TESIS DOCTORAL

2016

TULIO RAFAEL AMAYA DE ARMAS
Magister en innovación e investigación en educación

Doctorado en Innovación e Investigación en Didáctica

Departamento de Didáctica
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Director:
ANTONIO MEDINA RIVILLA

Departamento de Didáctica
Facultad de Educación
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL HACER TRANSFORMACIONES DE LAS REPRESENTACIONES DE UNA FUNCIÓN

Autor: **TULIO RAFAEL AMAYA DE ARMAS**

Magister en innovación e investigación en educación

Director:

ANTONIO MEDINA RIVILLA

Agradecimientos

En primer lugar agradecer a Dios por darme la vida, las fuerzas y la voluntad para realizar mis estudios doctorales.

A mi esposa Norelys Ester Vidal Durango por su apoyo incondicional y por concederme sus espacios para poderlos dedicar a mis estudios y por su apoyo en los momentos difíciles.

A mis hijos Jean Emir, Eva Felicia, Tulio Andrés, Keysa Luz e Iriana María por concederme sus espacios para poderlos dedicar a mis estudios.

A los 56 estudiantes del programa Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, quienes incondicionalmente aportaron la información para el desarrollo de este trabajo.

A mi director de tesis el doctor Antonio Medina Rivilla por su apoyo y sus ánimos para ayudarme a salir adelante.

Al doctor Juan Godino de la Universidad de Granada, España y al doctor Luis Pino-Fan de la Universidad de Los Lagos, Chile por sus amables asesorías para enrumbar mi trabajo.

A los directivos docentes de la Institución educativa Madre Amalia y de la secretaría de Educación municipal de Sincelejo, por facilitarme los espacios para asistir a las evaluaciones programadas por la Uned.

A Margarita Medrano Hernández y a Jesús López de la Iglesia por su amable colaboración y diligencias con documentos de apoyo.

A mis amigos, quienes pacientemente esperaron por mis interminables encierros, sobre todo a aquellos que siempre buscaron colaborarme incondicionalmente.

A todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron en el desarrollo de mi formación doctoral.

Tulio A.

Dedico mi tesis a:

Mis padres: Luis Carlos y Eva Felicia y a mi hermano Maximiliano

Quienes desde el cielo, siempre me acompañan y orientan

En cada cosa que hago y

Por donde quiera voy.

Mi esposa Norelis y mis hijos

Jean, Eva, Tulio, Keysa e Iriana

por ser los motores de mi vida,

por estar siempre ahí,

aunque yo no estuviera en casa y, aun estando.

Tulio A.

Resumen

En este trabajo evaluó la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, de la Universidad de Sucre al hacer transformaciones de las representaciones de una función. El marco teórico tiene sus fundamentos en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) propuesto por Godino (2009). La investigación se enmarca dentro de un enfoque metodológico mixto (Creswell, 2009) puesto que en ella se combinan técnicas y métodos de investigación cuantitativos y cualitativos. Se tomó una muestra intencional de 56 profesores en formación, de los que se recogió información durante cuatro semestres consecutivos: 28 de semestres intermedios y 28 de los semestres finales.

Para analizar la información se hizo un análisis comparativo de medias y se analizaron las asociaciones entre las respuestas dadas por los estudiantes con el nivel del que éstas provinieran, utilizando tablas de contingencias y el coeficiente chi cuadrado de Pearson, y se caracterizaron las configuraciones cognitivas, procesos y elementos matemáticos primarios que emergen de los profesores en formación al dar sus respuestas a los diferentes ítems/tareas del cuestionario, las cuales fueron analizadas utilizando la noción de *configuración onto-semiótica* propuesta por Pino-Fan, Godino y Font (2015).

En los participantes se encontraron rasgos distintivos del conocimiento común del contenido; mientras las configuraciones cognitivas, procesos y elementos matemáticos primarios encontrados son pobres y ligeramente heterogéneas entre grupos. Un grupo reducido mostró evidencias distintivas los conocimientos ampliado y el especializado del contenido y en otro más amplio se encontraron serias limitaciones en la producción de representaciones de una función, para establecer congruencias entre sus elementos y para decidir sobre la pertinencia procedimental (Sgreccia y Massa, 2012) y emparejar los elementos equivalentes en las diferentes representaciones, evidenciándose la necesidad de fortalecer dichos conocimientos. Además, se visionan algunas cuestiones abiertas que permitan continuar en esta línea de investigación, así mismo algunos aspectos que posibilitarían mejorar los conocimientos didácticos matemáticos del objeto función.

Tabla de contenido

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN GENERAL

Uno de los principales retos de la enseñanza es que el que aprende sea capaz de conectar lo aprendido con la realidad, de tal forma que pueda usar y compartir socialmente su saber. El profesor en su quehacer debe estar preparado y dar todo de sí para ayudar a los estudiantes a lograrlo, de tal forma que se provean condiciones óptimas para que ese aprendizaje tenga las mayores probabilidades de éxito. Por lo que en primera instancia, es el profesor el llamado a tener una formación idónea, adaptable a las constantes variaciones sociales, es decir, que esté abierto a aprender siempre, con cierta flexibilidad pero a la vez con autonomía, consciente de que de su formación depende en gran medida la formación de las personas que orienta.

Lo anterior en razón a que la rapidez de cambio de la sociedad, en estas últimas décadas, ha hecho que los conocimientos se rezaguen ante las necesidades planteadas por la sociedad (Unesco, 2008) y que casi al momento de recibirlos ya estén obsoletos o que sencillamente no se hayan desarrollado competencias en los educadores, que les permitan adaptarse a situaciones nuevas que les ofrece el contexto sociocultural donde desarrollan sus prácticas profesionales. Por esta razón, sería deseable privilegiar en los profesores en formación la potenciación del desarrollo de habilidades de pensamiento o trabajar procesos que involucren la resolución y formulación de problemas que les permita el desarrollo de competencias perdurables en el tiempo, que se puedan adaptar a diversas situaciones de su quehacer cotidiano.

Además, siendo el nivel educativo el rasgo que mejor representa una sociedad, y la escuela la responsable tradicional de la educación de los miembros de la sociedad, en compañía de los demás entes educadores, debe enseñar en la vida y para la vida, de forma que los individuos de su comunidad adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender (Parcerisa, 2004), para que puedan hacerlo continua y sistemáticamente, ganando autonomía propia, conformando sus propios saberes de forma que sean capaces de poder aprender permanentemente y así, adquirir nuevos patrones de conocimiento según la demanda, que por su velocidad extrema exige la sociedad actual. Por lo que las personas que orientan estos procesos, deben tener las habilidades y competencias necesarias y suficientes para orientarlos adecuadamente.

En particular en la enseñanza de las funciones es común estudiar varios de sus elementos conjuntamente, y este análisis de covarianza resulta problemático (Nájera, 2008), tanto para estudiantes como para algunos profesores, quienes prefieren privilegiar el trabajo procedimental frente al conceptual, tratando quizás de disimular sus propias dificultades de comprensión del concepto. Dificultades que se muestran como obstáculos al momento de adquirir, tanto el concepto de función, como el de variación y cambio, los cuales son fundamentales en el trabajo con dicho concepto, que de no concebirse de manera adecuada, podría configurarse en obstáculo en la comprensión de conceptos como el de límite, derivadas o integrales de funciones, ya que el trabajo con este tipo de situaciones llenan de sentido al álgebra y las expresiones algebraicas, por ser el cálculo un dominio donde la actividad matemática se apoya en gran medida en las competencias algebraicas, donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de prácticas algebraicas para acceder a él (Albert, 1997). Lo que unido al hecho de estar acostumbrados a razonar en lo posible por equivalencias sucesivas e intentar pasar a razonamientos por condiciones suficientes, provoca cierta incomodidad en los estudiantes (Cordero, 1997) y en profesores de matemáticas quienes prefieren mejor no abordar la enseñanza del cálculo desde este punto de vista; prefiriendo así privilegiar el trabajo procedimental sin un análisis reflexivo, ante el conceptual, sacrificando de paso, la posibilidad del acceso al cálculo.

Además, el trabajo con situaciones contextualizadas, aparece como una alternativa para el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación permitiendo relacionar elementos de registros como el tabular, gráfico, icónico y algebraico, y “asignarle significado y sentido a cada una de estas representaciones en relación con las otras, así como el tránsito al interior de un mismo sistema de representación” (Amaya y Gulfo, 2009, p. 898).

No obstante, los ambientes donde se trabaja con funciones brindan una gran oportunidad para explorar diferentes representaciones del mismo objeto en un mismo ambiente y así facilitar el estudio con sentido de las funciones. Pero la falta de asociación por parte de los estudiantes, de objetos de aprendizaje con elementos socioculturales, indican falta de comprensión de este concepto (Meel, 2003), lo que según Duval (2004) es problemático, ya que no hay otro medio de acceso a los objetos matemáticos, sino es a través del estudio de sus diferentes representaciones semióticas.

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo. Han sido muy fecundas las producciones tratando de indagar sobre los conocimientos matemáticos que debe dominar un profesor para enseñar las matemáticas eficientemente. Pino-Fan y Godino (2015, p.2) consideran que entre las principales problemáticas por las cuales se han interesado tanto "investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas, está relacionada con la determinación del conglomerado de conocimientos, matemáticos y didácticos, que un profesor de matemáticas debería tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más idónea posible". Y considerando lo anterior, el interés en este trabajo se ha centrado esencialmente en la identificación de los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los profesores en formación del programa para enseñar eficientemente las matemáticas, en razón de que la enculturación matemática de niños y jóvenes de las comunidades dependen en gran medida de las habilidades y competencias para enseñar, de las personas que los orientan.

En este sentido, han sido muchos los trabajos orientados a identificar los conocimientos matemáticos que debe tener un profesor para enseñar las matemáticas, de forma que a sus estudiantes se les facilite el aprendizaje, entre ellos se pueden destacar los trabajos de Shulman y sus colaboradores (Grossman, 1990); Grossman, Wilson y Shulman, 2005; Gudmundsdóttir y Shulman, 2005), continuada por Ball y sus colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2004; Stylianides y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), y por Godino y sus colaboradores (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2009; Godino, Rivas y Arteaga, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015). Como resultado de estos trabajos no se ha llegado a un consenso sobre un marco teórico que caracterice dichos conocimientos (Godino, 2009), pero si se han formulado diversos modelos que han hecho aportes significativos a su caracterización; uno de ellos es el propuesto por Godino (2009), denominado Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM), donde se establece por primera vez un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas, y el que se toma como guía para la el análisis y la caracterización de los elementos matemáticos aportados por los profesores en formación evaluados en este estudio.

En este trabajo el interés es continuar avanzando en la caracterización de los conocimientos que requieren futuros profesores de matemáticas de educación básica y media, respecto a la enseñanza de las matemáticas y específicamente de las funciones, como una noción clave en la enseñanza del Cálculo. El objetivo de este trabajo fue evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función, y utilizarlo como andamio para formular planes de mejoras que permitan el desarrollo y la potenciación del conocimiento didáctico-matemático requerido para la enseñanza de las matemáticas y en especial de las funciones.

En esta investigación se evaluó, acompañó y registró el proceso de formación de 56 estudiantes del programa Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, al hacer transformaciones de las representaciones de las funciones involucradas en las situaciones que se les presentaron. El trabajo se basó en cuatro momentos fundamentales: 1) fundamentación de la investigación, 2) implementación del cuestionario diagnóstico, 3) evaluación del proceso formativo y 4) Implementación del cuestionario final. La fundamentación consistió en una revisión juiciosa de material relacionado con funciones, tanto investigaciones previas, reportes documentales y teorías relacionadas con funciones. La fundamentación sirvió de base para construir los cuestionarios diagnósticos y final, en los cuales se les pedía a los profesores en formación hacer transformaciones tipo conversión y/o tipo tratamiento entre diferentes registros semióticos de representación de una función (Amaya y Medina, 2013). La evaluación del proceso formativo de los futuros profesores se inició discutiendo la solución al cuestionario diagnóstico, se observaron, discutieron y prepararon clases, se analizaban posibles dificultades con la solución de las tareas que se planeaban para proponer a los estudiantes a los que está dirigida la clase, se observaban clases, se analizaban, se simulaban ante sus compañeros de carrera con la misma situación, y luego se desarrollaba la clase ante estudiantes de la media académica: esta clase era vista por otros compañeros con los que se discutía, en un momento posterior a la clase. Así mismo, se realizaba un seguimiento al acto evaluativo y a lo que hacen con los resultados de la evaluación. La evaluación se fundamentó en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), propuesto por Godino (2009) y se les evalúa específicamente la faceta epistémica del CDM.

La memoria de la tesis que se reporta se ha estructurado en 5 capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación: en el primer capítulo se presenta una contextualización del estudio y algunos de sus antecedentes. En la contextualización se describen los fundamentos del lenguaje matemático, como son los conceptos matemáticos, los signos y las representaciones semióticas de un objeto matemático, la relación entre noesis y semiosis. Se hace un recorrido histórico sobre la evolución del concepto de función, sobre sus diferentes acepciones y generalizaciones y de las configuraciones epistémicas que se han manejado a través de la historia y los que aún se manejan de las funciones y de las relaciones funcionales. En los antecedentes se presenta un panorama de las investigaciones en educación matemática en tres líneas: 1) Trabajos sobre el conocimiento de los profesores necesario para la enseñanza de las matemáticas; 2) Trabajos sobre a las dificultades a que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en la enseñanza y aprendizaje de las funciones; y 3) Trabajos sobre los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores sobre la enseñanza de las funciones. Y finalmente se presenta el contexto educativo donde se forman los futuros profesores.

El segundo capítulo se presenta el estado del arte sobre el conocimiento didáctico-matemático de los profesores, esto es, se presentan los antecedentes del Modelo del Conocimiento Didáctico-matemático (Godino, 2009) y se describe el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático y finalmente se hacen algunas consideraciones didácticas. En el tercer capítulo se presenta el problema de investigación y la metodología utilizada en el estudio. Se comienza haciendo la descripción del problema y se presentan las preguntas de investigación orientadoras del proceso y los objetivos. Luego en la metodología se describe el tipo de estudio, las fases de la investigación, se describe la muestra de informantes, la forma en que se recogió la información, las modalidades de aplicación de los instrumentos, los instrumentos utilizados para recoger la información y finalmente el tratamiento que se le da a la información.

En el capítulo 4 se presentan los resultados y su análisis. Se inicia con el análisis de la implementación del cuestionario diagnóstico: en el cual se hace un análisis cualitativo y otro cualitativo de la información recogida. En el análisis cuantitativo se analizan los resultados de un análisis de varianzas al comparar las calificaciones medias de los estudiantes de los dos grupos, se presentan los resultados del análisis de asociación entre las respuestas dadas por los profesores en formación a cada ítem, con el grupo de donde estas provinieran, para lo que se utilizaron tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson. El análisis cualitativo se hace para cada dimensión: la dimensión matemática y la dimensión didáctica. En la dimensión matemática se analiza cada bub-categoría (el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido) por separado, y al interior de cada bub-categoría el análisis se hace atendiendo las categorías de análisis al construir el cuestionario y también se analizan las configuraciones, procesos y objetos primarios utilizados por los futuros profesores al aportar sus respuestas. En la dimensión didáctica se analiza, para cada categoría de análisis la cuestión por la que se indaga y en ella las configuraciones, procesos y objetos primarios utilizados por los futuros profesores al aportar sus respuestas.

Posteriormente se analiza el seguimiento a la evolución del proceso formativo de los futuros profesores de matemáticas. Se inició con la presentación del análisis del cuestionario diagnóstico, para el cual se les entregó una guía de análisis. Luego se analiza la reconstrucción que los futuros profesores hacen de un cuestionario, dadas las respuestas a éste y se analizan los resultados del análisis de las respuestas a dicho cuestionario y posteriormente se presenta el análisis de algunos eventos de clases (la fundamentación del tema, los planes de clase y la ejecución de la clase ante estudiantes del bachillerato.

Finalmente se presentan los resultados de la implementación del cuestionario final. Los resultados del cuestionario final se presentan con la misma estructura de cuestionario diagnóstico, es decir, por dimensión. En la dimensión matemática un análisis cuantitativo donde se analizan los resultados de un análisis de varianzas al comparar las calificaciones medias de los estudiantes de los dos grupos, el análisis de las tablas de contingencia con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson para medir las asociaciones entre las respuestas dadas por los profesores en formación a cada ítem, con el grupo de donde estas provinieran. El análisis cualitativo también se hizo para cada dimensión. En la dimensión matemática se analiza cada bub-categoría por separado, y al interior de cada bub-categoría el análisis se hace atendiendo las categorías de análisis al construir el cuestionario y también se analizan las configuraciones, procesos y objetos primarios utilizados por los futuros profesores al aportar sus respuestas. En la dimensión didáctica se analiza, para cada categoría de análisis la cuestión por la que se indaga y en ella las configuraciones, procesos y objetos primarios utilizados por los futuros profesores al aportar sus respuestas.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones, cuestiones abiertas, la propuesta de mejora de los conocimientos de los profesores que egresen de este programa y las principales aportaciones hechas por el autor a la comunidad de educadores e investigadores de educación matemáticas. Entre las principales aportaciones hechas por el autor de este trabajo a la comunidad de investigadores y educadores matemáticos se pueden destacar: el tipo de situaciones utilizadas para recoger la información, el análisis de las dificultades de estudiantes de bachillerato y de los profesores en formación al resolver dichas situaciones, la forma misma de recoger la información, los conflictos epistémicos que lograron aislarse, los artículos en revistas indexadas y los extensos en memorias de eventos tanto nacionales, como internacionales que se presentan al final de esta memoria. Y al final se encuentran las referencias bibliográficas y los anexos.

CAPITULO 1

1 CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO Y ANTECEDENTES

1.1 CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

El interés de este trabajo es conocer el estado de los conocimientos didácticos-matemáticos, en su faceta epistémica, de futuros profesores de matemáticas para la enseñanza de las funciones. Y teniendo en cuenta lo expresado por Cárdenas (2014) respecto a la evaluación en matemáticas “la evaluación debe ser el informe comprensivo del funcionamiento de un sujeto o grupo respecto a la matemática o a la aplicación de la matemática”. Por lo que en este trabajo se evalúan los conocimientos didáctico-matemáticos de dos grupos de profesores en formación y del funcionamiento de sus saberes para enseñar matemáticas a estudiantes de la básica y media académica.

1.1.1 Los conceptos, los signos y las representaciones de un objeto.

1.1.1.1 Los conceptos matemáticos

Sfard (1991, citado por Meel, 2003) define **un concepto** como una idea oficial definida matemáticamente en la que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos ocurridos en la mente del estudiante, causados por el concepto. Meel (2003) por su parte, presenta la construcción de los conceptos matemáticos considerando que su fabricación corresponde al nacimiento de una metáfora que lleva al objeto matemático a ser y, por lo tanto, a intensificar la comprensión del estudiante sobre el universo matemático.

Esta relación entre conceptos matemáticos y la forma de acceder a ellos ha sido motivo de preocupación entre educadores matemáticos e investigadores en didáctica de las matemáticas. Según Douady (1986), para una persona un concepto matemático tiene estatus de **herramienta,** de **objeto** o de **instrumento**. El carácter que tenga un concepto para una persona va a depender del uso que ésta le dé y, del posicionamiento que logre en la comunidad que lo usa. Un concepto se considera un objeto si tiene un lugar dentro del conocimiento matemático socialmente aceptado, es decir, si se ha convenido en la comunidad que lo usa asignarle un significado matemático. Un concepto se considera una herramienta si se hace uso de él para establecer relaciones entre objetos matemáticos al resolver un problema. Dichas herramientas pueden ser implícitas si el estudiante no puede formularlas explícitamente, aunque las pueda utilizar en la resolución de un problema, o ser explícitas si, además de poderlas formular, también puede justificar su uso. Douady dice que un concepto tiene carácter de instrumento cuando pone en juego las relaciones que mantiene con otros objetos implicados en un mismo problema. Pero este es el estatus de las herramientas, porque un instrumento además, dinamiza armónicamente herramientas y objetos hasta facilitar la solución del problema. Un instrumento integra la dualidad herramienta-objeto a los procesos de pensamiento del estudiante en una práctica social; es decir, aporta elementos al crecimiento cognitivo y/o emocional o contribuye al desarrollo de un pensamiento crítico al individuo que los usa. Tiene este carácter si actúa en la persona haciendo cambios no previstos en su estructura de pensamiento, mejora por ejemplo, el razonamiento lógico de las personas, que de forma persistente acostumbran a usarlos. Un profesor usa un concepto como instrumento cuando es capaz de predecir dónde y cómo se pueden anticipar las comprensiones/incomprensiones y habilidades emergentes de los estudiantes; cuando anticipa las dificultades de comprensión y es capaz de provocarlas para luego ayudarlas a resolver, y utilizarlas para mejorar los procesos de aprendizaje o bien evitarlas, según se quiera desarrollar el trabajo con los estudiantes. Es precisamente su carácter de instrumento lo que hace que un concepto tome sentido para un sujeto.

Douady (1986, p.8) además, expresa algunas condiciones sobre los problemas para que ciertas relaciones del alumno con el problema estén aseguradas, y que la dialéctica instrumento-objeto y el juego de marcos sean posibles. Tales condiciones son las siguientes:

a) Que el enunciado tenga sentido en el campo de conocimientos del alumno. Esto es, que le facilite relacionarlo con algo conocido.

b) El alumno debe poder considerar lo que puede ser una respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o una validación de una proposición de respuesta. De no ser así, el alumno divagaría en los procedimientos tratando de resolver el problema, ya que no sabría cuando ha terminado.

c) Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede emprender un procedimiento. Pero la respuesta no es evidente. Esto quiere decir que no puede suministrar una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduzca a preguntas que no sabe responder inmediatamente.

d) El problema es rico. Lo que significa que la red de los conceptos implicados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda administrar su complejidad, sino solo, por lo menos en equipo o dentro de la colectividad clase.

e) El problema está abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantear o por la variedad de estrategias que puede poner en marcha y por la incertidumbre que se desprende con respecto al alumno.

Las condiciones c), d), e), eliminan un recorte del problema en preguntas demasiado pequeñas.

f) El problema puede formularse utilizando más de una representación del objeto estudiado, teniendo cada una su lenguaje y su sintaxis propios y cuyos significados constituyentes forman parte, parcialmente, del campo de conocimientos del alumno.

g) El conocimiento buscado por el aprendizaje es el medio científico de responder eficazmente al problema. Es un instrumento adaptado.

1.1.1.2 La Semiosis y las Noesis

Uno de los padres de la **semiosis** es Peirce (1974), quien la considera como cualquier actividad donde se produzcan representaciones por medio de signos. Y la semiótica es la disciplina que estudia los sistemas de signos, ligada a una intención comunicativa (Rojas, 2014). Peirce (1974) concibe el conocimiento como un proceso de significación con una estructura triádica fundamental, conformada por un objeto, un signo y un *interpretante*, o concepto en la mente del intérprete (Rodríguez, 2003). Según Peirce, un signo es una representación de algo, sea en su totalidad o solo en parte de ello; es un medio de transporte que lleva de afuera hacía adentro de la mente el ***objeto*** que representa**.** El signo tiene un carácter mediador ante la mente entre el concepto y el objeto, es determinante en la producción del conocimiento. Este último rasgo es denominado por Peirce **noesis**, objetivo fundamental de la semiótica. **Noesis** es todo acto cognitivo que permita la conceptualización de un objeto. Duval (1999) considera que la noesis no es posible sin la semiosis, lo que quiere decir que no hay acceso a los objetos matemáticos sino es a través de sus representaciones semióticas; lo que determina la importancia de estudiar las representaciones semióticas como único medio de acceso al conocimiento matemático.

Según Peirce (1974) para que una persona pueda representar un objeto matemático debe establecer fuertes conexiones entre los signos que utiliza para hacerlo y las mismas experiencias de las personas ya vienen semiotizadas, es decir, cualquier proceso con intención comunicativa lleva asociado, por naturaleza su sistema de signos. Además, cualquier representación de un objeto matemático en cualquier registro es un modelo del objeto. Y aunque no todas las representaciones contienen la misma información, hay información entre representaciones de un objeto en diferentes registros donde algunos elementos pueden coincidir, y en otros complementarse, al respecto Duval (2004) considera importante el recurso a varios registros para facilitar la comprensión del concepto estudiado.

1.1.2 Los registros semióticos de representación y las representaciones de un concepto matemático.

En algunos campos del conocimiento, el acceso a los objetos de estudio se puede hacer directamente por percepción o utilizando instrumentos. En matemática se hace exclusivamente a través del estudio de sus representaciones semióticas. Así, toda actividad matemática consiste en la transformación de dichas representaciones, es decir, las representaciones de los objetos matemáticos son producidas por la utilización de diferentes sistemas de representación (Duval, 2004). Pero hay que tener en cuenta que las representaciones no son los objetos en sí, sólo un medio que ayuda a su comprensión. Por lo que hay que distinguir entre el objeto matemático y sus representaciones para que pueda haber comprensión del objeto que se estudia. La interacción de los estudiantes con los objetos matemáticos, el conocimiento de sus reglas y la interacción entre pares en una práctica socialmente compartida, genera consenso entre los participantes y facilita la comprensión de los conceptos estudiados.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval, 2016). Según este autor, los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa como un sistema de símbolos utilizado para representar otro sistema de símbolos que exhibe una auto similitud cuando se amplifica (Meel. 2003), es decir, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones que entre ellas se puedan hacer, se pueden estructurar nuevas representaciones similares que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Para Duval (1999) un Sistema semiótico de representación: es un registro de representación si permite las siguientes actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

- La presencia de una representación identificable.
- El tratamiento de una representación que es la transformación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

En lo planteado por Duval (1999) se pueden entender los **registros semióticos de representación** como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan, y además, que cada uno de ellos tiene sus propias reglas. De la misma manera, establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación. Y que, un registro está constituido por signos tales como símbolos, iconos, puntos o trazos, es decir, son medios de representación semiótica**.** Además, transformar una representación semiótica quiere decir combinar los signos de un sistema de referencia, utilizando y respetando las reglas de significancia y de funcionamiento que son propias del registro que se esté utilizando.

Para Duval (2004) son prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones en/entre representaciones de un objeto matemático: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad entre los elementos de las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, donde se utilizan los signos y las reglas de significación de funcionamiento del registro, sin abandonarlo, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro, es decodificar los elementos de un registro y recodificarlo en otro, utilizando y respetando tanto los signos como las reglas del registro de partida, como los del registro de llegada o registro auxiliar.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o incongruente; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro, ya que hay elementos que pueden ser ostensibles en unas representaciones y no serlo en otras. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro o incluso, en el mismo. Por ejemplo, si se está analizando la función $f(x) = x^2$ y obtenemos tres de sus representaciones gráficas, como las mostradas en la fig. 1, puede apreciarse que cada una de ellas es diferente a las otras. Las gráficas de la izquierda y de la derecha son continuas en todo su dominio, mientras que la del centro no lo es. La apariencia de las tres gráficas no es la misma, que da la impresión de que se tratara de objetos diferentes.

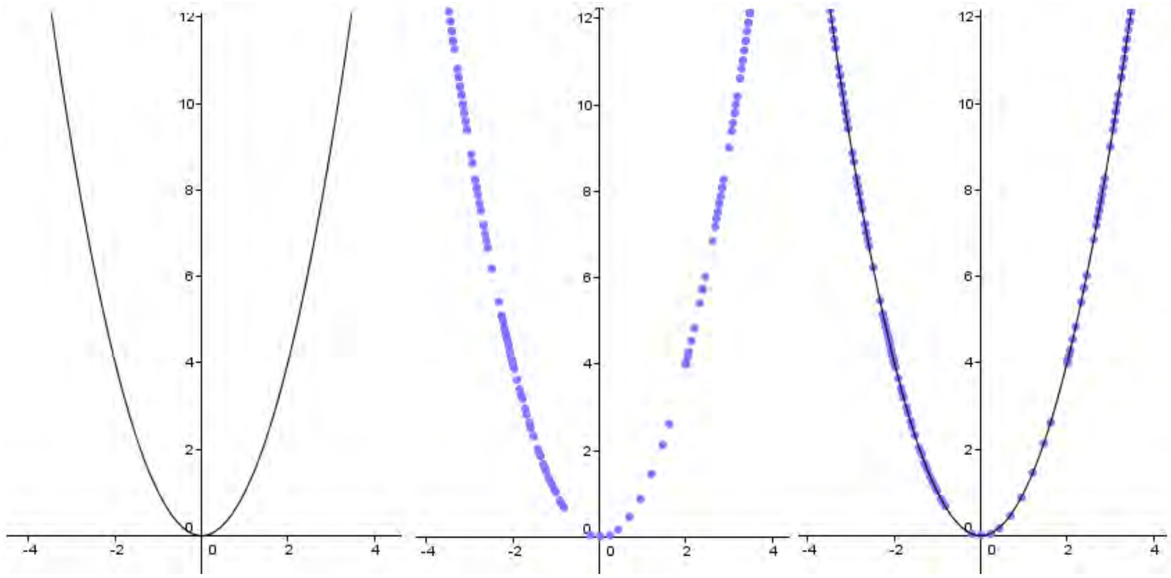


Figura 1. Ilustración gráfica de heterogeneidad entre representaciones de un mismo objeto

Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Para obtener las representaciones gráficas mostradas en la figura 1, se hizo primero una transformación tipo conversión de la representación algebraica $f(x) = x^2$ al registro gráfico y luego otras dos al interior de este registro, es decir, un par de transformaciones tipo tratamiento.

Lo anterior condiciona la relación entre los objetos y sus diversas representaciones, ya que los tratamientos matemáticos no pueden llevarse a cabo prescindiendo de un sistema semiótico de representación. La función de tratamiento solo se puede llevar a cabo utilizando las representaciones semióticas y no las representaciones mentales, por lo que de la conciencia de su uso, por parte de quien orienta los procesos de enseñanza y aprendizajes, va a depender en gran medida la comprensión conceptual de los estudiantes.

Dichas representaciones se pueden dar en diferentes registros semióticos de representación. Además, la forma de acercamiento y "el tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado (…) Si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica no necesariamente cambia el registro" (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012, p.32).

En lo planteado por Oviedo et al. (2012) se pone de manifiesto que es posible tener la representación de un mismo objeto en dos o más registros distintos: en cuyo caso la representación se modifica; o diferentes representaciones del objeto en un mismo registro: en cuyo caso el registro puede ser el mismo. Así por ejemplo, en el registro aritmético analítico se puede escribir un fraccionario como $\frac{1}{2}$ o en forma equivalente $\frac{2}{4}$, o en forma decimal como 0,5 produciendo cambios en las representaciones sin cambiar de registro. En el registro figural dos representaciones diferentes de este mismo objeto pueden ser las mostradas en la figura 2. Evidenciándose cierta diferencia entre una y otra representación, mientras la figura 1a muestra dos mitades, una pintada de negro y la otra de blanco, donde cada una de ellas representa la mitad ($\frac{1}{2}$) de la figura; en la figura 1b se tienen cuatro partes congruentes de un cuadrado también congruente al anterior, pero en este caso hay dos de un color y dos del otro, es decir, los del mismo color representan dos cuartos ($\frac{2}{4}$) del total de la figura. Ahora bien, cómo se representaría en este registro con tanta claridad 0,5?

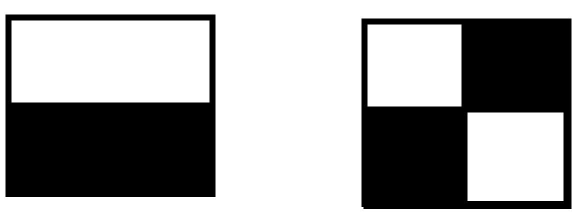


Figura 2. Representación figural de un medio de la unidad

Al hacer un análisis comparativo de las representaciones intra-registros, se evidencia alguna similitud en su forma: fraccionaria en el primer caso y rectangular en el segundo, y difieren en la forma como se relacionan sus elementos: uno de dos y dos de cuatro respectivamente.

Mientras un análisis inter-registro permite apreciar diferencias en las representaciones, tanto de forma como de contenido, más no de significado: en todos los casos cada representación corresponde a 0,5 o al 50% del total de la unidad de referencia.

Ese paso de la representación del objeto a otra representación al interior de un mismo registro es a los que se le denomina ***tratamiento***, es decir, es la transformación de una representación sin cambiar de registro; como por ejemplo pasar de $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$ luego de simplificarla o expresarla como 0,5 al realizar la división de los términos, es realizar un tratamiento en el registro aritmético analítico sin avandonarlo.

El paso de la representación del registro aritmético analítico, para representar un mismo objeto en este caso, en el registro figural, es a lo que se le denomina ***conversión***, es decir, es la transformación de una representación cambiando de registro; un ejemplo sería pasar de $\frac{1}{2}$ en el registro aritmético analítico a $\{x \in R / 2x - 1 = 0\}$ en el registro algebraico, a "un medio" en el lenguaje coloquial o a la figura 1 en el registro figural.

1.1.3 Acerca de las funciones

El objeto matemático ***función*** es el resultado de grandes esfuerzos de diferentes pensadores y en su desarrollo histórico de más de 2000 años ha sido objeto de diversas acepciones y generalizaciones (Parra y Pino-Fan, 2016). Según Sastre, Rey y Boubée (2008), tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número. En la antigüedad los griegos trabajaron problemas que involucraban funciones, sin reconocerlas como tal, y haciendo sólo representaciones verbales o gráficas. Sin embargo, son aportaciones relevantes de la cultura helénica que, aunque no correspondían explícitamente al concepto de función, si pueden considerarse como los primeros antecedentes en el desarrollo de este concepto. Para Kleiner (1989) el periodo más fecundo en el desarrollo del concepto de función fue de 1450 a 1650, con grandes hechos como: 1) la extensión del concepto de número al de números reales y a números complejos por Bombelli y Stifel; 2) la creación del Álgebra simbólica por Vieta y Descartes; 3) los estudios de problemas de movimiento por Kepler y Galileo; y 4) la unión entre el Álgebra y la Geometría por Fermat y Descartes. Según Leinhardt, Stein y Zaslavky (1990), el concepto de función tiene un estatus de facilitador en el aprendizaje de las matemáticas, pues permite la interacción de aprendices y objetos matemáticos, a través de actividades que involucran funciones con elementos del medio sociocultural.

En general, el concepto de función es sin lugar a dudas un elemento fundamental del desarrollo histórico de la humanidad, el cual ha adoptado a lo largo de su evolución histórica al menos seis significados parciales (Parra y Pino-Fan, 2016): 1) la función como correspondencia; 2) la función como relación entre magnitudes variables; 3) la función como representación gráfica; 4) la función como expresión analítica; 5) la función como correspondencia arbitraria; y 6) la función a partir de la teoría de conjuntos. El término “función” fue usado por primera vez en 1673 en una obra de Leibnitz.

1.1.3.1 Análisis epistemológico de la noción de función

En este apartado se trata de poner de manifiesto las diferentes formas bajo las cuales se ha manifestado a través del tiempo la noción de función en la humanidad. Estas formas fueron presentadas por Ruiz (1994) y son 1) la noción de función como objeto protomatemático, 2) la noción de función como objeto paramatemático, y 3) la noción de función como objeto matemático.

1.1.3.1.1 La noción de función como objeto protomatemático

El concepto de función se encuentra en un estado protomatemático cuando se le usa de forma implícita sin reconocer que se hace uso de él como objeto, como herramienta ni como instrumento. Por ejemplo en la antigüedad se le usaba en aritméticas y astronomía para hacer cálculos de tablas numéricas que se obtenían utilizando un patrón de regularidad, y al utilizar la secuencia, resultaban las tablas.

1.1.3.1.2 La noción de función como objeto paramatemático

Esta etapa del proceso formativo de la función, remite a los inicios del cambio y la variación, al comenzarse a relacionar las causas con los efectos. Aquí la función comienza a aparecer “como un instrumento conscientemente utilizado, determinado de un modo específico como cantidad de intensidad de una cualidad, pero no es tratado como objeto de estudio en sí mismo" (Ruiz, 1994, p.190).

1.1.3.1.3 La noción de función como objeto matemático

Fue en el siglo XVIII con Bernoulli y Euler cuando la noción de función se comienza a usar, considerándose muy tenuemente, como un objeto matemático. Se usa no solo como una fuerte herramienta para resolver problemas, sino que se comienza a considerar como objeto de estudio y comienza a ser central en el estudio de las matemáticas y por tanto, en motor de su desarrollo, dando origen a la teoría de las funciones. Es entonces donde comienzan a establecerse diferentes conexiones entre objetos matemáticos, presentándose una ruptura epistemológica en el desarrollo de esta área hasta ese momento.

1.1.3.2 Configuraciones epistémicas de una función

Las configuraciones epistémicas de la función y de las relaciones funcionales que se usan actualmente se relacionan con:

- Una relación de correspondencia entre variables: relación en la que a cada valor en la variable de entrada le corresponde uno y sólo un valor de la variable de salida.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos: una regla en la que cada elemento del conjunto de partida debe estar relacionado con un único elemento del conjunto de llegada.
- Regla de asignación: a cada valor de la variable independiente se le hace corresponder un único valor de la variable dependiente.
- Conjunto de pares ordenados: una función f es un conjunto de pares ordenados (a, b) $\in f$, con la condición de que la primera componente no se repite en ningún par del conjunto, y que para todo elemento a del dominio de f, existe un elemento b del codominio de f, tal que a $(a, b) \in f$.
- Relación entre dominio e imagen: paso de un estado inicial a un estado final o transformado: relación que a cada número perteneciente al dominio D, le asocia un único resultado numérico de entre las imágenes f(x).

- Criterio de la recta vertical: si se traza una recta vertical por cualquier parte del plano, (si la recta corta la gráfica) ésta sólo corta la gráfica en una sola parte, de lo contrario la gráfica no representa una función. La función expresada por su representación gráfica, es tal que para cada valor en el eje de las abscisa no pueden haber dos valores en el eje de las ordenas.
- Patrón de regularidad o de crecimiento: es la identificación de un patrón de regularidad que determina el comportamiento de las variables dependiente e independiente. Suelen encontrarse en secuencias numéricas, dadas como conjunto de números o en tablas numéricas.
- Razón o proporción: dos magnitudes están relacionadas de forma tal que por cada elemento de un conjunto dado hay tantos elementos de otro conjunto. Es una relación prototípica entre magnitudes que varían.

Sin embargo cada uno de estos casos se puede mirar como una relación de dependencia entre dos variables. Convencionalmente la variable independiente en una representación gráfica, se asocia al eje horizontal o eje de las abscisas y la variable dependiente al eje vertical o eje de las ordenadas.

1.1.3.3 Conflicto sociocognitivo en el aprendizaje de las funciones

Ya en los escritos de Piaget se hacía alusión al concepto de conflicto, refiriéndose a éstos como un cambio de esquemas conceptuales. Se suponía una aplicación del conflicto a la construcción cognitiva que el sujeto hace del sujeto. Actualmente se ha considerado el conflicto en su dimensión social. La noción de conflicto sociocognitivo se conceptualiza como la coordinación de esquemas diferentes en un contexto de interacción social. Así, la discusión entre iguales puede generar bloqueos que desemboquen en conflictos sociocognitivos conducentes a altos niveles de desequilibrio, pero de tal forma que las mismas discusiones entre los alumnos puedan facilitar sus desbloqueos y alcanzar el reequilibrio cognoscitivo, puesto que la divergencia de las respuestas generan contradicciones que conduce a los participantes a revisar sus puntos de vista, que finalmente terminan regulando la discusión (Mendoza, 2015). Por su parte Medrano (1995) sugiere que una de las variables más importantes para que se produzca el progreso en los aprendizajes es la posibilidad de que los estudiantes intercambien y confronten puntos de vista propios con los ajenos. Considera además, que lo importante de las argumentaciones no es que sean correctas, sino que propicien la discusión y el diálogo. Para este autor no es muy relevante que alguno de los miembros del grupo domine la solución de la tarea, es suficiente con que se dominen las competencias mínimas necesarias para la resolución de la tarea que se les haya propuesto. Sin embargo Gavilán y Alario (2012, p.2) consideran que “para que los grupos puedan trabajar correctamente, es necesario que los estudiantes pongan en práctica ciertas habilidades sociales que les permitirán resolver los conflictos sociocognitivos en los que se van a ver involucrados en la resolución de la tarea”

Atendiendo los modelos cognitivos existen cuatro principios básicos para enseñar matemáticas en general las funciones en particular, como tema que nos ocupa: 1) promover el uso de procesos cognitivos; 2) enfatizar en el aprendizaje de conceptos y hacer generalizaciones; 3) enfatizar la motivación intrínseca, y 4) establecer las diferencias individuales y aprovecharlas en el trabajo en equipo (Hernández, Soriano, 1997, p.32).

Así mismo las condiciones didácticas del aprendizaje exigen una interacción del estudiante con situaciones problemas. Situaciones que según Albert (1997), implican otra interacción, pero dialéctica donde el sujeto anticipa y finaliza sus acciones y compromete sus conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los complementa o los rechaza para formar concepciones nuevas. El interés de la situación problema dependerá de lo que ésta haga que el estudiante comprometa ahí, de lo que someta a prueba, de lo que decida invertir de su saber para encontrarle una solución, de la importancia que conceda a los rechazos a hacer, y de las consecuencias previsibles de estos rechazos, de la frecuencia a cometer errores y del provecho que se les saque al hecho de cometerlos.

Hernández (1996) considera que el hecho de que un individuo perciba una situación a la distancia precisa para ser considerada como un detonador epistémico (problema) de sus capacidades, no asegura que éste explote en esfuerzos para resolverlo, comprometiendo su voluntad en ello. Es decir, no es suficiente con que al alumno se le ubique ante situaciones que a su propio juicio, y en el sentido antes descrito, éste pudiera considerarlas como problemas; este hecho no asegura su avance en el intento de solucionar el problema. Es más, los problemas como detonador epistémico podrían comprometer o no la voluntad del aprendiz en la solución del problema, pero no de determinarla, ni en su concreción ni en los resultados de la acción. Sin embargo, el hecho de que el concepto función sea bastante usado a nivel social podría convertirse en el detonador epistémico requerido para comprometer a los estudiantes en la solución de una situación problema que involucre funciones y si intentan dar solución a la tarea propuesta, ya es ganancia.

1.1.3.4 Los conflictos epistémicos en el aprendizaje de las funciones

Un proceso de enseñanza y aprendizaje se puede considerar eficiente, desde el punto de vista epistémico si al implementarlo, el significado de los objetos matemáticos estudiados es fiel al significado pretendido y concuerda a su vez con el significado de referencia. Es decir, si hay una estricta concordancia entre lo que es el objeto para el aprendiz, con lo que se plantea desde los lineamientos y estándares planteados por las autoridades educativas, con lo que el profesor hace para lograr que así sea. Algunas veces, en un proceso de estudio matemático, se identifican desajustes fundamentales entre los significados institucionales de referencia y pretendidos con el implementado. Desajustes que no han sido previstos de antemano por el docente y que pueden ser causados por algunas decisiones didácticas desafortunadas en los procesos instructivos. Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) llaman *conflictos epistémicos* a todos estos desajustes, los cuales condicionan el proceso de estudio y los aprendizajes de los estudiantes. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de dicho proceso de instrucción matemática. Lo que permite inferir la importancia de identificar los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que dan origen a dichos desajustes (Godino, 2002), porque esto puede favorecer los procesos de comprensión conceptual de los estudiantes.

Según Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005, p.352) atendiendo la especificidad del conflicto epistémico con relación al sistema de prácticas operativas y discursivas relativas al objeto matemático que se desea introducir o desarrollar, los conflictos se pueden clasificar en:

> Generales y específicos. Se tiene un *conflicto epistémico general* cuando se refiere a un proceso matemático (definición, demostración, interpretación, etc.)

> no específico de la clase de problemas de la que emerge el objeto. En caso contrario, llamamos *específico* al conflicto epistémico (…) La identificación de un conflicto, general o específico, supone la observación de un desajuste fundamental entre dos *entidades praxémicas* (problemas o acciones), entre dos *entidades discursivas* (conceptos, propiedades o argumentos) o entre dos *juegos de lenguaje* que se introducen o desarrollan en dos marcos institucionales relacionados. Estos desajustes se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, los problemas, acciones, lenguaje, nociones, proposiciones y argumentos (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional (p.352).

El estudio de situaciones problemas que involucran situaciones funcionales, en diferentes periodos históricos, así como los invariantes colectivos y las distintas representaciones semióticas utilizadas, han permitido distinguir diferentes conflictos epistémicos asociados a la noción de función:

1.1.3.4.1 El desconocimiento de la letra como variable

Este es un conflicto muy común en contextos académicos, que es donde es más identificable, y es uno de los grandes obstáculos en el aprendizaje del cálculo y de procesos algebraicos.

1.1.3.4.2 La no aceptación de representaciones diferentes a la representación aritmética algebraica como representación de una función

Es un conflicto que se da prácticamente a todos los niveles académicos, incluso hasta en los profesores universitarios, la única representación válida para una función es una fórmula. No reconocen una tabla, una gráfica, un diagrama, una relación funcional ni una secuencia como representaciones de una función, y por tanto no los usas como apoyo para dar sus respuestas.

1.1.3.4.3 Confundir la letra como magnitud con la letra como variable generalizada

Es otro conflicto con las características del descrito anteriormente, se da prácticamente en todos los niveles académicos. Ambos conflictos, el anterior y este, son heredables, es decir, se vienen transmitiendo de generación en generación. Este se da al modelar relaciones funcionales con expresiones algebraicas del tipo $e = vt\text{-}gt^2/2$ (donde *e* representa el espacio recorrido por un móvil que se lanza al espacio, *v* la velocidad, g la gravedad en ese lugar y *t* el tiempo en que lo recorre) y considerarla equivalente a la fórmula matemática $y = ax - bx^2/2$, se está haciendo el paso de las magnitudes concretas- de espacio y tiempo- a las variables generales (*x* e *y*). Las expresiones anteriores vistas como funciones, no son equivalente, pues no tienen el mismo dominio ni el mismo rango, mientras la primera tiene un límite tanto para la velocidad, como para el tiempo que tarda el cuerpo en caer, la segunda no tiene restricciones de ningún tipo ni en su dominio ni en su rango. Al realizar la representación gráfica de la relación funcional de espacio tiempo, se termina haciendo la de la fórmula matemática asociada.

Sin embargo, la identificación y uso de estos elementos cambiantes, al analizar estos procesos de variación, son elementos esenciales que pueden conducir a la determinación de la variable. La identificación y uso de secuencias, tablas de valores, el análisis de regularidades y patrones, implica la presencia de cierto instinto de funcionalidad (Ruiz, 1994), ya que esto se relaciona con aquellos fenómenos que pueden cambiar continua y constantemente con diferentes grados de intensidad entre unos límites determinados. Son magnitudes variables que llevan consigo alguna potencialidad de ser medidas.

1.1.3.4.4 La no aceptación de la función constante como función

Este conflicto se da principalmente al pedírsele a las personas realizar operaciones entre expresiones algebraicas en las que intervienes funciones constantes, la tendencia es “no se puede sumar una función con un número”.

1.1.3.4.5 La proporcionalidad entre la unidad patrón escogida para cada eje coordenado con la longitud escogida como patrón de medición de esa unidad en cada eje

Es un conflicto que se manifiesta al graficar, la tendencia es a colocar los valores en los ejes coordenados tal y como los encuentran el contexto de obtención de información de una relación funcional. Tiene como consecuencia que las gráficas resultan torcidas.

1.1.3.4.6 La unión de los puntos de una gráfica que representa una relación funcional de valores discretos

Es un conflicto que también afecta prácticamente a todos los niveles académicos. Consiste en unir los puntos de cualquier gráfica que se construya sin importar si las variables son discretas o continuas.

1.1.3.4.7 Linealizar cualquier función

Consiste en considerar como lineal a cualquier función que se pretenda representar.

1.1.3.5 Los registros de representación de una función

Los registros más comúnmente usado para representar una función son:
Registro del leguaje materno o coloquial: esta representación se relaciona con la capacidad lingüística indispensable para la descripción de situaciones funcionales, la comunicación, interpretación y discusión de resultados. Este registro es muy adecuado para la presentación de relaciones funcionales, a través de las que se describen situaciones del contexto sociocultural, que involucra el uso de una función, permitiendo el tránsito a otros sistemas semióticos de representación. Este registro está presente al momento de hacer descripciones o designaciones nominales y es por naturaleza un registro auxiliar a cualquier registro que se elija como principal para presentar situaciones/tareas de aprendizaje. Ejemplo, es ideal para enunciar situaciones funcionales como la siguiente: una persona trabaja en un lavadero de autos y tiene un sueldo compuesto por un salario básico mensual de 40 pesos, más un salario adicional de 5 pesos por cada auto que lave.

Registro de representación analítica: estos están íntimamente relacionados con la capacidad simbólica principalmente con el álgebra, se materializan en fórmulas que permiten modelar la situación funcional en juego, o en polinomios aritméticos, como resultado de remplazar un valor numérico en un registro algebraico, en ecuaciones o en una secuencias de números, resultado de seguir un patrón de regularidad y de crecimiento de una función y plasmar los valores correspondientes que dan como resultado la secuencia. Este registro de representación está muy relacionado con la modelación y con el pensamiento variacional y las estructuras algebraicas. Para el ejemplo presentado en el registro coloquial una representación algebraica sería $f(x) = 5x + 40$, o un **polinomio aritmético** resultado de indagar el salario del trabajador cuando lava 352 autos en el mes, el polinomio aritmético sería $f(352) = 5(352) + 400.000$, o como una **ecuación**, al conocer el salario mensual del trabajador en un mes determinado y a partir de ahí encontrar el número de autos lavados por él en el mes. Un ejemplo de una ecuación es, si se sabe que el sueldo del trabajador en un mes determinado fue de 1.975 pesos y se quiere saber cuántos autos lavó el trabajador en el mes, entonces la ecuación correspondiente sería $1.975 = 5x + 40$. Y una secuencia podría ser {40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105…}, donde la primera componente no se escribe y queda determinada por el orden de cada elemento de la secuencia correspondiente a la ordenada de la pareja ordenada.

Registro de representación gráfico: este consiste en la representación en un plano cartesiano de una información específica correspondiente a un conjunto de puntos que determinan la gráfica. Para representar los puntos de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, se acostumbra utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o plano cartesiano, el cual consiste en tomar dos rectas perpendiculares y disponerlas, una horizontal que representará el eje de las abscisas o eje de las X y otra vertical, que representará el eje de las ordenadas o eje de las Y. Se establece el punto de cruce entre las dos rectas como origen del sistema, o punto (0, 0), y además, se elige un sentido, positivo o negativo para cada una de las cuatro semirrectas resultantes. Por ejemplo, si se toma un punto cualquiera (x_0, y_0), este pertenece a la gráfica de la función f si se cumple que $y_0 = f(x_0)$. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que éste es la intercepción de una recta vertical $x = x_0$, que determina el valor de la abscisa, con la recta horizontal $y = y_0$, que determina el valor de la ordenada. En la fig. 3 se puede apreciar el punto (2, $f(2)$), correspondiente a la intercepción de las rectas x = 2 con y = f(2) = 50 Así, cada punto del plano quedará determinado por las coordenadas (x, y), que estará a una distancia horizontal x, y a una distancia vertical y del origen respectivamente, con su respectivo signo. La información que aportan los ejes para determinar las coordenadas de un punto y de la orientación en del sentido de la gráfica, es determinante para poder decodificar la información involucrada en una gráfica cartesiana.

La graficación está muy relacionada con la capacidad de visualización y con el pensamiento geométrico; en ella se conjuga la interacción de dos estructuras en mutua dependencia: el fondo y la forma (Acuña, 2001). La graficación tiene una estrecha relación con los ejes coordenados, es así como al cambiar la escala en los ejes, la gráfica cambia de apariencia, conservando algunos rasgos importantes, además, al graficar es necesario identificar y hacer una distribución adecuada de los ejes coordenados. La graficación permite desarrollar una serie de estrategias propias del contexto que han de combinarse con estrategias analíticas que permitan confirmar los resultados que sugieran las representaciones visuales. Sin embargo a medida que se van desarrollando mejores estrategias de graficación, y de análisis de una gráfica, el estudiante irá adecuándose intuitivamente a hacerlo, adquiriendo criterios suficientemente sólido como para prescindir de otros registros auxiliares para confirmar, con sólo un análisis gráfico, la información que se analiza.

En la representación gráfica que se muestra en la figura 3, del ejemplo correspondiente al sueldo del trabajador que lava autos. Sin embargo la información representada en la gráfica presenta cierta heterogeneidad con la realidad del problema, así como lo presenta también la representación algebraica, ya que las variables de la situación real son discretas, mientras las de la gráfica y de la representación algebraica son continuas. Es decir, las variables de la situación real representan magnitudes concretas, mientras que las de las representaciones algebraicas y gráficas, representan variables generalizadas.

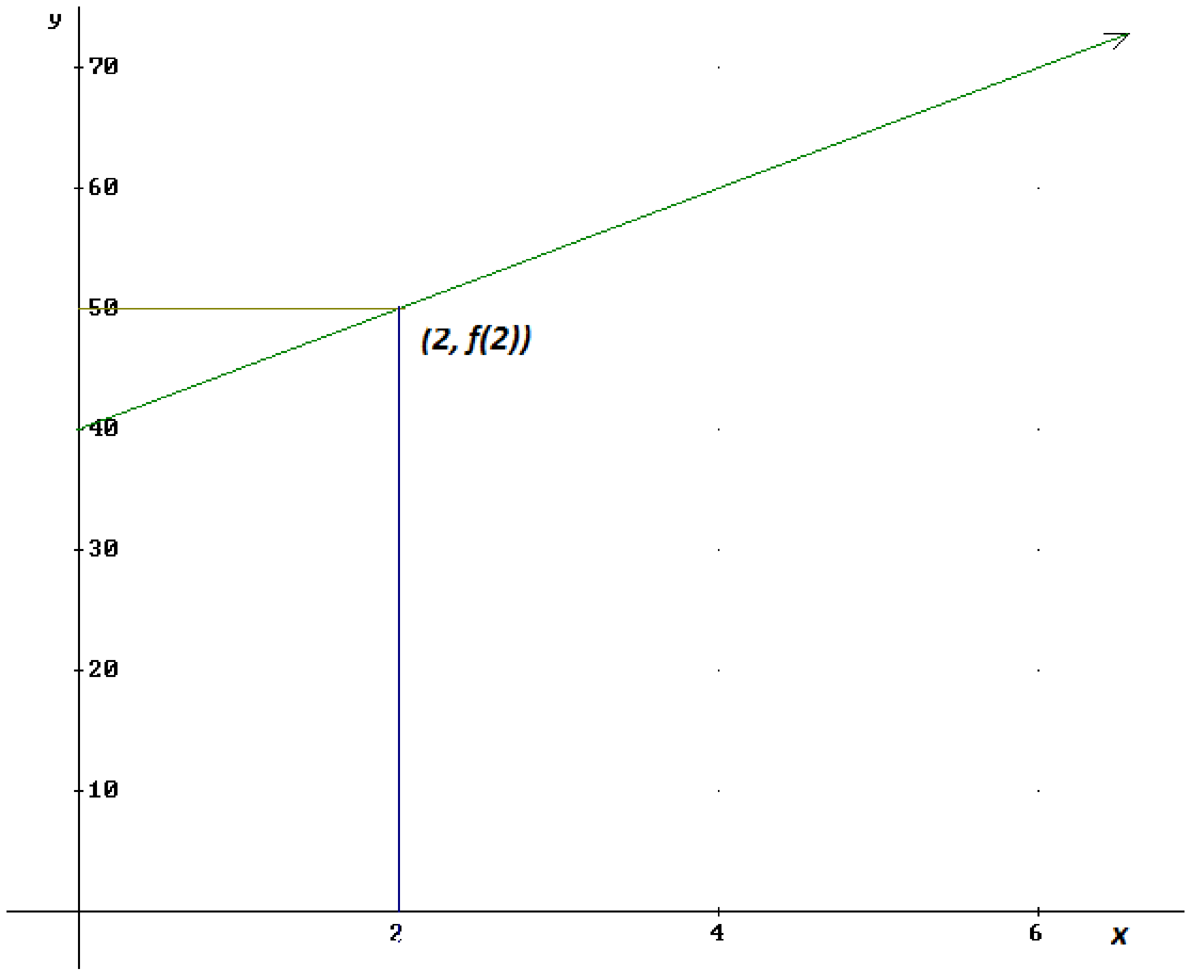


Figura 3. Ejemplo de una representación gráfica de una función lineal.

Registro de representación figural, entendido como el sistema que se caracteriza por mostrar una situación determinada mediante un esquema o una figura que modele dicha situación. Es una representación **icónica** que corresponde a una figura o dibujo de una situación real, en la que se involucra el concepto de función y la que además permite el tránsito a otros registro de representación de esa función.

Registro sagital: corresponde a una relación de correspondencia entre dos conjunto. Cada conjunto está representado en un óvalo o conjunto inicial (conjunto de partida) y desde cada uno de sus elementos se hace corresponder con un solo elemento del conjunto de final o conjunto de llegada.

Registro de representación tabular: en esta se parte de una tabla, en la que se ubican las entradas ya sean en las filas o en las columnas, de tal forma que el número de columnas (o filas según se ordenen), corresponda al total de cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función. Para el ejemplo que se ha venido mostrando, una representación tabular podría ser:

Tabla 1. Ejemplo de la representación de una función en un registro tabular.

Número de autos lavados	Salario básico ($)	Salario adicional ($)	Salario mensual ($)
387	40	1935	1975

Registro de representación fenomenológico: una representación fenomenológica la conforman tanto factores sociales y culturales ajustados a la clase de matemáticas, como todos aquellos mediadores del ambiente de aprendizaje y el mismo clima institucional y aquellos que provienen del contexto extraescolar, son el fundamento y naturaleza de las situaciones problema. En ella intervienen tanto factores endógenos como exógenos, que permiten contextualizar elementos de la disciplina hasta bajarlos a un lugar asequible para el aprendiz. Son los aspectos del contexto que permiten hacer la transposición didáctica de los conocimientos en juego en la situación problema. De estos factores el docente debe decidir cuáles se adecuan mejor a lo que quiere trabajar, por lo que debe escoger aquellos que puedan servir mejor de mediadores entre el contexto sociocultural y el disciplinar, y que permitan con mayor facilidad que el estudiante pueda asignar significados a los objetos estudiados. En relación al ejemplo, la representación fenomenológica la constituye el fenómeno que determina la situación real, es decir, las condiciones que determinarían una situación real con estas características, el contexto sociocultural en que se dan los hechos que son el contenedor para la situación.

De la representación fenomenológica escogida para presentar la situación va a depender la calidad de las instrucciones que se den en las situaciones, así como el tipo de preguntas que se proponen en ellas. Se convierten en el pilar que determina la calidad del material de apoyo utilizado por el docente como mediador en el tratamiento del aprendizaje de sus estudiantes.

1.1.3.6 Elementos de una función

Entre los elementos de una función están sus intervalos de variación y sus parámetros. Los intervalos de variación son el dominio y el rango. El dominio está constituido por todos los valores de la variable independiente, es decir, aquellos valores del conjunto de partida para los cuales la función está definida, y el rango lo constituyen los valores de la variable dependiente, o aquellos valores del conjunto de llegada que puede llegar a tomar la función. Por ejemplo si se tiene el par ordenado $(a, b) \in f$, entonces b es la imagen de a, lo que se representa por $b = f(x)$, el conjunto A que contiene a a es el dominio de f –es el conjunto que tiene imágenes-, el conjunto B que contiene a b es el codominio de f y el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A es el rango de f. Es de notar que en general el codominio de una función no coincide con su rango. Dos funciones f y g son iguales (f = g) si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y el mismo rango, es decir, si $f(x) = g(x)$.

Los parámetros de una función son cantidades constitutivas de la función, que al variarlas modifican su valor. Entre ellas están las variables dependientes e independientes, los coeficientes, los exponentes, sus interceptos al origen, su inclinación en un punto dado, sus extremos, su concavidad y sus puntos de inflexión, si los tiene. En algunos casos es más fácil identificar estos elementos en unos registros que en otros. Son estos elementos, los que en la mayoría de los casos permiten hacer un análisis de congruencias e incongruencias entre los elementos de una función. En registros como el algebraico son representados por símbolos como letras que representan variables o constantes como los coeficientes o los exponentes. Uno de los parámetros más importantes de una función es su pendiente en un punto dado. La pendiente de una función en un punto es su inclinación respecto a la horizontal. En cálculo se puede mirar como la medida de la razón de cambio de una variable que se halla en función de otra. En una función lineal la razón de cambio es constante, es decir, entre dos puntos cualesquiera es siempre la misma. En una función no lineal la razón de cambio es variable.

Otros aspectos relacionados con las funciones son el Cambio y la variación de sus parámetros. El cambio es el paso de un estado inicial a un estado final de una magnitud o cantidad. La variación es la cuantificación o medición del cambio que sufre una magnitud o una cantidad. En este sentido la variación se presenta como un concepto fundamental, por lo nuclear en un sistema conceptual que involucra otros importantes como el de función. Por lo que el estudio de los patrones de variación entre magnitudes relacionadas o dependientes una de la otra, puede conducir al estudio de relaciones funcionales.

El cambio y la variación de los parámetros de una función son el fundamento para la utilización del concepto de función para favorecer el Pensamiento variacional. El pensamiento variacional está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en actividades humanas realizadas en diferentes contextos, así como con su representación en distintos registros semióticos. Se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía. Esto promueve en el estudiante actividades de observación, registros y utilización de lenguaje matemático, lo cual puede conllevar a la representación de diferentes conceptos y su conexión con elementos del contexto sociocultural a través de situaciones problemas de tipo concreto (Múnera, 2011) y a la identificación de condiciones apropiadas de cambio y variación, donde se facilite la configuración de registros fenomenológicos.

En relación a lo anterior se puede inferir que el estudio del cambio y la variación puede conllevar a la comprensión del significado de conceptos estrechamente relacionados con funciones, como el de variable, dependencia e independencia entre variables, patrones y regularidades y la representación de situaciones en tablas, gráficas y fórmulas, así como el análisis de diversas representaciones y la aplicación y análisis de métodos algebraicos en la solución de problemas, que le permitan al estudiante relacionar sus conocimientos previos con los conceptos matemáticos escolares (Rodríguez, 2012), que faciliten el acceso al cálculo diferencial. El **Cálculo diferencial** es la rama de las matemáticas que se caracteriza por estudiar los cambios que se producen en un fenómeno, por lo cual se denomina la matemática de los cambios.

1.1.3.7 El paso de las magnitudes a las variables

Para Font (2011) el desarrollo histórico del concepto de función muestra como el estudio de las relaciones entre magnitudes da origen a este concepto, por lo que puede servir para introducirlo en la secundaria. Según este autor los profesores en formación deben tener claro que la concepción de que una función es una dependencia entre magnitudes variables que, a cada valor de la variable independiente, se le hace corresponder un único valor de la variable dependiente, es la que más se utiliza cuando se inicia el estudio de las funciones en la enseñanza de este concepto/noción en la secundaria/bachillerato. Considera además, que es necesario que tengan claro el paso de las magnitudes a las variables. Al pasar de expresiones del tipo $e = vt$ (donde e representa el espacio recorrido por un móvil, v la velocidad y t el tiempo en que lo recorre) a la fórmula matemática $y = ax$, se está haciendo el paso de las magnitudes concretas- de espacio y tiempo- a las variables generales (x e y). El siguiente nivel de abstracción consiste en considerar que las funciones del tipo $y = ax$ son un caso particular de funciones. Este paso de las magnitudes a las variables es el fundamento del uso de las relaciones funcionales, como base para contextualizar el concepto, al utilizar las relaciones funcionales como paso previo al acceso a las funciones de variable real.

1.1.3.8 El estudio de relaciones funcionales

En el estudio de las funciones, parece ser fundamental que se relacione el concepto a nivel escolar, con su uso en prácticas socialmente compartidas. A esto es a lo que se ha llamado estudio de relaciones funcionales. Y en este proceso de conexión del concepto de función con el contexto sociocultural, los registros y las representaciones semióticas que las personas puedan hacer de un objeto matemático juegan un papel muy importante, al permitirles visionar de diferentes formas, una misma información y poderla analizar al comparar los elementos que sean evidentes tanto en uno como en otro registro. Esto es, establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de un mismo objeto matemático, en un mismo o en diferentes registros semióticos, relacionarlos y comparar sus respectivos significados en cada uno de ellos y encontrarles sentido al utilizarlos mientras resuelven una situación. Las representaciones semióticas son el medio que le permite a un sujeto exteriorizar o comunicar sus representaciones mentales, son el medio que les permite a las personas el acceso a los conocimientos matemáticos, pero esto requiere la integración de la arquitectura cognitiva, de los registros semióticos de representación que permiten descubrir y estudiar los objetos matemáticos que se quieran enseñar. Y “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación (…) Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación" (Duval, 1999, p. 26), llevando de esta forma al estudiante a gestionar sus propios procesos de aprendizaje, por lo que es necesario facultar al estudiante para el aprendizaje a lo largo de la vida, es decir, el estudiante tiene que aprender a aprender (Medina y cols., 2009).

Es de interés analizar las propiedades visuales de una representación, como fundamento para relacionar los elementos de una función al interior de cada registro de representación, y realizar equivalencias entre dichos elementos de la situación que se puedan evidenciar en las otras representaciones, en cada uno de los registros involucrados.

Para el M.E.N (2005) el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, razón de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales, contribuye a la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo. Para desarrollar el pensamiento variacional sugieren analizar diferentes representaciones, e intentar formular procedimientos, algoritmos o fórmulas que permitan reproducir el mismo patrón de regularidad, calcular el término siguiente, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas. Entre los estándares propuestos por el M.E.N (2005) para el desarrollo del pensamiento variacional, y los sistemas algebraicos y analíticos están:

> Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas (…) Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan (p. 87).

En lo sugerido por el M.E.N (2005) se evidencia la importancia del uso de las representaciones semióticas, como fundamento para relacionar los elementos de una función y asignarle significado y sentido a los conceptos. Duval (1999) asegura, que "la comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión" *(p. 186).*

El significado de los objetos estudiados surge de la identificación de los componentes conectados de las diferentes representaciones y la coordinación de las organizaciones cognitivas (Meel, 2003), al ponerlos en paralelo con representaciones fenomenológicas. De lo anterior cabe destacar la función de las representaciones semióticas, como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos, basados en la coordinación tanto intra-registro, inter-registros, como trans-registro, es decir, en transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento y en paralelo con los elementos socioculturales que se pongan en juego.

Las similitudes de los elementos de dos o más representaciones, al interior de un registro o en otro diferente, permiten establecer las congruencias entre ellos. Por ejemplo, un caso donde es evidente la congruencia entre los elementos de dos o más registros es al verificar en un registro cartesiano si una relación es función, al permitir la revisión punto por punto para determinar si la primera componente se repite en algunos de los pares ordenados o no, o realizar la misma tarea en un registro gráfico al trazar una recta vertical y verificar si ésta corta o no a la gráfica de la relación en más de una oportunidad. Un caso donde no resulta tan evidente tal congruencia es cuando se realiza en un plano, la gráfica de una expresión polinómica en la que se puede percibir visualmente los máximos y mínimos, los puntos de inflexión, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la concavidad, que en ningún otro registro son tan evidentes. Otro ejemplo es cuando se tiene como tarea analizar la gráfica de posición contra tiempo de un móvil que se mueve por una carretera recta, y ésta es cóncava hacía arriba (o hacia abajo), es fácil para el estudiante establecer la congruencia entre tal concavidad de la gráfica y la aceleración del móvil, o entre el crecimiento o decrecimiento de la gráfica con la velocidad de éste. Es decir, no es complicado explicarle al estudiante que donde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba, el movimiento es acelerado, donde es cóncava hacia abajo es desacelerado, y en los puntos de inflexión donde cambia la concavidad se da el paso de un movimiento acelerado a uno desacelerado y viceversa. Por lo que en este tipo de actividades se favorecer la comprensión de conceptos matemáticos cuando se acude a un análisis onto-semiótico de los objetos estudiados y se ponen en paralelo con elementos del contexto sociocultural; es decir, se visionan y comparan diferentes manifestaciones de un mismo objeto matemático en diferentes registros de representación y con elementos de la cultura donde se desarrollan los estudiantes.

Para ilustrar lo antes planteado, considérese el caso en que un docente propone a sus alumnos construir una caja sin tapa con una hoja de papel tamaño carta (21.6cm×27.9 cm), al quitar en las esquinas cuadraditos de lado x. El profesor pide a sus estudiantes encontrar una expresión algebraica que represente el área lateral de la caja. Luego que los estudiantes han adelantado parte de la tarea y ya tienen una expresión algebraica que representa el área lateral de la caja, se tiene que $A(x) = 602,64 - 4x^2$, esta expresión algebraica es un objeto que representa la función asociada, como lo son las dimensiones de la caja, los cuadraditos que se cortan y sus áreas. Para obtener la expresión los estudiantes debieron multiplicar las dimensiones del largo por el ancho de cada lado de la caja y luego sumar las sub-áreas que se obtuvieron (ver figura 4).

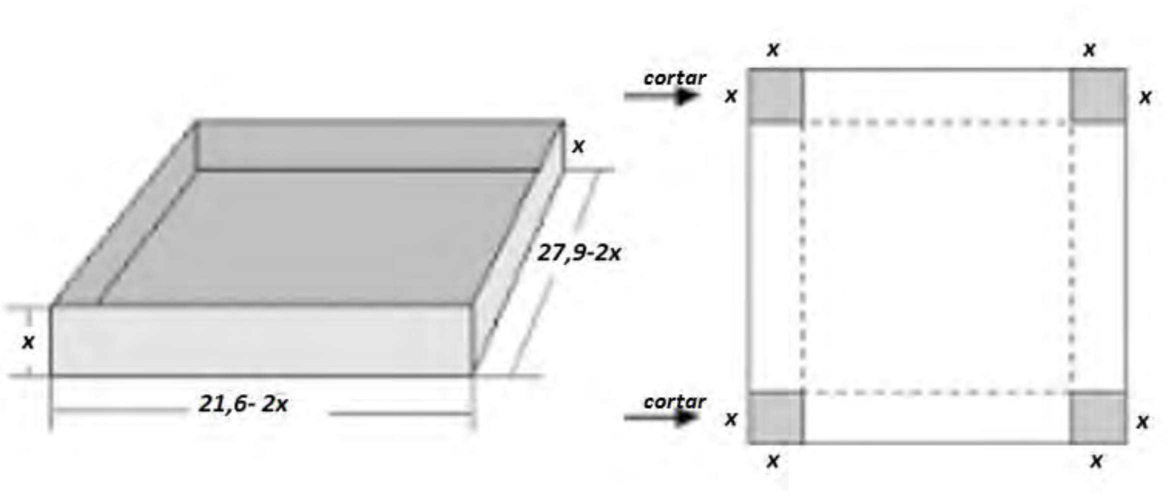


Figura 4. Construcción de una caja sin tapa con una hoja de papel de 21,6cm×27,9cm

En este proceso utilizaron el concepto de área de un rectángulo como herramienta para resolver el problema, ya que necesitaron saber que el área de un rectángulo se obtiene al multiplicar su largo por su ancho y el área total, al sumar las sub-áreas. Además, al realizar la gráfica se puede apreciar que ésta sólo tiene sentido para valores donde x es menor o igual que 10.8cm, y que $A(x)$ nunca es cero (0) (ver figura 5), precisamente porque hay un pedazo de dimensiones 21,6cm×6.3cm sobrante, esto es, que no se alcanza a cortar y por lo tanto no permite a la representación gráfica y la algebraica, en su estado original, ser congruentes con la representación fenomenológica. La representación gráfica que se presenta en la fig. 3 si se le han puesto las limitaciones correspondientes para lograr la congruencia con la fenomenológica, y $A(x) = 602{,}64 - 4x^2 \; con \; 0 \leq x \leq 10{,}8$ también lo es.

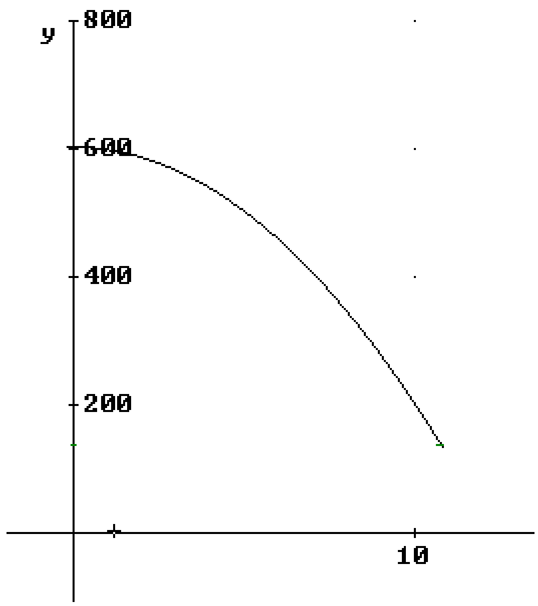


Figura 5. Representación gráfica de la situación, construcción de una caja sin tapa con una hoja de papel de 21,6cm×27,9cm

Un análisis comparativo de los elementos de cada registro en juego, permite asignar significado y sentido a cada elemento decodificado en cada registro e identificado en otro. Así, 602,64cm^2 corresponde al área total de la hoja de papel, es el valor donde la gráfica corta al eje de las ordenadas, o sea, $A(0) = 602{,}64$ y también se puede expresar como el punto P(0, 602,64), que es también el punto más alto de la gráfica, y 4x^2 representa a los cuatro cuadraditos que se quitaron en las esquinas de la hoja para construir la caja, por lo que $A(x) = 602{,}64 - 4x^2$ representa el área de todas las cajas que sea posible construir con una hoja de esas características. En este contexto es fácil explicarles a los estudiantes que la función es decreciente, y por qué lo es, ya que en la representación gráfica, por inspección visual se puede apreciar que la gráfica de la función baja a medida que x aumenta; en la representación figural y fenomenológica se evidencia que a medida que se corta un cuadradito de mayor tamaño en las cuatro esquinas de la hoja, el área que queda para formar la caja es menor, y que cuando se obtiene el cuadradito de tamaño máximo, no es posible construir la caja; esto se da exactamente donde x es 10,8cm. Cuando un estudiante por cuenta propia llega a este resultado, entonces ha logrado una integración herramienta-objeto-contexto a su forma matemática de pensar, por lo que el concepto ha actuado como instrumento sobre él. El estudiante ha logrado comprender el concepto y es capaz de identificar lo matemático en la situación, y será capaz de reconocer objetos matemáticos en el contexto sociocultural donde transita. Así mismo, existen incongruencias como es el caso de la concavidad, la cual sólo es evidente en la representación gráfica, más no lo es en ninguno de los otros registros en juego.

En el desarrollo de esta actividad también se pueden utilizar los conceptos de volumen y de patrón de regularidad como instrumentos, al proyectar que el estudiante identifique el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación, cuando se le solicita encontrar la caja que tenga el mayor volumen, y se le deja hacer la caja una y otra vez; en algún momento el estudiante se da cuenta que no tiene que seguir construyendo la caja, sino seguir una regla, que él sin darse cuenta habrá construido, y así obtener el volumen máximo por tanteo en una aproximación a la expresión algebraica que tiene como patrón. También se puede hacer un ejercicio interesante cambiando el tamaño de la hoja por todos los tamaños disponibles y luego comparando las diferentes representaciones resultantes con cada tamaño de hoja.

Otro ejemplo ilustrativo de lo antes planteado es la siguiente situación:
Juan trabaja de moto-taxista, por cada carrera que haga recibe $ 700. La moto no es de su propiedad y le tiene que entregar al dueño una tarifa diaria de $ 12.000.

Al hacer una conversión al registro algebraico se obtiene que $f(x) = 700x - 12000$

No es problemático discriminar cada uno de los elementos de la función y asignarle un nombre a cada uno de éstos, acorde a los requerimientos de la situación, lo que facilita asignar significado y sentido cuando se establecen congruencias entre los elementos de los registros coloquial o del lenguaje materno, el analítico algebraico y el fenomenológico. Así por ejemplo $f(x)$ se puede hacer corresponder con la Ganancias de Juan, $700x$ con el producido diario de Juan, que está compuesto por dos elementos 700 que corresponden al valor de la carrera y x que corresponde al número de carrera realizadas cada día por Juan, y -12000 correspondientes a la tarifa diaria que Juan debe entregarle al dueño de la moto.

Aquí la representación fenomenológica es el contenedor contextual donde se anida la situación -las condiciones de trabajo de Juan, la realidad de la situación, el ingrediente socio-epistemológico que permite la construcción con sentido de esta situación-, pudiendo ser cualquier otra.

En esta situación los elementos de la función son fáciles de identificar desde el punto de vista disciplinar, así: $f(x) = 700x - 12000$ es la representación algebraica de una función lineal, mal llamada tradicionalmente ecuación de la recta, y = $f(x)$ corresponde a la variable dependiente, 700 es la pendiente de la recta asociada, x es la variable independiente y -12000 es el intercepto al origen. Pero $700x$ que en el contexto de la situación corresponde al producido del día por Juan, es otra variable, es decir hay tres variables claramente identificables. Esta parte de formalización con los elementos disciplinares es algo que no puede omitir el docente en un proceso de enseñanza y aprendizaje en el que se enfrente a los estudiantes a este tipo de tareas. Esto evidencia la importancia de la naturaleza de las situaciones para la calidad de las actividades que se les propongan a los estudiantes.

1.1.3.9 Problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las funciones

El descubrimiento del cálculo, casi simultáneamente y por separado, por newton y leibniz es uno de los logros más grandes de la humanidad, pues ha servido de andamio para los más grandes desarrollos científicos que se han tenido en los últimos tiempos. Sin él, los grandes desarrollos tecnológicos, ingenieriles y arquitectónicos difícilmente se hubieran dado. Sin embargo, Hitt (2003a) considera que la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es problemático tanto para estudiantes como para profesores. Entre los conceptos con los que se han presentado estas dificultades, tanto en estudiantes como en profesores están las funciones, que además es, uno de los conceptos fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es (Amaya y Sgreccia, 2014). Asimismo, numerosas investigaciones en didáctica de las Matemáticas (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) evidencian que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros semióticos de representación; es decir, identificar elementos en un registro de partida o registro principal y encontrar su equivalente en un registro de llegada o auxiliar, o incluso, encontrar elementos equivalentes al interior de un mismo registro.

Esta falta de conexión del contenido de dos o más representaciones de una función en el mismo o en diferentes registros, por parte de los estudiantes y algunos profesores, puede resultar problemático al considerar la importancia de las representaciones semióticas como medio de acceso al conocimiento matemático, para el que según Duval (2004) se requiere de la integración sinérgica entre dos o más registros. Esta asociación entre representaciones de una función, ayuda a la comprensión de este concepto, pero además, prepara a los estudiantes y profesores para conceptualizar el límite, la continuidad, la derivada y la integral definida como límite de una suma Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2005).

El no poder establecer conexiones entre representaciones de una función, lleva tanto a estudiantes como a profesores a cometer errores, que aunque Amaya y Medina (2013) consideran que parecen ser connaturales a cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular a los procesos asociados a las transformaciones de representaciones de una función, de no tratarse podrían impedir la concepción adecuada de este concepto, que dada su importancia en la vida de los hombres, podría tener consecuencias nefastas en la vida académica y profesional de una persona.

La incapacidad en los profesores para establecer conexiones entre conceptos matemáticos es una dificultad que va a afectar directamente el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que es una habilidad requerida por todo profesor de matemáticas para identificar y utilizar los registros de representación del objeto que se estudie, para establecer un orden en la presentación de las representaciones, es decir cuál registro se utiliza como registro principal y a partir de ahí, cuál sería el orden en que se utilizan los registros auxiliares. Un profesor necesita de esta habilidad para poder realizar transposiciones didácticas adecuadas de los conceptos que orienta, pero también la necesita para identificar los conceptos requeridos para el aprendizaje de un determinado tema, para fundamentar de forma adecuada el tema que orienta, con el conocimiento de que lo necesita para un tema posterior. La habilidad para hacer este tipo de asociaciones es el fundamento del conocimiento ampliado del contenido propuesto y descrito por Pino-Fan y Godino (2015).

Lo anterior ayuda a entender la importancia del análisis de las dificultades que presentan estudiantes y profesores en el abordaje de situaciones problema (Múnera, 2011) que involucren funciones, como base para la implementación de estrategias que los ayuden en la comprensión de este concepto.

1.1.3.10 El concepto de función como objeto de aprendizaje

Debido a que el proceso de aprendizaje matemático se enfoca, en gran parte, en potencializar el desarrollo de los distintos tipos de pensamientos del área, la actividad misma de hacer conversiones o tratamientos es un proceso interesante, que cuando se logra que el estudiante lo alcance se logran avances significativos en su formación matemática. Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de **función**. Así mismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Amaya y Medina, 2013; Amaya y Sgreccia, 2014; Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Del Castillo, 2003; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto. Una de estas dificultades, según Duval (2004) es hacer transformaciones en y entre diferentes registros de representación, esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en el mismo registro o en otro diferente.

Particularmente en el análisis de relaciones funcionales, es necesario comprender conceptos como: variables, variable dependiente e independiente, dependencia e independencia entre variables, qué significado tienen los coeficientes en una función y en una ecuación, por cuanto determinan en gran medida la magnitud de los cambios en las representaciones de estos objetos, al manipular cualquiera de ellos, tanto por su utilidad en la vida cotidiana, como por su importancia en la comprensión de otros conceptos del cálculo y el análisis funcional. Monzoy (2002) argumenta sobre la importancia que tiene el concepto de función, ya que ayuda a expresar cambios mediante objetos variables, posibilita la búsqueda de relaciones funcionales y causales para explicar los cambios. Por lo que la enseñanza de este tema se convierte en un problema práctico, que puede ayudar al individuo a interpretar el mundo que lo rodea. Para González y Hernández (2002) al estudiar funciones es importante que se parta de las dificultades que presenten los estudiantes relacionadas con el concepto y, proveer condiciones para que ellos desarrollen habilidades que los lleven corregir sus errores conceptuales y les permita comprender y usar espontáneamente el concepto en contextos tanto académicos como socioculturales.

1.1.3.11 Un modelo adecuado para el análisis de los conocimientos didácticos matemáticos.

Magnusson, Krajcik, y Borko (1999) definen el conocimiento del contenido pedagógico como la comprensión de un profesor de cómo ayudar a los estudiantes a entender un tema específico. Incluye el conocimiento de cómo determinados temas, problemas y cuestiones de una disciplina pueden ser organizados, representados y adaptados a los diferentes intereses y capacidades de los alumnos, y luego ser presentados para la instrucción.

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han sido muy fecundas tratando de indagar sobre los conocimientos matemáticos que debe dominar un profesor para enseñar las matemáticas eficientemente. Entre los trabajos más destacados están los de Shulman (1986, 1987, 2005), Ball, Thames y Phelps (2008), y Godino y sus colaboradores (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2009; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015). Como resultado de estos trabajos no se ha llegado a un consenso sobre un marco teórico que caracterice dichos conocimientos (Godino, 2009), pero si se han formulado diversos modelos que han hecho aportes significativos a su caracterización; uno de ellos es el propuesto por Godino (2009), denominado Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM), donde se establece por primera vez un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas.

El CDM se ha ido refinando en diversos trabajos (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2014; Pino-Fan y Godino, 2015). El modelo CDM asume del Enfoque Onto-semiótico su sistema de herramientas teóricas, el cual proporciona un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar, y para las cuales incluyen herramientas teórico-metodológicas que facilitan operacionalizar los análisis del conocimiento incluidos en cada sub-categoría. El modelo del CDM propone tres dimensiones, cada una a su vez, compuesta por sub-categorías:

1) Dimensión Matemática, la conforman las sub-categorías conocimiento común del contenido- relacionado con el conocimiento que un profesor moviliza para resolver los problemas que les coloca a sus estudiantes y para verificar que las soluciones dadas a estos sean apropiadas, más específicamente está relacionado con el conocimiento que el profesor comparte con estudiantes del nivel donde orienta-, y el conocimiento ampliado del contenido -es el conocimiento que le permite al profesor realizar las conexiones entre los conceptos que fundamentan lo que se trabaja en un nivel y proyectar lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente, le permite también seleccionar y utilizar diferentes representaciones de un objeto, decidir cuál registro utilizar como principal y cuál o cuáles como auxiliares.
2) Dimensión Didáctica, conformada por las sub-categorías conocimiento especializado de la dimensión matemática, conocimientos sobre los estudiantes, conocimiento sobre las creencias, concepciones y actitudes de los estudiantes, conocimientos sobre los recursos y medios que utiliza para promover los aprendizajes de los estudiantes, conocimientos sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje, y conocimientos sobre el currículo y su relación con el contexto sociocultural donde se desarrollan los aprendizajes.
3) Dimensión Meta Didáctico-Matemática, esta incluye conocimientos relativos a la capacidad del profesor para reflexionar sobre su quehacer como docente, de su proyección como profesional que tiene necesidades de formación, que cumple un papel social y que asume su responsabilidad ante los requerimiento que le pone la sociedad y ante sus propios retos.

Las tres dimensiones están muy relacionadas entre sí, cada una cumple funciones específicas aunque no exclusivas, ya que en algunos casos las comparten o se traslapan. La dimensión Matemática es integral, integrada e integradora por la naturaleza de sus componentes: el conocimiento común del contenido es absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, ya que éste debe conocer el material que enseña y poderlo modificar para construir situaciones problema, sin que pierda su esencia matemática. El conocimiento especializado del contenido, facilita entre los conceptos, establecer los enlaces, vínculos y conexiones intra e inter registros y representaciones que permiten asignar significado y sentido a los objetos matemáticos estudiados.

Las sub-categorías de la dimensión Didáctica son tanto integradoras como integrales, son las que facilitan el conocimiento del material y de las personas objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y para ser útiles necesitan de la presencia de la dimensión matemática y difícilmente se dan en ambientes aislados a los de procesos de enseñanza. Por lo que la efectividad de los aprendizajes va a depender en gran medida de la habilidad del profesor para integrar las componentes de cada dimensión. El conocimiento de los estudiantes es integrado a los demás conocimientos del profesor, es parte integral de los demás conocimientos de la Dimensión Didáctica, pero a la vez es integrador porque se requiere de él para un buen desarrollo de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje que se emprenda.

La dimensión Meta Didáctico-Matemática hace al profesor consciente que de su formación y actualización continua y permanente, depende en gran medida el aprendizaje de sus estudiantes. Es sumamente importante si se sopesa el interés en formar personas de bien versus resolutores de problemas matemáticos (Rodríguez, 2012), si se quiere que la formación matemática contribuya a la formación de mejores seres humanos y mejores ciudadanos. El establecimiento de este tipo de relaciones entre las distintas dimensiones, dice mucho de la potencialidad del CDM.

1.1.4 Contexto educativo

En la Universidad de Sucre, desde su creación en 1967 el programa de formación de profesores de matemáticas ha tenido tres versiones: Licenciatura en Matemáticas (uno de los tres programas con que se creó la universidad), vigente hasta el año 2000; Licenciatura en Educación Básica con énfasis en matemáticas, vigente hasta el año 2009 y Licenciatura en Matemáticas con Énfasis en Educación Básica (programa actual). Del programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas aún quedan estudiantes en la universidad, aunque fueron acogidos por el plan de transición al nuevo programa de Licenciatura en Matemáticas, sus primeros tres o cuatro semestres los cursaron en el programa Licenciatura en educación Básica con énfasis en Matemáticas y luego de un proceso de convalidación de asignaturas, pasaron al programa Licenciatura en Matemáticas.

