando de-a [dA] para ponerlo aquí [refiriéndose al integrando] y poderlo integrar.”

Investigador: “Okay.”

Daniel: "Entonces, al final la Integral sería, A es igual a, ya lo voy a acomodar dentro de la Integral. La Integral de uno a dos, porque nos están pidiendo de uno a dos, de [pausa] dos equis cúbica, π, raíz cuadrada de uno más nueve equis cuatro, de-equis. [$A = \int_1^2 2x^3\pi\sqrt{1+9x^4} \cdot dx$] Esa sería la Integral establecida."

Investigador: "Y esta te permite calcular de manera exacta el área [con tono de pregunta]"

Daniel: "El área del uno al dos, el área superficial."

Investigador: "Okay. Gracias".

Fragmentos de la entrevista a Daniel (en donde aborda del segundo problema)

Daniel: "Okay. Pues ya sé. La idea es, [pausa] para pequeños rectangulitos. Bueno, tenemos, un cuadradito, diez centímetros de lado. Como la densidad no es, o sea depende de qué distancia está equis [x], entonces, no es constante, pues hay que agarrar un diferencial."

Daniel: "Entonces, voy a agarrar el cuadrado y lo voy a hacer rectangulitos [mientras dibuja en la hoja un diferencial de área, tal y como se realizó en las primeras tres situaciones problema]. Entonces éste [refiriéndose al primer punto que indicó en el dibujo de la placa en la hoja] sería equis [x] y pues este sería equis más de-equis [$x + dx$]. Y este vendría siendo diez, porque este es diez y diez de lado [refiriéndose a la altura del rectángulo, elemento diferencial que ha considerado en la partición de la placa.]"

Investigador: "Ajá, es cuadrado, ¿verdad?"

Daniel: "Ajá. Entonces, aquí, en realidad, si quito el rectángulo y lo pongo acá, me quedan rectángulos de diez [refiriéndose a la altura del rectángulo, elemento diferencial que dibujó] por equis más de-equis menos equis, de-equis [refiriéndose al resultado de la operación: $(x + dx) - x = dx$]. El área de esto, que es el de-a [dA] de hecho."

Investigador: "Es [pausa, invitando a completar la oración.]"

Daniel: "Es base por altura, o sea, diez de-equis [$10 \cdot dx$]. Entonces, el de-a [dA], o sea, el área de un diferencial es diez de-equis [$dA = 10 \cdot dx$]"

Daniel: "Entonces, la masa, es igual a [pausa], pues sería la Integral de diferencial de masa [$m = \int dm$], que es éste. Y la diferencial de masa es igual a, la densidad en ese punto, por pues, la unidad de dimensión que tengamos, que en este caso es de-a [dA]."

Investigador: “Ajá, Okay. Muy bien.”

Daniel: “Entonces, dé-eme [dm] es igual a, ya sustituyo, tenemos de-a [dA], y tenemos equis [x], digo la densidad; entonces la densidad es equis [x]. Equis por de-a [$x \cdot dA$] que es diez de-equis [$10 \cdot dx$]. De-eme es igual a diez equis de-equis [$dm = 10x \cdot dx$].”

Daniel: “Al final, pues la Integral va de cero, [pausa para verificar datos en el texto que describe el problema] no. Sí, de cero a diez. Entonces, dijimos que eme [m] es igual a, de-eme [dm], digo, la Integral de de-eme [$\int dm$]; que eme es igual a la Integral de cero a diez [$m = \int_0^{10}$] porque tengo un rectángulo, digo un cuadrado de diez.”

Daniel: [Asienta con la cabeza] “Y, de-eme [dm], que aquí lo tenemos [apuntando a la expresión escrita en la hoja] es diez equis de-equis [$m = \int_0^{10} 10x \cdot dx$].”

Investigador: “Y esa es la Integral que calcula [pausa]”

Daniel: “Es la Integral que calcula la masa del cuadrado.”

Fragmentos de la entrevista a Daniel (en donde aborda del tercer problema)

Daniel: “Primero tenemos, la densidad. La densidad depende de erre [r] [pausa mientras escribe] y la fórmula es uno entre uno más erre cúbica [$\rho(r) = 1/(1 + r\text{^}3)$]. Esa es la densidad. Estamos hablando de una esfera, lo cual es un sólido. Entonces, estamos hablando de unidades cúbicas. [audio ininteligible] Masa es igual a [pausa] como varía, Integral de de-eme [$m = \int dm$]. Voy a agarrar un diferencial.”

Investigador: “Okay.”

Daniel: “No me imagino cómo agarrar un diferencial.” [pausa mientras piensa cómo dividir al todo]

Daniel: “Lo que p [interrumpe. Sigue una parte de audio ininteligible, porque habla con muy bajo volumen, como para sí mismo] me lo estoy imaginando como si fueran los anillos del tronco, y no es así.”

Investigador: “Ajá. ¿Cómo dices que te lo imaginas? ¿Cómo si fuera qué?”

Daniel: “Como anillos de tronco.”

Investigador: “Del árbol, cuando lo partes. ¿Concéntricos?”

Daniel: “Sí, pero no, no son así.”

Investigador: “¿Por qué no debe ser así? ¿Por qué consideras que no deberían ser así?”

Daniel: “Porque es bidimensional y estamos en un problema tridimensional. Pero, a lo mejor puede ser, algo parecido.”

Daniel: “O sea, está [pausa] tenemos la esfera, y hay que sacar un diferencial [pausa]. A lo mejor en esferitas.”

Investigador: “Ajá. En esferitas [haciendo gestos con las manos en donde trata de dar la idea de acomodo de las esferas una al lado de la otra] ¿Cómo las acomodarías?”

Daniel: “Si hago una esfera grande, digamos dentro de la esfera, si tengo una esfera, [pausa mientras ordena sus pensamientos] y le quito una esfera erre [r], o sea, con un radio; digamos, esta esfera [mostrando con sus manos] tendría erre, ¿no? [r]. Una esfera infinitamente pequeña más grande sería, el radio, erre más de-erre [$r + dr$].

Investigador: Okay, okay. ¿Las dos con el mismo centro? O [pausa esperando una respuesta]”

Daniel: “Las dos con el mismo centro. Entonces, si al volumen de la esfera grande que es erre más de-erre [$r + dr$] le quito el de erre [r], pues ya tengo el diferencial de la esfera.”

Investigador: “Que sería como una [pausa, mientras hace ademán para indicar el diferencial].”

Daniel: “Como una pequeña cascarita [casi simultáneamente al investigador], exactamente. Entonces, ocupo el volumen grande, digamos que el diferencial, así como lo planteé, es un volumen grande, el volumen de la esfera grande que es con erre más de-erre [$r + dr$] y el volumen es, cuatro tercios de π erre cúbica [$V = \frac{4}{3}\pi r^3$], pero en este caso estamos usando erre más de-erre [$r + dr$]. O sea el radio es erre más de-erre cúbica [$(r + dr)^3$]. Este sería, este sería, representaría la esfera grande.”

Investigador: “¿El volumen de la esfera grande?”

Daniel: “Ajá. El volumen de la esfera grande. Menos, el volumen de la esfera chiquita: cuatro tercios de π [pausa] erre [$\frac{4}{3}\pi r$].”

Investigador: “¿Eso qué sería?”

Daniel: "Esto sería, a la esfera grande le quito la esfera chiquita y me queda el diferencial de la, una capa, una capa de cebolla, que es el diferencial de volumen."

Daniel: "De-ve [dV] es igual a cuatro tercios de π por [pausa] erre más de-erre al cuadrado, digo, al cubo menos erre al cubo[$dV = \frac{4}{3}\pi[(r + dr)^3 - r^3]$], y aquí ya tengo que, [pausa mientras piensa en qué paso del procedimiento sigue] [audio ininteligible]"

Investigador: "Desarrollarlo"

Daniel: "…Este es el binomio desarrollado y pues le resto el erre cúbica [refiriéndose a realizar la operación: $(r + dr)^3 - r^3$]."

Daniel: "Erre cúbica con erre cúbica mueren [refiriéndose a que son términos semejantes y su suma es cero por tener signos distintos], y me queda, [pausa] estos son dé-erres [dr's], de-erre cúbica, de-erre cuadrada y de-erre [dr^3, dr^2, dr], entonces, como estos son mayores a de-erre [dr], estos los puedo eliminar y finalmente me queda este término. [cuando dice 'mayor' se refiere al grado de cada término del polinomio en dr, y está aplicando el postulado oportunamente]"

Investigador: "Ajá."

Daniel: "Ya si multiplico, cuatro por tres, doce entre tres, cuatro. Cuatro π erre cuadrada de-erre [$4\pi r^2 \cdot dr$]. Ese es el diferencial de volumen."

Investigador: "Okay."

Daniel: "Y ahora ya puedo trabajar con la fórmula de masa. … Diferencial de masa es igual a, de erre [r], o sea, la densidad de erre [$\rho(r)$], por el diferencial de volumen que es éste. Masa es igual a uno, uno más erre cúbica [$1/(1 + r^3)$], nada más estoy sustituyendo, por el diferencial de masa: cuatro π erre cuadrada, de-erre [$dm = (1/(1 + r^3))(4\pi r^2 \cdot dr)$]."

Investigador: "Ajá. Okay."

Daniel: "Luego, ya. Simplificar un poco [pausa, audio inaudible, solamente habla para sí mismo mientras va escribiendo el procedimiento que está desarrollando]. Bueno, al final este ya lo meto a la Integral; eme es igual a la Integral de de-eme [$m = \int dm$], que es esto, y me queda, cuatro π erre cuadrada, uno más erre cúbica, Integral [$m = \int (4\pi r^2)/(1 + r^3) \cdot dr$]."

Investigador: "Y esa es la Integral."

Daniel: “[interrumpiendo al investigador] espérame, espérame, dijiste cinco de radio, ¿verdad?”

Investigador: “Radio cinco.”

Daniel: “De cero a cinco [completando la notación para indicar una Integral Definida] [$m = \int_0^5 \frac{4\pi r^2}{1+r^3} \cdot dr$].”

Investigador: “Okay. Y esa es la Integral que te calcula la masa de esa esfera con esas condiciones de densidad, ¿verdad? Muy bien.”

Fragmentos de la entrevista a Claudia (en donde aborda el primer problema)

Claudia: “Pues, me acuerdo que el dibujo era como [pausa mientras traza ejes sobre el papel], era una línea que hacía un cono truncado, ¿no?”

Investigador: “Ajá.”