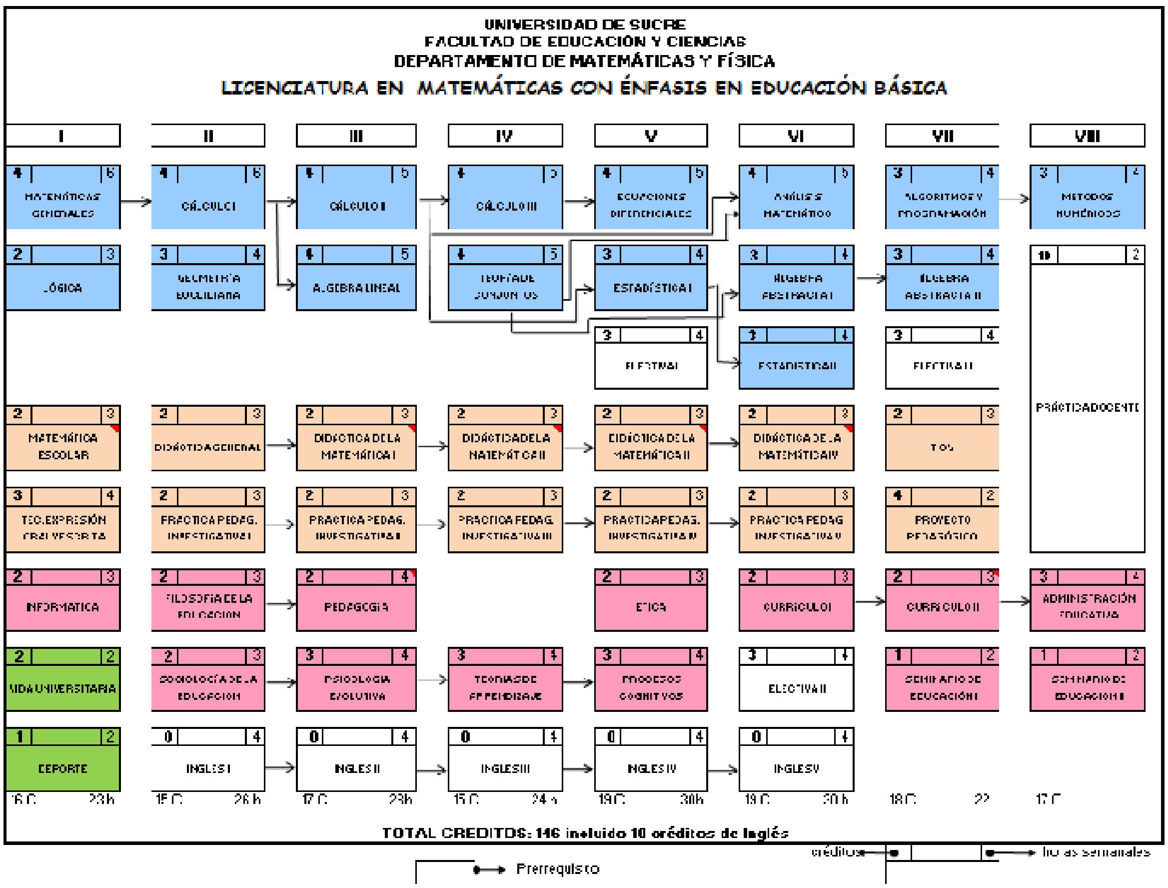


Figura 6. Malla curricular actual del programa Licenciatura en matemáticas con énfasis en Educación Básica

La investigación se llevó a cabo en el programa Licenciatura en Matemáticas con Énfasis en Educación Básica de la Universidad de Sucre, programa en el que se forman docentes con posibilidad de orientar cualquier asignatura asociada a las matemáticas en la educación básica y en la media. El programa se creó en el año 2010 con el nombre de Licenciatura en Matemáticas con Énfasis en Educación Básica y desde entonces se está en un proceso de reajuste curricular atendiendo los requerimientos del contexto y del Ministerio de Educación Nacional.

El programa tiene una duración de cuatro años, repartidos en 8 semestres. El encargado de la administración del programa es el Departamento de Matemática y Física, que es una de las dependencias de la Facultad de Educación y Ciencias. La admisión semestral al programa es de alrededor de 40 estudiantes. En los últimos cuatro semestres por ejemplo el ingreso al programa ha sido de 40 estudiantes hasta el segundo periodo del 2013, y de 45 y 44 estudiantes en el primero y segundo periodos del 2014 respectivamente y de en el primer semestre de 2015.

El plan de estudios del programa contempla el desarrollo de las siguientes asignaturas: en el primer semestre se ven en total de 378 horas: Matemáticas generales (96 horas) Lógica (48 horas), Matemática Escolar (48 horas), Técnicas de la expresión oral y escrita (64 horas), Informática (48 horas), Vida universitaria (32 horas) y deportes (32 horas). En el segundo semestre se ven 416 horas: Cálculo I (96 horas), Geometría Euclidiana (64 horas), Didáctica general (48 horas), Práctica pedagógica I (48 horas), Filosofía de la Educación (48) Sociología de la Educación (48 horas) y Ingles I (64 horas). En el tercer semestre se ven 448 horas: Calculo II (80 horas), algebra lineal (80 horas), Didáctica de la Aritmética (48 horas), Práctica pedagógica investigativa II (48 horas), Pedagogía (64 horas), Psicología Evolutiva (64 horas) e inglés II (64 horas). En el cuarto semestre se ven 384 horas: Cálculo III (80 horas), Teoría de conjuntos (80 horas), Didáctica del álgebra (48 horas), Práctica Pedagógica Investigativa III (48 horas), Teorías de aprendizaje (64 horas) e Inglés III (64 horas). En el quinto ven 480 horas: Ecuaciones diferenciales (80 horas), Estadística descriptiva (64 horas), Didáctica del cálculo (48 horas), Práctica Pedagógica Investigativa IV (48 horas), Procesos cognitivos (48 horas), ética (48 horas), Electiva I (48 horas) e Inglés IV (64 horas). En el sexto ven 480 horas: Análisis matemático (80 horas), Algebra abstracta I (64 horas), Estadística inferencial (64 horas), Didáctica de los recursos tecnológicos (48 horas), Práctica Pedagógica Investigativa V (48 horas), Currículo I (48 horas), Electiva II (48 horas) e Inglés (64 horas). En el séptimo semestre se ven 352 horas: Algoritmo y programación (64 horas), Algebra abstracta II (64 horas), Tic (48 horas), Proyecto Pedagógico (32 horas), Currículo (48 horas) y Seminario de Educación (32 horas). Y en el octavo semestre se ven 160 horas: Métodos numéricos (64 horas), Práctica Docente (32 horas), Administración Educativa (32 horas) y seminario de Educación II (32 horas). Las tres electivas se pueden elegir de una lista de cuatro asignaturas: Latex, Historia de las Matemáticas, física, Matemáticas Financieras y Geometría Analítica. En total son por lo menos unas 1168 horas de la componente matemática, y por lo menos unas 1040 horas de la componente didáctico- pedagógica.

La propuesta de formación de docentes de matemáticas de la Universidad de Sucre, contempla la metodología de seminario, permitiendo con ello, al docente en formación, lograr actualización en problemáticas educativas vigentes y sobre innovaciones hechas en el campo pedagógico y educativo, y que adquiera herramientas que le posibiliten concretar la práctica docente y un proyecto pedagógico como propuesta de solución a un problema identificado en el desarrollo de la práctica pedagógica investigativa, siendo por ello un fruto de su experiencia investigativa durante el proceso de formación en la Universidad de Sucre.

El plan de estudios de este programa se desarrolla a través de tres núcleos de formación:

- Núcleo de formación disciplinar: aparece en la malla curricular mostrada en la figura 6 en color azul.
- Núcleo de formación didáctico e investigativo: aparece en la malla curricular mostrada en la figura 6 en color rosado.
- Núcleo de formación pedagógico y humanístico: aparece en la malla curricular mostrada en la figura 6 en color verde o blanco.

Estos tres núcleos se ejecutan simultáneamente desde el primer semestre, siendo el núcleo didáctico e investigativo fuente y destino del trabajo que realiza cada uno de los otros dos.

1.1.4.1 Núcleo disciplinar

El desarrollo del **núcleo disciplinar** se logra mediante la tematización de contenidos esenciales de la matemática, dotando al futuro docente de claridad conceptual y procedimental, atendiendo los ejes conceptuales numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio, los cuales se corresponden con los establecidos en la matemática escolar.

Las asignaturas que conforman el núcleo disciplinar, son las siguientes: matemáticas generales y lógica; cálculo I y geometría euclidiana; cálculo II y probabilidad y estadística; cálculo III y álgebra lineal; ecuaciones diferenciales y teoría de conjuntos; análisis matemático, álgebra abstracta I; algoritmos y programación, y álgebra abstracta II.

1.1.4.2 Núcleo de formación didáctico investigativo

Mediante el desarrollo del **núcleo de formación didáctico investigativo**, se busca brindar herramientas conceptuales que le permitan al docente en formación comprender, reflexionar y actuar sobre los fenómenos que afectan el proceso de aprendizaje de las matemáticas (Parcerisa, 2004).

La formación en el núcleo didáctico e investigativo tiene como ejes centrales la didáctica general y las específicas, aplicables a cada uno de los grados de los niveles de educación básica y media donde saldrán a orientar clases los profesores en formación. Esto con el fin de facilitarles herramientas necesarias que le posibiliten la construcción de una didáctica apropiada a temas específicos de matemática, desde una perspectiva sociológica, antropológica, investigativa y pedagógica.

Con respecto a la Matemática Escolar, se socializan referentes teóricos de la educación matemática, los cuales permiten a los docentes en formación concebir propuestas de solución a problemas identificados durante el primer ciclo; se abordan temas relativos a la aritmética escolar, geometría escolar y transición de la aritmética al álgebra, unido al trabajo que se realiza en la práctica pedagógica investigativa sobre las mismas, orientada hacia la observación de las prácticas pedagógicas del maestro de matemáticas en los ambientes escolares y el entorno socio cultural del contexto, consolidando una experiencia de formación en Investigación.

La Práctica Pedagógica Investigativa es grupo de asignaturas teórico-prácticas, donde se sientan las bases y se trazan los lineamientos investigativos de los futuros profesores de matemáticas. Se les enseña a elaborar una propuesta de investigación, a fundamentarla teóricamente, a elaborar y ejecutar los instrumentos para recoger la información, a analizar las resultados, a realizar los procesos de intervención pedagógica y a elaborar reportes y artículos de investigación.

Didácticas de la Matemáticas es un grupo de asignaturas donde se orienta al futuro profesor de matemáticas en el análisis de las condiciones para el desarrollo de la clase de matemáticas: la planeación, ejecución y evaluación de un determinado contenido matemático, en la forma de problematizar los procesos de formación, desde el análisis didáctico de los contenidos matemáticas. Los estudiantes cursan simultáneamente cada Práctica Pedagógica Investigativa con una de Didáctica y otras de fundamentación disciplinar de las matemáticas, de tal forma que se pueda ir orientando la didáctica de temas o contenido ya vistos.

Según lo plasmado en el documento maestro que fundamenta el programa, en las DIMES se debe planear, ejecutar y evaluar un proyecto didáctico sobre un contenido matemático, lo que problematiza el proceso de formación del futuro docente al abordarse dicho proyecto desde el análisis didáctico de los contenidos matemáticos, proceso en el cual se suscitan preguntas y respuestas a los otros núcleos de formación, las cuales dialogan para la concepción de dicho proyecto.

La práctica docente, como su nombre lo indica, es una asignatura práctica en la que los profesores en formación realizan su práctica docente en las instituciones educativa. En este proceso son orientados por un profesor asignado por la universidad y cada profesor en formación es acompañado por el docente encargado de la asignatura donde hace la práctica. La práctica docente es la última asignatura que se ve en la carrera, cuando ya se han agotado todas las asignaturas del currículo, aunque en algunos casos muy esporádicos, algunos estudiantes la ven simultáneamente con otras asignaturas.

Las competencias desarrolladas en el proceso generado por el núcleo didáctico investigativo, deben reflejarse en el desempeño profesional del egresado, con la oportunidad de ser validadas en el escenario de la práctica docente, la cual se implementa durante el semestre VII -o posteriormente, si es el caso-, en experiencia plena, en dos grados: uno en la educación básica y el otro en el nivel de educación media.

Las asignaturas que componen el núcleo de formación didáctico investigativo son las siguientes: Matemática escolar y técnicas de expresión oral y escrita; didáctica general y PPI I; didáctica I de la matemática escolar y PPI II; didáctica II de la matemática escolar y PPI III; didáctica III de la matemática escolar y PPI IV; didáctica IV de la matemática escolar y PPI V; proyecto pedagógico y práctica docente.

1.1.4.3 Núcleo pedagógico y humanístico

Con el **núcleo pedagógico y humanístico** se busca brindar herramientas conceptuales que le permiten al profesor en formación, comprender, reflexionar y actuar sobre los fenómenos que afectan el proceso de aprendizaje de la matemática. La fortaleza observable en el campo pedagógico y humanístico, favorece la comprensión de mediaciones para procesos de aprendizaje de la matemática escolar (De Berg, Greive, 1999).

Las asignaturas que componen el núcleo pedagógico y humanístico son las siguientes: Informática y deporte; filosofía de la educación y sociología de la educación; pedagogía y Psicología Evolutiva; Teoría del Aprendizaje; ética y Procesos Cognitivos; currículo I y currículo II.

1.1.4.4 Asignaturas complementarias

En el programa hay además un grupo de asignaturas complementarias, las cuales son: Tecnologías de la Información y la Comunicación, seminario de educación I y seminario de educación II, administración educativa e inglés (cuatro ciclos).

1.1.4.5 El saber matemático previsto en los egresados del programa

Teniendo en cuenta la estructura del programa, en éste se busca que las personas que se formen en él, sean profesores críticos, autónomos y reflexivos sobre su quehacer, competentes en el saber disciplinar y competentes para orientar en aprendizaje de las matemáticas que saben, innovadores de didácticas apropiadas para la enseñanza de la matemática escolar, que comuniquen coherentemente sus ideas en forma oral o escrita, capacitados para articular contenidos, metodologías y evaluar en los niveles de la educación básica y media de acuerdo con los Lineamientos y estándares Curriculares y a las necesidades sociales, indagadores sobre dificultades/conflictos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares e innovadores de estrategias que ayuden a minimizar dichas dificultades/conflictos, preparados para comprender los saberes pedagógicos y matemáticos, mediador de procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas escolares, gestores de recursos que les faciliten el establecimiento de conexiones entre los diferentes elementos de las representaciones de los objetos matemáticos abordados en el proceso de enseñanza y aprendizaje y capacitado para acceder a niveles más avanzados de formación.

1.2 LOS ANTECEDENTES

En este apartado se presenta un panorama de las investigaciones en educación matemática sobre las dificultades con la enseñanza y el aprendizaje de las funciones. Las investigaciones relacionadas al problema de investigación de este trabajo se han clasificado en tres grupos: 1) Trabajos sobre el conocimiento de los profesores necesario para la enseñanza de las matemáticas; 2) Trabajos sobre a las dificultades a que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en la enseñanza y aprendizaje de las funciones; y 3) Trabajos sobre los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores sobre la enseñanza de las funciones.

1.2.1 Trabajos sobre el conocimiento de los profesores necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Una discusión que se ha venido dando hace mucho tiempo es sobre lo que un profesor de matemáticas necesita saber para ser competente ayudando a que sus estudiantes comprendan las matemáticas que éste oriente. Han habido tres posturas predominantes: la primera es que los docentes deben ser conscientes del papel de las matemáticas en la vida del hombre y por tanto, su papel fundamental en el currículo de las instituciones, además, tener un amplio conocimiento sobre los temas que orienta. La segunda es que los docentes deben saber mucha más matemáticas de la que enseñan y además, tener cierto conocimiento de contenido pedagógico que le facilite enseñar matemáticas para que sus alumnos la comprendan. Y la tercera es que con saber mucha más matemáticas de la que enseñan es suficiente (Ball, Thames y Phelps, 2008). En todos los casos, es claro que un docente además del contenido matemático, debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen al desarrollar su práctica enseñando matemáticas, esto es, tener un conocimiento matemático mucho mayor de lo que enseña, y un complemento que facilite su enseñanza. Se asume que ese complemento es de tipo didáctico-pedagógico, es decir, es el conocimiento didáctico necesario para enseñar las matemáticas.

A mediados de los años 80s, comenzó el interés en la conceptualización de los conocimientos del contenido de los profesores. Shulman (1986) y sus colegas propusieron un dominio especial del conocimiento del maestro al que llamaron conocimiento didáctico del contenido. En este trabajo propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés) y conocimiento curricular. Causa curiosidad que hasta entonces no hubiera un conocimiento del contenido exclusivo para la enseñanza, como algo específico.

Posteriormente, Shulman (1987) amplía su propuesta a siete categorías para el conocimiento del profesor, y lo llama 'categorías del conocimiento base':

1) Conocimiento del contenido, referidos al conocimiento de los contenidos disciplinares que debe tener un profesor; 2) conocimiento pedagógico general, que se refieren al conjunto de estrategias generales y aquellos principios que le ayudan al profesor a gestionar la clase. 3) conocimiento curricular, referido al conocimiento de materiales y herramientas de apoyo en el trabajo de los profesores; 4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), se refieren a esa amalgama especial de contenido y pedagogía propio de los profesores, que le permiten utilizar estrategias y hacer transformaciones para facilitar la comprensión de un contenido específico; 5) conocimiento de los estudiantes y sus características, esto hace referencia al conocimiento que el profesor tiene de sus estudiantes frente a los contenido; 6) conocimiento de los contextos educativos, que van desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de

las comunidades y culturas; y 7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Shulman (2005) hace una propuesta sobre los conocimientos mínimos que debe tener un profesor y los organiza en las siguientes siete categorías:

- *Conocimiento del contenido,* el saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los escolares. Este conocimiento se apoya en dos bases: la bibliografía y los estudios acumulados en cada una de las disciplinas, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento en estos campos de estudio.
- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento didáctico del contenido*: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos* y de sus características;
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos* (p.11).

Ball y sus colaboradores continuando con el trabajo propuesto por Shulman y sus colaboradores describen lo que ellos llaman Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Este lo han definido como ese conocimiento matemático que el profesor utiliza en el aula para instruir a sus alumnos y que estos crezcan matemáticamente (Hill, Ball y Schilling, 2008). En particular Ball et al. (2008) sugieren respecto al conocimiento de un profesor que no es solo el conocimiento de los contenidos por un lado y el conocimiento de la pedagogía por el otro, sino una especie de amalgama del conocimiento de los contenidos y la pedagogía que es fundamental para su enseñanza, y para ello proponen dividir el Conocimiento Matemático para la Enseñanza en dos grandes categorías: 1) conocimiento del contenido, compuesto a su vez por tres subcategorías: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) conocimiento pedagógico del contenido, conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo:

Dominio 1. ***Conocimiento común del contenido***: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza. Este dominio involucra el conocimiento y la habilidad que nos permite obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos.

Dominio 2. ***Conocimiento en el horizonte matemático***: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículo y los requerimientos académicos mínimos para el abordaje de un tema determinado, por lo tanto le indica al profesor cuando avanzar o retroceder, este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas.

Dominio 3. ***Conocimiento especializado del contenido***: es el conocimiento matemático que atiende las especificidades que sólo son atinentes a la acción de enseñar, a las adecuaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable.

Dominio 4. ***Conocimiento del contenido y de los estudiantes***: es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y el conocer acerca de las matemáticas. Integra conocimiento sobre la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos.

Dominio 5. ***Conocimiento del contenido y de la enseñanza***: es el conocimiento matemático para el diseño de tareas, cada una de las cuales requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes, es el conocimiento que permite hacer las transposiciones didácticas.

Dominio 6. ***Conocimiento del Currículo***: comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado. Posteriormente se hará un análisis más detallado de estos dominios.

Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007) desarrollan en diversos trabajos el modelo denominado Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS), el cual formula una ontología de los objetos matemáticos, asumiendo la matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartidos. El EOS incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo, con bases semióticas de naturaleza pragmática, y además, un modelo instruccional que se complementa con los otros. Es decir, esta teoría se puede dividir en tres partes: teoría de los significados sistémicos e institucionales, teoría de las funciones semióticas y teoría de las configuraciones didácticas. Aportan una categorización de los elementos intervinientes de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático, estructurándolos en configuraciones de procesos, objetos y relaciones. Enfatiza la atención en el aprendizaje individual, priorizando los aspectos psicológicos que no se consideran en la perspectiva antropológica. Y según Franke, Kazemi, y Battey (2007) provee de herramientas teóricas que facilitan al investigador realizar un análisis detallado y pertinente de los conocimientos didáctico-matemáticos que deben tener los profesores para la enseñanza eficiente de las matemáticas.

Godino, Font, Contreras, y Wilhelmi, (2006) realizan un análisis comparativo entre las nociones propuestas en la teoría de situaciones didácticas, la teoría antropológica de lo didáctico y la teoría de los campos conceptuales para estudiar los procesos de cognición matemática, así como los aportes de la dialéctica instrumento-objeto y de los registros de representación semiótica. Analizan semejanzas, diferencias y complementariedades de estos modelos teóricos buscando un marco unificado para el estudio de los fenómenos cognitivos e instruccionales en didáctica de las matemáticas. Además analizan el papel que podría jugar la ontología matemática hacia un proceso de articulación coherente de dichas teorías. Por otra parte Godino, Rivas y Arteaga (2012) describen una metodología para la mejora progresiva de instrumentos de evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares.

(Godino, 2009) formuló el denominado Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM), donde por primera vez se establece un sistema de categorías para el análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. El CDM ha sido refinado en diversos trabajos (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2014; Pino-Fan y Godino, 2015). Este modelo asume del EOS su sistema de herramientas teóricas. El EOS provee un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que el profesor debe dominar, comprender, saber aplicar y valorar, y para las que incluyen herramientas teórico-metodológicas que facilitan su operacionalización, para el análisis del conocimiento en juego, sub-categpria por sub-categoría.

El modelo del CDM propone tres dimensiones, cada una a su vez, compuesta por sub-categorías: 1) Dimensión Matemática la conforman las sub-categorías conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido. 2) Dimensión Didáctica conformada por las sub-categorías conocimiento especializado de la dimensión matemática, conocimientos sobre los estudiantes, conocimiento sobre las creencias, concepciones y actitudes de los estudiantes, conocimientos sobre los recursos y medios que utiliza para promover los aprendizajes de los estudiantes, conocimientos sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje, y conocimientos sobre el currículo y su relación con el contexto sociocultural donde se desarrollan los aprendizajes. Y 3) Dimensión Meta Didáctico-Matemática, la que incluye conocimientos relacionados a la capacidad del profesor para repensar su propia práctica, para visionarse en un futuro, por tanto, de cualificarse constantemente, por la conciencia de sus propias necesidades de formación, ante su rol social, para asumir con responsabilidad los requerimiento que le pone la sociedad.

1.2.2 Trabajos sobre las dificultades a que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en la enseñanza y aprendizaje de las funciones

El aprendizaje de las funciones, históricamente han sido fuente de problemas como se pone de manifiesto en diversas investigaciones (Acuña, 2001; Alarcón, Albarrán, y Dolores, 2002; Amaya y Medina, 2013; Amaya y Sgreccia, 2014; Dolores, 2004; Fabra y Deulofeaut, 2000; Gatica, Maz-Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo, 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b).

Justamente, la intención de este apartado es, a través de una revisión de antecedentes, mostrar los problemas que se han generado en el aprendizaje de las funciones. Muchos de estos trabajos (Acuña, 2001; Alarcón et al., 2002; Amaya y Medina, 2013; Amaya y Sgreccia, 2014; Dolores, 2004; Fabra y Deulofeaut, 2000; Gatica, Maz-Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo, 2010; Hitt, 2000; 2003a, 2003b) indagan acerca de las dificultades presentadas por los estudiantes al decodificar la información al hacer transformaciones entre registros semióticos de representación de una función en cierto contexto dado, lo que se establece como un punto de inicio para los trabajos en esta línea. Estos trabajos se han enfocado en la forma cómo el alumno aprende, bajo qué condiciones se produce un mejor aprendizaje, y en los tipos de dificultades y obstáculos que se encuentran al analizar las producciones de los estudiantes.

Hitt (2000) en su búsqueda por entender cómo se construye el conocimiento matemático, hace un análisis del uso de representaciones gráficas y figurales, y los relaciona con lo que él llama "aspectos teóricos actuales como son los sistemas semióticos de representación y sus implicaciones en la articulación entre representaciones internas" (p.131). Posteriormente Hitt (2003a) analiza la construcción de conceptos desde una teoría de las representaciones por parte de los estudiantes, y en particular sobre la problemática del uso de la calculadora gráfica para la construcción de conceptos en el aula de matemáticas, estudiando el rol que juegan las representaciones de un concepto en su construcción. Infiere que las tareas de conversión entre representaciones y la manipulación coherente de tales representaciones permitirán una sólida construcción del concepto en juego. Para ello, es necesario implementar en el aula, tareas en las que la actividad matemática demande el uso coherente de diferentes representaciones. La tecnología, desde este punto de vista, sirve como herramienta fructífera para la construcción de conceptos más profundos que se reflejen en procesos exitosos por parte de los estudiantes en la resolución de problemas. En este trabajo se discute además, cuál es el papel del uso de la tecnología en matemáticas, dado que el uso de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas. En otro trabajo Hitt (2003b) considera que si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del mismo.

Porque es difícil concebir que un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos.

En lo planteado por Hitt se puede inferir que además de los problemas epistemológicos propios del concepto de función y del cálculo en general, se añaden otros relacionados con falencias en el mal aprendizaje del pre-cálculo, que como se sabe son necesarios para el desarrollo de temas trascendentales. El interés en estos trabajos está en el tratamiento que se hace a las producciones de estudiantes y profesores al hacer el tránsito entre diferentes registros semióticos de representación, analizando las dificultades en el aprendizaje del concepto de función. Además, resulta de interés el contexto donde se plantean las situaciones, el manejo que se da a las tecnología como herramientas de visualización que permite relacionar, los elementos de diferentes registros de una función, complementando la información proporcionada en cada uno de ellos, con la de los otros y así asignar y compartir significado y sentido a los conceptos que se van desarrollando y que faciliten aprovechar los conocimientos previos de los estudiantes en beneficio de su propio aprendizaje.

En los trabajos de Dolores, (2004, 2006); Alarcón et al. (2002); Acuña, (2001); Fabra y Deulofeaut, (2000); y Gatica et al (2010) se hace el análisis de funciones a través de su representación gráfica. En el trabajo de Dolores, (2004), se indaga por los intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos de estabilización y coordinación de propiedades de ubicación y comportamiento. Al realizar un análisis de las respuestas de los estudiantes, Infiere que éstos asocian el comportamiento de las imágenes en las gráficas, con el comportamiento de sus abscisas sin importarles el signo de sus ordenadas. Que además, relacionan los puntos estacionarios con los ceros de la función, el crecimiento con imágenes positiva y el decrecimiento con imágenes negativas. En este trabajo se privilegió el uso de registros de representaciones gráficas, y del lenguaje verbal escrito para la descripción de las propiedades de ubicación y comportamiento: las propiedades de ubicación se refieren al signo de las coordenadas de la gráfica y las de comportamiento al crecimiento, decrecimiento y puntos de estabilización. Las exploraciones se hicieron a través de gráficas cartesianas descontextualizadas y con preguntas de opción múltiple. Además, se hizo el análisis de las concepciones alternativas de los estudiantes al presentárseles una gráfica cartesiana.

En relación con la misma temática, Alarcón et al. (2002) exploran las concepciones alternativas que tienen los estudiantes acerca de la lectura de las gráficas cartesianas que representan movimiento físico y encontraron que estos juegan un papel importante en el aprendizaje significativo de tales conceptos. Además, aportan que con frecuencia se encuentra que las interpretaciones que hacen los estudiantes no coinciden con las de los expertos y las de los textos. Caso similar ocurre con los profesores que ofrecen estas asignaturas. Este trabajo se convierte en un referente obligado por el tratamiento que se hace de las situaciones, del contexto en que se trabajan y la variable respuesta que tienen en cuenta, al realizar los análisis.

Acuña (2001) indagó sobre el uso y las concepciones asociadas a la comparación de orden entre las coordenadas de puntos sobre el plano para facilitar el entendimiento de procesos de graficación en el plano cartesiano; encontrando que la comparación de orden entre las coordenadas de puntos del plano depende de la ubicación de los puntos en los distintos cuadrantes y por tanto del valor de los números asociados a las coordenadas. Aquí las preguntas fueron enfocadas a que los estudiantes hicieran una comparación con relaciones mayor que, menor que de las coordenadas de puntos del plano, luego de hacer una inspección visual. Lo interesante de este trabajo es precisamente ese tratamiento comparativo que permite relacionar las coordenadas de un punto gráficos, como base para que el estudiante asigne significado a los conceptos asociados cuando se trabajen en utilizando representaciones fenomenológicas. No obstante llama la atención en este trabajo que se refiera indistintamente a ecuación y a función cuando se refiere a la representación algebraica de una función, como si se trataran de un mismo concepto.

Fabra y Deulofeaut, (2000) desarrollaron una investigación centrada en las ideas y realizaciones de alumnos al analizar el gráfico de una función dada a través de condiciones expresadas en forma verbal que representan una situación descontextualizada, es decir, se presenta la situación en el lenguaje materno y se pide hacer una conversión al registro gráfico. Se miraron especialmente los razonamientos que utilizan y las estrategias que aplican los estudiantes, así como los procesos de evolución por el uso continuo de gráficos de funciones. El hecho de tener las características de una gráfica y poder realizarla, supone la necesidad de procesos avanzados de graficación.

Dolores (2006) explora las **argumentaciones** sobre los cuales los estudiantes basan sus respuestas a actividades propias del análisis de funciones a través de sus gráficas, cuando ya habían visto este tema en un curso ordinario de cálculo. Aporta entre sus conclusiones que: los estudiantes consideran que las funciones son crecientes cuando sus gráficas van de izquierda a derecha, sin hacer referencia a la relación entre sus variables. La mayoría asocia condiciones de crecimiento con imágenes positivas, para ellos las condiciones de crecimiento y positividad o decrecimiento y negatividad de una función parecen ser condiciones concomitantes. Los argumentos aquí, parecen responder más a la necesidad de los estudiantes de describir el comportamiento de las funciones, porque se les pide hacerlo, que de asegurar la veracidad de sus proposiciones.

En los trabajos de Ibáñez (2012) y León y Corredor (2003), se hace el análisis de procesos de los estudiantes al comunicar sus respuestas. Ibáñez (2012) propone un marco para el diseño y construcción de instrumentos de evaluación de la comprensión de textos escritos. Para los cuales se basa en la concepción teórica del fenómeno. Destaca además, el valor de algunos estudios de corpus que les permiten sustentar las toma de decisiones de las personas que orientan el proceso. Permitiendo guiar el establecimiento y mantención de una relación coherente entre los constructos teóricos a medir, los textos a seleccionar y las técnicas de evaluación a utilizar, lo que, en definitiva, debería redundar en la evaluación de los desempeños estudiantiles.

Por su parte León y Corredor (2003) buscando comprender y desarrollar procesos argumentativos en matemáticas, encontraron un estado generalizado de poco desarrollo de competencia comunicativa y matemática tanto en estudiantes como en profesores, problema que se manifiesta cuando tanto los unos como los otros se enfrentan a situaciones que les exigen interpretar y producir discursos argumentativos y soluciones para problemas matemáticos y validaciones de las mismas.

Matos y Da Ponte (2008) abordan la relación entre la resolución de tareas de investigación y la exploración que involucran relaciones funcionales y el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado. Prestando especial atención a la forma cómo interpretan y utilizan el lenguaje algebraico. El estudio abarcó temas como secuencias de números, funciones y ecuaciones de primer grado. Reportan el favorecimiento del desarrollo del significado para el lenguaje algebraico y la construcción de una visión más amplia sobre el uso de símbolos debido al énfasis en el estudio de relaciones funcionales, con base en tareas de exploración e investigación.

En los trabajos de Gatica et al. (2010), Arce et al. (2005), Chaucanés et al. (2008), Castaño (2008), Romero, Rojas y Bonilla (2010), Andrade y Saraiva (2012), se hace un análisis de funciones y se analiza si el alumno identifica los distintos registros de representación y los errores que cometen al realizar la conversión entre dichos registros. La importancia de estos trabajos en el marco del presente es enorme, por cuanto aportan elementos conceptuales valiosos y reportan hallazgos de suma trascendencia en este campo de la investigación matemática.

Arce et al. (2005) con el fin de avanzar en la comprensión de los problemas vinculados con la formación de pensamiento algebraico en el contexto escolar, desarrollaron la investigación Iniciación al álgebra: situaciones funcionales, de generalización y modelación. Se articulan las perspectivas funcional, de generalización, y modelación a través de las cuales se rompe con la tradicional manera de iniciar el álgebra y a partir de las cuales, los estudiantes pudieran acercarse significativamente a los conceptos de función y ecuación, mientras construían las reglas sintácticas, en una relación dialéctica entre sintaxis y semántica.

Chaucanés et al. (2008) realizaron la investigación Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional con estudiantes del municipio de Sincelejo. En ese trabajo se miraron algunas estrategias utilizadas por los estudiantes al intentar dar respuestas a las preguntas que se les plantearon; se utilizaron situaciones problema relacionadas con el pensamiento variacional y se indagó por la forma como los estudiantes determinaban el valor de una incógnita, el intervalo de variación de las variables involucradas en la situación, determinaban o utilizaban un patrón de regularidad, modelaban matemáticamente la situación y describían los procesos realizados al dar algunas respuestas. Luego realizaron un proceso de intervención, consistente en la aplicaron de una serie de talleres, como estrategia para curar las dificultades encontradas en los estudiantes al resolver las situaciones.

Castaño (2008) realizó un trabajo apoyado en la teoría de Duval (2004) sobre la operación de conversión entre registros semióticos de representación, donde analizó los estudios de transcodificación numérica. Afirma que en los estudios sobre el proceso de compresión del sistema decimal de numeración, a los niños conviene relacionar las actividades de conversión entre los registros verbal e hindú-arábigo, a la actividad operatoria, en el momento en que ellos intentan dar respuestas a las demandas lógicas que les hace la comprensión de la sintaxis del sistema decimal de numeración, como forma de manifestar los dispositivos que guían las construcciones que ellos hacen en este campo.

Romero et al. (2010) analizan la actividad matemática realizada por dos estudiantes para profesor de matemáticas en un curso de Didáctica de la Variación para describir y analizar el uso del registro algebraico alfanumérico al resolver un problema de modelación relacionado con la función lineal cuando participaron en un entorno de aprendizaje que promueve el trabajo colaborativo. En sus resultados reportan evidencias de la presencia de conflictos semióticos y de la modificación de un conflicto interaccional en un conflicto cognitivo. El análisis realizado los llevó a caracterizar la emergencia de los conflictos semióticos, así como el manejo que a éstos les dan los estudiantes, proporcionando información que facilita comprender sus procesos de aprendizaje (Peronard, 1997). Todo esto en un contexto de aula en el que se adopta la resolución de problemas. Este trabajo tiene algunos aspectos muy coincidentes con el que aquí se desarrolla. Sobre todo en lo relacionado con el análisis de las producciones de estudiantes para profesor, a través del estudio de representaciones semióticas teniendo como marco el tema de funciones.

Andrade y Saraiva (2012) estudiaron las conexiones que los estudiantes establecen entre las diversas representaciones de una función, movilizando e interconectando sus conceptos definición e imágenes, al enfrentarse a tareas que impliquen la resolución de problemas, exploratorias e investigativas, usando la calculadora gráfica. Buscaban identificar y comprender las dificultades que los estudiantes manifiestan en el aprendizaje de las funciones, al analizar las conexiones hechas por ellos entre las diversas representaciones de las funciones consideradas. Su trabajo lo fundamentaron en la teoría de Duval (registro de representación semiótica) y la teoría cognitivista de Vinner (concepto imagen y concepto definición). Encontraron que la coordinación que los estudiantes hacen entre los diversos registros de representación de una función y de diferentes funciones, les permite lograr diferentes perspectivas de una función. Fue destacada la paradoja cognitiva de la comprensión matemática, a través de la coordinación que hicieron de los registros de representaciones semióticas (lenguaje natural, algebraico, tablas y gráficos), permitiéndoles dejar de confundir el objeto matemático función con su representación y, más aún, lograr una fuerte convergencia del concepto imagen al concepto definición de función.

Guzmán (1998) toma como referencia el enfoque cognitivo basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de nociones matemáticas, en particular algunas propiedades de las funciones. Se basa en la teoría de Duval y sus registros semióticos de representación. Trabaja con estudiantes de primer año de ingeniería, y acuden a registros gráfico, algebraico (o formal) y de la lengua materna o natural en el tema funciones reales y el sentido que las nociones involucradas cobran para ellos. En sus resultados evidencian que las respuestas de los estudiantes están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más de ellos. Es decir, a los estudiantes le cuesta hacer conversiones y por tanto sus respuestas las derivan de alguna transformación tipo tratamiento, y en las escasas ocasiones en que realizan una conversión, recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases.

En estos trabajos se hace el tránsito por distintos planos semióticos de representación y guardan estrecha relación con el nuestro, ya que se hace un tránsito entre registros de representación, se relacionan elementos dentro del mismo registro y entre diferentes registros de representación. El realizado por Chaucanés et al. (2008), además, es un soporte o guía por el tratamiento que hicieron de la estrategias utilizada por los estudiantes en sus intentos de solución a las situaciones problema y por el tipo de situaciones que se utilizaron para tratar de curar las dificultades encontradas en los estudiantes a lo largo de la investigación.

Cordero (2001) reporta un trabajo donde se asume como problema fundamental de la enseñanza de la matemática, una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, aquí se dirige la atención a la reconstrucción de significados de la matemática en diferentes niveles escolares. Dicha reconstrucción provee de categorías del conocimiento matemático con relación a la actividad humana. Se plantea como hipótesis que esta actividad es la fuente de la reorganización de la matemática disciplinar y del diseño del discurso de la matemática escolar; la aproximación socioepistemológica, intenta articular dos grandes componentes: la social y la epistemológica, en los que el humano y su actividad se conviertan en elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa. La reconstrucción de significados, fuente para reorganizar la obra matemática, corresponde a una epistemología cuya tarea principal es modelizar la actividad humana, donde se encontrarán las categorías que vertebran el contenido matemático y que permitan la reorganización de la obra matemática (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Este trabajo provee explicaciones del papel de la actividad humana como organización social proveedora de situaciones que permiten asignar significado y sentido a la matemática escolar (Cantoral y Farfán, 2003), como base para construir las secuencias requeridas en las situaciones didácticas. Significados que se pretenden favorecer en este trabajo.

Los trabajos relacionados anteriormente guardan cierta relación, por cuanto se estudian transformaciones de registros de representación de funciones en diferentes contextos. Aunque también tienen diferencias marcadas especialmente en relación con el contexto de donde provienen las situaciones y las variables respuestas consideradas, pero cada uno aporta un punto de vista diferente como apoyo para llevar a cabo esta investigación.

En un trabajo realizado por Cabrera (2014), se plantea como objetivo el análisis del papel que el estudio de la variación tiene en la práctica del profesor de Cálculo de bachillerato, es decir, en los procesos de construcción de conocimiento que potencia en sus clases. Primeramente identificaron los profesores que tuvieran un adecuado desarrollo de pensamiento variacional. Obtuvieron como resultado la identificación del estudio de la variación como una estrategia de construcción de conocimiento que le permite al profesor tomar control de las acciones que realiza con la finalidad de alcanzar los objetivos que se propone como parte de su práctica docente. Esto cobra importancia debido a que esto es propiciado por los factores contextuales y sociales de la comunidad escolar y el tipo de formación que estos demandan para sus jóvenes. Lo que lleva al profesor a problematizar el conocimiento matemático escolar para identificar las ideas fundamentales y los significados que le permitan alcanzar sus objetivos y, también a desarrollar un discurso que le facilite articular los resultados de la problematización en el desarrollo de su clase. Esto evidencia la importancia de que el profesor pueda resignificar la Matemática Escolar y desarrollar nuevas formas de relacionarse con el saber, pues es sobre esta base que deben formularse y postularse conocimientos profesionales que le permitan robustecer su práctica docente.

En los trabajos realizados por Amaya (2012), Amaya y Medina (2013) y Amaya y Sgreccia (2014) se analizan las dificultades de los estudiantes de la media académica al hacer transformaciones de las representaciones de una función, tomando un registro como registro principal y, en algún oreden, otros registros como registros auxiliares. Los resultados en Amaya (2012) evidencian que, aunque los alumnos participantes ya habían tenido numerosas experiencias que involucraban conversiones entre registros de una función, se observaron serias dificultades al realizar conversiones entre los registros de una función. Dificultades que estuvieron relacionadas con tres aspectos específicos: 1) el reconocimiento de los diferentes elementos de una función y cómo estos se relacionan, 2) con el establecimiento de congruencias entre los elementos de dos o más registros de una función y 3) con la complejidad intrínseca del concepto en estudio (Hitt y Morasse, 2009), para reconocerlo y usarlo en contextos cotidianos, es decir, un problema netamente epistemológico.

Amaya y Medina (2013) exploran las dificultades presentadas por 50 estudiantes colombianos del grado once al hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento entre diferentes registros de representación de una función, con el registro figural como registro principal. Encontraron serias dificultades relacionadas con 1) el reconocimiento de los elementos de una función y cómo éstos se relacionan, es decir, para identificar los elementos de las representaciones de una función en cualquiera de sus registros y, por tanto, para poder establecer relaciones de dependencia entre ellos. También se muestran las dificultades para identificar las cantidades que intervienen en una situación, cuáles de ellas cambian y cuáles permanecen fijas, lo que les pudo impedir hacer transformaciones tipo tratamiento. 2) con el establecimiento de congruencias entre los elementos de dos o más representaciones de una función en diversos registros, es decir, dificultad para elaborar un registro a partir de los elementos identificados en el registro figural, es decir, para establecer congruencias entre este registro y aquellos a los que hico conversión, lo que evidencia que la conversión entre registros no se realiza de manera espontánea (Duval, 2012a; Gatica et al., 2010; Hitt, 2003b). Y 3) dificultades en el paso del registro figural al algebraico, mas no al del lenguaje materno, con transformaciones tipo tratamiento, y con la complejidad intrínseca del propio concepto (De Souza, 2009). Esto es, dificultades para concebir la letra como variable en una relación funcional (Ursini y Trigueros, 2006), la cual ha sido reportada entre las diversas dificultades más sobresalientes que se presentan con el concepto de función en los procesos de aprendizaje y enseñanza de este concepto (Dolores, 2004; Quintero y Cadavid, 2008). Estos resultados ratifican que el aprendizaje de la noción de variable debe ser uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza del cálculo, sobre todo por cuanto es imprescindible para la comprensión de conceptos tales como continuidad, límite o derivada de funciones (Gatica et al*.,* 2010).

En el trabajo realizado por Amaya y Sgreccia (2014) se reportan los hallazgos de una investigación donde analizan las dificultades que tienen los estudiantes del grado once al hacer transformaciones de las representaciones de una función, utilizando el registro tabular como registro principal. Los estudiantes tuvieron dificultades con la identificación del contenido de las representaciones, con el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos, con el reconocimiento del registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas. Concluyen que la actividad de hacer transformaciones entre registros de representación de una función es una compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. Estas no son acciones espontáneas y requieren una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión. En general las dificultades de los estudiantes se relacionan con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En relación a la identificación del contenido de la representación de la función en el registro tabular, como registro principal, en su mayoría los estudiantes identificaron algunos elementos, pero no los suficientes establecer congruencias sólidas. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo relacionada con la consecución de una expresión algebraica que representara la situación, y con el establecimiento de equivalencia entre esta expresión – los que la encontraron- y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que les encontrar la ecuación requerida.

En cuanto al funcionamiento de los registros y la coordinación entre estos, manifiestan que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas, por los que para dar sus respuestas necesitaron verificarlas en el registro algebraico analítico.

En las transformaciones tipo conversión siempre utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre el registro algebraico-analítico fue un paso obligado. Lo que quiere decir que no se dieron tratamientos puros, siempre utilizaron al registro algebraico-analítico como auxiliar para hacer modificaciones o comprobar las cuestiones por las que se les indagó. Es decir, utilizando el registro tabular como registro de partida realizaron las operaciones en el registro algebraico-analítico, luego hicieron otra conversión al registro tabular como registro de partida, en el que terminaron el tratamiento.

Estos trabajos que involucran tareas de transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, al promover un mejor entendimiento de las funciones y permitir el desarrollo de procesos de visualización, son un referente obligado para el desarrollo de este, por cuanto indican la forma de establecer conexiones más potentes entre los elementos de una función en sus diferentes representaciones, en diferentes registros para propiciar una mejor comprensión del concepto.

1.2.3 Trabajos sobre los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores sobre la enseñanza de las funciones.

Las investigaciones realizadas con el propósito de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores sobre la enseñanza de las funciones son bastante escasas. Se encontró la una realizada por Ruiz (1994), quien hizo un estudio donde evaluó las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Realizó un estudio didáctico de la noción de función, esto involucró: un análisis de su génesis epistemológica, la determinación del estatus a las funciones en su enseñanza y la caracterización de las relaciones personales de los estudiantes de secundaria a este objeto matemático. Partió de una fundamentación teórica amplia, así como de un análisis detallado de las investigaciones más significativas que se consideraron más relacionadas con el tema estudiado. Es un estudio que aporta elementos para analizar la enseñanza de la noción de función así como para evaluar las concepciones de los alumnos. En un estudio experimental determina las concepciones manifestadas por alumnos de secundaria sobre la noción de función, además, se establecen relaciones adecuadas entre dichas concepciones y las condiciones y restricciones determinadas por el sistema de enseñanza. Esto la llevó a detectar diferentes inconsistencias en el conocimiento de los estudiantes, y además, a determinar tanto obstáculos didácticos, debidos al funcionamiento del sistema de enseñanza, como obstáculos cognitivos, debidos al nivel de conocimiento de los alumnos y a su desarrollo cognitivo.

Ramos y Font (2004) realizaron una investigación sobre el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado. Hicieron un estudio de casos, interesados por el papel que juegan tales objetos matemáticos y didácticos del profesorado en la modificación del significado pretendido para un objeto matemático en una institución escolar, la cual tiene autonomía para modificar dicho significado. Específicamente se interesaron en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura “Introducción a la Matemática”, la cual se imparte en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo en Venezuela. Los resultados que obtuvieron son de tres tipos: teóricos, empíricos y metodológicos. Entre las principales aportaciones de esta investigación están 1) el desarrollo de la Teoría de las Funciones Semióticas para analizar tanto los objetos matemáticos y didácticos de los profesores, como el cambio en una institución. Y 2) la elaboración del cuestionario de escala valorativa sobre diferentes maneras de entender las matemáticas y sobre diferentes maneras de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se derivan de ellas.

Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) analizan la idoneidad didáctica en su faceta epistémica, de un proceso de instrucción sobre la noción de función con estudiantes universitarios de primer curso de ingeniería. La conveniencia de este análisis se basa en su representatividad de un tipo de proceder instruccional más general implementado según un enfoque constructivista innato. El principal conflicto epistémico que reportan es la relación que se establece entre la elección y formulación de la tarea matemática propuesta a los estudiantes para el estudio de la noción de función con el uso que se hace de la noción a nivel social, esto es, se plantea una problemática de naturaleza formal-discursiva que no es reconocida como tal por los participantes en el estudio.
Posteriormente de Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, (2006) realizan un trabajo donde analizan el proceso de estudio realizado en una experiencia de enseñanza de la noción de función con estudiantes universitarios. Al comunicar sus resultados presentan un sistema de nociones teóricas buscando describir los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como valorar la idoneidad didáctica de tales procesos desde una perspectiva global. Este aspecto es de suma importancia en la investigación en matemática educativa, pues establece bases para el análisis y evaluación tanto de instrumentos como del mismo desempeño profesoral e institucional en la formación de las personas que, próximamente serán los encargados de la formación de los jóvenes de nuestras comunidades (Herbst, 2011). Además, con este protocolo de análisis se pretende que los profesores en formación y los profesores en ejercicio reconozcan, además de los conceptos y procedimientos, los distintos registros y representaciones usados para representar un objeto, los tipos de justificaciones de propiedades y procedimientos, los procesos de argumentación y generalización. Con ello se busca que el profesor sea consciente de las conexiones que se pueden establecer entre objetos, buscando favorecer el establecimiento de significados que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar (Godino, Bencomo, Font

y Wilhelmi, 2006) los profesores y que deben aprender a implementar los profesores en formación.

En Font, Acevedo, Castells y Bolite (2008) se propusieron responder las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato? 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?. Y además, afrontar la complejidad que la investigación sobre las metáforas requiere mediante los constructos Elaborados por el Enfoque Onto-semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Presentando como aportes, datos empíricos que podrían facilitar un mejor conocimiento del uso de las metáforas en el proceso de instrucción de las gráficas de funciones en el bachillerato y su efecto en la comprensión de los alumnos; y realizaron un desarrollo de la teoría sobre las metáforas, gracias a la visión ontológica semiótica que sobre ellas permite el Enfoque Onto-semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. También han contribuido al desarrollo del Enfoque Onto-semiótico ya que con esta investigación han permitido el "encaje" de la metáfora en el actual desarrollo del EOS.

En un trabajo realizado por Font (2011) se partió del hecho que los futuros profesores ya tenían un conocimiento matemático amplio sobre las funciones, como resultado de sus estudios anteriores. El objetivo de su estudio fue comentar cómo el estudio de las funciones en el máster que habilita para el ejercicio de la profesión de Profesor de Educación Secundaria puede contribuir al desarrollo de la competencia matemático-epistemológica en los futuros profesores. Resalta que no todos los conceptos matemáticos son igualmente centrales en la disciplina y que la noción de función es uno de los conceptos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora.

Pino-Fan y Assis (2015) realizaron un trabajo con el propósito de ejemplificar el uso de algunas dimensiones y herramientas teórico-metodológicas propuestas por el *modelo del* *conocimiento didáctico-matemático* (CDM), para facilitar el análisis, caracterización y desarrollo de los conocimientos que deberían tener los profesores para desarrollarse eficazmente en su práctica. En este trabajo analizan el desarrollo realizado por dos profesores de enseñanza media, a una actividad sobre patrones planteada en el marco del Programa de Magíster de Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile. Muestran como resultados que los profesores responden sin dificultad aspectos relacionados con el conocimiento común del contenido, pero presentan ciertas dificultades cuando se enfrentan a ítems que buscan explorar otras dimensiones de su conocimiento, por ejemplo, sobre el conocimiento ampliado del contenido, sobre los recursos y medios, o sobre los estados afectivos de los estudiantes.

CAPÍTULO 2

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 INTRODUCCIÓN

En este estudio se analizan los conocimientos didácticos-matemáticos de futuros formadores en formación del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre, Colombia examinando sus producciones, al hacer transformaciones de las representaciones semióticas de una función. El trabajo se fundamenta en la teoría del conocimiento didáctico para enseñar, cuyo pionero es Lee Shulman y continuada por Deborah Ball y sus colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), por Grossman (1990), Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y por Godino y sus colaboradores (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2009; Godino, Rivas y Arteaga, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015) del análisis de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Se toman como referentes algunos trabajos referidos a: 1) **trabajos sobre el conocimiento de los profesores necesario para la enseñanza de las matemáticas, 2)** trabajos sobre a las dificultades a que se enfrentan tanto estudiantes como profesores en la enseñanza y aprendizaje de las funciones y 3) Trabajos sobre los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores sobre la enseñanza de las funciones.

Al respecto, no son abundantes los trabajos en esta línea. Sin embargo, el enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática para el diseño y análisis de tareas dirigidas a la formación matemática y didáctica de profesores, que parece abarcar varios de los elementos de la teoría de los registros semióticos de Duval, y ofrece bases sólidas para realizar el trabajo. En este enfoque se considera la educación matemática como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2009).

En este trabajo se entiende por conocimiento matemático para la enseñanza, “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball, y Schilling, 2008, p.374), es decir, aquellos conocimientos y cualidades de quien enseña, necesarios para llevar a cabo el proceso de enseñar matemáticas a sus alumnos. Se hace énfasis en el proceso didáctico para la enseñanza y en el maestro responsable de su ejecución. Esto hace referencia a la habilidad del docente para plantear y resolver situaciones y tareas de enseñanza de las matemáticas, adecuarlas a los requerimientos institucionales, legales y contextuales, prever y provocar dificultades en sus estudiantes para luego ayudárselas a superar, teniendo en cuenta los requerimientos matemáticos necesarios para que los estudiantes las resuelvan al comprenderlas; así como las cualidades profesionales del profesor. Este proceso de enseñanza aprendizaje implica ayudar al estudiante a que comprenda las matemáticas, proviéndole las condiciones para que lo haga. Esto incluye diseñar encuentros pertinentes con situaciones adecuadas, para que cada estudiante dé lo mejor de sí al desarrollar su potencialidad matemática; prever y provocar las dificultades conceptuales de los estudiantes, analizarlas e implementar estrategias para ayudárselas a minimizar.

En este capítulo se presenta el Modelo Didáctico-Matemático asumido para analizar los objetos matemáticos que emergen de las prácticas desarrolladas por los profesores en formación al realizar transformaciones con las representaciones de una función, así como algunos modelos que le han servido de fundamento y otros muy relacionados. Además, se hace una fundamentación teórica de algunos componentes de la dimensión didáctica del Conocimiento Didáctico-Matemático.

2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La práctica educativa es un proceso dinámico, con una componente altamente reflexiva, que incluye los acontecimientos, producto de la interacción entre maestros, alumnos, contextos y contenidos, con el fin de generar aprendizajes. Es algo que no se limita a la docencia, esto es, a los procesos educativos llevados a cabo en los espacios áulicos. Incluye toda interacción entre los actores involucrados en el proceso educativo, y todo aquello que ocurra antes, durante y después de los procesos interactivos que se dan en el desarrollo de la clase. Tal interacción tiene varias aristas, por un lado están las interacciones entre docentes de una misma institución o de una misma entidad territorial compartiendo y afinando las actividades a proponer, para de esta forma ganar la mayor coherencia en el proceso de enseñanza. La interacción dada entre docentes con pares académicos compartiendo experiencias: esto puede llevarse a cabo en eventos como congresos o reuniones tanto nacionales como internacionales, o a través de publicaciones: esto puede darse publicando libros o capítulo de libros, artículos en revistas, en actas o en memorias de eventos. Otra de las aristas la constituyen las interacciones de los estudiantes entre sí o con pares, lo que puede darse en la participación activa en el desarrollo de las actividades en clase o en la participación en ferias o seminarios escolares.

En este proceso todos los productos que se obtienen son utilizables en beneficio del mismo, especialmente la reflexión sobre las producciones de los estudiantes, en beneficio del aprendizaje de éstos y del aprendizaje del docente sobre su propio quehacer. Como proceso dinámico debe ser flexible, adaptable a los constantes cambios dados en los aprendices, propios de la adquisición de un saber y de sus reacciones, producto de las concepciones nuevas y de su adaptación a prácticas socialmente compartidas. Para García, Loredo y Carranza (2008) el "conjunto de situaciones enmarcadas en el contexto institucional y que influyen indirectamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje propiamente dichos; se refieren a cuestiones más allá de las interacciones entre profesores y alumnos en el salón de clases, determinadas en gran medida, por las lógicas de gestión y organización institucional del centro educativo" (p.4). Estas interacciones son fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje por cuanto se convierten en facilitadores de contextos para proveer significado y sentido a lo que se aprende.

2.2.1 Antecedentes del modelo CDM

Partimos de reconocer "la Didáctica de la Matemática como la disciplina que articula de manera sistémica los distintos aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (Pino-Fan y Godino, 2015, p.8).

2.2.1.1 Introducción

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo. Han sido muy fecundas las producciones tratando de indagar sobre los conocimientos matemáticos que debe dominar un profesor para enseñar las matemáticas eficientemente, entre ellos se pueden destacar los trabajos de Shulman (1986, 1987, 2005), continuada por Grossman (1990), Ball y sus colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick 2008, y por Godino y sus colaboradores (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2009; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013; Pino-Fan y Godino, 2015). En estos trabajos se evidencian fuertes avances sobre la caracterización de los conocimientos que necesita un profesor para enseñar las matemáticas. Y aunque no se ha llegado a un consenso sobre un marco teórico que caracterice dichos conocimientos, si se han formulado diversos modelos que han hecho aportes significativos a su caracterización.

En este sentido, es deseable que el profesor en su quehacer esté preparado y dé todo de sí para ayudar a los estudiantes a conectar lo aprendido con la realidad, de tal forma que se provean condiciones óptimas para que ese aprendizaje tenga las mayores probabilidades de éxito. Pero ¿Cuáles son las necesidades de aprendizaje de un profesor de matemáticas para que pueda enseñar las matemáticas de manera eficiente? O ¿qué se requiere en la enseñanza de contenidos matemáticos para que estos sean comprendidos eficientemente por los estudiantes? (Ball et al.2008). En este trabajo se revisa el estado de aquellos aspectos de las matemáticas para enseñar que debe dominar un profesor de matemáticas para enseñar de manera eficiente las funciones. Esto partiendo de considerar que el conocimiento de los contenidos disciplinares son esencialmente distintos del conocimiento de los contenidos para la enseñanza. Por lo que la enseñanza es un trabajo profesional con su propia y única base profesional de conocimientos. Según Shulman (1987) el conocimiento pedagógico del contenido es la forma más factible para distinguir el conocimiento del especialista de la disciplina, del conocimiento del pedagogo. O lo que una persona sabe de su disciplina, de aquello que sabe orientar de esa disciplina.

El contexto de este trabajo son las matemáticas para enseñar. Por ello se considera que el análisis de aquellos conocimientos que se requieren para la enseñanza conlleva a una reflexión sobre ¿qué exige la enseñanza? ¿Qué cualidades y profundidad de comprensión, destrezas y capacidades, rasgos y sensibilidades transforman a una persona en un profesor competente? ¿Cómo aprenden las nuevas generaciones de profesores a enseñar matemáticas? (Shulman, 2005) ¿Qué se requiere para que un profesor de matemáticas continúe cualificándose continua y constantemente? ¿Qué se requiere para que un profesor de matemáticas aprenda de su propia experiencia? A continuación se presentan algunos de los modelos más relacionados con el modelo que se asume en este trabajo para realizar el análisis de las prácticas de los profesores en formación.

2.2.1.2 Categorías del conocimiento base

Entre los pioneros en el análisis de los conocimientos didácticos que debe poseer un profesor de matemáticas para enseñar de forma eficiente las matemáticas es el de Lee Shulman, quien en 1986 propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK) y conocimiento curricular.

Shulman (1986) define:

> el conocimiento pedagógico del contenido como algo compuesto por: las formas más útiles de representación de esas ideas, las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, exposiciones y demostraciones- en una palabra, las formas más útiles de representar y formular el tema que sea comprensible para los demás, el conocimiento pedagógico del contenido también incluye la comprensión de lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de temas específicos: las concepciones e ideas previas que los estudiantes de diferentes edades y orígenes traen consigo para el aprendizaje de lo más frecuentemente enseñado en temas y lecciones (p. 9).

Posteriormente, Shulman (1987) amplía su propuesta a siete categorías para el conocimiento del profesor, y lo llama *'categorías del conocimiento base*', las cuales son las siguientes:
1) *Conocimiento del contenido*, son aquellos conocimientos referidos al conocimiento de los contenidos disciplinares que debe tener un profesor. Son los conocimientos de los contenidos de la asignatura que orienta el profesor; 2) *conocimiento pedagógico general*, son los conocimientos referidos al conjunto de estrategias generales y principios que le facilitan al profesor la gestión de la clase. 3) *conocimiento curricular*, son los conocimientos de un profesor referidos a los materiales y herramientas de apoyo para su trabajo; 4) *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK), se refieren a esa amalgama especial de contenido y pedagogía, propio de los profesores, que además, le permiten seleccionar, utilizar estrategias y hacer transformaciones para facilitar la comprensión de un contenido específico; 5) *conocimiento de los estudiantes y sus características*, se refieren a los conocimientos que el profesor tiene de sus estudiantes, en relación con sus formas de aprender, de los abordajes que hacen de los contenidos; 6) *conocimiento de los contextos educativos*, que van desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y 7) *conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación*, que se refiere al conocimiento de políticas y propósitos de la educación, como medio de formación de las personas.

Según Shulman (2005) "existen por lo menos cuatro fuentes principales del conocimiento base para la enseñanza: 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma" (p.11). Este autor además considera, que los principios de la enseñanza efectiva parten del hecho de transformar las aulas de clase en lugares donde los alumnos puedan abocarse a tareas de aprendizaje, orientarse hacia el aprendizaje con un mínimo de interrupción y distracción, y recibir una oportunidad equitativa y adecuada para aprender.

Más adelante Shulman (2005) reorganizó los conocimientos, propuestos anteriormente (1986; 1987), que debe tener un profesor, y los organizó en siete categorías, las cuales se muestran a continuación:

- *Conocimiento del contenido,* el saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los escolares. Este conocimiento se apoya en dos bases: la bibliografía y los estudios acumulados en cada una de las disciplinas, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento en estos campos de estudio.
- *Conocimiento didáctico general*, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;
- *Conocimiento del currículo*, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente;
- *Conocimiento didáctico del contenido*: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;
- *Conocimiento de los alumnos* y de sus características;
- *Conocimiento de los contextos educativos*, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos* (p.11).

Este modelo como pionero es la base de otras propuestas posteriores, por tanto se puede esperar que dichos modelos estén más refinados. Sin embargo el modelo propuesto por Shulman es muy consistente y engloba muchas de las ideas propuestas en los modelos subsiguientes. A continuación presentamos aspectos básicos de algunos de estos modelos.

2.2.1.3 Modelo del conocimiento del profesor

Grossman (1990) retoma las ideas de Shulman y propone su *"**modelo del conocimiento del profesor**"* en el que considera cuatro componentes básicos:

1. *Conocimiento Pedagógico General*. Hace referencia a un cuerpo de conocimientos generales, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes; sobre el conocimiento de principios generales de instrucción tales como los tiempos de los aprendizajes, los tiempos de espera entre una instrucción y otra a pequeños grupos; sobre el conocimiento de las habilidades y potencialidades de los estudiantes.

2. *Conocimiento del contenido*: incluye los conceptos y hechos importantes en un campo de estudio, así como las relaciones entre ellos.

3. *Conocimiento pedagógico del contenido*: hace referencia específicamente a cuatro componentes principales: a) concepciones acerca de cómo enseñar un contenido, b) conocimiento de cómo comprenden los estudiantes, c) conocimiento del currículo y d) conocimiento de estrategias con fines didácticos. La componente a) se refiere al conjunto de creencias que tiene un profesor para la enseñanza de un contenido en un grupo de grados. La componente b) hace referencia al conocimiento de la forma cómo los estudiantes acceden al conocimiento y de sus dificultades de comprensión en un tema específico. A la facilidad que tiene un profesor para producir y articular representaciones al hacer sus explicaciones. La componente c) se refiere al conocimiento que tiene el profesor de los materiales disponibles para la enseñanza de un contenido, así como el conocimiento de la relación horizontal y vertical de los contenidos de un tema determinado. La componente d) incluye el conocimiento de estrategias didácticas, la utilización y combinación de representaciones que faciliten la enseñanza de un tema específico. Estas habilidades es muy posible que se adquieran o se terminen de perfeccionar con la experiencia docente.

4. *Conocimiento del contexto*. Los profesores deberían dar mucha más importancia al contexto particular en el que enseñan, comprenderlo y adaptar sus actividades a las necesidades específicas de las comunidades donde tiene asiento la escuela. Los profesores deben conocer y comprender el entorno de la escuela, sus limitaciones, fortalezas y debilidades.

2.2.1.4 Conocimiento matemático para la enseñanza

Ball y sus colaboradores continuando con el trabajo propuesto por Shulman y sus colaboradores describen lo que ellos llaman *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. Se entiende por conocimiento matemático para la enseñanza el conocimiento matemático que se exige al enseñar, en otras palabras, el conocimiento matemático necesario para realizar las tareas recurrentes de la enseñanza de las matemáticas a los estudiantes (Ball et al. 2008). Hill, Ball y Schilling (2008) lo han definido como ese conocimiento matemático que el profesor utiliza en el aula para instruir a sus alumnos y hacer que estos crezcan matemáticamente. En particular Ball et al. (2008) sugieren respecto al conocimiento de un profesor que no es solo el conocimiento de los contenidos por un lado y el conocimiento de la pedagogía por el otro, sino una especie de amalgama del conocimiento de los contenidos y la pedagogía que es fundamental para su enseñanza, y para ello proponen dividir el Conocimiento Matemático para la Enseñanza en dos grandes categorías: 1) conocimiento del contenido, compuesto a su vez por tres subcategorías: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) conocimiento pedagógico del contenido, conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo:

Dominio 1. **Conocimiento común del contenido**: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza. Este dominio involucra el conocimiento y la habilidad que nos permite obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos.

Dominio 2. **Conocimiento en el horizonte matemático**: permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículo y los requerimientos académicos mínimos para el abordaje de un tema determinado, por lo tanto le indica al profesor cuando avanzar o retroceder, este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas.

Dominio 3. **Conocimiento especializado del contenido**: es el conocimiento matemático que atiende las especificidades que sólo son atinentes a la acción de enseñar, a las adecuaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable.

Dominio 4. ***Conocimiento del contenido y de los estudiantes***: es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y el conocer acerca de las matemáticas. Integra conocimiento sobre la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos.

Dominio 5. ***Conocimiento del contenido y de la enseñanza***: es el conocimiento matemático para el diseño de tareas, cada una de las cuales requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes, es el conocimiento que permite hacer las transposiciones didácticas.

Dominio 6. ***Conocimiento del Currículo***: comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado.

Seguidamente se presenta un esquema ilustrativo diseñado por Ball y sus colaboradores para ilustrar gráficamente su modelo. En este se puede apreciar claramente cada una de las componentes propuesta por Ball y sus colaboradores, la cual es, a mi modo de ver, una de las más completas, por lo que abarca los aspectos propuestos por Shulman, pero además, hace una separación de los diferentes componentes: por un lado los conocimientos que el profesor debe tener sobre su disciplina, que lo llaman conocimiento de la materia, y por otro los conocimientos que el profesor debe tener para enseñar matemáticas, lo que llaman conocimientos didácticos de los contenidos.

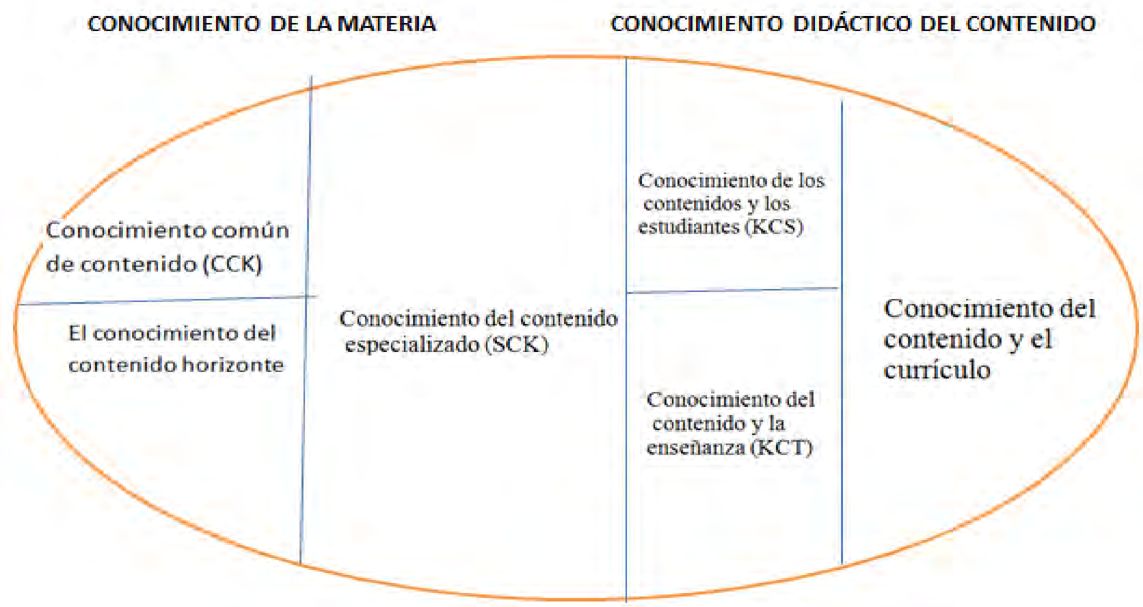


Figura 7. Esquema propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008) para el Conocimiento Matemático para la Enseñanza

2.2.1.5 El cuarteto del conocimiento

Este es un modelo propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), como una herramienta para observar el Conocimiento Común del Contenido de los profesores de matemáticas, en su quehacer como docentes de matemáticas. Proponen cuatro grandes dimensiones que denominan “El Cuarteto del Conocimiento”:

1. *Fundamentos*: aquí hacen referencia a la fundamentación conceptual, al conocimiento de trabajos que puedan servir como antecedentes teóricos y a las creencias de los profesores en formación. Se trata de la comprensión de los contenidos disciplinares, de la forma de concebir su enseñanza y de los recursos que los profesores puedan poner en juego para la gestión de una actividad de aula.

2. *Transformación*: esto se refiere a la capacidad de un profesor para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable. Lo que incluye el desarrollo de una demostración, el uso de recursos didácticos, la elección de ejemplos y representaciones adecuadas.

3. *Conexión*: se refiere a la planificación de la clase, al orden de aparición de los episodios en cada lección o conjunto de lecciones, para su enseñanza, es decir, la secuenciación

conceptual intra y entre lecciones. También incluye la capacidad para hacer conexiones intra y entre representaciones, procedimientos y conceptos, que favorezcan la toma de decisiones sobre la pertinencia conceptual y procedimental.

4. *Contingencia*: se refiere a la concepción y preparación de eventos de clase difíciles de planificar. La componen dos categorías fundamentales: la disposición para resolver las inquietudes de los estudiantes y la flexibilidad de la clase, cuando sea necesario, para desviarse de lo planificado y atender una necesidad manifiesta en el desarrollo de la clase.

2.2.1.6 La Proficiencia en la enseñanza de las matemáticas

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) hacen un aporte a fin de unificar la teoría de los conocimientos que un profesor de matemática debe tener para enseñarla. Ellos lo llaman Proficiencia en la enseñanza de las matemáticas y proponen las siguientes siete dimensiones:

Dimensión 1: un profesor debe conocer profundamente las matemáticas que enseña y ser capaz de extenderla. Además tiene diferentes maneras de conceptualizar los contenido objeto de enseñanza: poderlo representar, comprender aquellos aspectos clave de cada tópico, y establecer conexiones con otros tópicos de un mismo nivel. Conocer profundamente los contenidos le facilita elegir ideas fundamentales para presentárselas a sus estudiantes, y responder con cierta flexibilidad aquellas cuestiones que se les planteen.

Dimensión 2: conocer a los estudiantes como personas reflexivas. Esto es, tener sensibilidad sobre lo que los estudiantes piensan, esto le prové información de cómo los estudiantes asignan sentido a las matemáticas y de la forma de construir sus conocimientos.

Dimensión 3: conocer a los estudiantes como personas que aprenden. Lo que implica ser conocedor de la teoría del aprendizaje que se asuma y de sus implicaciones en términos de las actividades de clase y de las interacciones con los estudiantes.

Dimensión 4: diseñar y adecuar entornos de aprendizaje. El diseño de entornos productivos de aprendizaje encierra mucho más que la simple gestión de la clase. Incluye la creación de comunidades intelectuales que simulan actividades propias de la disciplina.

Dimensión 5: establecer normas para la clase y desarrollar un discurso propio de una enseñanza para la comprensión. La clase debe comportarse como una comunidad de aprendizaje; lo que supone que los estudiantes tienen que asumir ciertas normas sociales en la clase, como el compromiso de explicar y justificar sus soluciones, además, intentar y comprender el razonamiento de sus compañeros, preguntarse entre si lo que no comprendan, y cuestionar aquellos argumentos con los que no estén de acuerdo.

Dimensión 6: construir relaciones que favorezcan el aprendizaje. El profesor debe trabajar para organizar los contenidos, sus múltiples representaciones, y hacer que los estudiantes interactúen entre sí y con los contenidos. El aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constituidas.

Dimensión 7: reflexionar sobre la propia práctica. El lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de toda la vida. Frente a un problema en la práctica de la enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez se habitúe a hacer esta reflexión, esto se puede convertir en el principal mecanismo para mejorar la propia práctica.

Los modelos propuestos hasta aquí son los más sencillos de concebir, sin embargo no muestran formas claras de evaluar los conocimientos que debe tener un profesor, no muestran los tipos de preguntas que se deberían hacer para evaluar un dominio específico de conocimiento del profesor. Aunque esto no lo considero un inconveniente mayor, porque es en su contexto de trabajo donde debería evaluarse la idoneidad de cualquier profesional, ya que ante preguntas formuladas con fines específicos cualquiera puede tener un bloqueo o confundirse y a partir de ahí ser mal evaluado.

Los dos modelos siguientes son un tanto más complejos que los anteriores, en estos se han elaborado preguntas orientadoras para la evaluación de cada dimensión. Aunque son los que más se ajustan a la propuesta que aquí se sigue, la complementariedad entre sus componentes permiten hacer un análisis un poco más profundo de los conocimientos didáctico matemáticos de un profesor de matemáticas, por lo constituyen el núcleo central de este trabajo, de ahí la importancia de los trabajos de estos autores como punto de apoyo para la realización de este.

2.2.1.7 Enfoque Onto-semiótico del conocimiento y la instrucción

Godino y Batanero (1994) crean el modelo denominado Enfoque Onto-semiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS). Este modelo aporta una categorización de los elementos intervinientes de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático, estructurándolos en configuraciones de procesos, objetos y relaciones. El EOS Fija una especial atención en el aprendizaje individual y, sobre todo en aquellos aspectos psicológicos que no son considerados en la perspectiva antropológica.

2.2.1.7.1 Configuraciones del Enfoque Onto-Semiótico

El EOS según Font (2005) se configura en torno a los tres modelos teóricos siguientes, esto es, esta teoría se puede dividir en tres partes:

1) ***Teoría de los significados sistémicos:*** en este enfoque la noción de significado de un objeto matemático se entiende como el sistema de prácticas personales o institucionales utilizada para resolver un problema en el cual dicho objeto interviene. Esto es, permiten el estudio de las prácticas personales y sociales, las cuales deben facilitar la aparición de los objetos matemáticos, así como visionar su evolución en el tiempo. Se proponen varios tipos de significados institucionales: referencial, pretendido, implementado y evaluado. En el caso de los significados personales proponen los tipos: global, declarado y logrado. Y los objetos matemáticos que van apareciendo en el estudio de los sistemas de prácticas, se clasifican en lenguajes, situaciones/problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos.

2) ***Teoría de las funciones semióticas:*** Una función semiótica es la representación explicita de algo, ésta empieza cuando para quien interpreta hay una diferencia entre significado y significante, lo que provee el significado espacio-temporal, pero además, deja abierta la posibilidad de que un mismo significante pueda referirse a varios significados. En estas condiciones, el intérprete o receptor del signo representa al objeto para poderlo comprender al relacionarlo con elementos del contexto sociocultural, conocidos por él. Para Contreras y Ordóñez (2006) las funciones semióticas constituyen la génesis de una teoría semiótico–cognitiva, la cual se basa en supuestos lingüísticos, cuyos elementos fundamentales son las entidades primarias con sus diferentes facetas o dimensiones del conocimiento: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

3) ***Teoría de las configuraciones didácticas:*** esta teoría permite realizar modelos de la enseñanza y aprendizaje para un contenido matemático determinado, como un proceso estocástico multidimensional compuesto por las seis dimensiones mencionadas en el párrafo anterior, con sus respectivas trayectorias y potencialidades.

2.2.1.7.2 Análisis Onto-semiótico

Realizar un análisis onto-semiótico de un proceso de instrucción consiste en identificar las funciones semióticas que proporcionan las personas participantes del estudio en sus procesos de comunicación de sus respuestas a las cuestiones por las que se les indague, es decir, la indagación sistemática y profunda de lo que puede significar, para quien lo diligencie, un planteamiento plasmado en un texto. En el marco de esta teoría, se entiende por conflicto semiótico a "la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos –personas o instituciones– en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (Godino 2002, p. 258).

Según Contreras y Ordóñez (2006), en el análisis onto-semiótico de un texto se deben tener en cuenta los siguientes aspectos: 1) los diferentes agentes involucrados**:** el lector del texto o quien aporta las respuestas objeto de análisis, el autor del texto y la persona que realiza el análisis (investigador); 2) los objetos puestos en juego: entidades, expresiones, contenidos y códigos interpretativos, que representan los conceptos estudiados, y 3) los diversos tipos de funciones semióticas: son todas aquellas representaciones que se hagan de una noción o conceptos que se estudie.

2.2.1.7.3 Entidades primarias

Las entidades primarias junto con las diferentes facetas mencionadas anteriormente, constituyen los elementos fundamentales de un análisis onto-semiótico. Estas entidades permiten establecer relaciones entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer su significado. Los tipos de entidades primarias usadas en el enfoque Onto-semiótico son:

- *Lenguaje, elementos lingüísticos o representaciones* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). Los tipos de representaciones que se consideran son los mencionados en el apartado 1.1.3: leguaje materno o coloquial, representación analítica numérica y representación analítica algebraica, representación gráfica, representación figural, representación tabular y representación fenomenológica.
- Situaciones problema, que pueden ser aplicaciones del contexto disciplinar o del contexto sociocultural donde se desempeñan los estudiantes o de otro tipo, en el contexto de otras ciencias. Estas son las tareas o actividades que inducen la actividad matemática.
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, estrategias utilizadas para llegar a una respuesta).
- *Conceptos/definiciones*: son los conceptos o definiciones de éstos utilizados por que resuelve la situación problema al desarrollar su práctica (números, puntos, segmentos, rectas, ecuaciones, funciones, fórmulas).
- *Proposiciones/propiedades: son* atributos de los objetos que facilitan relacionar dos representaciones de un objeto en estudio.
- *Argumentos*, son razonamientos donde se intenta demostrar o refutar algo. Suelen ser explicaciones justificadas de algo que se pretende demostrar o refutar.

2.2.2 Modelo del Conocimiento didáctico-matemático (CDM)

Los diferentes autores del conocimiento matemático para enseñar aseguran que el conocimiento matemático que le facilita al profesor de matemáticas resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para desarrollar eficientemente su práctica de enseñanza. Coinciden en que además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático (Pino-Fan y Godino, 2105).

Para el análisis de los objetos matemáticos que emerjan de las prácticas desarrolladas por los profesores en formación se asume el Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático propuesto por Godino (2009) y ampliado por Pino-Fan y Godino (2015). La expresión '*Conocimiento Didáctico-Matemático'* los utilizan estos autores para referirse a la fusión de las conceptualizaciones del Conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching) y Conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que la expresión 'conocimiento matemático para la enseñanza' no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión 'conocimiento pedagógico del contenido'.

Sin embargo, parece claro que la dimensión matemática del CDM, que habilita al profesor para resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para el desarrollo eficiente de su práctica de enseñanza; además de este conocimiento, el profesor debe tener conocimiento sobre aquellos factores que influyen cuando se planifica e implementan procesos de enseñanza de dicho contenido matemático (Pino-Fan y Godino, 2015).

Pino-Fan (2013), utiliza el término '*conocimiento'* en el sentido de:

> *Constructo epistémico–cognitivo–afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición*. La disposición, o capacidad, se relaciona con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica. La competencia se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada, e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. La comprensión tiene que ver con la relaciones que se deben establecer entre todos los elementos que intervienen en la implementación de una configuración epistémica (o cognitiva) idónea para un contexto determinado (p.55).

Uno de los trabajos más destacados para analizar los conocimientos didácticos-matemáticos de un profesor de matemáticas es el propuesto por Godino (2009), denominado Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM), donde se establece por primera vez un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas. Para *Pino-Fan, Godino y Font (2010)*

> El CDM viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios [y los procesos de significación], que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin

> de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (*p.209)*.

El CDM se ha ido refinando en diversos trabajos (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2014; Pino-Fan y Godino, 2015). El modelo CDM asume del Enfoque Onto-semiótico su sistema de herramientas teóricas, el cual proporciona un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar, y para las cuales incluyen herramientas teórico-metodológicas que facilitan operacionalizar los análisis del conocimiento incluidos en cada sub-categoría. El modelo del CDM propone tres dimensiones, cada una a su vez, compuesta por sub-categorías: Dimensión Matemática, Dimensión Didáctica y Dimensión Meta Didáctico-Matemática.

2.2.2.1 Dimensión Matemática

Esta dimensión involucra todo lo relacionado con el conocimiento que el profesor tiene sobre las matemáticas y las relaciones prerrequisitaria entre conceptos y recursos matemáticos. La conforman las sub-categorías conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido.

2.2.2.1.1 Conocimiento común del contenido

Relacionado con el conocimiento que un profesor moviliza para resolver los problemas que les coloca a sus estudiantes y para verificar que las soluciones dadas a estos sean apropiadas. Es el conocimiento que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo para enseñar. Esta categoría involucra el conocimiento y la habilidad que le permite al profesor obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos, pero también es la que permite tomar una decisión de si una respuesta dada a una actividad matemática propuesta, es correcto o no. Involucra el conocimiento que comparte el profesor con los estudiantes del nivel que orienta o con otros profesionales que usan ese conocimiento en cualquier ámbito del conocimiento, y el conocimiento matemático necesario para entender las matemáticas en el nivel posterior al que orienta. Esto lo convierte en un conocimiento absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, ya que debe conocer el material que enseña; debe reconocer si las respuestas dadas por sus estudiantes son correctas o incorrectas, o cuándo el libro de texto da una definición adecuada. En definitiva, los profesores deben ser capaces de hacer algo más que el trabajo que asignan a sus estudiantes.

Para Schoenfeld y Kilpatrick (2008) un profesor debe conocer profundamente las matemáticas que enseña y ser capaz de extenderla. Y según Godino (2011), es posible lograr un dominio alto de los contenidos disciplinares, cuando se orienta al profesor en formación en la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Pero según este autor eso requiere también atención y dominio de las diversas representaciones semióticas de un concepto, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Además, Godino, Rivas y Arteaga (2012), consideran que para que se dé un desempeño adecuado en esta dimensión se requiere que las matemáticas enseñadas al estudiante sean unas buenas matemáticas, donde se les haya presentado una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos.

2.2.2.1.2 Conocimiento ampliado del contenido

Es el conocimiento que le permite al profesor realizar las conexiones entre los conceptos que fundamentan lo que se trabaja en un nivel y proyectar lo trabajado hacia lo que se necesita posteriormente, le permite también seleccionar y utilizar diferentes representaciones de un objeto, decidir cuál registro utilizar como principal y cuál o cuáles como auxiliares. Permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículo y ofrece una visión para entender las conexiones entre las diversas nociones matemáticas. Es el conocimiento que permite determinar los requerimientos académicos mínimos para el abordaje de un tema determinado, por lo tanto, le indica al profesor cuándo avanzar o retroceder, es decir, si hay la necesidad de volverse para reforzar un tema previo requerido para el entendimiento de uno posterior, o si ya los estudiantes están en un nivel en el que se pueda avanzar al tema siguiente.

Este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas, esto es, qué relación y/o dependencia guardan los contenidos matemáticos –incluso con contenidos de otras áreas- de un grado a otro (coherencia vertical) y con qué contenidos del currículo se relaciona un determinado tema de matemáticas en otras asignaturas del mismo grado (coherencia horizontal), que permita el uso de las matemáticas desde otros ámbitos del conocimiento, como un área interdisciplinar. Esto le ayuda al profesor a detectar errores debidos a deficiencias en el aprendizaje de un concepto o por interpretaciones erróneas del mismo. Permite poner en correspondencia diferentes objetos matemáticos o hacer conexiones entre representaciones de un mismo objeto matemático, es decir, le permite al profesor decidir sobre la pertinencia procedimental y establecer las congruencias entre los elementos de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático estudiado, de las conexiones que establecen los estudiantes entre sus concepciones y creencias con elementos del contexto y de éstos con un contenido matemático determinado. Determina el repositorio de recursos matemáticos usado por una persona ante una situación problema que tenga que resolver.

Este conocimiento incluye además, poder hacer conexiones entre los procedimientos, entre los conceptos y tomar decisiones sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual. Facilita el establecimiento de las conexiones que le permiten a un profesor decidir sobre qué concepto utilizar, si una definición o un teorema en la solución de una tarea, y asignar significado y sentido a un objeto matemático estudiado. Le permite también al profesor decidir sobre el orden de los registros y la representaciones de los objetos estudiados en la clase, esto es, que registro usar como registro principal y hacia cuáles se facilita más hacer conversiones y sobre los tratamientos necesarios en cada registro para facilitar la comprensión conceptual.

Lo anterior permite inferir que este conocimiento constituye la base para el funcionamiento de las congruencias entre representaciones de un mismo objeto, es decir, el dominio de estas conexiones permiten al profesor hacer un análisis onto-semiótico entre elementos de varias representaciones de un objeto matemático. Y esto según Duval (2004) es fundamental para el entendimiento de un concepto matemático.

Por ejemplo, un profesor que orienta las matemáticas en sexto grado, necesita saber los requerimientos de las matemáticas que enseñan en ese grado, necesarios para el abordaje de las matemáticas que se enseñan en séptimo u octavo grados, y ser capaz de establecer bases sólidas para poder abordarlas con éxito más tarde. Para poder hacerlo eficientemente necesita conocer en profundidad las matemáticas de ambos grados. Este dominio es muy importante para ayudar al maestro a anticipar un sano desarrollo matemático del estudiante. En este sentido Shulman (2005) considera que el aprendizaje de un tema o contenido en una asignatura no es un fin en sí mismo, sino más bien un vehículo al servicio de otros fines. Este es un dominio que siempre está integrado a los otros conocimientos matemáticos para enseñar, es decir, siempre está presente en la aplicación de cualquiera de los otros conocimientos. Pero por su carácter prerrequisitario, es también integrador de estos.

2.2.2.2 Dimensión Didáctica

Conformada por las sub-categorías conocimiento especializado de la dimensión matemática, conocimientos sobre los estudiantes, conocimiento sobre las creencias, concepciones y actitudes de los estudiantes, conocimientos sobre los recursos y medios que utiliza para promover los aprendizajes de los estudiantes, conocimientos sobre el tipo de interacciones que favorecen el aprendizaje, y conocimientos sobre el currículo y su relación con el contexto sociocultural donde se desarrollan los aprendizajes.

Pino-Fan y Godino (2010) presentan la dimensión didáctica del CDM de un profesor relacionándola con las faceta del EOS. Esta dimensión incluye las siguientes subcategorías del conocimiento:

> conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica); conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva); conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva); conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional); conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales,

> sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (faceta ecológica) (p. 10).

2.2.2.2.1 Conocimiento especializado de la dimensión matemática

Es un conocimiento matemático especializado con fines específicos para su enseñanza. Es decir, es el conocimiento que atiende las especificidades que sólo son atinentes a la acción de enseñar, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable. Es pasar de la comprensión personal a la preparación de la comprensión de otros a quienes se instruye. Es el conocimiento que le permite al profesor de matemáticas hacer las adecuaciones y transformaciones necesarias a los contenidos, de tal forma que el alumno los pueda entender.

Es el conocimiento que permite determinar patrones de errores y clasificarlos según un criterio establecido. Permite al profesor de matemáticas transformar una definición de un contexto disciplinar, a un lenguaje entendible por los estudiantes, encontrar un ejemplo o una situación que se ajuste a la enseñanza de un contenido. Sin este conocimiento no es posible que un profesor realice transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre objetos matemáticos. Por lo tanto es este el dominio que permite a un profesor hacer las transposiciones didácticas para facilitar al estudiante la comprensión de los conceptos matemáticos, y le permite establecer congruencias e incongruencias entre los elementos de varias representaciones semióticas de un objeto matemático. Estos elementos son de mucha utilidad en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y son el fundamento para que el aprendiz asigne significado y sentido a los objetos matemáticos estudiados.