Investigador: “Entonces, quieres usar conos truncados.”

Claudia: “Sí.”

Investigador: “Okay. Está bien.”

Claudia: “Bueno, primero, debo establecer los dos puntos [refiriéndose a los valores x y $x + dx$ que indican los límites del subintervalo que utilizará para mostrar la parte genérica del todo a partir de la cual calculará el área superficial], para visualizar.”

Investigador: “Perfecto, sí.”

Claudia: “Luego, ya equis [x], equis más dé-equis [$x + dx$], y eso es lo que da el área superficial.”

Investigador: “Okay.”

Claudia: “Bueno, el de-a [dA], que es la parte, pues infinitamente pequeña que vamos a calcular para la Integral.”

Investigador: “Okay”

Claudia: “Luego, la fórmula, sería, área lateral es π [pausa mientras lee]; bueno, en sí el área total sería la Integral de todas las áreas laterales de las partes, infinitamente pequeñas, ajá.”

Investigador: “Ajá.”

Claudia: “Y de una sola partecita infinitamente pequeña, es el π erre, o sea, el radio primero más el radio dos, por la ese [$\pi(r_1 + r_2) \cdot s$]”

Investigador: “Okay. ¿Identificas cada una de esas partes aquí en la figura? [refiriéndose a las literales s, r_1 y r_2]”

Claudia: “Ajá. Éste sería, el radio uno [r_1] pues sería la equis [x]y el radio dos sería equis más dé-equis [$x + dx$] [NOTA: señala con el dedo sobre el papel correctamente la correspondencia entre r_1 y $f(x)$ al igual que r_2 y $f(x + dx)$, pero oralmente lo dice incorrecto]”

Claudia: … “Entonces, era π por radio uno, que es ye más ye más de-ye [$y + y + dy$], y la ese [s], es la [pausa mientras remarca la gráfica de la función en la hoja], pues es la fórmula de la, de la línea, que es la equis cúbica; pero”

Investigador: “¿A qué te refieres cuando dices ‘de la línea’? ¿‘la fórmula de la línea’? ¿En el cono truncado sí sabes quién es ese [s]? ¿En el cono truncado?”

Claudia: “Sí, es, es la [pausa], no sé cómo se llama, como el, [pausa]”

Investigador: “Señálalo.”

Claudia: “Esto es ese [s, mientras remarca la gráfica de la función en la hoja]”

Investigador: “Okay, okay. La longitud de arco.”

Claudia: “Ajá, sí.”

Investigador: “Okay. Entonces, [pausa], dibujaste aquí un cono truncado, ¿verdad? para señalar un diferencial de área superficial. ¿Cuál sería ahí ése [s], en ese cono truncado?”

Claudia: “Sería esto [señalando la orilla superior de la parte del todo que dibujó].”

Investigador: “Okay. Okay. ¿Puedes ponerle ahí la letra encima, por favor? Muy bien, ¿y cómo calcularías ese pedazo?”

Claudia: “El ese [s] como también es un pedazo infinitamente pequeño, se ocupa hacer la Integral de la de longitud de arco [en realidad se refiere al diferencial de arco, no propiamente a la Integral Definida que calcula la longitud de arco].”

Investigador: “Okay.”

Claudia: “… Y es la de, raíz de uno más efe prima de equis al cuadrado dé-equis [$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$].” [Luego calcula $f'(x)$ con al intención de sustituirlos en la previa expresión]

Claudia: “Esa es la ese [s]. Ajá. Luego, la efe de equis [$f(x)$], es el [pausa mientras escribe], es el equis cúbica [$f(x) = x^3$], entonces la efe-prima [pausa mientras escribe] pues es tres equis dos [$f'(x) \ = 3x^2$]. Entonces ya sustituyendo [pausa mientras escribe] [audio ininteligible], más tres equis dos [en voy baja].”

Investigador: Al cuadrado dé-equis [leyendo lo que Claudia escribe en la hoja, asentando con la cabeza]. Okay.

Claudia: Ajá. Y luego, esto es el diferencial de arco.

Investigador: “Okay. En la rúbrica, fíjate, te pide que calcules ese diferencial, pero que lo expreses en la forma erre de equis por dé-equis [$r(x) \cdot dx$]. En este caso, tú estás utilizando equis [x] aquí [señalando la parte correspondiente al diferencial de arco] y ye [y] acá [señalando la parte de la expresión que corresponde a los radios del cono truncado en la diferencial de área superficial]. ¿Cómo le harías para ponerla sólo en términos de equis [x]?”

Claudia: Ajá. [Pausa] Es que eso, lo haría, [pausa]

Investigador : ¿Si sabes quién es ye [y] en ese caso?

Claudia: Ajá. Sí, sí. Es el, [pausa, indicando con el lápiz la altura $y(x)$ en la figura que trazó]

Claudia: “… Rectángulo, pero no, sigue siendo el, [pausa] el ye [y]. Yo me acuerdo que en el examen igual, me quedé “enclochada” en esa parte,… pero no me acuerdo qué hice para resolverlo [con voz baja].” [En este punto Claudia muestra confusión. No logra identificar cómo expresar el valor de y en términos de x con base en $y = y(x) = x^3$]

Investigador: “… Ajá. Bueno, ahí te confundiste nada más. Ye evaluada en equis, pues sería equis al cubo [$y(x) = x^3$], y cuando lo evalúas en equis más dé-equis, pues sería éste [$y(x + dx) = (x + dx)^3$].”