Según Hill, Ball y Schilling (2008) este conocimiento hace referencia a cómo el profesor puede representar con precisión ideas matemáticas, brindar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se utilizan para enseñar, analizar y comprender las diferentes estrategias que permiten resolver un problema. Tanto el Conocimiento Especializado del contenido, como el *Conocimiento de planes para enseñar*, son conocimientos totalmente integradores, es decir, para ser útiles necesitan de la presencia del resto de los conocimientos matemáticos para enseñar, y difícilmente se dan en ambientes aislados a los de procesos de enseñanza. Por lo que la efectividad de los aprendizajes va a depender en gran medida de la habilidad del profesor en estos dos tipos de conocimientos.

Por ejemplo: encontrar el perímetro y el área de una figura geométrica (Conocimiento común del contenido) es diferente de analizar los saberes que el estudiante puso en juego al encontrarlos (Conocimiento Especializado del Contenido). Es más, si se les pidiera a los estudiantes determinar la relación entre el perímetro y el área, la reflexión hecha por el estudiante al dar su respuesta es muy diferente a la hecha por el docente al interpretar lo que cada estudiante hizo, clasificar las estrategias puestas en juego por un estudiante o por otro, analizar los aspectos que pueden estar influyendo a favor de un tipo de respuestas y no de otras. Encontrar el perímetro y el área solo requiere saber cómo calcular y ejecutar las operaciones adecuadamente, mientras que analizar los saberes y estrategias utilizadas por el estudiante al encontrarlos, requiere la habilidad de pensar con flexibilidad para analizar cada una de las respuestas dadas por los estudiantes, adaptándose de paso a su forma de hacerlo, buscar el detalle en cada estrategia utilizada, es tener el conocimiento matemático desglosado.

Según Sgreccia y Massa (2012) este conocimiento involucra un trabajo de desmenuzamiento: organizar la estructura conceptual en que serán presentadas las ideas matemáticas; formular preguntas matemáticamente productivas; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico; adaptar el contenido matemático de los libros de texto a las posibilidades de los alumnos; reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; explicar y justificar por qué se efectúa cierto procedimiento o desarrollo y no otro. Estas tareas demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo de la enseñanza, más allá del conocimiento matemático en sí que se está enseñando. En este mismo sentido Ball et al. (2008) consideran que la necesidad de la existencia de este cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza es determinado por las exigencias de la labor de la enseñanza de las matemáticas mismas.

2.2.2.2.2 Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes

Es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y el conocer acerca de las matemáticas. Es un conocimiento que integra los aspectos cognitivos de los estudiantes con procesos matemáticos que sobrevienen de su interacción con los conceptos tratando de comprenderlos. Es decir, un profesor que posea este conocimiento será capaz de prever los errores y dificultades de sus estudiantes, así como anticipar su naturaleza, las concepciones erróneas y las posibles estrategias que utilizarán, pero también anticiparse a ellas y formular estrategias para minimizarlas. No castiga los errores en sus estudiantes, los utiliza como motores esenciales del aprendizaje, para potenciar sus habilidades de pensamiento matemático (Farfán, 2012). Esto demanda del profesor una gran preparación para poder anticiparse a lo que sus estudiantes harán, a lo que piensan, lo que a su vez le puede proveer información de cómo dan sentido a los contenidos matemáticos y sobre la forma en que construyen sus conocimientos.

Para un profesor lograr ser idóneo en este aspecto se necesita ser conocedor de teorías del aprendizaje adecuadas para fundamentar su práctica como profesor de matemáticas y de las implicaciones de estas teorías que les permitan alinear los estudiantes con los contenidos que se les enseña.

Cuando un profesor elabora un examen, este dominio le permite prever qué tan difícil le resultará a los estudiantes resolverlo, precisamente por el conocimiento que él tiene de lo que ellos son capaces de hacer. Pero también le facilita al profesor la habilidad para generar bloqueos conceptuales en sus estudiantes y luego ayudárselos a resolver. Es un conocimiento integrado a los demás conocimientos del profesor, es decir, este conocimiento es parte integral de todos los demás conocimientos de la Dimensión Didáctica del conocimiento matemático para enseñar de un profesor.

2.2.2.2.3 Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes

Comprende el conocimiento de aquellos aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes necesarios para su buen desempeño en la clase. Es un conocimiento que integra los aspectos ontogenéticos de los estudiantes, con procesos matemáticos que sobrevienen de su interacción con los conceptos al tratar de comprenderlos, pero que pueden afectar los procesos de adquisición de los conocimientos. Un profesor con este dominio motiva a sus estudiantes y les da ánimo para que compartan sus experiencias, los valora y promueve el trabajo con autonomía, los conmina a que pierdan cualquier temor a las matemáticas, para que perseveren ante la adversidad. Este dominio es sumamente importante si se sopesa el interés en formar personas de bien versus resolutores de problemas matemáticos, si se quiere que la formación matemática contribuya a la formación de mejores seres humanos y mejores ciudadanos, comprometidos con la formación de comunidades de/en paz, con justicia social, donde todos podamos vivir. Aunque en esta parte todos los dominios son igualmente importantes, es decir, deben aportar de la misma manera para que la formación matemática contribuya a formar personas de bien, no por ello se debe descuidar.

Se necesita también tener conocimientos sobre aspectos que le ayuden al profesor a entender los conflictos ontogenéticos que afecten a los estudiantes, que puedan inhibir el acceso a los conocimientos, para que el profesor pueda proveerles o buscarles ayuda en ese sentido. Aquí se combina el conocimiento matemático especializado con la familiaridad alcanzada con los estudiantes. Por lo que al asignar una tarea el profesor debe ser capaz de predecir lo que los estudiantes harán con ella, lo que encontrarán interesante y motivador y las inferencias que pudieran hacer, y aquello que los llevará a cometer errores y por tanto les ocasionará dificultades. En este sentido los profesores deberían escuchar a sus estudiantes e interpretar con cierta flexibilidad sus acciones y sus producciones.

2.2.2.2.4 Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula

En una sesión de clase se dan discusiones. Un profesor debe decidir cuándo intervenir para hacer una aclaración, para orientar la forma de responder alguna de las cuestiones por las que haya preguntado. Debe tener la paciencia y la sapiencia para dar al estudiante el protagonismo que se merece, dejándolo actuar, dejar que varios de ellos cometan errores antes de intervenir, pero elegir el mejor momento para hacerlo; saber cuándo utilizar el aporte hecho por un estudiante para reorientar la clase y cuándo se debe formular una nueva pregunta o plantear una nueva tarea para promover el aprendizaje de los estudiantes.

Es el conocimiento que provee al profesor la capacidad para saber cuándo se debe continuar con el plan de clases y cuándo modificarlo para darle paso a las necesidades y aportes de los estudiantes, los cuales hay que tenerlos en cuenta, son cuestiones que no dan espera, hay que utilizarlos en el momento oportuno. Saber cómo estas diferencias importan para el desarrollo del tema es parte de lo que aquí se ha llamado Dimensión Meta Didáctico-Matemática.

2.2.2.2.5 Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes

Es el conocimiento matemático específico para el diseño de tareas ricas con fines de enseñanza. Cada tarea diseñada con este fin requiere proveer una interacción entre el concepto matemático involucrado, su comprensión, y la de las cuestiones pedagógicas pertinentes, con aspectos curriculares y socioculturales que afectan el aprendizaje de los estudiantes. Los maestros secuencian el contenido particular para la institución, eligen cuáles ejemplos utilizar para empezar y cuáles para llevar a los estudiantes a profundizar el contenido; evalúan las ventajas y desventajas de las instrucciones, de las representaciones que se utilizan para enseñar una idea específica e identifican lo que los diferentes métodos y procedimientos ofrecen institucionalmente, como insumos para mejorar la comprensión de los contenidos matemáticos que vayan a orientar. Diseñan entornos productivos de aprendizaje que le faciliten la gestión de la clase. Lo que lleva al profesor a simular en el aula, con actividades previamente preparadas, un micro mundo disciplinar. En este sentido, un profesor debe ser capaz de *r*eflexionar sobre su propia práctica, al enfrentarse a un problema matemático, para enseñarlo necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo, ya que no es resolverlo para sí, sino para que sus estudiantes lo entiendan. Es pensar cómo pasar de la comprensión propia, a la adecuación de condiciones para la comprensión ajena. Es saber cuáles recursos son los más adecuados para usarlos como ayuda en la presentación de un determinado tema.

Este dominio comprende, entre otras, las formas didácticas de desarrollar la clase de matemáticas para que los contenidos sean accesibles a quienes aprenden, los criterios para distinguir entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que han de ser objeto de enseñanza, la selección de los recursos didácticos, la organización de instrumentos adecuados para evaluar contenidos específicos, la selección de los registros más apropiados para representar los objetos matemáticos estudiados, cuál utilizar como registro principal y cuál o cuáles como registros auxiliares.

2.2.2.2.6 Conocimiento del Currículo

Comprende los fundamentos, enfoques y organización de la clase vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza, la ubicación de contenidos particulares en un nivel educativo determinado y en un entorno específico donde estos contenidos se pongan en juego. Es un conocimiento vinculado con lo normado jurisdiccional e institucionalmente y que provee al docente de herramientas para poder tomar las mejores decisiones en beneficio de los procesos de aprendizaje. Este dominio abarca aspectos tales como el funcionamiento del grupo o de la clase, conocimiento del contexto socioeducativo, de las condiciones de vida de las comunidades y culturas donde se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como las finalidades y los valores educativos, y los fundamentos filosóficos e históricos de los contenidos. Involucra todo el sistema de prácticas culturales y sociales que sirven de fundamento para asignar significado y sentido a los objetos y procesos matemáticos estudiados en la escuela, como por ejemplo los contextos en los que se diseñan las tareas. Por lo que las condiciones culturales de las comunidades en las que están inmersas las Instituciones Educativas relativizan los diseños de los programas educativos, y las mismas instrucciones educativas son condicionadas por las variaciones locales, que en la mayoría de los casos tienden a ser caóticas. Estas variaciones obligan al profesor a hacer nuevas adaptaciones, si quiere que sus estudiantes tengan un proceso de aprendizaje exitoso. Es este el dominio que se ocupa de la puesta en escena de reflexiones colectivas sobre el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático y sobre la solución de situaciones matemática socialmente compartidas (Farfán, 2012).

2.2.2.3 Dimensión Meta Didáctico-Matemática

Esta incluye conocimientos relativos a la capacidad del profesor para reflexionar sobre su quehacer como docente, de su proyección como profesional que tiene necesidades de formación, que cumple un papel social y que asume su responsabilidad ante los requerimientos que le pone la sociedad y ante sus propios retos. *Este* conocimiento comprende aquellos aspectos de la formación del profesor como persona, necesarios para llegar a sus estudiantes, para ser aceptado por ellos. Es el profesor como ejemplo de vida, ético y consciente que la ética no se negocia, justo pero a la vez muy estricto con su trabajo, esto es, tanto que desarrolle su labor docente con responsabilidad, como que vele por que los estudiantes desarrollen con responsabilidad la suya; un profesor que se auto-monitorea y autorregula, que vive pendiente de lo que está haciendo bien para potenciarlo y de lo que no le sale bien para mejorarlo.

Un profesor que aprende al reflexionar sobre su propia experiencia y no se la guarda, la comparte con sus pares y a la vez aprende de ellos, es decir, es comunicativo pero también receptivo. "En cualquier caso, la forma de llevar a cabo una acción, de desarrollar una tarea, o de organizar los intercambios de los alumnos no pueden contradecir los principios y valores que presiden la intencionalidad educativa (…) es necesario comprender que el valor humano que se deriva de la intencionalidad educativa debe presidir los principios de actuación que se ponen en marcha en la práctica educativa" (Pérez, 2005, p.11). Este autor considera además, que lo que hace que una acción sea educativa, son precisamente todas aquellas cualidades intrínsecas que se ponen en juego al desarrollarla.

Un profesor con este dominio valora su trabajo, está pendiente siempre de que sus acciones afecten positivamente a las personas que están a su alrededor, promueve el trabajo en equipo con sus pares. Está pendiente y dispuesto siempre a cualificarse y aprende de su quehacer. Además, es consciente de que de su formación y actualización continua y permanente, depende en gran medida el aprendizaje de sus estudiantes, que debe emprender diversas alternativas hacia el aprendizaje de sus estudiantes, por lo diverso de sus proveniencias y realidades sociales. Un profesor que genere condiciones de trabajo de aula de manera que permitan homogenizar lo más posible los aprendizajes de sus estudiantes, aunque lo hagan por caminos diferentes.

Un profesor con este dominio aprende de su experiencia, se interesa por conocer sus dificultades y buscar alternativas para mejorar continuamente de acuerdo a sus propios intereses. Estos intereses los establece como metas a alcanzar, construye empatías en las relaciones interpersonales. Usa sus conocimientos y actitudes para ayudar a los demás, que siempre está dispuesto al diálogo, es respetuoso de los derechos de los demás, es autónomo y crítico pero constructivo, que reconoce y valora la diversidad de pensamiento.

2.2.2.4 Interacción entre dimensiones

Si en los momentos previos a una clase un profesor diseña una actividad, determina la finalidad, escoge el grado y el tema a trabajar (*conocimiento del Currículo*); escoge el registro principal y los registros auxiliares que va a utilizar, así como las categorías de análisis para organizar las producciones de los estudiante (*conocimiento especializado de la dimensión matemática*), escoge y gestiona los recursos que proveerá a los estudiantes para resolver la situación y planea los tiempos en que desarrollará la clase, es decir, hace una especie de guion que constituye el reparto de la clase además de las cuestiones por las que va a indagar (Conocimiento de los recursos), y escoge las palabras más adecuadas para enunciar la situación de tal forma que los estudiantes la puedan entender, prueba hacer las diferentes transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento que haya previsto hacer con los recursos que haya seleccionado, hace las adecuaciones que considere necesarias a las tareas diseñadas (*conocimiento especializado la dimensión matemática*); selecciona o formula las situaciones problema a resolver en la clase y primero las resuelve él (*Conocimiento común del contenido*); al analizar las necesidades conceptuales y los posibles recursos que movilizará el estudiante al resolver la situación (*conocimiento* ampliado del contenido); es muy posible que prevea las posibles dificultades que provocará en sus estudiantes cada cuestión por la que indague (*Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes*).

En un momento posterior a la clase cuando el profesor analiza una situación problema matemática resuelta por sus estudiantes, reconoce en cada solución si esta es correcta o incorrecta (*Conocimiento común del contenido*); analiza y clasifica los errores, así como las estrategias y los procesos seguidos en la solución (*conocimiento especializado de la dimensión matemática*); reconoce las posibles causas de los errores entre alumnos –de tipo ontogenéticos o cognitivos- (*Conocimiento de los Estudiantes*), si las causas son de tipo epistemológico, causados por mala interpretación y uso de un concepto (*conocimiento* ampliado del contenido), diseña estrategias o visiona la forma cómo ayudar a los estudiantes a superar esas dificultades (*Conocimiento de los recursos*), y revisa si se cumplieron los objetivos planeados (*Conocimiento del Currículo*).

Como puede apreciarse todos estos conocimientos interactúan, de tal forma que en muchos casos cuesta discriminar si una situación en particular corresponde a una categoría o a otra, pero a la vez considero que es lo más normal que puede ocurrir porque además, no son categorías fijas, ellas toman características diferentes en diferentes momentos de la clase. Lo que puede conducir a confusiones en relación a la categoría utilizada al clasificar una situación determinada. Al respecto Godino (2011, p.14) manifiesta que estas categorías "no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas". Por ejemplo en cuanto a los registros semióticos de representación: seleccionar cuál registro usar como registro de partida y cuáles como registros auxiliares y las representaciones a usar en cada registro es del dominio del *conocimiento de los recursos*, mientras que usarlos para resolver un problema al hacer las transposiciones didácticas para que los estudiantes comprendan mejor los conceptos es del dominio del *Conocimiento Especializado de la dimensión matemática* y revisar si las soluciones son correctas o no es del dominio del *Conocimiento común del contenido*, incluso mientras se usan y la forma de usarlas para resolver un problema es también del Conocimiento común del contenido o del ampliado.

Sin embargo coincido con Ball et al. (2008) en que estas categorías, tal y como se proponen aquí, no son algo acabado, seguirán en un proceso de revisión para su refinamiento. Godino (2011, p.7) considera que "el primer paso para poder confeccionar un programa de estudio es determinar qué es idóneo desde los puntos de vista epistémico y cognitivo (así como la coordinación de estas idoneidades)". Las idoneidades fundamentales a que se refiere Godino aquí tienen mucha relación con lo que en este trabajo he llamado conocimientos común del contenido y con el conocimiento del estudiante respectivamente.

El uso de estas categorías para mejorar los conocimientos profesorales implica el uso de diversas teorías que ayuden a conocer mejor el comportamiento de los estudiantes, dominio en el diseño y uso de recursos y situaciones problema como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones (Godino, 2013a). Este autor considera que las matemáticas son una actividad humana por tanto no hay matemáticas sin matematización. Que tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones. Lo que implica que el mismo docente también lo haga de manera mucho más comprensiva que sus estudiantes, para que las pueda orientar eficientemente.

2.2.2.5 Potencialidades del CDM

Las tres dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática están muy relacionadas entre sí, cada una cumple funciones específicas aunque no exclusivas, ya que en algunos casos las comparten o se traslapan. La dimensión Matemática es integral, integrada e integradora por la naturaleza de sus componentes: el conocimiento común del contenido es absolutamente indispensable en un profesor de matemáticas, ya que éste debe conocer el material que enseña y poderlo modificar para construir situaciones problema, sin que pierda su esencia matemática. El conocimiento especializado del contenido, facilita entre los conceptos, establecer los enlaces, vínculos y conexiones intra e inter registros y representaciones, pero para ello echa mano del conocimiento especializado de la dimensión matemática y de los recursos.

Todas as sub-categorías de la dimensión Didáctica son integradoras, las relacionadas con el conocimiento de los estudiantes son las que facilitan el conocimiento del material y de las personas objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Las sub-categorías relacionadas con el conocimiento especializado de la dimensión matemática y el conocimiento de los recursos son integrales e integradas, pero todas para ser útiles necesitan de la presencia de la dimensión matemática y difícilmente se dan en ambientes aislados a los de procesos de enseñanza. Por lo que la efectividad de los aprendizajes va a depender en gran medida de la habilidad del profesor para integrar las componentes de cada dimensión. El conocimiento de los estudiantes es integrado a los demás conocimientos del profesor, es parte integral de los demás conocimientos de la Dimensión Didáctica.

La dimensión Meta Didáctico-Matemática hace al profesor consciente que de su formación y actualización continua y permanente, depende en gran medida el aprendizaje de sus estudiantes. Es sumamente importante si se sopesa el interés en formar personas de bien versus resolutores de problemas matemáticos, si se quiere que la formación matemática contribuya a la formación de mejores seres humanos y mejores ciudadanos. El establecimiento de este tipo de relaciones entre las distintas dimensiones, dice mucho de la potencialidad del CDM.

2.2.3 Consideraciones didácticas

Hay algunas consideraciones didácticas que se deben tener en cuenta para para la implementación de un modelo como el Modelo del conocimiento didáctico-matemático, entre ellas:

- ✓ Diseñar situaciones problema con elementos del contexto sociocultural que les permitan a los estudiantes utilizar los recursos existentes (Múnera, 2011), acudir a sus conocimientos previos, y les despierten su capacidad de asombro, de tal forma que los haga comprometerse autónomamente en la solución de la tarea.
- ✓ Enfrentar a los estudiantes a actividades que los lleven a utilizar diferentes estrategias de solución, y a valorar las soluciones de los demás, apropiándolas crítica y analíticamente, como parte de su proceso formativo. El desarrollo de la tarea debe prever espacios para que el estudiante comunique sus resultados; proceso evaluativo que debe favorecer el análisis de las producciones de los estudiantes, tanto entre como intra grupos, como por parte del docente. Lo que debe conducir a un proceso continuo de cooperación en la clase, que favorezca la interdependencia de cada participante, permitiendo el contraste de ideas y actitudes que favorezcan la construcción colectiva del conocimiento.
- ✓ Diseñar situaciones problema que permitan mostrar la utilidad de las matemáticas para la interpretación y modelización de la realidad en la vida de las personas, su necesidad de uso en la toma de decisiones ciudadanas, es decir, formar personas matemáticamente competentes (Gallardo, González y Quintanilla, 2013).

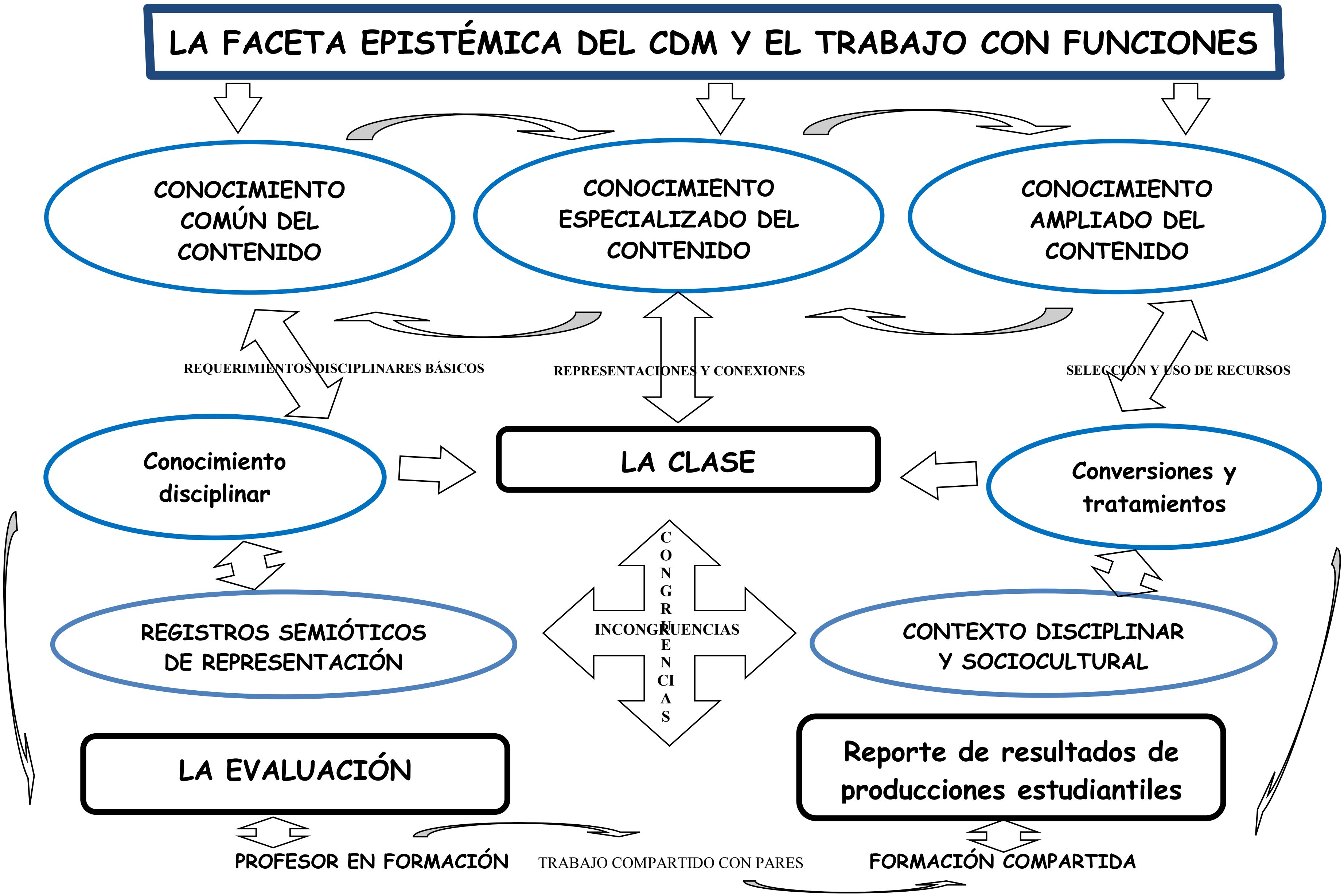
2.2.3.1 Implicaciones en la escuela

Este proceso implicaría grandes cambios a nivel educativo, lo que conduciría a grandes cambios en el currículo de las instituciones formadoras de docentes, fundamentados en producciones académicas, reflexiones o resultados de discusiones en eventos u otros espacios afines, tanto de las comunidades de investigadores y educadores matemáticos, como de investigaciones. Esto implicaría repensarse en su papel como productoras mecánicas de profesores terminados y pasar a fomentar la formación de profesores autoreflexivos, automonitoreados, conscientes de que nunca se termina de aprender (Watson, y Mason, 2007). Estos cambios no implican cambios puntuales en los elementos que más puedan afectar el currículo, sino en su perfeccionamiento. Esto es, un cambio radical en la estructura misma de las instituciones educativas y por tanto en sus programas, en su forma de concebir la educación. Incluyendo tanto procesos, medios y recursos, como a maestros y estudiantes.

Una estrategia que sea eficiente, eficaz y efectiva necesita de una metodología especial que abarque todos los aspectos modificables en una persona, es decir, que aborde la formación de la persona desde su integralidad, atacando todas sus dimensiones. Dimensiones que permiten el desarrollo de la persona: el sentir, el saber, el expresarse y, el ser. Con condiciones institucionales, para el trabajo docente y el desempeño estudiantil. Específicamente en el desempeño estudiantil se requiere que el trabajo en grupos se convierta en trabajo en equipo, en trabajo colaborativo. Con alto liderazgo de todos los actores institucionales. Pero sobre todo proponer e implementar nuevos e innovadores modelos pedagógicos que lleven a la implementación de estrategias didácticas adecuadas. Que faciliten en los aprendices el desarrollo de competencias cognitivas básicas: interpretativas, argumentativas y propositivas.

En este modelo se parte de la idea de que los seres humanos son productos de su capacidad para adquirir conocimientos y para reflexionar sobre sí mismos, lo que les permite anticipar, explicar y controlar propositivamente la naturaleza, y construir la cultura. Destaca la convicción de que el conocimiento se construye activamente por sujetos cognoscentes, no se recibe pasivamente del ambiente (Díaz Barriga y Hernández, 2004), aunque el ambiente es parte fundamental en el desarrollo del profesoral.

En la figura ilustrativa que relaciona los componentes de la faceta epistémica con el desarrollo de la clase como espacio de formación de los actores en el proceso educativo, a partir de transformaciones de registros y representaciones de una función y el establecimiento de congruencias e incongruencias, como elementos fundamentales para la comprensión en matemáticas.


LA FACETA EPISTÉMICA DEL CDM Y EL TRABAJO CON FUNCIONES
CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO
CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO
CONOCIMIENTO AMPLIADO DEL CONTENIDO
REQUERIMIENTOS DISCIPLINARES BÁSICOS
REPRESENTACIONES Y CONEXIONES
SELECCIÓN Y USO DE RECURSOS
Conocimiento disciplinar
LA CLASE
Conversiones y tratamientos
CONGRUENCIAS
INCONGRUENCIAS
REGISTROS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN
CONTEXTO DISCIPLINAR Y SOCIOCULTURAL
LA EVALUACIÓN
Reporte de resultados de producciones estudiantiles
PROFESOR EN FORMACIÓN
TRABAJO COMPARTIDO CON PARES
FORMACIÓN COMPARTIDA

CAPÍTULO 3

3 EL PROBLEMA Y METODOLOGÍA

3.1 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Uno de los principales retos en la formación profesoral es potenciar en los profesores el desarrollo de habilidades de pensamiento y procesos que los lleve a aprender a aprender con autonomía (Parcerisa, 2004), que sean capaces de adquirir patrones de conocimiento adaptables a las demandas de la sociedad actual. Esto en razón de que la enculturación matemática de niños y jóvenes de las comunidades depende en gran medida de las habilidades y competencias para enseñar de las personas que los orientan.

En relación con el concepto de función, parece haber un distanciamiento bien marcado entre la comprensión del concepto a nivel escolar y su necesidad de uso consciente a nivel social. Es decir, en las prácticas sociales -no académicas- es casi inevitable la utilización de este concepto en contextos cotidianos -aunque sea inconscientemente-, mientras que en contextos académicos, los estudiantes parecen no reconocerlo y les cuesta utilizarlo conscientemente quizás por no poderlos relacionar con algo conocido. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (M.E.N, 2005) considera que el estudio de las funciones es de suma importancia en el desarrollo de una comunidad ya que las funciones conectan modelos y/o patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables en el tiempo. Este es un concepto que brinda una gran oportunidad para explorar sus representaciones en un mismo ambiente, lo que facilita su estudio a través del análisis de congruencias e incongruencias entre los elementos de sus representaciones. Por lo que los escenarios donde es usado con frecuencia este concepto podrían ser los más apropiados como enlace para realizar la conexión entre el concepto a nivel social y su uso y comprensión en contextos académicos.

Según Hitt (2003a) el problema de los estudiantes y de algunos profesores de enseñanza media para entender el concepto de función es que generalmente se restringen a la manipulación de una representación algebraica del concepto, y esto produce limitaciones en su comprensión. Además, en general la actividad de conectar diferentes representaciones de un concepto matemático no es considerada como fundamental por muchos profesores, en la construcción del concepto. Y en particular, las actividades que involucran transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento son minimizadas por los profesores al estudiar las funciones, desconociendo que éstas promueven un mejor entendimiento de las funciones y facilitan el desarrollo de procesos de visualización.

De lo planteado por Hitt (2003a) se puede inferir que en la enseñanza de las funciones se ha tendido a sobrevalorar los procedimientos analíticos algebraicos, y la algoritmación, sin tener en cuenta que el estudio de funciones se potencia si se realiza en un ambiente natural de camaradería y cooperación mutua entre aprendices. Y que el recurso a diferentes registros es absolutamente indispensable para la comprensión en matemáticas (Duval, 2004) y además, que según Duval (2012b) la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de por lo menos dos registros y que se pueda pasar espontáneamente de una representación a otra sin siquiera notarlo.

Sierpinska (1994) manifiesta que en la construcción del concepto de función surgen obstáculos que son inevitables. Sugiere que para ayudar a los estudiantes a superarlos, es necesario crear un conflicto mental. En este sentido Hitt (2003c) considera que es muy importante que el estudiante esté consciente de la complejidad del concepto y de las dificultades que se pueden presentar más que presentarle una exposición clara del concepto. Es decir, crear conciencia en el estudiante de lo difícil que ha sido el concepto a través de su historia, para que cuando se le genere un desequilibrio mental, pueda enfrentar lo que se ha concebido como correcto hasta entonces, contrastarlo con el conocimiento nuevo y tomar decisiones adecuadas, ya que es prácticamente imposible que una persona pueda concebir este concepto sin tener algún obstáculo con él.

En este trabajo se tuvo como objetivo evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Se evalúa el reconocimiento, la producción y transformación de diferentes representaciones de una función y su uso para resolver una situación problema. Se tiene como pregunta orientadora: ¿Qué conocimiento didáctico-matemático poseen los futuros profesores de matemáticas para orientar de manera eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones? Se aplicaron dos cuestionarios a dos grupos de profesores en formación: el primero utilizado como prueba diagnóstica, y luego de un proceso de intervención se aplicó una prueba final o de contraste. De cada cuestionario se analiza la homogeneidad de las respuestas por grupos, y se caracterizan los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los profesores en formación al resolver cada cuestionario, para lo que se utiliza la noción de ***configuración onto-semiótica*** propuesta por Pino-Fan, Godino y Font (2015).

3.1.1 Preguntas y objetivos de investigación

3.1.1.1 Preguntas orientadoras

P1. ¿Qué conflictos epistémicos presentan los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función?
P2. ¿Qué conocimiento didáctico-matemático poseen los futuros profesores de matemáticas para orientar de manera eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones?
P3. ¿Será que al final del proceso instructivo de las asignaturas de didácticas de las matemáticas y prácticas pedagógicas investigativas, el programa Licenciatura en Matemática de la Universidad de sucre habrá generado, en los futuros profesores de matemáticas los conocimientos de la faceta epistémica del CDM suficiente para enseñar idóneamente las funciones?

3.1.1.2 Objetivos

General

Evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, de la Universidad de Sucre al hacer transformaciones de las representaciones de una función.

Específicos

O1. Evaluar la dimensión matemática del CDM en los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función.

O2. Evaluar el conocimiento especializado de la dimensión matemática del CDM en los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función.

O3. Analizar los conflictos epistemológicos que presentan los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función.

O4. Determinar si al finalizar el proceso instructivo en las asignaturas de didácticas de las matemáticas y prácticas pedagógicas investigativas, en los futuros profesores se han generado los conocimientos de la faceta epistémica del CDM suficiente para enseñar idóneamente las funciones.

O5. Caracterizar las prácticas y configuración de objetos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función.

3.2 METODOLOGÍA

3.2.1 Tipo de estudio

La investigación se enmarca dentro de un enfoque mixto (Creswell, 2009) puesto que en ella se combinan técnicas y métodos de investigación cuantitativos y cualitativos. Además es un estudio de tipo exploratorio en el que se consideran variables cuantitativas como las calificaciones obtenidas por los profesores en formación al resolver los cuestionarios, y cualitativas como las configuraciones cognitivas que emergen de los profesores en formación al dar sus respuestas a los diferentes ítems del cuestionario. Esta última variable cualitativa según Pino-Fan (2013) está íntimamente relacionada con el tipo de conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores en formación, y el seguimiento al proceso formativo se fundamenta en una vertiente socio-crítica del paradigma cualitativo, la que según Strauss y Corbin (2002), corresponde a "un proceso dinámico, emergente, flexible. Un proceso en el cual no hay reglas ni formulas rígidas. De manera que el investigador tiene que estar abierto a cambiar su perspectiva, sus paradigmas acerca del mundo" (p. 62), por el hecho de tener que asumir sus propios cambios, de estar pendiente de ir ajustándose a los requerimientos de un proceso, que por naturaleza es dinámico.

Y en lugar de comenzar, como se ha hecho tradicionalmente, estudiando los planes de estudios o los estándares básicos de competencias matemáticas, se analiza el trabajo que la misma enseñanza conlleva, es decir, se centró la atención en los conocimientos y habilidades que un profesor de matemáticas necesita para lograr una instrucción que facilite, de la mejor manera, el aprendizaje de los estudiantes. Se buscó describir las formas en que las matemáticas interactúan con los demás actores del proceso de enseñanza y aprendizaje (contenidos, estudiantes, profesores, escuela, comunidad y sus demandas sociales), las respuestas de los profesores en formación ante las demandas de la enseñanza del día a día, momento a momento.

La información se recogió en el lugar de desempeño habitual de los sujetos investigados, en diferentes momentos durante cuatro periodos académicos consecutivos. Sin embargo, el volumen y la calidad de las configuraciones cognitivas movilizadas por los profesores en formación dependen de la calidad de la tarea propuesta, de su motivación para resolverla y de la capacidad del resolutor para conectar los registros involucrados con elementos del contexto sociocultural.

Atendiendo a lo planteado por Strauss y Corbin (2002), en esta investigación se evaluan los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas del programa Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, al hacer transformaciones de las representaciones de una función, se analizan los aspectos que comprenden los profesores en formación sobre las funciones y la forma como se han preparado para facilitar que otras personas los comprendan. Buscando entender las transformaciones en los participantes en su proceso de formación en el programa se propuso un trabajo en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y teleológica (Colás y Buendía, 2004). Ontológica por ser una actividad compartida donde la realidad se construye colectivamente a partir de la reflexión de los propios actores buscando cambios en ellos mismos. Epistemológica porque la realidad investigada se trata de forma holística, donde se tiene en cuenta la relación de los participantes con el entorno educativo en que se forman, y el conocimiento se da como resultado de la interacción entre todos los actores implicados en el proceso (Silva, 2007). Y teleológica porque obedece a un plan intencionado que tiene su razón de ser en el mejoramiento de los propios participantes.

En este sentido se asume el programa de licenciatura en matemáticas como un compromiso colectivo de responsabilidad social con alta pertinencia en las prácticas sociales, que facilita a los participantes comprender y mejorar voluntariamente su acción profesionalizante. Esto quiere decir, además, que los individuos deben llegar al desarrollo de habilidades sociales que le permitan su adaptación e intervención en la solución de problemas, que de alguna manera, afectan el desarrollo de sus prácticas profesionales como docentes. Y aunque el interés de este trabajo se centra en el conocimiento didáctico de los estudiantes de la Licenciatura en torno al concepto de función, el análisis didáctico realizado a los futuros profesores engloba aspectos muy generales de la formación de un profesor de matemática, por lo que en la tesis se debió estar abierto a esta posibilidad.

En el trabajo se realiza un proceso de indagación sistemático y en profundidad del programa, que permita comprender detalles de los fenómenos educativos al interior de éste. Se analizan los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones de las representaciones de una función, en el desarrollo de sus cinco prácticas pedagógica investigativa (PPI), y sus cuatro Didácticas de las Matemáticas Escolares (DIMES) que ofrece el programa. Este es un proceso eminentemente social en el que se esperaba que el conocimiento matemático se construyera mientas se resolvía una situación que simula una actividad cotidiana del contexto donde se desenvuelven los profesores en formación. Al resolver y analizar cada situación se pretendía que cada profesor en formación validara y consolidara su conocimiento, es decir, que se hiciera un acercamiento al conocimiento socialmente compartido y aceptado por la comunidad de educadores de matemáticas, en este sentido, la observación sobre el quehacer matemático de los profesores en formación se realizaba con el fin de extraer información sobre su comprensión (Gallardo, González y Quintanilla, 2013) de la noción función, como objeto matemático a ser enseñado posteriormente por ellos.

3.2.2 Fases de la investigación

Para el logro de los objetivos específicos de O1 a O5 se siguió las siguientes fases de investigación:

Fase 1. ***Elaboración de los cuestionarios***

Se elaboraron e implementaron dos cuestionarios, comparables entre sí, uno diagnóstico y el cuestionario final o de contraste, mediante los cuales se recogió parte de la información que posteriormente fue analizada. En cada cuestionario se evalúa concretamente el reconocimiento, la producción y transformación de las diferentes representaciones semióticas de representación de una función y su uso para responder por las cuestiones por las que se indagan en la situación problema planteada en cada cuestionario. En la misma línea de los dos cuestionarios se construyó una situación problema para que fuera utilizada por los profesores en formación en la preparación y desarrollo de una clase.

Fase 2. ***Juicio de expertos a los cuestionarios***

Los cuestionarios se les pasaron a expertos del área de didáctica de las matemáticas, quienes dieron sus opiniones sobre la pertinencia de los ítems/tareas, solicitaron algunas modificaciones que fueron acogidas en pro de la mejora de los cuestionarios. La elaboración conjunta de los dos cuestionarios y de la situación problema, facilitó que se analizara su comparabilidad frente a las categorías de análisis construidas previamente.

Fases 3. ***Aplicación del cuestionario diagnóstico***

El cuestionario diagnóstico se aplicó a una muestra intencional de dos grupos de futuros profesores (3° y 6° semestres) de matemáticas, con el fin de recoger información inicial sobre la faceta epistémica de los conocimientos didácticos-matemáticos, como fundamento para una posterior triangulación con el resto de la información recogida.

Fase 4. ***Seguimiento al proceso formativo***

Se dio inicio a esta fase analizando el cuestionario diagnóstico, para lo cual a los participantes se les entregó una guía de análisis. Posteriormente se observaron, discutieron y prepararon clases, se analizaban posibles dificultades con la solución a las tareas que se planeaban para proponer a los estudiantes de la media académica y se discutían posibles alternativas para minimizar las dificultades que se encontraran. Luego de preparar las clases se simulaban ante sus compañeros de carrera y luego se desarrollaba la clase ante estudiantes de la media académica: estas clases eran vistas por otros compañeros con los que se discutía, en el encuentro posterior a la clase. Así mismo, se hizo un seguimiento al proceso evaluativo y se les pidió hacer reportes de investigación con los resultados de la evaluación o con los resultados de su trabajo en la práctica pedagógica investigativa. Con los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes de la media académica (ya fuera con los resultados de la evaluación o con los resultados de su trabajo en la práctica pedagógica investigativa), por grupos, elaboraban productos para ser presentados en eventos, tanto nacionales como internacionales y al regresar de los eventos se socializaban los trabajos ante estudiantes de todos los semestres y profesores del programa. Posteriormente, a los grupos se les pidió elaborar artículos para presentar en las actas del Comité latinoamericano de Matemática educativa (Alme). Aquí por razones de espacio solo se presenta una muestra de los resultados obtenidos en esta parte del trabajo.

Fase 5. ***Aplicación del cuestionario final***

El cuestionario final se aplicó a una muestra intencional de dos grupos de profesores de matemáticas en formación (6° y 8 semestres), con el fin de recoger información que permitiera verificar el estado de la faceta epistémica de los conocimientos didácticos-matemáticos sobre funciones que poseen los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas de la Universidad de Sucre al terminar el ciclo de las asignaturas PPI y DIMES y al terminar el programa en su totalidad respectivamente.

3.2.3 Población y Muestra

La población objeto de estudio en esta investigación la constituyen los 343 (02-2013), 331

(01-2014), 336 (02-2014) y 294 (01-2015) estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre, Colombia. La muestra la constituyeron los 28 (02-2013), 27 (01-2014), 26 (02-2014) y 24 (01-2015) estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas que comenzaron en 02-2013 en el tercer semestre y en 01-2015 estaban cursando el sexto semestre, y 28 (02-2013), 28 (01-2014), 27 (02-2014) y 26 (01-2015) estudiantes del mismo programa que en 02-2013 cursaban el sexto semestre y en 01-2015 habían cursado el programa en su totalidad y sólo cursaban la práctica docente. Los grupos se eligieron de forma intencional utilizando como criterio de inclusión que hubieran cursado por lo menos una de las cinco PPI o DIMES que ofrece el programa y que cuando los más atrasados terminaran las asignaturas de PPI y Didáctica de la matemáticas que se les ofrecen en el programa, los más avanzados hubieran terminado el programa en su totalidad o solo estuvieran viendo práctica docente. Las PPI y DIMES que se ofrecen en el programa son asignaturas que se comienzas a ofrecer desde el segundo semestre (PPI I y Didáctica general) y se continúan ofreciendo ininterrumpidamente hasta el sexto semestre (PPI V y DIMES IV). Los profesores en formación de la muestra tenían edades entre 18 y 25 años al inicio de la investigación y entre 20 y 27 años al terminar con todas las actividades.

El programa licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre tiene una duración de cuatro años, repartidos en 8 semestres. El encargado de la administración del programa es el Departamento de Matemática y Física, que es una de las dependencias de la Facultad de Educación y Ciencias.

Aunque la información se recogió solamente en las asignaturas de PPI y Didácticas de las Matemáticas, la formación en todas las asignaturas del programa seguía su curso. La estructura del programa se muestra en la figura 6 en la sección 1.1.6 y las asignaturas que se desarrollan son las siguientes: Al terminar el tercer semestre los estudiantes han tomado unas 464 horas de formación matemática disciplinar: Matemáticas generales, Cálculo I y Calculo II, lógica, Geometría Euclidiana y algebra lineal; y unas 432 horas de la componente didáctica-pedagógica: Matemática Escolar, Práctica pedagógica investigativa (PPI) I, PPI II, Didáctica General, Didáctica de Matemática (DIME) I, Filosofía de la Educación, Pedagogía General, Sociología de la educación y Psicología Evolutiva. En el cuarto semestre ven

Cálculo III, Teoría de conjuntos, DIME II, PPI III, Teorías de aprendizaje. En el quinto ven Ecuaciones diferenciales, Estadística descriptiva, DIME III, PPI IV, Procesos cognitivos y ética. En el sexto semestre ven Análisis matemático, Algebra abstracta I y Estadística inferencial, DIME IV, PPI V y Currículo I. En el séptimo semestre se ven Algoritmo y programación, Algebra abstracta II, Tic, Proyecto Pedagógico, Currículo y Seminario de Educación. Y en el octavo semestre se ven Métodos numéricos, Práctica Docente, Administración Educativa y seminario de Educación II. En el programa se ven tres electivas que se pueden elegir de una lista de asignaturas tanto disciplinares, como didáctico-pedagógicas. Son por lo menos unas 1168 horas de la componente matemática, y por lo menos unas 1040 horas de la componente didáctico- pedagógica y adicionalmente cinco niveles de inglés que se pueden cursar paralelos al programa, ofrecidos por la universidad o se puede mostrar suficiencia del dominio del idioma inglés.

3.2.4 Recolección de la información

Partiendo de que el trabajo del profesor es sumamente complejo, y que éste requiere centrar su atención en la observación y análisis de procesos de estudio matemático efectivamente implementados, para recoger la información se tuvo en cuenta el proceso seguido por Piaget en sus investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento. Es decir, se observó cuidadosamente la metamorfosis de los profesores en formación, mientras se interactuaba con ellos en este proceso. Se hizo un seguimiento a su progreso de estudiantes a profesores, comenzando por analizar la forma en que conciben los conocimientos disciplinares, hasta sus primeros pasos como profesores. Esto según (Shulman, 2005) revela e ilumina los complejos cuerpos de conocimientos y habilidades que se necesitan para que un profesor sea competente. Además, ante el desfase entre lo que se predica en los cursos de didáctica de las matemáticas, y la actuación de los profesores en formación en las instituciones educativa donde realizan sus prácticas (Godino, 2013), se le propone a los estudiantes, dos cuestionarios uno diagnóstico (a estudiantes del tercero y sexto semestres) y otro final (para estudiantes del sexto y octavo semestres). En el primer cuestionario (con estudiantes del 3° y 6° semestres) se pretendió evaluar los conocimientos iniciales de la faceta epistémica del CDM de los profesores en formación sobre el concepto de función y en el segundo (con estudiantes del 6° y 8° semestres), verificar los conocimientos didácticos-matemáticos del

CDM relacionados con funciones al terminar el ciclo de las asignaturas PPI y DIMES y al terminar el programa en su totalidad respectivamente.

El trabajo se basó en cuatro momentos fundamentales: 1) fundamentación de la investigación, 2) implementación del cuestionario diagnóstico, 3) evaluación del proceso formativo de la faceta epistémica, e 4) implementación del cuestionario final.

- La fundamentación consistió en una revisión juiciosa de material que ayudara a fundamentar el análisis de las dificultades y conflictos epistémicos de estudiantes y profesores con funciones, tanto en investigaciones previas, reportes documentales o teorías relacionadas con funciones, ya fuera por transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento.
- La fundamentación sirvió de base para construir el cuestionario diagnóstico. Se elaboró un instrumento tipo cuestionario, compuesto por algunas indicaciones por escrito. Se utilizó la gráfica mostrada en la figura 9 acompañada por 10 ítems. Se partió de una representación en el registro gráfico como registro principal, se pidió a los estudiantes hacer algunas transformaciones tipo tratamiento y tipo conversión entre diferentes registros semióticos de representación de una función (Amaya y Medina, 2013), para observar si las variaciones en el registro principal eran percibidas como tal en el registro de llegada y analizar las dificultades y conflictos que presentaran los estudiantes al hacer dichas transformaciones. La validación de este cuestionario se realizó a través de consulta con pares del área de matemáticas y un pilotaje aplicado a un grupo reducido de 10 estudiantes.
- La evaluación del proceso formativo de la faceta epistémica se inició discutiendo la solución al cuestionario, se observaron, discutieron y prepararon clases, se analizaban posibles dificultades con la solución de las tareas que se planeaban para proponer a los estudiantes a los que está dirigida la clase, se observaban clases, se analizaban dichas clases, se simulaban ante sus compañeros de carrera con la misma situación, y luego se desarrollaba la clase ante estudiantes de la media académica: esta clase era vista por otros compañeros con los que se discutía, en un momento posterior a la clase; así mismo, se realizaba un seguimiento al acto evaluativo.

- Finalmente se aplicó un nuevo cuestionario con el propósito de verificar el estado de la faceta epistémica del CDM sobre funciones que poseen los profesores en formación al terminar el ciclo de las asignaturas PPI y DIMES y al terminar el programa en su totalidad respectivamente. El análisis se realiza atendiendo las dos dimensiones generales del CDM: la Dimensión Matemática y la Dimensión Didáctica. El cuestionario se aplicó a los 50 estudiantes luego de algunos ajustes buscando claridad y adecuación en el tiempo de solución.

3.2.5 Modalidades de aplicación

Los cuestionarios se aplicaron a mediados de noviembre de 2013 (la prueba diagnóstica) y a mediados de noviembre de 2015 (la prueba final). Los cuestionarios aplicados los respondieron en forma individual y el cuestionario diagnóstico se analizó en forma grupal, destinándose aproximadamente dos horas para las soluciones individuales y una semana para las grupales. Los equipos de trabajo lo conformaban hasta cuatro estudiantes, los que luego de analizar el cuestionario debían elaborar un informe escrito para entregar. Esto con el fin de poder identificar los recursos y herramientas matemáticas disponibles para ellos resolver la tarea, de qué información requieren y cómo acceden a ella, pero sobre todo, cómo la utilizan; porque en definitiva es en estas condiciones como se van a desempeñar como docentes. La prueba diagnóstica se aplicó en la asignatura PPI, cuando los del tercer semestre (02-2013) habían cursado PPI I y Didáctica general y los del sexto habían terminado de cursar las PPI V y DIMES IV. La evaluación del proceso formativo de la faceta epistémica se realizó semestre tras semestre a ambos grupos en las asignaturas, tanto de PPI como de DIMES. Los estudiantes de las dos asignaturas en su mayoría fueron los mismos, sin embargo los cuestionarios sólo se aplicaron a aquellos que siempre estuvieron en el proceso, es decir, a los del tercer y sexto semestre 02-2013 que se les había aplicado el cuestionario diagnóstico. La prueba final se aplicó cuando los estudiantes del tercer semestre 02-2013 estaban en el sexto y habían terminado el ciclo de las PPI y las DIMES, y los del sexto semestre 02-2013 habían terminado el programa en su totalidad y sólo cursaban la práctica docente.

Al entregar los informes, éstos se discutían en plenaria, tipo grupo focal, donde los miembros de cada grupo exponían su solución, la que era confrontada con la de los otros grupos y cada uno de ellos defendía su propuesta de solución ante los demás, estas secciones fueron video grabadas. Esto permitió validar las respuestas que resultaron, en cierto sentido ambiguas o, de dudosa interpretación.

La recolección de la información, incluida la aplicación de los cuestionarios estuvo a cargo del autor de esta tesis doctoral. Al momento de comenzar la aplicación de cada cuestionario se dio especificaciones a los estudiantes sobre la forma en que deberían responder la prueba, y se les hizo saber que era parte de la información a recoger en el desarrollo de una tesis doctoral.

3.2.6 Instrumentos utilizados para recoger la información

En el proceso de selección y diseño de los cuestionarios se creó un banco de situaciones problema, escrutando en investigaciones y material puesto a disposición del público en la web, escogiendo aquellas que mejor se ajustaran al trabajo didáctico con funciones. Se escogieron tareas que permitieran relacionar las funciones con el contexto sociocultural, lo que facilita establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de las funciones involucradas, comparar sus respectivos significados y encontrarles sentido al utilizarlos mientras se resuelve la situación. De entre las situaciones seleccionadas se optó por aquellas que permitieran tres cuestiones básicas:

1) Que facilitara evaluar el conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores en formación, esto es, que permitiera evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del contenido.
2) Que facilitara realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento entre elementos de las funciones involucradas. Para ello las tareas, en sí mismas, mandan implícitamente al estudiante a hacer las transformaciones, en cada uno de los registros y en la representación que el profesor en formación considerara conveniente, que le facilitara un mejor desarrollo de la tarea: registro gráfico, registros aritmético analítico, registro aritmético algebraico, registro tabular, etc.
3) Que facilitara abordar en profundidad la faceta epistémica que se evalúa, es decir, que las tareas propuestas facilitaran evaluar el grado de ajuste entre la interpretación que

> los futuros profesores dan a las funciones a nivel social, y su identificación y uso a nivel académico. Para lograrlo se incluyeron tareas que permitieran relacionar las funciones como objeto matemático –usando cualquiera de sus representaciones semióticas-, con elementos del contexto sociocultural donde se desempeñan los estudiantes.

Este proceso de realizar conexiones de las representaciones semióticas de una función con elementos del medio sociocultural ha sido traumático a través de la historia de la humanidad (Font, 2011). Es identificar las matemáticas en lo que comúnmente hacemos y a partir de ahí llevar ese conocimiento a la matemática como disciplina; es buscar las matemáticas en los fenómenos con los que convivimos a diario y luego modelizarla, es decir, es decodificar los elementos de una función de una representación fenomenológica y luego recodificarlos en una representación semiótica ordinaria, de las que se acostumbran a usar en la disciplina, en registros como el gráfico, el aritmético analítico, el aritmético algebraico, o el tabular, etc.

Pero no todas las representaciones fenomenológicas permiten montar una situación con rigurosidad, es decir, no toda representación fenomenológica que permita evocar los mismos registros semióticos de representación es igual de rica para el trabajo de aula; esto es precisamente porque no todas permiten establecer congruencias claras entre los elementos de los diferentes registros a los que se pueda recurrir desde ellas, o en algunos casos porque los experimentos resultan ser destructivos y generan mucho gasto al implementarlos.

A continuación se presentan cada una de las tareas utilizadas para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores de matemáticas al hacer transformaciones con los elementos de una función.

3.2.6.1 Los cuestionarios aplicados como prueba diagnóstica y como prueba final

La información se recogió a través de la aplicación de dos cuestionarios: la prueba diagnóstica y la prueba final o de validación, cada uno de los cuales se enuncia antes de su respectivo análisis, y además, en el seguimiento a actividades donde se registró el proceso formativo durante tres semestres consecutivos.

En la figura 9 se muestra la situación utilizada en los cuestionarios diagnóstico y final, y en la tabla 2 se muestran las categorías de análisis con las cuestiones por las que se indagó en cada cuestionario. En este se plantearon preguntas abiertas y preguntas cerradas, sobre el mismo enunciado. En el cuestionario se parte del registro gráfico como registro principal, hacia los registros aritmético analítico, aritmético algebraico y al mismo registro gráfico, como registros auxiliares. El enunciado del cuestionario es el siguiente:

En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, 'Ifigenia Cruel'.

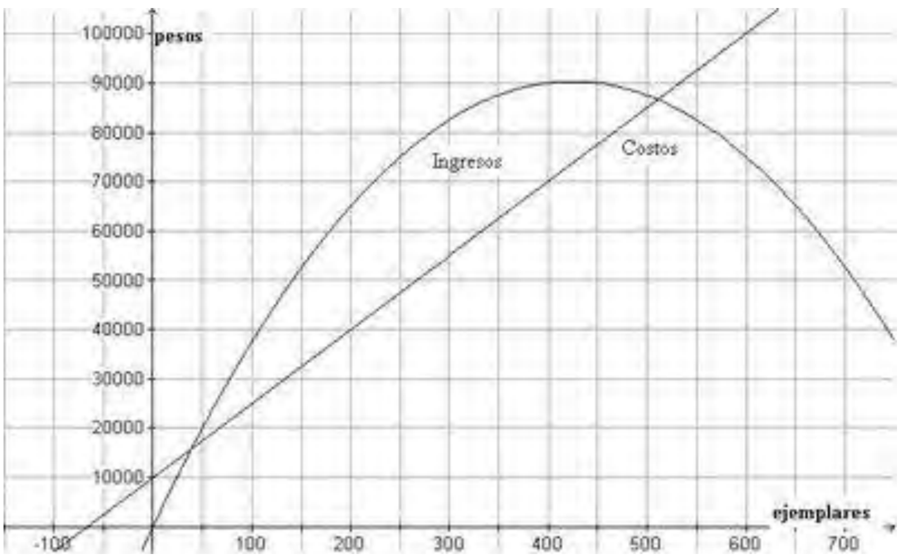


Figura 9. Cuestionario base aplicado a los profesores en formación. Original tomado de: http://historiasdeactividades.blogspot.com/2007/09/ifigenia-cruel-de-alfonso-reyes.html

Para la construcción del cuestionario - partiendo de este enunciado- se enlistaron los elementos de una función, y se escogieron aquellos que permitieran determinar la relación de los elementos de la situación funcional con el contexto sociocultural y a partir de esta selección se construyeron las categorías de análisis previas y las cuestiones que fueron planteadas por cada categoría de análisis en cada cuestionario, los que se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Categorías de análisis y cuestiones planteadas en las situaciones

N°	Categorías de análisis	Prueba	Tareas o Cuestiones planteadas

1	Identificación y uso del intercepto al origen en una función	Piloto	¿A cuánto ascienden los costos fijos de producción?
		Final	¿Cuáles son los Costos, los Ingresos y la Ganancia por producir y vender 0 ejemplares?
2	Identificación y uso de los intervalos de variación de una función	Piloto	¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?
		Final	¿Para qué cantidad de ejemplares producidos y vendidos se obtienen pérdidas?
3	Determinación de los máximos y mínimos de una función	Piloto	¿Cuál debe ser la oferta para obtener el mayor ingreso?
		Final	¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?
4	Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta	Piloto	¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?
		Final	¿En cuánto varían los costos de producción de cada libro? ¿Es constante (fija) o variable esa variación?
5	Modelación matemáticamente de una situación funcional	Piloto	Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de la Ganancia. En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de la Ganancia.
		Final	Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de los ingresos.
6	Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita	Piloto	Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?

		Final	Si se sabe que no se obtuvo ni ganancias ni pérdidas ¿cuántos ejemplares se debieron producir y vender?
7	Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función	Piloto	¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancia?
		Final	¿En qué intervalos crecen y en cuáles decrecen las perdidas?

3.2.6.2 Soluciones esperadas

Para resolver cada tarea o cuestión planteada, el estudiante debía identificar, en la representación gráfica de las funciones involucradas en la situación, el elemento por el que se le indagaba y a partir de esta identificación hacer conversiones y/o tratamientos y dar su respuesta. Es decir, debía decodificar del registro gráfico, utilizado como registro principal, el contenido de las representaciones, y recodificarlo en otro registro o en el mismo registro, sin salirse del marco de la situación problema planteada.

Por ejemplo, para obtener una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de la Ganancia, se puede hacer un análisis visual de cada función, ubicar puntos con igual abscisa sobre las funciones de ingresos y de costos y luego restar las coordenadas correspondientes (Ingresos – Costos) y así obtener algunos valores de la función. A partir de la identificación de la información y la realización de algunos cálculos aritméticos sencillos se puede proceder a elaborar una tabla como la siguiente, en la cual se muestran los costos de producción, los ingresos y las ganancias respectivamente, para determinados números de ejemplares.

Para la elaboración de la tabla se ha tenido en cuenta hacer una diferenciación, con diferentes colores, para cada una de las entradas: blanco para número de ejemplares, verde para los Costos, azul para los Ingresos y morado para las Ganancias, esta convención de colores se mantendrá siempre que hagamos referencia a estas magnitudes en este ejemplo.

Tabla 3. Representación tabular de las funciones de Costos, Ingresos y Ganancias

Número de ejemplares (x)	Costo en pesos (y)	Ingresos en pesos (y)	Ganancias en pesos (y)
0	10000	0	-10000
50	17500	20000	2500
100	25000	37500	12500
200	40000	65000	25000
250	47500	75000	27500
300	55000	82500	27500
400	70000	90000	20000
450	77500	90000	12500
500	85000	87500	2500
600	100000	75000	-25000

Para este caso los signos negativos en la representación tabular de la función ganancias indican las perdidas.

Otra opción posible es sencillamente recurrir al método comúnmente usado, es decir, recurrir primero al cálculo de las representaciones algebraicas de las funciones de Costos y de Ingresos y luego realizar la diferencia de la función Ingresos menos la de Costos. Para obtener las representaciones algebraicas de cada una de estas funciones es necesario realizar determinadas tareas que implican transformaciones tipo conversión y/o tipo tratamiento.

Como el registro principal es el registro gráfico, se parte de una representación gráfica identificando algunos puntos para cada una de las dos funciones (Ingresos y Costos), en las representaciones en este registro. Con esta información se ha hecho una conversión al registro aritmético numérico, obteniéndose una representación cartesiana para cada una de las dos funciones – de Costos y de Ingresos-

Como ejemplo comencemos con la función de Costos: $(0, 10.000), (200, 40.000)$, y utilizar esta información para transitar hasta el registro de representación algebraico. Utilizando estas coordenadas y la forma general para hallar la pendiente de una recta se puede hallar la pendiente de la recta, que corresponden al costo de cada ejemplar sin considerar los costos fijos de producción así:

$\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{40.000-10.000}{200-0} = \frac{30.000}{200} = 150$

Y utilizando la forma pendiente punto: $(y - y_1) = \frac{y2-y1}{x2-x1}(x - x_1)$ de la representación algebraica de una recta, y cualquiera de los dos puntos mostrados anteriormente, se puede obtener la expresión algebraica, de los **Costos**, la cual queda de la manera siguiente**: C(x)= 150x+10000**. Esto indica que los costos fijos de producción para este libro son de 10.000 pesos y el costo de edición de cada ejemplar sin tener en cuenta los costos fijos de producción es de 150 pesos.

Para hallar la expresión algebraica de la parábola que representa los ingresos se puede utilizar la forma general de una función cuadrática de la forma $I(x) = ax^2 + bx + c$ y tomando tres puntos del plano por donde pasa la curva (e.g., $(0,0), (50, 20.000)$y $(400, 90.0000)$ al reemplazar y completar la expresión, se toma la primera coordenada y se encuentra el valor de la constante (c), resultando c=0. Luego se toman las otras dos coordenadas y se reemplazan en la expresión cuadrática, así:

$$(1)\ c = 0\ ; (2) 20.000 = 2.500a + 50b\ y\ (3)\ 90.000 = 160.000a + 400b$$

(1) 20000 = 2500a +50b y (2) 90000 = 160000a +400b, se procede a resolver el sistema de ecuaciones, en este caso se desarrollara por el método de igualación: $\frac{20000-2500a}{50}$ = b y $\frac{90000-160000a}{400}$ = b

Luego, 400 - 50a = 225 – 400a

350a = -175

a= -0.5

Reemplazando a= -0.5 en (1) o en (2) se obtiene el valor de la constante que falta por encontrar, así:

400 – 50 (-0.5)= 425=b

Teniendo estos valores se utilizan para armar la expresión algebraica de la función de Ingresos, como sigue:

Ingreso: **$I(x)= -0.5x^2+425x$** donde x representa el número de ejemplares vendidos y **$I(x)= -0.5x^2+425x$** la función de Ingresos.

Ahora, como se sabe que las ganancias se obtienen a partir de la diferencia entre los ingresos que producen las ventas y el costo de producción de los ejemplares, para hallar una expresión algebraica que represente las ganancias se utilizan las expresiones anteriores, como se muestra a continuación:

Ganancias es igual a Ingresos menos Costos:

$G(x) = I(x) - C(x)$ [**transformación tipo conversión]**

$G(x) = -0.5x^2+425x - (150x+10000)$ [**transformación tipo conversión-tratamiento]**

$G(x) = -0.5x^2+425x-150x-10000$ **[transformación tipo tratamiento]**

$G(x) = -0.5x^2+275x-10000$ **[transformación tipo tratamiento]**

En las transformaciones tipo conversión son conversiones se hace un cambio de registro, en este caso se pasa del registro gráfico al algebraico. Mientras en una transformación tipo tratamiento, los cambios se hacen al interior del mismo registro, en este caso el algebraico, es decir, se hacen las transformaciones sin abandonar el registro donde se comenzó dicha transformación.

Y tomando como insumo la información anterior, es más fácil reelaborar las representaciones gráficas siguiendo la convención de colores que se ha dispuesto para este ejemplo. A continuación se muestran, en un mismo plano, las representaciones gráficas correspondientes a los Costos, los Ingresos y las Ganancias.

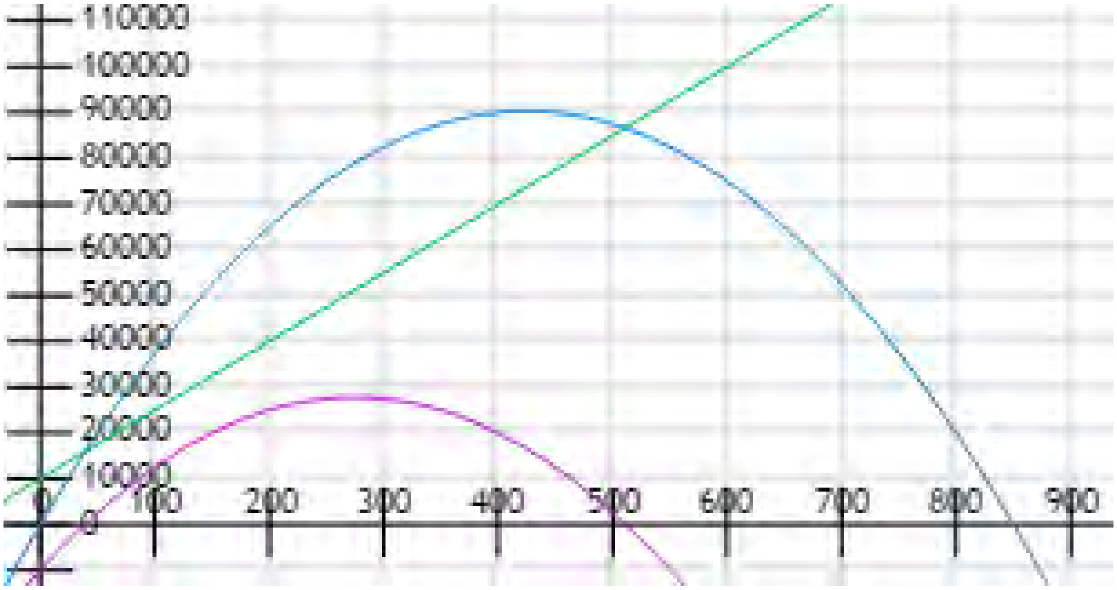


Figura 10. Representación gráfica de las funciones de Costo, de Ingresos y de Ganancias, en diferentes colores.

Con esta la convención de colores que se ha dispuesto para este ejemplo, resulta más sencillo realizar las congruencias entre los elementos de las representaciones en cada registro, al ponerlos en paralelo y empezar a comparar los elementos ostensibles, tanto en uno como en otros registros y representación (Del Castillo, 2003).

3.2.7 Tratamiento y análisis de la información

A partir de las respuestas aportadas por los estudiantes se analizaron las dificultades de comprensión y los conflictos referidos a las funciones, al invocar sus concepciones, esto es, los errores conceptuales al hacer transformaciones en el registro gráfico utilizado como registro principal o desde éste hacia otros registros solicitados. Se tomó la calificación obtenida por cada profesor en formación en cada cuestionario y se construyó una base de datos en el programa SPSS. Y también se analizaron y caracterizaron los objetos matemáticos primarios y aquellos procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollaron los profesores en formación al resolver cada cuestionario.

Con los resultados se hizo un análisis comparativo de las calificaciones medias de los dos grupos al resolver cada cuestionario utilizando un análisis de varianzas; se analizan las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provinieran, esto se hizo utilizando tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0,05$). Para realizar el análisis y caracterización de los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los profesores en formación al resolver el cuestionario se utilizó la noción de ***configuración ontosemiótica*** (Pino-Fan, Godino y Font, 2015), a través de la cual se pueden identificar y describir en detalle, tanto la actividad matemática que realizan los futuros profesores al resolver cada ítem en cada situación, como los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos de los objetos matemáticos implicados en la resolución de las actividades propuestas, así como sus significados, y los procesos incluidos en las prácticas matemáticas institucionales o personales (Pino-Fan y Assis, 2015). Aquí se reportan los resultados sólo de la faceta epistémica.

En la presentación de los resultados, para cada ítem se presenta una dupla (i, j) donde "*i*" (entre 0 y 28 del 02-2013-del tercer semestre-, o entre 0 y 24 del 01-2015-del sexto semestre-) y "j" (entre 0 y 28 del 02-2013- del sexto semestre o entre 0 y 26 del 01-2015 del octavo semestre) representa la cantidad de profesores en formación que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem. Y se presenta $P_{(r)i,\, j,}$ donde r = 3, 6 semestre en la prueba diagnóstica o r = 6, 8 semestre para la prueba final, para referir a un profesor en formación de alguno de los dos niveles en cada prueba.

CAPITULO 4.

4 EVALUACIÓN DE LA FACETA EPISTÉMICA DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE FUNCIONES EN PROFESORES EN FORMACION

Según Pino-Fan, Godino y Font (2011) para hacer el análisis de los procesos de instrucción matemática relacionados con la faceta Epistémica, hay que tener en cuenta los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional donde se realiza el proceso educativo, su relación con el contexto sociocultural donde se desarrolla la práctica educativa y la distribución que se hace de los diversos componentes del contenido: los problemas, el lenguaje utilizado, procedimientos/estrategias utilizados, los conceptos/definiciones utilizados, las proposiciones/propiedades utilizadas y los argumentos utilizados, presentes en las prácticas matemáticas desarrolladas por los profesores en formación.

Luego de hacer un acompañamiento a los 50 profesores en formación, en su proceso de formación como aprendices para profesor de matemática: de seguir paso a paso la evolución de su formación para enseñar la disciplina, de la identificación y valoración de condiciones para su desempeño, de valorar las condiciones en que reciben el aprendizaje, de la identificación en el medio de recursos necesarios para el desarrollo de su actividad docente, de la evaluación de las producciones de alumnos del nivel donde se desempeñarán a futuro y de qué hacer con los resultados de la evaluación, se aplicó un cuestionario final a los 24 (01-2015) profesores en formación del sexto semestre del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre y a los 26 (01-2015) profesores en formación octavo semestre del mismo programa, para verificar los avances obtenidos en dicho proceso por este grupo de futuros profesores de matemáticas. A continuación se presenta el análisis de los resultados de ambos cuestionarios aplicados a estos profesores en formación, como prueba diagnóstica y como prueba final respectivamente.

En el análisis del conocimiento matemático para enseñar de profesores en formación, se parte de reconocer el proceso de formación docente como una actividad dinámica, que implica una alta reflexión sobre su quehacer, y sobre la intervención pedagógica permanente, de los diferentes componentes del programa durante el proceso. Por lo que el proceso investigativo incluye un acompañamiento de la práctica educativa, fundamento de su formación, como aprendices para profesor de matemáticas. Es decir, un acompañamiento en la evolución de su formación para enseñar la disciplina: los procesos de planeación docente, de la identificación y valoración de condiciones para su desempeño, de valorar las condiciones en que los estudiantes reciben el aprendizaje, de la identificación en el medio y manejo de recursos necesarios para el desarrollo de su actividad docente, de la evaluación de las producciones de alumnos del nivel donde se desempeñarán a futuro y de qué hacer con los resultados de la evaluación si se quiere favorecer la comprensión conceptual de los estudiantes a los que se orientará. Entre el qué hacer con los resultados de evaluación se incluye el poder comunicar los resultados de su análisis en presentaciones en eventos nacionales o internacionales, o a través de artículos en revistas u otros medios masivos de difusión de este tipo de resultados.

4.1 IMPLEMENTACIÓN Y ANALISIS DEL CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

4.1.1 La muestra

El proceso de análisis de la evolución de los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas que se ofrece en la Universidad de Sucre, Colombia comenzó en el segundo semestre del año 2013, con la aplicación de un cuestionario diagnóstico a estudiantes de semestres intermedios (28 del tercero y 28 del sexto semestre).

Al terminar el tercer semestre los estudiantes han tomado unas 464 horas de formación matemática: Matemáticas generales, Cálculo I y Calculo II, lógica, Geometría Euclidiana y algebra lineal; y unas 432 horas de la componente didáctica-pedagógica, ente ellas Práctica pedagógica investigativa (PPI) I y II, Didáctica General, Didáctica de Matemática (DIME) I. Al terminar el sexto semestre han tomado unas 512 horas más de formación matemática: Cálculo III, Teoría de conjuntos, Ecuaciones diferenciales, Estadística descriptiva, Análisis matemático, Algebra abstracta I y Estadística inferencial, y unas 288 horas más de la componente didáctica-pedagógica, entre ellas DIME II, III y IV, PPI III y IV.

Esta primera actividad se utilizó para establecer un diagnóstico, respecto al análisis y la comprensión inicial que tienen los profesores en formación sobre la caracterización y los significados personales asignados al objeto matemático función. Este proceso de reconocimiento del desarrollo de competencias y de análisis para reconocer explícitamente objetos matemáticos forma parte del conocimiento especializado del contenido que se debe promover en el maestro (Godino, 2009).

Atendiendo el enunciado de la situación utilizada para realizar el diagnóstico, se plantearon ocho ítems, cada uno de ellos relacionado con las categorías de análisis al diseñar la situación los cuales se muestran en la tabla 2. Cada ítem se presentó con pregunta abierta y con pregunta cerrada, con cinco opciones de respuesta.

Con los resultados lo primero que se hizo fue un análisis comparativo de las calificaciones medias de los dos grupos al resolver el cuestionario utilizando para ello un análisis de varianzas. Se analizaron las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provinieran, para ello se utilizaron tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson. Posteriormente se sigue el análisis y caracterización de los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los profesores en formación al resolver el cuestionario. Para este análisis y caracterización se utilizó la noción de ***configuración ontosemiótica*** propuesta por Pino-Fan, Godino y Font (2015), a través de la cual se pueden identificar y describir en detalle, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos de los objetos matemáticos implicados, así como sus significados, y los procesos incluidos en las prácticas matemáticas institucionales o personales (Pino-Fan y Assis, 2015).

4.1.2 Análisis cuantitativo del proceso diagnóstico

En las calificaciones de los estudiantes al resolver el cuestionario, los resultados del análisis de varianza evidencian que se encontraron diferencias estadísticamente significativas en las medias de los dos grupos (ver tabla 4). Esta diferencia en el conocimiento común de la dimensión matemática del CDM se esperaba, puesto que los del sexto semestre en ese momento habían visto aproximadamente 512 hora más de matemáticas que los del tercero. Y para los del tercer semestre las 704 o más horas que les faltaban en ese momento en la componente disciplinar para terminar la carrera, podía ser tiempo suficiente para alcanzar o superar el nivel mostrado por los estudiantes del sexto semestre al terminar la carrera.

A continuación se muestran, en la tabla 4, los resultados del análisis de varianzas que permite comparar las calificaciones medias de los estudiantes de los dos niveles al resolver el cuestionario diagnóstico.

Tabla 4. Anova de la Calificación al resolver el cuestionario diagnóstico

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	73,143	1	73,143	15,030	0,000
Dentro de grupos	262,786	54	4,866		
Total	335,929	55			

Como puede apreciarse en la tabla 5, se presentaron altos niveles de homogeneidad al interior de los grupos solo en el 25% de las respuestas dadas a las cuestiones planteadas, es decir, la tendencia por grupos fue a dar respuestas diferentes para cada ítem. Que la homogeneidad al interior de los grupos sea alta y que los porcentajes de aciertos en ellos también lo sean, significa que hubo un alto grado de acuerdo, sobre todo en los aciertos. Que la homogeneidad al interior de los grupos no sea alta y que los porcentajes de aciertos en ello si lo sea, significa que hubo un alto grado de desacuerdo, pero que primó el número de aciertos. Y que la homogeneidad al interior de los grupos no sea alta y que los porcentajes de aciertos en ellos tampoco lo sea, significa que hubo un alto grado de desacuerdo, pero que primó el número de desaciertos. Por lo que es muy posible que estos resultados no sean productos del azar, sino que se deban a las creencias y a las formas de orientar los procesos de enseñanza de algunos profesores que orientan algunos grupos y no a otros.

Tabla 5. Coeficientes Chi-Cuadrado de Pearson para cada cuestión planteada

Cuestiones planteadas	Aciertos (%)	χ^2	P-valor
¿A cuánto ascienden los costos fijos de producción?	37.50	5.154	> 0.05
¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?	58.92	7.418	> 0.05
¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?	44.64	3.733	> 0.05
¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los Costos fijos de producción?	48.21	9.171	> 0.05
Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de la Ganancia.	57.14	12.090	< 0.05
Si se sabe que se obtuvo una Ganancia de 20.000 pesos, ¿cuál fue el número de ejemplares que se debió producir y vender?	62.50	14.400	< 0.05
En el mismo plano coordenado realiza la gráfica de la Ganancia.	60.71	5.750	> 0.05
¿En qué intervalos crecen la funciones de Costos, de Ingresos y de Ganancia?	39.28	0.832	> 0.05

4.1.3 Análisis cualitativo del proceso diagnóstico

4.1.3.1 Dimensión Matemática

Esta dimensión incluye el conocimiento que posee el profesor para desarrollar su práctica profesional eficientemente, e involucra todo lo relacionado con el conocimiento que un profesor debe tener sobre las matemáticas que enseña y las relaciones prerrequisitarias entre los conceptos que enseña, y de estos con los recursos que utiliza para enseñarlos. Está conformada por dos sub-categorías: el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido.

4.1.3.1.1 Conocimiento común del contenido

Es el conocimiento matemático necesario para que el profesor pueda entender las matemáticas en el nivel que orienta. Le permite al profesor poder seleccionar, modificar, diseñar y resolver los problemas que les coloca a sus estudiantes. Y determinar si una respuesta es adecuada o no, de acuerdo a la solución esperada para un problema. A continuación se muestran los resultados y el análisis de las respuestas dadas por los profesores en formación al cuestionario diagnóstico, ítem/tarea por ítem/tarea.

4.1.3.1.1.1 Identificación y uso del intercepto al origen en una función

En cuanto a la identificación y uso del intercepto al origen en una función, se pretendía que los profesores en formación reconocieran el intercepto al origen en la función lineal involucrada, en el contexto de la situación, y establecieran la relación contexto-disciplina. En este contexto parece que no fue muy bien reconocido el intercepto al origen, ya que sólo el 37.5% de los profesores en formación dio respuesta acertada a este ítem (8, 13). Resultado que contrasta con lo reportado por Marroquín (2009) quien manifiesta que cuando los estudiantes utilizan estrategias de visualización, este es uno de los elementos de la función mejor reconocidos. Además con un alto nivel de heterogeneidad en las respuestas intra e inter-grupos ($\chi^2 = 9.171$, $P > 0.05$). Lo que quiere decir que tanto en los aciertos como en los desaciertos, las respuestas fueron dispersas.

En las Figuras 11 y 12 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)12}$ y $P_{(3)1}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

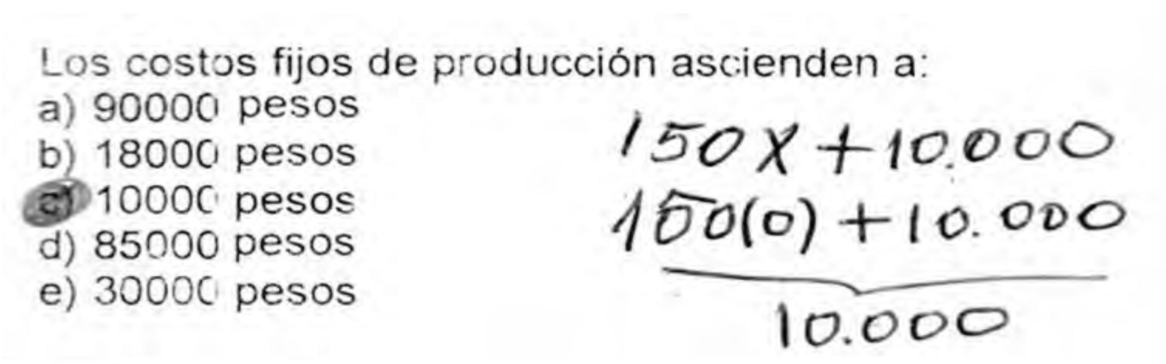


Figura 11. Respuesta dada por $P_{(6)12}$ al ítem uno del cuestionario.

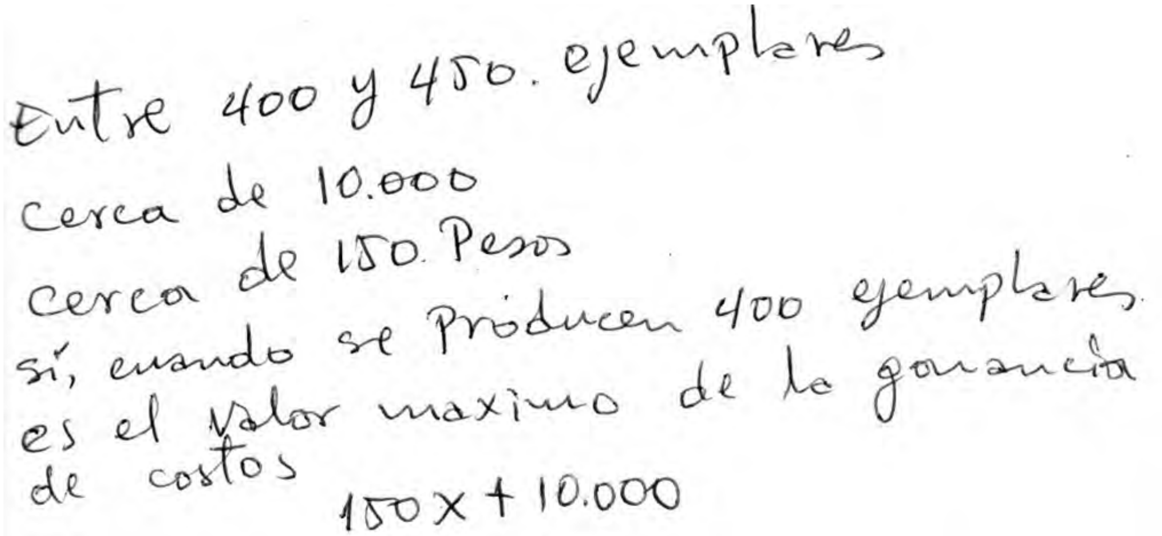

Entre 400 y 450. ejemplares
Cerca de 10.000
cerca de 150 Pesos
sí, cuando se producen 400 ejemplares.
es el valor maximo de la ganancia
de costos
150x + 10.000

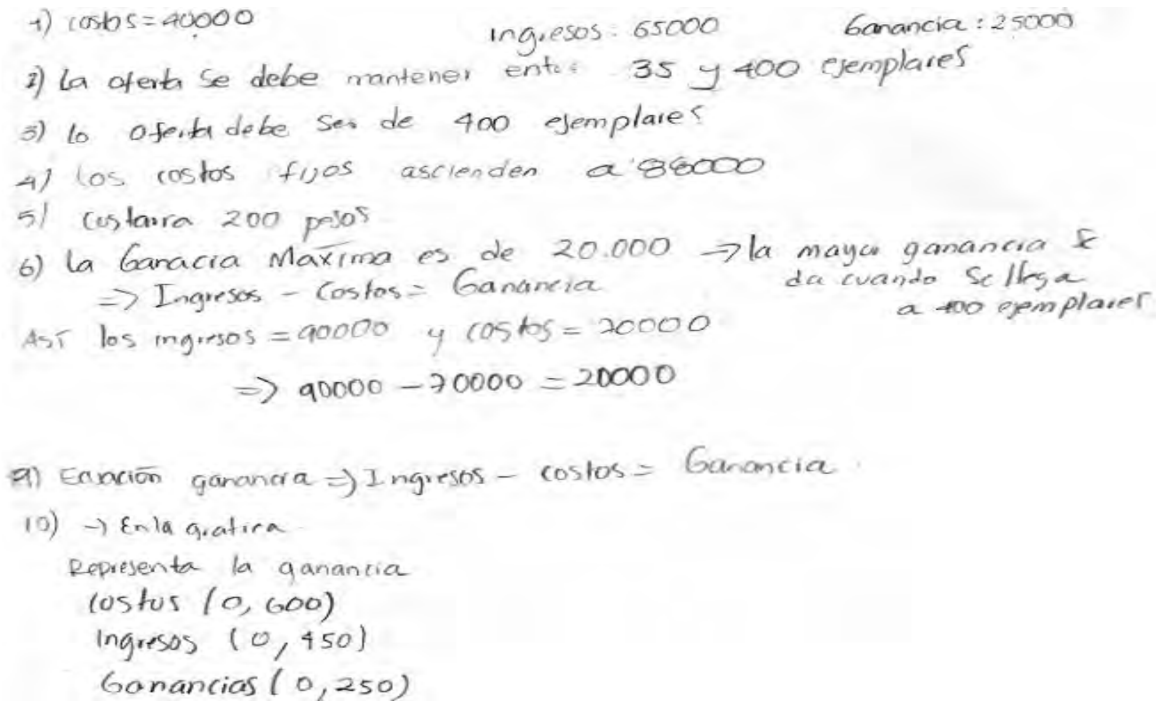
Figura 12. Respuesta dada por $P_{(3)1}$ a varios ítems del cuestionario.

En este ítems/tarea se pudo identificar que los *elementos lingüísticos* que utilizan los profesores en formación (23, 21) son mayoritariamente verbales, números naturales como lo hacen $P_{(3)1}$, $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)12}$ mostrados en las figuras 12, 13, 16 y 11 respectivamente (e.g., Cerca de 10.000), también utilizan un polinomio aritmético como lo hacen $P_{(6)12}$ (e.g., 150(0) +10000 →10000), mientras que $P_{(3)1}$ y $P_{(6)12}$ comunican sus respuestas con una combinación de elementos verbales y números naturales (e.g., cerca de 10.000; punto de corte en eje Y →10000). Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan se destaca el intercepto al origen de la función lineal involucrada y la solución de un polinomio aritmético. En relación a las *proposiciones/propiedades*, ante las respuestas parecen reconocer el punto de corte de la función lineal con el eje Y. Los *procedimientos* utilizados se pueden clasificar en tres grupos: 1) los (11, 12) que dieron sus respuestas luego de un análisis visual, sin comunicar otro procedimiento, 2) los (12, 10) que hacen una conversión al registro algebraico al identificar el intercepto al origen y la pendiente de la recta y en la representación algebraica manifiestan reconocer el intercepto al origen, como es el caso del $P_{(3)7}$ quien establece congruencias entre los registros gráfico, analítico numérico y del lenguaje coloquial. Y 3) aquellos (3, 4) que toman dos puntos sobre los que pasa la gráfica de la función lineal, con ellos encuentran una representación algebraica y a partir de ésta *argumentan* sobre el intercepto al origen de la función lineal.

4.1.3.1.1.2 Identificación y uso de los intervalos de variación de una función

Para evaluar la identificación y uso de los intervalos de variación de una función se indagó por el intervalo de variación de la oferta que permitiera obtener Ganancias, es decir, por el dominio de la función Ganancias. Se esperaba que a partir de un análisis visual, los profesores en formación pudieran identificar el intervalo donde hay Ganancias. El 58.92% (13, 20) de los estudiantes dio respuestas acertadas a este ítem, pero mostraron ciertas limitaciones para identificar el dominio de las funciones en el registro gráfico, ya que para ellos, estos no van más allá de lo visible (Amaya y Medina, 2013), lo que probablemente ocasionó que muy pocos pudieran identificarlos, quizás por no poder conectar las representaciones involucradas (Meel, 2003) y a partir de ahí dar sus respuestas. Además, ningún profesor en formación concibió ganancias negativas -pérdidas-. En este aspecto se evidenció poca concordancia entre las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 7.418$, $P>0.05$), es decir, sin tener en cuenta los aciertos y los errores, el grado de heterogeneidad en las respuestas intra-grupos fue alto, así las respuestas dadas a los demás literales, al interior de cada grupo se enfocaron hacía aspectos diferentes al interior de cada uno de éstos.

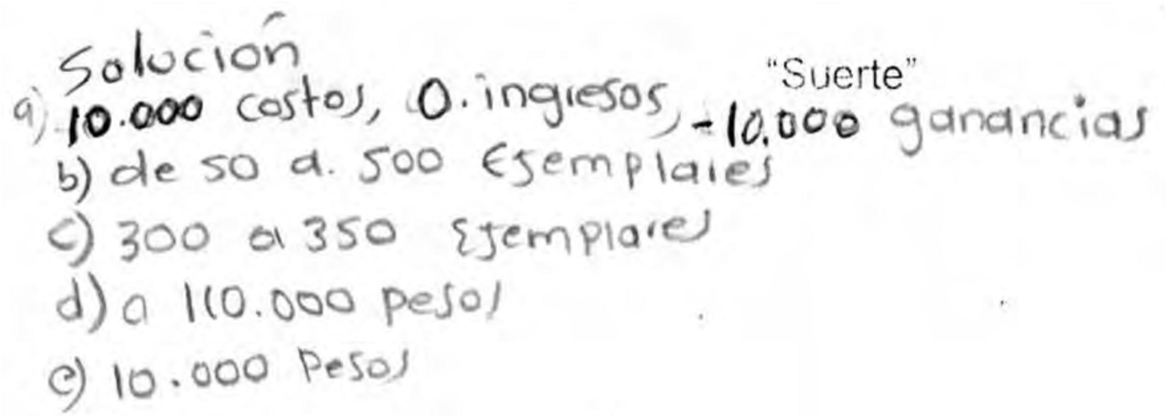
En las Figuras 13 y 14 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)1}$ y $P_{(3)23}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.



1) costos = 40000 ingresos: 65000 Ganancia: 25000
2) La oferta se debe mantener entre 35 y 400 ejemplares
3) la oferta debe ser de 400 ejemplares
4) los costos fijos ascienden a 86000
5) costaria 200 pesos
6) la Ganancia Maxima es de 20.000 ⇒ la mayor ganancia se da cuando se llega a 400 ejemplares
⇒ Ingresos − Costos = Ganancia
Así los ingresos = 90000 y costos = 70000
⇒ 90000 − 70000 = 20000

9) Ecuación ganancia ⇒ Ingresos − costos = Ganancia
10) → En la grafica
Representa la ganancia
costos (0, 600)
Ingresos (0, 450)
Ganancias (0, 250)

Figura 13. Respuestas dadas por $P_{(6)1}$ al cuestionario.



Solución "Suerte"
a) 10.000 costos, 0. ingresos, −10.000 ganancias
b) de 50 a. 500 Ejemplares
c) 300 a 350 Ejemplares
d) a 110.000 pesos
e) 10.000 Pesos

Figura 14. Respuesta dada por $P_{(3)23}$ al tercer y cuarto ítems del cuestionario.

Para este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* identificados en cada uno de los dos grupos (10, 14) fueron mayoritariamente verbales combinados con números enteros, como lo hacen $P_{(3)23}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(3)7}$ mostrados en las figuras 14, 16 y 17 respectivamente, (e.g., $P_{(6)5}$: entre 45 y 510 ejemplares o $x\epsilon$ (45, 510), x = ejemplares), otro grupo (18, 13) utiliza intervalos en dos formas (e.g., (40, 510) o 40-510) o gráficos y una región del plano como lo hace $P_{(3)2}$ para representar la Ganancias. Entre los *conceptos/definiciones* que utiliza la totalidad del grupo de profesores en formación se pueden destacar el de intervalo y aunque debería ser cerrado, lo simbolizan como si fuera abierto. Las *proposiciones/propiedades* utilizadas, aunque no lo explicitan, si dejan ver que el número de ejemplares para los cuales se tiene Ganancias está entre 40 y 510. Los *procedimientos* utilizados por los profesores en formación parecen análisis visuales, ya que no hay evidencias de algún otro. $P_{(6)15}$ y $P_{(8)10}$ dan indicios de *argumentos* (e.g., entre 200 y 350 ejemplares porque en la gráfica está visto que los ingresos están por encima de los costos; la región entre los ingresos y los costos es la ganancia y los cortes representan iguales ingresos e iguales costos).

4.1.3.1.1.3 Determinación de los máximos y mínimos de una función

Para evaluar en los profesores en formación la determinación de los máximos y mínimos de una función se indagó por el intervalo donde se obtiene la máxima Ganancia, se esperaba que lo confundieran con el de los máximos Ingresos. Solo el 44.64% de los estudiantes pudo determinar el intervalo donde la Ganancia es máxima (12, 13). En su mayoría (53.33%) de los profesores en formación contemplaron como respuesta el intervalo [200, 350] ejemplares, quizás en virtud a que esos eran los extremos visibles en la gráfica: los de la gráfica de los ingresos, porque la gráfica de la ganancia no estaba entre los elementos ostensibles. Esto concuerda con lo reportado por Hitt (2003a) cuando manifiesta que los estudiantes tienen una rara tendencia a dejarse llevar por lo visual, pero a pesar de ello no consideraron las representaciones geométricas como complementarias en su proceso de resolución del problema, y como se esperaba, (14, 11) terminaron confundiendo la Ganancia máxima con los Ingresos máximos, quizás en virtud de que la gráfica de la función Ganancia no estaba explicita en la situación, no pudieron asociarla con algo conocido (Suárez y Cordero, 2010). La tendencia por grupos fue a dar respuestas similares al interior de éstos ($\chi^2 = 3.733$, $P< 0.05$), es decir, hubo homogeneidad tanto en aciertos como en desaciertos.

En las Figuras 15 y 16 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(3)6}$ y $P_{(6)5}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

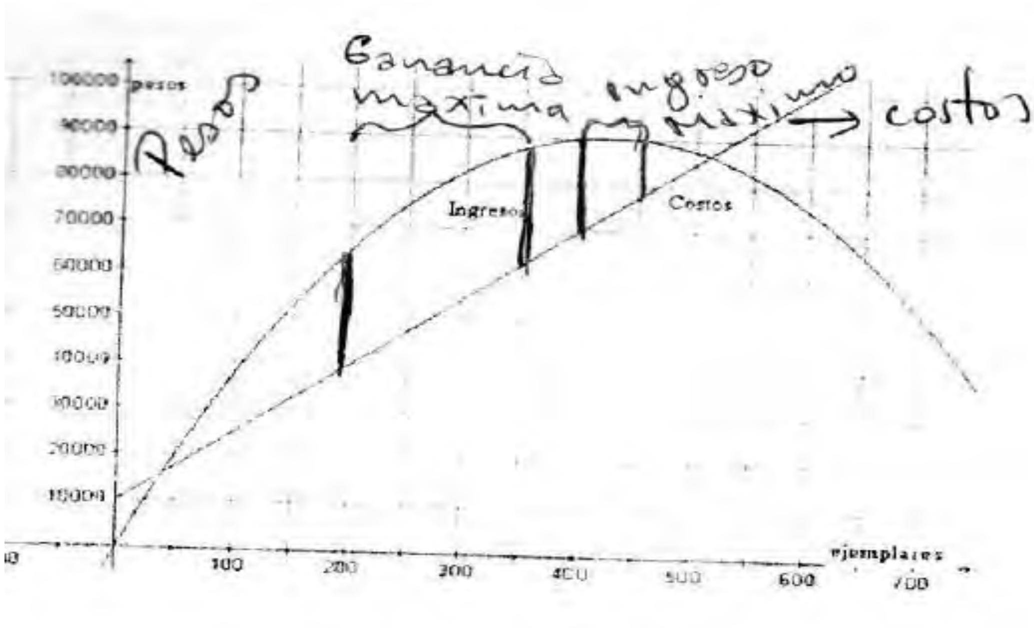
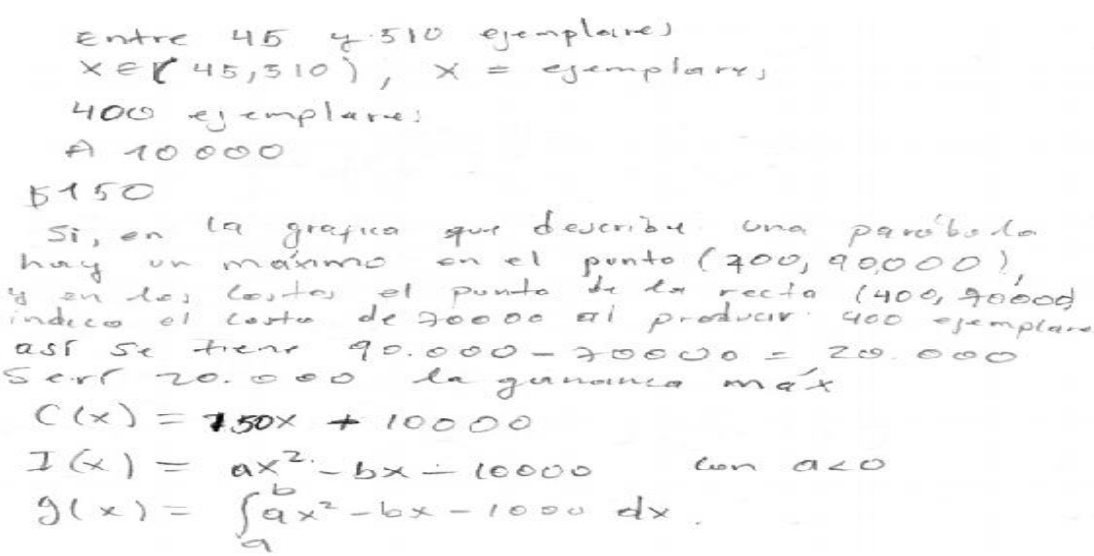


Figura 15. Respuesta dada por $P_{(3)6}$ a los ítem correspondientes a Ingresos y Ganancias máximas.



Entre 45 y 510 ejemplares
$x \in (45, 510)$, x = ejemplares
400 ejemplares
A 10 000
B 150
Si, en la grafica que describe una parabola hay un máximo en el punto (400, 90000), y en los costos el punto de la recta (400, 70000) indica el costo de 70000 al producir 400 ejemplares así se tiene 90.000 − 70000 = 20.000 Será 20.000 la ganancia máx
$C(x) = 150x + 10000$
$I(x) = ax^2 - bx - 10000$ con $a < 0$
$g(x) = \int_a^b ax^2 - bx - 1000\, dx$.

Figura 16. Respuesta dada por $P_{(6)5}$ a varios ítems del cuestionario.

En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* que utilizan los profesores en formación de los dos grupos fueron verbales combinados con números naturales, como lo hace $P_{(6)1}$ y $P_{(3)23}$ mostrados en las figuras 13 y 14 respectivamente (e.g., 300 a 350 ejemplares; la ganancia máxima se da cuando se venden 400 ejemplares), así como elementos gráficos y figurales, como lo hacen $P_{(3)23}$ y $P_{(3)6}$ mostrados en las figura 14, 15. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, están los de máximos y mínimos, pero también el de intervalo, señalando $P_{(6)12}$ los intervalos donde, tanto la Ganancias como los Ingresos son máximos. En relación a las *proposiciones/propiedades*, determinan la mayor distancia entre las gráficas de las funciones Ingresos y Costos como la mayor Ganancia, así como el punto más alto de la función Ingresos, como los puntos donde esta función toma sus valores máximos. En relación a los *procedimientos* utilizados, se evidencian procesos de visualización complementados con algunos trazos figurales delimitando los intervalos solicitados: en el caso de la Ganancias: donde se da la mayor distancia entre las funciones de Ingresos y de los Costos, y en el de los Ingresos: en el tramo donde la gráfica es más alta. $P_{(3)23}$ $P_{(3)6}$ establecen congruencias entre elementos de las representaciones gráficas, figural y del lenguaje coloquial. Y en cuanto a los *argumentos*, solo señalan "Ganancia máxima" e "Ingreso máximo", en algunos casos desacertados.

4.1.3.1.1.4 Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta

En la identificación y uso del concepto de pendiente de una recta se esperaba que los profesores en formación identificaran en el contexto de la situación, la pendiente de la función de Costos, localizaran dos puntos por donde pasa su gráfica y utilizando la fórmula de la pendiente, la encontraran. El 48.21% de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem (9, 18). Además, desde un análisis visual hicieron interpretaciones (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011) engañosas que no favorecieron su avance en la solución de este ítem; consideraron como respuestas 10000 -los Costos fijos de producción- (26.66%) y otros 1500 (25.55%), valor que pudo obtenerse por error al simplificar. En general los estudiantes del tercer semestre tienden a ser más intuitivos, mientras que los del sexto semestre son, en un alto porcentaje, más formales. En este aspecto también se presentó una alta heterogeneidad en las respuestas intra e inter grupos ($\chi^2 = 9.171$, $P > 0.05$). Que la homogeneidad al interior de los grupos no sea alta y que los porcentajes de aciertos en todos los grupo no sean altos, quiere decir que hubo un alto grado de acuerdo, sobre todo en los desaciertos, es decir, que el grado de comprensión de ese concepto es bajo en un alto porcentaje de los evaluados.

En las Figuras 17 y 18 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(3)7}$ y $P_{(6)12}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

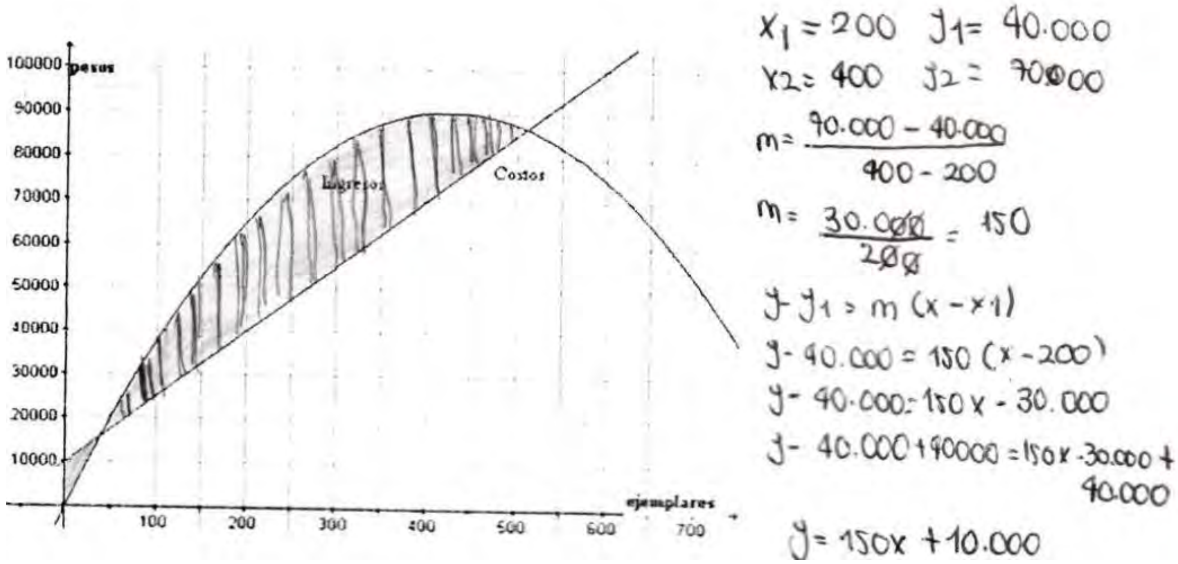


Figura 17. Respuesta dada por $P_{(3)7}$ a varios ítems del cuestionario.

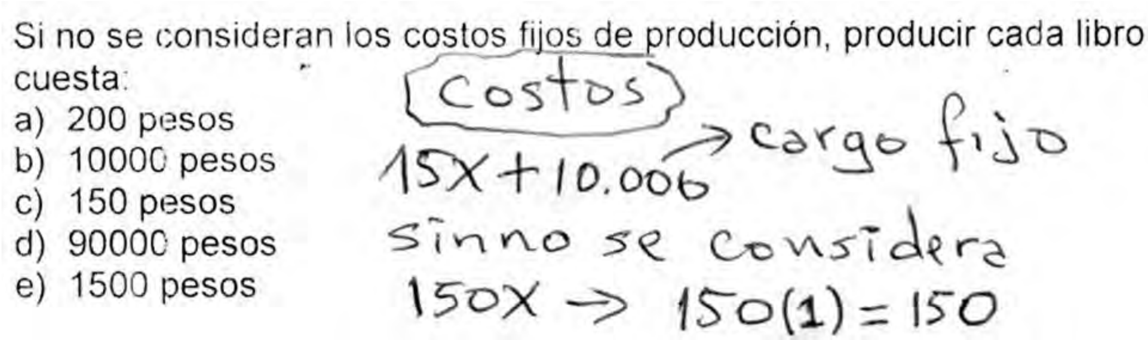


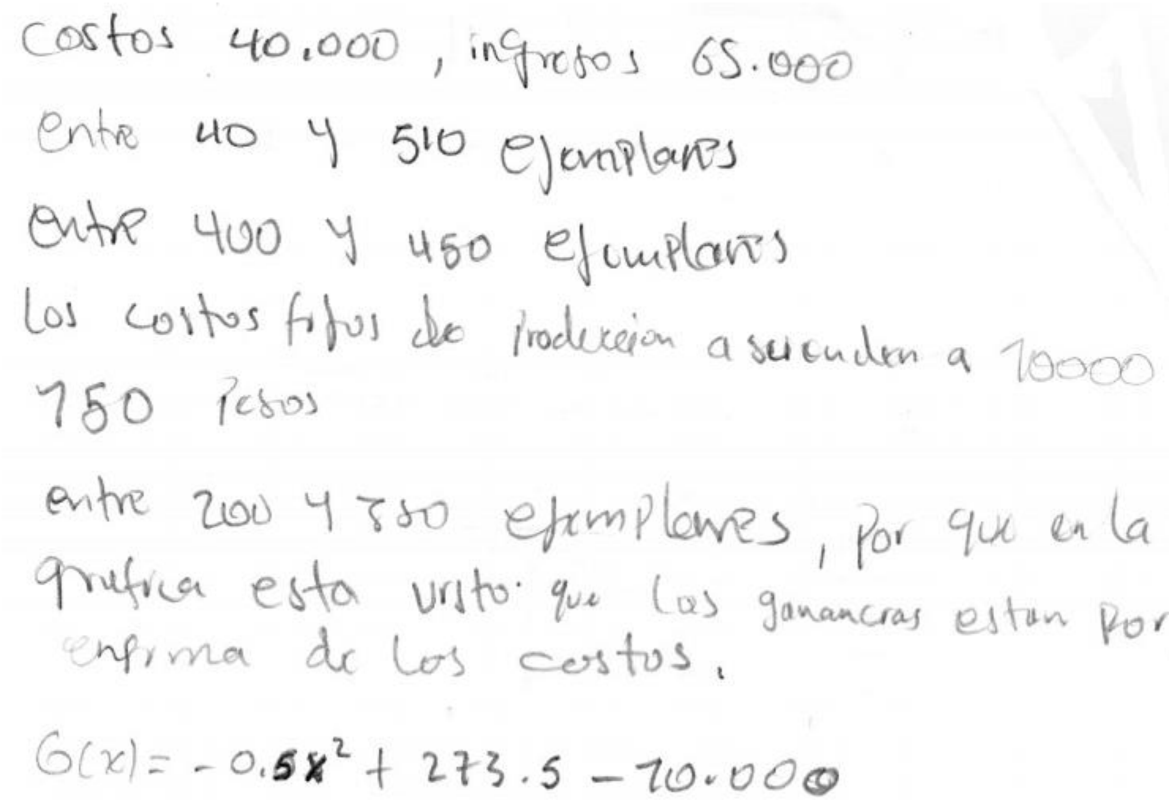
Figura 18. Respuesta dada por $P_{(6)12}$ a los ítems 2 y 6.

Para este ítems/tarea se identificaron en las respuestas de los profesores en formación (18, 21) *elementos lingüísticos* verbales y números naturales, como lo hace $P_{(6)1}$ mostrado en la figra 13 (e.g., cerca de 150 pesos), utilizaron además signos para indicar las operaciones básicas utilizadas, paréntesis como signos de agrupación, y expresiones aritméticas y algebraicas (e.g., $m = \frac{90000-40000}{400-200}; y = 150x + 10000$) como lo hace $P_{(3)7}$ y $P_{(6)12}$ en sus soluciones mostradas en las figuras 17 y 18 respectivamente. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan se destaca par ordenado, el intercepto al origen de la función lineal involucrada y ecuación de una recta en la forma pendiente punto. En relación a las *proposiciones/propiedades*, los que dieron respuestas adecuadas parecen reconocer la pendiente de la recta como el determinante de la variación de la función lineal. En la solución propuesta por $P_{(3)7}$, establece congruencias entre diferentes representaciones de diferentes elementos de los registros analítico numérico, gráfico y algebraico de la función involucrada. Respecto a los *procedimientos* utilizados $P_{(3)7}$ hace una conversión del registros gráfico al analítico numérico, donde hace algunos tratamientos hasta dar con su respuesta y utiliza estos elementos para realizar una conversión al registro algebraico, donde hace una secuencia de tratamientos hasta obtener la expresión algebraica de los Costos. Respecto a los *argumentos*, ninguno los establece claramente.

4.1.3.1.1.5 Modelación matemáticamente de una situación funcional

Para la modelación matemáticamente de una situación funcional se les plantearon dos cuestiones: 1) Calcular una expresión algebraica que permitiera un cálculo aproximado de la Ganancia. Para encontrar una expresión matemática que permitiera un cálculo aproximado de la Ganancia los profesores en formación debían encontrar primero las expresiones algebraicas para los Ingresos y para los Costos y realizar la diferencia entre los Ingresos y los Costos. La respuesta llevaba a una función cuadrática. Esto es, hacer una conversión del registro gráfico al algebraico, que llevara a obtener un modelo algebraico para los Ingresos y los Costos, y a partir de una serie de tratamientos, realizar los procedimientos necesarios para encontrar la Ganancia. En este ítem el 57.14% (10, 22) de los estudiantes dieron respuestas acertadas a este ítem. La siguiente opción elegida por los estudiantes fue una función lineal (23.21%), quizás por ser una elección por la que optan muchos estudiantes al pedírseles modelar algebraicamente una función, éstos generalmente tienden a dar como respuesta una función lineal (Marroquín, 2009). En este aspecto también se presentó una alta homogeneidad en las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 12.090$, $P < 0.05$), es decir, la tendencia por grupos fue a dar la misma respuesta, tanto en los aciertos como en los desaciertos. Y en ambos grupos sucedió algo similar, lo que quiere decir, que este es un tópico que está bien afianzado en los estudiantes del programa, en general.

En las Figuras 19 y 20 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)15}$ y $P_{(3)20}$ respectivamente, dadas a varios ítems del cuestionario.

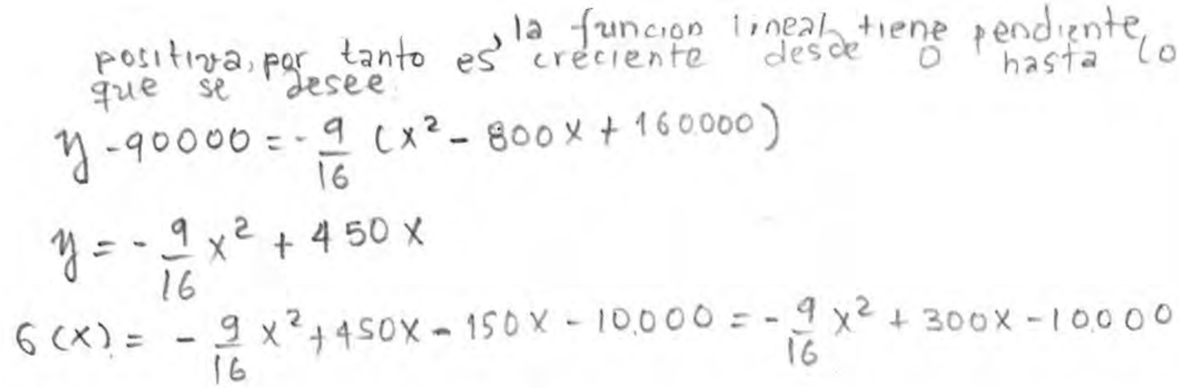


costos 40.000, ingresos 65.000
entre 40 y 510 ejemplares
entre 400 y 450 ejemplares
los costos fijos de produccion ascienden a 10000
750 pesos

entre 200 y 550 ejemplares, por que en la grafica esta visto que los ganancias estan por encima de los costos.

$G(x) = -0.5x^2 + 273.5 - 10.000$

Figura 19. Respuesta dada por $P_{(6)15}$ a varios ítems del cuestionario.



la funcion lineal tiene pendiente positiva, por tanto es creciente desde 0 hasta lo que se desee

$y - 90000 = -\frac{9}{16}(x^2 - 800x + 160000)$

$y = -\frac{9}{16}x^2 + 450x$

$G(x) = -\frac{9}{16}x^2 + 450x - 150x - 10.000 = -\frac{9}{16}x^2 + 300x - 10000$

Figura 20. Respuesta dada por $P_{(3)20}$ al ítem 5.

En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación (24, 27) fueron mayoritariamente algebraicos como se muestra en las soluciones dadas por $P_{(6)5}$, $P_{(6)15}$ y $P_{(3)20}$ en las figuras 16, 19 y 20 respectivamente. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan están: ecuación de una parábola en su forma vértice-parámetro (19, 23) y ecuación de una recta (9, 4). En relación a las *proposiciones/propiedades*, (10, 22) identifican gráficamente el vértice de la parábola y lo asocian con el punto más alto, así como un punto por donde pasa la parábola y los utilizan para encontrar una expresión algebraica que dan como respuesta y $P_{(6)5}$ quien propone su solución por integración de una función cuadrática con término independiente -10000, sin más detalles. En cuanto a los *procedimientos* utilizados, al identificar que se trata de una función cuadrática con intercepto al origen negativo, en su mayoría (14, 23) operan por tanteo, utilizando las dos últimas expresiones (las de las opciones d) y e) del cuestionario de preguntas cerradas), en la que remplazan un par de punto que identifican en la gráfica y a partir de ahí dan su respuesta. Un grupo más reducido (5, 1) de profesores en formación identifican el vértice y otro punto por donde pasa la gráfica de la parábola y utilizando la ecuación vértice-parámetro, dan su respuesta, y otros (9, 4) dan como respuesta la expresión algebraica que representa los Costos, y $P_{(6)5}$ quien pretende dar su solución por integración, sin profundizar más en su intento de respuesta. En este ítem la ayuda visual no fue tan efectiva como en otros casos, se ayudaron más con las opciones dadas en el cuestionario con respuestas cerradas. En relación con los *argumentos* utilizados para comunicar sus respuestas en ninguno de los dos grupos se evidencian con claridad.

Y 2) En el mismo plano coordenado realizar la gráfica de la Ganancia. Para construir una gráfica que representara la Ganancia se esperaba que los profesores en formación hicieran un tratamiento al obtener la representación gráfica de la función Ganancia a partir de la información presentada en las gráficas suministradas en la situación dada como registro principal. Para ello se esperaba que identificaran los interceptos de las gráficas de las funciones Ingresos y Costos y los asociaran a los cortes de la gráfica de la función Ganancia con el eje de las abscisas, y la altura de la función Ganancias la asociaran a la diferencia de la función Ingresos con la función Costos. En este ítem el 60,71% de los profesores en formación obtuvo respuestas acertadas (14, 20). En el análisis de desaciertos se evidencia que apuntaron a que la Ganancia mínima debía ser cero (38,88%), sin llegar a concebir una ganancia negativa. Este hecho constituye un obstáculo en el sentido de Brousseau (1986, 1999), por lo que pudiera considerarse como algo normal, teniendo en cuenta la sorprendente lentitud de la humanidad del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo (Cid y Bolea, 2007). Además, no se evidenció asociación entre las respuestas de los estudiantes por grupos (χ^2 = 5,750, P> 0.05), es decir, la homogeneidad en las respuestas dadas por ítem fue muy baja, lo que quiere decir que las respuesta a este ítem fueron muy dispersas, pero como el promedio es bastante aceptable, fue mayor el número de estudiantes que acertaron que los que no lo hicieron.

En las Figuras 21 y 22 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(3)22}$ y $P_{(6)2}$ respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

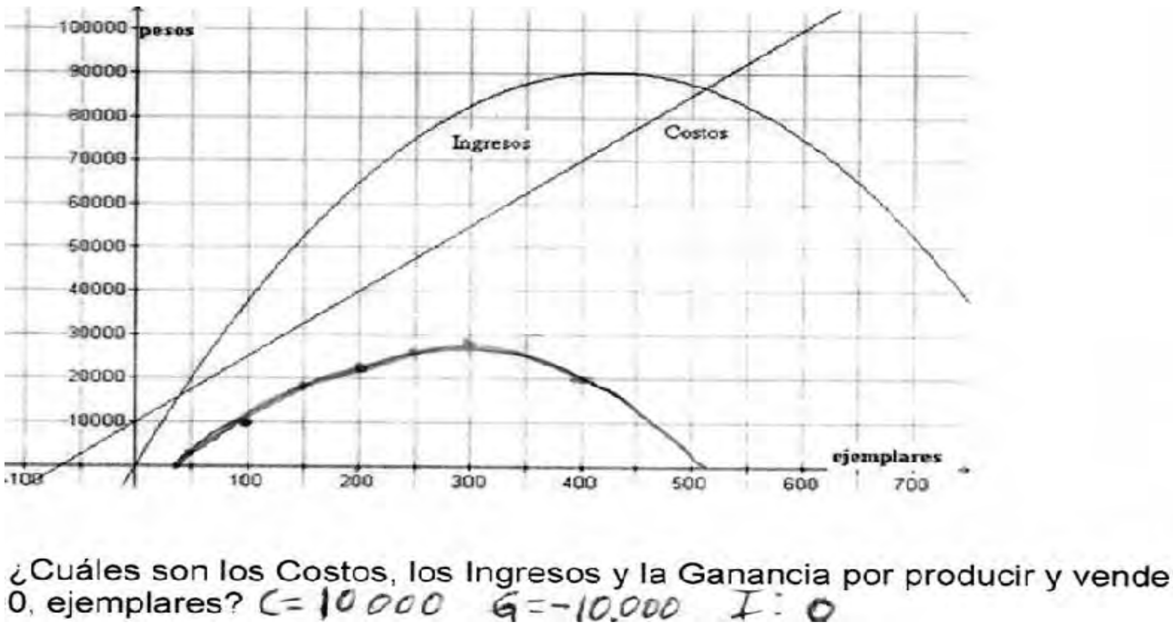


Figura 21. Respuesta dada por $P_{(3)22}$ a los ítems 1 y 7 del cuestionario diagnóstico.

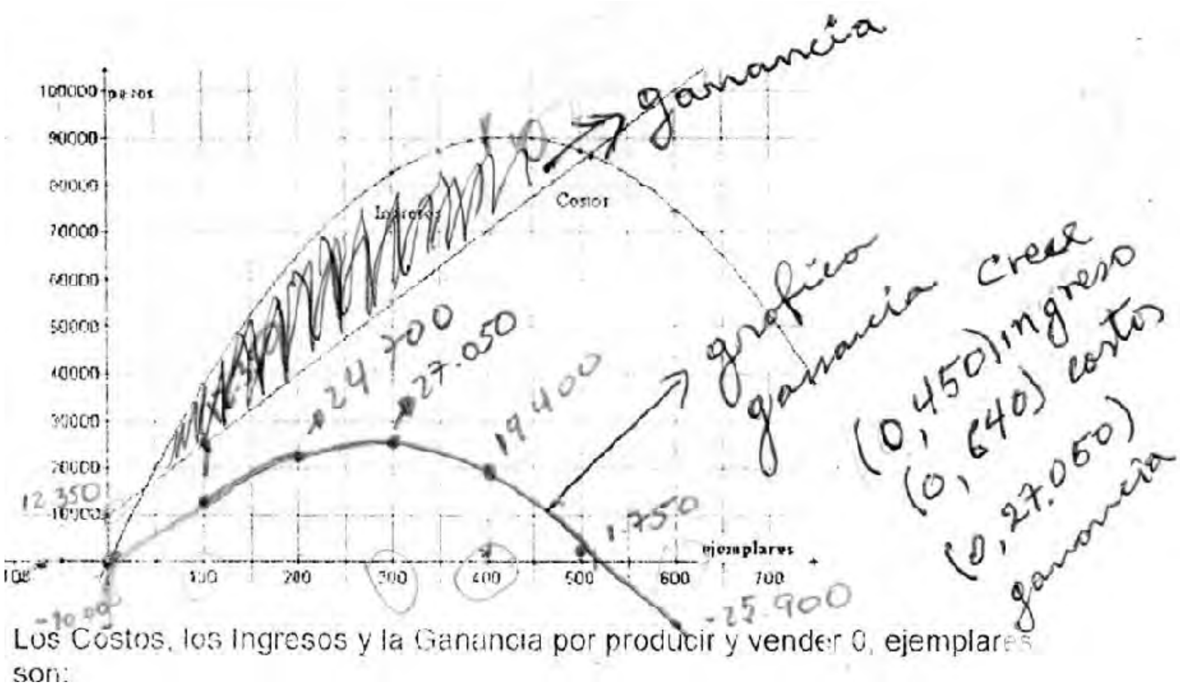


Figura 22. Respuesta dada por $P_{(6)2}$ a varios ítems del cuestionario diagnóstico.

En este ítems/tarea se identifican que los *elementos lingüísticos* utilizado son verbales, gráficos y figurales, como lo hace $P_{(6)2}$ mostrado en la figura 22, quien hace uso de los tres tipos, mientras que $P_{(6)14}$ y $P_{(3)22}$ mostrados en las figuras 27 y 21 respectivamente, usan solo los gráficos y $P_{(3)7}$ mostrado en la figura 17, solo la figural. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destacan diferencia de gráficas de funciones, graficación de funciones, punto de corte en el eje de las abscisas, región sombreada. En relación a las *proposiciones/propiedades*, ante las respuestas parecen reconocer los puntos de corte de las funciones de Ingresos y de Costos y asociarlos con los ceros de la función Ganancias en el eje de las abscisas. Por los *procedimientos* utilizados se pueden inferir que lo hicieron por simple inspección visual y otro grupo sólo sombrearon la zona comprendida entre las gráficas de la función Ingresos y la de los Costos. En cuanto a los *argumentos* utilizados, parecen ser de tipo visual y sólo expresan, esta es la gráfica de la ganancia o algo similar, como si fuera algo evidente.

4.1.3.1.1.6 Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita

Al verificar la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita se esperaba que los profesores en formación identificaran gráficamente dos puntos de igual abscisa, uno por donde pasa la gráfica de la función Ingresos y otro por donde pasa la función Costos, de tal forma que la diferencia entre ellos fuera aproximadamente 20.000 pesos, otra de las opciones esperadas era que realizara una conversión al registro algebraico, encontrara la representación algebraica para la Ganancias y utilizara el concepto de ecuación para encontrar una incógnita, es decir, que armaran una ecuación al igualar la función Ganancia a 20000, y al encontrar el valor de la incógnita, dieran su respuesta; o que o que hecha la conversión, por tanteo resolviera un polinomio aritmético reiteradas veces hasta dar con la respuesta solicitada. El porcentaje de aciertos en este ítem fue alto (62,5%), (14, 21) de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem. La mayoría de las respuestas incorrectas (17.77%) apuntaban al 100, quizás en razón a que es un punto muy cercano al punto (100, 20000) del plano. Aquí un análisis visual irreflexivo les jugó una mala pasada a estos estudiantes, es decir, la interpretación que estos profesores en formación lograron de la situación, a partir de su análisis visual, no favoreció su comprensión que los llevara a dar una respuesta adecuada a lo que se les preguntaba (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011).

Las respuestas en este ítem muestran evidencias significativas de cierta dependencia entre los grupos (χ^2 = 14.400, P< 0.05).

En las Figuras 23, 24 y 25 se muestran las soluciones de los profesores en formación y $P_{(3)18}$ $P_{(6)13}$ y $P_{(6)7}$ respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

$$6(x) = 0{,}05x^2 + 27.5x - 10000$$

$$20000 = -0{,}05x^2 + 27\cdot 5x - 10000 \Rightarrow 20000 - 10000 = -0{,}5x^2 + 27\cdot 5x$$

$$10000 = 0.05x^2 + 27.5x \Rightarrow -0.05x^2 + 27.5x + 10000 - 0$$

$$X = \frac{-(0.05) + \sqrt{(27.5)^2 - 4(0.05)(10000)}}{2(0.05)}$$

$$X = \frac{-(-0.05) + \sqrt{75625 - 20000}}{-01} \Rightarrow X = \frac{-(-0.05) + \sqrt{55.625}}{-0.1}$$

$$x = \frac{0.05 + 7.458}{-0.1} \Rightarrow X = \frac{0.05 + 7\,458}{-0.1}$$

$$x = \frac{0.05 - 7\,458}{-0.1} \Rightarrow X = -75.08$$

Figura 23. Respuesta dada por $P_{(3)18}$ al ítem 6 del cuestionario.

$$20000 = 150x + 10.000$$
$$10000 = 150x$$
$$x = \frac{10000}{150}$$
$$0{,}5(200)^2 + 273{,}5x - 1000$$

$$20000 = -0.05x^2 + 42{,}5x + 100$$
$$10000 = -0.05x^2 + 42{,}5x$$
$$-0.05x^2 + 42{,}5x - 10.000$$
$$\frac{-42{,}5 \pm \sqrt{(42{,}5)^2 - 4(0.05)(-10000)}}{2(0.05x)}$$

Figura 24. Respuesta dada por $P_{(6)13}$ al ítem 8 del cuestionario diagnóstico.

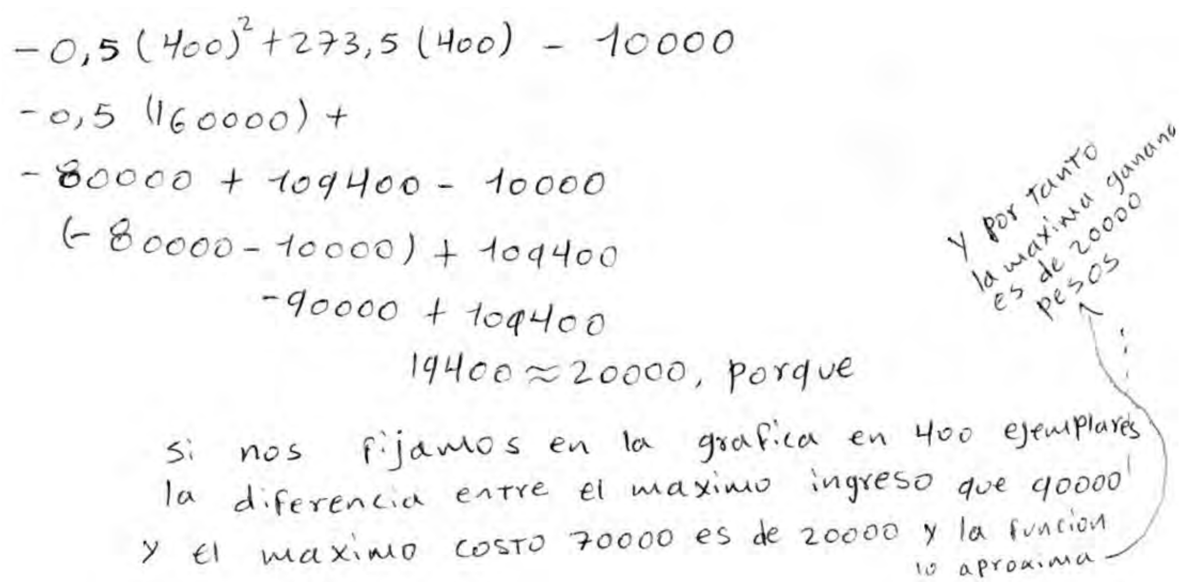


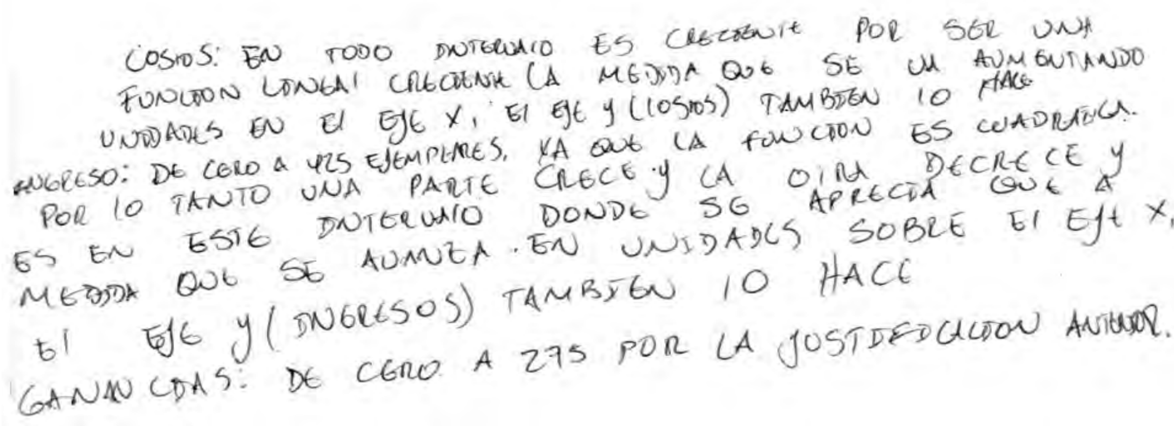
Figura 25. Respuesta dada por $P_{(6)7}$ al ítem 8 del cuestionario diagnóstico.

En este ítems/tarea se pudo identificar que los *elementos lingüísticos* que utilizaron los profesores en formación fueron mayoritariamente algebraicos y verbales combinados con números naturales, también utilizan signos de operación (e.g., +, -) y signos de agrupación, como lo hacen $P_{(6)13}$, $P_{(6)7}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(6)1}$ en las figuras 24, 25, 16 y 13 respectivamente. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destacan las nociones de punto máximo, los conceptos de parábola, de ecuación y la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática, como lo hace $P_{(6)13}$ en la figura 24. En relación a las *proposiciones/propiedades*, un grupo amplio (14, 21) de profesores en formación identificaron puntos tanto en la gráfica de la función de Ingresos como en la de Costos y los relacionan con elementos del contexto sociocultural donde se plantea la situación (e.g., $P_{(6)5}$ dice: en la gráfica que describe una parábola hay un máximo en el punto (400, 90000) y en los Costos el punto (400, 70000), indica el Costos de 70000 al producir 400 ejemplares, así se tiene 90000 – 70000 = 20000, será 20000 la Ganancia máxima). En las soluciones dadas por los estudiantes de los dos niveles predominaron las configuraciones cognitivas de tipo gráfico-verbal (Pino-Fan, Godino y Font, 2013) donde a partir de la representación gráfica dada en el registro de partida, hicieron un análisis visual y luego su descripción, además, sombreaban regiones o señalaban los elementos correspondientes a la función a la que hacían referencia. En menor medida utilizaron configuraciones cognitivas técnicas, en las que predominaron los elementos simbólicos de los objetos matemáticos involucrados. En el caso particular del uso del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, los *procedimientos* utilizados fueron esencialmente los que se previeron: 1) (13, 16) dieron sus respuestas luego de un análisis visual, 2) (12, 13) hacen una conversión al registro algebraico y formulan una ecuación cuadrática e intentan resolverla y luego con los resultados obtenidos comunican sus respuestas. Un grupo muy reducido de profesores en formación (0, 3) *argumentan* sus respuestas, como es el caso del $P_{(6)5}$ y de $P_{(6)7}$. En el caso particular de $P_{(6)7}$ ya había conseguido una expresión algebraica adecuada para las Ganancias, luego verifica su hallazgo visual, lo que se corrobora al comunicar su respuesta (e.g., si nos fijamos en la gráfica en 400 ejemplares entre el máximo Ingresos que es 90000 y el máximo Costos 70000, es de 20000 y la función se aproxima y por tanto la máxima Ganancias es de 20000 pesos).

4.1.3.1.1.7 Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función

Para evaluar el análisis que los profesores en formación hacen del crecimiento y decrecimiento de una función se indagó por los intervalos de crecimiento de las funciones de Costos, Ingreso y Ganancia. Se esperaba que los profesores en formación identificaran visualmente este comportamiento en cada una de las tres funciones y a partir de esto, aportaran sus respuestas. El 39.28% de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem (10, 12). En este aspecto se pudo evidenciar que hay problemas con la comprensión del concepto de crecimiento, porque fue mucho mayor el número de estudiantes que hicieron la gráfica de la función Ganancias que los que dieron una respuesta acertada en este ítem y al hacer la gráfica debieron darse cuenta hasta donde crece la función. La dificultad parece estar centrada en la falta de concepción del infinito y en el obstáculo que genera tal concepción en un análisis gráfico, ya que los estudiantes tienen la tendencia a no ir más allá de lo visual, es decir, el análisis visual requería concebir el infinito potencial por inferencia del infinito actual (Franco y Ochoviet, 2006) y eso resultó problemático para un alto porcentaje de estudiantes (60.71%). En este ítem también se evidenció heterogeneidad en las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 0.832$, $P > 0.05$). En este tópico fue donde el grado de acurdo entre los grupos fue más bajo y el penúltimo promedio, lo que significa que es este el aspecto donde los estudiantes presentaron los peores desempeños.

En las Figuras 26, 27 y 28, se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(3)8}$, $P_{(6)14}$ y $P_{(6)10}$ respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

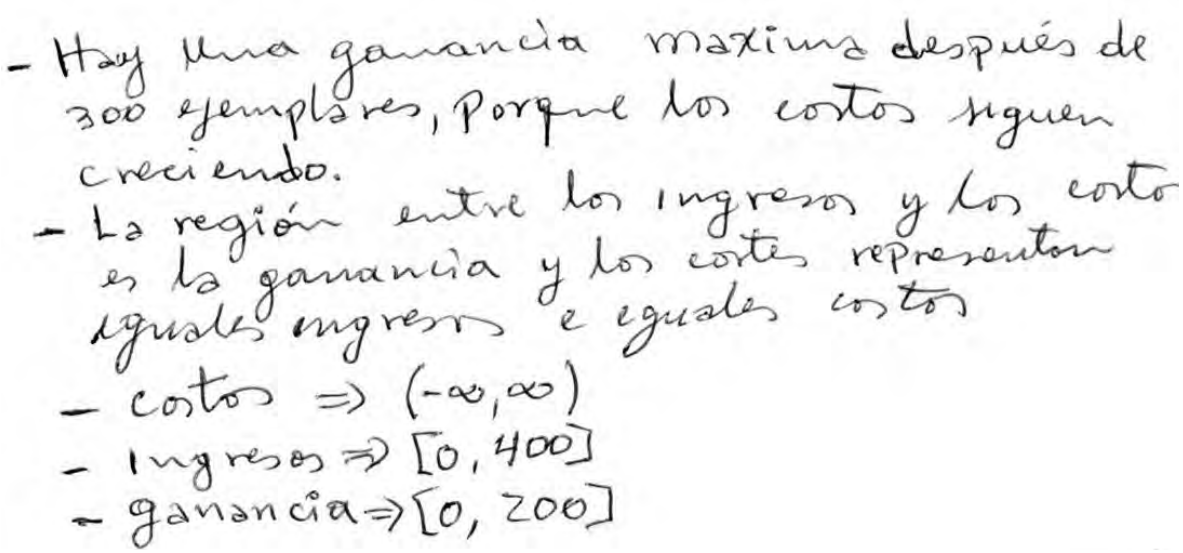


COSTOS: EN TODO INTERVALO ES CRECIENTE POR SER UNA FUNCION LINEAL CRECIENTE (A MEDIDA QUE SE VA AUMENTANDO UNIDADES EN EL EJE X, EL EJE Y (COSTOS) TAMBIEN LO HACE
INGRESO: DE CERO A 425 EJEMPLARES, YA QUE LA FUNCION ES CUADRATICA. POR LO TANTO UNA PARTE CRECE Y LA OTRA DECRECE Y ES EN ESTE INTERVALO DONDE SE APRECIA QUE A MEDIDA QUE SE AUMENTA EN UNIDADES SOBRE EL EJE X, EL EJE Y (INGRESOS) TAMBIEN LO HACE
GANANCIAS: DE CERO A 275 POR LA JUSTIFICACION ANTERIOR.

Figura 26. Respuesta dada por $P_{(3)8}$ al ítem 8 del cuestionario.

los costos: −100 y 650
los ingresos: 0 y 400
las ganancias: 40 − 510

Figura 27. Respuesta dada por $P_{(6)14}$ a varios ítems del cuestionario diagnóstico.



- Hay una ganancia maxima después de 300 ejemplares, porque los costos siguen creciendo.
- La región entre los ingresos y los costo es la ganancia y los cortes representan iguales ingresos e iguales costos
- costos ⇒ (−∞, ∞)
- ingresos ⇒ [0, 400]
- ganancia ⇒ [0, 200]

Figura 28. Respuesta dada por $P_{(6)10}$ a varios ítems 5 del cuestionario diagnóstico.

En este ítems/tarea se pudo identificar que los *elementos lingüísticos* que utilizan los profesores en formación (19, 19) son mayoritariamente verbales combinados con números naturales, con signos de agrupación como paréntesis para designar los intervalos, como lo hacen $P_{(6)1}$, $P_{(6)14}$ y $P_{(6)10}$ mostrados en las figuras 13, 27 y 28 respectivamente, mientras que $P_{(3)8}$ utiliza sólo elementos verbales, como se puede ver en la figura 26. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destaca el concepto de intervalo abierto y cerrado, el de infinito potencial. En relación a las *proposiciones/propiedades*, la mayoría (18, 16) de los profesores en formación asociaron los intervalos solicitados a lo que estaba al alcance de su visual- a lo visible-, quizás en razón de esto dieron respuestas como la aportada por $P_{(6)1}$ y $P_{(6)14}$, quienes hacen un análisis visual muy limitado, tanto para la función Costos como para la de Ganancias. Mientras que el análisis realizado por $P_{(3)8}$ y $P_{(6)10}$ es mucho más completo y adecuado a la situación, como puede apreciarse en las soluciones propuestas por este grupo de estudiantes, son muchos los que confunden los elementos de las funciones involucradas, lo que pudo llevarlos a respuestas erradas, pero hay un grupo significativo que, al igual que en lo reportado por Pino-Fan, Assis y Castro (2015), hace uso adecuado de los objetos matemáticos que conforman la configuración cognitiva que moviliza la tarea que realizan, lo que favorece la solución que dan a las tareas. Los *procedimientos* realizados por los profesores en formación de los dos grupos, parecen ser sólo visuales. Además, $P_{(3)20}$, $P_{(3)8}$ **y** $P_{(6)10}$ *argumentan* sus respuestas, como se muestra en las figuras 20, 26 y 28 respectivamente (e.g., $P_{(3)20}$ dice "*la función lineal tiene pendiente positiva, por tanto es creciente desde 0 hasta lo que se desee*").

4.1.3.1.2 Conocimiento ampliado del contenido.

Como hemos visto anteriormente, es el conocimiento matemático necesario para entender las matemáticas tanto en el nivel que se orienta, como en el nivel posterior (Pino-Fan y Godino, 2015). Permite poner en correspondencia diferentes objetos matemáticos o hacer conexiones entre representaciones de un mismo objeto matemático. Determina el repositorio de recursos matemáticos usados por una persona ante una situación problema que tenga que resolver.

Las respuestas dadas por los dos grupos de estudiantes a los ocho ítems del cuestionario son muy diversas. Sólo (8, 21) de ellos dieron respuestas adecuadas a por lo menos el 60% de los ítems de la situación; mientras que otro grupo muy similar (20, 7), similar a lo reportado por Konic (2011) presentaron serias dificultades, tanto con la comprensión de los enunciados de algunos ítems, como con la realización de los procedimientos, al tratar de hacer conexiones entre diferentes registros de las funciones, como con la comunicación de los resultados. Estos dos grupos de respuestas se caracterizan porque el porcentaje de aciertos de los profesores en formación del sexto semestre casi triplican al de los del tercero, mientras que en los desacierto son los del tercero los que los triplican.

Así, se puede decir que los estudiantes del primer grupo poseen un dominio adecuado de la Dimensión Matemática para resolver problemas con las características del que se les planteó. Mientras que del segundo grupo podemos decir que las dificultades al identificar y relacionar los elementos de una función en uno o varios registros, podrían ser un impedimento para el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo (Hitt, 2003b).

Que los profesores orientadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tengan este tipo de dificultades es problemático para la enculturación matemática de las comunidades donde ellos se van a desempeñar, ya que si no poseen sólidos conocimientos de la dimensión matemática, difícilmente van a poder gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus futuros estudiantes.

Podría decirse de la dimensión matemática del CDM en los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función, que existen diferencias no muy marcadas entres los estudiantes de los dos niveles, en el conocimiento común y en el ampliado. Se presentaron casos aislados donde se evidencian algunos fundamentos del conocimiento ampliado del contenido, como es el caso de $P_{(6)5}$ quien intentó, por integración, encontrar el área entre las gráficas de los ingresos y la de los costos; $P_{(6)2}$ usa elementos no ostensibles en la gráfica y prolonga tanto el eje de los ejemplares como la gráfica de los Ingresos, conservando la secuencia de los elementos originales, construyendo la gráfica de las Ganancias y a partir de ahí da su respuesta; $P_{(3)18}$ y $P_{(6)13}$ intentan utilizar la fórmula para resolver una ecuación cuadrática. $P_{(6)5}$ al relacionar los elementos identificados en las representaciones con elementos del contexto sociocultural donde se plantea la situación, hace un análisis tans-registro, proporcionando significado a los objetos estudiados (Pino-Fan y Godino, 2015). Así mismo, fue significativo el número de estudiantes (9, 18) que reconoció la pendiente de la recta en el contexto de la situación. Un grupo amplio de estudiantes (7, 12) realizan varios procedimientos para llegar a una misma respuesta, en más de un ítem, y para designar la ganancia subrayaron la región del plano correspondiente, hicieron la gráfica, la asociaron con su representación coloquial y encontraron la representación algebraica. En cuanto a las configuraciones de procesos y objetos matemáticos primarios, el comportamiento fue muy similar en los profesores en formación de los dos niveles.

Los conflictos epistémicos que se manifestaron en los profesores en formación, al hacer transformaciones de las representaciones de una función, estuvieron relacionados con el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto de función el contexto escolar y su uso consciente a nivel social. Esto se manifestó en la no aceptación, por algunos profesores en formación de representaciones como la gráfica, la tabular, la del lenguaje coloquial y la fenomenológica, como representaciones de las funciones involucradas, y por ello no las utilizaron como apoyo para dar sus respuestas. Esto, muy a pesar de que las actividades que se propusieron fueron pensadas teniendo en cuenta este tipo de conflictos reportados en algunos de los antecedentes utilizados para fundamentar la investigación.

4.1.3.2 Dimensión didáctica.

La dimensión didáctica está relacionada con la forma en que el profesor lleva los contenidos a un nivel comprensible para los estudiantes utilizando ricas y variadas estrategias para lograrlo. Por lo que debe identificar condiciones para desarrollar sus prácticas de enseñanza: encontrar y utilizar diversas representaciones del objeto estudiado, poder establecer conexiones entre sus elementos, determinar elementos con los cuales no es conveniente hacer congruencias entre dos o más representaciones, priorizar el orden en que usa los registros, y cuál usa como registro principal y cuál o cuáles como registros auxiliares, determinar aquellos aspectos que puedan resultar problemático para el estudiante al resolver la tarea y prever estrategias para ayudarlos a minimizar esas dificultades. Así mismo, poder contextualizar las tareas propuestas a los estudiantes, de modo que éstos puedan relacionar los conceptos estudiados con algo conocido, analizar las producciones de los estudiantes con fines de mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje, y poder comunicar los resultados encontrados, de forma que puedan ser útiles a la comunidad de educadores matemáticos.

Esta dimensión está compuesta por cinco categorías: Conocimiento Especializado de la dimensión matemática, Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes, Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes, Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula, Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes y Conocimiento del Currículo.

Como nuestro objetivo es evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, de la Universidad de Sucre al hacer transformaciones de las representaciones de una función, y esta incluye la dimensión matemática con sus dos componentes y, de la dimensión didáctica incluye el Conocimiento Especializado de la dimensión matemática, a continuación se presenta el análisis de esta dimensión.

4.1.3.2.1.1 Conocimiento Especializado de la dimensión matemática.

Un profesor que posee el Conocimiento Especializado de la dimensión matemática realiza las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones necesarias para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable. Lo que le permite realizar transformaciones tipo conversión y/o tipo tratamiento entre objetos matemáticos, transformar una definición de un contexto disciplinar a un lenguaje entendible por los estudiantes y hacer transposiciones didácticas para facilitar al estudiante la comprensión de los conceptos matemáticos, y establecer congruencias e incongruencias entre los elementos de varias representaciones semióticas de un objeto matemático. Es el conocimiento que le facilita al profesor pasar de la comprensión personal a la preparación para la comprensión ajena, es decir, decodificar un conocimiento instalado en sí y facilitar condiciones para que el aprendiz lo decodifique y a su manera lo recodifique y lo convierta en saber; de esta manera hace las adecuaciones y transformaciones necesarias a los contenidos para que el alumno los pueda entender. Determina patrones de errores y los clasifica según algún criterio establecido y encuentra un ejemplo o una situación que se ajuste a la enseñanza de un contenido, el análisis de estos errores le permiten diseñar estrategias para minimizarlos, clasifica las estrategias según la característica del error que se desee atacar y comunica los resultados de este proceso.

Para explorar esta dimensión se plantearon nueve ítems, los cuales se analizan a continuación:

4.1.3.2.1.1.1 Contenidos matemáticos estudiados en la situación

Para resolver este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación identificaron los contenidos matemáticos abordados en este, sin embargo sólo (22, 25) de ellos identificaron algunos contenidos involucrados en la situación. En las figuras de 29 a 48 se muestran algunas de las respuestas dadas por estudiantes de ambos grupos a los ítems 9 a 14 del cuestionario diagnóstico.

En cada una de estas soluciones los profesores en formación usan *elementos lingüísticos* mayoritariamente verbales. Solo algunos casos aislados, como $P_{(6)21}$ utilizan elementos algebraicos, combinados con números naturales al aportar su respuesta (e.g., $y = mx + b; y - k = 4p(x - h)^2$). Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones (17, 19); gráficas de funciones (9, 7), variables (12, 14) ecuaciones lineales y cuadráticas (6, 5), estadística (0, 4), conjuntos (1, 2), conceptos de economía involucrados (8, 13) y derivada (0, 1). En relación a las *proposiciones/propiedades*, solo $P_{(6)21}$ asocia representaciones en el lenguaje coloquial, con la forma general de su representación algebraica (e.g., ecuación de la función lineal $y = mx + b$; $ecuación\ de\ la\ función\ cuadrática\ \ y - k = 4p(x - h)^2$). La estructura de la pregunta no facilitaba la ejecución de *procedimientos* ni *argumentos*, por lo que era de esperarse que éstos no se encontraran en las soluciones dadas por los profesores en formación.

En las figuras 29, 30 y 31 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)2}$, $P_{(6)21}$ y $P_{(6)1}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

9) Los contenidos Matemáticos que es estudia en esta Situación son los costo de edición y los ingreso por la Venta de una edición facsimilar del Poema dramático de Alfonso Reyes.

10) Los aspecto que se evocan en este contenido es una situación Problema, en donde se tiene en cuenta el costro, el ingreso y las ganacias.

11) Los conocimientos Previos que deben movilizar los estudiante Para resolver esta situación Plantiada pueden ser:

* Interpretación de gráficas
* capacidad de comprensión y análisis
* el saber que se nos esta pregundo o lo que Presenta la situación
* El uso de operaciones Algebraicas.

12) Las estrategias que Podrían utilizar los estudiantes son:

* La relación del costo con los Ingreso.
* Equivalencias
* Método de tanteo. etc

13) Lo que creo que aprenderían los estudiantes es analizar situación gráficas en la resolución de situaciones Problemas, la comprensión de gráficas, la experimentación como Metodo de resolución deuna situación etc.

14) Las dificultades o conflictos que se pueden Presentar en la solución de esta situación Podrían ser:

* El Mal análisis.
* La Manera de comprensión
* la resolución apresurada.

Figura 29. Respuesta dada por $P_{(3)2}$ a los ítem 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

a) funcion cuadratica y lineal.

10) * Analisis de graficas, Lineal $y = mx + b$
* Ecuacion de una función cuadratica. $y - k = 4p(x-h)^2$
* Ecuación de una función
* Elaboración de gráficas.

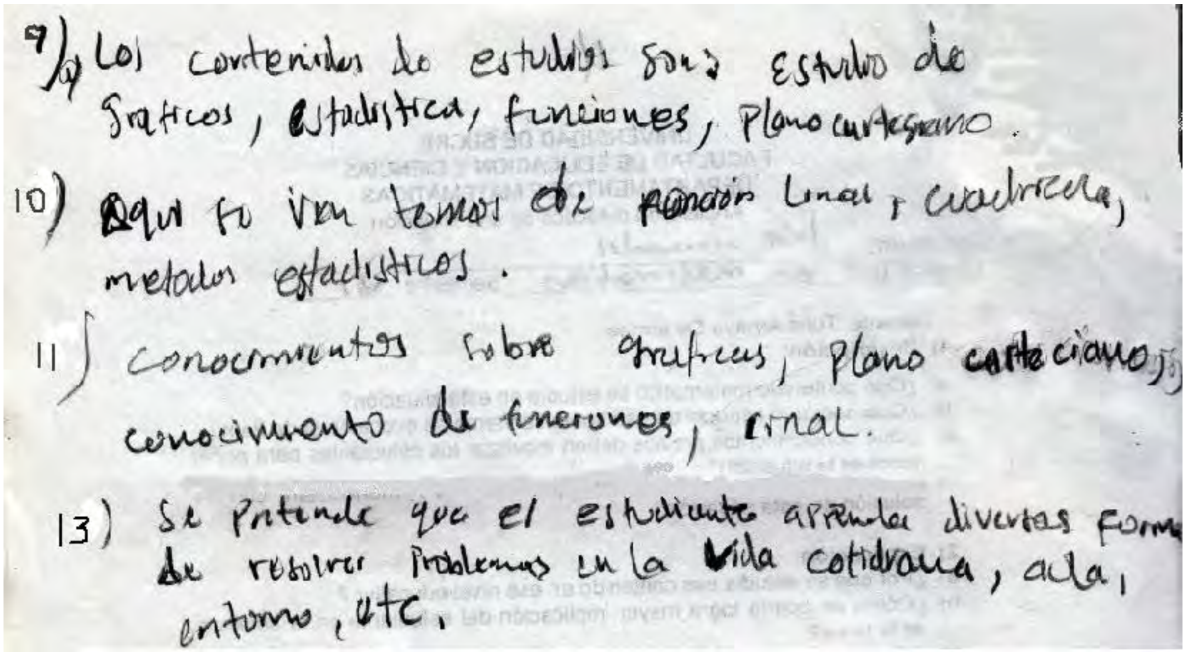
11) Conocimientos previos
* Operaciones básicas

12) los estudiantes solo analizaran las gráficas

13) Aplicaciones de la funcion cuadratica y lineal.

14) gráficas

Figura 30. Respuesta dada por $P_{(6)21}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.


9) Los contenidos de estudios son: estudio de graficos, estadistica, funciones, plano cartesiano.

10) Aqui se ven temas de funcion lineal y cuadratica, metodos estadisticos.

11) conocimientos sobre graficas, plano carteciano, conocimiento de funciones, rnal.

13) Se pretende que el estudiante aprenda diversas form de resolver problemas en la vida cotidiana, aula, entorno, etc.

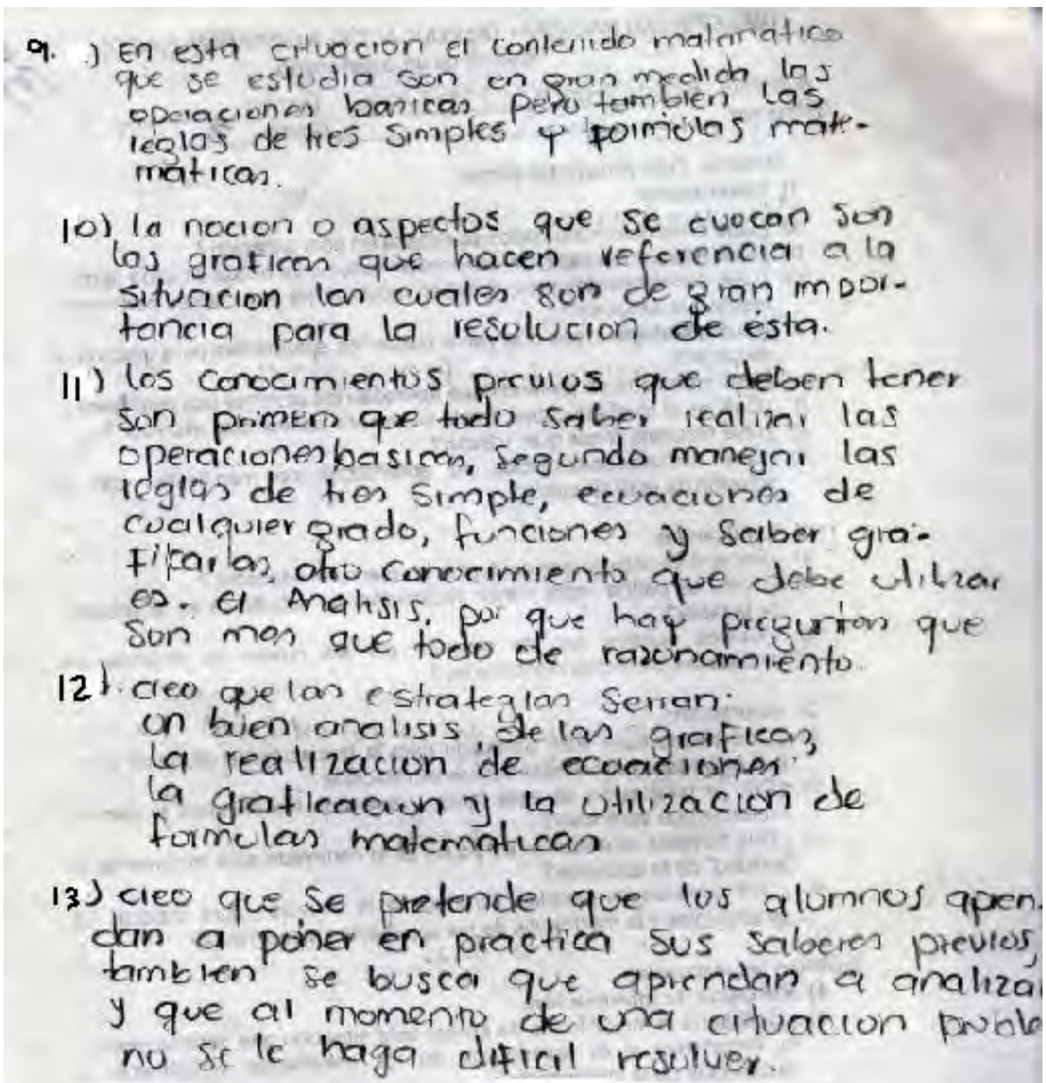
Figura 31. Respuesta dada por $P_{(6)1}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.2 Noción o aspecto del contenido/tema se evocado en cada ítem del cuestionario

Para resolver esta pregunta se esperaba que el profesor en formación, para cada ítem del cuestionario, escogiera una noción, tema o contenido y se lo asociara. Ningún estudiante de alguno de los dos grupos pudo discriminar las nociones o aspectos del contenido que se evoca en cada ítem. No sé si tuvieron problemas con la interpretación textual (Gallardo, González, Quintanilla, 2013) o fue por falta de conocimiento para hacerlo, y aunque algunas nociones que se trabajan en el cuestionario fueron mencionadas, ninguno discriminó explícitamente todos los aspectos o nociones ítem por ítem.

En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* utilizado por los profesores en formación fueron en su totalidad verbales, como puede apreciarse en las figuras de la 29 a la 48. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan, se destacan costos, ingresos y ganancias; funciones lineales y cuadráticas, modelos estadísticos; gráficas de funciones, variable e incógnitas; intervalos, crecimiento, decrecimiento; pendiente de una recta, máximo de una función, punto crítico, interpretación de la gráfica de una función; máximos y mínimos absolutos y relativos, entre otros. En cuanto a las *proposiciones/propiedades*, son muy pocos los que logran establecer relaciones entre elementos de diferentes representaciones de algunos de los objetos estudiados. Un caso particular lo encontramos en $P_{(3)22}$, quien establece relaciones entre aquellos valores donde las funciones crecen o decrecen, con sus intervalos (e.g., *los valores donde crece y decrece la función* (intervalos)). Como en el caso de el ítem anterior, en este, tanto los *procedimientos* como los *argumentos*, se esperaba que fueran muy pocos o nulos, para este fueron nulos ambos.

En las figuras 32 y 33 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)8}$ y $P_{(6)19}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.


9.) En esta cituacion el contenido matematico que se estudia son en gran medida las operaciones basicas pero tambien las reglas de tres simples y formulas mate-maticas.

10) la nocion o aspectos que se evocan son las graficas que hacen referencia a la situacion las cuales son de gran impor-tancia para la resolucion de ésta.

11) los conocimientos previos que deben tener son primero que todo saber realizar las operaciones basicas, segundo manejar las reglas de tres simple, ecuaciones de cualquier grado, funciones y saber gra-ficarlas, otro conocimiento que debe utilizar es. el Analisis, por que hay preguntas que son mas que todo de razonamiento.

12). creo que las estrategias serian: un buen analisis de las graficas, la realizacion de ecuaciones la graficacion y la utilizacion de formulas matematicas

13) creo que se pretende que los alumnos apren-dan a poner en practica sus saberes previos, tambien se busca que aprendan a analizar y que al momento de una cituacion proble[...] no se le haga dificil resolver.

Figura 32. Respuesta dada por $P_{(3)8}$ a los ítems 9, 10, 11, 12 y 13 del cuestionario diagnóstico.

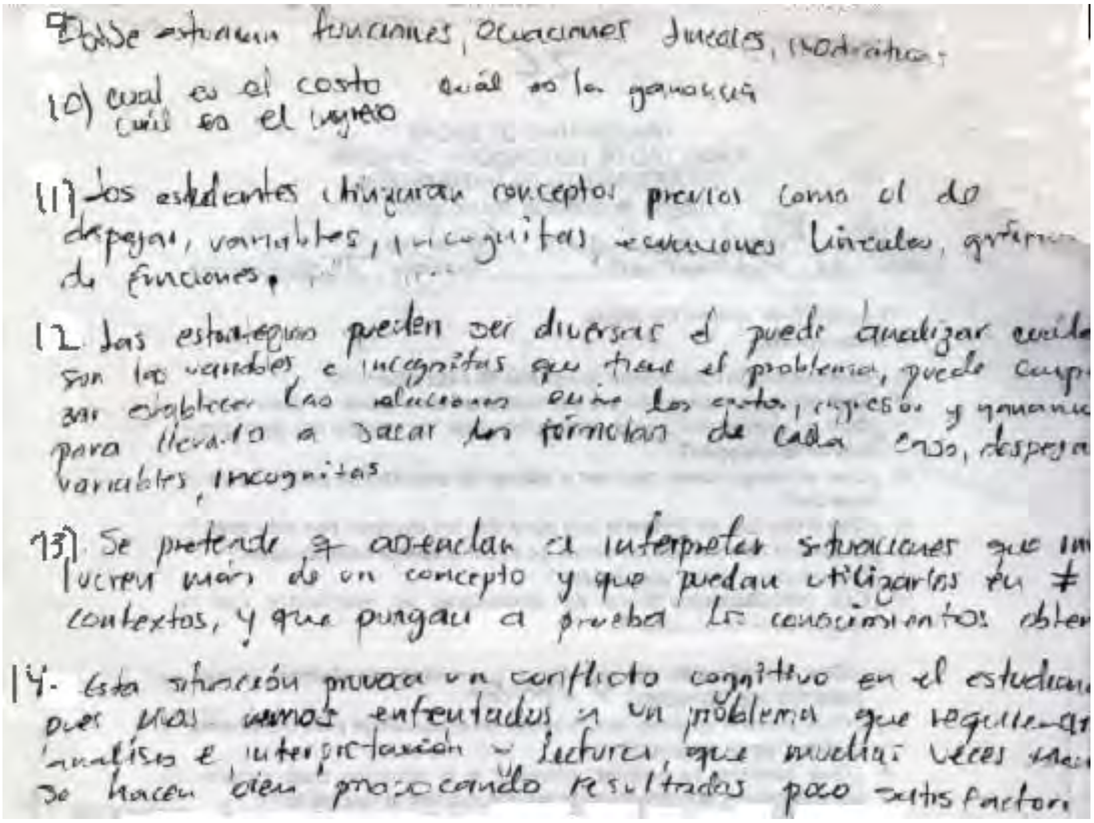
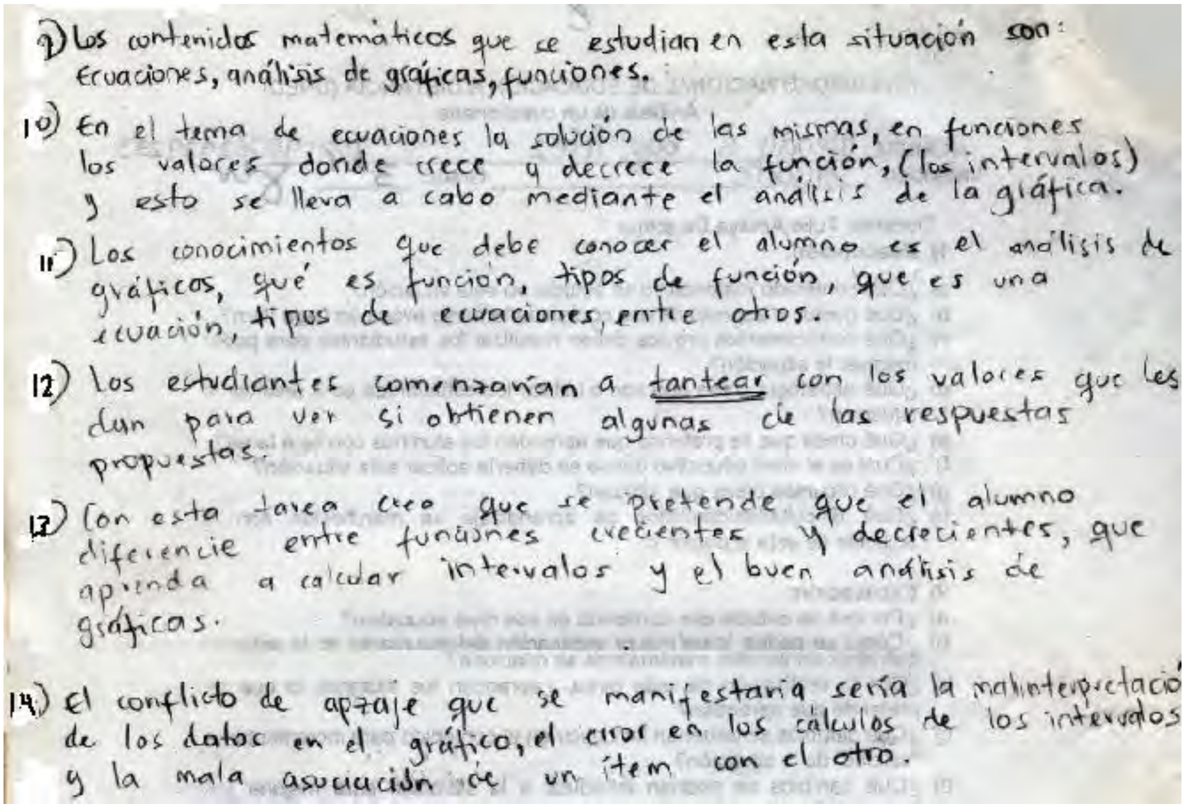

9) Se estudian funciones, ecuaciones lineales, cuadráticas
10) cual es el costo cuál es la ganancia
cuál es el ingreso
11) Los estudiantes utilizarán conceptos previos como el de despejar, variables, incognitas, ecuaciones lineales, gráficas de funciones.
12. Las estrategias pueden ser diversas el puede analizar cuáles son las variables e incognitas que tiene el problema, puede empezar establecer las relaciones entre los costos, ingresos y ganancias para llevarlo a sacar las fórmulas de cada caso, despejar variables, incognitas
13) Se pretende que aprendan a interpretar situaciones que involucren más de un concepto y que puedan utilizarlos en ≠ contextos, y que pongan a prueba los conocimientos obten
14- Esta situación provoca un conflicto cognitivo en el estudiante pues nos vamos enfrentados a un problema que requiere análisis e interpretación y lectura, que muchas veces no se hacen bien provocando resultados poco satisfactori

Figura 33. Respuesta dada por $P_{(6)19}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.3 Conocimientos previos que movilizar los estudiantes para poder resolver la situación

En este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación hicieran mención de algunos conocimientos necesarios para resolver la situación. Solo (20, 21) mencionaron algunos conocimientos necesarios para resolver la situación. Como se preveía, los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones/contenidos* que mencionan, como los necesarios por un estudiantes que se le aplique esta situación, para resolverla, se destacan: las operaciones básicas (4, 5), construcción y análisis de funciones y sus gráficas (20, 21), conocer el plano (3, 7) operaciones con expresiones algebraicas (4, 3), factorización (3, 2), raíces de ecuaciones cuadráticas (2, 3). En relación a las *proposiciones/propiedades*, los *procedimientos y los argumentos* utilizados, se esperaban pocos o ninguno y no se encontraron evidencias de estos.

En las figuras 34 y 35 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)22}$ y $P_{(6)25}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



9) Los contenidos matemáticos que se estudian en esta situación son: Ecuaciones, análisis de gráficas, funciones.

10) En el tema de ecuaciones la solución de las mismas, en funciones los valores donde crece y decrece la función, (los intervalos) y esto se lleva a cabo mediante el análisis de la gráfica.

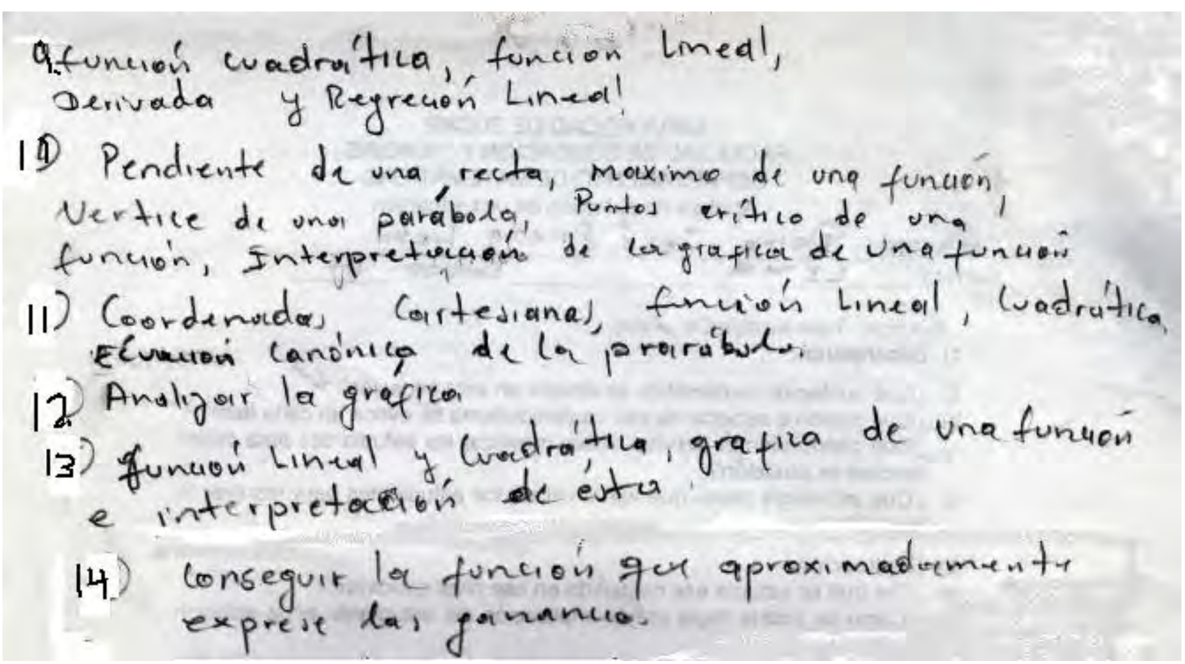
11) Los conocimientos que debe conocer el alumno es el análisis de gráficos, qué es función, tipos de función, que es una ecuación, tipos de ecuaciones, entre otros.

12) Los estudiantes comenzarían a tantear con los valores que les dan para ver si obtienen algunas de las respuestas propuestas.

13) Con esta tarea creo que se pretende que el alumno diferencie entre funciones crecientes y decrecientes, que aprenda a calcular intervalos y el buen análisis de gráficas.

14) El conflicto de apzaje que se manifestaría sería la malinterpretació de los datos en el gráfico, el error en los cálculos de los intervalos y la mala asociación de un ítem con el otro.

Figura 34. Respuesta dada por $P_{(3)22}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



9. función cuadrática, función lineal, Derivada y Regreción Lineal

10) Pendiente de una recta, maximo de una función, Vertice de una parábola, Puntos critico de una función, Interpretación de la grafica de una función

11) Coordenadas Cartesianas, función Lineal, Cuadrática, Ecuación canónica de la parábola.

12) Analizar la grafica

13) función Lineal y Cuadrática, grafica de una función e interpretación de esta

14) conseguir la función que aproximadamente exprese las ganancia.

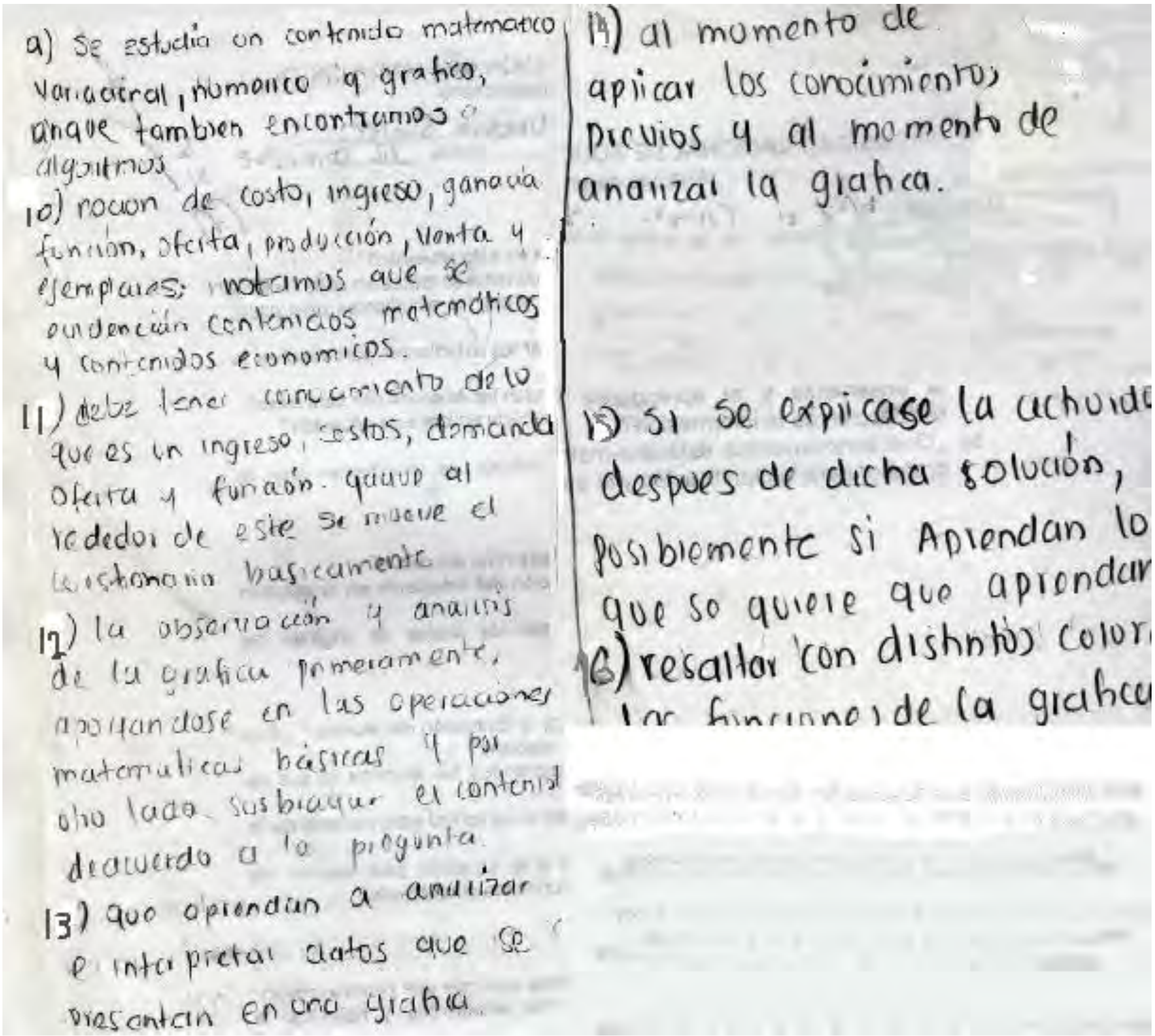
Figura 35. Respuesta dada por $P_{(6)25}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.4 Estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver la situación

En las respuestas a este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación, luego de reflexionar sobre las posibles estrategias a utilizar por los estudiantes, dieran algunas posibilidades. Los profesores en formación (10, 24) identificaron algunas de las posibles estrategias utilizadas por los estudiantes de la básica al resolver las cuestiones por las que se les indagó en el cuestionario aplicado para recoger la información de la dimensión matemática.

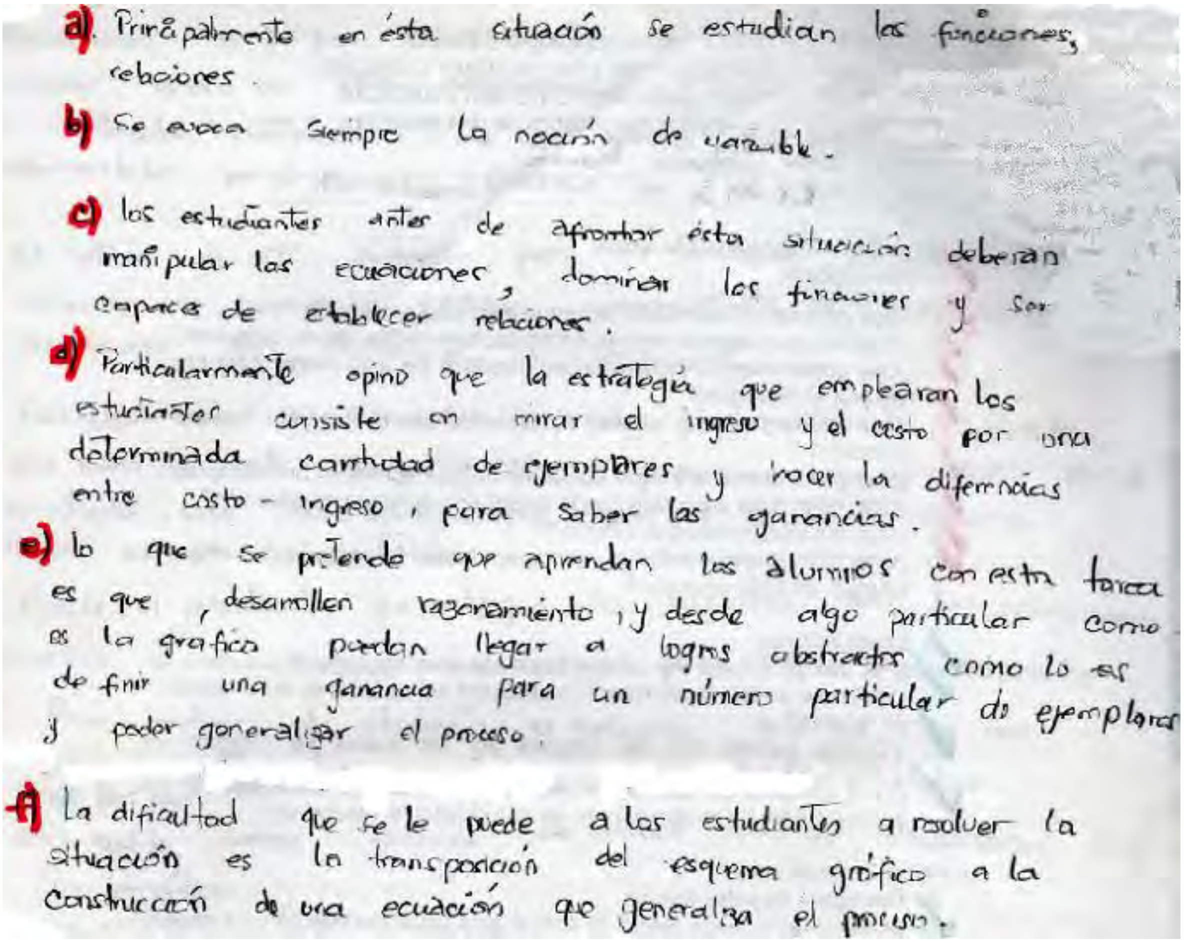
En este ítem los *elementos lingüísticos* utilizados también fueron en su totalidad verbales. Igualmente no se esperaban *conceptos/definiciones* por la estructura misma de la pregunta. En cuanto a las ni *proposiciones/propiedades*, los profesores en formación proponen algunas formas en las que los estudiantes de las básica podrían llegar a resolver esta pregunta, (e.g., $P_{(6)25}$ "*analizar las gráficas"*; $P_{(3)22}$ "*los estudiantes comenzarán a tantear con los valores que les dan para ver si obtienen algunas de las respuestas propuestas"*; $P_{(3)7}$ "la observación y análisis de la gráfica primeramente, apoyándose en las operaciones matemáticas básicas y por otro lado subrayar el contenido de acuerdo a la pregunta", entre otros). En relación con los *procedimientos/estrategias mencionadas por los profesores en formación* se destacan: comparar funciones (8, 3) hacer un análisis visual (15, 14), hacerlo por tanteo (9, 4), resolver polinomios aritméticos (0, 6), cálculo mental (0, 1). En cuanto a los *argumentos* utilizados, no son evidente en la respuesta de ninguno de los profesores en formación de ninguno de los dos grupos de la muestra.