Claudia: “Ah. [Pausa] Entonces ya sería nada más sustituyendo el [pausa]”

Investigador: “Ajá. Okay.”

Claudia: “O sea, aquí sería el equis cubo [x^3] más [pausa mientas escribe en la hoja]”

Investigador: “Ajá.”

Claudia: “Entonces, pues es la Integral desde, dos a uno, ¿no? es la línea.”

Fragmentos de la entrevista a Claudia (en donde aborda el segundo problema)

Claudia: [lee en voz muy baja el texto del problema] “Es un cuadrado de diez centímetros.”

Investigador: Ajá de lado, ¿verdad? Muy bien

Claudia: Y la masa de la lámina está distribuida de tal manera que la densidad de cada uno de sus puntos [pausa] es igual a equis [x] gramos por centímetro cuadrado, donde equis [x] es la distancia [pausa], del punto al lado más cercano del cuadrado.

Investigador: Ajá. Como, de este punto a la orilla más cercana.

Claudia: Ajá. Por ejemplo, los que tengan, todo este cuadrado [mientras dibuja un diferencial de área en la figura que trazó en la hoja], todos estos puntos van a tener la misma densidad.

Claudia: [audio ininteligible] la masa de la lámina. Entonces, masa es, era densidad por área, ¿no?

Investigador: Ajá. Masa es densidad por área, porque es superficial en este caso.

Claudia: Ajá. [pausa] Entonces la masa, pues como son [pausa]

Investigador: ¿infinitesimalmente? Ajá, ¿infinitamente pequeñas?

Claudia : Sí. Sería pues la, erre [ρ] por el, por el dé-a [dA]. Y pues dependiendo de la, (o sea), de la equis [x] es el área.

Claudia: [pausa mientras escribe en la hoja] Entonces, la densidad, [pausa, luego vuelve a leer parte del texto del problema:] la densidad en cada uno de sus puntos es igual a equis [x] gramos [pausa mientras piensa cómo expresar el diferencial de masa]. O sea, ¿la densidad es equis?

Investigador: Ajá.

Claudia: Va a ser esto, y pues el dé-a [dA] es efe de equis [$f(x)$], o sea, la fórmula es efe de equis, dé-equis [$f(x) \cdot dx$]

Investigador: Ajá. Okay. [pausa] Aquí, aquí no hay un sistema de coordenadas, ¿verdad?

Claudia: Ajá, no.

Investigador: Entonces, ¿cómo medirías aquí equis [x] en esa placa? O ¿cómo pondrías tú el sistema de coordenadas?

Claudia: Sí. Pues yo lo empezaría,… el centro lo ponemos como el punto cero.

Investigador: El origen, okay.

Claudia: Ajá, el origen. Y luego, pues el diez es, [audio ininteligible, habla muy bajo], de diez a diez, o sea, es el, cuadrado.

Investigador: Del cuadrado que estás dibujando, okay. [pausa] Okay, esta equis [x] ¿qué representa aquí en la figura?, ¿de dónde a dónde estás midiendo la equis [x]?

Claudia: Pues, si se puede representar esta, pues esta equis [x] [indicando una distancia en la figura que trazó en la hoja]

Investigador: Ajá, del origen a ese punto.

Claudia: Esa es la distancia al lado más cercano. O sea, en realidad es así [marcando sobre la figura], la equis [x].

Investigador: Y aquella distancia, ¿cuál sería entonces?

Claudia: Pues, [pausa] equis menos dé-equis [$x - dx$] ¿no?

Investigador: Okay, okay. … Ya hiciste un diferencial. Okay. Entonces, ¿dónde estaría tu eje?, el eje ye [y], ¿dónde lo pondrías? O con ese mismo sistema de coordenadas te serviría medir así. [pausa] Es que a lo que voy, tú estás midiendo la distancia desde aquí, ¿verdad? desde la orillita hasta el punto que estás considerando, pero normalmente lo que hacemos es desde el origen para acá [refiriéndose al punto sobre la placa considerado] lo que medimos.

Claudia: Sí. Bueno, es que como equis [x] es la distancia del punto al lado más cercano, es hacia el lado, se supone en el problema.

Investigador: Sí, está bien. Le puedes cambiar de letra igual, si quieres [refiriéndose a la literal utilizada para indicar la distancia del punto considerado sobre la placa hasta la orilla de la misma], no hay problema, para que uses aquí el eje equis [x]; digamos que se llame, no sé, erre [r] o de [d], o algo así.

Claudia: O sea para que sea,

Investigador: Después lo pones en términos de equis [x]. [pausa] ¿sí me expliqué? O sea, digamos, tú tienes así el cuadrado, ¿verdad? [dibuja en otra hoja lo que Claudia dibujó en la hoja en la que está contestando el problema] y aquí pusiste los ejes. A éste ya le llamaste equis [refiriéndose a la distancia del eje y al punto considerado], entonces, si agarras un punto aquí, éste se llamaría equis [x], pero tú quieres realmente que ésta sea [pausa] la distancia ¿verdad? [refiriéndose a la distancia del punto considerado a la orilla de la placa.]

Claudia: Ajá.

Investigador: Entonces, puedes poner, por ejemplo, de [d]. Ahora, de [d] cómo la pongo en términos de equis [x] para que sea, digamos en este eje, es lo que estoy sugiriendo. Porque como usas la misma letra, para denotar a esta distancia, pero tú quieres usarla para denotar a esta otra, pues ahí entra el conflicto.

Claudia: Sí. … Ajá. [pausa] Se puede usar el equis [x], desde aquí hasta acá, hasta aquí [audio ininteligible, empieza a borrar lo que estaba trazando en la hoja].

Claudia: Aquí es equis [x] y aquí ya equis más dé-equis [$x + dx$]

Investigador: Okay. [pausa] Okay, toda esta franja debería ser infinitamente pequeña, ¿verdad? del ancho.

Claudia: Sí.

Investigador: Okay. ¿Cuál sería la densidad en esa franja?

Claudia: La densidad es, [pausa], la fórm [interrumpe], pues es equis [x], ¿no? Bueno.

Investigador: Ajá, bueno, ¿cuál es la distancia desde aquí hasta acá?

Claudia: … ¿hasta la orilla?

Investigador: ¿Cómo calcular esa distancia hasta la orilla de la plaquita?

Claudia: ¿Cuál? ¿Desde el origen hasta acá?, ¿desde el equis [x] [interrumpe]?

Investigador: Desde el equis [x] hasta la orilla.

Claudia: [Pausa] pues restándole el equis

Investigador: Ajá, el equis [x], ¿a quién se lo vas a restar?

Claudia: A, a toda la, pues a los cinco.

Investigador: ¿Cómo calcularías la masa, de ese, marco, digamos?

Claudia: Pues es la masa, es la, o sea, la masa es la densidad, de eso por el área. O sea, el área de éste [pausa], la del cuadrado, ¿no?

Investigador: Ajá, ¿pero de cuál cuadrado? ¿de todo el cuadrado? O ¿sólo del marco?

Claudia: No, sólo del marco. …

Investigador: Okay, okay .

Claudia: [pausa] O sea, serían los cinco, menos el, ¿aquí qué es? [en voz baja, como diciéndose a sí misma], equis más dé-equis [$5 - (x + dx)$]. Es el, [pausa] Investigador: La densidad [en voz baja] Si quieres pasamos al otro. No pasa nada si no lo puedes resolver. No te estoy evaluando…

Fragmentos de la entrevista a Claudia (en donde aborda del tercer problema)

Claudia: [lee en voy muy baja el texto del tercer problema] donde erre [r] es la distancia del centro de la esfera al punto [audio ininteligible] desde el punto este hasta, no sé, equis [x]

Investigador: Ajá.

Claudia: Es pe-erre [$\rho(r)$] es igual [audio ininteligible, mientras escribe la expresión dada en el problema para la densidad: $\rho(r) = 1/(1 + r^3)$]

Claudia: En donde todos los que estén así [pausa mientras traza una circunferencia dentro de la circunferencia que trazó para representar a la esfera]

Investigador: ¿A la misma distancia?

Claudia: A la misma distancia del origen, va a tener la misma densidad.

Investigador: Ajá, y quieres calcular [en tono de pregunta]

Claudia: La masa, … la masa.

Investigador: En ese caso, cómo la calculas.

Claudia: Es, densidad por volumen.

Investigador: Okay. Ajá.

Claudia: Y la densidad, es uno entre uno más erre, cúbica [$\rho(r) = 1/(1 + r^3)$]. Y pues el de-ve [dV] es lo, de-ve [dV] era [pausa]

Investigador: Aquí está la fórmula de volumen, para la esfera es ésta, mira.

Claudia: Ajá. [pausa] Sí, pero el [pausa], la Integral era [pausa], bueno. [inmediatamente después escribe en la hoja el modelo que utilizará como base para calcular la masa: $m = \int \rho \cdot dV$]

Investigador: Okay. Ése es el volumen de una esfera, eh.

Claudia: Sí, sí, de toda la esfera.

Investigador: Ajá.

Claudia: Ajá. Pero para sacar la Integral [con voz baja, como hablando para sí misma] [pausa] erre [r] es [pausa] [audio ininteligible]… Ese es el de una parte infinitamente pequeña.

Investigador: Ajá. Digamos, infinitamente gruesa, ¿no?

Claudia: Bueno, sí, gruesa, porque es así [mientras indica un grosor con los dedos de su mano]

Claudia: [audio ininteligible], y luego aparte tengo erre [r], pero erre [r] es [pausa], o sea, erre [r], erre [r] sería, si quiero sacar [refiriéndose a calcular] esta erre [r] sería, equis de-equis menos equis [$r = x + dx - x$] o sea, es de-equis [$r = dx$]. O sea erre es de-equis [$r = dx$, repite su argumento]

Investigador: ¿Por qué es de-equis [dx] ahí erre [r]? ¿Cómo calculas [interrumpe]? O ¿qué representa erre [r] en tu problema?

Claudia: O sea, erre [r] representa [pausa], es que es la distancia del centro [pausa] hasta el punto considerado. Pero si quiero sacar la parte infinitamente pequeña [pausa], O sea, no, no, [pausa], pues sería, [interrumpe] pues digamos que esta erre grande [R] menos esta erre [r] pequeñita.

Investigador: Okay. Entonces, para este punto de aquí, ¿cuál sería erre [r]?