En las figuras 36 y 37 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)7}$, y $P_{(6)23}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



9) Se estudia un contenido matematico variacional, numerico y grafico, aunque tambien encontramos algoritmos
10) nocion de costo, ingreso, ganancia funcion, oferta, produccion, venta y ejemplares; notamos que se evidencian contenidos matematicos y contenidos economicos.
11) debe tener conocimiento de lo que es un ingreso, costos, demanda oferta y funcion. ya que al rededor de este se mueve el cuestionario basicamente
12) la observacion y analisis de la grafica primeramente, apoyandose en las operaciones matematicas básicas y por otro lado susbicar el contenido deacuerdo a la pregunta.
13) que aprendan a analizar e interpretar datos que se presentan en una grafica.
14) al momento de aplicar los conocimientos previos y al momento de analizar la grafica.
15) si se explicase la actividad despues de dicha solución, posiblemente si Aprendan lo que se quiere que aprendan
16) resaltar con distintos colores las funciones de la grafica

Figura 36. Respuesta dada por $P_{(3)7}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16 del cuestionario diagnóstico.



a). Principalmente en ésta situación se estudian las funciones, relaciones.

b) Se evoca siempre la noción de variable.

c) los estudiantes antes de afrontar ésta situación deberían manipular las ecuaciones, dominar las funciones y ser capaces de establecer relaciones.

d) Particularmente opino que la estrategia que emplearan los estudiantes consiste en mirar el ingreso y el costo por una determinada cantidad de ejemplares y hacer la diferencias entre costo - ingreso, para saber las garancias.

e) lo que se pretende que aprendan los alumnos con esta tarea es que, desarrollen razonamiento, y desde algo particular como es la grafica puedan llegar a logros abstractos como lo es definir una ganancia para un número particular de ejemplares y poder generalizar el proceso.

f) La dificultad que se le puede a los estudiantes a resolver la situación es la transposición del esquema gráfico a la construcción de una ecuación que generaliza el proceso.

Figura 37. Respuesta dada por $P_{(6)23}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

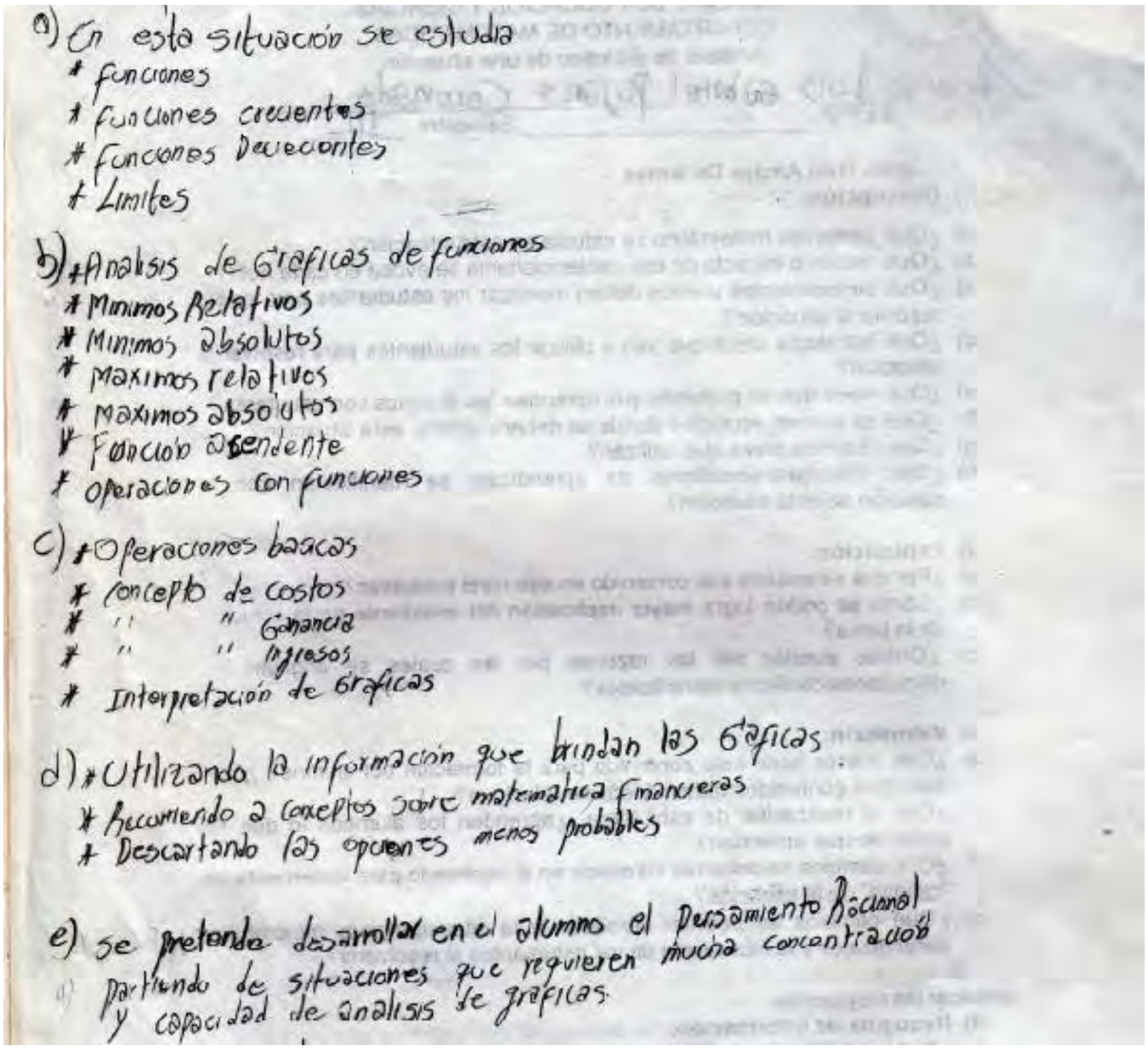
4.1.3.2.1.1.5 Lo que se pretenda que aprendan los alumnos con la realización de la tarea

Con esta pregunta se pretendía que los profesores en formación reflexionaran acerca de la intencionalidad que puede tener una situación en el aprendizaje de un determinado tema o contenido y manifestaran algunas de sus conjeturas. Un número significativo de profesores en formación (19, 21) propuso algunos de los aspectos que se pueden pretender enseñar en el desarrollo de esta actividad.

Los *elementos lingüísticos* utilizados en este ítem/tarea fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destacan análisis de gráficas de funciones, graficación de funciones, punto de corte en el eje de las abscisas. En relación a las *proposiciones/propiedades* destacaron: análisis e interpretación de funciones y sus gráficas

(13, 12), sobre la aplicación de los conocimientos matemáticos (8, 10) a resolver problemas (4, 3), análisis de datos (0, 2). En cuanto a los *procedimientos* a los *argumentos* utilizados, como se esperaba, no son evidentes.

En las figuras 38 y 39 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)23}$ y $P_{(6)11}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



a) En esta situación se estudia
* funciones
* funciones crecientes
* funciones Decrecientes
* Limites

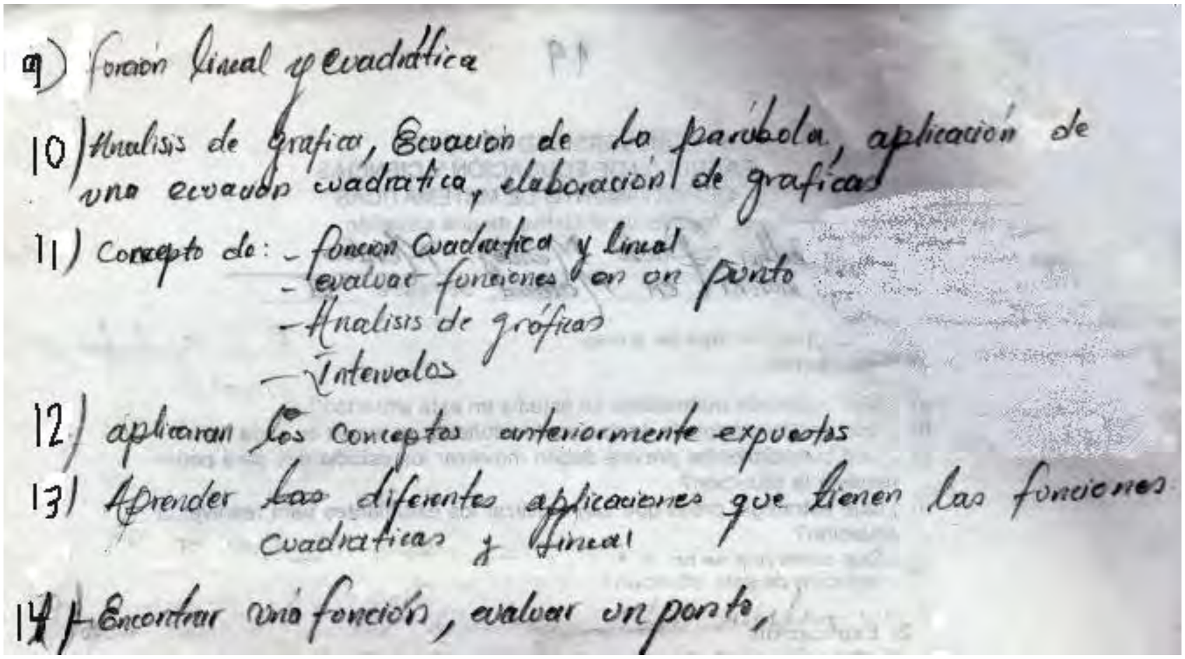
b) *Analisis de Graficas de funciones
* Minimos Relativos
* Minimos absolutos
* maximos relativos
* maximos absolutos
* Funcion asendente
* operaciones con funciones

c) *Operaciones basicas
* concepto de costos
* " " Ganancia
* " " ingresos
* Interpretación de Graficas

d) *Utilizando la información que brindan las Graficas
* Recurriendo a conceptos sobre matematica financieras
* Descartando las opciones menos probables

e) se pretende desarrollar en el alumno el Pensamiento Racional partiendo de situaciones que requieren mucha concentración y capacidad de analisis de graficas.

Figura 38. Respuesta dada por $P_{(3)23}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



9) función lineal y cuadrática

10) Analisis de graficas, Ecuacion de la parabola, aplicación de una ecuación cuadratica, elaboración de graficas

11) Concepto de: - funcion Cuadratica y lineal
- evaluar funciones en un punto
- Analisis de gráficas
- Intervalos

12) aplicaran los Conceptos anteriormente expuestos

13) Aprender las diferentes aplicaciones que tienen las funciones Cuadraticas y lineal

14) Encontrar una función, evaluar un punto,

Figura 39. Respuesta dada por $P_{(6)11}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.6 Dificultades/conflictos de aprendizaje manifestados con la solución de la tarea

En el desarrollo de este ítem/tarea se esperaba que el profesor en formación hiciera una proyección de las posibles dificultades/conflictos de aprendizaje que manifiesta un estudiante del nivel básico o medio al intentar resolver una situación como la planteada en el cuestionario que resolvían. En sus respuestas a este ítem, los formadores en formación (11, 20) identificaron algunas posibles dificultades/conflictos de aprendizaje que podrían manifestar los estudiantes de la básica al resolver la situación.

En este ítem/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones con los que considera pueden generar conflictos o dificultades en los estudiantes* mencionan modelación de funciones, graficación de funciones. En relación a las *proposiciones/propiedades*, que proponen están: el uso de ecuaciones para encontrar una incógnita (3, 2); interpretación textual de la situación (4, 5); deficiente nivel de análisis gráfico (3, 8); modelar matemáticamente la situación (0, 7), con el concepto de función (0, 4). La estructura de la pregunta no es apropiada para que el profesor en formación realice *procedimientos* o utilice *argumentos*.

En las figuras 40, y 41 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)5}$ y $P_{(6)2}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.

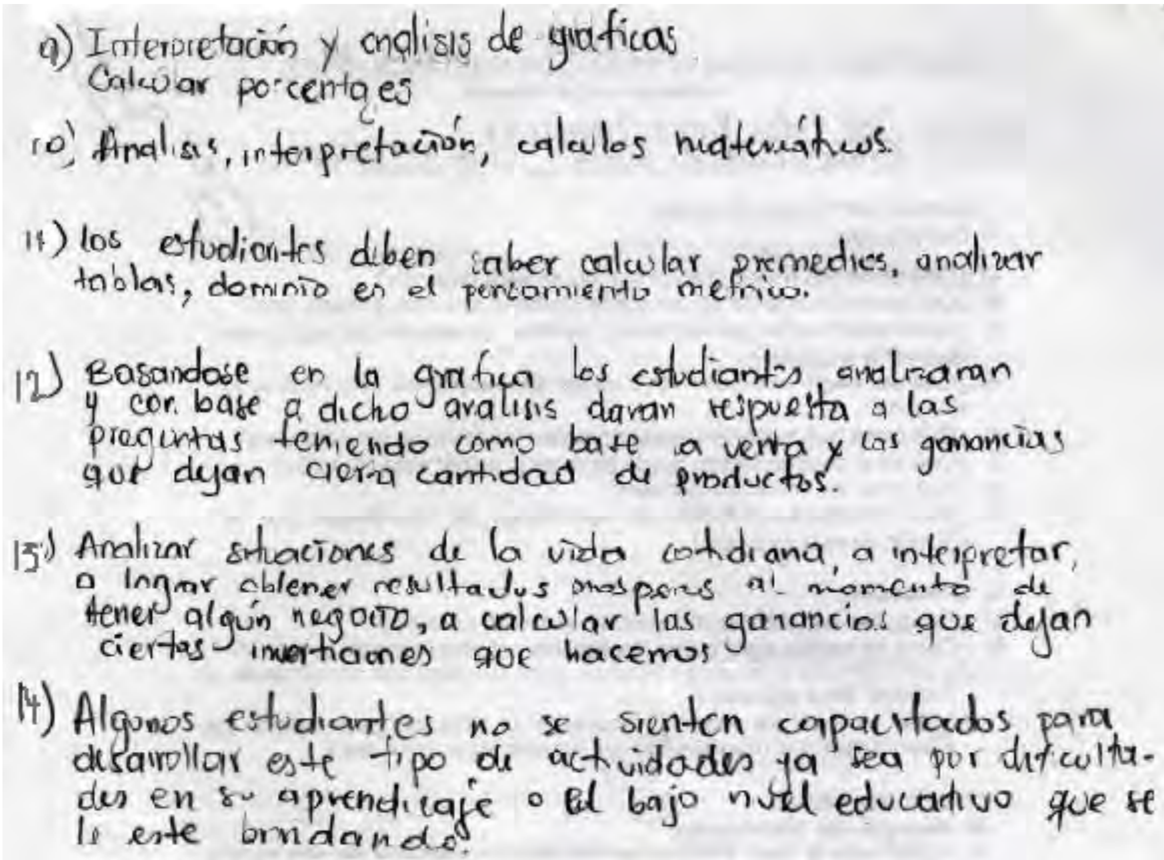
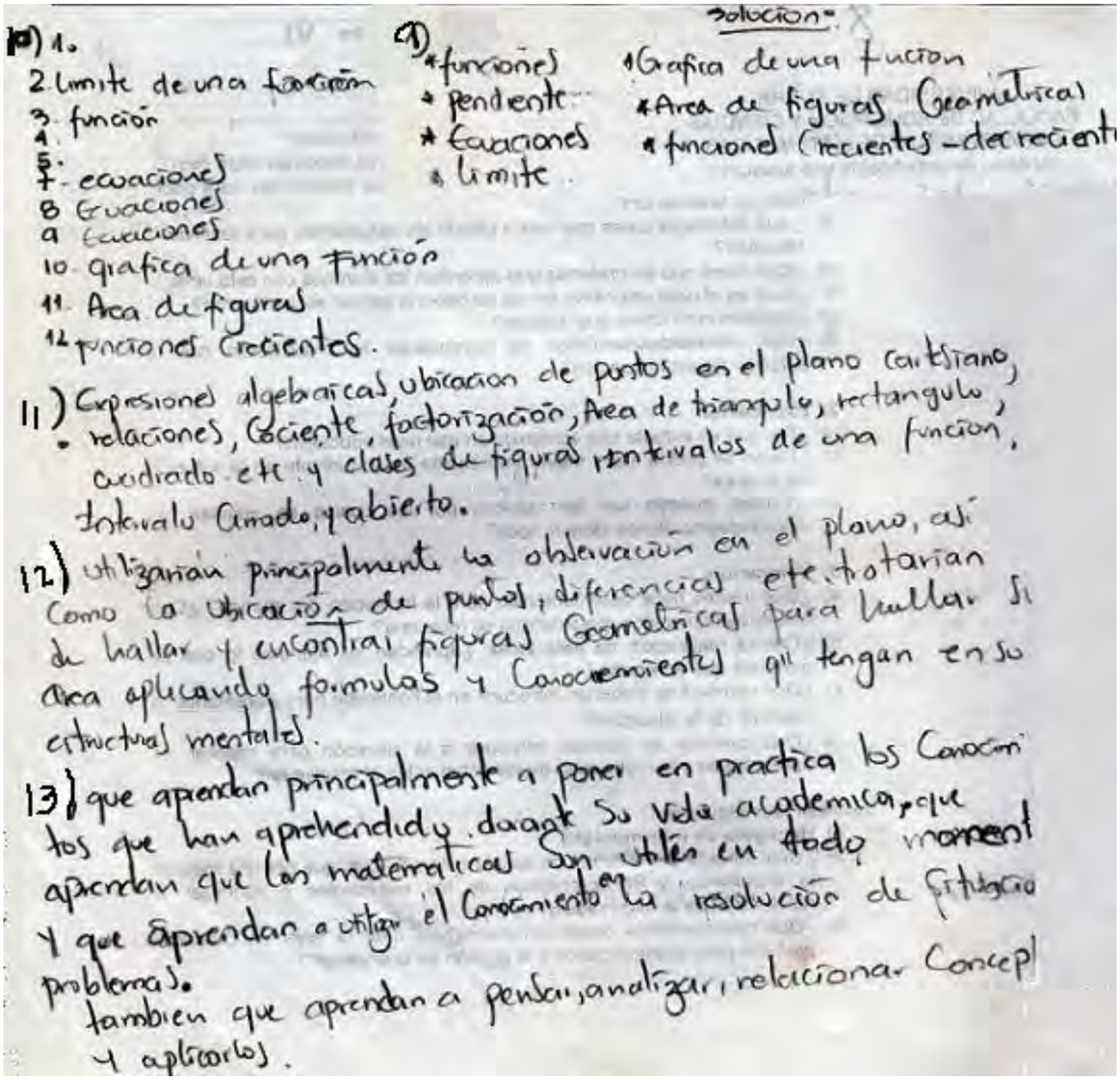

9) Interpretación y analisis de graficas
Calcular porcentajes
10) Analisis, interpretación, calculos matemáticos.
11) los estudiantes diben saber calcular promedios, analizar tablas, dominio en el pensamiento metrico.
12) Basandose en la grafica los estudiantes analizaran y con base a dicho analisis daran respuesta a las preguntas teniendo como base la venta y las ganancias que dejan cierta cantidad de productos.
13) Analizar situaciones de la vida cotidiana, a interpretar, a lograr obtener resultados prosperos al momento de tener algún negocio, a calcular las garancias que dejan ciertas inversiones que hacemos
14) Algunos estudiantes no se sienten capacitados para desarrollar este tipo de actividades ya sea por dificultades en su aprendizaje o el bajo nivel educativo que se le este brindando.

Figura 40. Respuesta dada por $P_{(3)5}$ a los ítems 9, 10, 11, 12, 13 y 14 del cuestionario diagnóstico.



Solución:

10) 1.
2 Limite de una función
3. función
4.
5.
7. ecuaciones
8 Ecuaciones
9 Ecuaciones
10. grafica de una función
11. Area de figuras
12 funciones Crecientes.

9) *funciones
* pendiente
* Ecuaciones
* limite.

1 Grafica de una fucion
* Area de figuras Geometrica
* funciones Crecientes - decrecient

11) Expresiones algebraicas, ubicacion de puntos en el plano cartesiano, relaciones, Cociente, factorización, Area de triangulo, rectangulo, cuadrado etc y clases de figuras, intervalos de una funcion, Intervalo Cerrado, y abierto.

12) utilizarian principalmente la observación en el plano, asi Como la ubicación de puntos, diferencias etc. trataran de hallar y encontrar figuras Geometricas para hallar si area aplicando formulas y Conocimientos qu tengan en su estructuras mentales.

13) que aprendan principalmente a poner en practica los Conocimi tos que han aprehendido durante Su vida academica, que aprendan que las matematicas Son utiles en todo moment y que aprendan a utilizar el Conocimiento en la resolución de Situacio problemas.
tambien que aprendan a pensar, analizar, relacionar Concept y aplicarlos.

Figura 41. Respuesta dada por $P_{(6)2}$ a los ítems 9, 10, 11, 12 y 13 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.7 Aprenden los alumnos lo que se pretende que aprendan

En este ítem/tarea se esperaba que el profesor en formación reflexionara sobre los contenidos básicos que debe manejar un estudiante en determinado nivel y en lo adecuado o no de las actividades y las estrategias que debería utilizar el profesor para facilitarle un apropiado aprendizaje de éstos. Los profesores en formación (13, 12) dan su opinión en relación a si con la realización de esta tarea, los alumnos de la básica aprenden lo que se pretende que aprendan, y dan algunas razones, entre las que se tienen.

Los *elementos lingüísticos* utilizado por los profesores en formación en este ítem fueron, en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* las *proposiciones/propiedades*, y los *procedimientos* utilizados se esperaba un análisis visual y a partir de ahí dieran sus respuestas, como sucedió. En cuanto a los *argumentos*, estos son muy sólidas y razonados (e.g., $P_{(6)8}$ "*si aprenden lo que se pretende que aprendan porque la situación abarca minuciosamente una gran cantidad de subtemas, siempre y cuando finalizada la actividad se socialice y se haga una retroalimentación, aclaración de dudas con el fin de llegar a conclusiones significativas*"; $P_{(6)15}$ "*Todo depende del objetivo que busque el docente y las estrategias que utiliza para lograrlo*"; $P_{(6)15}$ "*podría ser de mucha importancia que al estudiante se le presente este tipo de situaciones, pero nadie aprende todo lo que debía aprender. Si porque si lo relacionamos con las situaciones que llevan a diario pues lo verán con su vida cotidiana y así le será más fácil aprender").*

Lo anterior evidencia que algunos estudiantes alcanzan a reconocer varias representaciones para una función, por lo que aceptan la representación gráficas como un escenario válido para presentar la situación, mientras para un grupo considerable (19, 17) de estos profesores en formación la única representación de una función es la algebraica. Estos presentan argumentos como los siguientes: "*no precisamente más bien se les muestra el tema para que tengan claro de que existe una solución matemática a un problema como el anterior"; "no, porque si un alumno no tiene las bases suficientes para la realización de este contenido, no lograría aprender lo que se quiere"; "no, porque los alumnos no aplican (la mayoría de estos) dichos conocimientos y se limitan a relacionar las respuestas con el tanteo que anteriormente realizaron"; "no en su totalidad ya que el aprendizaje no es algo que se adquiere rápido y además, esta como primera prueba puede ser un gran fracaso, pero si se siguen aplicando con el tiempo mejorarán y se obtendrá el resultado esperado"; "no, ni el 10% aprenderían lo que se quiere lograr que aprendan"; $P_{(3)13}$ "Bueno, se aprende mucho pero no se logra lo que se quiere que se aprenda pues esta tarea ayuda en muchos casos, pero en otros confunde"*; *"no necesariamente el alumno aprende lo que se pretende que el aprenda, ya que al resolverlo no sabe el mismo estudiante si lo que hizo está bien o mal y para que el aprenda se hace necesario dar una explicación de la solución de esta actividad y seguir planteándoles situaciones similares a esta; no, porque se recurre más a los* *conceptos previos que a temas que se quieren iniciar"; "no, porque con estas relaciones no se facilita un mayor aprendizaje para los estudiantes*.

Algunos de estos profesores en formación reconocen la bondad de la situación, pero a su vez encuentran problemas para ubicarla en un momento preciso del aprendizaje de los estudiantes; mientras que otros muy acertadamente hacen otras consideraciones necesarias para que se logre un mejor aprendizaje, y además de criticar el cuestionario y proponer alternativas de mejor contextualización, también fueron muy crítico en el análisis de las respuestas, sin importar que no hubieran visto un curso de geometrías analítica, en el ítem que requirieron su uso, consultaron y obtuvieron respuestas acomodadas a los requerimientos que se les plantearon.

En las figuras 42, 43 y 44 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)13}$, $P_{(3)15}$ y $P_{(6)15}$ a los ítems 15, 16, y 17 del cuestionario diagnóstico.

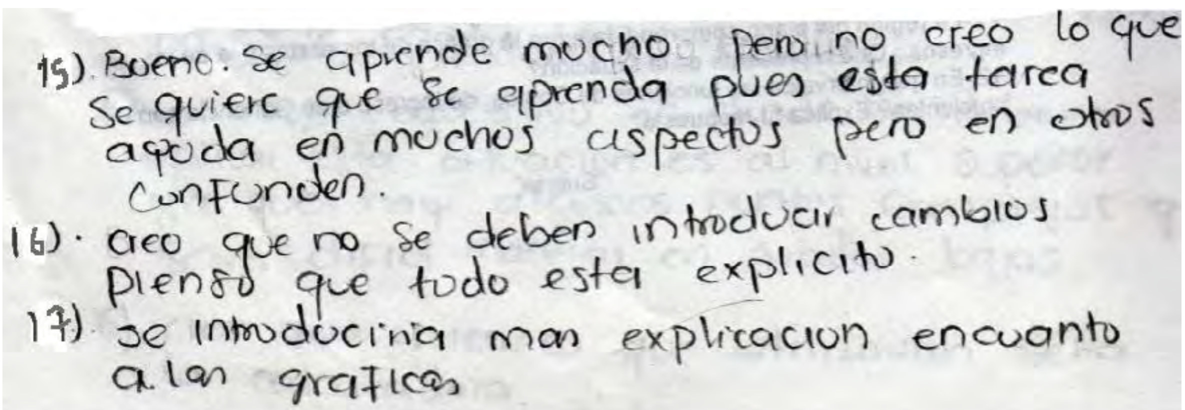

15). Bueno. Se aprende mucho pero no creo lo que se quiere que se aprenda pues esta tarea ayuda en muchos aspectos pero en otros confunden.
16). creo que no se deben introducir cambios pienso que todo esta explicito.
17) se introduciria mas explicacion encuanto a las graficas

Figura 42. Respuesta dada por $P_{(3)13}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

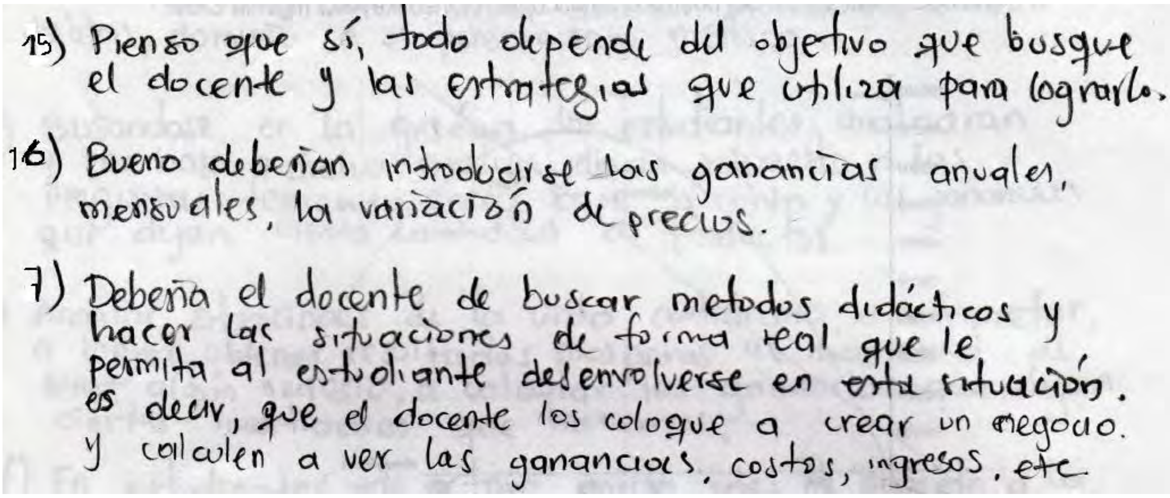

15) Pienso que sí, todo depende del objetivo que busque el docente y las estrategias que utiliza para lograrlo.
16) Bueno deberían introducirse las ganancias anuales, mensuales, la variación de precios.
7) Debería el docente de buscar metodos didácticos y hacer las situaciones de forma real que le permita al estudiante desenvolverse en ~~esta situación~~. es decir, que el docente los cologue a crear un negocio. y calculen a ver las ganancias, costos, ingresos, etc

Figura 43. Respuesta dada por $P_{(3)15}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

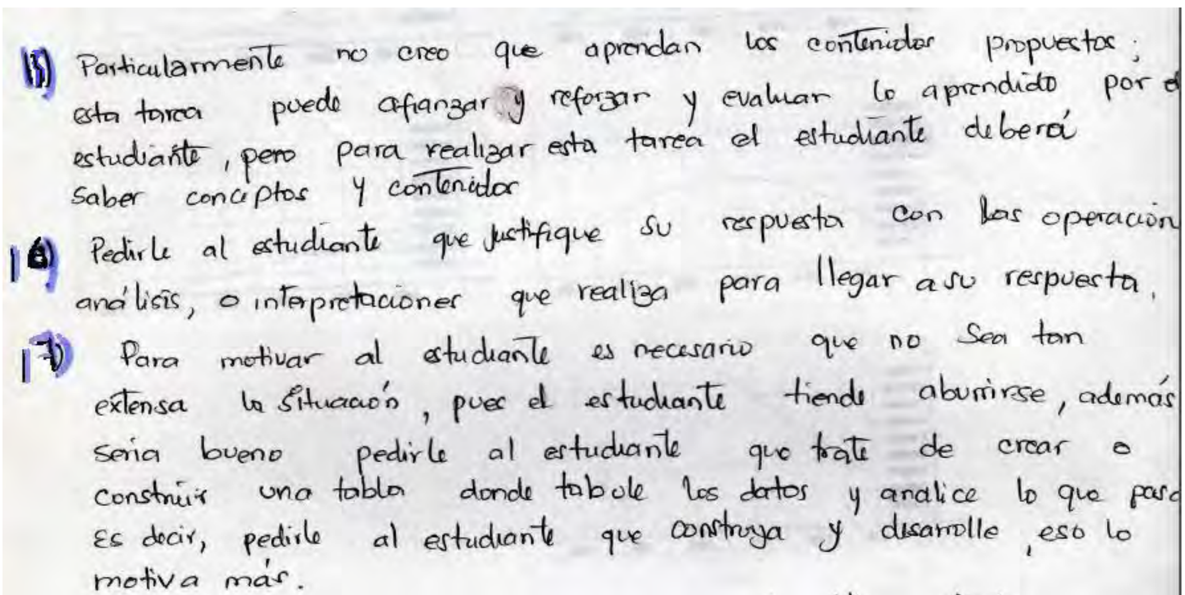

15) Particularmente no creo que aprendan los contenidos propuestos; puede afianzar y reforzar y evaluar lo aprendido por el estudiante, pero para realizar esta tarea el estudiante deberá saber conceptos y contenidos
16) Pedirle al estudiante que justifique su respuesta con las operación análisis, o interpretaciones que realiza para llegar a su respuesta.
17) Para motivar al estudiante es necesario que no sea tan extensa la situación, pues el estudiante tiende aburrirse, además sería bueno pedirle al estudiante que trate de crear o construir una tabla donde tabule los datos y analice lo que pa es decir, pedirle al estudiante que construya y desarrolle, eso lo motiva más.

Figura 44. Respuesta dada por $P_{(6)15}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.8 Cambios a introducir en el contenido para incrementar la “calidad” de la situación

En este ítem/tarea se esperaba que el profesor en formación propusiera por lo menos algún cambio que permitiera –desde su punto de vista- mejorar la situación. Los cambios *propuestos* por los profesores en formación de los dos grupos se agruparon en cuatro tipos básicos: 1) ***ningún cambio*** (3, 4): Sorprendió que algunos profesores en formación estuvieran totalmente satisfechos con la calidad del cuestionario, y por ende propusieran que no se le hiciera ningún cambio. Sin embargo la justificación que dieron es respetable. Algunas de sus *proposiciones* fueron: (e.g., $P_{(3)13}$: “*creo que no se deben introducir cambios,* *pienso que todo está explícito”;* $P_{(6)27}$: “*Ninguno así está bien*”. Otras proposiciones que hicieron son las siguientes: “*no se deberían introducir cambios ya que todo está muy bien, es una prueba muy bien elaborada”*; “*no debería modificarse porque así se logra el interés necesario para que el alumno resuelva estas situaciones con los medios disponibles”).*

2) ***Cambios de tipo didáctico*** (19, 16): Como ejemplo de sus *propuestas* de cambios didácticos se destacan: (e.g., “*contextualizar las situaciones para que sea más aplicable en sus vidas”; $P_{(6)15}$: “Pedirle al estudiante que justifique su respuesta con las operaciones análisis, o interpretación que realiza para llegar a su respuesta”; $P_{(3)15}$* “*Bueno deberían introducirse las ganancias anuales, mensuales, la variación de precios*”; *$P_{(3)12}$: “Algo que se debe añadir es ejemplos relacionados con la situación y a partir de ahí comenzar a realizar el ejercicio como tal*”.

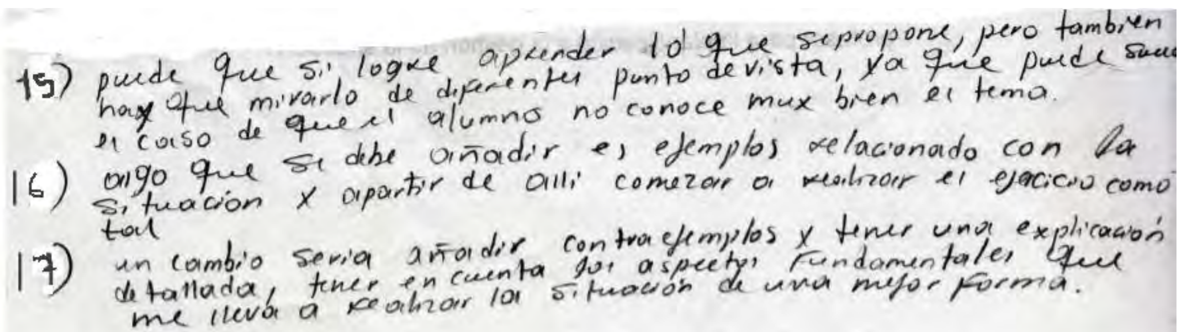
3) ***Cambios para involucrar los estudiantes*** (15, 14) *resaltar con distintos colores las funciones y sus gráficas, presentarse como juegos que favorezcan el interés de los estudiantes, poner al estudiante a que él mismo modifique la situación; permitir a los estudiantes hallar la función respectiva de la situación; se les debe enseñar a que ellos deduzcan una función a partir de su gráfica.*

4) ***Cambios que favorezcan el pensamiento lógico*** (3, 4): *más razonamiento lógico y no mucho calculo; introducir cambios que hagan pensar más a los estudiantes.*

Los cambios *propuestos por* los profesores en formación están mucho más relacionados con sus propias dificultades al resolver el cuestionario que con una proyección para mejorar la calidad de la situación. Dichos cambios están fundamentalmente relacionados con contextualizar mejor la situación, de tal forma que los estudiantes puedan relacionar mejor los conceptos con algo conocido; utilizar registros semióticos de representación como gráficas y tablas, y hacer más evidentes las representaciones; utilizar recursos didácticos como juegos; recortar la situación, colocarle menos preguntas para evitar que los estudiantes se aburran y no terminen de resolverla. Y además, los cambios propuestos son más estructurales que de contenido, por lo que parece que enfocaron mal la pregunta que se les planteó.

Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron totalmente verbales. En relación con los *conceptos/definiciones* los *procedimientos* y los *argumentos* utilizados, por la misma estructura de la pregunta, se esperaba que fueran nulos, como efectivamente se dio.

En las figuras 45 y 46 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)12}$ y $P_{(6)27}$ a los ítems 15, 16, y 17 del cuestionario diagnóstico.

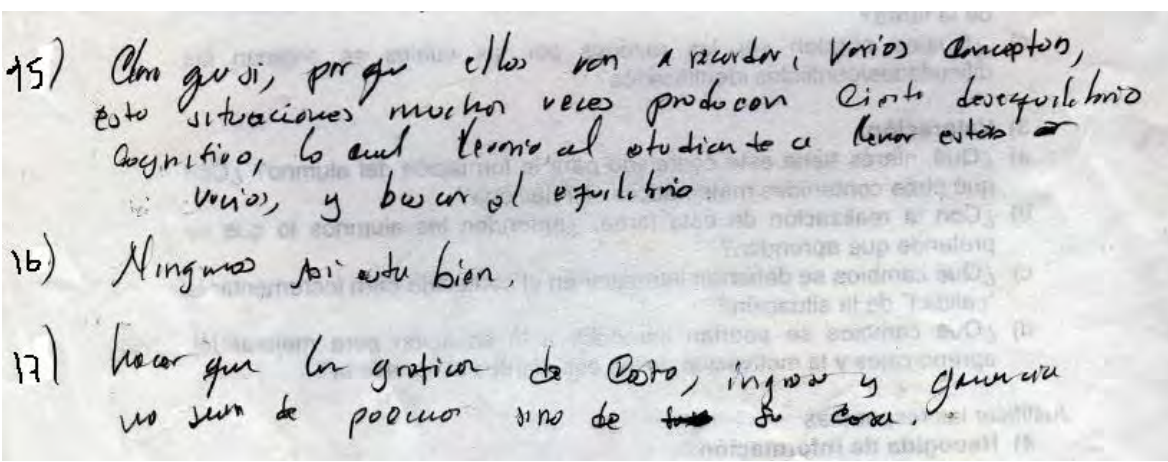


15) puede que si logre aprender lo que se propone, pero tambien hay que mirarlo de diferentes punto de vista, ya que puede suc en caso de que el alumno no conoce muy bien el tema.

16) algo que se debe añadir es ejemplos relacionado con la situacion y apartir de alli comezar a realizar el ejercicio como tal

17) un cambio seria añadir contraejemplos y tener una explicación detallada, tener en cuenta los aspectos fundamentales que me lleva a realizar la situación de una mejor forma.

Figura 45. Respuesta dada por $P_{(3)12}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.



15) Claro que si, porque ellos van a recordar, varios conceptos, esto situaciones muchas veces producen cierto desequilibrio cognitivo, lo cual lleva al estudiante a tener estos varios, y buscar el equilibrio

16) Ninguno asi esta bien.

17) hacer que las graficas de costo, ingreso y ganancia no sean de pocas sino de su casa.

Figura 46. Respuesta dada por $P_{(6)27}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

4.1.3.2.1.1.9 Cambios que se podrían introducir a la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla

En este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación propusieran cambios estructurales a la situación, que llevaran a comprometer a los estudiantes en la solución de la situación y de paso a mejorar sus aprendizajes. En cuanto a los cambios que se podrían introducir a la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla, los profesores en formación, los *propusieron* de tres tipos: 1) **ningún cambio** (0, 2), (e.g., "*creo que todo está bien en la situación para su solución*"; "*no encuentro ninguno, es una actividad que me gusta*").

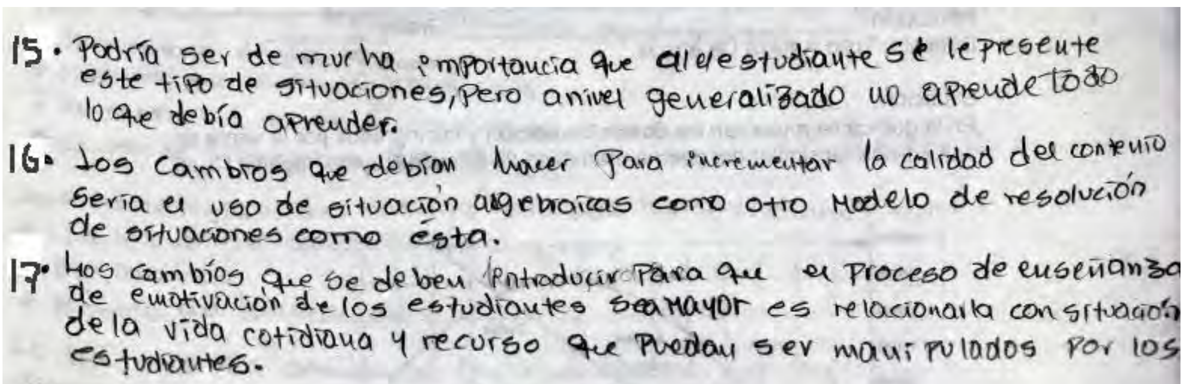
2) **Dar mayor protagonismo al estudiante** (3, 5), e.g., $P_{(6)10}$: "*Dibujar a color, involucrar situaciones que tengan que ver con el quehacer diario, o experiancial de la vida diaria* ". Otras proposiciones que hicieron son las siguientes: "*Incluir al estudiante como protagonista de la situación pero en menor escala"; "enseñar a los estudiantes a cómo enfrentar este tipo de situación"; colocar cosas que tengan que ver con el quehacer diario o experiencial del estudiante"; "utilizar software donde puedan graficar y ver los cambios y así tener mayor protagonismo el estudiante"; "pedirle al estudiante que trate de crear o construir una tabla de datos para que analice lo que pasa, para que se motive más".*

3) **Modificar didácticamente la situación** (16, 10), (e.g., $P_{(6)27}$: "*Hacer que la gráfica de costo, ingreso y ganancia no sean de economía sino de sus casas*"; $P_{(6)15}$: "*Para motivar al estudiante es necesario que no sea tan extensa la situación, pues el estudiante tiende a aburrirse, además sería bueno pedirle al estudiante que trate de crear o construir una tabla donde tabule los datos y analice lo que pasa es decir, pedirle al estudiante que construya y desarrolle, eso lo motiva más*"; $P_{(3)13}$: "*Se introdujera más explicación en cuanto a las gráficas"; $P_{(3)15}$: "Debería el docente de buscar métodos didácticos y hacer las situaciones de forma real que le permita al estudiante desenvolverse en esta situación, es decir, que el docente los coloque a crear un negocio y calculen a ver las ganancias, los costos ingresos, etc"; $P_{(3)2}$: "Los cambios que se deben introducir para que el proceso de enseñanza de motivación de los estudiantes sea mayor es relacionarla con situaciones de la vida cotidiana y recursos que puedan ser manipulados por los estudiantes"; "mostrar más figuras que sean*

del agrado a la vista del estudiante; trabajar con materiales del medio”; $P_{(3)12}$: *“un cambio sería añadir contraejemplos y tener una explicación detallada”; “introducir aclaraciones de los conceptos básicos a utilizar”.*

En este ítems los *elementos lingüísticos* utilizado fueron en su totalidad verbales, tal y como se esperaba. Y los *conceptos/definiciones* los *procedimientos* y *argumentos* utilizados fueron pocos.

En las figuras 47 y 48 se muestran las respuestas dadas por $P_{(3)2}$ y $P_{(6)10}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

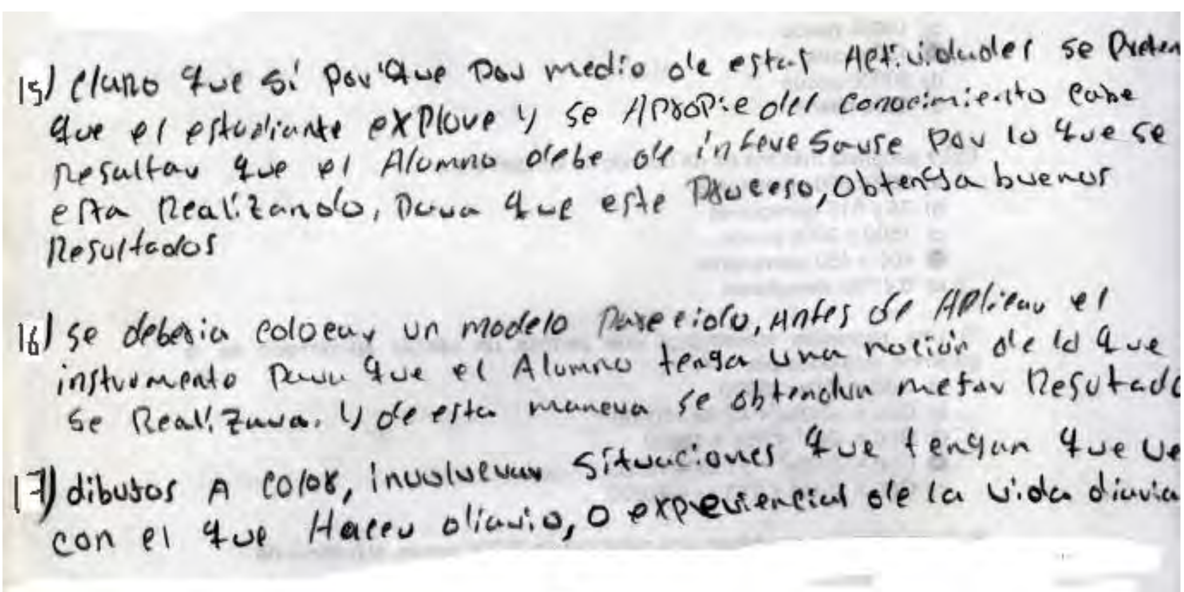


15. Podría ser de mucha importancia que al estudiante se le presente este tipo de situaciones, pero a nivel generalizado no aprende todo lo que debía aprender.

16. Los cambios que debían hacer para incrementar la calidad del contenido sería el uso de situación algebraicas como otro modelo de resolución de situaciones como ésta.

17. Los cambios que se deben introducir para que el proceso de enseñanza de emotivación de los estudiantes sea mayor es relacionarla con situación de la vida cotidiana y recurso que puedan ser manipulados por los estudiantes.

Figura 47. Respuesta dada por $P_{(3)2}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.



15) claro que sí porque por medio de estas actividades se pueden que el estudiante explore y se apropie del conocimiento cabe resultar que el alumno debe de interesarse por lo que se esta realizando, para que este proceso, obtenga buenos resultados

16) se debería colocar un modelo previo, antes de aplicar el instrumento para que el alumno tenga una noción de lo que se realizara. y de esta manera se obtendrán mejores resultados

17) dibujos a color, involucrar situaciones que tengan que ver con el que hacer diario, o experiencias de la vida diaria

Figura 48. Respuesta dada por $P_{(6)10}$ a los ítems 15, 16 y 17 del cuestionario diagnóstico.

El estado de la dimensión didáctica del CDM en los futuros profesores de matemáticas, al analizar el cuestionario utilizado como prueba diagnóstica, es muy similar en los dos grupos. Sin embargo algunos casos aislados, como $P_{(6)21}$ utilizan elementos lingüísticos (demás algebraicos, combinados con números naturales) diferentes a los usados por los demás. Un grupo significativo de profesores en formación (10, 24) identificaron algunas de las posibles estrategias utilizadas por los estudiantes de la básica al resolver las cuestiones por las que se les indagó en el cuestionario aplicado, (19, 21) propuso algunos de los aspectos que se pueden pretender enseñar en el desarrollo de esta actividad, (11, 20) identificaron algunas posibles dificultades/conflictos de aprendizaje que podrían manifestar los estudiantes de la básica al resolver la situación, (13, 12) dan su opinión en relación a si con la realización de esta tarea, los alumnos de la básica aprenden lo que se pretende que aprendan, (25, 24) proponen algún tipo de Cambios en el contenido que les permita mejorar la calidad de la situación, y (28, 26) proponen algunos cambios en la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla.

4.2 EVALUACIÓN DE LA FACETA EPISTÉMICA, DEL PROCESO FORMATIVO DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

En esta etapa se observaron, discutieron y prepararon clases, se analizaban posibles dificultades con la solución de las tareas que se planeaban para proponer a los estudiantes de la media académica, se discutían posibles alternativas para minimizar las dificultades que se encontraran. Luego de preparar las clases se simulaban ante sus compañeros de carrera y luego se desarrollaba la clase ante estudiantes de la media académica: esta clase era vista por otros compañeros con los que se discutía, en un momento posterior a la clase. Así mismo, se realizaba un seguimiento al acto evaluativo y a lo que hacen con los resultados de la evaluación. Con los resultados del análisis de las producciones de los estudiantes de la media académica, por grupos, elaboraban productos para ser presentados en eventos, tanto nacionales como internacionales y al regresar de los eventos se socializaban los trabajos ante estudiantes de todos los semestres y profesores del programa. Aquí por motivos de espacio y tiempo se presentará solo una muestra de los resultados obtenidos en esta parte del trabajo.

4.2.1 Análisis de un cuestionario

4.2.1.1 La Muestra

Luego de la implementación del cuestionario diagnóstico se les propuso, a finales del primer semestre del año 2014, a los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas que se ofrece en la Universidad de Sucre, Colombia (27 del cuarto y 28 del séptimo semestre) el análisis de un cuestionario, el mismo que se había utilizado previamente en el proceso diagnóstico. En el cuarto semestre a los estudiantes del programa Licenciatura en matemáticas que ofrece la Universidad de Sucre se les ofrecen las asignaturas: Cálculo III, Teoría de conjuntos, Didáctica de las matemáticas II, Práctica pedagógica investigativa III y Teorías del aprendizaje.

Luego de solucionar y discutir en equipos las soluciones dadas por cada uno al cuestionario, se les propuso a los profesores en formación del cuarto y del séptimo semestre (01-2014) hacer un análisis al cuestionario diagnóstico. Se les pidió organizarse libremente en equipos de, entre tres a cinco compañeros; quedando conformados ocho equipos en cada grupo. Atendiendo el enunciado de la situación utilizada en el proceso diagnóstico se plantearon diecisiete ítems/tareas, que se plasmaron en el Cuadro 1, y a cada equipo se le pidió elaborar un informe respondiendo a las cuestiones planteadas en este Cuadro, para lo cual se les entregó el cuestionario diagnóstico acompañado de la guía de análisis con las consignas que se muestran en el Cuadro 1. Luego en una sesión de dos horas, para cada grupo, se hizo la discusión, donde cada equipo exponía sus respuestas y los demás hacían sus aportes o criticaban las respuestas de sus compañeros. La guía de análisis está compuesta por cuatro partes: ***descripción, explicación, valoración y recogida de información***. A continuación se presentan las soluciones propuestas por cada equipo al cuestionario, utilizando la guía de análisis del Cuadro 1.

Cuadro 1. Guía para el análisis del cuestionario diagnóstico.

1) **Descripción:**
a) ¿Qué contenido matemático se estudia en esta situación?
b) ¿Qué noción o aspecto de ese contenido/tema se evoca en cada ítem?

c) ¿Qué conocimientos previos deben movilizar los estudiantes para poder resolver la situación?
d) ¿Qué estrategia crees que van a utilizar los estudiantes para resolver la situación?
e) ¿Qué crees que se pretenda que aprendan los alumnos con la realización de esta tarea?
f) ¿Cuál es el nivel educativo donde se debería aplicar esta situación?
g) ¿Qué recursos crees que utilizan al resolver la situación?
h) ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan con la solución de esta situación?

2) Explicación:

a) ¿Por qué se estudia ese contenido en ese nivel educativo?
b) ¿Cómo se podría logra mayor implicación del estudiante en la solución de la tarea?
c) ¿Cuáles pueden ser las razones por las cuales se originan en los estudiantes las dificultades/conflictos identificados al resolver esta tarea?

3) Valoración:

a) ¿Qué interés tiene este contenido para la formación del alumno? ¿Con qué otros contenidos matemáticos se relaciona?
b) Con la realización de esta tarea, ¿aprenden los alumnos lo que se pretende que aprendan?
c) ¿Qué cambios se deberían introducir en el contenido para incrementar la “calidad” de la situación?
d) ¿Qué cambios se podrían introducir a la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla?

4) Recogida de información:

a) ¿Cuál sería la mejor forma de aplicar esta situación que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la recolección de la información?

b) ¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos debería tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la situación?

Fuente: Godino, (2013b) adaptado por el autor de esta tesis.

En la presentación de los resultados, para cada ítem/tarea se representa un grupo con el símbolo $G_{(j)i}$ donde j = 4 o 7 dependiendo si los estudiantes son del cuarto o del séptimo semestre y “*i*” (entre 1 y 8 del cuarto o del séptimo semestre 01-2014) representa el número asignado a un grupo de profesores en formación que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem/tarea.

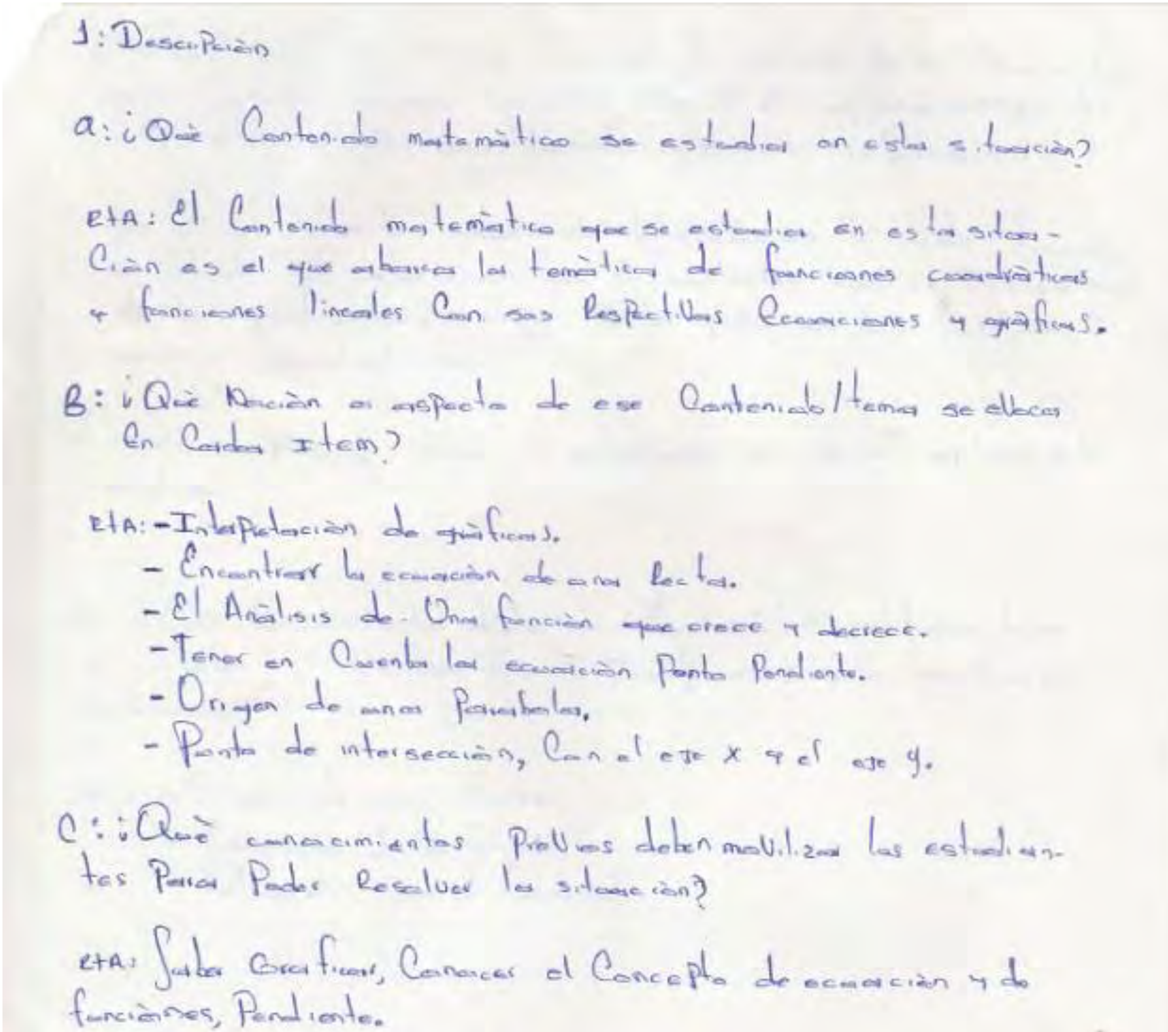
4.2.1.2 Descripción

La situación por la que se pregunta en las consignas del Cuadro 1 es la planteada en el cuestionario diagnóstico. A continuación se presenta el análisis de las respuestas dadas por los miembros de cada equipo a cada una de las consignas del Cuadro 1.

4.2.1.2.1 Contenido matemático estudiado en la situación

En el análisis grupal la totalidad (8, 8)) de los grupos identificaran los contenidos involucrados en la situación. En el análisis de esta tarea el conocimiento común del contenido, de los profesores en formación, los debería llevar a identificar los contenidos involucrados en cualquier situación que se les planteara ya que según Godino (2009) el análisis de la idoneidad epistémica requiere que el futuro profesor conozca los objetos matemáticos propuestos para la enseñanza de un cierto tema, y sea capaz de reconocer su presencia o ausencia en el proceso de estudio propuesto, así como su uso adecuado, y según Aké (2013, p.194) "el conocimiento de tales objetos le permite establecer buenas conexiones entre sus razonamientos y los conocimientos intrínsecos de las tareas que el profesor debiera ser capaz de identificar". Esto parece explicar que en el análisis individual del instrumento (22, 25) de los profesores en formación identificaran algunos contenidos involucrados en la situación. Mientras que en las discusiones en los grupos focales, manifestaron recordar estos contenido cuando se los dieron en la básica, la media académica o en alguna práctica durante la carrera, pero parecen no relacionarlos con los contenidos disciplinares abordados en profundidad en las asignaturas del programa, esto parece ser un obstáculo epistémico en el sentido de Font (2011), ya que función es un tema que debieron ver en el desarrollo del programa, pero lo que no parecen reconocer es la representación gráfica, en la que se les presentó la tarea, como una representación de una función (Ruiz, 1994).

En las Figura 49 y 50 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(4)5}$, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario.



1: Descripción

a: ¿Qué Contenido matemático se estudia en esta situación?

RtA: El Contenido matemático que se estudia en esta situa-
Ción es el que abarca la temática de funciones cuadráticas
y funciones lineales Con sus Respectivas Ecuaciones y gráficas.

B: ¿Qué Noción o aspecto de ese Contenido/tema se aborda
En Cada Item?

RtA: -Interpretación de gráficas.
- Encontrar la ecuación de una Recta.
- El Análisis de Una función que crece y decrece.
- Tener en Cuenta la ecuación Punto Pendiente.
- Origen de unas Parabolas.
- Punto de intersección, Con el eje x y el eje y.

C: ¿Qué conocimientos Previos deben movilizar las estudian-
tes Para Poder Resolver la situación?

RtA: Saber Graficar, Conocer el Concepto de ecuación y de
funciónes, Pendiente.

Figura 49. Respuesta dada por el $G_{(4)5}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción (a-c) de la guía de análisis.

¿Qué estrategias crees que van a utilizar los estudiantes para poder resolver la situación?

Rta: Recurriran en 1ra instancia al análisis de las gráficas, a la sustitución de los valores de x para hallar las ganancias que corresponden a f(x), y por último la aplicación de los conceptos previos de funciones.

e: ¿Qué crees que se pretendan que aprendan los alumnos con estas tareas?

Rta: Se pretende que a partir del uso de funciones y gráficas desarrollen la capacidad de solucionar problemas de situaciones que se presenten en su entorno.

f: ¿Cuál es el nivel educativo donde se deberían aplicar estas situación?

Rta En el nivel Básico: En grados como: 9-10-11.

G: ¿Qué recursos crees que utilizan?

Rta: el conocimiento, calculadora, regla, y demás herramientas que ayudan para el desarrollo de la situación.

Figura 50. Respuesta dada por el $G_{(4)5}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción (d-g) de la guía de análisis.

En cada una de estas soluciones los profesores en formación usan *elementos lingüísticos* en su totalidad verbales, como se muestran a continuación. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones y algunas nociones relacionadas con éstas como función lineal, función cuadrática, ecuaciones, Rango, dominio, codominio, pendiente, punto de corte, gráficas, derivadas, y relaciones. (e.g., $G_{(4)5}$: "*abarca la temática de funciones cuadráticas, funciones lineales, con sus respectivas ecuaciones y gráficas";* $G_{(7)3}$: "*Se estudia es lo referente a funciones, en especial, la función lineal y la función cuadrática y sistemas que se relacionan a los mismos (Rango, dominio, pendiente, punto de corte y ecuaciones)";* $G_{(4)8}$: "*función cuadrática, función lineal, derivada y regresión lineal";* $G_{(7)2}$:

"*funciones, ecuaciones, representación gráfica*"; $G_{(4)1}$: "*funciones (lineal-cuadrática) y gráfica de funciones";* $G_{(7)4}$: "*funciones, gráficas de funciones, dominio, rango y codominio*"; $G_{(4)7}$: "*análisis e interpretación de gráficas*". En cuanto a los *argumentos* utilizados, aunque se esperaban pocos, algunos como $G_{(7)3}$, los dan a su manera (e.g., $G_{(7)3}$: "*Llegamos a la conclusión que se trata de funciones por la dependencia existente entre variables, en este caso los ingresos y costos dependen del número de ejemplares.")*.

En cuanto a las *proposiciones/propiedades* se evidencian en $G_{(7)3}$ al manifestar que "*Se estudia es lo referente a funciones, en especial, la función lineal y la función cuadrática y sistemas que se relacionan a los mismos (Rango, dominio, pendiente, punto de corte y ecuaciones)"* y en cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizados parecen ser meramente visuales.

4.2.1.2.2 Noción o aspecto del contenido/tema evocado en cada ítem

En el análisis grupal (6, 4) de los grupos mencionan en su mayoría las nociones o aspectos que se abordan en cada ítem. En la respuesta del grupo $G_{(7)3}$ se puede apreciar una de las mejores aproximaciones a lo que se les pedía. En las soluciones dadas por los demás grupos puede apreciarse que son poco concretas y no las discriminar por ítem. Esto indica es que a la hora de construir un cuestionario se hacen la preguntas sin privilegiar, conscientemente la noción o contenido que se desea privilegiar en cada ítem. Se terminarían haciendo preguntas, que podrían ser del contenido, pero sin direccionamiento ni intencionalidad previa, sin tener en cuenta el grado de complejidad de cada ítem, a la hora de organizar las preguntas.

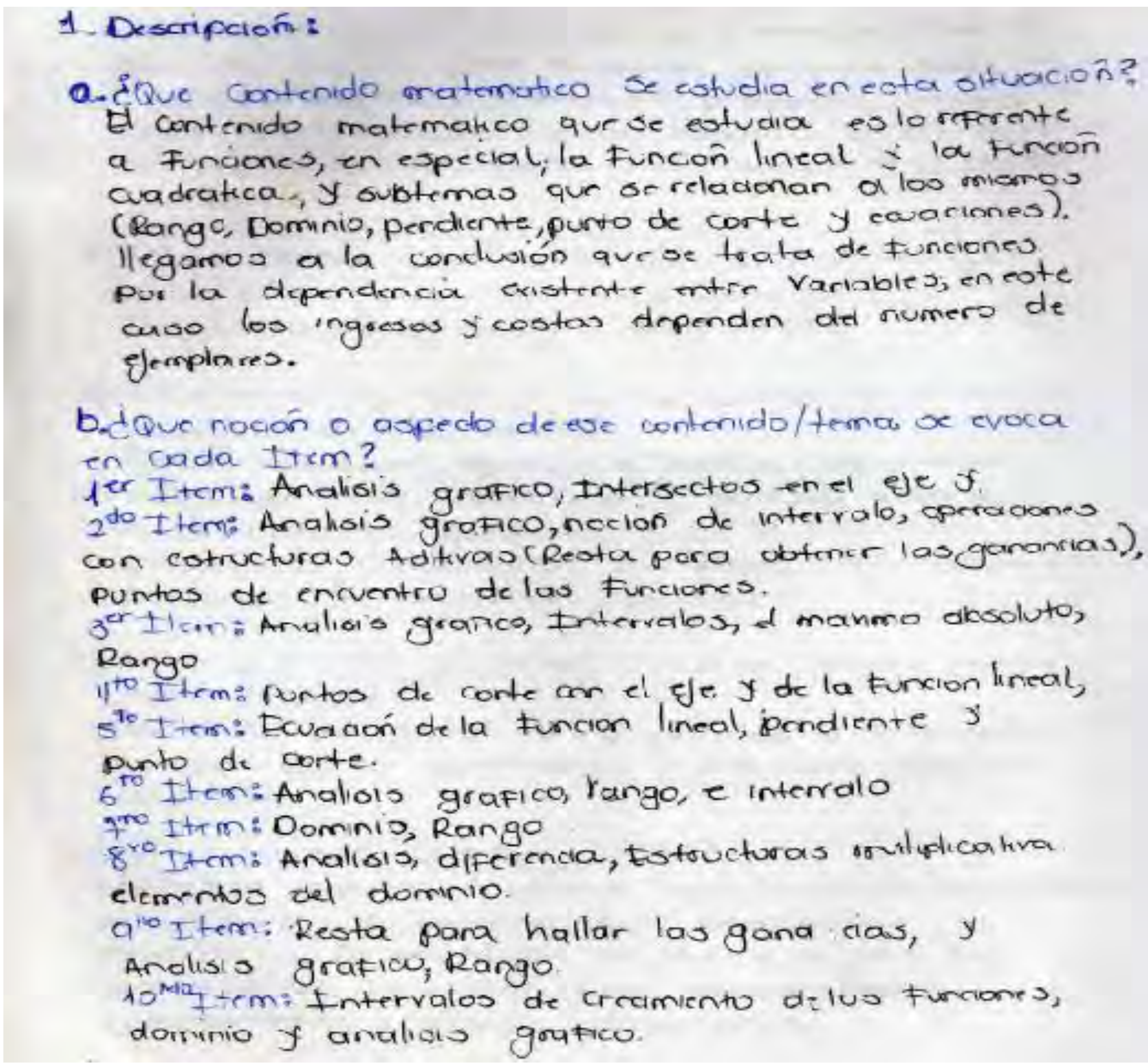
En el desarrollo de los grupos focales, al calor de las discusiones fueron apareciendo elementos, hasta identificar la noción a que hace referencia cada ítem. En el primer ítem del cuestionario diagnóstico por ejemplo decían que el tópico estudiado era "puntos de corte de una gráfica", queriendo decir interceptos al origen o puntos de corte con los ejes coordenados. En el segundo ítem se pedía encontrar los valores entre los que se debe mantener la oferta para obtener Ganancias; para ellos en este ítem se está haciendo alusión a las Ganancias, porque es la noción que se nombra explícitamente y no aparece por ninguna parte la palabra intervalo. En el sexto ítem se pedía hallar el número de ejemplares que se debió producir y vender si se sabe que se obtuvo una Ganancias de 20000 pesos, pero como no se menciona el concepto de ecuación en ninguna parte, entonces según los que mejor lo concibieron, en este ítem se indaga sobre la ganancia. Aquí la dificultad estuvo en identificar el concepto de ecuación, sin embargo al resolver el cuestionario este concepto lo habían utilizado adecuadamente (14, 21) profesores en formación, lo que evidencia que la dificultad está más en el conocimiento matemático didáctico o para enseñar, que con el conocimiento común del contenido, ya que cuando se pretende enseñar un determinado contenido se desvelan dificultades que presentan los profesores cuando se enfrentan a ítems que requieren para su resolución, conocimientos distintos al conocimiento común del contenido (Pino-Fan y Assis, 2015).

Aquí se hizo evidente uno de los conflictos epistémicos encontrados con el concepto de función (Font, 2011), ya que los profesores en formación parecen no reconocer en contexto los elementos de una función, razón que les pudo dificultar discriminar los contenidos que se abordan en cada ítem. Aquí parece aflorar nuevamente una dificultad con el conocimiento de la dimensión matemática, ya que según Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) para que una persona pueda distinguir un objeto matemático en un contexto determinado, ese objeto tiene que estar claro en su cabeza, es decir, lo que se ve en un contexto determinado, va a depender esencialmente de lo que se tiene claro de ese concepto y según Godino, Batanero y Font (2003, p.66) si una persona "sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido". Y según la clasificación hecha por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) se trata de un *conflicto epistémico general* ya que refiere a un proceso matemático como lo es la interpretación que parece no ser específico de la clase de problemas de la que emerge este objeto matemático.

Los profesores en formación reconocieron no tener claro qué es una función y no poder reconocer en un contexto como este, elementos de ésta como su dominio y su rango, y que esto podía estar causando su dificultad para resolver problemas que involucren funciones. Esta descoordinación entre las representaciones semióticas de la función, puede ser un indicador de que esta noción no ha sido adquirida plenamente como concepto matemático

(Hitt, 2000) y aunque la construcción de un concepto es dinámica y ellos al momento de desarrollar esta actividad todavía le quedaban cuatro y dos semestres en la carrera respectivamente, que podían ser suficientes para que conceptos como el de función y otros de similar importancia fueran comprendidos y utilizados por los profesores en formación. Sin embargo puede asegurarse que el desempeño mostrado hasta el momento de desarrollar de esta actividad, para un alto porcentaje de los profesores en formación de ambos grupos, es bajo.

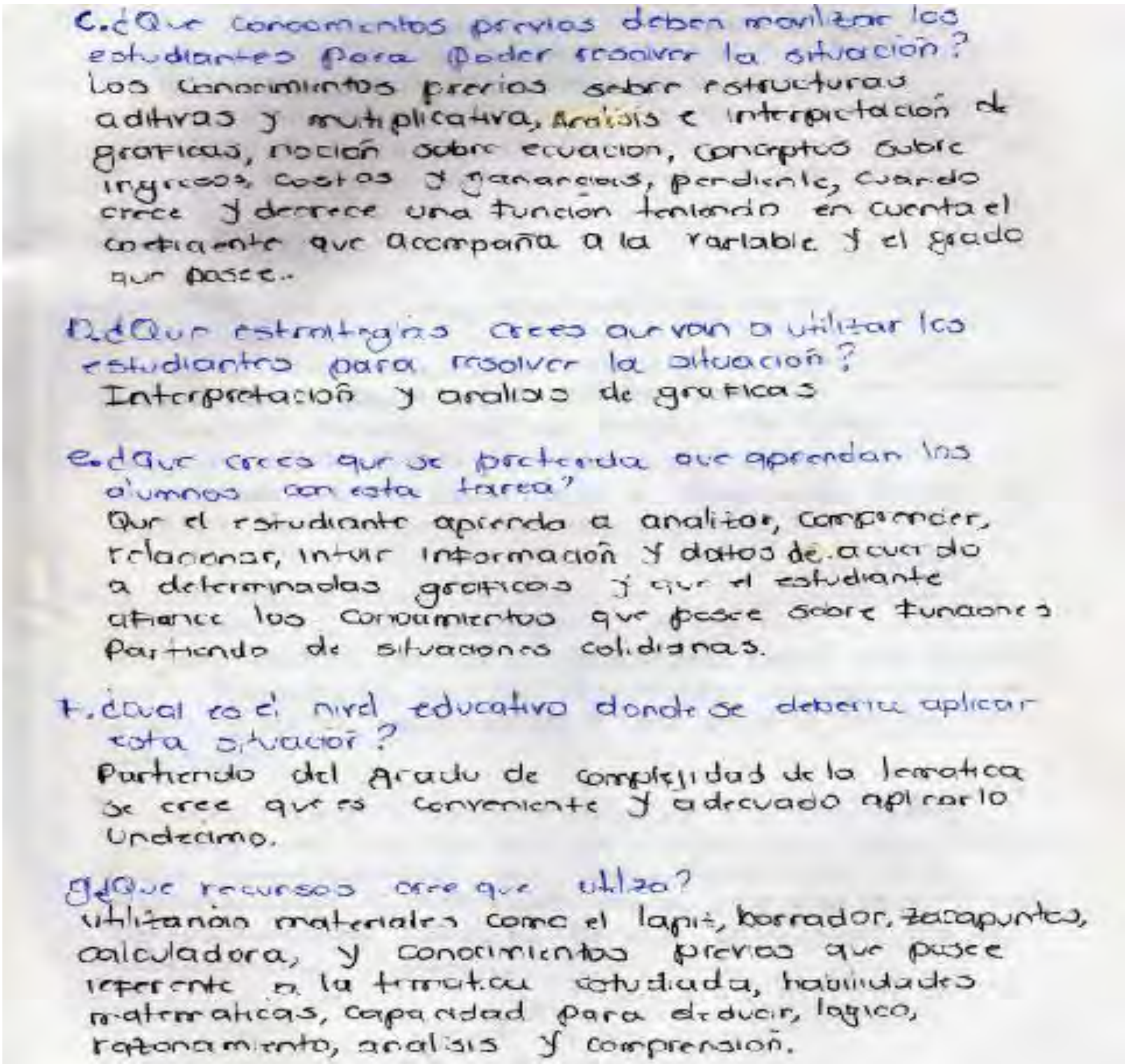
En las Figuras 51 y 52 se muestran las respuestas de los profesores en formación del grupo G_3, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.


1. Descripción:

a. ¿Que Contenido matematico se estudia en esta situación?
El contenido matematico que se estudia es lo referente a Funciones, en especial, la Función lineal y la función cuadratica, y subtemas que se relacionan a los mismos (Rango, Dominio, pendiente, punto de corte y ecuaciones). llegamos a la conclusión que se trata de funciones por la dependencia existente entre Variables, en este caso los ingresos y costos dependen del numero de ejemplares.

b. ¿Que noción o aspecto de ese contenido/tema se evoca en cada Item?
1er Item: Analisis grafico, Interseccion en el eje y.
2do Item: Analisis grafico, noción de intervalo, operaciones con estructuras Aditivas (Resta para obtener las ganancias), puntos de encuentro de las Funciones.
3er Item: Analisis grafico, Intervalos, el maximo absoluto, Rango
4to Item: Puntos de corte con el eje y de la funcion lineal,
5to Item: Ecuación de la funcion lineal, pendiente y punto de corte.
6to Item: Analisis grafico, rango, e intervalo
7mo Item: Dominio, Rango
8vo Item: Analisis, diferencia, Estructuras multiplicativa elementos del dominio.
9no Item: Resta para hallar las ganancias, y Analisis grafico, Rango.
10mo Item: Intervalos de crecimiento de las funciones, dominio y analisis grafico.

Figura 51. Respuesta dada por el $G_{(7)3}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción (a-b) de la guía de análisis.



c. ¿Que conocimientos previos deben movilizar los estudiantes para poder resolver la situación?
Los conocimientos previos sobre estructuras aditivas y multiplicativa, Análisis e interpretación de graficas, noción sobre ecuacion, conceptos sobre ingresos, costos y ganancias, pendiente, cuando crece y decrece una funcion teniendo en cuenta el coeficiente que acompaña a la variable y el grado que posee..

D. ¿Que estrategias crees que van a utilizar los estudiantes para resolver la situación?
Interpretación y analisis de graficas

e. ¿Que crees que se pretenda que aprendan los alumnos con esta tarea?
Que el estudiante aprenda a analizar, comprender, relacionar, intuir información y datos de acuerdo a determinadas graficas y que el estudiante afiance los conocimientos que posee sobre funciones partiendo de situaciones cotidianas.

f. ¿cual es el nivel educativo donde se deberia aplicar esta situación?
Partiendo del grado de complejidad de la tematica se cree que es conveniente y adecuado aplicarlo Undecimo.

g. ¿Que recursos cree que utiliza?
utilizando materiales como el lapiz, borrador, zacapuntas, calculadora, y conocimientos previos que posee referente a la tematica estudiada, habilidades matematicas, capacidad para deducir, logico, razonamiento, analisis y comprension.

Figura 52. Respuesta dada por el $G_{(7)3}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción (c-g) de la guía de análisis.

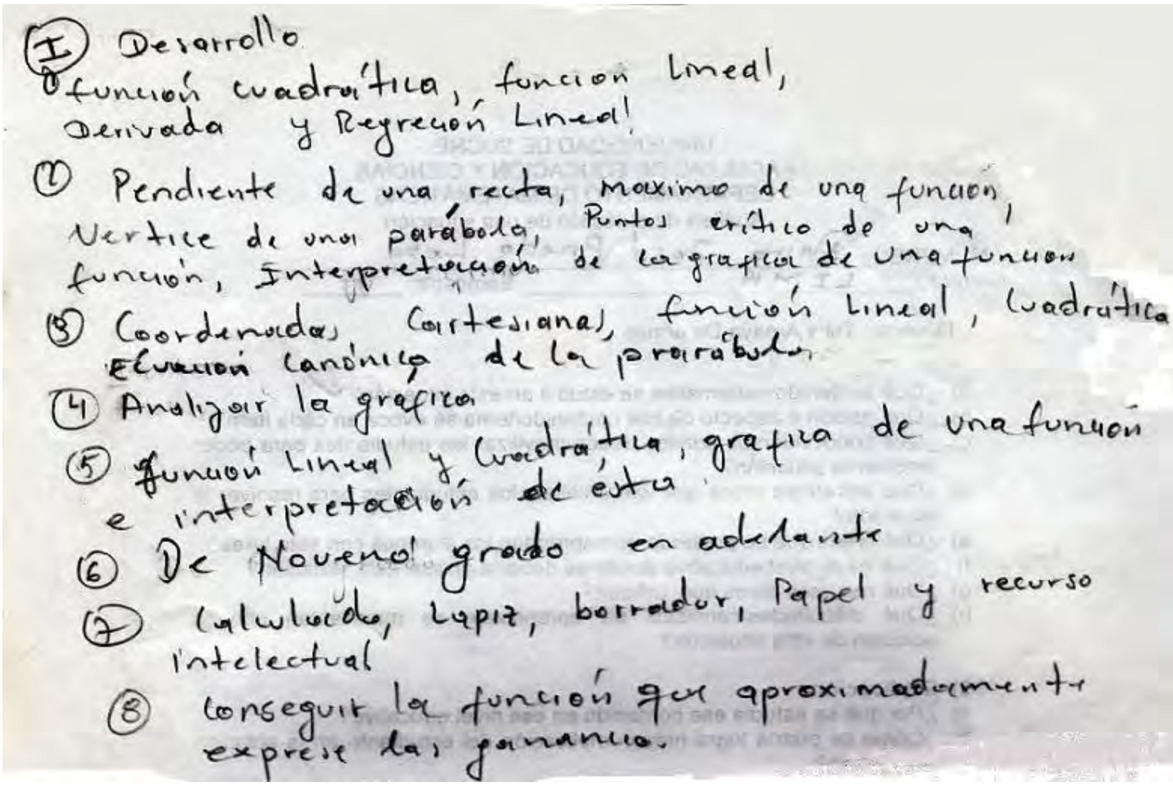
En cada una de sus soluciones los profesores en formación de cada grupo usan *elementos lingüísticos* en su totalidad verbales, como se muestran a continuación. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están: ecuación de una recta, pendiente de una recta, origen de una parábola, puntos críticos de una función, gráficas de una función, crecimiento y decrecimiento de una función, máximos y mínimos y variables. Y *proponen* como tópicos por ítems los siguientes: (e.g., $G_{(7)3}$: "*los conocimientos previos sobre estructuras aditivas y multiplicativas, análisis e interpretación de gráficas, noción sobre función, conceptos sobre ingresos costos y ganancias, pendiente, cuando crece y decrece una función, teniendo en cuenta el coeficiente que acompaña la variable y el grado que posee*"; $G_{(4)5}$: *"-interpretación* *de gráficas, -encontrar la ecuación de una resta, -el análisis de una función que crece y decrece, -Tener en cuenta la ecuación punto pendiente, -Origen de una parábola, -Punto de intercepción con el eje X y el aje Y*"; $G_{(4)8}$: "*pendiente de una recta, máximo de una función, vértice de una parábola, puntos críticos de una función, interpretación de la gráfica de una función*"; $G_{(7)4}$: "*la noción de dominio, rango, intervalo, función creciente y decreciente, puntos de cortes, máximos y mínimos*"; $G_{(7)2}$: "*expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones*"; $G_{(4)7}$: "*la noción que tiene son los presaberes que debe tener cada alumno para inter gráficas y resolver estos ejercicios de manera satisfactoria*"). En cuanto a los *argumentos* utilizados no son evidentes en el desarrollo de esta tarea. Y los *procedimientos/estrategias* utilizados parecen ser sólo visuales.

4.2.1.2.3 Conocimientos previos movilizados por los estudiantes para poder resolver la situación

En el análisis grupal todos (8, 8) los grupos hacen mención de algunos de estos conocimientos. En sus soluciones los miembros de cada grupo usan *elementos lingüísticos* totalmente verbales, como se muestran a continuación. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están: relaciones, funciones, ecuaciones, inecuaciones, pendiente, situaciones problema, coordenadas cartesianas, parábola, expresiones algebraicas, polinomios, factorización. Y *proponen* como conocimientos previas a utilizar los siguientes (e.g., $G_{(4)5}$: "*saber graficar, conocer el concepto de ecuaciones y de funciones, pendiente*; $G_{(4)8}$: "*coordenadas cartesianas, función lineal, cuadrática, ecuación canónica de la parábola*"; $G_{(7)2}$: "*los estudiantes deben manejar conocimientos previos tales como: plantear ecuaciones a partir de situaciones problema, realizar gráficas, identificar y saber analizar situaciones problemas…*"; $G_{(4)1}$: "*los conocimientos que deben poseer los estudiantes para resolver la situación son: expresiones algebraicas, tipos de funciones, funciones (definición), polinomios, factorización, ecuaciones, inecuaciones*"; $G_{(7)4}$: "*saber qué es una función, luego aprender a graficar pero primeramente para resolver la actividad se debe saber interpretar gráficas, para distinguir los intervalos donde crecen o decrecen las funciones, el dominio*"; $G_{(4)7}$: "*los estudiantes deben conocer el concepto de gráficas, para poder analizar e interpretar*". Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, aunque tenuemente, los utilizan al proponer los conocimientos previos que deben tener los estudiantes de la básica para resolver esta situación, como se evidencia en las respuestas de $G_{(7)4}$: "*saber qué es una función, luego aprender a graficar pero primeramente para resolver la actividad se debe saber interpretar gráficas, para distinguir los intervalos donde crecen o decrecen las funciones, el dominio*".

El análisis de estos requerimientos lo hacen desde diferentes puntos de vista, sobre todo atendiendo la forma como ellos mismo intentaron dar respuestas a las cuestiones planteadas en el cuestionario, por ejemplo: $G_{(7)2}$: "*los estudiantes deben manejar conocimientos previos tales como: plantear ecuaciones a partir de situaciones problema, realizar gráficas, identificar y saber analizar situaciones problemas…*". En la solución del $G_{(7)2}$ se evidencia que establecieron los requerimientos previos desde su propia forma de resolver la situación, ya que ellos tienen la tendencia a acudir al registro algebraico como primer registro auxiliar y desde este punto de vista plantearon los conocimientos previos que debían tener los estudiantes de la básica. Sin embargo el CDM mostrado por los profesores en formación con los que se trabajó, fue bajo en el desarrollo de este ítem.

En la Figura 53 se muestran las respuestas de los profesores en formación del grupo G_8, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



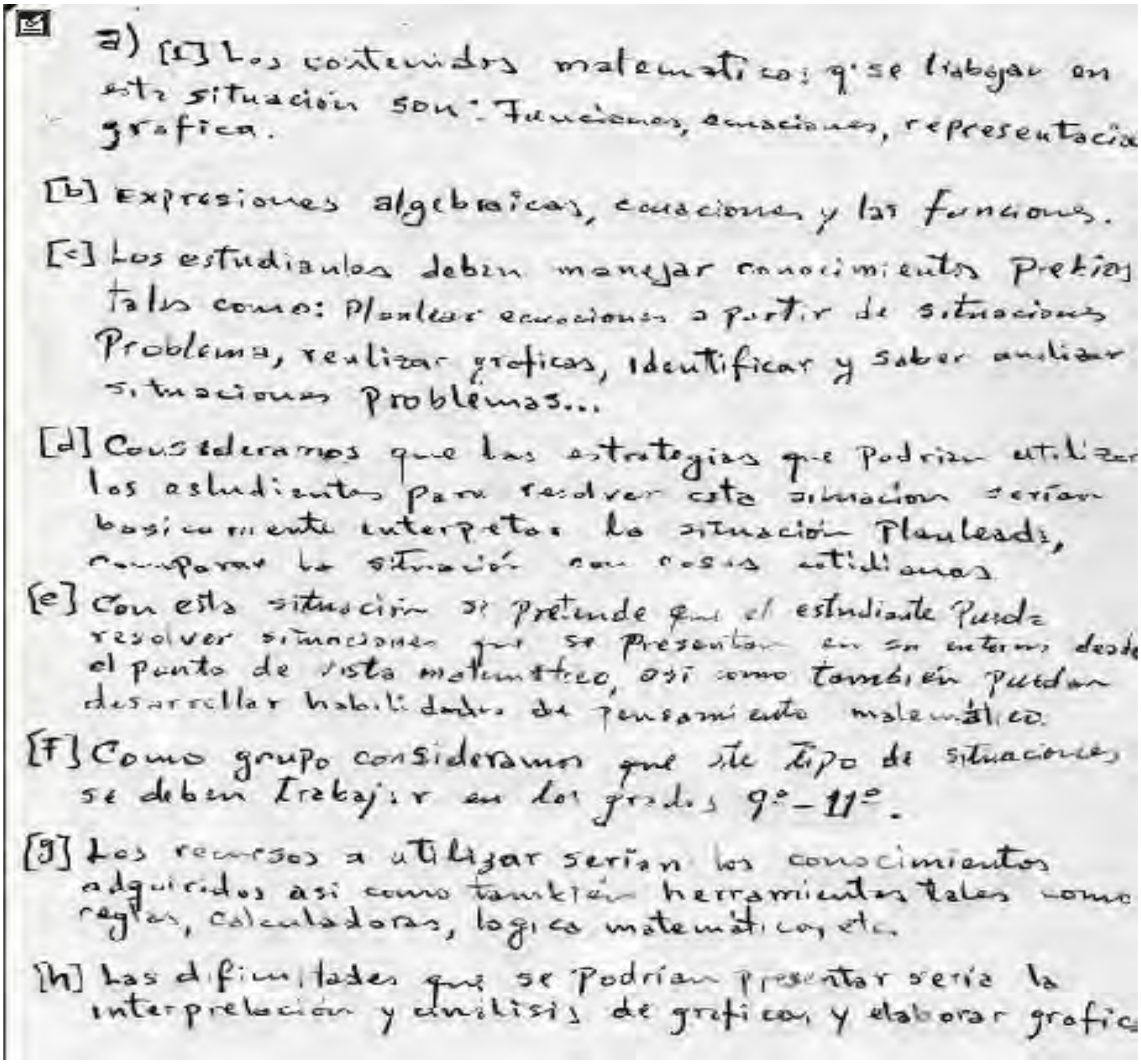
(I) Desarrollo
función cuadrática, funcion Lineal,
Derivada y Regreción Lineal
(2) Pendiente de una recta, maximo de una funcion,
Vertice de una parábola, Puntos crítico de una
función, Interpretación de la grafica de Una funcion
(3) Coordenadas Cartesianas, función Lineal, Cuadrática
Ecuacion canónica de la prarabola
(4) Analizar la grafica
(5) funcion Lineal y Cuadrática, grafica de una funcion
e interpretación de esta
(6) De Noveno grado en adelante
(7) Calculadora, Lapiz, borrador, Papel y recurso
intelectual
(8) conseguir la función que aproximadamente
exprese las ganancias.

Figura 53. Respuesta dada por el $G_{(4)8}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción de la guía de análisis.

4.2.1.2.4 Estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver la situación

En el análisis grupal, todos (8, 8) los grupos prevén algunas de las estrategias utilizadas por los estudiantes de la básica al resolver las cuestiones por las que se les indagó. En sus soluciones los profesores en formación usan *elementos lingüísticos* en su mayoría verbales, exceptuando a $G_{(4)5}$ quienes combinan elementos verbales con elementos numéricos y algebraicos (e.g., $G_{(4)5}$: "*recurrirán en 1ª instancia al análisis de la gráfica, en la sustitución de los valores de x para hallar las ganancias que corresponden a f(x), y por último la aplicación de los conceptos previos de funciones*"). Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones, gráficas de funciones, los ejes coordenados, proporcionalidad directa e inversa. Entre las proposiciones que hacen están: (e.g., $G_{(4)8}$: "*analizar la gráfica*"; $G_{(7)3}$: "*interpretación y análisis de gráficas*"; $G_{(4)5}$: "*recurrirán en 1ª instancia al análisis de la gráfica, en la sustitución de los valores de x para hallar las ganancias que corresponden a f(x), y por último la aplicación de los conceptos previos de funciones*"; $G_{(7)2}$: "*consideramos que las estrategias que podrían a utilizar los estudiantes para resolver esta situación serían básicamente interpretar la situación planteada,* *comparar la situación con cosas cotidianas*"; $G_{(4)1}$: "*la estrategia que utilizarían sería la interpretación y el análisis de gráficas*"; $G_{(7)4}$: "*comparar o relacionar los ejemplares, o sea el eje X y los pesos del eje Y, para observar la relación directamente proporcional e inversamente*"; $G_{(4)7}$: "*deducción, análisis matemático e interpretar situaciones problema*"). Son bien explicitas estas *proposiciones* en la solución dada por $G_{(7)4}$ se aprecian claramente la relación que se establece entre ejemplares y el eje de las X y de los pesos con el eje Y. Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, también son pocos pero en $G_{(7)4}$ también se aprecian cuando expresa, e.g., "*comparar o relacionar los ejemplares, o sea el eje X y los pesos del eje Y, para observar la relación directamente proporcional e inversamente*".

En la Figura 54 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(7)2}$, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.


a) [a] Los contenidos matematicos q' se trabajan en esta situación son: Funciones, ecuaciones, representación grafica.

[b] Expresiones algebraicas, ecuaciones y las funciones.

[c] Los estudiantes deben manejar conocimientos previos tales como: Plantear ecuaciones a partir de situaciones Problema, realizar graficas, identificar y saber analizar situaciones problemas...

[d] Consideramos que las estrategias que podrían utilizar los estudiantes para resolver esta situación serían basicamente interpretar la situación planteada, comparar la situación con cosas cotidianas.

[e] Con esta situación se pretende que el estudiante pueda resolver situaciones que se presentan en su entorno desde el punto de vista matemático, así como también puedan desarrollar habilidades de pensamiento matemático.

[f] Como grupo consideramos que este tipo de situaciones se deben trabajar en los grados 9°-11°.

[g] Los recursos a utilizar serían los conocimientos adquiridos así como también herramientas tales como reglas, calculadoras, logica matemática, etc.

[h] Las dificultades que se podrían presentar sería la interpretación y análisis de graficas y elaborar grafica

Figura 54. Respuesta dada por el $G_{(7)2}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción de la guía de análisis.

4.2.1.2.5 *Pretensión de aprendizajes en los alumnos con la realización de la tarea*

En el análisis grupal (7, 7) de los grupos pudo determinar algunos de los aspectos que se pueden pretender que los alumnos aprendan en el desarrollo de esta actividad. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su mayoría verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que destacaron están: funciones y sus gráficas, resolución de problemas, situaciones problema, variables, crecimiento, decrecimiento, rango y dominio de funciones.

Y *proponen* como posibles cuestiones que se pretende que aprendan los alumnos las que se muestran como ejemplos seguidamente: (e.g., $G_{(4)8}$: "*función lineal y cuadrática, gráfica de* *una función e interpretación de ésta*"; $G_{(7)3}$: "*que el estudiante aprenda a analizar, comprender, relacionar, intuir información y datos de acuerdo a determinadas gráficas y que el estudiante afiance los conocimientos que posee sobre funciones, partiendo de situaciones cotidianas*"; $G_{(4)5}$: "*se pretende que a partir del uso de funciones y gráficas desarrollen la capacidad sobre unos problemas de situaciones que se presenten el entorno*"; $G_{(7)2}$: "*pienso que este tipo de situaciones ayuda a los estudiantes a ser más competentes a la hora de interpretar gráficas*"; $G_{(4)1}$: "*primeramente que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo en relación a la temática tratada para lograr el manejo de situaciones complejas que se le presenten en grados superiores*"; $G_{(7)4}$: "*en primer lugar, relacionar las variables que se encuentran en una gráfica de funciones, seguidamente, distinguir el intervalo donde crece o decrece, finalmente el rango y el dominio de las funciones*"). Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. Los argumentos utilizados no son evidentes en el desarrollo de esta tarea.

En la Figura 55 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(4)1}$, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.

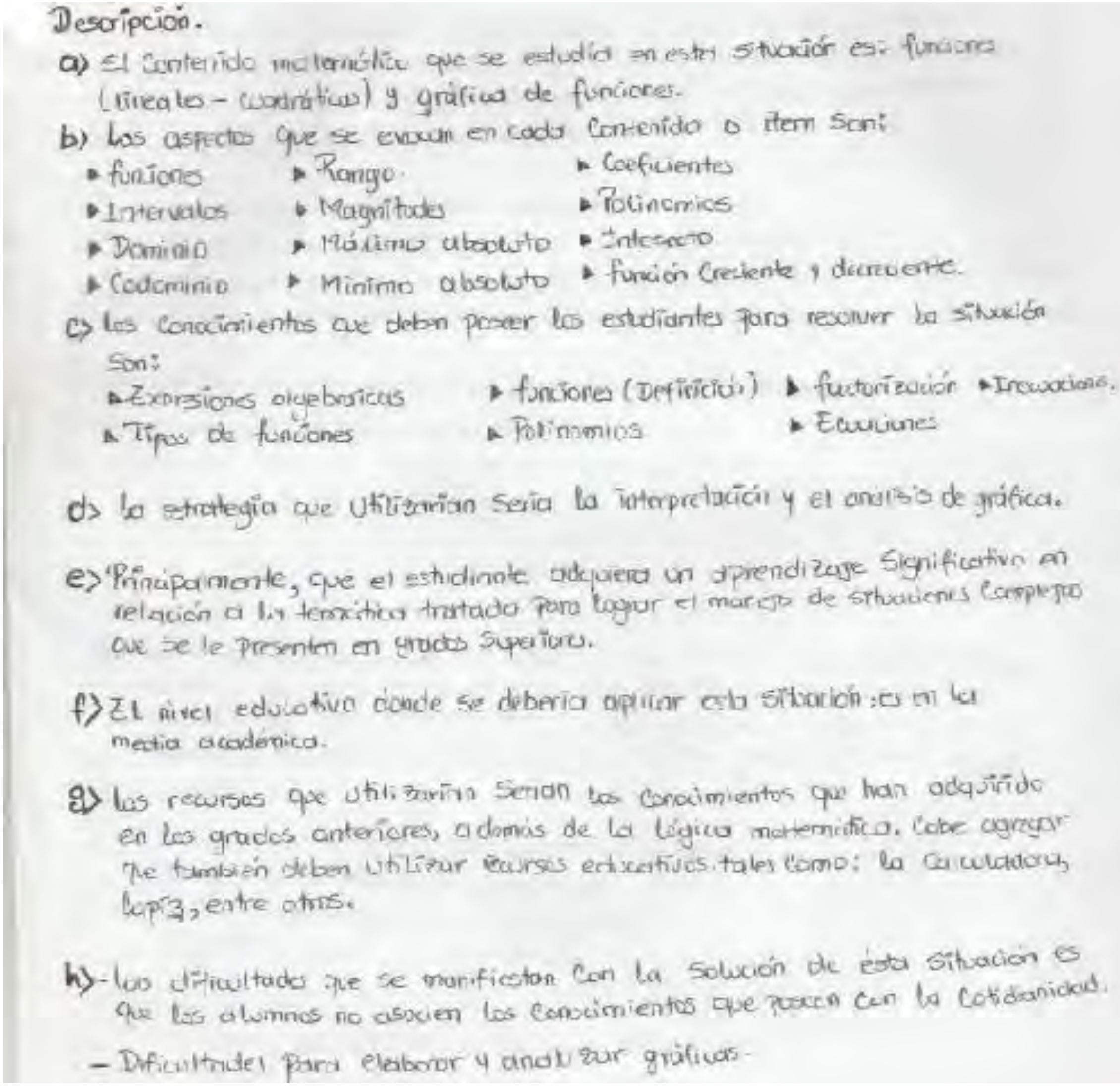
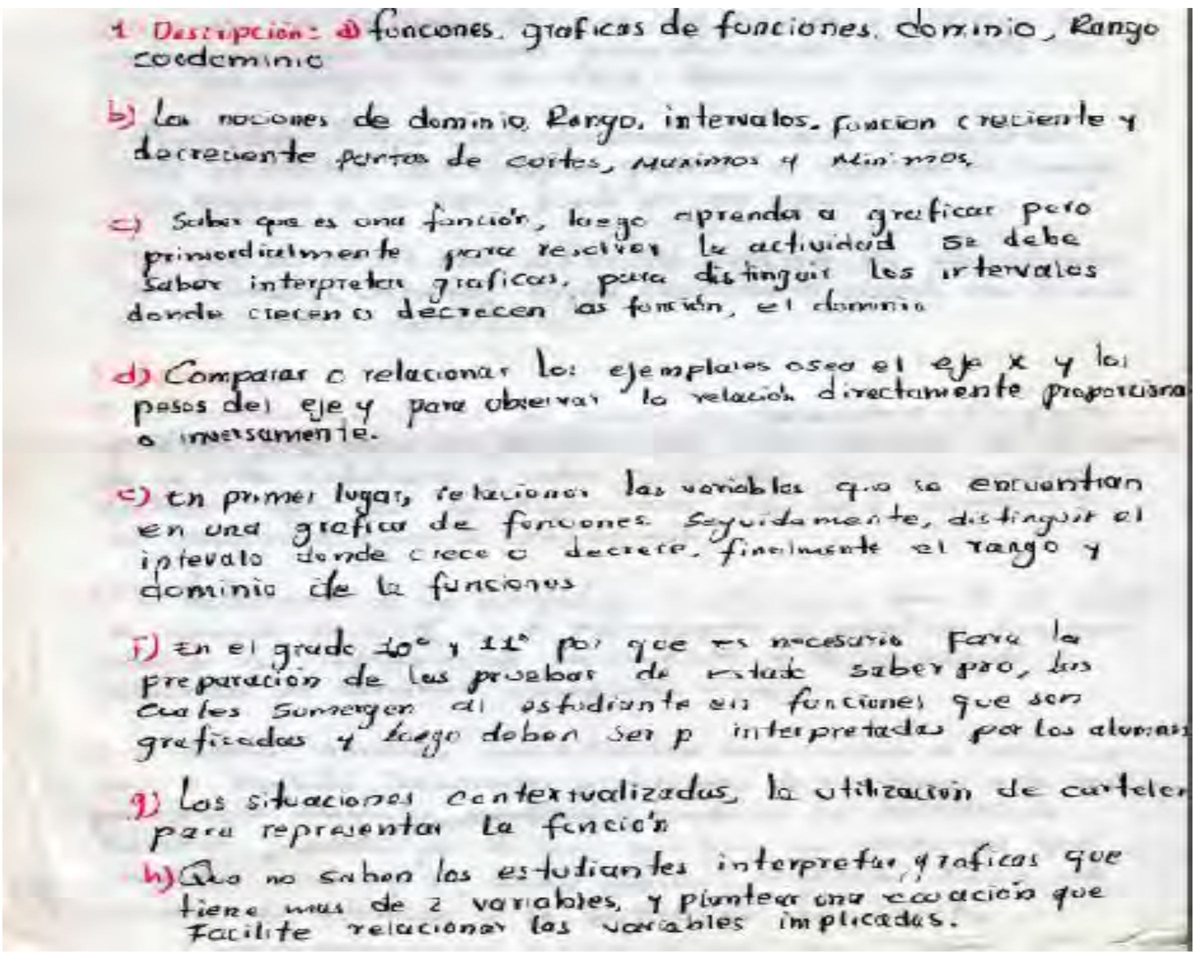

Descripción.
a) El contenido matemático que se estudia en esta situación es: funciones (lineales – cuadráticas) y gráfica de funciones.
b) Los aspectos que se evocan en cada contenido o item son:
▸ funciones ▸ Rango ▸ Coeficientes
▸ Intervalos ▸ Magnitudes ▸ Polinomios
▸ Dominio ▸ Máximo absoluto ▸ Intercepto
▸ Codominio ▸ Mínimo absoluto ▸ función Creciente y decreciente.
c) Los conocimientos que deben poseer los estudiantes para resolver la situación son:
▸ Expresiones algebraicas ▸ funciones (Definición) ▸ factorización ▸ Inecuaciones.
▸ Tipos de funciones ▸ Polinomios ▸ Ecuaciones
d) La estrategia que utilizarían sería la interpretación y el análisis de gráfica.
e) Principalmente, que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo en relación a la temática tratada para lograr el manejo de situaciones complejas que se le presenten en grados superiores.
f) El nivel educativo donde se debería aplicar esta situación: es en la media académica.
g) Los recursos que utilizarían serían los conocimientos que han adquirido en los grados anteriores, además de la lógica matemática. Cabe agregar que también deben utilizar recursos educativos tales como: la calculadora, lápiz, entre otros.
h) Las dificultades que se manifiestan con la solución de esta situación es que los alumnos no asocien los conocimientos que poseen con la cotidianidad.
– Dificultades para elaborar y analizar gráficas.

Figura 55. Respuesta dada por el $G_{(4)1}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción de la guía de análisis.

4.2.1.2.6 Nivel educativo donde se debería aplicar esta situación

Como puede apreciarse, en su análisis la totalidad de los grupos (8, 8) consideró el nivel básico y medio como el más adecuado en el que se debería aplicar la situación de adecuado a los requerimientos de la temática que se aborda en ésta y a los condicionantes curriculares en cada uno de los grados. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su mayoría verbales, combinados con números como lo hacen $G_{(4)7}$, $G_{(7)4}$, y $G_{(4)5}$. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan está: funciones, gráficas. Sus propuestas de solución a esta consignas son las siguientes: (e.g., $G_{(4)7}$: "*10° y 11° ya que son situaciones que necesitan un análisis minucioso*"; $G_{(7)3}$: "*partiendo del grado de complejidad de la temática* *se cree que es conveniente y adecuado aplicarlo a undécimo*"; $G_{(7)4}$: "*en el grado 10° y 11° porque es necesario para la preparación de las pruebas de estado, saber pro, las cuales sumergen al estudiante en funciones que son graficadas y luego deben ser interpretadas por los alumnos*"; $G_{(7)2}$: "*el nivel educativo debe ser en 9° grado*"; $G_{(4)1}$: "*el nivel educativo donde se debe aplicar esta situación es en la media académica; $G_{(4)8}$: noveno grado en adelante*"; $G_{(4)5}$: "*en el nivel básico: en grados como 9- 10- 11*"). Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, son manifiestos en las respuestas de los grupos $G_{(7)4}$, $G_{(4)7}$ y $G_{(7)3}$.

En las Figura 56 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(7)4}$, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



1 Descripción: a) funcones. graficas de funciones. dominio, Rango coedominio

b) Las nociones de dominio. Rango. intervalos. funcion creciente y decreciente puntos de cortes, Maximos y Minimos.

c) Saber que es una función, luego aprenda a graficar pero primordialmente para resolver la actividad se debe saber interpretar graficas, para distinguir los intervalos donde crecen o decrecen las función, el dominio

d) Comparar o relacionar los ejemplares osea el eje x y los pesos del eje y para observar la relación directamente proporciona o inversamente.

e) en primer lugar, relacionar las variables que se encuentran en una grafica de funciones. Seguidamente, distinguir el intervalo donde crece o decrece. finalmente el rango y dominio de la funciones

f) en el grado 10° y 11° por que es necesario para la preparación de las pruebas de estado saber pro, las cuales sumergen al estudiante en funciones que son graficadas y luego deben ser p interpretadas por los alumnos

g) Los situaciones contextualizadas, la utilización de carteles para representar la función

h) Que no saben los estudiantes interpretar graficas que tiene mas de 2 variables, y plantear una ecuación que Facilite relacionar las variables implicadas.

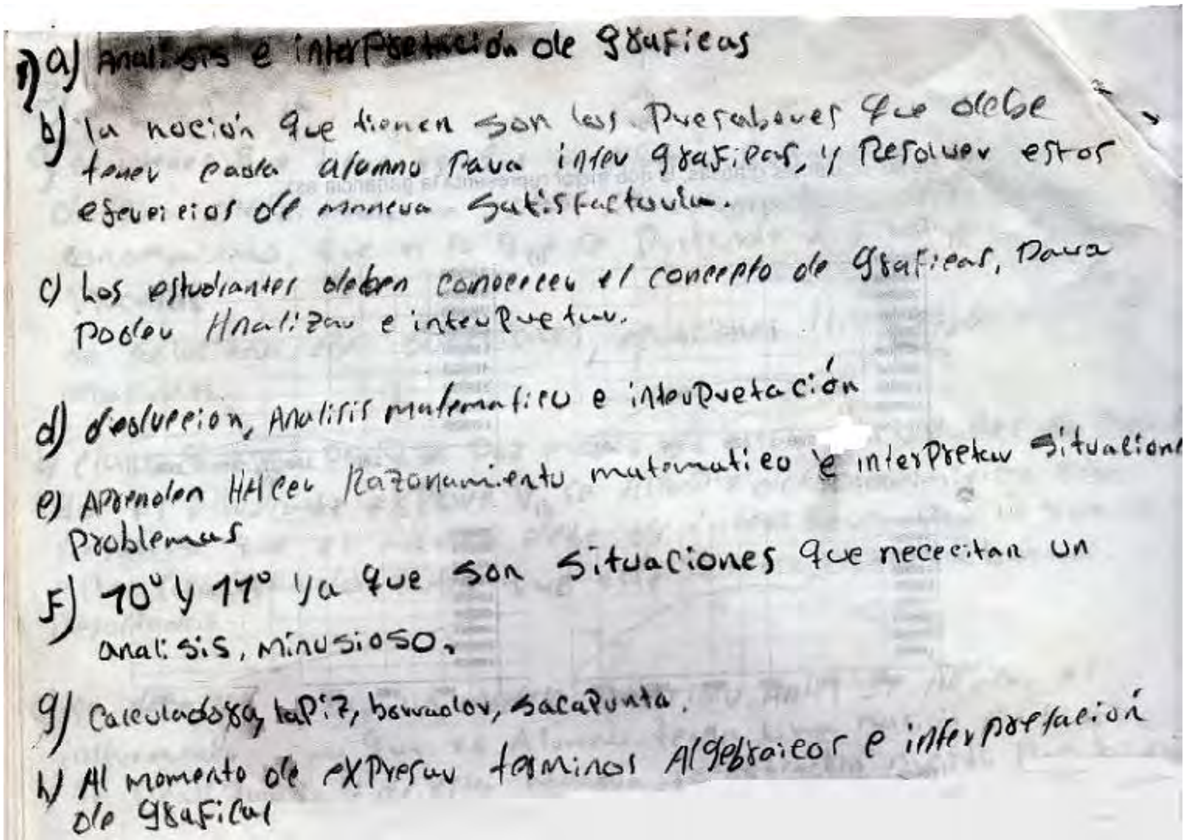
Figura 56. Respuesta dada por el $G_{(7)4}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción de la guía de análisis.

4.2.1.2.7 *Posibles recursos utilizados por los estudiantes al resolver la situación*

En el análisis grupal del instrumento (8,7) de los profesores en formación pudieron identificar algunos recursos didácticos de los que los estudiantes de la básica o media académica podrían echar mano para resolver la situación. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan está funciones. Y entre los recursos mencionados están: la calculadora, lápiz, regla, cartelera, borrador y sacapuntas. Entre los recursos que *proponen* que serán utilizados por los estudiantes de la básica o media están: (e.g., $G_{(4)1}$: "*los recursos que utilizarán serán serían los conocimientos que han adquirido en los grados anteriores, además de la lógica matemática. Cabe agregar que también deben utilizar recursos educativos, tales como: la calculadora, lápiz, entre otros*"; $G_{(4)5}$: "*el conocimiento, calculadoras, reglas y demás herramientas que sirvan para el desarrollo de la situación*"; $G_{(7)4}$: "*las situaciones contextualizadas, la utilización de carteleras para representar la función*"; $G_{(4)8}$: "*calculadora, lápiz, borrador, papel y recurso intelectual*"; $G_{(7)3}$: "*utilizarán materiales como el lápiz, borrador, sacapuntas, calculadoras, y conocimientos previos que posee referente a la temática estudiada, habilidades matemáticas, capacidad para deducir, lógica, razonamiento, análisis y comprensión*"; $G_{(7)2}$: "*calculadora y lo normal, que es lápiz, etc.";* $G_{(4)7}$: "*calculadora, lápiz, borrador, sacapuntas*"; G_6: "*los recursos que el estudiante requiere para resolver la situación serían calculadora y conceptos básicos claros*"). Respecto a los argumentos utilizados, en la respuesta dada por el $G_{(4)5}$ se muestran algunos rasgos de éstos. Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales.

Es curioso que identifiquen como recurso la calculadora cuando en esta situación no es requerido su uso ya que la base del análisis es visual, aunque es posible usarla para hacer la diferencia entre los valores de las funciones Ingreso y Costos. Un aspecto que llama la atención es que confundan (o utilicen indistintamente), recursos con conceptos básicos o con estrategias.

En las Figura 57 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(4)7}$, dados al apartado descripción de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



1) a) Analisis e interpretación de graficas

b) la noción que tienen son los Presaberes que debe tener cada alumno para inter graficas, y Resolver estos ejercicios de manera satisfactoria.

c) Los estudiantes deben conocer el concepto de graficas, para poder Analizar e interpretar.

d) resolucion, Analisis matematico e interpretación

e) Aprenden HAcer Razonamiento matematico e interpretar situaciones problemas

F) 10° y 11° ya que son situaciones que necesitan un analisis, minusioso.

g) Calculadora, lapiz, borrador, sacapunta.

h) Al momento de expresar terminos Algebraicos e interpretación de graficas

Figura 57. Respuesta dada por el G(4)7 al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado descripción de la guía de análisis.

4.2.1.2.8 *Posibles dificultades/conflictos de aprendizaje manifestados por los estudiantes en la solución de la situación*

En el desarrollo de este ítem se esperaba que el profesor en formación hiciera una proyección de las posibles dificultades/conflictos de aprendizaje que manifiesta un estudiante del nivel básico o medio al intentar resolver una situación como la planteada en el cuestionario que resolvían. En el análisis grupal (7, 7) de los grupos identificaron algunas posibles dificultades/conflictos de aprendizaje que podrían manifestar los estudiantes de la básica al resolver la situación. Entre las dificultades más mencionadas están: deficiente nivel de análisis gráfico por la cantidad de variables, dificultades en la solución de ecuaciones, dificultades al hacer transformaciones tipo conversión, modelar matemáticamente la situación, conflictos epistémicos con las funciones a la hora de relacionar el concepto con el contexto, deficientes preconceptos.

Los *elementos lingüísticos* utilizados en las soluciones fueron totalmente verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones, gráficas, ecuaciones, términos algebraicos. Y entre los recursos mencionados están: la calculadora, lápiz, regla, cartelera, borrador y sacapuntas. Entre las dificultades/conflictos de aprendizaje de los estudiantes de la básica y media académica con la solución de esta situación que *proponen*: (e.g., $G_{(7)4}$: "*que no saben los estudiantes interpretar graficas que tienen más de 2 variable, y plantear una ecuación que facilite relacionar las variables implicadas*"; $G_{(7)2}$: "*los conflictos de aprendizaje se presentarían a la hora de solucionar las ecuaciones cuadráticas;* $G_{(4)7}$: "*al momento de expresar términos algebraico e interpretación de graficas*"; $G_{(4)1}$: "*-las dificultades que se manifiestan con la solución de esta situación es que los alumnos no asocien los conocimientos que poseen con la cotidianidad -dificultades para elaborar y analizar graficas*"; $G_{(4)5}$: "*- el mal análisis de las gráficas, es decir, no hacer una buena interpretación de estas. –no tener claro el concepto de funciones*"; $G_{(7)3}$: "*mala comprensión y análisis de la gráfica, construcción inadecuada de las formulas según las gráficas, que no posee concepto claros y definidos sobre lo que son costos ingresos y ganancias*". Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los argumentos utilizados, éstos no son evidentes en las soluciones de ninguno de los grupos.

Como puede observarse, este grupo de profesores en formación, a medida que fueron conociendo el cuestionario –quizás por su repetitiva manipulación- fueron precisando los conceptos involucrados en la situación, de tal forma que en el análisis grupal fueron un mucho más precisos que en el análisis individual de la situación.

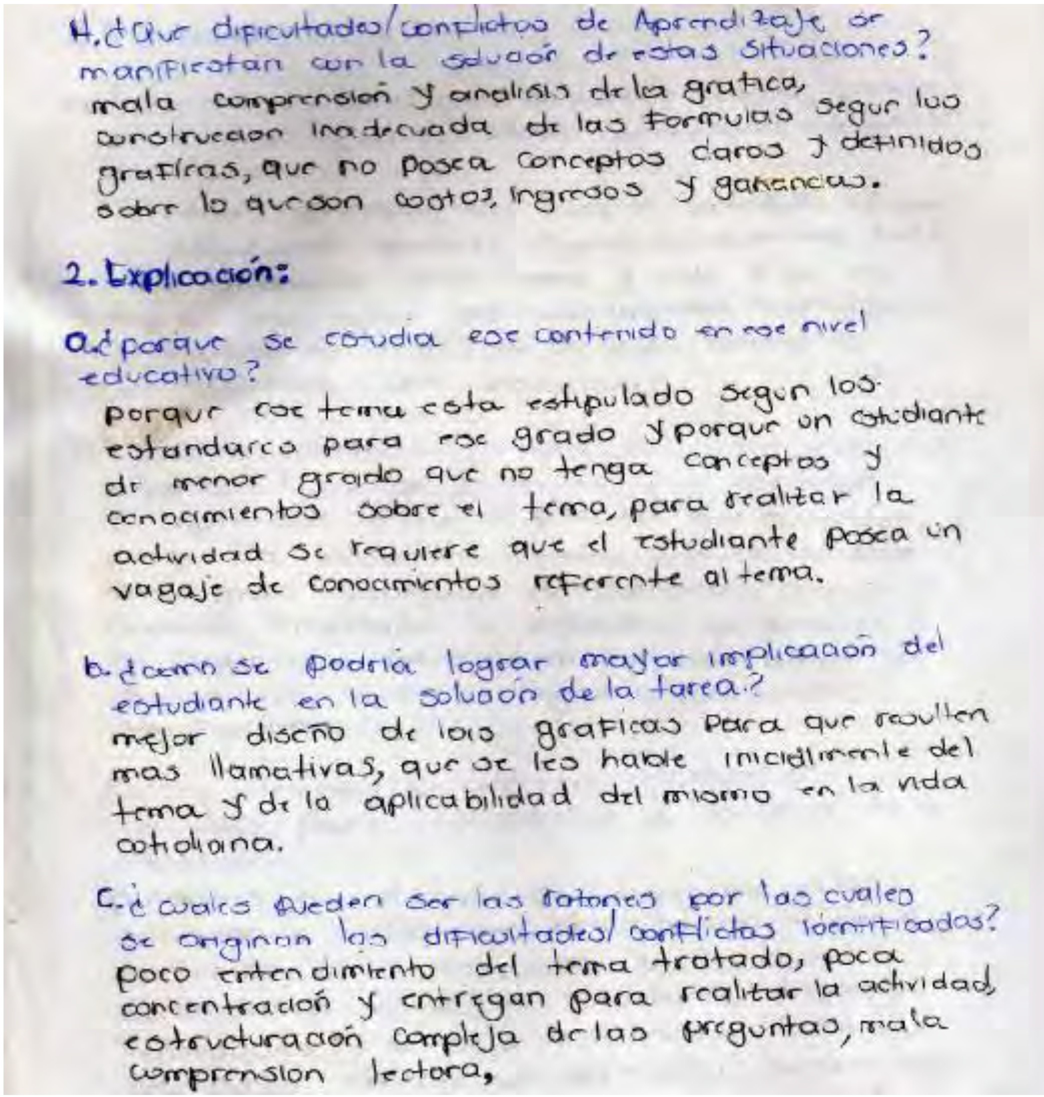
4.2.1.3 Explicación

4.2.1.3.1 Razones de la ubicación de ese contenido en ese nivel educativo

En el grupal (5, 6) de los grupos dieron algunas razones por las que ese contenido debe estudiarse en ese nivel educativo. Los *elementos lingüísticos* que utilizan son en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones y variables. Y *proponen* que se debe estudiar en los niveles de noveno a undécimo grado (e.g., $G_{(7)3}$: "*porque ese tema está estipulado según los estándares para ese grado y porque un estudiante de menor grado que no tenga concepto y conocimiento sobre el tema, para realizar la* *actividad se requiere que el estudiante posea un bagaje de conocimiento referente al tema*"; $G_{(4)7}$: "*porque los alumnos en ese nivel deben de estar en la capacidad de razonar e interpretar conceptos matemáticos de una forma eficaz. Ya que en este nivel el estudiante debe de tener pre saberes relacionados con esta situación*"; $G_{(7)6}$: "*personalmente opino que este contenido se debe estudiar en este nivel ya que el estudiante de 10 u 11 está en la capacidad de asimilar los procesos matemáticos que exige esta situación, además el estudiante de estos niveles, está a puertas de la universidad por tal razón se le debe exigir mayor entrega y compromiso*"; $G_{(7)2}$: "*porque en los cursos inferiores a 9 no tienen los conocimientos previos para afrontar este tipo de situaciones"*; $G_{(7)4}$: "*porque el estudiante debe de aprender a graficar funciones, por la razón de que en su vida cotidiana se encontrara con situaciones parecidas ósea sirve para vida por ejemplo la variable dinero con gasto*"; $G_{(4)1}$: "*este contenido se estudia en este nivel educativo porque el estudiante se encuentra capacitado para afrontar este tipo de situaciones, teniendo en cuenta que ya domina las temáticas anteriores que son de importancia para lograr desenvolverse en esta clase de ejercicios*"; $G_{(4)5}$: "*debido a que se lleva una programación en cada uno de los grados y esta es la que corresponde a estos*"; $G_{(4)8}$: "*porque esto exige los estándares básico de competencia y los lineamientos curriculares en estos niveles*". Los procedimientos/estrategias utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los argumentos utilizados, la totalidad de los grupos argumentan respecto a la necesidad de estudiar este contenido en ese nivel educativo, y a grandes rasgos dan tres razones: cuestiones relacionadas con la formación del estudiante, como preparación para pruebas externas y por requisito curricular.

La socialización en plenaria del trabajo grupal, al cada grupo exponer su punto de vista y al ser discutidos los puntos de vista de cada uno, se fueron aclarando dudas y ampliando horizontes a las respuestas dadas a las cuestiones planteadas, con lo que se complementaron unos con otros, por lo que finalmente este proceso fue teniendo en los profesores en formación de ambos niveles, efectos como de una intervención pedagógica.

En las Figuras 58, 59 y 60 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(7)3}$, $G_{(7)6}$ y $G_{(4)8}$, respectivamente, dados al apartado explicación de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.


4. ¿Que dificultades/conflictos de Aprendizaje se manifiestan con la solución de estas situaciones?
mala comprensión y analisis de la grafica, construccion inadecuada de las formulas segun las graficas, que no posea conceptos claros y definidos sobre lo que son costos, ingresos y ganancias.

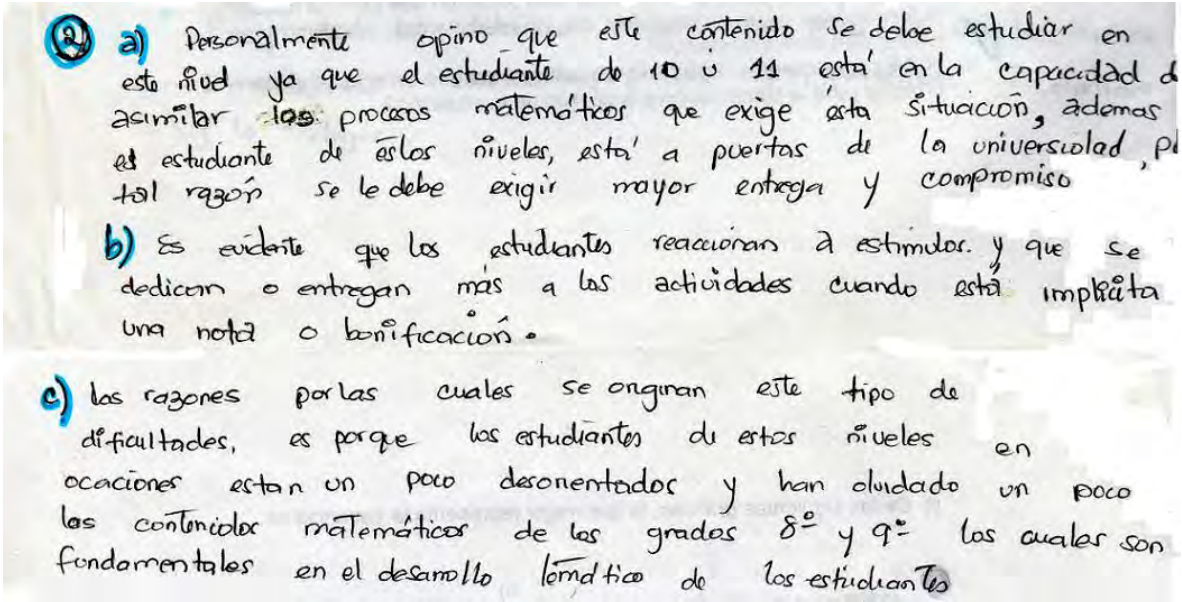
2. Explicación:

a. ¿porque se estudia ese contenido en ese nivel educativo?
porque ese tema esta estipulado segun los estandares para ese grado y porque un estudiante de menor grado que no tenga conceptos y conocimientos sobre el tema, para realizar la actividad se requiere que el estudiante posea un vagaje de conocimientos referente al tema.

b. ¿como se podria lograr mayor implicacion del estudiante en la solucion de la tarea?
mejor diseño de las graficas para que resulten mas llamativas, que se les hable inicialmente del tema y de la aplicabilidad del mismo en la vida cotidiana.

c. ¿cuales pueden ser las razones por las cuales se originan las dificultades/conflictos identificadas?
poco entendimiento del tema tratado, poca concentración y entregan para realizar la actividad, estructuración compleja de las preguntas, mala comprension lectora,

Figura 58. Respuesta dada por el $G_{(7)3}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado explicación de la guía de análisis.

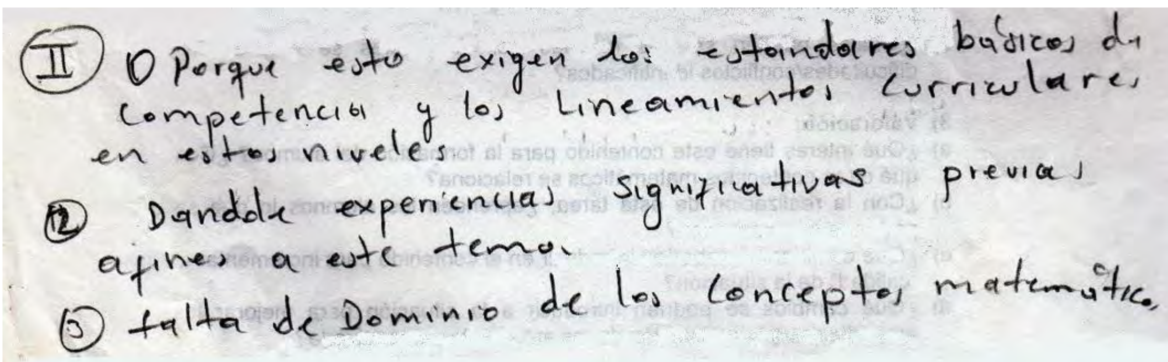


(2) a) Personalmente opino que este contenido se debe estudiar en este nivel ya que el estudiante de 10 ó 11 está en la capacidad d asimilar los procesos matemáticos que exige ésta situación, ademas el estudiante de éstos niveles, está a puertas de la universidad, p tal razón se le debe exigir mayor entrega y compromiso

b) Es evidente que los estudiantes reaccionan a estimulos. y que se dedican o entregan más a las actividades cuando está implicita una nota o bonificación.

c) las razones por las cuales se originan este tipo de dificultades, es porque los estudiantes de estos niveles en ocaciones estan un poco desorientados y han olvidado un poco los contenidos matemáticos de los grados 8º y 9º los cuales son fondamentales en el desarrollo lógmatico de los estudiantes

Figura 59. Respuesta dada por el $G_{(7)6}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado explicación de la guía de análisis.



II 1) Porque esto exigen los estandares basicos de competencia y los Lineamientos Curriculares en estos niveles

2) Dandole experiencias significativas previas afines a este tema.

3) falta de Dominio de los Conceptos matemático

Figura 60. Respuesta dada por el $G_{(4)8}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado explicación de la guía de análisis.

4.2.1.3.2 Cómo logra mayor implicación del estudiante en la solución de la tarea

En el análisis grupal la totalidad (8, 8) de los grupos proponen alternativas para lograr una mayor implicación de los estudiantes de la básica y/o media académica en la solución de la tarea. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron totalmente verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones y gráficas. Y para lograr mayor implicación del estudiante *proponen* $G_{(7)2}$: "*se puede lograr mayor implicación con recursos como software de grafica de funciones porque ellos podrán ser más creativos también amplían su imaginación en este tipo de problemas*"; $G_{(7)6}$: "*es evidente que los estudiantes reaccionan a estímulos y que se dedican o entregan más a las actividades cuando está implícita una nota o bonificación"*; $G_{(4)7}$: "*por medio de herramientas didácticas que son agradables para los estudiantes incluso con actividades lúdicas apropiada para dicha* *situación*"; $G_{(7)3}$: "*mejor diseño de las gráficas para que resulten más llamativas que se les hable inicialmente del tema y la aplicabilidad del mismo en la vida cotidiana*"; $G_{(4)1}$: "*se logra mayor implicación del estudiante: -si se presenta una definición que le sirva de ayuda al estudiante, -si se contextualizan más las situaciones, que se relacionen con sus vidas cotidiana, -si se utilizan distintos métodos didácticos para mejorar la comprensión del tema*"; $G_{(7)4}$: "*asignándole tareas contextuales que sean interesantes para el alumno. Por ejemplo graficar el consumo de energía con relación a su valor puede ser una opción*"; $G_{(4)8}$: "*dándole experiencias significativas previas a fines a este tema*". Los *procedimientos/estrategias* utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, estos son evidentes en las respuestas de los $G_{(7)2}$, $G_{(7)3}$ y $G_{(7)4}$.

Como puede apreciarse, los profesores en formación consideran que una mayor implicación de los estudiantes de la básica en la solución de esta tarea se puede lograr con acciones de tres tipos: 1) haciendo algunas modificaciones a la situación en un contexto determinado; 2) que el profesor gane más protagonismo al hacer las explicaciones, o con el uso de recursos adecuados y 3) a través de una motivación lograda involucrando más a los estudiantes en la solución de la tarea, es decir, haciéndosela vivenciar.

En las Figuras 61, 62 y 63 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(4)7}$, $G_{(4)5}$ y $G_{(7)4}$ respectivamente, dados al apartado explicación de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.

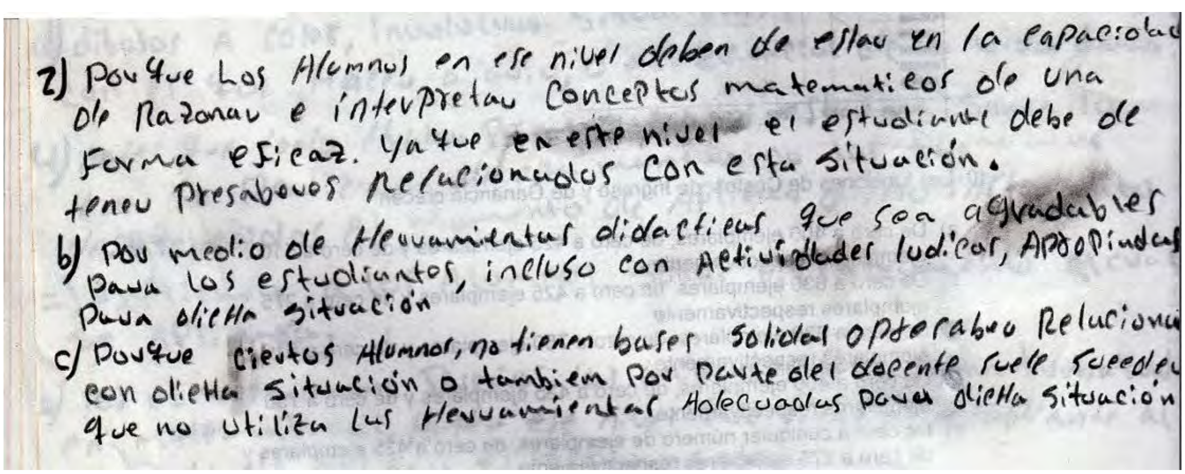
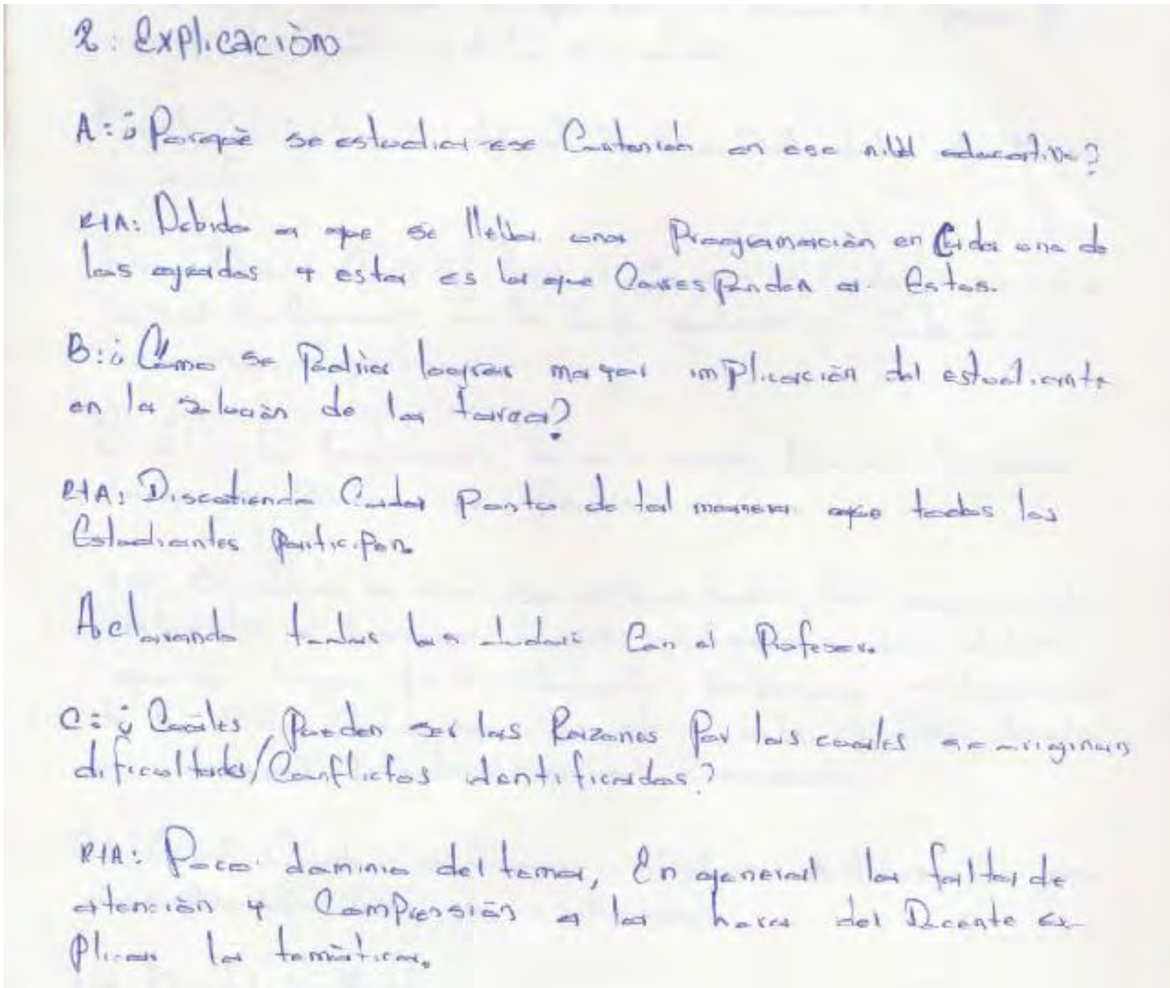

a) Porque Los Alumnos en ese nivel deben de estar en la capacidad de Razonar e interpretar Conceptos matematicos de una Forma eficaz. ya que en este nivel el estudiante debe de tener presaberes relacionados con esta situación.
b) Por medio de Herramientas didacticas que sean agradables para los estudiantes, incluso con Actividades ludicas, Apropiadas para dicha situación
c) Porque ciertos Alumnos, no tienen bases solidas o presaberes Relaciona con dicha situación o tambien por parte del docente suele suceder que no utiliza las Herramientas Adecuadas para dicha situación

Figura 61. Respuesta dada por el $G_{(4)7}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado explicación de la guía de análisis.



2. Explicaciòn

A: ¿Porqué se estudia ese Contenido en ese nivel educativo?

RTA: Debido a que se lleva una Programación en Cada una de las ejecidas y esta es la que Corresponden a estos.

B: ¿Como se Podria lograr mayor implicación del estudiante en la solución de las tareas?

RTA: Discutiendo Cada Punto de tal manera que todos los Estudiantes Participen.

Aclarando todas las dudas Con el Profesor.

C: ¿Cuales Pueden ser las Razones Por las cuales se originan dificultades/Conflictos identificados?

RTA: Poco dominio del tema, En general la falta de atención y Comprensión a la hora del Docente explicar la temática.

Figura 62. Respuesta dada por el $G_{(4)5}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado exploración de la guía de análisis.

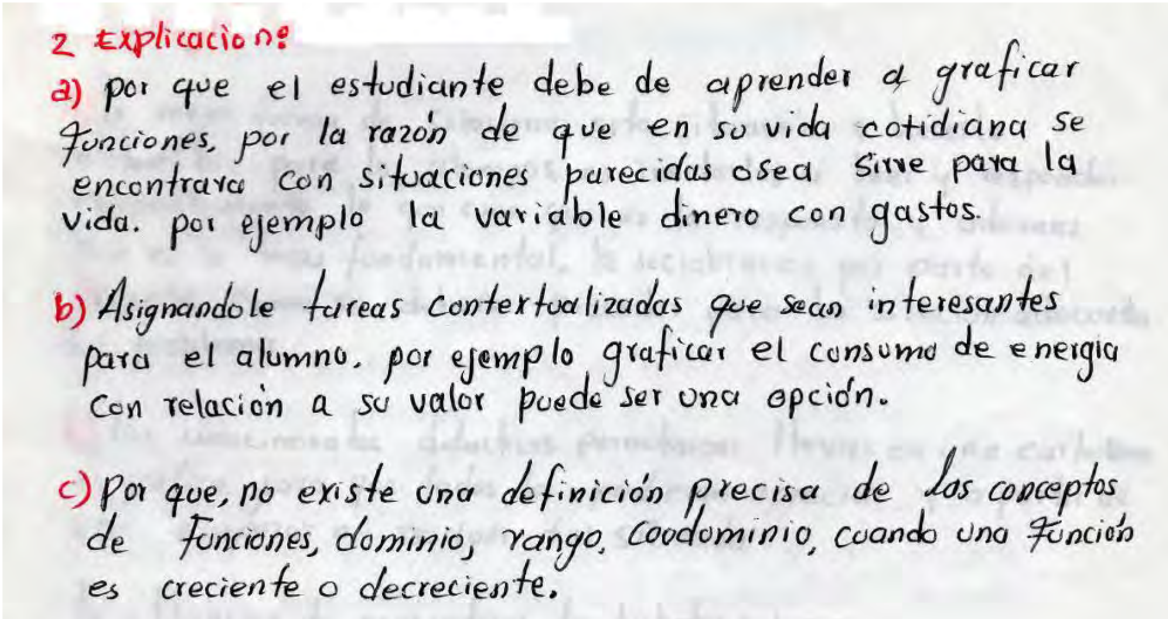
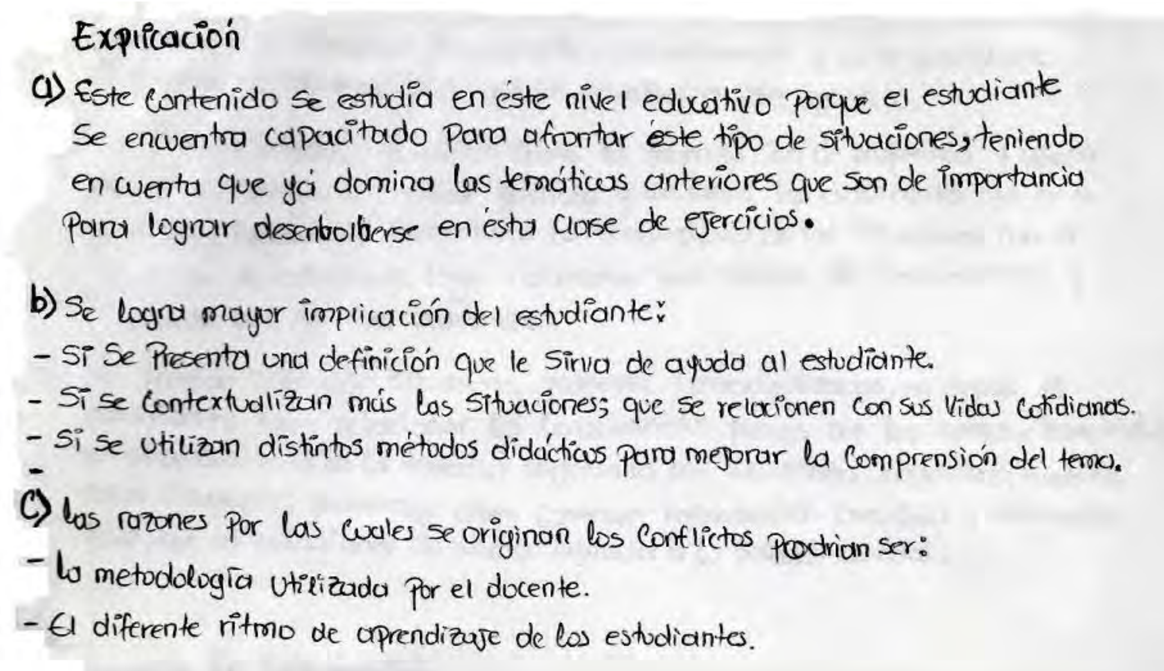

2 Explicación:
a) por que el estudiante debe de aprender a graficar funciones, por la razón de que en su vida cotidiana se encontrara con situaciones parecidas osea sirve para la vida. por ejemplo la variable dinero con gastos.
b) Asignandole tareas contextualizadas que sean interesantes para el alumno. por ejemplo graficar el consumo de energia con relación a su valor puede ser una opción.
c) Por que, no existe una definición precisa de los conceptos de funciones, dominio, rango, Coodominio, cuando una función es creciente o decreciente.

Figura 63. Respuesta dada por el $G_{(7)4}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado exploración de la guía de análisis.

4.2.1.3.3 *Razones por las cuales se originan en los estudiantes las dificultades/conflictos identificados al resolver la tarea*

En el análisis grupal (5, 7) de los grupos suponen algunas razones que pueden originar las dificultades/conflictos en los estudiantes. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron totalmente verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones y gráficas, dominio, rango, codominio, funciones crecientes o decrecientes. Y como razones por las que en los estudiantes se originan dificultades/conflictos $G_{(7)3}$ refuerza lo reportado por Acosta (2009) al proponer que podría deberse al "*poco entendimiento del tema tratado, poca concentración y entrega para realizar la actividad estructuración compleja de las preguntas, mala comprensión lectora*"; por su parte para $G_{(4)7}$ es "*porque ciertos alumnos, no tienen bases sólidas o pre saberes relacionados con dicha situación o también por parte del docente suele suceder que no utiliza las herramientas adecuada para dicha situación*"; $G_{(7)6}$: "*las razones por las cuales se origina este tipo de dificultades, es porque los estudiantes de estos niveles en ocasiones están un poco desconectados y han olvidado un poco las matemáticas de los grados 8 y 9 los cuales son fundamentales en el desarrollo temático de los estudiantes*"; $G_{(7)2}$: "*las razones serian: no tener los conceptos bien definidos de funciones, graficas, etc. Y no dominar el álgebra que se usa en este tipo de problemas*"; $G_{(4)5}$: "*poco dominio del tema en general la falta de atención y comprensión a la hora del* *docente explicar la temática"*; $G_{(4)8}$: "*falta de dominio a los conceptos matemáticos"*; $G_{(7)4}$: "*porque no existe una definición precisa de los conceptos de funciones, dominio, rango, codominio, cuando una función es creciente o decreciente"*; $G_{(4)1}$: "*las razones por las cuales se originan los conflictos podrían ser: la metodología utilizada por los docentes el diferente ritmo de aprendizaje de los estudiantes".* Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En relación a los *argumentos* utilizados, estos se aprecian en las respuestas de $G_{(4)7}$, $G_{(7)6}$ y de $G_{(7)4}$. Las razones que mencionan se pueden clasificar en cuatro tipos fundamentales: de tipo cognitivo, epistemológicas, ontogénicas y didácticas.

En las Figuras 64 y 65 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(4)1}$ y $G_{(7)2}$, respectivamente, dados al apartado explicación de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



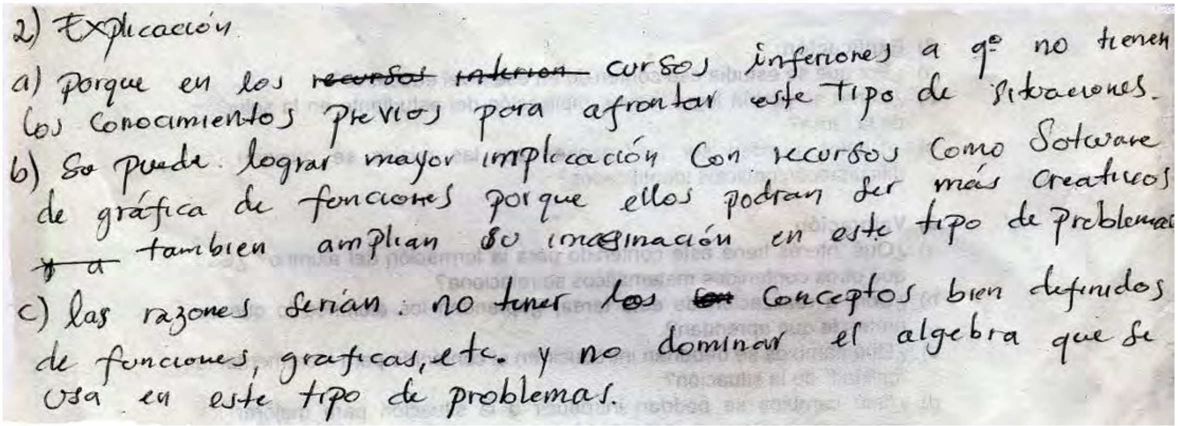
Explicación

a) Este contenido se estudía en éste nivel educativo porque el estudiante se encuentra capacitado para afrontar éste tipo de situaciones, teniendo en cuenta que ya domina las temáticas anteriores que son de importancia para lograr desenbolberse en ésta clase de ejercicios.

b) Se logra mayor implicación del estudiante:
- Si se presenta una definición que le sirva de ayuda al estudiante.
- Si se contextualizan más las situaciones; que se relacionen con sus vidas cotidianas.
- Si se utilizan distintos métodos didácticos para mejorar la comprensión del tema.
-

c) las razones por las cuales se originan los conflictos podrían ser:
- la metodología utilizada por el docente.
- El diferente ritmo de aprendizaje de los estudiantes.

Figura 64. Respuesta dada por el $G_{(4)1}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado exploración de la guía de análisis.



2) Explicación
a) Porque en los ~~recursos~~ ~~anterior~~ cursos inferiores a 9º no tienen los conocimientos previos para afrontar este tipo de situaciones.
b) Se puede lograr mayor implicación con recursos como Sotware de gráfica de funciones porque ellos podran ser más creativos ~~y a~~ tambien amplian su imaginación en este tipo de problemas
c) las razones serían: no tener los ~~en~~ conceptos bien definidos de funciones, graficas, etc. y no dominar el algebra que se usa en este tipo de problemas.

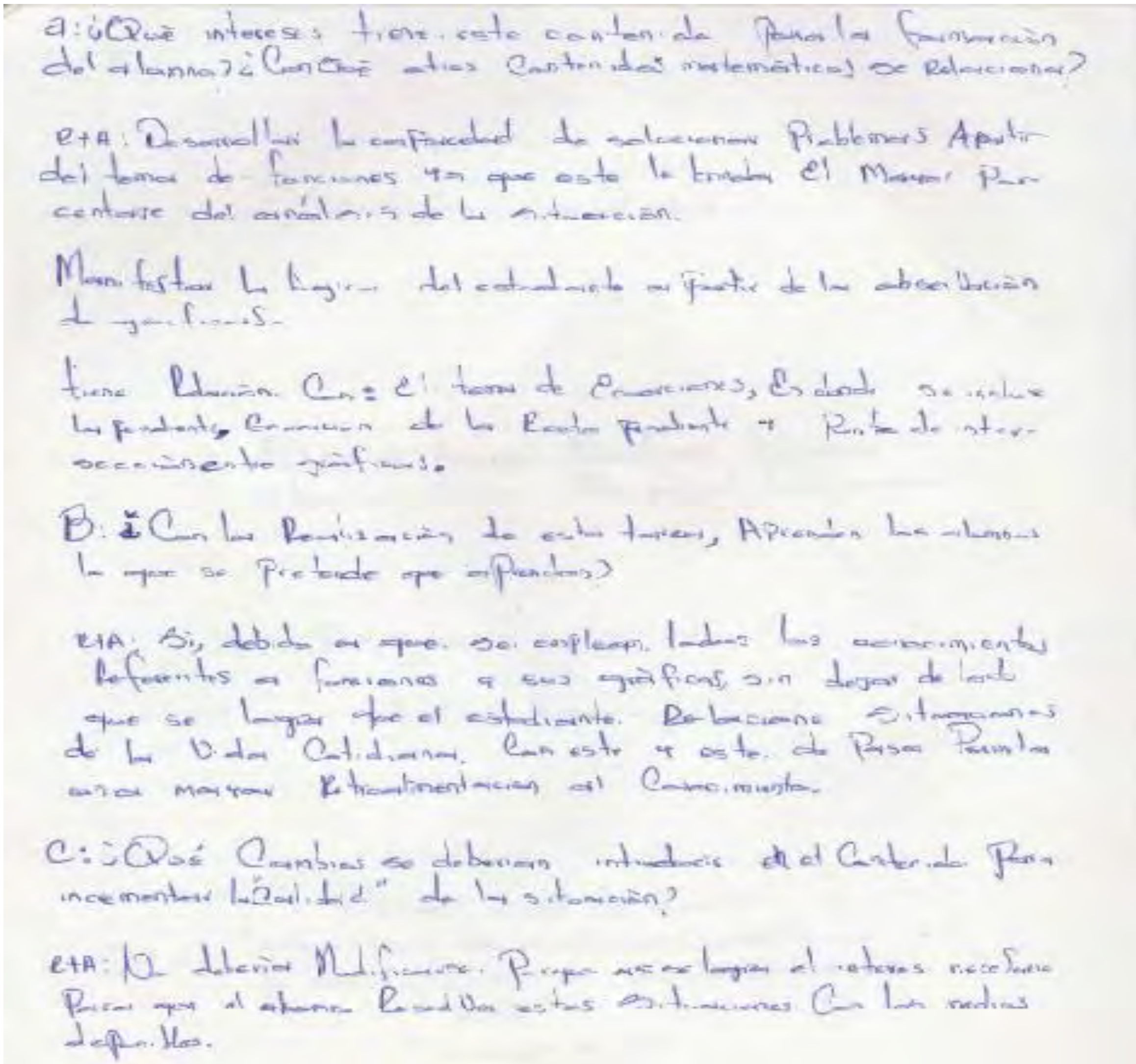
Figura 65. Respuesta dada por el $G_{(7)2}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado exploración de la guía de análisis.

4.2.1.4 Valoración

4.2.1.4.1 Interés que puede tener este contenido para la formación del alumno, y contenidos matemáticos con que se relaciona

En el análisis grupal, en relación al interés que tiene este contenido para la formación del alumno, y algunos otros contenidos matemáticos con los que se relaciona, (6, 7) de los grupos dieron su opinión sobre los aspectos considerados de utilidad. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones, ecuaciones, gráficas, proporciones directas o inversas, regresión lineal, la integral definida, cálculo integral. Y como razones por las que en los estudiantes se originen dificultades/conflictos *proponen:* $G_{(7)4}$: "*el interés del alumno se resume en aprender a interpretar gráficas para poner en practica esos conocimientos en situaciones de la vida cotidiana y otros contenidos que se pueden trabajar aquí son las proporciones directas o inversas y las ecuaciones como su graficacion*"; $G_{(4)5}$: "*desarrollar la capacidad de solucionar problemas a partir del tema de funciones ya que este le brinda el mayor porcentaje del análisis de la situación*"; $G_{(7)3}$: "*el interés principal que tiene el contenido es que el estudiante aprenda significativamente todo lo relacionado con el tema y este a su vez pueda extrapolar los conocimientos que adquirió a situaciones reales de su vida cotidiana se relaciona con ecuación"*; $G_{(4)7}$: "*el interés que tiene es que el alumno razone e intérprete de una mejor manera estas situaciones y se propicie conocimientos que es lo que se pretende al final de este proceso*"; $G_{(4)8}$: "*el interés es llevar al alumno a que resuelva problemas cotidianos o de otras ciencias, con conceptos matemáticos se puede relacionar estos temas* *con la regresión lineal en estadística la integral definida del cálculo integral"*; $G_{(7)2}$: "*el interés para la formación del estudiante y ser competente en este tipo de problema lo hace más practico a la hora de enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana*"; $G_{(7)6}$: "*el interés de este contenido para la formación del estudiante está inclinado en desarrollar procesos comunicativos de razonamiento se relaciona con contenido de ecuaciones".* Los *procedimientos/estrategias* utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados estos se pueden apreciar en las respuestas dadas por $G_{(7)4}$ y $G_{(4)5}$. Las propuestas sobre el interés tiene este contenido para la formación del alumno se pueden clasificar en tres grupos básicos: al relacionar las matemáticas con el contexto, permite mejorar la formación integral del estudiante, prepara aspectos externos a su formación básica.

En la Figura 66 se muestran las soluciones de los profesores en formación del grupo $G_{(4)5}$, respectivamente, dados al apartado valoración de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.


a: ¿Qué intereses tiene este contenido para la formación del alumno? ¿Con qué otros contenidos matemáticos se relacionan?

R+A: Desarrollar la capacidad de solucionar problemas a partir del tema de funciones ya que este lo brinda el manejo por centrarse del análisis de la situación.

Manifestar la lógica del estudiante a partir de la observación de gráficas.

tiene relación con el tema de ecuaciones, es donde se incluye la pendiente, ecuación de la recta pendiente y punto de intersección gráficamente.

B: ¿Con la realización de esta tarea, aprenden los alumnos lo que se pretende que aprendan?

R+A: Si, debido a que se emplean todos los conocimientos referentes a funciones y sus gráficas, sin dejar de lado que se logra que el estudiante relacione situaciones de la vida cotidiana. Con esto y esto da paso para una mayor retroalimentación al conocimiento.

C: ¿Qué cambios se deberían introducir en el contenido para incrementar la "calidad" de la situación?

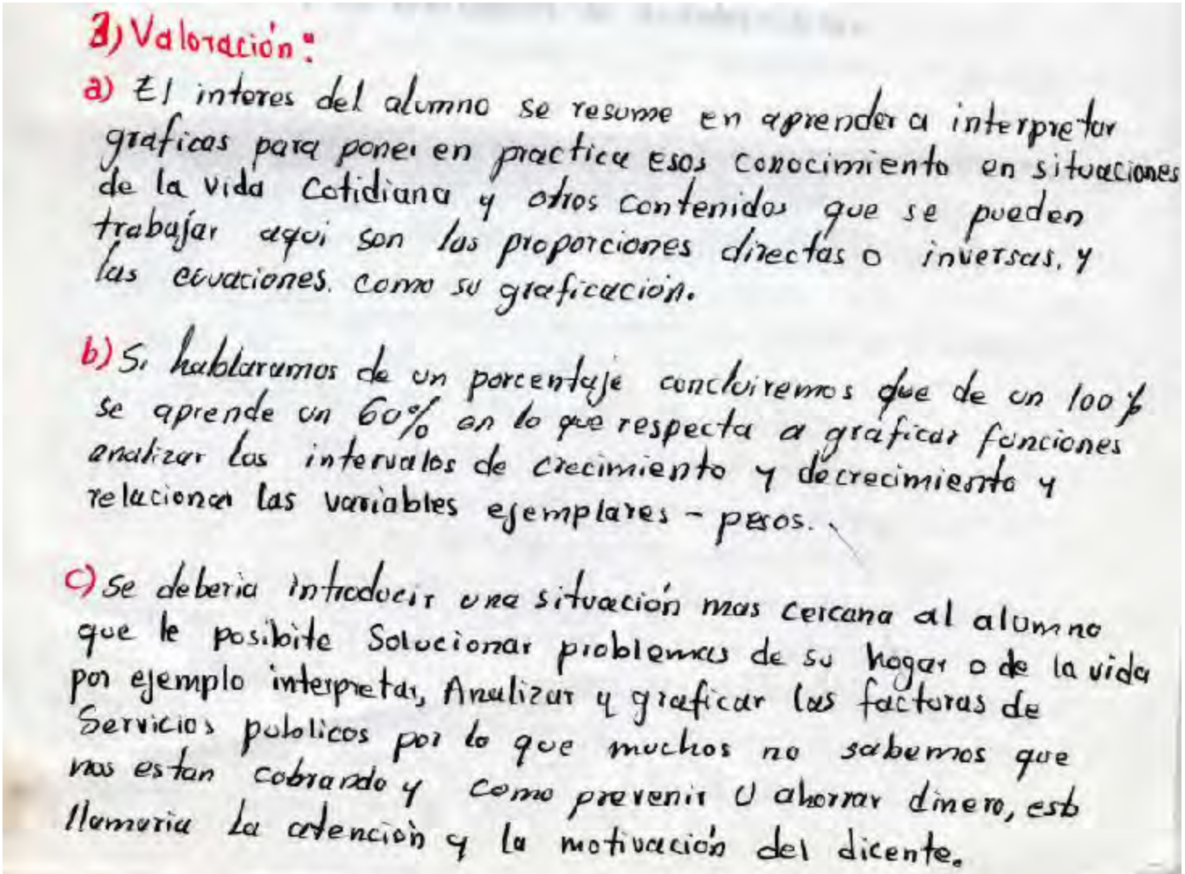
R+A: No deberían modificarse. Porque así se logra el interés necesario para que el alumno resuelva estas situaciones con los medios disponibles.

Figura 66. Respuesta dada por el $G_{(4)5}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.

4.2.1.4.2 Con esta tarea, aprenden los alumnos lo que se pretende que aprendan

En este ítem se esperaba que el profesor en formación reflexionara sobre los contenidos básicos que debe manejar un estudiante en determinado nivel y en las estrategias que debería utilizar el profesor para facilitarle un apropiado aprendizaje de éstos. En el análisis grupal la totalidad (8, 8) de los grupos dan su opinión acerca de si con la realización de esta tarea, los alumnos de la básica aprenden lo que se pretende que aprendan. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron totalmente verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están funciones y gráficas, variables crecimiento y decrecimiento. Y *proponen* razones por lo que consideran que los estudiantes aprenden los alumnos lo que se pretende que aprendan. Sus *propuestas* son las siguientes: $G_{(7)3}$: "*si aprenden lo que se pretende que aprendan porque la situación abarca minuciosamente una gran cantidad de subtemas siempre y cuando finalizada la actividad se socialice y se haga una retro alimentación aclaración de dudas con el fin de llegar a conclusiones significativa*"; $G_{(7)2}$: "*pienso que algunos estudiantes si lograrían aprender lo que se pretende aprender en este tema*"; $G_{(4)8}$: "*si siempre y cuando haya un medidor capacitado matemáticamente entre ellos que los oriente a sus propias conclusiones*"; $G_{(4)7}$: "*claro que si porque por medio de estas actividades se pretende que el estudiante explore y se apropie del conocimiento cabe resaltar que el alumno debe interesarse por lo que se está realizando, para que este proceso, obtenga buenos resultado*"; $G_{(4)5}$: "*si, debido a que se emplean todos los conocimientos referentes a funciones y sus gráficas, sin dejar de lado que se debe lograr que el estudiante relacione situaciones de la vida cotidiana. Con este de paso permita una mayor retroalimentación del conocimiento*"; $G_{(7)4}$: "*si habláramos de un porcentaje concluiríamos que de un 100% se aprende un 60% en lo que respecta a graficar funciones, analizar intervalos de crecimiento y decrecimiento y relacionar las variables ejemplare-pesos*"; $G_{(4)1}$: "*no, porque esta actividad está enfocada en el análisis gráfico, lo cual fortalecería la capacidad interpretativa del educando y no se alcanzaría el dominio de las temáticas que se abordan en este ejercicio*". Los *procedimientos/estrategias* utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, estos se hacen evidentes en las respuestas de $G_{(7)3}$, $G_{(4)7}$, $G_{(4)5}$ y $G_{(4)1}$.

En las Figuras 67 y 68 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(7)4,}$ y $G_{(4)7}$, respectivamente, dados al apartado valoración de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



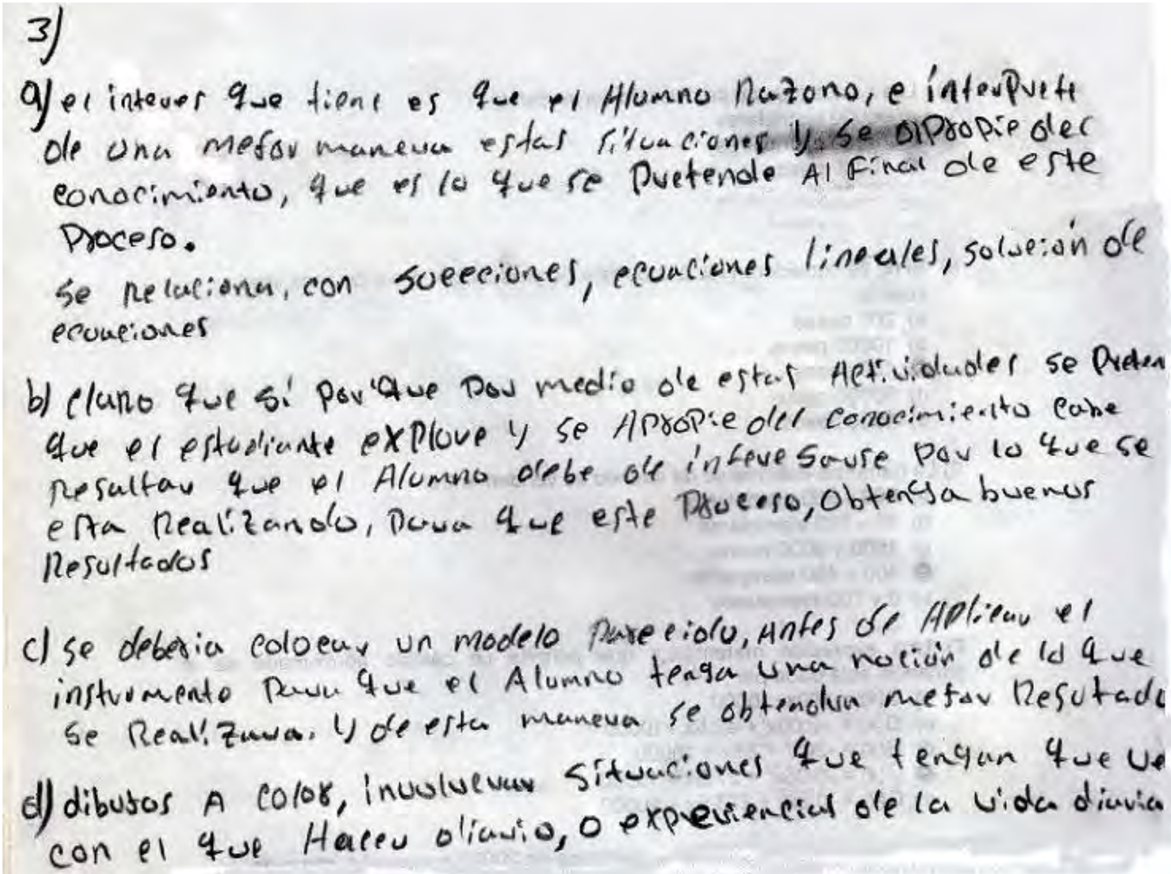
3) Valoración:

a) El interes del alumno se resume en aprender a interpretar graficas para poner en practica esos conocimiento en situaciones de la vida cotidiana y otros contenidos que se pueden trabajar aqui son las proporciones directas o inversas, y las ecuaciones. como su graficacion.

b) Si hablaramos de un porcentaje concluiremos que de un 100% se aprende un 60% en lo que respecta a graficar funciones analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y relaciona las variables ejemplares - pesos.

c) Se deberia introducir una situación mas cercana al alumno que le posibite Solucionar problemas de su hogar o de la vida por ejemplo interpretar, Analizar y graficar las facturas de Servicios publicos por lo que muchos no sabemos que nos estan cobrando y como prevenir U ahorrar dinero, esto llamaria la atención y la motivación del dicente.

Figura 67. Respuesta dada por el $G_{(7)4}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.



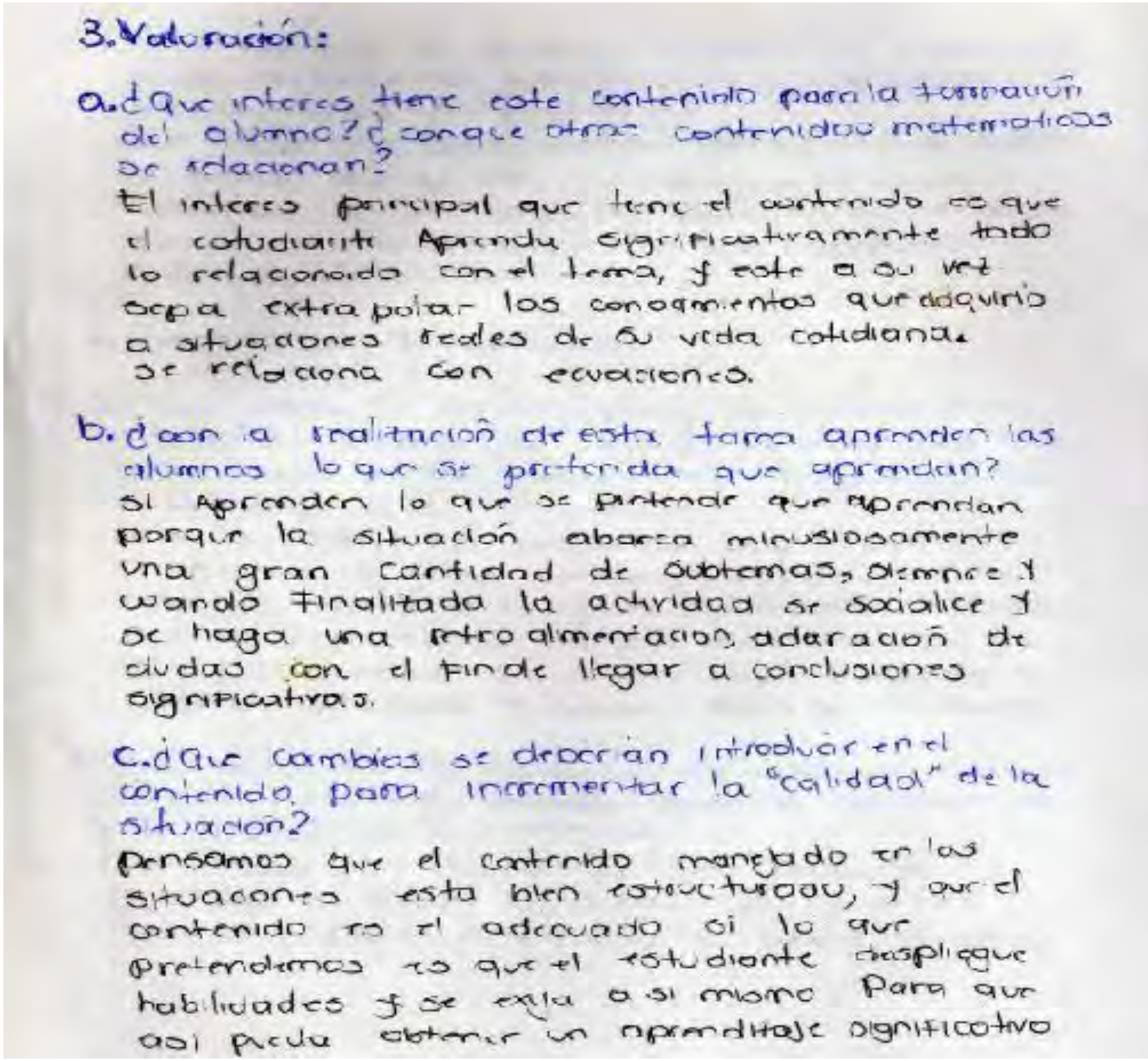
3)
a) el interes que tiene es que el Alumno Razono, e interprete de una mejor manera estas situaciones y se apropie del conocimiento, que es lo que se pretende Al final de este Proceso.
se Relaciona, con sucesiones, ecuaciones lineales, solución de ecuaciones
b) claro que sí porque por medio de estas Actividades se pueden que el estudiante explore y se apropie del conocimiento cabe resaltar que el Alumno debe de interesarse por lo que se esta Realizando, para que este Proceso, obtenga buenos Resultados
c) se deberia colocar un modelo por ejemplo, Antes de Aplicar el instrumento para que el Alumno tenga una noción de lo que se Realizara, y de esta manera se obtendria mejor Resultado
d) dibujos A color, involucrar situaciones que tengan que ver con el que Hacer diario, o experiencias de la vida diaria

Figura 68. Respuesta dada por el $G_{(4)7}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.

4.2.1.4.3 *Cambios que se deberían introducir en el contenido para incrementar la "calidad" de la situación*

En el análisis grupal, la totalidad (8, 8) de los grupos mencionan algunos cambios que se deberían introducir en el contenido del cuestionario para incrementar la calidad de la situación. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están: situaciones problema y gráficas. Luego de un análisis mucho más reposado, las *propuestas* de cambio fueron muy puntuales. Ya sugirieron cambios que facilitaran potenciar habilidades de pensamiento; al sugerir contextualizar la situación *proponen* e.g., $G_{(4)1}$: "*se podrían introducir cambios con la formulación de problemas y a partir de este el estudiante elabore gráficas y desarrolle las actividades que se le planteen, también se aumentaría la complejidad de las situaciones con el fin de que el estudiante logre desarrollar habilidades de pensamiento y mejorando así su nivel académico"*; $G_{(7)4}$: "*se debería introducir una situación más cercana al alumno que le* *posibilite solucionar problemas de su hogar o de la vida por ejemplo interpretar, analizar y graficar las facturas de servicios públicos por lo que muchos no sabemos que nos están cobrando y cómo prevenir y ahorrar dinero, esto llamaría la atención y la motivación del discente*"; $G_{(4)5}$: "*no debería modificarse porque así se logra el interés necesario para que el alumno resuelva estas situaciones con los medio disponibles*"; $G_{(4)7}$: "*se debería colocar un modelo parecido, antes de aplicar el instrumento para que el alumno tenga una noción de lo que se realizará y de esta manera se obtendrá mejor resultado*"; $G_{(4)8}$: "*presentar tabla de valores para completarla*"; $G_{(7)2}$: "*pienso que el instrumento está bien elaborado, pensaría que talvez introducir unas cuantas preguntas como las presentes*"; $G_{(7)3}$: "*pensamos que el contenido manejado en las situaciones está bien estructurado, y que el contenido es adecuado si lo que pretendemos es que el estudiante despliegue habilidades y se exija a sí mismo para que así, pueda obtener un aprendizaje significativo*". Los *procedimientos/estrategias* utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, estos son evidentes en las respuestas de $G_{(7)4}$, $G_{(4)7}$ y $G_{(7)3}$, (e.g., $G_{(7)4}$: "*se debería introducir una situación más cercana al alumno que le posibilite solucionar problemas de su hogar o de la vida por ejemplo interpretar, analizar y graficar las facturas de servicios públicos por lo que muchos no sabemos que nos están cobrando y cómo prevenir y ahorrar dinero, esto llamaría la atención y la motivación del discente*"; $G_{(4)7}$: "*se debería colocar un modelo parecido, antes de aplicar el instrumento para que el alumno tenga una noción de lo que se realizará y de esta manera se obtendrá mejor resultado*"; y $G_{(7)3}$: "*pensamos que el contenido manejado en las situaciones está bien estructurado, y que el contenido es adecuado si lo que pretendemos es que el estudiante despliegue habilidades y se exija a sí mismo para que así, pueda obtener un aprendizaje significativo*". Los cambios propuestos son esencialmente de tres tipos básicos: ningún cambio, cambios de tipo didáctico, cambios para involucrar los estudiantes.

En las Figuras 69 y 70 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(7)3}$ y $G_{(7)2}$, respectivamente, dados al apartado valoración de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



3. Valoración:

a. ¿Que interes tiene este contenido para la formación del alumno? ¿con que otros contenidos matematicos se relacionan?

El interes principal que tiene el contenido es que el estudiante Aprenda significativamente todo lo relacionado con el tema, y este a su vez sepa extrapolar los conocimientos que adquirio a situaciones reales de su vida cotidiana.
se relaciona con ecuaciones.

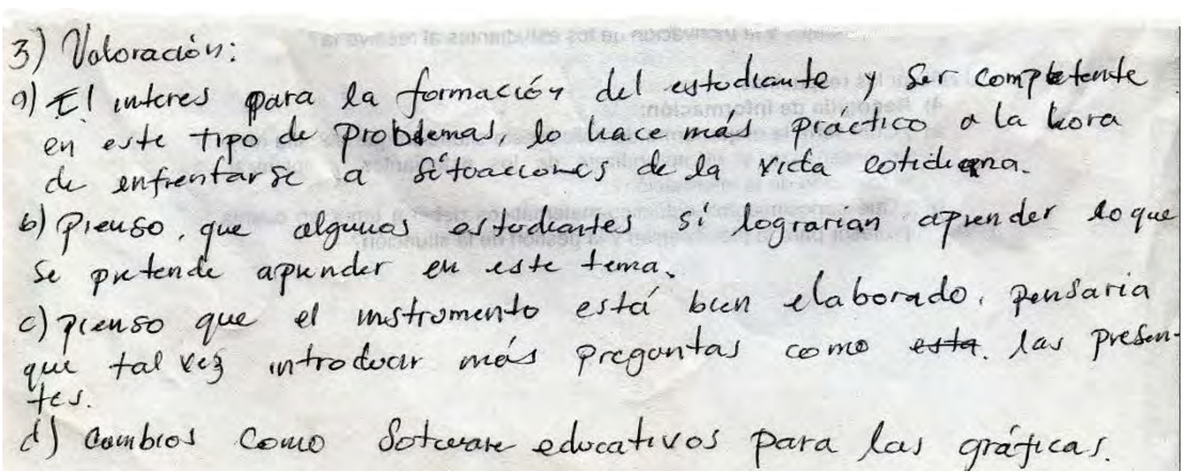
b. ¿con la realización de esta tarea aprenden los alumnos lo que se pretendía que aprendan?

si Aprenden lo que se pretende que aprendan porque la situación abarca minuciosamente una gran cantidad de subtemas, siempre y cuando finalizada la actividad se socialice y se haga una retroalimentación aclaración de dudas con el fin de llegar a conclusiones significativas.

c. ¿Que cambios se deberian introducir en el contenido para incrementar la "calidad" de la situacion?

pensamos que el contenido manejado en las situaciones esta bien estructurado, y que el contenido es el adecuado si lo que pretendemos es que el estudiante despliegue habilidades y se exija a si mismo Para que asi pueda obtener un aprendizaje significativo

Figura 69. Respuesta dada por el $G_{(7)3}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.



3) Valoración:

a) El interes para la formación del estudiante y ser competente en este tipo de problemas, lo hace más práctico a la hora de enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana.

b) Pienso, que algunos estudiantes si lograrian aprender lo que se pretende aprender en este tema.

c) pienso que el instrumento está bien elaborado. pensaria que tal vez introducir más preguntas como ~~esta~~. las presentes.

d) cambios como Software educativos para las gráficas.

Figura 70. Respuesta dada por el $G_{(7)2}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.

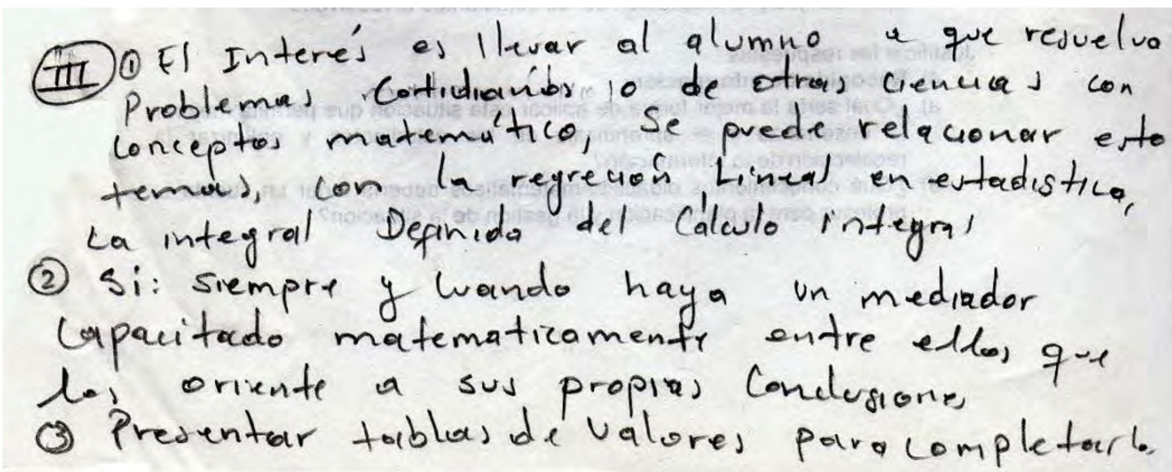
4.2.1.4.4 Posibles cambios a introducir en la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla

En el análisis grupal (5, 5) de los grupos proponen cambios que se podrían introducir a la situación para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla. Los *elementos lingüísticos* que utilizados fueron en su totalidad verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están gráficas de funciones, situaciones problema. Y *proponen* e.g., $G_{(7)3}$: "*que haya una información introductoria sobre el tema que se va a trabajar, es decir describir en un pequeño párrafo la situación que se plantea manejar en las respectivas graficas de funciones*"; $G_{(7)2}$: "*cambios como software educativos para las gráficas*"; $G_{(4)7}$: "*dibujos de color, envolver situaciones que tengan que ver con el quehacer diario, o experiencias de la vida diaria*"; $G_{(4)1}$: "*se podrían introducir situaciones problemas contextualizadas, en donde el estudiante logre relacionar los conocimientos previos con los nuevos, permitiéndole el afianzamiento de la temática mejorando así sus niveles cognitivos; también estas situaciones problemas deben contener información conocida y motivadora para que el estudiante se sienta atraído a las soluciones de éstas*".

Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados son evidentes en las respuestas de los $G_{(7)3}$ y $G_{(4)1}$, (e.g., $G_{(7)3}$: "*que haya una información introductoria sobre el tema que se va a trabajar, es decir describir en un pequeño párrafo la situación que se plantea manejar en las respectivas graficas de funciones*"; $G_{(4)1}$: "*se podrían introducir situaciones problemas contextualizadas, en donde el estudiante logre relacionar los conocimientos previos con los nuevos, permitiéndole el afianzamiento de la temática mejorando así sus niveles cognitivos; también estas situaciones problemas deben contener información conocida y motivadora para que el estudiante se sienta atraído a las soluciones de éstas*". Los cambios que se proponen son esencialmente de tres tipos: los que proponen que no se haga ningún cambio, los que piden dar mayor protagonismo al estudiante y los que piden modificar didácticamente la situación.

En la discusión por grupos, en ambos niveles, fueron muy críticos al considerar que la tarea en sí estaba descontextualizada por tratarse de una novela prácticamente desconocida para los estudiantes y en general en el contexto colombiano lo es. Propusieron que se podría contextualizar con sólo cambiar el nombre de la novela o colocándoles una situación que involucre los servicios públicos de sus hogares, a los que tienen acceso con mayor facilidad. Considerando que de esta manera se lograría implicarlos más en su propio proceso de aprendizaje, los de práctica docente no hicieron críticas al cuestionario.

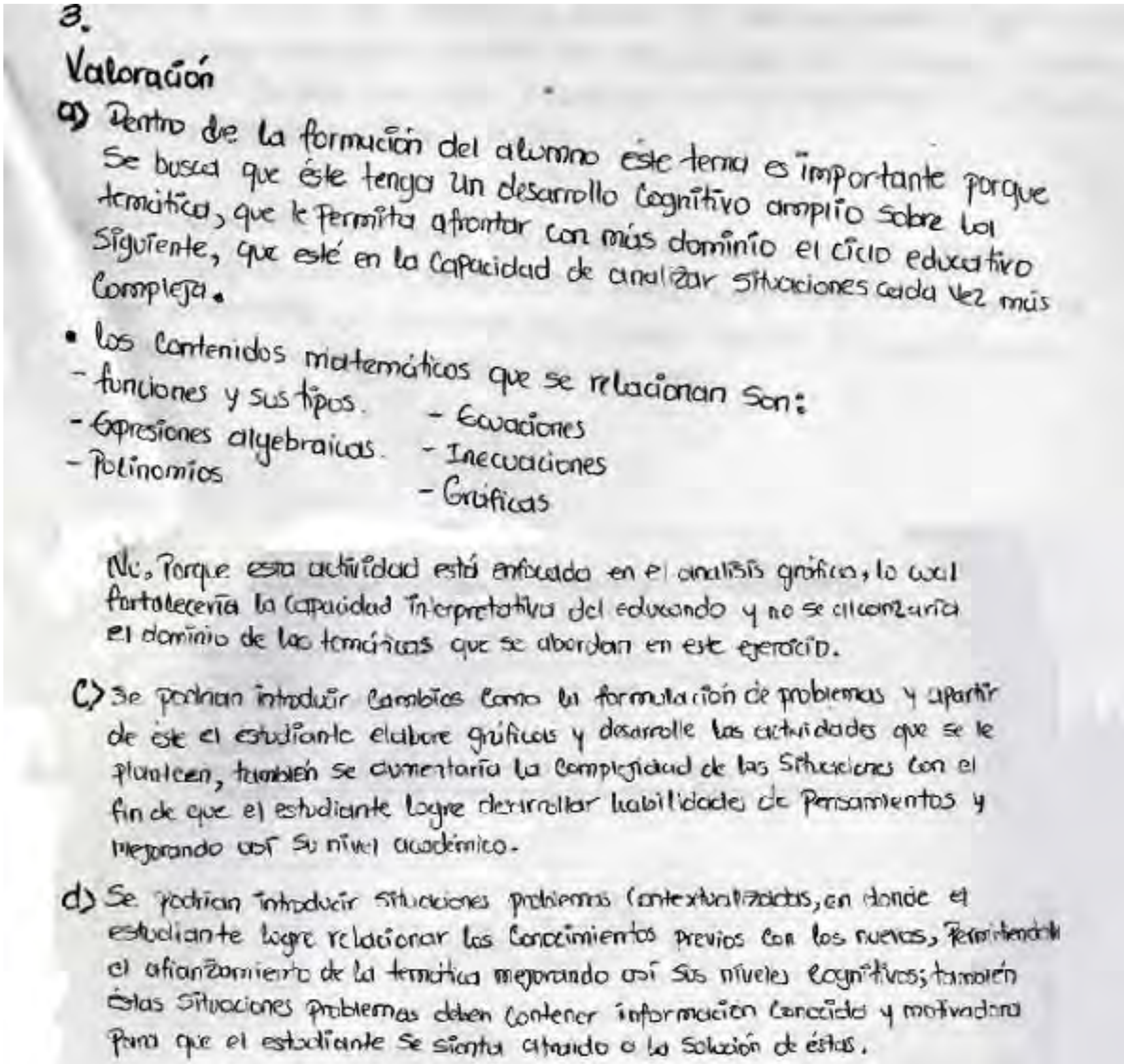
En las Figura 71 y 72 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(4)8}$ y $G_{(4)1}$, respectivamente, dados al apartado valoración de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.


III ① El Interés es llevar al alumno a que resuelva Problemas Cotidianos, o de otras Ciencias con conceptos matemático, Se puede relacionar estos temas, con la regresión Lineal en estadística, La integral Definida del Calculo integral

② Si: siempre y cuando haya un mediador capacitado matematicamente entre ellos que los oriente a sus propias Conclusiones

③ Presentar tablas de valores para completarla

Figura 71. Respuesta dada por el $G_{(4)8}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.



3.

Valoración

a) Dentro de la formación del alumno este tema es importante porque Se busca que éste tenga un desarrollo Cognitivo amplio Sobre la temática, que le permita afrontar con más dominio el ciclo educativo siguiente, que esté en la Capacidad de analizar situaciones cada vez más Compleja.

• los Contenidos matemáticos que se relacionan son:
- funciones y sus tipos.
- Expresiones algebraicas.
- Polinomios
- Ecuaciones
- Inecuaciones
- Gráficas

No, Porque esta actividad está enfocado en el análisis gráfico, lo cual fortalecería la Capacidad Interpretativa del educando y no se alcanzaría el dominio de las temáticas que se abordan en este ejercicio.

C) Se podrían introducir Cambios Como la formulación de problemas y apartir de éste el estudiante elabore gráficas y desarrolle las actividades que se le planteen, también se aumentaría la Complejidad de las Situaciones Con el fin de que el estudiante logre desarrollar habilidades de Pensamientos y mejorando así su nivel académico.

d) Se podrían introducir Situaciones problemas Contextualizadas, en donde el estudiante logre relacionar los Conocimientos previos Con los nuevos, Permitiendo el afianzamiento de la temática mejorando así sus niveles Cognitivos; también éstas Situaciones problemas deben Contener información Conocida y motivadora Para que el estudiante Se sienta atraído a la Solución de éstas.

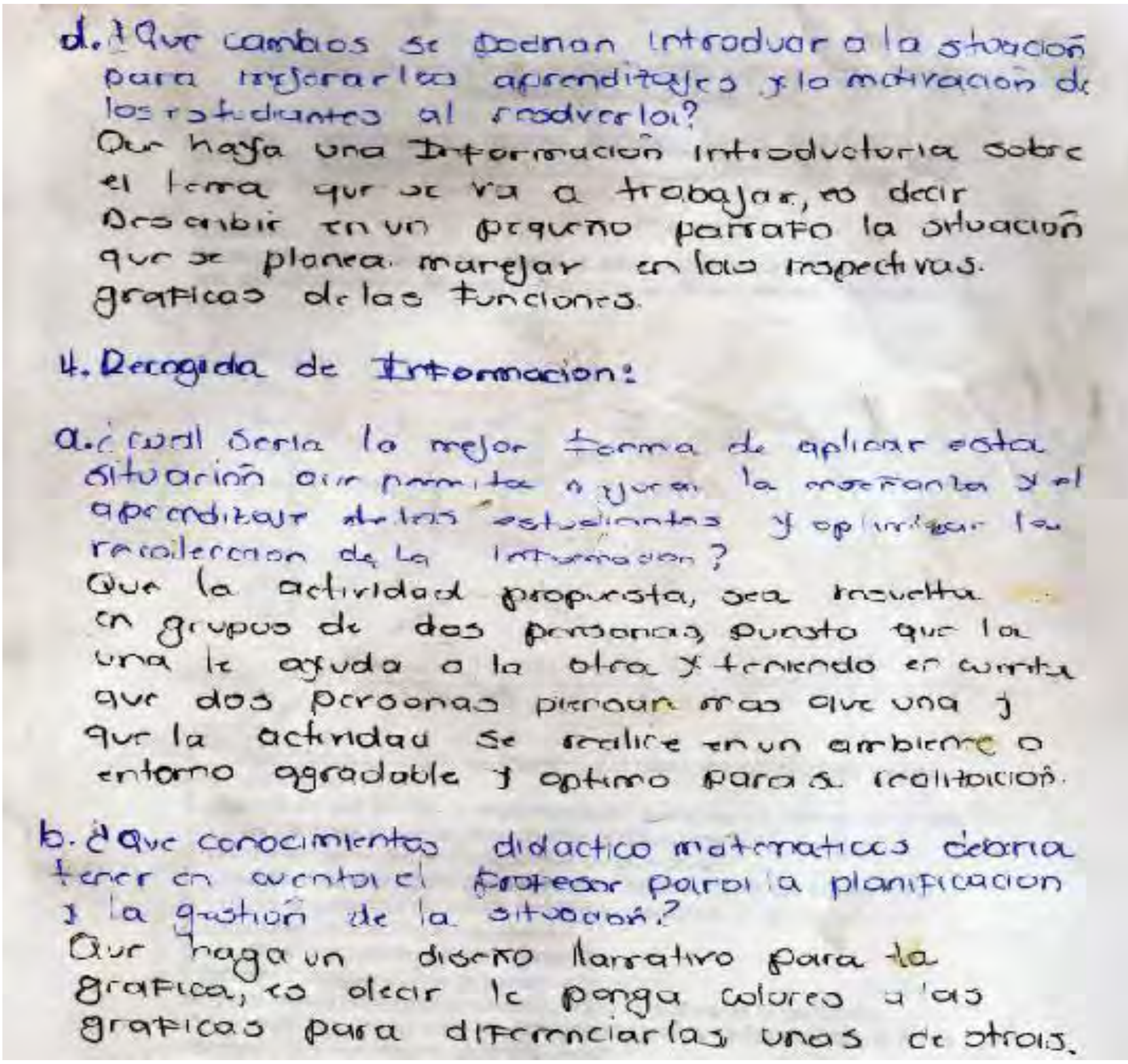
Figura 72. Respuesta dada por el $G_{(4)1}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración de la guía de análisis.

4.2.1.5 *Recogida de información*

4.2.1.5.1 Forma de aplicar la situación que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la recolección de la información

En el análisis grupal, todos (8, 8) los grupos dan su opinión sobre la mejor forma de aplicar la situación que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la recolección de la información. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su mayoría verbales. Entre los *conceptos/definiciones* que destacaron están: función, ecuación, graficación. Y como la mejor forma de aplicar esta situación que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la recolección de la información, *proponen*: e.g., $G_{(7)3}$: “*que la actividad propuesta, sea resuelta en grupos de dos personas, puesto que la una le ayuda a la otra y teniendo en cuenta que dos personas piensan más que una y que la actividad se realice en un ambiente o entorno agradable y óptimo para su realización*”; $G_{(4)5}$: “*dándole a los estudiantes la ecuación de cada función facilitándole el solucionar las dificultades que se presentan, y la gráficación, es decir, saber graficar las funciones lineales y cuadráticas*; $G_{(4)8}$: “*colocar preguntas abiertas al estudiante que le permitan argumentar, proponer y comunicar*”; $G_{(7)4}$: “*la mejor forma de solucionar estas situación y hacerla entendible para los alumnos, es invitarlos a leer y responder conscientemente lo que cree que es la respuesta y además que es lo más fundamental, la socialización por parte del docente como se debería proceder para la solución adecuada del problema*”; $G_{(4)1}$: “*antes de aplicar esta situación el docente debe tener en cuenta si los estudiantes se encuentran preparados y dominan los temas que se van a tratar en la situación, lo que se le plantee debe estar relacionado con su cotidianidad, lo cual motive a resolver dicha situación*”; $G_{(4)7}$: “*antes que todo elaborar primero con los estudiantes, sobre lo que se realizará, de esta manera no los tomamos desprevenidos al momento de aplicar dicho instrumento y explicarle a los alumnos sobre el instrumento el cual se aplicara*”; $G_{(7)2}$: “*elaborar situaciones donde el estudiante pueda argumentar su repuesta. Así daría una mejor información por parte del estudiante*”; $G_{(7)6}$: “*después de haber explicado la temática y haber resuelto ciertos ejercicios de menor esfuerzo, relacionados con la temática*”. Los *procedimientos/estrategias* utilizadas en la solución de esta tarea parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, estos son evidentes en las respuestas de todos los grupos, excepto en la de $G_{(7)6}$. As propuestas giran alrededor de tres aspectos: que la resuelvan de forma individual, que la resuelvan en pequeños grupos y utilizando recursos o material de apoyo.

En las Figura 73, 74, 75 y 76 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(7)3}$, $G_{(4)5}$, $G_{(7)6}$ y $G_{(4)8}$, respectivamente, dados al apartado recogida de información de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



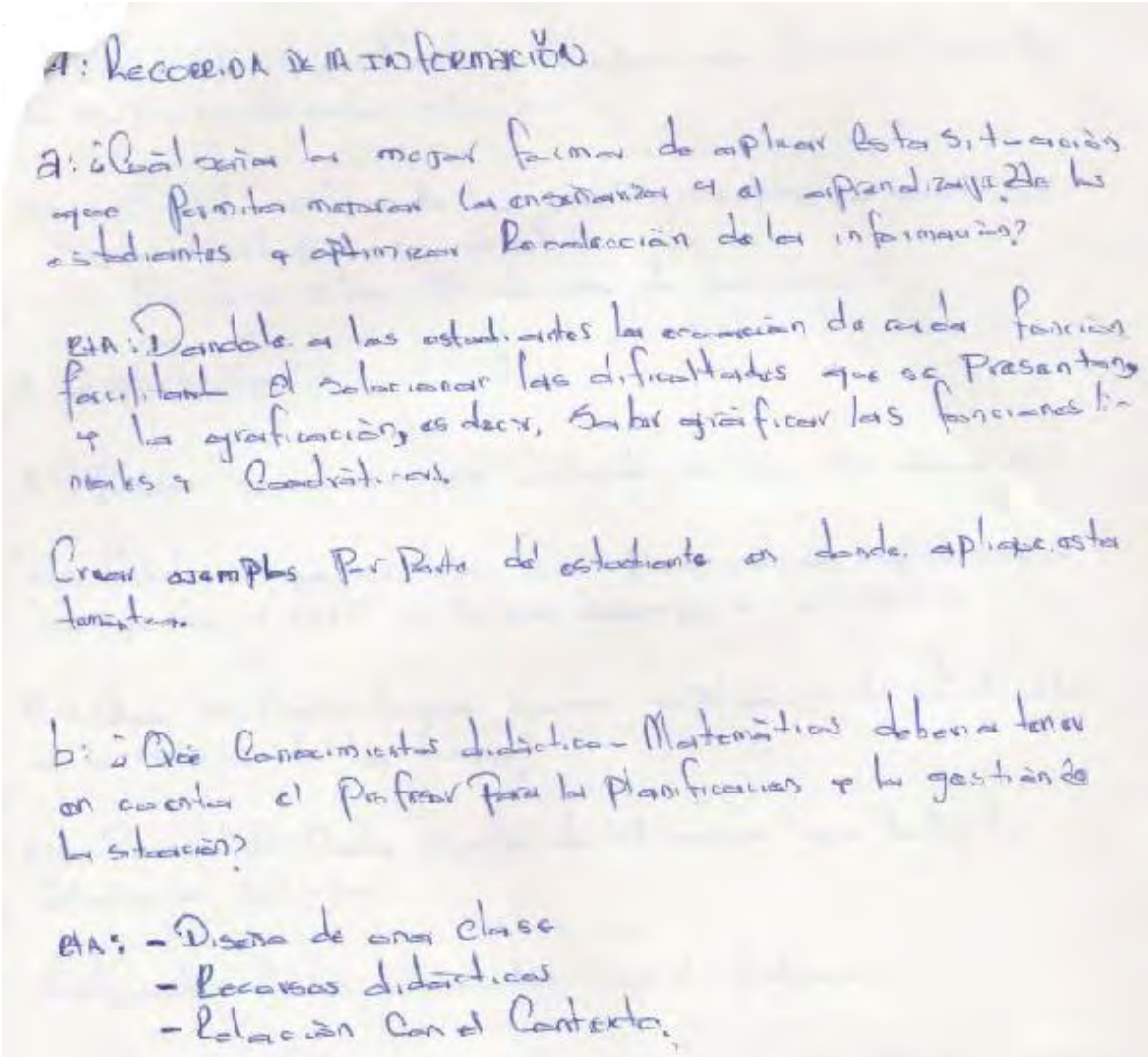
d. ¿Que cambios se podrian introducir a la situación para mejorarle los aprendizajes y la motivación de los estudiantes al resolverla?
Que haya una información introductoria sobre el tema que se va a trabajar, es decir Describir en un pequeño parrafo la situación que se planea manejar en las respectivas graficas de las funciones.

4. Recogida de Información:

a. ¿cual seria la mejor forma de aplicar esta situación que permita mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar la recolección de la información?
Que la actividad propuesta, sea resuelta en grupos de dos personas, puesto que la una le ayuda a la otra y teniendo en cuenta que dos personas piensan mas que una y que la actividad se realice en un ambiente o entorno agradable y optimo para su realización.

b. ¿Que conocimientos didactico matematicos deberia tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la situación?
Que haga un diseño llamativo para la grafica, es decir le ponga colores a las graficas para diferenciarlas unas de otras.

Figura 73. Respuesta dada por el $G_{(7)3}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado valoración (c) y recogida de información de la guía de análisis.


4: Recogida de la información

a: ¿Cuál serían las mejor forma de aplicar estas situaciones que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes y optimizar recolección de la información?

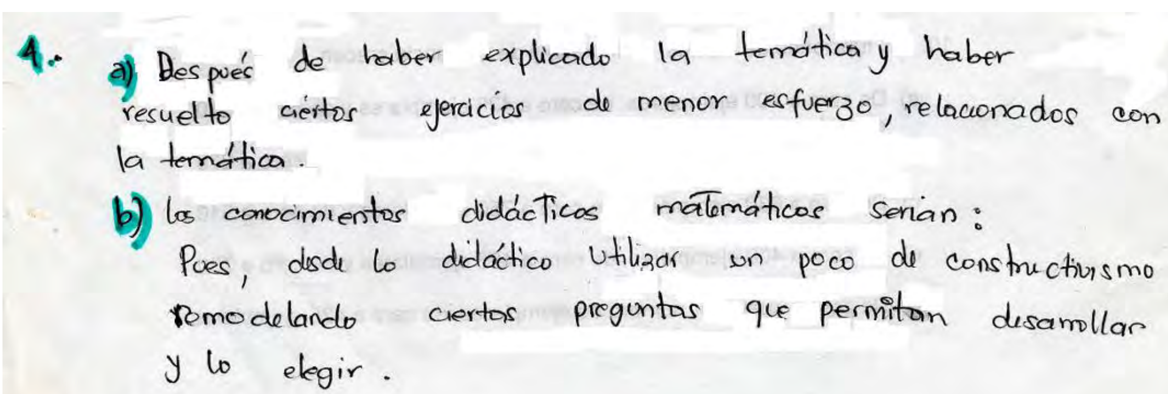
RtA: Dándole a los estudiantes las ecuación de cada función facilitando el solucionar las dificultades que se presentan y la graficación, es decir, saber graficar las funciones lineales y cuadráticas.

Crear ejemplos por parte del estudiante en donde aplique esta temática.

b: ¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos deben tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la situación?

RtA: - Diseño de una clase
- Recursos didácticos
- Relación con el contexto.

Figura 74. Respuesta dada por el $G_{(4)5}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.


4. a) Después de haber explicado la temática y haber resuelto ciertos ejercicios de menor esfuerzo, relacionados con la temática.

b) los conocimientos didácticos matemáticos serían:
Pues, desde lo didáctico utilizar un poco de constructivismo modelando ciertas preguntas que permitan desarrollar y lo elegir.

Figura 75. Respuesta dada por el $G_{(7)6}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.

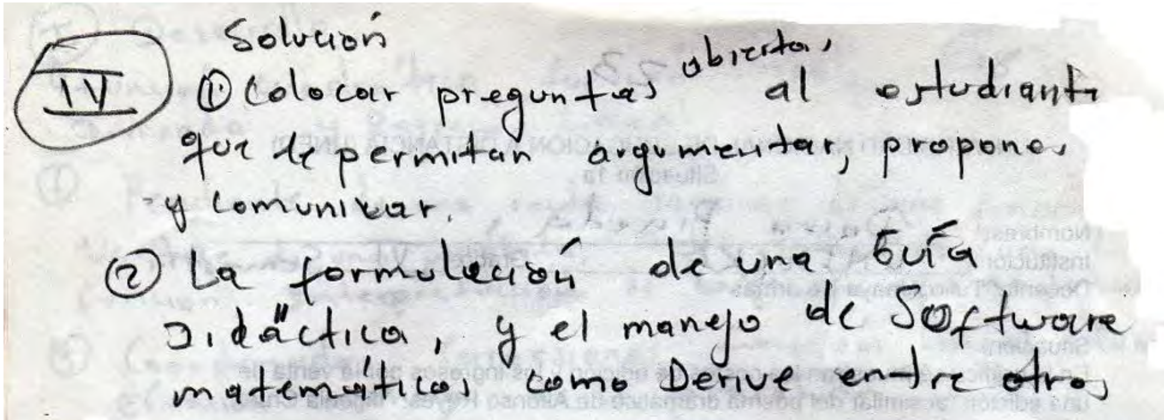
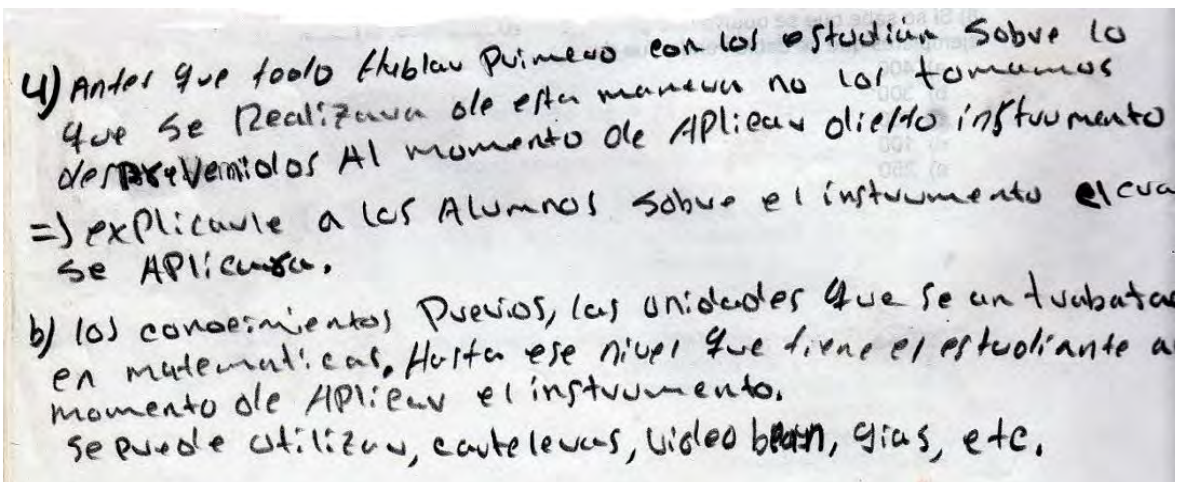

IV
Solución
① Colocar preguntas abiertas al estudiante
que le permitan argumentar, proponer
y comunicar.
② La formulación de una Guía
Didáctica, y el manejo de Software
matemáticos, como Derive entre otros,

Figura 76. Respuesta dada por el $G_{(4)8}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.

4.2.1.5.2 Conocimientos didáctico-matemáticos del profesor para la planificación y la gestión de la situación

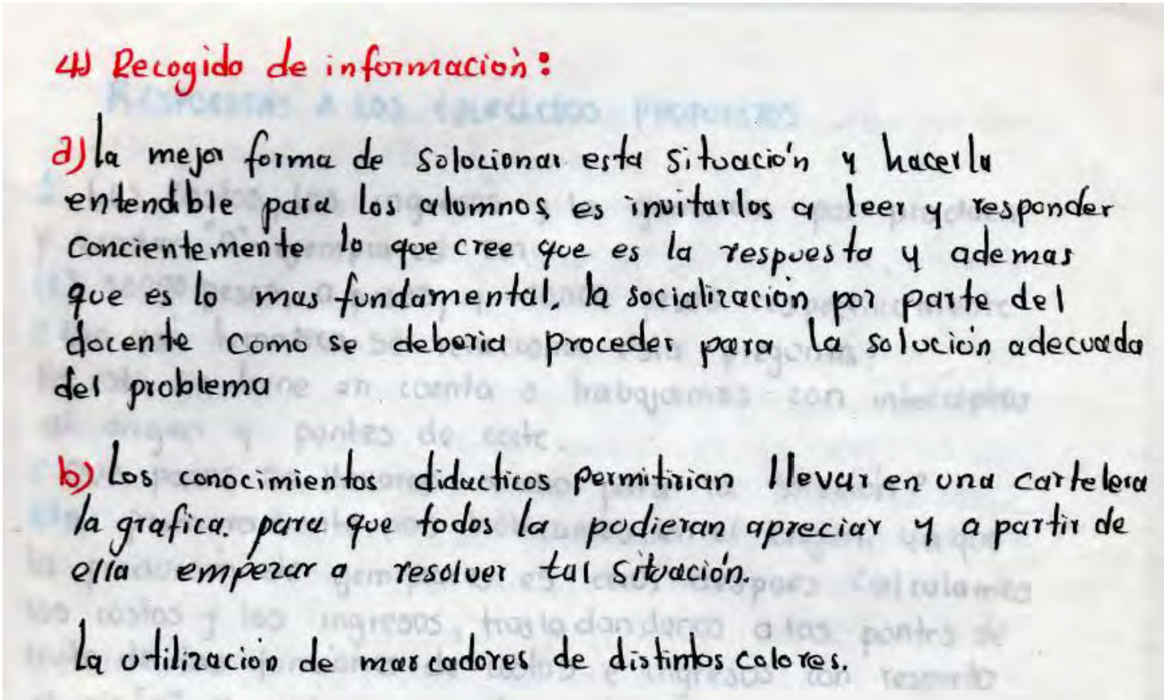
En el análisis grupal la totalidad (8, 8) de los grupos reconocen algunos conocimientos didáctico-matemáticos que deberían tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la situación. Los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad. Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan están: constructivismo, conocimientos didácticos, gráficas, conocimientos previos, problemas lúdicos, guía didáctica, software matemáticos. Y entre las propuestas que hacen están: e.g., $G_{(7)6}$: "*los conocimientos-didáctico matemáticos serian: Pues, desde lo didáctico utilizar un poco de constructivismo remodelando cierta preguntas que permitan desarrollar y elegir*; $G_{(7)2}$: "*conocimientos didácticos que puedan tener una mejor representación en las gráficas*; $G_{(4)7}$: "*los conocimientos previos, las unidades que se han trabajado en matemáticas, hasta ese nivel que tiene el estudiante al momento de aplicar el instrumento, se pueden utilizar, carteleras, video-Bean, guías, etc.*"; $G_{(4)1}$: "*el docente debe tener pleno conocimiento y dominio de las diferentes estrategias didácticas y relacionarlas con los contenidos matemáticos, para que al momento de desarrollar la situación presente diferentes problemas lúdicos que interesen y motiven al estudiante*"; $G_{(7)4}$: "*los conocimientos didácticos permitirán llevar en una cartelera la gráfica para que todos la pudieran apreciar y a partir de ella empezar a resolver tal situación, la utilización de marcadores de distintos colores*"; $G_{(4)8}$: "*la formulación de una guía didáctica, y el manejo de software matemáticos como derive entre otros*"; $G_{(4)5}$: "*diseño de una clase, recursos didácticos, relación con el contexto*; $G_{(7)3}$: "*que haga un diseño* *llamativo para la gráfica, es decir que le ponga colores a las gráficas para diferenciarlas, unas de otras*". Los procedimientos/estrategias utilizadas parecen ser en su totalidad visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados, son manifiestos en las respuestas del grupo $G_{(4)1}$. Los conocimientos didáctico-matemáticos que debería tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la situación, propusieron discriminarlos teniendo en cuenta: manejo de recursos, conocimiento de los alumnos, relacionar la disciplina con el contexto, conocimiento del currículo, tener amplio conocimiento de la disciplina, conocimiento ampliado del contenido.

En las Figuras 77, 78, 79 y 80 se muestran las soluciones de los profesores en formación de los grupos $G_{(4)7}$, $G_{(7)4}$, $G_{(4)1}$ y $G_{(7)2}$, respectivamente, dados al apartado recogida de información de la guía al analizar el cuestionario diagnóstico.



4) Antes que todo Hablar Primero con los estudian Sobre lo que se Realizara de esta manera no los tomamos desprevenidos Al momento de Aplicar dicho instrumento
=) explicarle a los Alumnos sobre el instrumento el cual se Aplicara.
b) los conocimientos Previos, las unidades que se en trabajar en matemáticas, Hasta ese nivel que tiene el estudiante al momento de Aplicar el instrumento.
se puede utilizar, carteleras, video beam, gias, etc.

Figura 77. Respuesta dada por el $G_{(4)7}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.

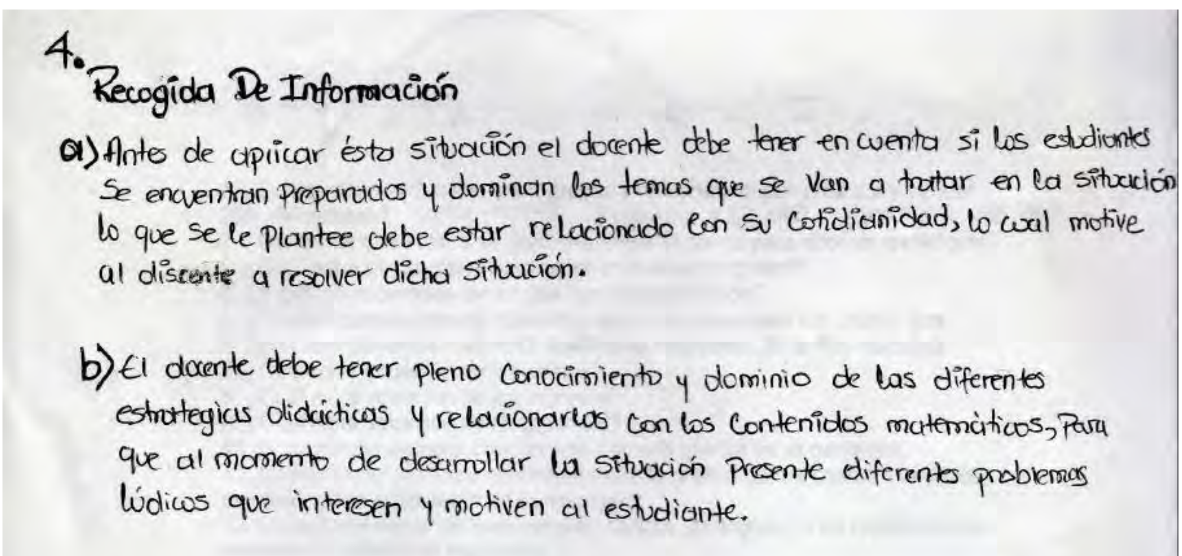

4) Recogido de información:

a) la mejor forma de solocionar esta situación y hacerla entendible para los alumnos es invitarlos a leer y responder concientemente lo que cree que es la respuesta y ademas que es lo mas fundamental, la socialización por parte del docente como se deberia proceder para la solución adecuada del problema

b) Los conocimientos didacticos permitirian llevar en una cartelera la grafica. para que todos la podieran apreciar y a partir de ella empezar a resolver tal situación.

La utilizacion de marcadores de distintos colores.

Figura 78. Respuesta dada por el $G_{(7)4}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.


4. Recogida De Información

a) Antes de apiicar ésta situación el docente debe tener en cuenta si los estudiantes se encuentran preparados y dominan los temas que se van a tratar en la situación lo que se le plantee debe estar relacionado con su cotidianidad, lo cual motive al discente a resolver dicha situación.

b) El docente debe tener pleno conocimiento y dominio de las diferentes estrategias didácticas y relacionarlas con los contenidos matemáticos, para que al momento de desarrollar la situación presente diferentes problemas lúdicos que interesen y motiven al estudiante.

Figura 79. Respuesta dada por el $G_{(4)1}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.

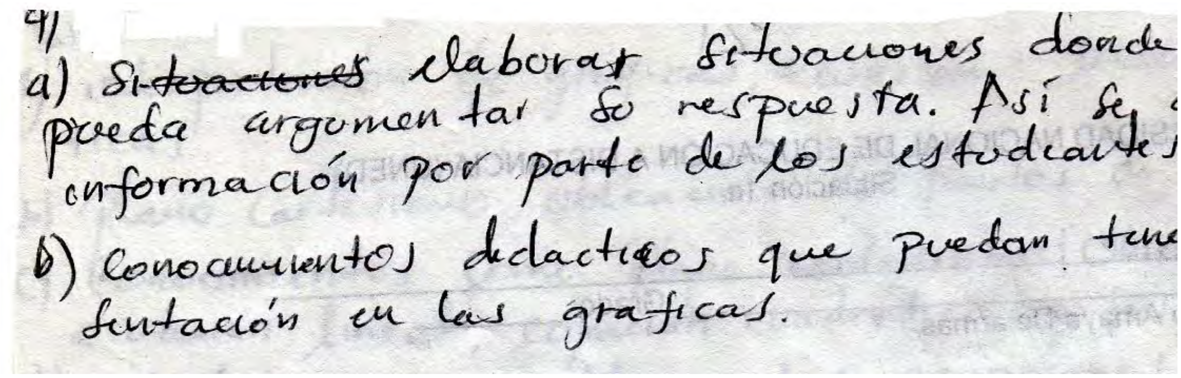

4)
a) ~~Situaciones~~ elaborar situaciones donde
pueda argumentar su respuesta. Así se
información por parte de los estudiantes
b) conocimientos didacticos que puedan tene
sentación en las graficas.

Figura 80. Respuesta dada por el $G_{(7)2}$ al cuestionario diagnóstico, utilizando el apartado recogida de información de la guía de análisis.

4.2.2 El proceso de evaluación

4.2.2.1 La Muestra

Luego del análisis del cuestionario diagnóstico, a finales del segundo semestre del año 2014, a los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas que se ofrece en la Universidad de Sucre, Colombia (26 del quinto y 27 del octavo semestre) se les propuso analizar las respuestas dadas por estudiantes de décimo grado de educación básica a un cuestionario que involucra familias de funciones. En el quinto semestre se orecen las asignaturas: Ecuaciones diferenciales, Estadística descriptiva, DIME III, PPI IV, Procesos cognitivos y ética. Y en el octavo semestre se ven Métodos numéricos, Práctica Docente, Administración Educativa y seminario de Educación II. En el programa se ven tres electivas que se pueden elegir de una lista de asignaturas tanto disciplinares, como didáctico-pedagógicas.

Para poner a los profesores en formación a realizar un ejercicio evaluativo, se les entregaron las respuestas dadas por estudiantes de décimo grado a un cuestionario que se les aplicó previamente. Las gráficas que realizaron algunos estudiantes de décimo grado se muestran en las figuras 81, 82 y 83, y en las figuras 84, 85 y 86 se muestran las respuestas dadas por los estudiantes de décimo grado, E_5 y E_{10}, al cuestionario que se les propuso resolver.

En las figuras 81, 82 y 83 se muestran las gráficas realizadas por estudiantes de décimo grado, al cuestionario que involucra familias de funciones.

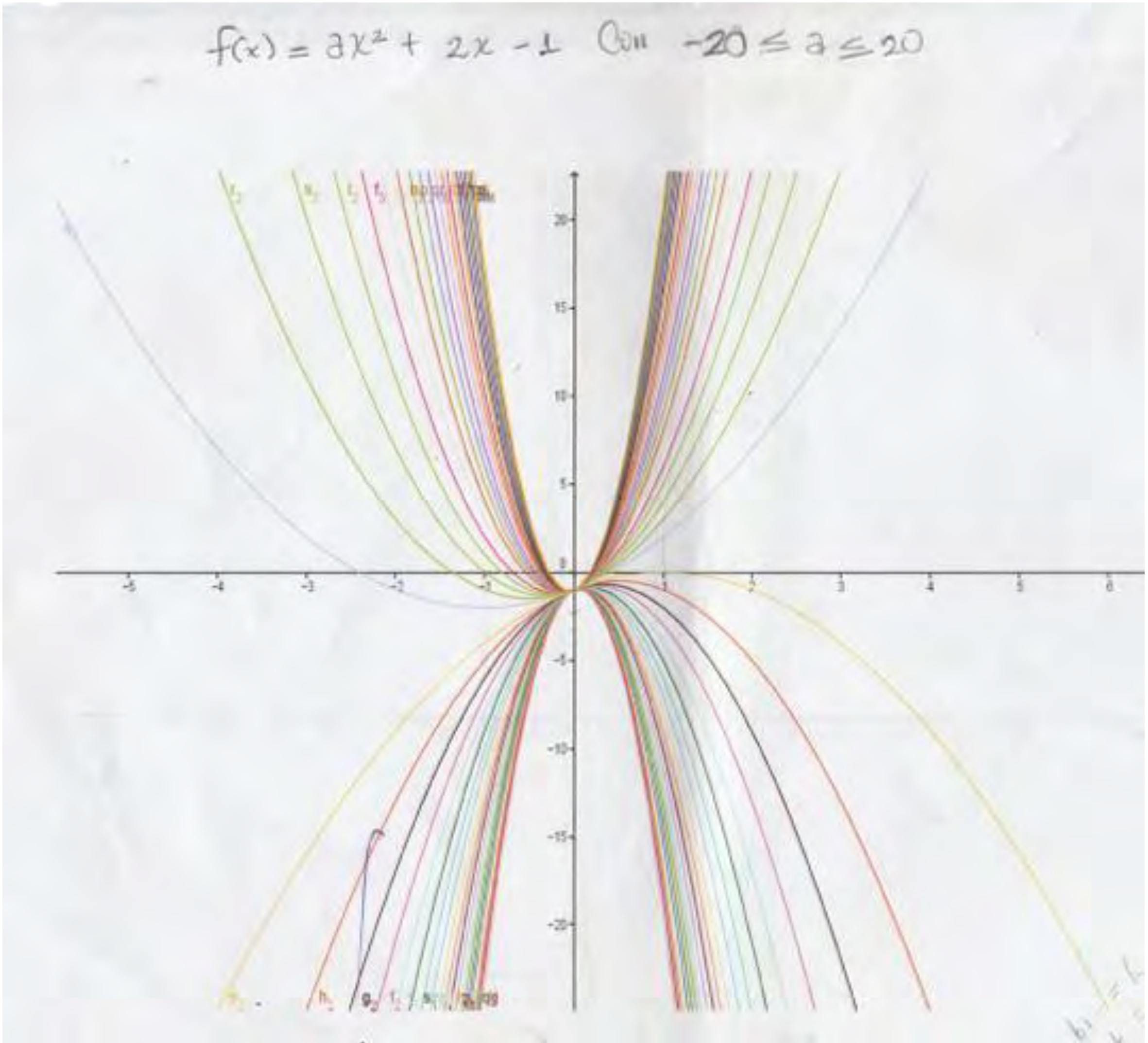


Figura 81. Familia de funciones de la forma $f(x) = ax^2 + 2x - 1, con -20 \leq a \leq 20$, realizadas por estudiantes de décimo grado

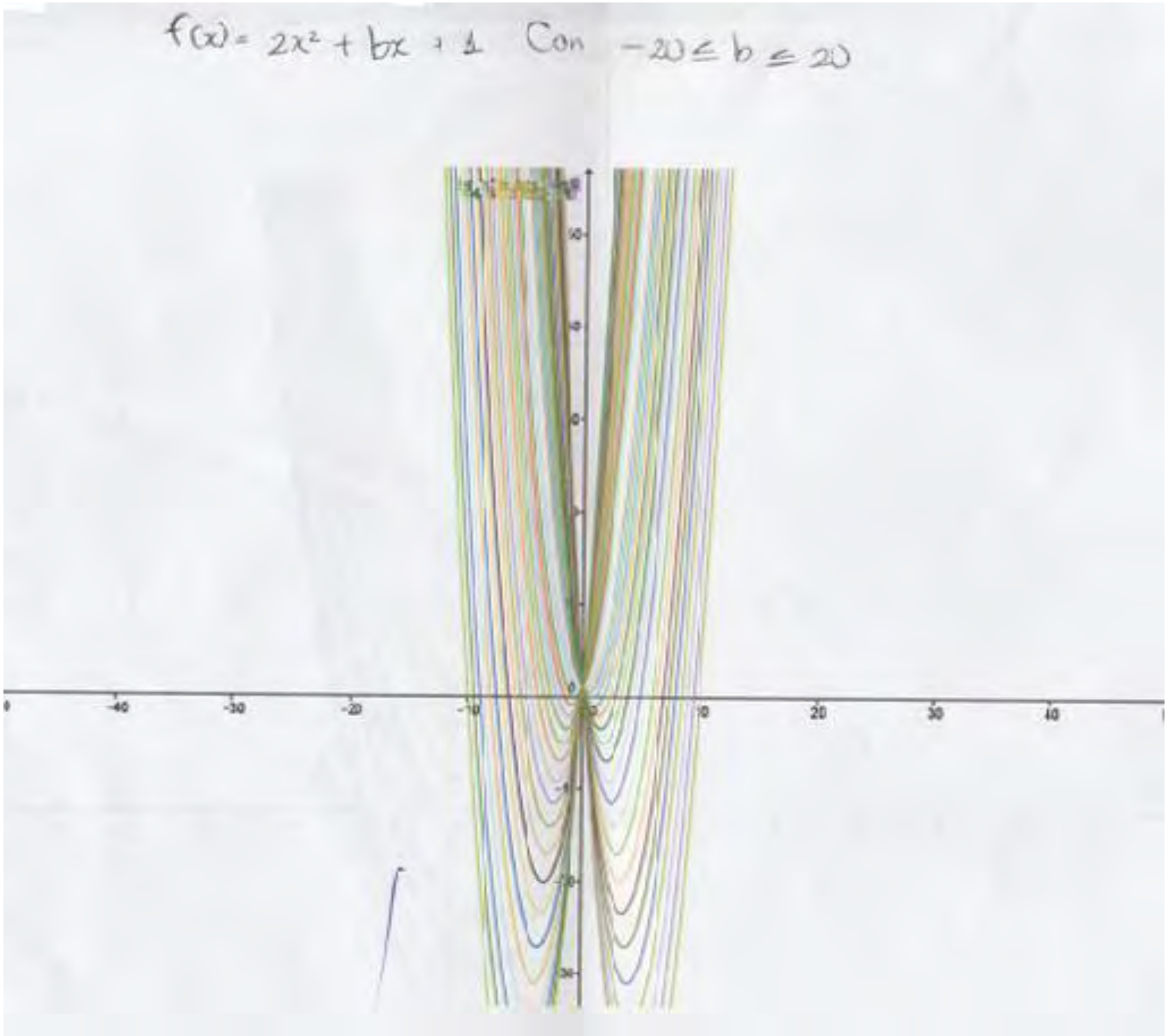


Figura 82. Familia de funciones de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + bx + 1, con - 20 \leq b \leq 20}$, realizadas por estudiantes de décimo grado

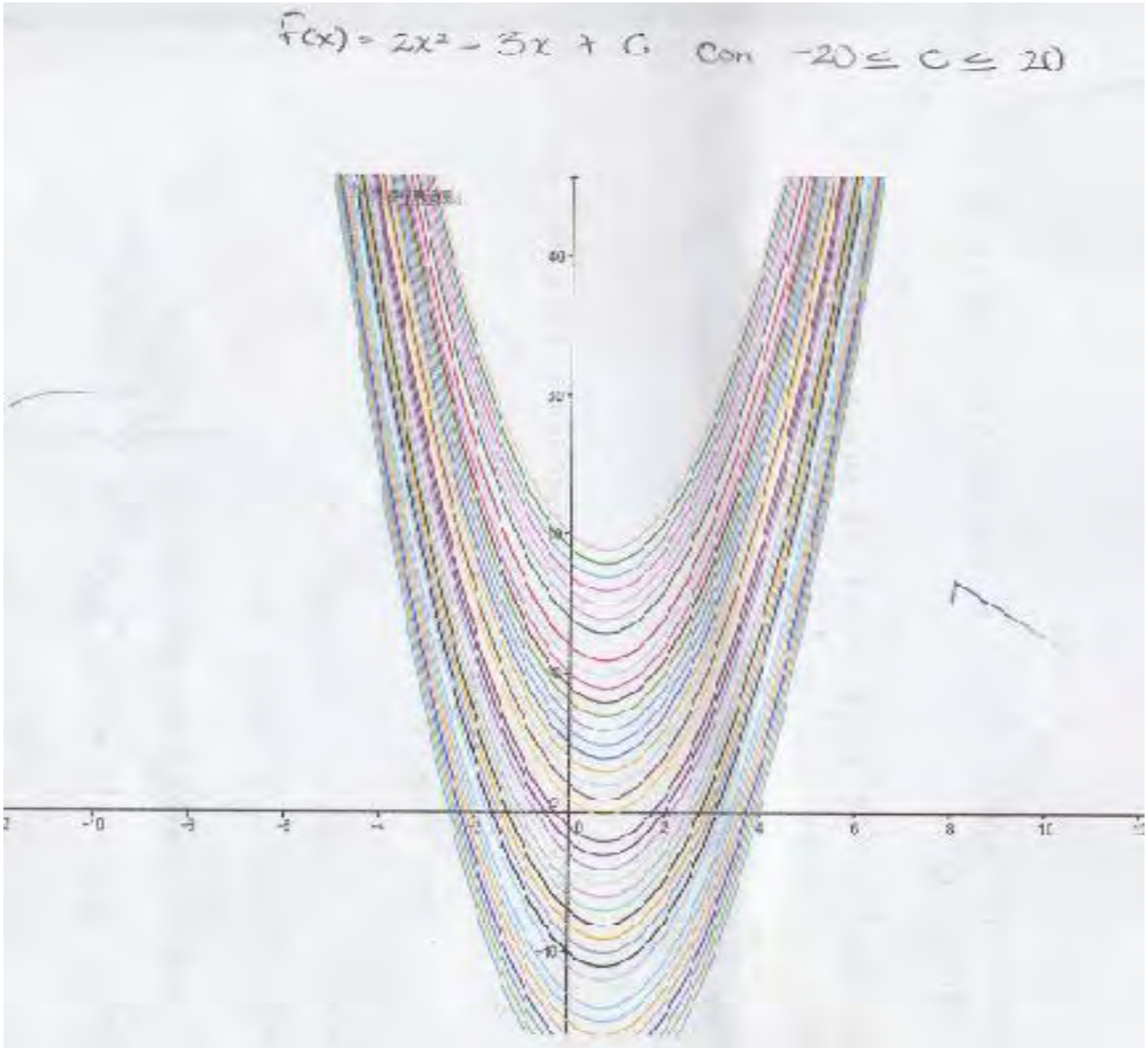


Figura 83. Familia de funciones de la forma $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 3x + c, con - 20 \leq c \leq 20}$, realizadas por estudiantes de décimo grado

En las figuras 84, 85 y 86 se muestran las soluciones dadas por los estudiantes E_5 y E_{10}, de décimo grado, al cuestionario que involucra familias de funciones.

Desarrollo

a. La a hacen que el punto donde se encuentra suba o baje

b. La b hace que en el punto en el que se encuentra si es negativa vaya hacia la derecha y si es positivo hacia la izquierda

c. La c cuando es mayor hace que la gráfica suba

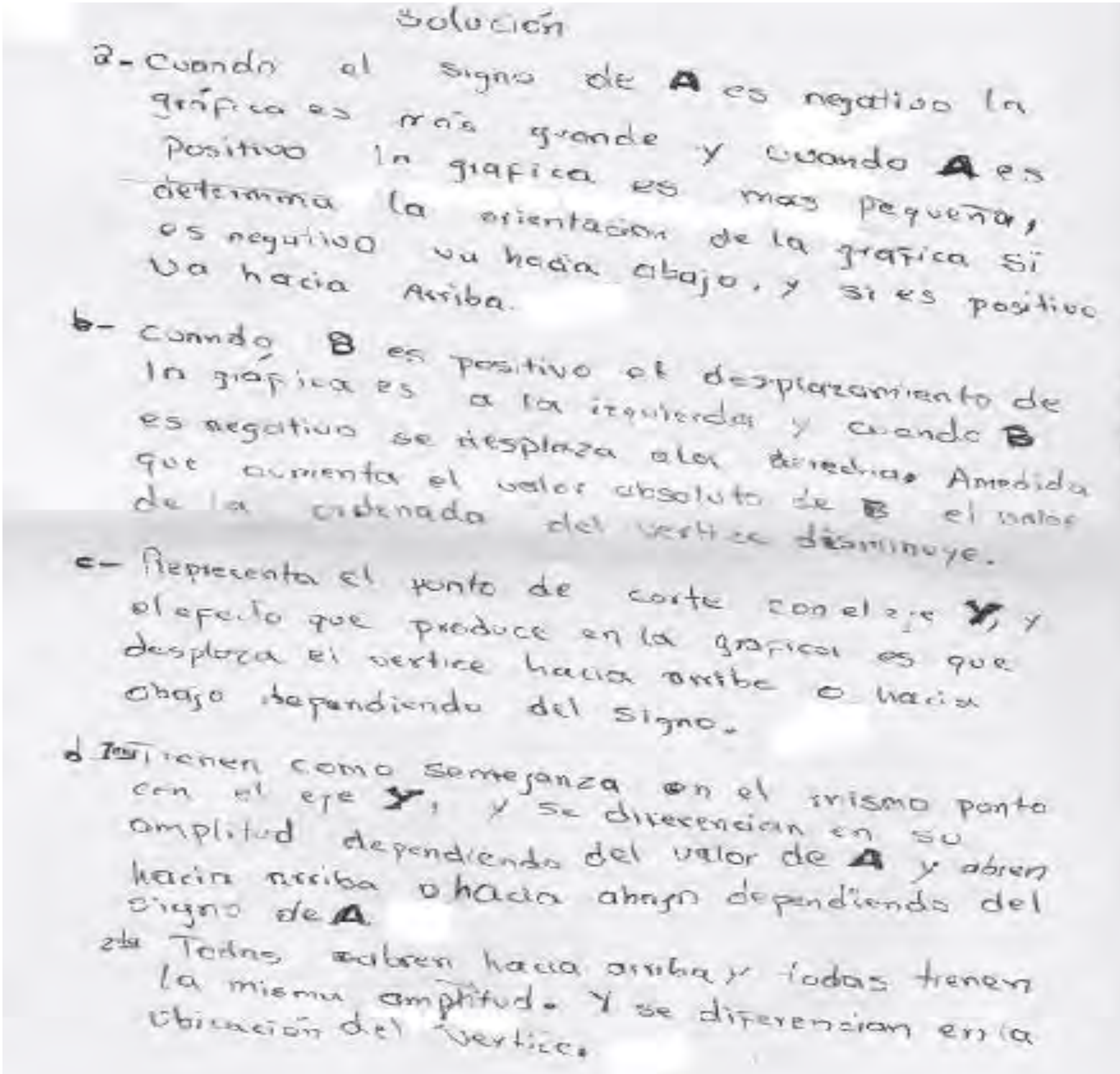
d. Diferencia: Tienen posiciones diferentes

Semejanza: Ambas tienen una curva

e. Diferencia: Los vértices de ninguna tiene los vértices iguales

Semejanza: Todas tienen cóncavo hacia arriva y hacia abajo

Figura 84. Respuestas dadas por el estudiante E_{10} de décimo grado a un cuestionario que involucra familia de funciones



Solución

a- Cuando el signo de **A** es negativo la gráfica es más grande y cuando **A** es positivo la grafica es mas pequeña, determina la orientación de la grafica si es negativo va hacia abajo, y si es positivo va hacia Arriba.

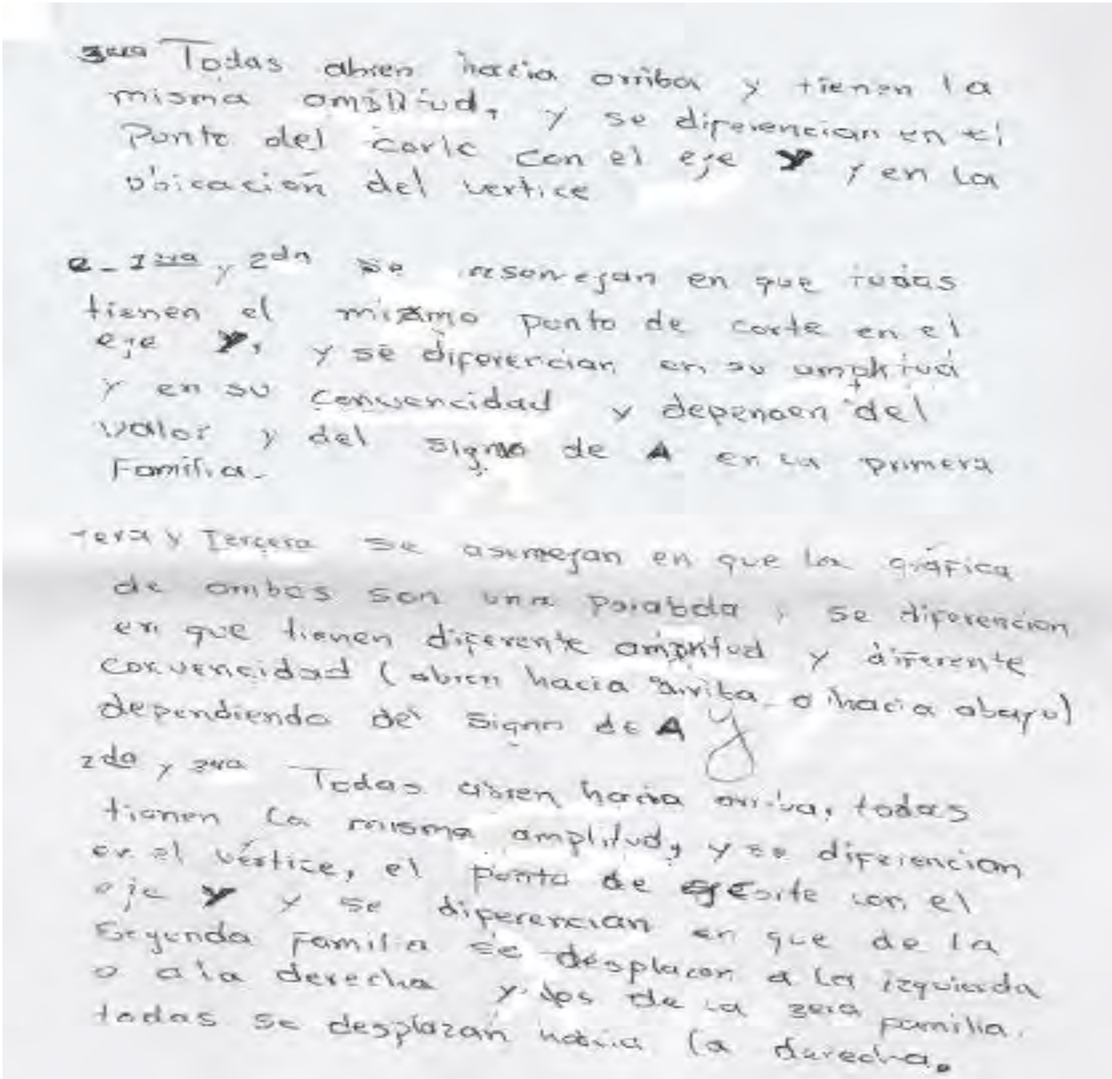
b- Cuando **B** es positivo el desplazamiento de la gráfica es a la izquierda y cuando **B** es negativo se desplaza a la derecha. Amedida que aumenta el valor absoluto de **B** el valor de la ordenada del vertice disminuye.

c- Representa el punto de corte con el eje **Y**, y el efecto que produce en la grafica es que desplaza el vertice hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo.

d 1ra Tienen como semejanza en el mismo punto con el eje **Y**, y se diferencian en su amplitud dependiendo del valor de **A** y abren hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de **A**.

2da Todas abren hacia arriba y todas tienen la misma amplitud. Y se diferencian en la ubicación del vertice.

Figura 85. Respuestas dadas por el estudiante E_5 de décimo grado a un cuestionario (a-d) que involucra familia de funciones



3era Todas abren hacia arriba y tienen la misma amplitud, y se diferencian en el Punto del corte con el eje Y y en la ubicación del vertice

e_ 1era y 2da se asemejan en que todas tienen el mismo punto de corte en el eje Y, y se diferencian en su amplitud y en su convencidad y dependen del valor y del signo de A en la primera Familia.

1era y Tercera se asemejan en que la gráfica de ambos son una parabola y se diferencian en que tienen diferente amplitud y diferente convexidad (abren hacia arriba o hacia abajo) dependiendo del signo de A y

2da y 3era Todas abren hacia arriba, todas tienen la misma amplitud, y se diferencian en el vértice, el punto de corte con el eje Y y se diferencian en que de la segunda familia se desplazan a la izquierda o a la derecha y los de la 3era familia todas se desplazan hacia la derecha.

Figura 86. Respuestas dadas por el estudiante E_5 de décimo grado a un cuestionario (e) que involucra familia de funciones

Los profesores en formación debían conformar equipos de entre tres y cinco compañeros (salieron 8 grupos del quinto semestre y 8 del octavo) y entregar un informe escrito en el que debían responder por dos tarea específicas: 1) reconstruir el cuestionario que se les debió haber hecho a los estudiantes de décimo grado para que dieran las respuestas que dieron, y 2) analizar las respuestas dadas por dichos estudiantes al cuestionario que se les planteó. A continuación se muestra el análisis de las respuestas dadas por los profesores en formación ante estos requerimientos.

4.2.2.2 Reconstruyendo un cuestionario de familia de funciones

A los profesores en formación se les pidió reconstruir el cuestionario que se les debió haber aplicado a los estudiantes de décimo grado para que dieran las respuestas que dieron. Y atendiendo a las respuestas dadas por los estudiantes de décimo grado, algunas de las cuales se muestran en las figuras 84, 85 y 86, los profesores en formación reconstruyeron el cuestionario.

En las figuras 87, 88, 89, 90, 91, 92 y 93 se muestran las posibilidades que dieron $G_{(5)1}$, $G_{(8)7}$, $G_{(5)4}$, $G_{(8)2}$, $G_{(5)5}$, $G_{(8)5}$ y $G_{(5)3}$ al reconstruir el cuestionario que se les solicitó.

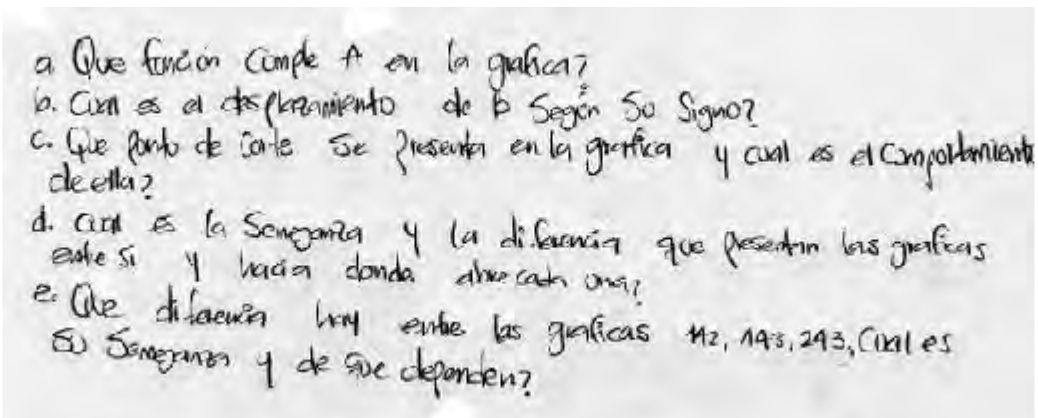

a. Que función Cumple A en la grafica?
b. Cual es el desplazamiento de b Según Su Signo?
c. Que punto de corte se presenta en la grafica y cual es el Comportamiento de ella?
d. Cual es la Semejanza y la diferencia que presentan las graficas entre si y hacia donde abre cada una?
e. Que diferencia hay entre las graficas 1y2, 1y3, 2y3, Cual es su Semejanza y de que dependen?

Figura 87. Propuesta dada por el $G_{(5)1}$ al reconstruir el cuestionario.

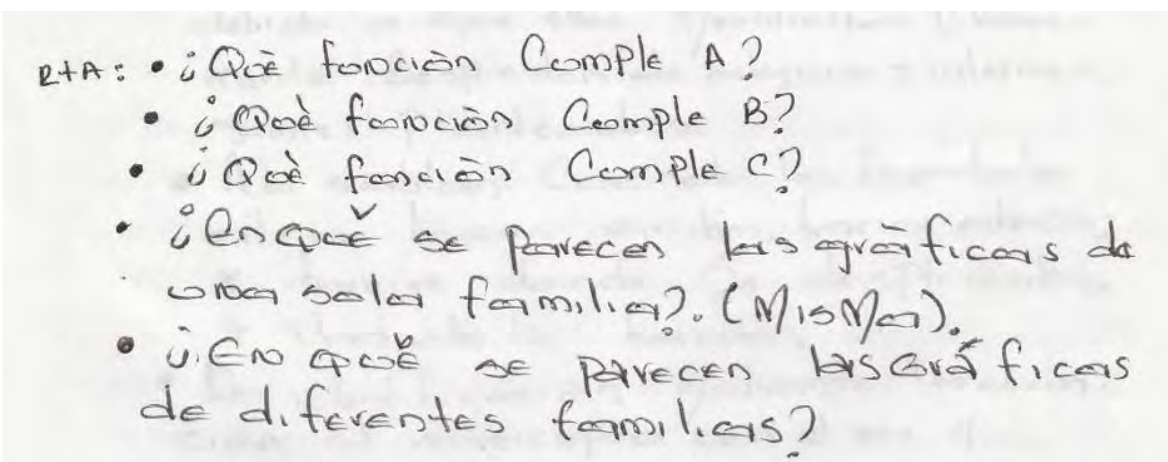

R+A: • ¿Què función Cumple A?
• ¿Què función Cumple B?
• ¿Què función Cumple C?
• ¿En què se parecen las gràficas de una sola familia?. (Misma).
• ¿En què se parecen las gràficas de diferentes familias?

Figura 88. Propuesta dada por el $G_{(8)7}$ al reconstruir el cuestionario.

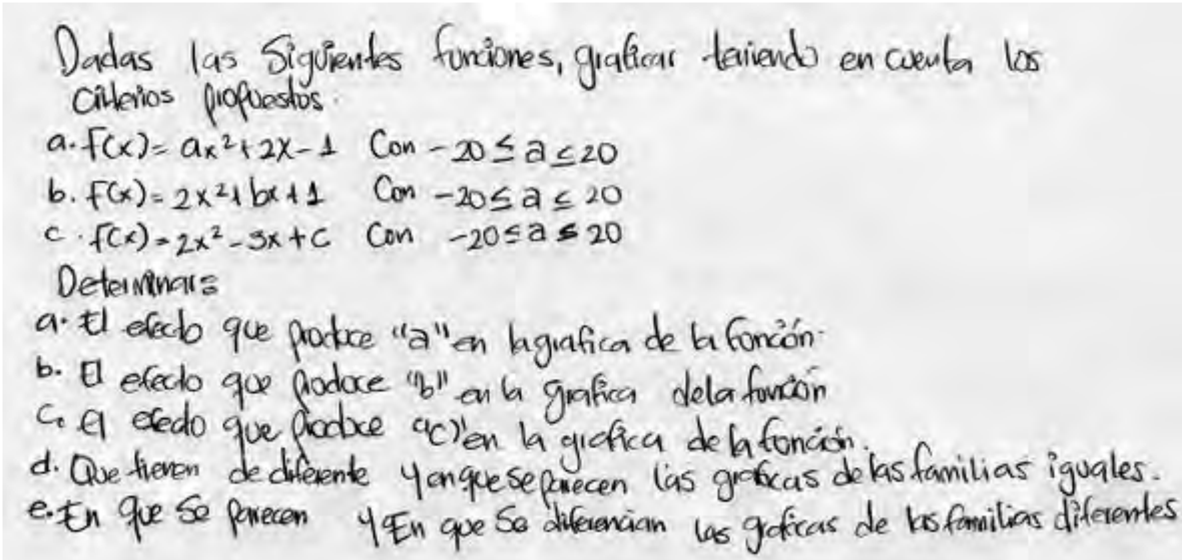

Dadas las Siguientes funciones, graficar teniendo en cuenta los criterios propuestos.
a. $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ Con $-20 \leq a \leq 20$
b. $f(x) = 2x^2 + bx + 1$ Con $-20 \leq a \leq 20$
c. $f(x) = 2x^2 - 3x + C$ Con $-20 \leq a \leq 20$
Determinar:
a. El efecto que produce "a" en la grafica de la función.
b. El efecto que produce "b" en la grafica de la función
c. El efecto que produce "c" en la grafica de la función.
d. Que tienen de diferente y en que se parecen las graficas de las familias iguales.
e. En que se parecen y En que se diferencian las graficas de las familias diferentes.

Figura 89. Propuesta dada por el $G_{(5)4}$ al reconstruir el cuestionario.

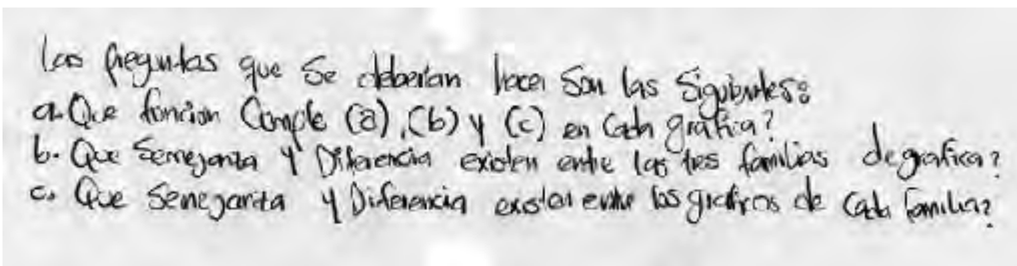

Las preguntas que se deberian hacer son las siguientes:
a. Que función Cumple (a), (b) y (c) en Cada grafica?
b. Que Semejanza y Diferencia existen entre las tres familias de grafica?
c. Que Semejanza y Diferencia existen entre los graficos de Cada familia?

Figura 90. Propuesta dada por el $G_{(8)2}$ al reconstruir el cuestionario.

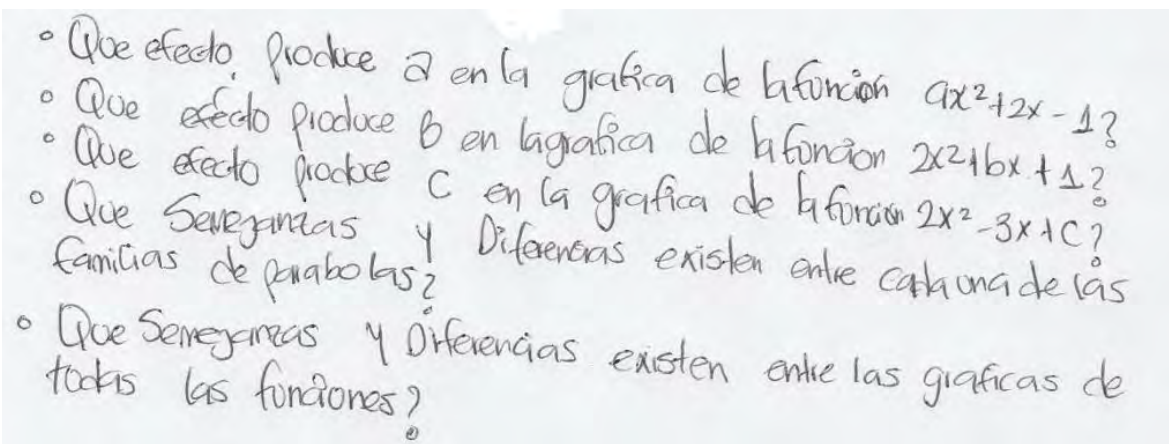

- Que efecto produce a en la grafica de la función $ax^2 + 2x - 1$?
- Que efecto produce B en la grafica de la función $2x^2 + bx + 1$?
- Que efecto produce C en la grafica de la función $2x^2 - 3x + C$?
- Que Semejanzas y Diferencias existen entre cada una de las familias de parabolas?
- Que Semejanzas y Diferencias existen entre las graficas de todas las funciones?

Figura 91. Propuesta dada por el $G_{(5)5}$ al reconstruir el cuestionario.

Como preguntas para esta Situación planteariamos las Siguientes:

- A partir de la grafica de la expresion $f(x) = ax^2+2x-1$, Con $-20 \le a \le 20$ ¿Cual es la función de a en la grafica?
- Observa la grafica de la expresion $f(x) = -2x^2+bx+1$, Con $-20 \le b \le 20$ ¿Cual es la función de b en la grafica?
- Observa la grafica de la función $f(x) = 2x^2-3x+c$, Con $-20 \le c \le 20$
- Establece Semejanzas y Diferencias entre cada una de las familias de parabolas.
- Establece Semejanzas y Diferencias entre las tres graficas presentadas.

Figura 92. Propuesta dada por el $G_{(8)6}$ al reconstruir el cuestionario.

Se les presentaría a los estudiantes la Sgte función Cuadratica Ax^2+Bx+C y se les preguntaria

a. De que depende la forma de la anterior función Cuadratica (Abrir a hacia arriba o hacia abajo?

b. De que dependería que la función mencionada habrá hacia la Derecha o hacia la izquierda?

c. De que dependería el punto de corte de la función con el eje Y?

Figura 93. Propuesta dada por el $G_{(8)3}$ al reconstruir el cuestionario.

Estos profesores en formación al reconstruir el cuestionario se siguieron por las respuestas dadas por los estudiantes de décimo grado y de estas forma fueron reconstruyendo cada una de las preguntas. Sin embargo, presentaron algunas dificultades al redactar las cuestiones que se les solicitaron a los estudiantes de décimo grado. Las dificultades estuvieron relacionadas con cuestiones muy puntuales, como la redacción de las preguntas y cuestiones por las que se indagaron. En el caso específico de $G_{(5)1}$ quien dice "*cuál es el desplazamiento de b según su signo*", quizás queriendo indagar por el comportamiento de la gráfica al manipular el parámetro b. En el caso de $G_{(8)3}$ si presenta errores conceptuales, por ejemplo "de qué depende que la función mencionada habrá hacia la derecha o hacia la izquierda", cuando esa

acción no se pidió en el cuestionario inicial y ninguna de las dieciocho respuestas apuntan ello, ni hay forma, a este nivel, de hacer esta transformación.
En general cada grupo identifica los elementos a los que dieron respuestas los estudiantes de décimo grado – los parámetros a, b y c, las semejanzas y diferencias entre las familias de funciones, tanto intra, como inter grupos- sin embargo en la redacción lo hacen con ciertas imprecisiones, con pocas excepciones como es el caso del $G_{(8)6}$, quienes hacen una muy buena reconstrucción. Los grupos $G_{(8)2}$, $G_{(5)4}$, $G_{(5)5}$ y $G_{(8)7}$ hacen un trabajo bastante aceptable, que de presentárseles a los estudiantes de la media académica, lo comprenderían fácilmente.

En general el trabajo de los profesores en formación no solo consistías que responder cada uno de los interrogantes planteados por el profesor, sino que además, debían resolver el cuestionario partiendo de las respuestas dadas por los estudiantes y analizar las respuestas dadas por los estudiantes, identificando los errores cometidos y clasificándolos. Las dificultades más evidentes en este grupo de profesores en formación, estuvieron relacionadas con el manejo adecuado de software para realizar las gráficas, solo unos pocos realizaron las gráficas a computador, los demás las hicieron a mano. Pero en la socialización en plenaria de esta actividad fue enriquecedor ya que se ayudaron mutuamente y los aportes de todos hicieron posible que mejoraran su visión sobre el tema.

Al finalizar la socialización el siguiente fue el comentario de uno de los profesores en formación del quinto semestret: "*cada clase de estas es una oportunidad para investigar, para dejar que nuestros alumnos descubran conceptos, propiedades y nos enseñen su forma de ver las cosas, de seguro haciendo esto no solo mejoraremos la calidad de la educación que impartimos, sino que además, estaremos cualificando y potenciando nuestra formación docente*". El comentario de este estudiante se enmarca en la Dimensión Meta Didáctico-Matemática (Pino-Fan y Godina, 2015), ya que refiere que este tipo de actividades afecta, no solo su capacidad para reflexionar sobre su quehacer como docente, su proyección como profesional que tiene necesidades de formación, que cumple un papel social y que asume su responsabilidad ante los requerimiento que le pone la sociedad y ante sus propios retos, sino también que aprende de lo que hace.

4.2.2.3 Analizando las respuestas a un cuestionario de familia de funciones.

Para realizar el análisis de este ejercicio evaluativo, a cada equipo de profesores en formación se les entregó un paquete de dieciocho cuestionarios resueltos por estudiantes de décimo grado, es decir, a los profesores en formación se les entregó dieciocho de las soluciones a los cuestionarios que se reconstruyeron en el apartado anterior (apartado 4.2.2.2) para que los analizaran; el las figuras 84, 85 y 86 se presenta una muestra de estas soluciones, la dada por los estudiantes E_{10} y E_5, de décimo grado al cuestionario que se les planteó.

En las figuras 94 y 95 se muestran la descripción hecha por el grupo $G_{(5)1}$ a los procedimientos/estrategias utilizadas y a las dificultades/conflictos presentados por los estudiantes al resolver la situación de familias de funciones.

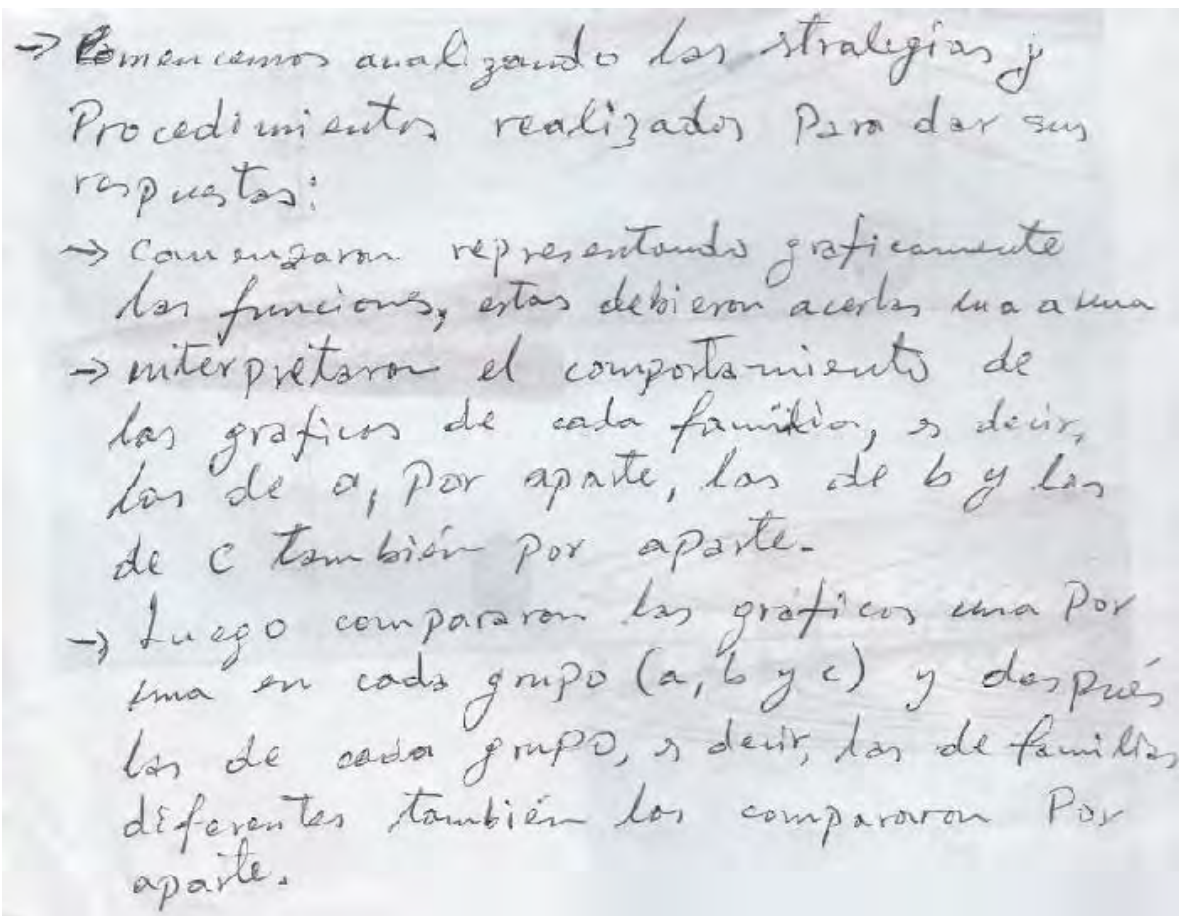
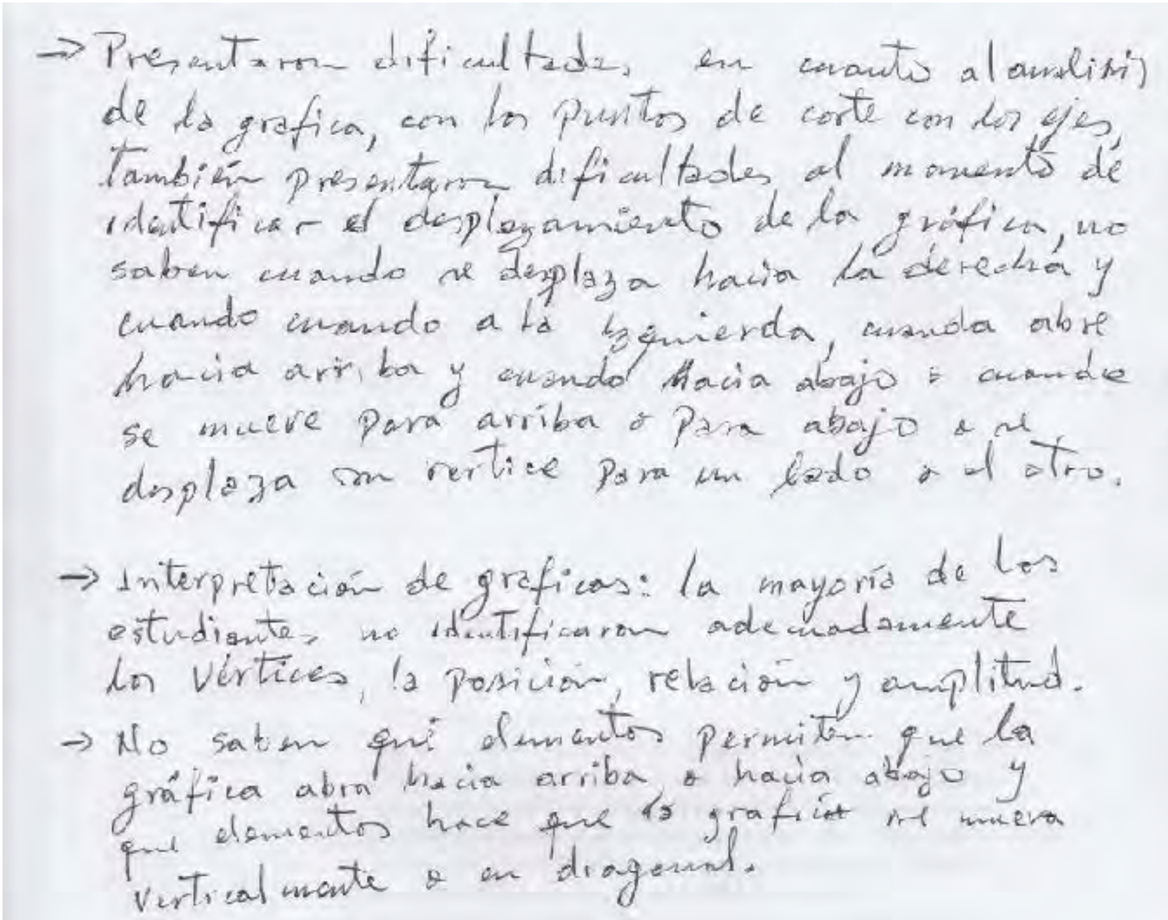

→ Comencemos analizando las strategias y Procedimientos realizados para dar sus respuestas:
→ Comenzaron representando graficamente las funciones, estas debieron acerlas una a una
→ interpretaron el comportamiento de las graficas de cada familia, es decir, las de a, por aparte, las de b y las de c también por aparte.
→ Luego compararon las gráficas una por una en cada grupo (a, b y c) y después las de cada grupo, es decir, las de familias diferentes también los compararon por aparte.

Figura 94. Descripción hecha por el grupo $G_{(5)1}$ a los procedimientos/estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver la situación de familias de funciones.



→ Presentaron dificultades en cuanto al análisis de la grafica, con los puntos de corte con los ejes, también presentaron dificultades al momento de identificar el desplazamiento de la gráfica, no saben cuando se desplaza hacia la derecha y cuando cuando a la izquierda, cuando abre hacia arriba y cuando hacia abajo o cuando se mueve para arriba o para abajo o se desplaza su vertice para un lado o al otro.

→ Interpretación de graficas: la mayoría de los estudiantes no identificaron adecuadamente los vértices, la posición, relación y amplitud.

→ No saben qué elementos permiten que la gráfica abra hacia arriba o hacia abajo y que elementos hace que la grafica se mueva verticalmente o en diagonal.

Figura 95. Descripción hecha por el grupo $G_{(5)1}$ a las dificultades/conflictos presentados por los estudiantes de décimo grado al resolver la situación de familias de funciones.

Al realizar el análisis de los resultados todos (8, 8) los grupos identificaron las respuestas incorrectas dadas por los estudiantes de la media académica al intentar resolver la situación planteada, esto según Pino-Fan y Assis (2015) es una muestra de que tienen un dominio adecuado del material a enseñar en el futuro y que el conocimiento común del contenido está bien fundamentado en actividades como la que se les presentó. Lo que es bastante positivo ya que según Schoenfeld y Kilpatrick (2008) un profesor debe conocer muy bien el material que enseña y ser capaz de relacionarlo con otros materiales del currículo.

A estos profesores en formación no les resultó muy problemático comunicar los resultados de las soluciones dadas por los estudiantes de décimo grado al cuestionario que se les propuso, el cual involucra familias de funciones. Reconocieron las diversas representaciones semióticas hechas en los objetos en estudio y analizaron las diversas transformaciones realizadas en dichos objetos para dar respuestas a las cuestiones por las que se les preguntaron, lo que refuerza lo encontrado por Rojas (2014) y reportado en su trabajo de tesis doctoral.

El análisis lo centraron en dos aspecto básicos: los *procedimientos/estrategias* utilizados para resolver la situación y la identificación y descripción de las *dificultades/conflictos* presentados al resolverla. Dicen evidenciar en las soluciones de los estudiantes de décimo grado, para poder resolver las cuestiones que se les plantearon, que debieron partir de realizar las gráficas de las familias de funciones una por una, que luego fue que comenzaron a analizar el comportamiento de las gráficas familia por familia, y que posteriormente realizaron la comparación interfamiliar, como lo manifiesta $G_{(5)1}$ en su manuscrito mostrado en las figura 106.

Los grupos $G_{(5)1}$, $G_{(8)6}$ y $G_{(8)2}$ basaron su análisis en el comportamiento cualitativo de cada familia de funciones sin mencionar los parámetros, es decir, manifestaron que los estudiantes de décimo grado "*presentaron dificultades en cuanto al análisis de las gráficas, con los puntos de corte con los ejes, también presentaron dificultades al momento de identificar el desplazamiento de la gráfica, no saben cuándo se desplaza hacia la derecha y cuando a la izquierda, cuando abre hacia arriba y cuando hacia abajo o cuando se mueve para arriba o para abajo o se desplaza su vértice para un lado o el otro*": $G_{(5)1}$. Como puede apreciarse en el manuscrito presentado por el grupo $G_{(5)1}$, mencionan que la dificultad se da al momento de identificar el desplazamiento de la gráfica: los puntos de corte con los ejes, el desplazamiento de la gráfica hacia la derecha o hacia la izquierda, sin tener en cuenta que no se incluye ningún parámetro que produzca algún efecto en el movimiento horizontal de la gráfica, pero parecen referirse a los parámetros *a, b y c,* al manifestar que los estudiantes de décimo no saben qué elementos permiten que la gráfica abra hacia arriba o hacia abajo (parámetro a), qué elementos hacen que la gráfica se mueva verticalmente (parámetro c) o diagonal (parámetro b), pero en ningún momento hacen mención a estos parámetros.

Mientras que en el análisis realizado por $G_{(8)3}$, $G_{(5)4}$, $G_{(5)5}$ y $G_{(8)7}$ combinaron lo cuantitativo con lo cualitativo y si mencionan explícitamente los parámetros a, b y c, respecto a la parte cuantitativa presentan número de respuestas acertadas por cada ítem/tarea, acompañado de su respectivo porcentaje, acompañado de una parte cualitativa, correspondiente a la descripción, al interpretar lo que realizaron al aportar sus respuestas. En este proceso determinaron algunos patrones de errores cometidos por los estudiantes con su respectiva clasificaron según un criterio establecido, e hicieron un análisis descriptivo de las dificultades encontradas. En el análisis del $G_{(5)4}$ por ejemplo, dicen: "*según lo que pudimos observar lo primero que ellos han tenido que hacer, darle valor a "a", "b" y "c" según sus funciones presentadas respectivamente y las condiciones dadas, luego le dieron valores a "X" para obtener "Y" y así poder llegar al grupo de par de número (x, y), esto lo hicieron para cada valor de "a", "b" y "c". Luego graficaron los resultados obtenidos y después de estos, teniendo ya claro el concepto de función e hipérbola procedieron a hacer un análisis de las gráficas*".