Claudia: Pues, equis [x], aquí sería equis [x], y esta erre grande [R] es equis más de-equis [$R = x + dx$].

Investigador: Okay, okay. Y aquí encontraste digamos el diferencial de volumen, la diferencia del volumen de la esfera de afuera menos la de adentro. Está bien, okay. Entonces aquí en lugar de erre [r] ¿qué iría?

Claudia: Iría, pues equis más de-equis menos equis [$x + dx - x$]

Investigador: ¿Y eso cuánto vale?

Claudia: De-equis [dx]

Investigador: Okay. [pausa mientras Claudia escribe el procedimiento en la hoja].

Claudia: Pero, [pausa] los puntos de los que son, [pausa] … los límites.

Investigador : Bueno, perdóname, aquí deberías considerar una esfera de radio cinco [$r = 5$]. … eso no, no lo puse, ¿verdad?, es un dato faltante. Okay.

Claudia: O sea, sería, pues de cero a cinco [refiriéndose a los límites de la Integral Definida]

Investigador: Okay. [pausa] Hasta ahí queda, ¿no?

Claudia: Sí, supongo. [risas]

Investigador: Okay, gracias.

Fragmentos de la entrevista a Ernesto (en donde aborda del primer problema)

Ernesto: A ver. Dice, establece una Integral con la cual calcular el valor exacto del área de la superficie que se obtiene al girar alrededor del eje equis [x] [traza sobre el papel dos líneas para indicar los ejes coordenados]. La parte de la gráfica yé igual a equis cúbica [$y = x^3$], determina [hablando en voz muy baja] los puntos [no menciona en voz alta lo siguiente.]

Ernesto: Si tuviera las rúbricas con las que lo hacemos [audio ininteligible a causa de que interrumpe el investigador]

Investigador: Aquí está la rúbrica [apuntando a la hoja impresa], o [pausa]

Ernesto: Sí, o, ¿cómo se llama? Formulario.

Investigador: Podemos buscar, mira, ahí está la del cono truncado, y la de la esfera [refiriéndose a las fórmulas para calcular cualidades de esos cuerpos geométricos]; si quieres busco la del trapecio si la necesitas.

Ernesto: Es la un cono truncado.

Investigador: Okay. Mira aquí está. [pausa] Ésta es el área lateral, y el área total es ésta. Entonces, no sé cuál quieres utilizar; el área lateral sí sabes cuál es, ¿verdad? nada más la de [pausa, mientras hace una seña indicando la forma del cono truncado], la inclinada, por así decirlo, ¿no? [pausa mientras Ernesto escribe] ¿Sí alcanzas a ver?

Ernesto: Sí. [empieza a escribir en la hoja, empieza a intentar ver cómo es que lo va a resolver]

Ernesto: Pues aquí, lo primero que la ese [s], pues es la [pausa], ¿cómo se llama? El perime [no dice completa la palabra “perímetro”], lo de la curva, cuando lo vimos, este

Investigador: Ajá, la longitud de arco [interrumpe a Ernesto]

Ernesto: La longitud de arco [asentando con la cabeza], entonces, ya con eso ya sacamos esa mag [no dice completa la palabra “magnitud”], ya me la mem [corta la palabra], con lo que vimos con el profesor, era, raíz de uno más efe-prima de equis al cuadrado [menciona la fórmula para calcular el diferencial de arco, pero de manera incompleta: $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$]

Ernesto: Y entonces, pues aquí tenemos, efe de equis es equis cúbica, equis al cubo [$f(x) = x^3$] entonces, la derivamos y te da tres equis cuadrada [$f'(x) = 3x^2$].

Ernesto: Y entonces,… tres equis cuadrada lo tenemos que elevar al cuadrado [$(3x^2)^2$], te da, nueve equis cuarta [$9x^4$], y con esto [señalando la fórmula] ya sacamos la longitud de arco.

Ernesto: Entonces, este ya es una constante que es π y tenemos que buscar la sumatoria de las, del cambio, entonces, prácticamente, [pausa] erre-dos tendría que ser efe de equis más de-equis [$r_2 = f(x+dx)$]; efe de equis más de-equis [repite mientras escribe la expresión $f(x+dx)$] y éste [refiriéndose al valor correspondiente a r_1 en la fórmula para calcular el área lateral del cono truncado] sería más efe de equis [$f(x)$], para sacar estos puntos, las alturas.

Ernesto: Y entonces, ya, si resolvemos esto [refiriéndose a $\pi\sqrt{1+9x^4} \cdot \big(f(x+dx)+f(x)\big)dx$] y luego lo integramos nos daría el resultado. Tendría que ser [audio ininiteligible]… Efe de equis más de-equis [$f(x+dx)$], [audio ininteligible mientras piensa cómo desarrollar el producto indicado en la expresión que obtuvo]. Y este se va por postulado, pues como es infinitamente pequeño [se refiere a un término que involucra a un múltiplo de dx^2, pero aún sin realizar la multiplicación], no va a afectar en la solución. Entonces, pues este te queda, dos efe de equis [$2f(x)$], tendría que ser, [audio ininteligible]. Efe de equis ya tenemos que es equis cúbica [$f(x) = x^3$]. Y entonces, pues este ya lo sacamos de la Integral, el dos π [2π]. Entonces tenemos que integrar esto, [pausa] y al integrar esto, te daría el resultado.

Fragmentos de la entrevista a Ernesto (en donde aborda del segundo problema)

Ernesto: “Bueno, como dicen que es una lámina, supongo que ha de ser área. … Entonces, aquí tenemos una lámina [pausa] y se tienen, cuadrada, diez centímetros de aquí y aca diez centímetros. La masa de la lámina está distribuida de manera tal que la densidad en cada uno de sus puntos es igual a equis [x], gramos por centímetros al cuadrado, donde equis [x] es la distancia del punto al lado más cercano.”

Ernesto: “Sabemos que la densidad debe ser más densa siempre en el centro; entonces, aquí sabemos que aquí es equis [x] porque dice ‘la distancia del punto al lado más cercano’; entonces, pues de aquí a aquí hay equis [x] de aquí a acá hay equis [x], de aquí a aquí hay equis [x], de aquí a acá hay equis [x].”

Investigador: “Okay.”

Ernesto: “La fórmula del área era, efe de equis de-equis [$f(x) \cdot dx$], [pausa] y la masa de la lámina está distribuida de tal manera que la densidad de cada uno de sus puntos es igual a equis [x] gramos por centímetro cuadrado. O sea, aquí la densidad, [pausa] debería cambiar, entonces, aquí hay cinco [señalando la longitud de la mitad de un lado de la lámina], entonces, de cero a cinco es su máximo.”

Investigador: “Okay. ¿Ahí cómo pusiste el eje equis? [x] O, ¿cómo mides?”

Ernesto: “Aquí es equis [x, señalando el eje horizontal dibujado a la mitad de la lámina], aquí es equis [x] y yé [y], entonces, pues lo que va a ir variando es, la densidad que se supone que”

Investigador: “A lo largo de ese eje [interrumpe a Ernesto]”

Ernesto: “Ajá, pero como están haciendo el cuadrado, va a ir cambiando la densidad respecto al área. Entonces, aquí tenemos que sacar la, [pausa] la diferencial de, densidad. No va a ser respecto nada más a equis [x], sino también va a ser al área de, del cuadrado.”

Investigador: Okay.

Ernesto: “Por eso puse efe de equis [$f(x)$], entonces, el diferencial de, de ¿cómo se llama?, de área, va a ir cambiando respecto [pausa] pues la fórmula del cuadrado debe ser [con voz muy baja, luego hace una pausa]… lo que aquí tengo es la densidad del origen a este punto.”

Investigador: Sobre un eje, digamos.

Ernesto : “Ajá, como si nada más estuviera sacando la densidad lineal, y nosotros queremos la densidad de área, de este cuadrado. Por lo que aquí vemos que este va a cambiar [en voz baja], o sea, éste es infinitamente pequeño y este también, entonces, tenemos que sacar, [interrumpe su argumento para pensar], no sé si quedaría elevarlo al cuadrado, porque pues es un cuadrado.”

Investigador: “Ajá. Bueno. ¿Cómo divides ahí para poder hacer el cálculo de la masa?”

Ernesto: “Es que has de cuenta que aquí nada más lo que estamos integrando sería efe de equis [$f(x)$], que sería el cambio de la diferencial en equis del área [$\int \rho(x) \cdot f(x) \cdot dx$], de aquí, y el cambio de la densidad en estos puntos, entonces, nada más estamos integrando un lado y no todo [él está pensando que solamente obtiene la masa de una parte de la placa].”

Fragmentos de la entrevista a Ernesto (en donde aborda del tercer problema)

Ernesto: Entonces, pues pongo igual, [pausa] la densidad es mayor en el centro [con tono de pregunta al investigador, pausa esperando una respuesta], porque aquí te dice la masa de una esfera se distribuye de manera que su densidad en cada uno de sus puntos es ro [ρ], o sea, en cada uno de sus puntos.

Investigador: Está bien. [pausa] Sí. Ajá.

Ernesto: Donde erre [r] es la distancia al centro. [pausa, mirando la hoja en la que está escribiendo], entonces aquí, también va a ir cambiando. [pausa mientras lee] [audio ininteligible]

Ernesto : Ajá, erre [r], pues aquí está la distancia al centro, ¿no? [pausa] Entonces, aquí como va a ir variando es ro, de erre [$\rho(r)$] es igual a uno entre uno, y lo que cambia es erre [r], entonces, pues es la distancia, esto es lo que va a ir variando.

Ernesto: Y entonces, erre [r] va a ir cambiando respecto, lo vamos a tomar este como si fuera el eje equis [x]

Ernesto: Ajá. Entonces, sería, cuando sea cinco, se supone que la densidad es una, [audio ininteligible], entonces sería cinco menos equis al cubo [$\rho(x) = (5 - x)^3$], por la fórmula de volumen, por la fórmula del volumen, porque densidad volumétrica es densidad por el volumen de la esfera

Investigador: Mira, aquí está el volumen de la esfera; [pausa] cuatro tercios de π por radio al cubo. [pausa, esperando que Ernesto continue argumentando] Ése es el volumen, no, no el área, volumen.

Ernesto: Sí, sí, sí. [audio ininteligible]

Ernesto: […] pues el radio, es el que va variando. Esto es (¿cómo se llama?) lo que va a ir variando

Investigador: Ajá. ¿Éste qué sería? Esto que calculaste aquí, ¿qué sería?

Ernesto: Es que este es el volumen de la esfera, o sea, lo que vale el volumen de la esfera.

Investigador: Ajá.

Ernesto: Entonces, [enseguida lee de la hoja] la masa de una esfera se distribuye de tal manera que su densidad en cada uno de sus puntos [pausa], o sea, esta es la densidad por el, (¿cómo se llama?) por el volumen de la esfera,

Ernesto: pero por ejemplo, aquí cuando, aquí la diferencia es que aquí es área [refiriéndose al problema previo] y aquí es volumen [refiriéndose al problema que actualmente intenta resolver]

Investigador: Okay, okay.

Ernesto: Aquí, en este punto es la densidad de [pausa], del volumen de la esfera, y aquí me falta calcular cómo es el cálculo del volumen, de (¿cómo se llama?), general, general; por ejemplo, aquí esto es una que ya teníamos, que habíamos sacado, que era efe de equis [$f(x)$], por ejemplo, la lineal es, raíz de uno más efe-prima de equis al cuadrado, de-equis [$\sqrt{1+[f'(x)]^2} \cdot dx$], y entonces, aquí,

Investigador: Ajá [Interrumpiendo a Ernesto], ahorita lo que quieres es como el diferencial para calcular el volumen de un sólido. Okay, okay.

Ernesto: Ajá. Que no me acuerdo cuál es.

Ernesto: Por ejemplo aquí, son casos invertidos; aquí ya tenemos el diferencial [refiriéndose al problema previo], pero nos falta sacar la, de densidad; y aquí ya tenemos el de densidad [pausa]

Investigador: Pero falta el volumen [completando la frase de Ernesto]. Okay. Este, ¿sabes cómo hacer la partición para [pausa]? O sea, si sigues la rúbrica, ¿cómo harías la partición de la esfera para poder calcular el volumen o la masa?

Ernesto: [audio ininteligible] pues esta parte,

Investigador: ¿En que te basas para decidir cómo hacer la partición?

Ernesto: Para decidirlo, prácticamente tengo que, eh, poner bien dónde va a ser mi origen, porque el origen es donde voy a hacer la partición, hacia dónde la voy a realizar. Entonces, tengo que checar desde qué punto hasta qué punto voy a realizar la partición, o sea delimitarlos, se podría decir.

Investigador: Okay

Ernesto: Después, el diferencial de equis [dx], es como lo que se toma, que es lo que va a ser infinitamente pequeño; y después se calcula la fórmula que tendríamos, por ejemplo, aquí en el primero que me habías dado, era equis cúbica [x^3], ¿no?, y entonces, ese equis cúbica podríamos sacar en cero cuál es (este) su valor, y después (este) en el otro punto, cuál es su valor. Y entonces ahí ya podríamos tener como que la altura hasta dónde se va a realizar.

Investigador: Como los límites.

Ernesto: Ajá, los límites. Y entonces, pues lo que se va a querer, es la integración, o tener la fórmula para integración de esa parte. Entonces, como que vamos a ir infinitamente pequeño integrando de esa parte a esa parte [refiriéndose a los límites de integración] y tendríamos la sumatoria completa.

Investigador: Okay, okay. [pausa] Entonces, aquí cómo le harías para hacer la partición de la esfera, para que puedas calcular la masa.

Ernesto: [mientras le hablaba el investigador sigue concentrado en el procedimiento que estaba realizando desde antes], este es cero, pero [pausa] déjame ver si me acuerdo [pausa]. Es que aquí [refiriéndose al problema actual] no tengo efe de equis [f(x)] como aquí [refiriéndose al problema previo], ¿me entiendes?

Investigador: Ajá, por eso, bueno. Aquí, éste [señalando algo en la hoja en donde Ernesto está resolviendo el problema] vendría siendo digamos la, la función, pero no tienes una de una gráfica, si a eso te refieres.

Ernesto: Sí, exactamente. Aquí tengo la función de densidad.

Ernesto: [sigue intentando resolver el problema] Dos equis [$2x$] [pausa mientras sigue pensando] Este me lo voy a, me voy a pasar mejor al segundo [refiriéndose al problema del cálculo de la masa de la placa cuadrada de 10 centímetros de lado].

Investigador: Okay, okay, está bien.

Curriculum vitae

Efraín Soto Apolinar

Correo electrónico personal: *efrain@aprendematematicas.org.mx*

Registro CVU (CONACYT): 254171

Originario de Cerro Azul, Veracruz, México, Efraín Soto Apolinar realizó sus estudios profesionales en Ingeniería en Sistemas de Energía en la Universidad de Quintana Roo y de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas en la Universidad Autónoma de Nuevo León. La investigación titulada "Significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en una Institución de Nivel Superior" es la que presenta en este documento para aspirar al grado de Doctor en Innovación Educativa. Su experiencia de trabajo ha girado principalmente en el campo de la educación, específicamente en la enseñanza de las matemáticas desde hace doce años. Asimismo ha publicado libros de matemáticas para bachillerato, y también ha participado en iniciativas de divulgación de las matemáticas a través de Internet.

Actualmente, Efraín Soto Apolinar funge como asistente de investigación en el Departamento de Matemáticas del Tecnológico de Monterrey campus Monterrey. Como parte de su labor de divulgación, diseña materiales didácticos para la enseñanza de las ciencias exactas.