Además, manifestaron que algunos estudiantes a los que se les analizaron sus producciones "*confundían el hecho por ejemplo en la pregunta: ¿qué efecto producía a en la gráfica? Ellos decían que sí "a" era negativo, el vértice se encontraba en la parte interior de la gráfica y si "a" era positivo el vértice se encontraba en la parte superior de la gráfica, algunos presentaron dificultad más que todo en la interpretación de la gráfica, esto se pudo evidenciar en la solución de algunas preguntas planteadas donde se hacía necesario una buena comprensión de la gráfica, y algunos presentaron dificultad en la utilización de los concepto de parábola, pues en algunas preguntas daban respuestas erróneas con este concepto*".

En el análisis de $G_{(5)5}$ a las respuestas de los estudiantes de décimo grado dicen que "*algunos de los estudiantes presentaron dificultades para responder el papel que cumple "a" en la función, dos de los estudiantes comentaron que cuando "a" es negativa la gráfica es más* *grande y cuando el signo de "a" es positivo la gráfica es más pequeña, seguramente por una mala comprensión y manejo del concepto de parábola y seguramente por la gráfica. Cuatro de los grupos se equivocaron al decir que cuando "a" es negativa la parábola sube y cuando es positiva baja, seguramente esta fue una dificultad que se presentó al momento de darle valores a "a" y luego buscar las coordenadas para la gráfica. Para la pregunta dos ¿qué función cumple "b" en la función? Tres de los grupos presentaron dificultad al momento de traducir las expresiones, orientación de la gráfica y algunos al utilizar el concepto de vértice y darle sentido a la orientación de este, no como subida o bajada, si no como, "el cambio de ordenada del vértice". Para la pregunta "c" un grupo contesto que este mantenía para cualquier caso la gráfica igual, cometiendo el error de mirar que la forma de la gráfica siempre se mantenía, las gráficas de la función de "c" es la misma. En la pregunta d) todos acertaron. En la pregunta e) un grupo presento dificultad, quizá no comprendió bien la pregunta, pues dijeron que el vértices era el mismo para las tres gráficas, aun teniendo las gráficas hechas y también al momento de decir que la segunda fila se desplaza a la izquierda o a la derecha y no aceptaron en caso que la tercera filase pueda desplazar a la izquierda*". Este grupo realiza un análisis mucho más detallado de cada uno de los elementos trabajado por los estudiantes de la media académica, y de su comportamiento por lo que parecen tener un conocimiento mucho más profundo de este tipo de material y de la forma cómo enseñarlo (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008).

Y en el caso específico del $G_{(8)3}$, al tratar de buscar causas por las que se presentaron las dificultades/conflictos en los estudiantes de décimo grado al aportar sus soluciones mencionan: "*fue que los estudiantes afirmaron que el papel que desempeña a en la expresión es indicar si el vértice sube o baja, dependiendo si era positivo o negativo, lo que se vuelve una concepción errónea por no tener claro el efecto que produce a en la función cuadrática. Algunos daban a entender que la gráfica dependiendo el valor de b bien sea positivo o* *negativo, la gráfica se desplazaba en la parte superior del eje de las X; otros confundían el punto de corte con el eje de las Y, con la ubicación del vértice de la parábola, esto muestra que los alumnos no lograron asimilar correctamente el concepto de función cuadrática*".

Además, al tratar de explicar los procesos realizados por los estudiantes de décimo, manifiestan que las *estrategias/procedimientos* utilizados por estos estudiantes debieron ser de tipo visual, cuando es prácticamente imposible resolver la situación con este tipo de estrategias, en su solución *proponen*: "*las estrategias que se pudieron evidenciar fueron principalmente el buen manejo del concepto de función cuadrática, de esta manera los estudiantes saben qué papel desempeña cada uno de los elementos de ésta, además algunos lograron a través de la representación gráfica de la situación observaron el papel que cumplen cada uno de los elementos de la función cuadrática además lograron observar el comportamiento, la forma, el vértice, punto de corte, es decir, sabían cómo era cada uno de los elementos de la función*".

En el análisis de $G_{(8)3}$, $G_{(5)4}$, $G_{(5)5}$ y $G_{(8)7}$ se evidencia mucha más concordancia con lo que realmente realizaron los estudiantes de décimo grado al resolver la situación, además, realizan un análisis bien profundo de las producciones de estos estudiantes. Pero en términos generales el análisis realizado por estos profesores en formación es bastante aceptable, lo que denota un conocimiento especializado del contenido matemático en avanzado estado de progreso, lo que concuerda con lo reportado por Aké (2013).

A manera de conclusión, al analizar el análisis de las producciones de los estudiantes de décimo grado, que hicieron los profesores en formación, se puede destacar que éstos últimos tienen en cuenta los aciertos, los desaciertos, los totales y porcentajes, analizan los *procedimientos/estrategias* utilizadas por los estudiantes de la media académica al resolver el cuestionario, y describen las *dificultades/conflictos* y analizan posibles causas. Esto es una muestra clara de que pueden comunicar los resultados de analizar las producciones de los estudiantes, del nivel en el que a futuro se van a desempeñar como docentes. Sin embargo faltó fundamentar su análisis, contrastándolo con alguna teoría o algunos resultados de investigación que sustenten ese tipo de errores (Godino, 2013b), como por ejemplo, los desarrollados por Carrión (2007) o Ruano, Socas y Palarea (2008).

Una muestra de que este grupo de formadores en formación valoran lo que hacen y actúan con responsabilidad al velar por que los estudiantes desarrollen con responsabilidad sus actividades es que siempre estuvieron pendientes de que los trabajos que revisaron no fueran copia del de algún otro grupo. Es decir, estuvieron pendientes de monitorearse, pendientes de que las cosas le salieran bien o de qué andaba mal para mejorarlo. Además, ambos grupos son muy reflexivos y receptivos que comparten experiencias, poniendo en juego sus cualidades intrínsecas al desarrollar su práctica, lo que según Pérez (2005) hace que ésta sea educativa.

Estos profesores en formación combinaron su conocimiento matemático especializado con el conocimiento que tienen sobre los alumnos y por tanto pudieron anticipar aquello que los llevó a cometer errores y les ocasionó las dificultades al realizar las gráficas de las familias de funciones (Ball et al., 2008). Lo que indica que estuvieron pendientes de este tipo de dificultades con la posibilidad de mejorarlas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Según estos autores para mejorar este problema necesitan pensar reflexivamente sobre el problema, ya que no es resolver las dificultades para sí, sino resolver una dificultad detectada en los estudiantes.

4.2.1 Análisis de eventos de clases

4.2.1.1 La Muestra

Luego de analizar algunas características del proceso evaluativo que implementan los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas que ofrece la Universidad de Sucre, Colombia, se comenzó con estudiantes de los semestres finales (24 del sexto y 26 del octavo semestre) algunas actividades de seguimiento al proceso de planeación y desarrollo de una clase. Como se dijo en el apartado 3.2.3 en la metodología, en el sexto semestre los estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas ven Análisis matemático, Algebra abstracta I y Estadística inferencial, DIME IV (último curso de Didáctica de las matemáticas), PPI V (último curso de Práctica pedagógica investigativa) y Currículo I. En el séptimo semestre ven Algoritmo y programación, Algebra abstracta II, Tic, Proyecto Pedagógico, Currículo y Seminario de Educación. Y en el octavo semestre ven Métodos numéricos, Práctica Docente, Administración Educativa y seminario de Educación II. En el programa se ven tres electivas que se pueden elegir de una lista de asignaturas tanto disciplinares, como didáctico-pedagógicas. Y la Práctica Docente, que aunque en el plan de estudios aparece en el octavo semestre, los estudiantes la dejan para verla sola, cuando ya han cursado el programa en su totalidad. Son por lo menos unas 1168 horas de la componente matemática, y por lo menos unas 1040 horas de la componente didáctico- pedagógica y adicionalmente cinco niveles de inglés que se pueden cursar paralelos al programa, ofrecidos por la universidad o se puede mostrar suficiencia del dominio del idioma inglés.

A los profesores en formación se les orienta, en el programa, sobre la elaboración de los planes de clases desde el tercer semestre en la asignatura Didáctica de las Matemáticas I (Dime I). Aquí se analizan los *planes de clase*, la *ejecución de esos mismos planes de clase* ante estudiantes de la media académica, *el proceso de evaluación* realizada por estos profesores en formación a estos mismos estudiantes y las *producciones académicas con los resultados de la evaluación*. A los profesores en formación se les pidió preparar una clase para orientar el concepto de función, a continuación se presenta la actividad escogida para hacer la descripción de este proceso.

4.2.1.2 Fundamentar el tema de la clase

Antes de preparar la clase, se quiso fundamentar un poco el tema, para lo que se les entregó la definición de Función: "una función *f* es un conjunto de pares ordenados (*x, y*) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento" (Apóstol, 1985, p.65), los profesores en formación debían expresar con sus propias palabras la definición, plantear por lo menos una situación que se pudiera resolver aplicando este concepto, resolver la situación o situaciones planteadas, y describir las razones de sus propias dificultades y las que veían en sus compañeros al hacerlo; debían explicar las estrategias que utilizarían para que los estudiantes de la media académica, al ejecutar la clase, les pudieran entender con mayor facilidad y finalmente hacer una micro clase frente a sus compañeros, es decir, en diez o quince minutos tratar de esbozar lo que sería su clase con ese tema y las actividades y estrategias por ellos propuestas.

Al expresar con sus propias palabras la definición de función, inicialmente todos tuvieron dificultades para transformarla del contexto disciplinar a un lenguaje entendible por los estudiantes, pero posteriormente se fueron dando descripciones adecuadas. Ellos atribuyen sus dificultades a la falta de un dominio integral del tema, lo que les dificulta hacer las conexiones entre objetos matemáticos que los lleve a hacer transposiciones didácticas adecuadas para este tipo de conceptos. Y manifestaron que estas dificultades se deben a que no pueden relacionar el conocimiento matemático involucrado en el tema, con el lenguaje cotidiano de los estudiantes, pero a su vez, a que tampoco podían hacer el paso del lenguaje cotidiano al disciplinar, como se evidencia en los manuscritos de los profesores en formación $P_{(6)12}$, $P_{(8)1}$ y $P_{(6)14}$, mostrados en las figuras 99, 100 y 101 respectivamente, reconociendo sus propias dificultades. Luego de hacer algunas aclaraciones y precisiones sobre pares ordenados, conjuntos de partida, de llegada y de su relación, en este caso, con variables dependientes e independientes, pudieron enunciar esta definición en diversas formas; algunas de las cuales se presentan en las figuras 96, 97 y 98 respectivamente.

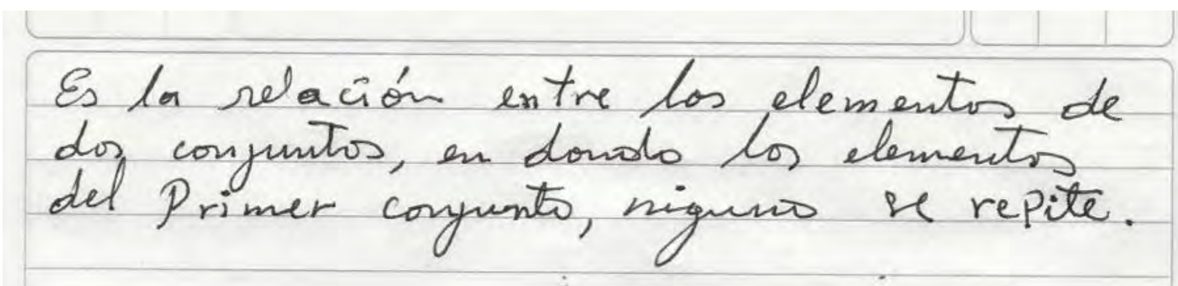
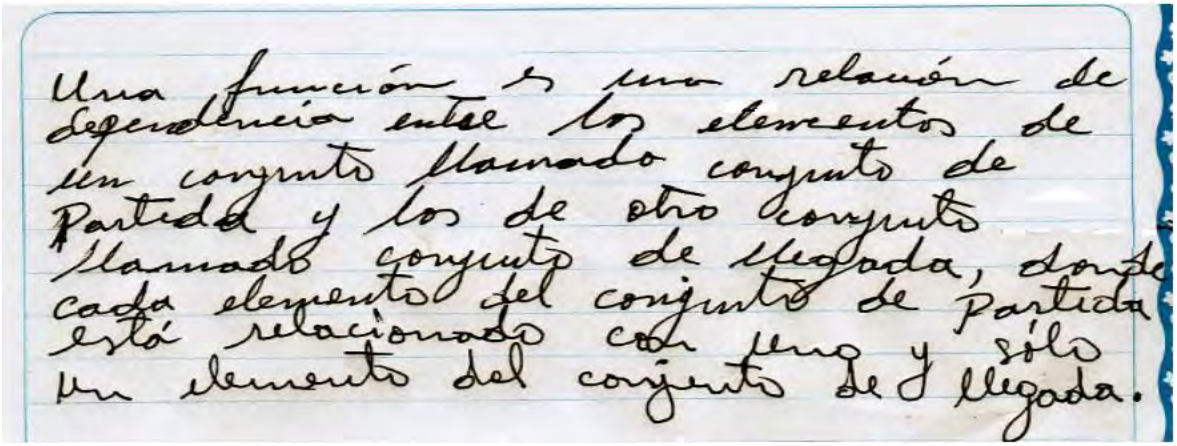
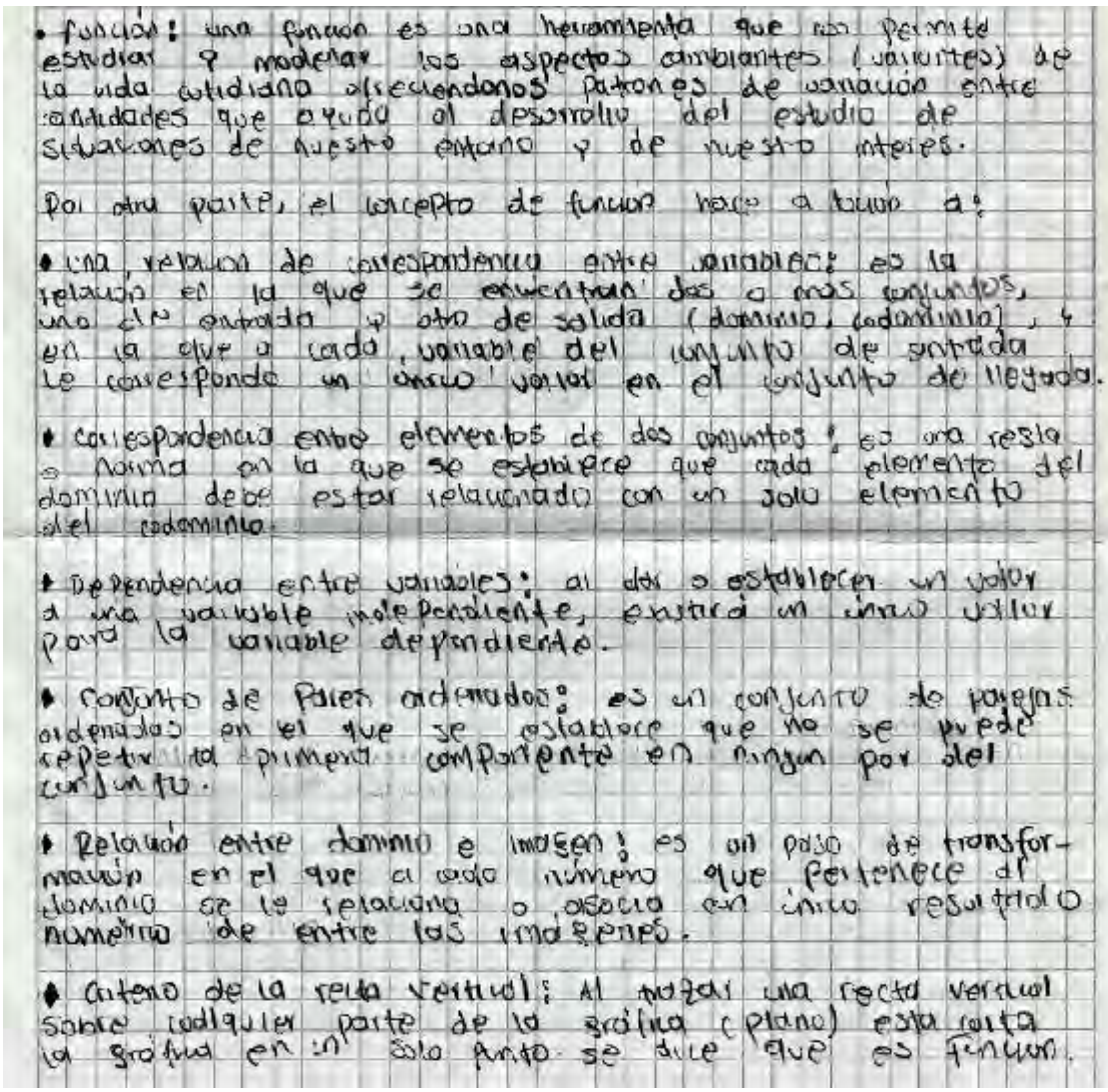

Es la relación entre los elementos de dos conjuntos, en donde los elementos del Primer conjunto, ninguno se repite.

Figura 96. Definición de función dada por el $P_{(8)8}$, a una función en una actividad previa a la preparación de una clase.



Una función es una relación de dependencia entre los elementos de un conjunto llamado conjunto de partida y los de otro conjunto llamado conjunto de llegada, donde cada elemento del conjunto de partida está relacionado con uno y sólo un elemento del conjunto de llegada.

Figura 97. Definición de función dada por el P(6)18, en una actividad previa a la preparación de una clase con funciones.



• función: una función es una herramienta que nos permite estudiar y modelar los aspectos cambiantes (variantes) de la vida cotidiana ofreciéndonos patrones de variación entre cantidades que ayuda al desarrollo del estudio de situaciones de nuestro entorno y de nuestro interés.

Por otra parte, el concepto de función hace a través de:

• una relación de correspondencia entre variables: es la relación en la que se encuentran dos o más conjuntos, uno de entrada y otro de salida (dominio, codominio), y en la que a cada variable del conjunto de entrada le corresponde un único valor en el conjunto de llegada.

• correspondencia entre elementos de dos conjuntos: es una regla o norma en la que se establece que cada elemento del dominio debe estar relacionado con un solo elemento del codominio.

• Dependencia entre variables: al dar o establecer un valor a una variable independiente, existirá un único valor para la variable dependiente.

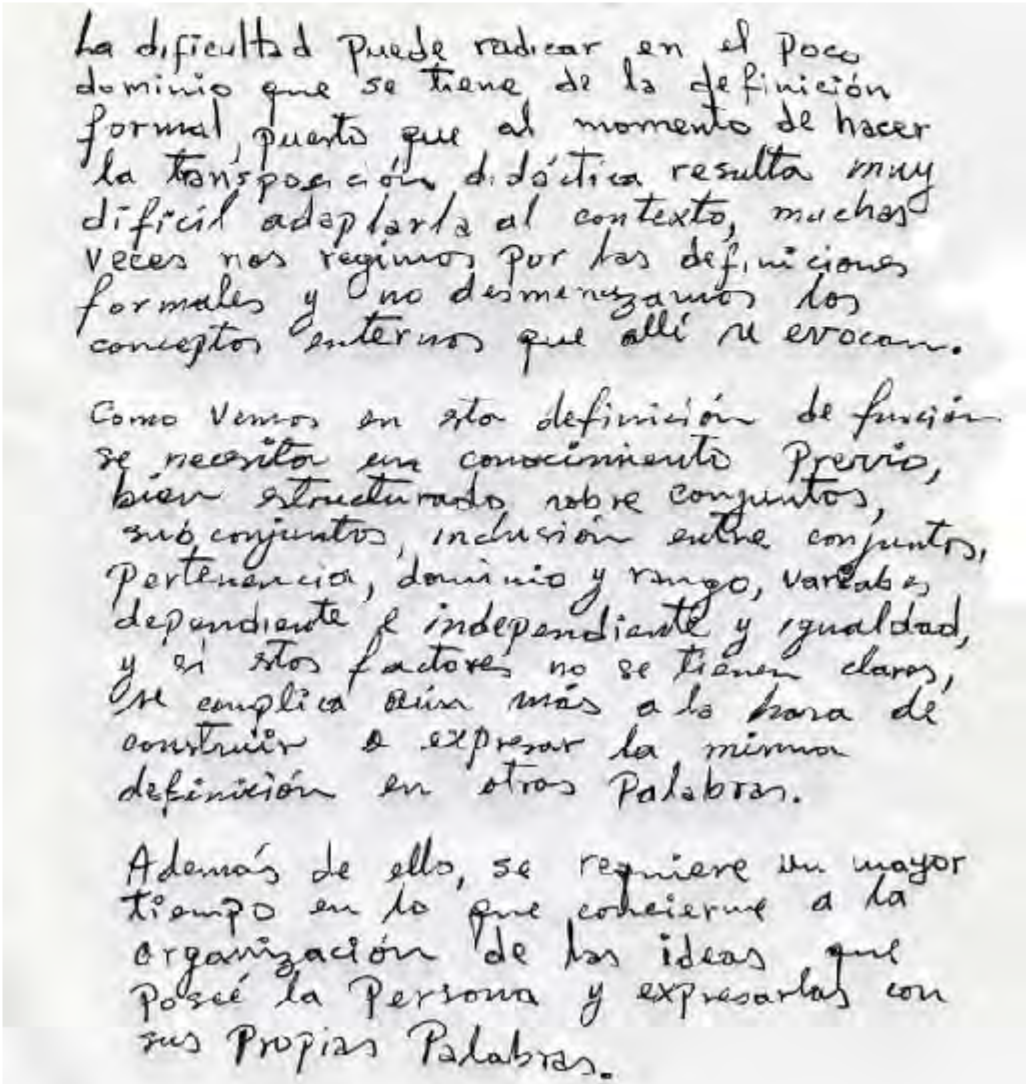
• conjunto de pares ordenados: es un conjunto de parejas ordenadas en el que se establece que no se puede repetir la primera componente en ningún par del conjunto.

• Relación entre dominio e imagen: es un paso de transformación en el que a cada número que pertenece al dominio se le relaciona o asocia un único resultado numérico de entre las imágenes.

• Criterio de la recta vertical: Al trazar una recta vertical sobre cualquier parte de la gráfica (plano) esta corta la gráfica en un solo punto se dice que es función.

Figura 98. Definición de función dada por el P(6)23, en una actividad de fundamentación de una clase con funciones.

En general las definiciones que adecuaron estos profesores en formación, a sus propias palabras, tuvieron tres características básicas: (5, 7) fueron un tanto imprecisos como es el caso de $P_{(8)8}$, otro grupo (12, 13), que aunque cumple con los requerimientos de la definición de función, es bastante extensa y llena de términos técnicos que poco ayudarían a su entendimiento por parte de los alumnos de la básica, como es el caso de $P_{(6)18}$ y un grupo más reducido que fueron bastante precisos y mostraron diversas formas, como se muestra en el manuscrito de $P_{(6)23}$, los cuales coinciden con algunas de las acepciones y generalizaciones reportadas por Parra y Pino-Fan (2016) y denota un conocimiento bastante detallado de esta definición, dándole como dice Barallobres (2013), un carácter de cientificidad a este concepto. Se mostraron muy solidarios con sus compañeros, tanto que las precisiones al enunciar, con sus propias palabras la definición, terminaron haciéndola entre varios compañeros, luego de terminada la actividad y entregado los resultados al profesor investigador que los acompañaba, lo que muestra que no les cuesta el trabajo en equipo y que son capaces de comunicar los resultados de un proceso que realizan. Además, las dificultades que presentaron transformando la definición, las terminaron escribiendo ellos mismos como se muestra en los manuscritos de los profesores en formación $P_{(6)12}$, $P_{(8)1}$ y $P_{(6)14}$ mostrados en las figuras 99, 100 y 101 respectivamente.


La dificultad puede radicar en el poco dominio que se tiene de la definición formal, puesto que al momento de hacer la transposición didáctica resulta muy difícil adaptarla al contexto, muchas veces nos regimos por las definiciones formales y no desmenuzamos los conceptos internos que allí se evocan.

Como vemos en esta definición de función se necesita un conocimiento previo, bien estructurado sobre conjuntos, subconjuntos, inclusión entre conjuntos, pertenencia, dominio y rango, variables dependiente e independiente y igualdad, y si estos factores no se tienen claros, se complica aún más a la hora de construir o expresar la misma definición en otras palabras.

Además de ello, se requiere un mayor tiempo en lo que concierne a la organización de las ideas que posee la persona y expresarlas con sus propias palabras.

Figura 99. Comentario del $P_{(6)12}$ a la transposición hecha por sus compañeros a la definición de Función.

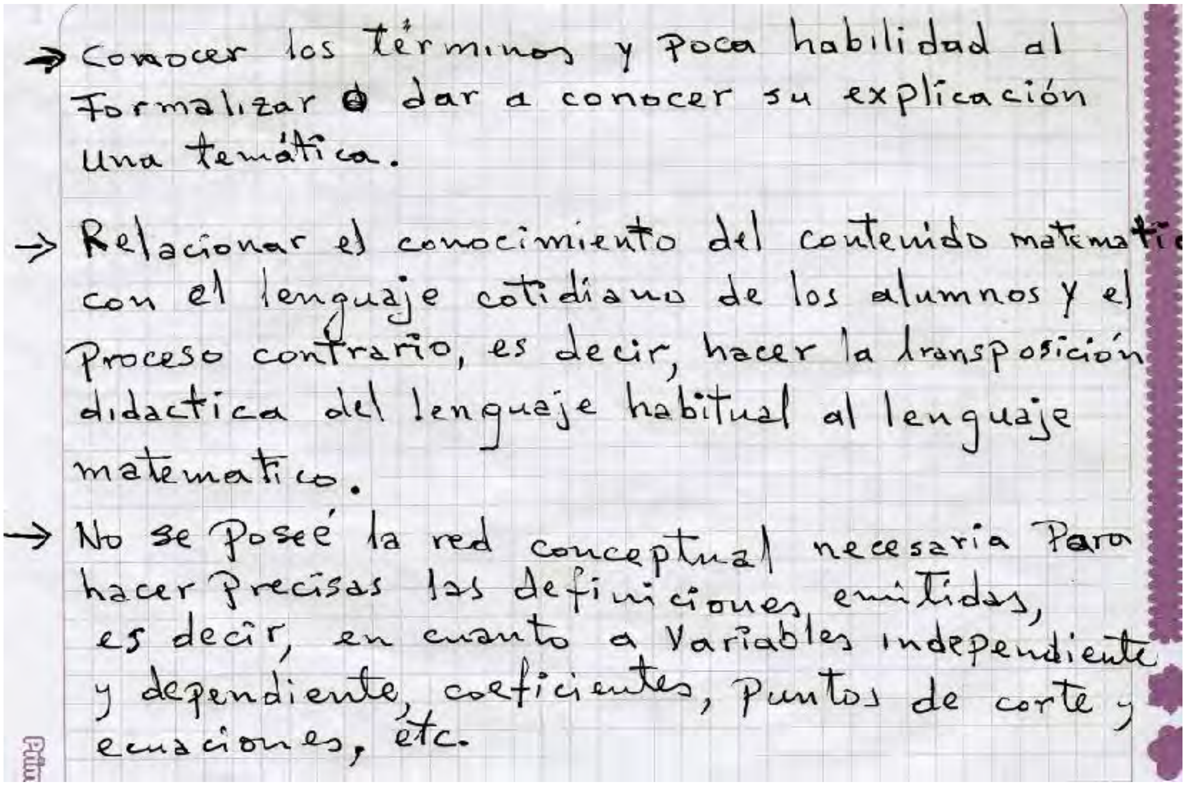
Cada profesor en formación *propuso* una actividad para comenzar a orientar una clase con este tema. Todas las situaciones presentadas requerían involucrar sólo una función lineal o afín para su solución. El 11,11% propuso actividades inconsistentes, es decir, o tenían datos innecesarios o le faltaba información fundamental para poderla solucionar. Otra de las dificultades presentadas por estos profesores en formación, al resolver la situación que ellos mismos formularon fue con la obtención de los elementos de la función involucrados en la situación; especialmente en la identificación de las cantidades que intervienen en la situación y cuando ya las listaron, hubo dificultades para clasificarlas entre constantes o fijas y variables, como lo manifiesta $P_{(8)1}$ en su manuscrito mostrado en la figura 100, pero en la discusión, al socializar ante sus compañeros se hicieron las precisiones pertinentes y al final lograron hacerlo. Luego en la resolución de las actividades que ellos mismos habían propuesto, se les notó cierta soltura al hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, algo similar sucedió al explicar las estrategias que utilizarían para que los estudiantes les pudieran entender con mayor facilidad.

Las actividades propuestas por estos profesores en formación fueron, en su mayoría sencillas, con situaciones muy similares a la desarrollada en la clase, de tal forma que los estudiantes de la media académica, sólo necesitaban remplazar directamente, siguiéndose del ejemplo, sin hacer mayores modificaciones, esto es, subestiman la capacidad de los estudiantes para resolver situaciones del tema. Mientras que otras actividades tenían un grado de dificultad bastante alto para el nivel de los estudiantes, esto es, sobreestiman a los estudiantes al pretender enunciar con sus propias palabras la definición de función, que explicaran en dónde se utiliza esta noción, y cómo se puede relacionar las funciones con otros temas del currículo (Moreno y Waldegg, 2002). Otros dieron ciertas condiciones y pidieron a los estudiantes que a partir de ellas plantearan una situación problema donde se hiciera uso de las funciones. Estas actividades son bien interesantes y cuando se logra que el estudiante las realice, se gana mucho, pero hay que tener el cuidado de monitorearlos para que no terminen gastando demasiado tiempo en ellas y aburriéndose.

Los profesores en formación *propusieron* una serie de conocimientos previos, necesarios para poder desarrollar este tema: e.g., $P_{(6)12}$: "*un conocimiento previo bien estructurado sobre conjunto, subconjunto, inclusión entre conjuntos, pertenencia, dominio y rango, variables dependiente e independiente y igualdad*"; $P_{(8)1}$: "*de dominio, rango, variación, cambio, variables, interceptos, crecimiento y decrecimiento, ecuación, máximos y mínimos*"; $P_{(6)14}$: "*variables independientes y dependiente, coeficiente, punto de corte, y ecuaciones, etc*". Además, consideran que necesitan más tiempo del aquí estipulado para el desarrollo de esta tarea, para organizar las ideas, y *proponen* iniciar la clase *explorando/indagando* ideas previas o saberes necesarios para el desarrollo de este tema, sin especificar cuáles.

La dificultad para Formalizar los conceptos, sto es porque no logramos relacionar las Variables a describir, en ste caso los términos de la función, como lo son la variable independiente con la dependiente
X: longitud del lado de la caja
y: Volumen de la caja
y: Area lateral de la caja
y fue complicado saber que cantidades varian y las fijas
Poco dominio de conceptos matemáticos al momento de formalizar el concepto de funcion; conceptos como:
Dominio, rango, variación, cambio, variables, interceptos, crecimiento y decrecimiento, ecuación, maximos y minimos

Figura 100. Comentario del $P_{(8)1}$ a la transposición hecha por sus compañeros a la definición de Función.



→ Conocer los términos y poca habilidad al Formalizar o dar a conocer su explicación una temática.

→ Relacionar el conocimiento del contenido matemático con el lenguaje cotidiano de los alumnos y el proceso contrario, es decir, hacer la transposición didactica del lenguaje habitual al lenguaje matematico.

→ No se poseé la red conceptual necesaria para hacer precisas las definiciones emitidas, es decir, en cuanto a variables independiente y dependiente, coeficientes, puntos de corte y ecuaciones, étc.

Figura 101. Comentario del $P_{(6)14}$ a la transposición hecha por sus compañeros a la definición de Función.

Propusieron estrategias muy interesantes donde combinaban diferentes registros semióticos de representación de este concepto. Todos partían de combinar el registro del lenguaje coloquial o del lenguaje materno con registros fenomenológicos, ubicando en un contexto real, algunos elementos que llevaban a una situación que se pudiera resolver utilizando funciones. Seguidamente elaboraban alguna representación en el tablero (parecían preferir a una representación tabular para representar situaciones que involucren funciones), para representar e ilustrar la situación.

4.2.1.3 Los planes de clase

En la elaboración de los planes de clases identificaron y describieron adecuadamente el contexto institucional, el grado al que deben orientar con un tema específico, los indicadores de logro y los objetivos de la clase. Verificaron que con las actividades se cumplan los objetivos de la clase. Sin embargo a la hora de escoger los estándares básicos de competencias seleccionaron cualquiera que nombrara el tema en cuestión, independiente de que estuvieran o no en estrecha relación con los objetivos y los indicadores de logros que ellos mismos plantearon previamente. Se encontró cierta limitación en los estándares básicos de competencias en Matemáticas vigentes en Colombia, pues para algunos objetivos propuestos no se encontró estándares apropiados, por lo que hubo que usar el que mejor se les ajustara, que en alguno de los casos tenían muy poca relación con los objetivos e indicadores de logros propuestos.

4.2.1.4 Ejecución de la clase

Para la ejecución de la clase, y sólo con el fin de unificar criterios, se les pedía a los profesores en formación guiarse de la siguiente situación para preparar una clase que orientarían a estudiantes del grado once:

Situación:

Construir una caja sin tapa con una hoja de papel tamaño carta (21,8cm×28,7cm), al quitar en las esquinas cuadraditos de lado x, (ver figura 102).

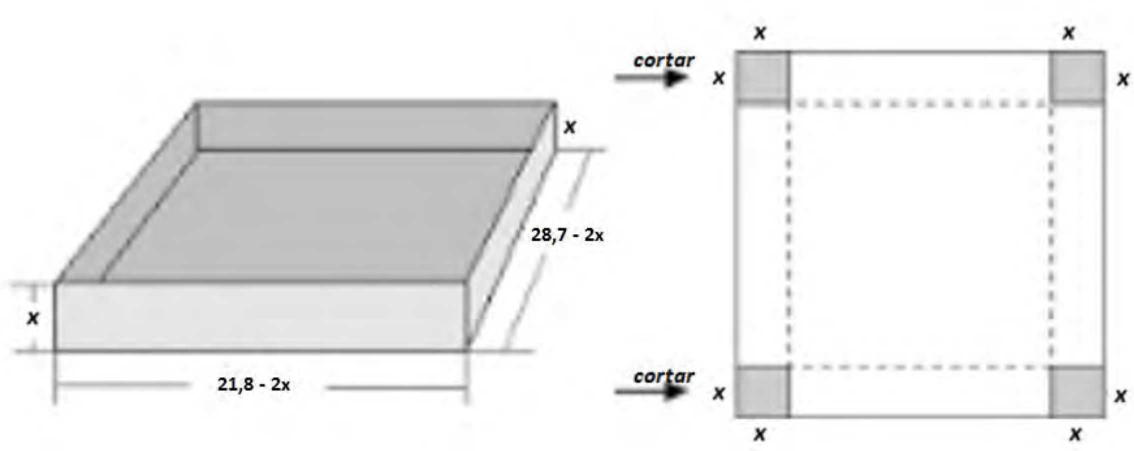


Figura 102. Construcción de una caja sin tapa con una hoja de papel de 21,8cm×28,7cm

Orientaciones (O_i):

> *O_1: Realiza el proceso de quitar cuadraditos de lado x en las esquinas de la caja varias veces hasta encontrar la que tenga el máximo volumen*

O_2: ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja, si se quiere que su volumen sea máximo?

O_3: Encuentra todas las representaciones posibles para el volumen de la caja de esta situación

O_4: Busca entre las representaciones del volumen de la caja de esta situación, elementos equivalentes, de tal forma que se pueda establecer un paralelo entre ellos.

O_5: Encuentra el mayor número de representaciones posibles que representen el área lateral de la caja.

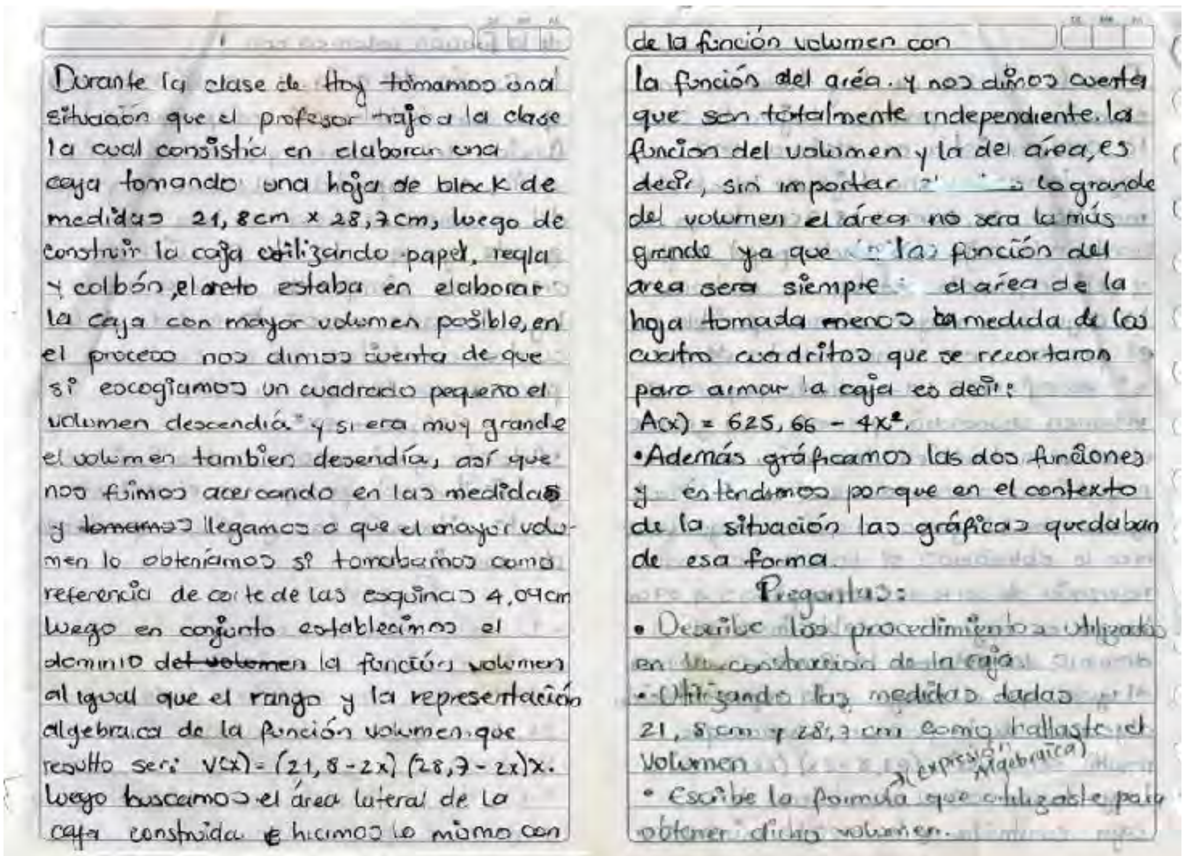
O_6: Busca entre las representaciones del área lateral de la caja de esta situación, elementos equivalentes, de tal forma que se pueda establecer un paralelo entre ellos.

A los profesores en formación se les entregó la situación y una hoja de papel en blanco, con las dimensiones especificadas arriba, y ellos debían elaborar una caja, encontrarle el volumen y comparar con sus compañeros, cuál caja tenía el mayor volumen. Luego repitiendo el proceso, tratar de conseguir la caja con el mayor volumen posible, para lo que disponían de suficiente papel. Proceso similar debían realizar para encontrar el área lateral de la caja construida por cada uno y además, debían elaborar algunas preguntas como si fueran a aplicar esta situación a estudiantes de once grado, y finalmente debían describir el proceso realizado.

Luego de construir una primera caja y comparar su volumen con el de cada uno de sus compañeros, los profesores en formación pronto se dieron cuenta que seguir haciendo nuevas cajas y comparando su volumen, no era el proceso más eficiente para encontrar el volumen máximo, por lo que con un patrón de la fórmula que permite hallar el volumen de un paralelepípedo, comenzaron a probar con varios valores y de esta forma obtuvieron muy buenos acercamientos al volumen máximo buscado al construir las cajas. Luego utilizando el patrón utilizado, encontraron una expresión algebraica (fórmula matemática) que les permitió encontrar el volumen para una caja de cualquier dimensión en sus aristas.

Luego, encontrar el área lateral fue cuestión de encontrar primero su expresión algebraica y luego su gráfica, para a partir de ahí, comenzar a establecer congruencias y establecer conexiones entre los elementos encontrados en cada representación, proceso que confirma la reportado por Amaya y Medina (2013) en un trabajo de similares características. Posteriormente se les pidió analizar si existía algún tipo de relación entre el volumen de la caja y su área lateral. Pronto se dieron cuenta que el volumen de una caja es independiente del área lateral de ésta, como lo manifiesta $P_{(6)3}$ en su manuscrito mostrado en la figura 103.

En las figuras 103, 104, 105 y 106 se muestran las descripciones hechas por los profesores en formación $P_{(6)3}$, $P_{(8)15}$ y $P_{(8)8}$ respectivamente, al proceso de construir la caja de volumen máximo y de su área lateral.



Durante la clase de Hoy tomamos una situación que el profesor trajo a la clase la cual consistía en elaborar una caja tomando una hoja de block de medidas 21,8cm x 28,7cm, luego de construir la caja utilizando papel, regla y colbón, el reto estaba en elaborar la caja con mayor volumen posible, en el proceso nos dimos cuenta de que si escogíamos un cuadrado pequeño el volumen descendía y si era muy grande el volumen tambien desendía, así que nos fuimos acercando en las medidas y ~~tomamos~~ llegamos a que el mayor volumen lo obteníamos si tomabamos como referencia de corte de las esquinas 4,04cm luego en conjunto establecimos el dominio ~~del volumen~~ la función volumen al igual que el rango y la representación algebraica de la función volumen que resulto ser: V(x) = (21,8 - 2x) (28,7 - 2x)x. Luego buscamos el área lateral de la caja construida e hicimos lo mismo con

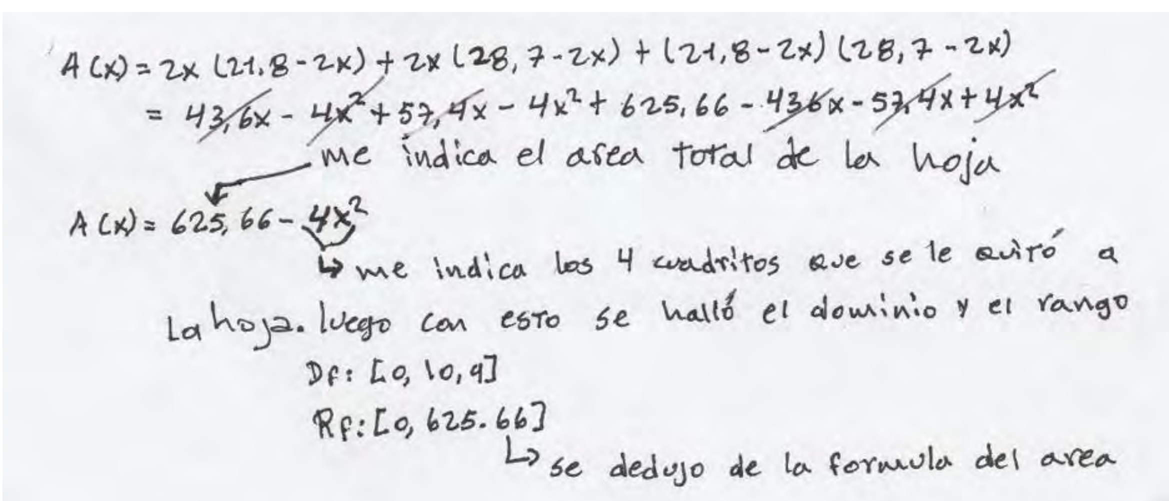
de la función volumen con la función del área. y nos dimos cuenta que son totalmente independiente. la funcion del volumen y la del área, es decir, sin importar lo grande del volumen el área no sera la más grande ya que la función del area sera siempre el área de la hoja tomada menos la medida de los cuatro cuadritos que se recortaron para armar la caja es decir:
A(x) = 625,66 - 4x².
• Además gráficamos las dos funciones y entendimos porque en el contexto de la situación las gráficas quedaban de esa forma.

Preguntas:
• Describe los procedimientos utilizados en la construcción de la caja
• Utilizando las medidas dadas 21,8cm y 28,7cm como hallaste el volumen
• Escribe la formula (expresión algebraica) que utilizaste para obtener dicho volumen.

Figura 103. Descripción que hace $P_{(6)3}$ al proceso de construir la caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.

En las descripciones hechas por este grupo de profesores en formación se notan significativos avances en su proceso de formación, ya que se nota mucha soltura en sus procesos descriptivos. Esto se hace evidente al analizar los *elementos lingüísticos* utilizados, que fueron mayoritariamente verbales, pero combinados con números, expresiones algebraicas, signos de agrupación y de operación y símbolos; en la pertinencia del lenguaje matemático utilizado y en el tipo de *proposiciones* y *argumentaciones* muy precisas y adecuadas que realizaron (e.g., *proposiciones* como la realizada por $P_{(6)3}$ cuando dice "*el mayor volumen lo obteníamos si tomábamos como referencia de corte de las esquinas 4,09cm, luego en conjunto establecimos el dominio de la función Volumen, al igual que el rango y la representación algebraica de la función volumen que resultó ser* $V(x) = (21{,}8 - 2x)(28{,}7 - 2x)x.$*"*; *Argumentos*: continuando con su descripción $P_{(6)3}$ dice "*luego buscamos el área lateral de la caja construida e hicimos lo mismo con lo de la función volumen, con la función del área y nos dimos cuenta que son totalmente independientes, la función volumen y la del área, es decir, sin importar lo grande del volumen, el área no será la más grande, ya que la función del área será siempre el área de la hoja tomada, menos la medida de los cuatro cuadraditos que se recortaron para armar la caja, es decir:* $A(x) = 625.65 - 4x^2$*")*. Los procesos descritos anteriormente también son evidentes en los manuscritos de $P_{(8)15}$ y $P_{(8)8}$, mostrados en las figuras 104 y 105 respectivamente.

En la descripción hecha por $P_{(6)8}$, en particular se muestra gran parte de los procedimientos realizados, las representaciones que obtuvo y establece congruencias entre los elementos de las representaciones (e.g., $P_{(8)8}$, en la figura 106 propone claras congruencias cuando dice "*625.66 me indica el área total de la hoja o* $4x^2$ *me indica los 4 cuadraditos que se le quitó a la hoja. Luego con esto se halló el dominio y el rango.* $D_f = [0,\ 10.9]$ *y* $R_f = [0,\ 625.66]$ *Se dedujo de la fórmula del área*").



$A(x) = 2x(21{,}8-2x) + 2x(28{,}7-2x) + (21{,}8-2x)(28{,}7-2x)$

$= \cancel{43{,}6x} - \cancel{4x^2} + \cancel{57{,}4x} - 4x^2 + 625{,}66 - \cancel{43{,}6x} - \cancel{57{,}4x} + \cancel{4x^2}$

me indica el area total de la hoja

$A(x) = 625{,}66 - 4x^2$

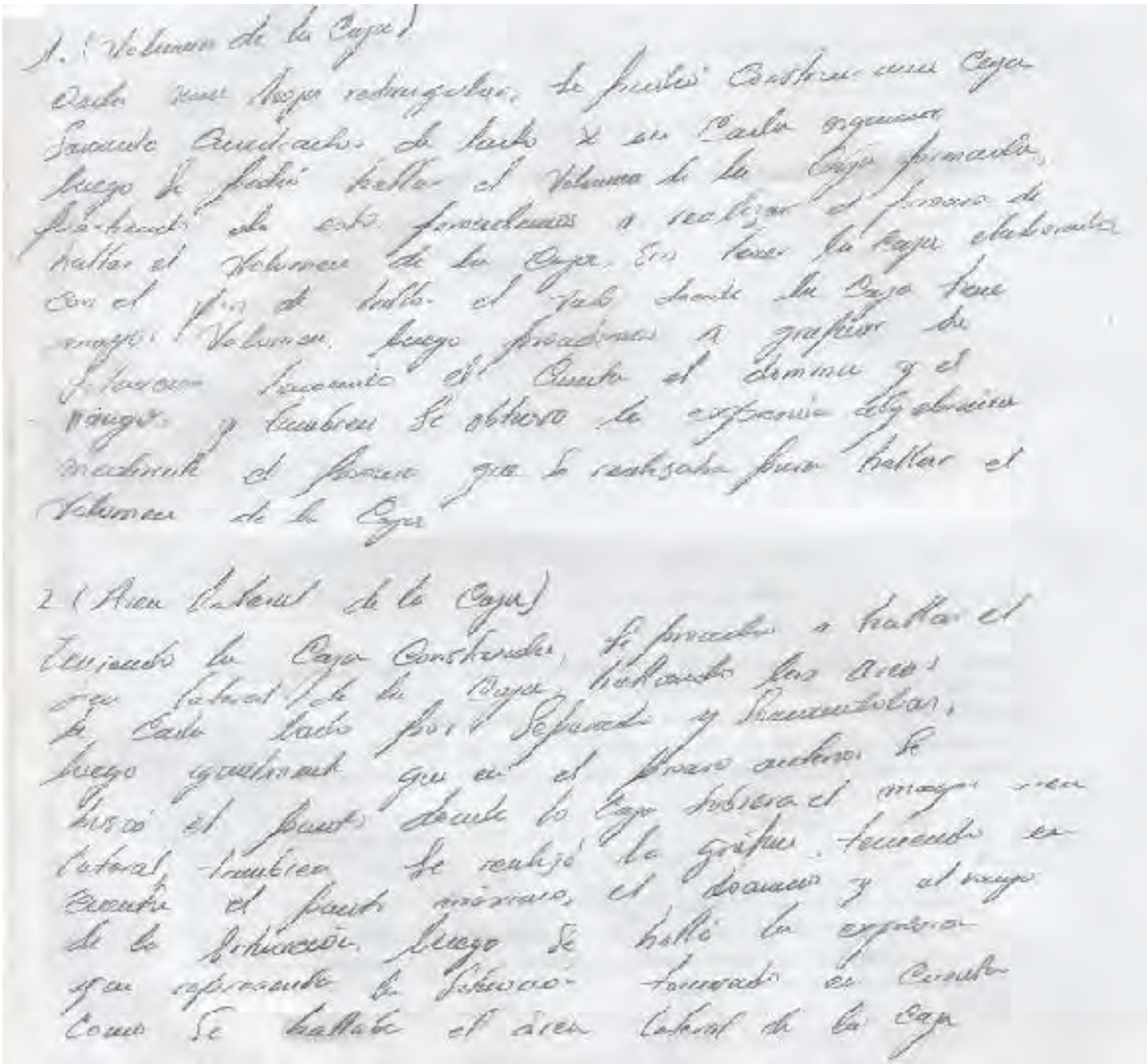
me indica los 4 cuadritos que se le quitó a la hoja. luego con esto se halló el dominio y el rango

Df: [0, 10,9]

Rf: [0, 625.66]

se dedujo de la formula del area

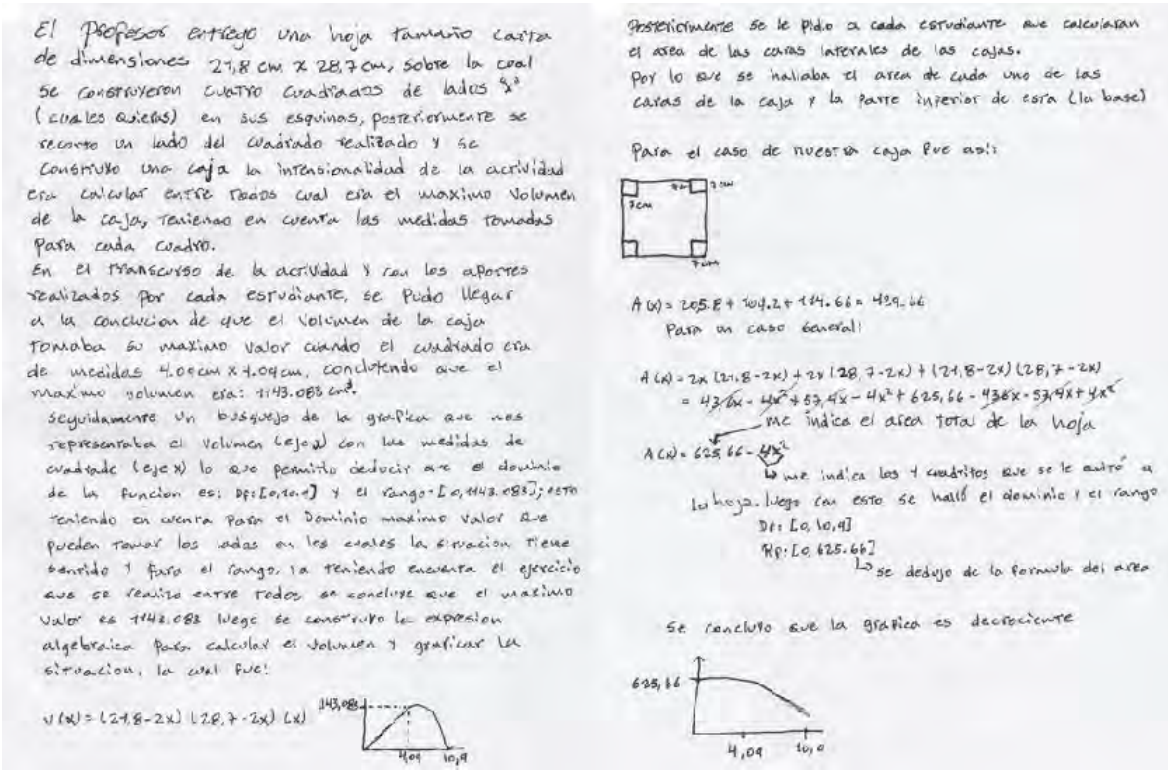
Figura 104. Parte del manuscrito de $P_{(8)8}$ al describir el proceso de construcción del área lateral de las cajas construidas.



1. (Volumen de la Caja)
Dada una hoja rectangular, se pudo construir una caja sacando cuadrados de lado x en cada esquina, luego se podrá hallar el volumen de la caja formada. Partiendo de esto procedemos a realizar el proceso de hallar el volumen de la caja. Sin hacer la caja elaborada con el fin de hallar el valor donde la caja tiene mayor volumen, luego procedemos a graficar la función teniendo en cuenta el dominio y el rango, y también se obtuvo la expresión algebraica mediante el proceso que se realizaba para hallar el volumen de la caja.

2. (Área lateral de la caja)
Teniendo la caja construida, se procedió a hallar el área lateral de la caja, hallando las áreas de cada lado por separado y sumándolas, luego igualmente que en el paso anterior se buscó el punto donde la caja tuviera el mayor área lateral, también se realizó la gráfica teniendo en cuenta el punto máximo, el dominio y el rango de la función. Luego se halló la expresión que representa la función teniendo en cuenta cómo se hallaba el área lateral de la caja.

Figura 105. Descripción que hace $P_{(8)15}$ al proceso de construir la caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.



El Profesor entrego una hoja tamaño carta de dimensiones 21,8 cm x 28,7 cm, sobre la cual se construyeron cuatro cuadrados de lados x^2 (cuales quieras) en sus esquinas, posteriormente se recorto un lado del cuadrado realizado y se construyo una caja la intensionalidad de la actividad era calcular entre todos cual era el maximo volumen de la caja, teniendo en cuenta las medidas tomadas para cada cuadro.
En el transcurso de la actividad y con los aportes realizados por cada estudiante, se pudo llegar a la concluciòn de que el volumen de la caja tomaba su maximo valor cuando el cuadrado era de medidas 4.09 cm x 4.09 cm, concluyendo que el maximo volumen era: 1143.083 cm³.
Seguidamente un bosquejo de la grafica que nos representaba el volumen (eje y) con las medidas de cuadrado (eje x) lo que permitio deducir que el dominio de la funcion es: Df: [0, 10.9] y el rango: [0, 1143.083]; esto teniendo en cuenta para el Dominio maximo valor que pueden tomar los lados en los cuales la situacion tiene sentido y para el rango, ya teniendo encuenta el ejercicio que se realizo entre todos se concluye que el maximo valor es 1143.083 luego se construyo la expresion algebraica para calcular el volumen y graficar la situacion, la cual fue:

$V(x) = (21{,}8-2x)(28{,}7-2x)(x)$

1143,083

4,09 10,9

Posteriormente se le pidio a cada estudiante que calcularan el area de las caras laterales de las cajas.
Por lo que se hallaba el area de cada uno de las caras de la caja y la parte inferior de esta (la base)

Para el caso de nuestra caja fue asi:

7cm 7cm 7cm 7cm

$A(x) = 205.8 + 104.2 + 114.66 = 429.66$

Para un caso general:

$A(x) = 2x(21{,}8-2x) + 2x(28{,}7-2x) + (21{,}8-2x)(28{,}7-2x)$
$= \cancel{43{,}6x} - \cancel{4x^2} + \cancel{57{,}4x} - 4x^2 + 625{,}66 - \cancel{43{,}6x} - \cancel{57{,}4x} + \cancel{4x^2}$

me indica el area total de la hoja

$A(x) = 625{,}66 - 4x^2$

me indica los 4 cuadritos que se le quito a la hoja. luego con esto se hallo el dominio y el rango

Df: [0, 10,9]
Rf: [0, 625.66]

se dedujo de la formula del area

Se concluyo que la grafica es decreciente

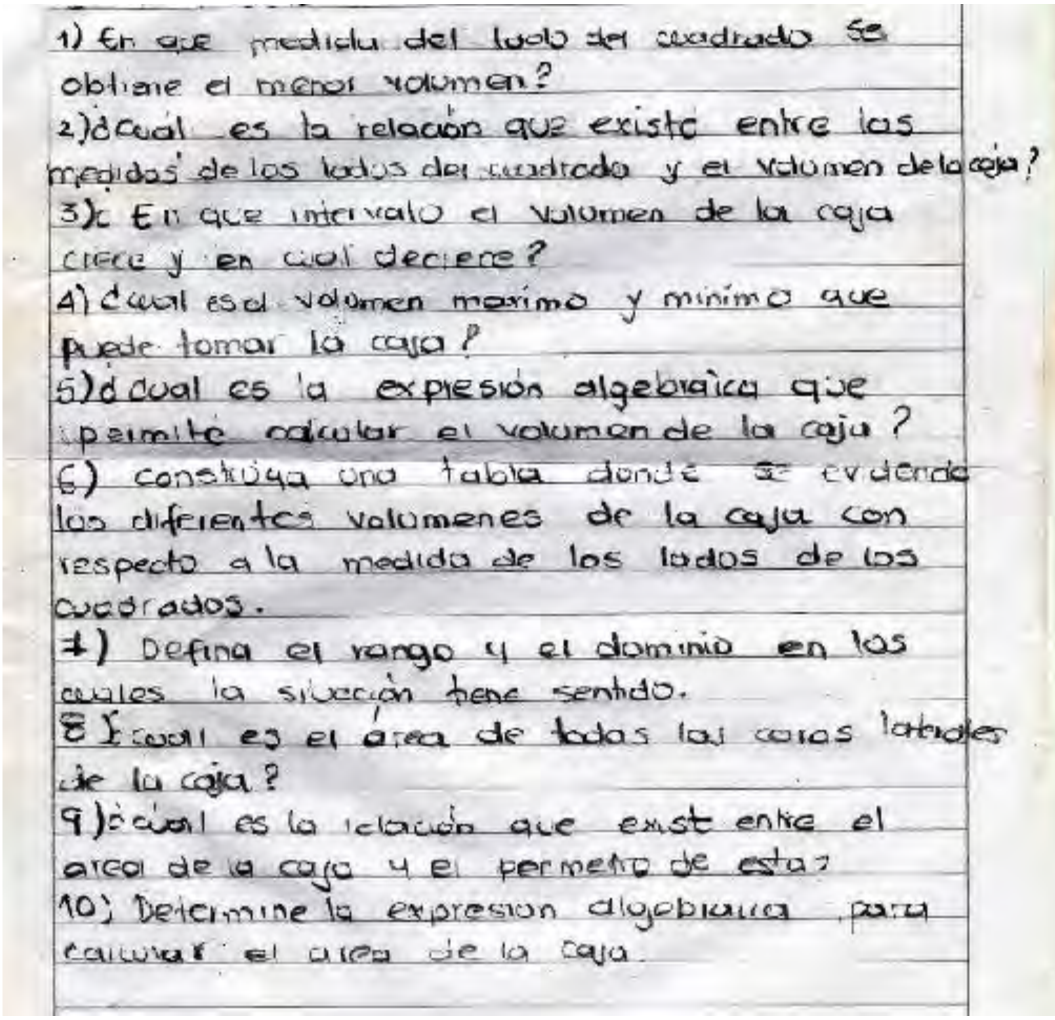
625,66

4,09 10,0

Figura 106. Descripción que hace $P_{(8)8}$ al proceso de construir la caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.

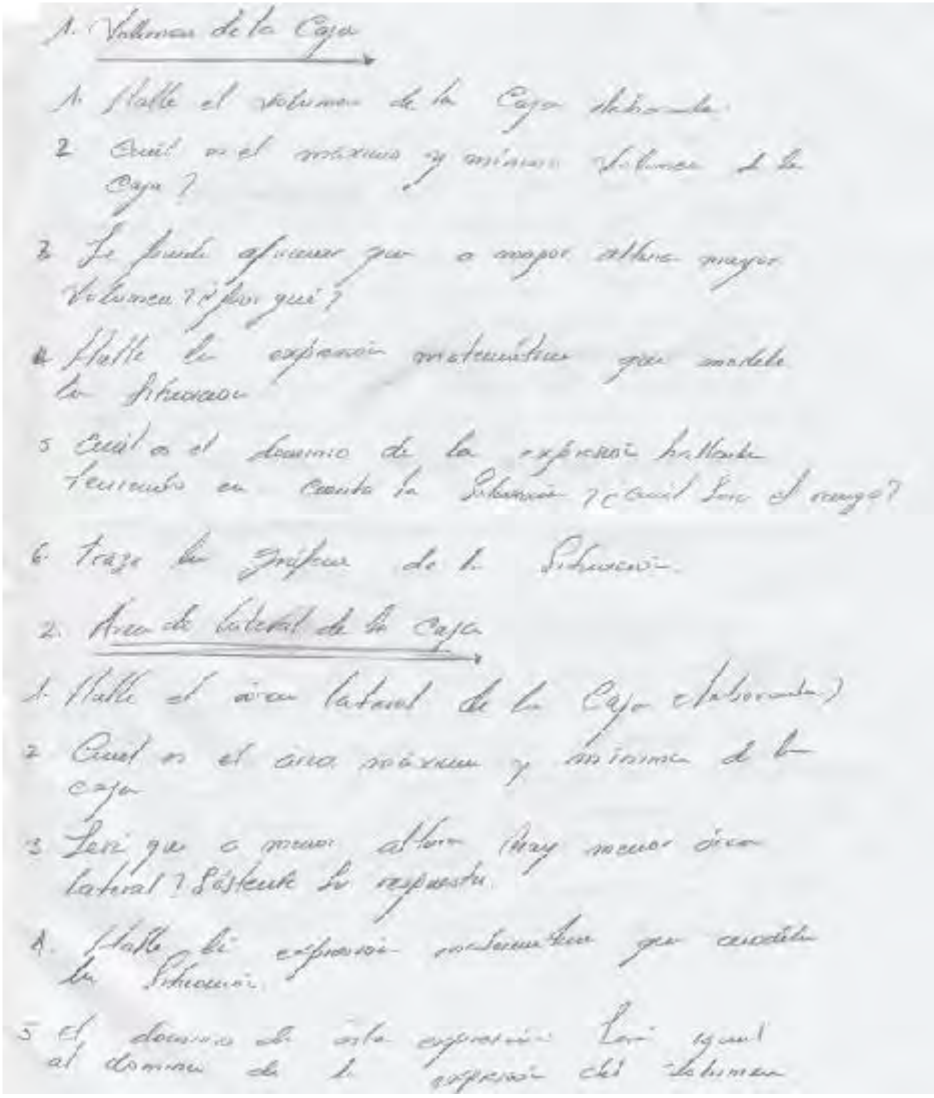
Las preguntas realizada por los estudiantes en su mayoría fueron muy adecuadas. Hubo alguna dificultad con la precisión de algunas de ellas, pero fue precisamente por el mismo hecho de concebir solo una caja, cuando era necesario hacer visible que se trataban de infinitas cajas para poder precisar que cada caja correspondía a un punto del plano y que el punto máximo en la gráfica de la función Volumen, por ejemplo, correspondía a la caja de mayor volumen y no necesariamente a la más larga, ancha o alta, como pudiera esperarse.

En las figuras 107 y 108 se muestran las preguntas formuladas por $P_{(8)15}$ y $P_{(8)8}$ en el proceso de construir su caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.



1) En que medida del lado del cuadrado se obtiene el menor volumen?
2) ¿Cuál es la relación que existe entre las medidas de los lados del cuadrado y el volumen de la caja?
3) ¿En que intervalo el volumen de la caja crece y en cual decrece?
4) ¿Cual es el volumen maximo y minimo que puede tomar la caja?
5) ¿Cual es la expresión algebraica que permite calcular el volumen de la caja?
6) construya una tabla donde se evidencie los diferentes volumenes de la caja con respecto a la medida de los lados de los cuadrados.
7) Defina el rango y el dominio en los cuales la situación tiene sentido.
8 ¿cual es el área de todas las caras laterales de la caja?
9) ¿cual es la relación que exist entre el area de la caja y el perimetro de esta?
10) Determine la expresion algebraica para calcular el area de la caja.

Figura 107. Preguntas formuladas por $P_{(6)8}$ al proceso de construir su caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.



1. Volumen de la Caja

1. Halle el volumen de la Caja elaborada.
2. Cuál es el máximo y mínimo volumen de la Caja?
3. Se puede afirmar que a mayor altura mayor volumen? ¿Por qué?
4. Halle la expresión matemática que modele la situación
5. Cuál es el dominio de la expresión hallada teniendo en cuenta la situación? ¿Cuál sería el rango?
6. Trace la gráfica de la situación

2. Área de lateral de la Caja

1. Halle el área lateral de la Caja elaborada)
2. Cuál es el área máxima y mínima de la caja
3. Será que a menor altura hay menor área lateral? Sustente su respuesta.
4. Halle la expresión matemática que modele la situación.
5. El dominio de esta expresión será igual al dominio de la expresión del volumen

Figura 108. Preguntas formuladas por $P_{(8)15}$ al proceso de construir la caja de volumen máximo previo a la preparación de la clase.

Para realizar el nuevo plan de clases se les entregó un formato- el utilizado por los profesores tutores de las prácticas docentes en la Universidad de Sucre-. Cada profesor en formación preparó su clase, se le revisó el plan de clase propuesto y se le asignó un grupo donde ejecutarlo.

Los profesores en formación siguieron adecuadamente el formato de clase que se les suministró previamente. Las clases tuvieron como eje dos elementos básicos, unos utilizaron el volumen de la caja y otros su área lateral, para trabajar funciones como se les solicitó. Todos utilizaron materiales y ayudas didácticas pero superficialmente, es decir, no explotan adecuadamente los materiales utilizados: llevan materiales como para desarrollar tres o cuatro clases, pero solamente los manipulan ellos, quitándole así, al estudiante la posibilidad de explotar y explorar sus potencialidades matemáticas. Además, escogen los ejemplos y ejercicios adecuados, para el trabajo de aula, pero para profundizar en el tema, lo que hacen es cambiar los datos a los ejercicios que propusieron durante la clase, por lo que terminan bajándole el nivel a las actividades en lugar subírselos y profundizar en ellas, como tradicionalmente han visto hacerlo a sus propios profesores de la carrera.

Pero lo anterior parece no ser muy problemático teniendo en cuenta lo planteado por Ball et al. (2008), quienes consideran que las orientaciones de los docentes a un contenido específico son influenciadas por la forma en la que ellos mismos han aprendido esos contenidos. Sin embargo, se procura que los profesores en formación comprendan los contenidos que enseñan, que lleguen a dilucidar "nuevas maneras de reorganizarlo y dividirlo, de vestirlo con actividades y emociones, con metáforas y ejercicios, con ejemplos y demostraciones, de modo que pueda ser captado por los alumnos" (Shulman, 2005, p.17), por lo que se trata de proveerles herramientas para lograr un profesor autónomo, auto monitoreado y autorregulado (Pérez, 2005).

Todos utilizaron más de dos registros semióticos de representación, con sus respectivas representaciones, en el desarrollo de la actividad: figural, gráfico, analítico algebraico, analítico numérico, tabular o del lenguaje coloquial. Con los registros semióticos de representación sucedió exactamente igual que con los materiales didácticos: sólo los mostraron muy superficialmente sin sacarle el mayor provecho a sus potencialidades, por ejemplo, realizan congruencias entre algunas de las representaciones, y aunque ya las habían producido y tenían una gama de estas disponibles para hacer las congruencias y establecer las conexiones que les permitieran promover la asignación de significado y sentido a los conceptos abordados, sólo lograron establecer congruencias entre algunas representaciones por pares, ninguno lo hizo con una terna o más representaciones. Además, algunos no los hicieron visibles, algunos elementos muy importantes para asignar significado y darles sentido a los objetos abordados, y otro que si lo hicieron, no los explotaron suficientemente en el desarrollo de su clase.

Para ilustrar lo anterior, en el manuscrito de $P_{(8)8}$ se muestra la gráfica correspondiente al área lateral de todas las cajas posibles de construir en esta situación. Ninguno visionó que cada representación correspondía al volumen o al área –según el caso- de todas las cajas posibles de construir con hojas de ese tamaño, ellos mencionaban el volumen o el área lateral de la caja, como si se tratara de una sola caja, quizás centrados en su propia experiencia de ese día, con pocas cajas. Otro aspecto que hizo visible $P_{(8)8}$, pero que ninguno mencionó en su clase fue que la gráfica mostrada en la figura 109, no llega hasta el eje *x*, y el significado que esto tiene en el marco de la situación; pues lo que le falta a la gráfica para alcanzar el eje x corresponde a la parte de hoja que no se cortó del largo, por ser mayor el largo que el ancho y por tanto, en todas las hojas, al construir la caja, siempre quedó un rectángulo de la parte central de cada hoja, a lo que ninguno hizo alusión. Esta dificultad para relacionar la tarea matemática propuesta a los estudiantes para el trabajo con funciones, con el uso que se hace de la noción función a nivel social, fue uno de los principales conflictos epistémicos encontrados en este estudio, y refuerza lo reportado por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005).

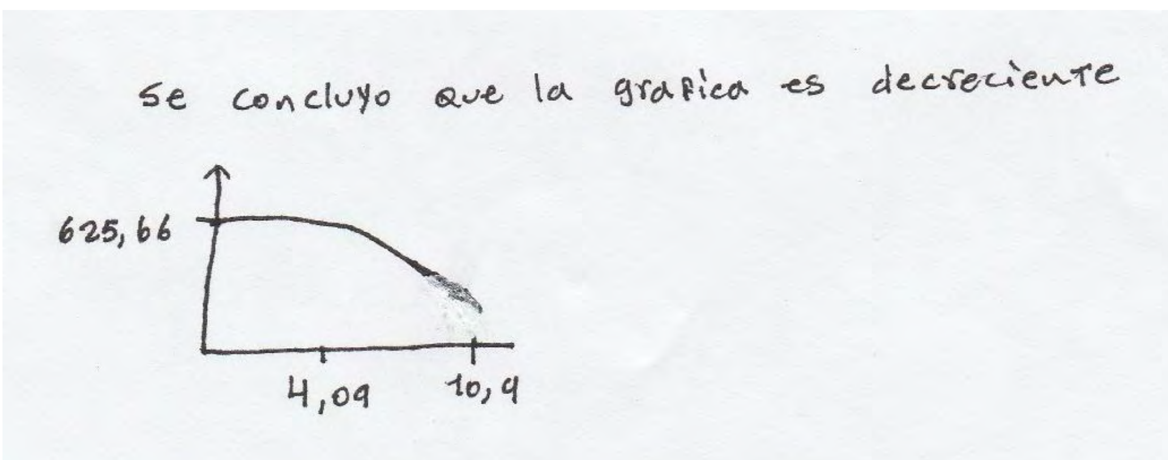


Figura 109. Parte del manuscrito de $P_{(8)8}$ mostrando la representación gráfica del área lateral de las cajas construidas.

Al margen de lo anterior, esto no fue impedimento para que los profesores en formación pudieran establecer conexiones entre el concepto función con las diversas nociones matemáticas involucradas en su definición, y con otras nociones matemáticas relacionadas muy estrechamente con funciones. Estas conexiones parece que se les facilitaron por el contexto mismo de la situación que trabajaron, ya que hicieron alusión a la relación de dependencia del volumen y del área de una figura geométrica, de sus dimensiones y que esto se relaciona directamente con funciones.

La generalidad de las dificultades presentadas por los profesores en formación en sus inicios de la práctica docente fue con la distribución de los tiempos de la clase, es decir, falta de control a los tiempos dados a los alumnos para resolver las actividades planteadas; esto se ilustra a continuación con algunos ejemplos del actuar de estos profesores en formación: 1) a veces realizando una actividad tras otra sin dejar tiempo suficiente al alumno para que madurara y organizara sus ideas, sin dejar espacio para que el estudiante propusiera alternativas de solución a las cuestiones planteadas para resolver en clase, esto es, no dieron a los estudiantes el protagonismo como ente principal de una clase y cuando asignaban tareas para resolver en la clase, la resolvían ellos mismos sin dejar que los estudiantes *propusieran* sus soluciones: perdiéndose de paso la posibilidad de analizar las soluciones propuestas por los estudiantes, para minimizar las dificultades que se encontraran. 2) ante el llamado de atención para corregir lo anterior, optaron por dejar desgastar demasiado tiempo al estudiante, que voluntariamente salió a realizar un ejercicio y no encontró cómo hacerlo o hacerlo sentar ante el primer error cometido. Y 3) no tuvieron en cuenta, para analizar, las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver la situación planteada, es decir, desestimaron algunas soluciones interesantes, pero que no coincidiera con la que ellos habían ideado. Ante los reclamos de los mismos estudiantes esto se corrigió rápidamente.

Sin embargo la mayoría de los elementos de la función –dominio, rango, interceptos, punto máximo, crecimiento y decrecimiento y concavidad- fueron identificados adecuadamente, solo un profesor en formación hizo alusión al punto de inflexión, sin llegar a analizarlo adecuadamente, ya que lo confundió con el intercepto de la función Volumen con el eje de la x (longitud del lado del cuadradito cortado) y no reconocieron el extremo inferior como un punto mínimo en ninguna de las dos funciones, sencillamente decían "*mínimo no lo hay, esta función no tiene mínimo",* otros dieron como mínimo el mínimo de la función generalizada de variable real asociada a la función volumen estudiada. Un hecho que les dificultó este análisis fue considerar los valores del dominio como discretos, es decir, que los valores (x) a cortar tuvieran incrementos de uno en uno, y que todos eran valores enteros. Fue precisamente con el análisis de dichos elementos con los que tuvieron dificultad, pues esto se puede lograr estableciendo buenas conexiones entre los elementos visibles en distintas representaciones, que permitan asignar significado y sentido a los objetos matemáticos estudiados, este aspecto fue una limitante para ambos grupos de profesores en formación. Por ejemplo, de haber hecho, con algún detalle, el análisis de la gráfica de la función Área lateral, hubieran podido caer en cuenta que su rango es $R_A = [150.42, \; 625.66]$ y no $R_A = [0, \; 625.66]$ como lo visionaron ellos.

Lo anterior suele ser problemático si se quieren profesores idóneos, capaces de transmitir de manera eficiente, conocimientos matemáticos a sus estudiantes, ya que según Shulman (2005, p.25) para que un profesor llegue a entender qué es lo que comprende un alumno requiere comprender profundamente el material que enseñar y la dinámica de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Porque de los procesos interactivos que se dan en el aula, a través de preguntas y sondeos, respuestas y reacciones, elogios y críticas se derivan nuevos procesos, que tienen una estrecha relación con la comprensión, tanto del estudiante como de la transformación de la comprensión por parte del profesor, que lo lleven a enseñarse a enseñar, aprende de su propia experiencia, y a generar en sus estudiantes la habilidad de aprender a aprender (Pérez, 2005). En este sentido Shulman (1987) considera que lo que se busca es que el profesor comprenda lo que va a enseñar y cómo ha de enseñarlo a partir de la propia experiencia como docente, de la comprensión de la forma de aprender y comprender de sus estudiantes, de cómo resuelve problemas y desarrolla su pensamiento matemático.

4.3 IMPLEMENTACIÓN Y ANALISIS DEL CUESTIONARIO FINAL

4.3.1 La muestra

El análisis de la evolución de los profesores en formación del programa licenciatura en matemáticas que se ofrece en la Universidad de Sucre, Colombia se continuó en el primer semestre del año 2015, con la aplicación de un cuestionario final a estudiantes de semestres finales (24 del sexto y 26 del octavo semestre) del programa.

Como se dijo en el apartado 3.2.3 en la metodología, en el sexto semestre los estudiantes del programa Licenciatura en Matemáticas ven Análisis matemático, Algebra abstracta I y Estadística inferencial, DIME IV (último curso de Didáctica de las matemáticas), PPI V (último curso de Práctica pedagógica investigativa) y Currículo I. En el séptimo semestre ven Algoritmo y programación, Algebra abstracta II, Tic, Proyecto Pedagógico, Currículo y Seminario de Educación. Y en el octavo semestre ven Métodos numéricos, Práctica Docente, Administración Educativa y seminario de Educación II. En el programa se ven tres electivas que se pueden elegir de una lista de asignaturas tanto disciplinares, como didáctico-pedagógicas. Y la Práctica Docente, que aunque en el plan de estudios aparece en el octavo semestre, los estudiantes la dejan para verla sola, cuando ya han cursado el programa en su totalidad. Son por lo menos unas 1168 horas de la componente matemática, y por lo menos unas 1040 horas de la componente didáctico- pedagógica y adicionalmente cinco niveles de inglés que se pueden cursar paralelos al programa, ofrecidos por la universidad o se puede mostrar suficiencia del dominio del idioma inglés.

4.3.2 Análisis cuantitativo de la faceta epistémica

En las calificaciones de los profesores en formación al resolver el cuestionario final, los resultados del análisis de varianza evidencian que se encontraron diferencias estadísticamente significativas ($P < 0,05$) en las medias de los dos grupos (ver tabla 6). Es una diferencia a favor de los profesores en formación del sexto semestre, que para el caso es una diferencia en la dimensión matemática del CDM que no se esperaba, puesto que los profesores en formación del octavo semestre en ese momento habían visto por lo menos unas 192 hora más de matemáticas (de la componente disciplinar) que los del sexto. Sin embargo, los del octavo semestre dejaron de trabajar asignaturas de la componente didáctico-pedagógica investigativa en los últimos dos semestres; lo que parece indicar que el proceso de interacción que se da con asignaturas de la componente didáctico-pedagógica favorece la comprensión disciplinar del concepto de función. Al respecto Godino (2009) considera que el proceso de análisis de los significados de las matemáticas que se desarrollan, tanto personal como institucionalmente, y su relación con elementos del contexto sociocultural, les permite a los profesores, profundizar tanto en el conocimiento matemático disciplinar, como en el conocimiento del contenido matemático que va a enseñar.

A continuación se muestran, en la tabla 6, los resultados del análisis de varianzas que permite comparar las calificaciones medias de los estudiantes de los dos cursos al resolver el cuestionario final.

Tabla 6. Anova de la Calificación al resolver el cuestionario final

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	23,882	1	23,882	7,391	0,009
Dentro de grupos	155,098	48	3,231		
Total	178,980	49			

En la tabla 7 se presenta un análisis de varianzas comparativo de las calificaciones medias de los estudiantes al resolver las pruebas diagnóstica y final, en donde se aprecian -como podría esperarse-, diferencias estadísticamente significativas ($P < 0,05$) en las calificaciones medias de los dos grupos en cada prueba. En la tabla 8 se muestran las comparaciones múltiples de las calificaciones medias al resolver tanto la prueba diagnóstica como la final. Se presentaron diferencias estadísticamente significativas –a favor de los otros grupos- entre los resultados de los estudiantes del tercer semestre (02-2013) con todos los demás grupos; los resultados de este mismo grupo de profesores en formación al resolver el cuestionario final (sexto 01-2015), presentaron diferencias respecto a sus propios resultados en la prueba diagnóstica y con los del octavo (01-2015), más no con los resultados de los del sexto (02-2013), siendo las medias de este grupo, en esta prueba, las más altas. Llama la atención que no se presentaran diferencias entre los del sexto semestre (02-2013) con los del octavo (01-2015) (ver tabla 8) y que siendo estos, en su mayoría, los mismos estudiantes del sexto (02-2013) los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica fueron mejores que los de la prueba final, y que obtuvieran mejores resultados los del sexto semestre (01-2015) que los del octavo (01-2015), cuando estos últimos han visto por lo menos unas 192 horas más de matemáticas (disciplinar). Como ya se dijo antes, parece que la interacción de las asignaturas disciplinares con las de la componente didáctico-pedagógico investigativas sirve para mejorar los resultados en las pruebas de la componente disciplinar. Pero es preocupante que al terminar de cursar las asignaturas de la componente didáctico-pedagógico investigativa, desmejore el nivel disciplinar de los estudiantes del programa.

Tabla 7. Anova comparativo de las calificaciones al resolver las pruebas diagnóstica y final

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	133,698	3	44,566	10,878	0,000
Dentro de grupos	417,884	102	4,097		
Total	551,582	105			

Tabla 8. Comparaciones múltiples de las calificaciones medias al resolver las pruebas diagnóstica y final

DMS						
					95% de intervalo de confianza	
(I) Semestre	(J) Semestre	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	Límite inferior	Límite superior
3° semestre (02-2013)	6° semestre (02-2013)	-2,2857*	0,5410	0,000	-3,359	-1,213
	6° semestre (01-2015)	-3,0405*	0,5630	0,000	-4,157	-1,924
	8° semestre (01-2015)	-1,6571*	0,5513	0,003	-2,751	-,564
6° semestre (02-2013)	3° semestre (02-2013)	2,2857*	0,5410	0,000	1,213	3,359
	6° semestre (01-2015)	-,7548	0,5630	0,183	-1,872	,362
	8° semestre (01-2015)	,6286	0,5513	0,257	-,465	1,722
6° semestre (01-2015)	3 semestre (02-2013)	3,0405*	0,5630	0,000	1,924	4,157
	6° semestre (02-2013)	,7548	0,5630	0,183	-,362	1,872

	8° semestre (01-2015)	1,3833*	0,5730	0,018	,247	2,520
8° semestre (01-2015)	3° semestre (02-2013)	1,6571*	0,5513	0,003	,564	2,751
	6° semestre (02-2013)	-,6286	,5513	,257	-1,722	,465
	6° semestre (01-2015)	-1,3833*	,5730	,018	-2,520	-,247
*. La diferencia de medias es significativa en el nivel 0.05.						

Como puede apreciarse en la tabla 9, al resolver el cuestionario final, se presentaron altos niveles de homogeneidad al interior de los grupos en el 85.71% de las respuestas dadas a las cuestiones planteadas, es decir, la tendencia por grupos fue a dar las mismas respuestas para cada ítem. Lo anterior significa que hubo un alto grado de acuerdo, sobre todo en los aciertos al resolver el cuestionario final. En este análisis de asociación entre respuestas y nivel académico de donde provinieran las respuestas, se puede apreciar que el grado de acuerdo al interior de ambos grupos fue alto, es decir, que ambos grupos tendieron a dar como respuestas los mismos literales en cada ítem/tarea, lo que se puede interpretar como que, el hecho de obtener resultados positivos en este tipo de pruebas es una condición del ámbito de los profesores de matemáticas, más que de este programa de formación en particular. Por lo que es muy posible que estos resultados no sean productos del azar, sino que se deban a las creencias y a formas estandarizadas de resolver problemas en el ámbito de las matemáticas y de las matemáticas educativas.

Tabla 9. Coeficientes Chi-Cuadrado de Pearson para cada cuestión planteada en el cuestionario final.

Cuestiones planteadas	Aciertos (%)	χ^2	P-valor
Determinar los Costos, los Ingresos y la Ganancias por producir y vender 0 ejemplares.	42.0	1.112	> 0.05
¿Para qué cantidad de ejemplares producidos y vendidos se obtienen pérdidas?	70.0	15.28	< 0.05
¿Cuál debe ser la oferta para obtener el mayor Ingreso?	62.0	9.54	< 0.05
¿En cuánto varían los costos de producción de cada libro? ¿Es constante (fija) o variable esa variación?	76.0	15.93	< 0.05

Calcula una expresión matemática que permita un cálculo aproximado de los ingresos.	72.0	16.78	< 0.05
Si se sabe que no se obtuvo ni ganancias ni pérdidas ¿cuántos ejemplares se debieron producir y vender?	74.0	15.65	< 0.05
¿En qué intervalos crecen y en cuáles decrecen las perdidas?	56.0	12.57	< 0.05

4.3.3 Análisis cualitativo de la faceta epistémica

4.3.3.1 Dimensión Matemática

Como se dijo antes, esta dimensión incluye el conocimiento que posee el profesor para desarrollar su práctica profesional eficientemente, e involucra todo lo relacionado con el conocimiento que un profesor debe tener sobre las matemáticas que enseña y las relaciones prerrequisitarias entre los diferentes conceptos enseñados, y de estos con el medio sociocultural donde se desarrolla la práctica educativa, como con los recursos que utiliza para hacerlo. Al igual que en el proceso diagnóstico, en este, se analizan sus dos sub-categorías: el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido.

4.3.3.1.1 Conocimiento común del contenido

Es el conocimiento matemático necesario para que un profesor pueda entender las matemáticas que se orientan en un nivel determinado, es decir, es el conocimiento de las matemáticas que el profesor comparte con las personas que orienta en un determinado nivel. Este conocimiento le permite al profesor determinar si una respuesta es correcta o no, de acuerdo a la solución esperada para un problema. A continuación se muestran los resultados y el análisis de las respuestas dadas por los profesores en formación al cuestionario final, atendiendo las categorías de análisis.

4.3.3.1.1.1 Identificación y uso del intercepto al origen en una función

Esta pregunta permitía, que con una inspección visual se pudiera encontrar los Costos y los Ingresos al producir y vender cero ejemplares, y se podía -también por inspección visual-inferir por sustracción, las Ganancias. Sólo el 42.0% de los estudiantes respondieron acertadamente este ítem/tarea (12, 6); se muestran como ejemplos las respuestas dadas por $P_{(8)20}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(6)12}$ en las figuras 118, 119 y 121. Cabe destacar que el número de aciertos obtenidos por los profesores en formación del octavo semestre, fue duplicado por los del sexto. La respuesta que predominó entre los profesores en formación (56,0%) tenía las dos primeras opciones correctas y la Ganancias cero (0), como se muestra en las respuestas de los profesores en formación $P_{(6)2}$, $P_{(6)22}$ y $P_{(8)15}$ en las figuras 49, 69 y 61. En este caso, el análisis visual funcionó a medias, porque un grupo bien amplio (12, 17) de profesores en formación no pudo concebir una Ganancias negativa, es decir, a pesar de que los estudiantes pusieron en juego diferentes representaciones de la situación ello no los condujo a dar una solución adecuada al problema (Hitt, 2003b). Además, no se encontraron evidencias estadísticamente significativas de asociación entre el tipo de respuesta dada por los estudiantes y el grupo de donde ésta proviniera ($\chi^2 = 1.112$, $P > 0.05$), esto es, las respuesta al interior de los grupos tendieron a ser diferentes, independiente de si se trataba de aciertos o errores.

En las Figuras 110, 111 y 112 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)2}$, $P_{(8)26}$ y $P_{(6)1}$ respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

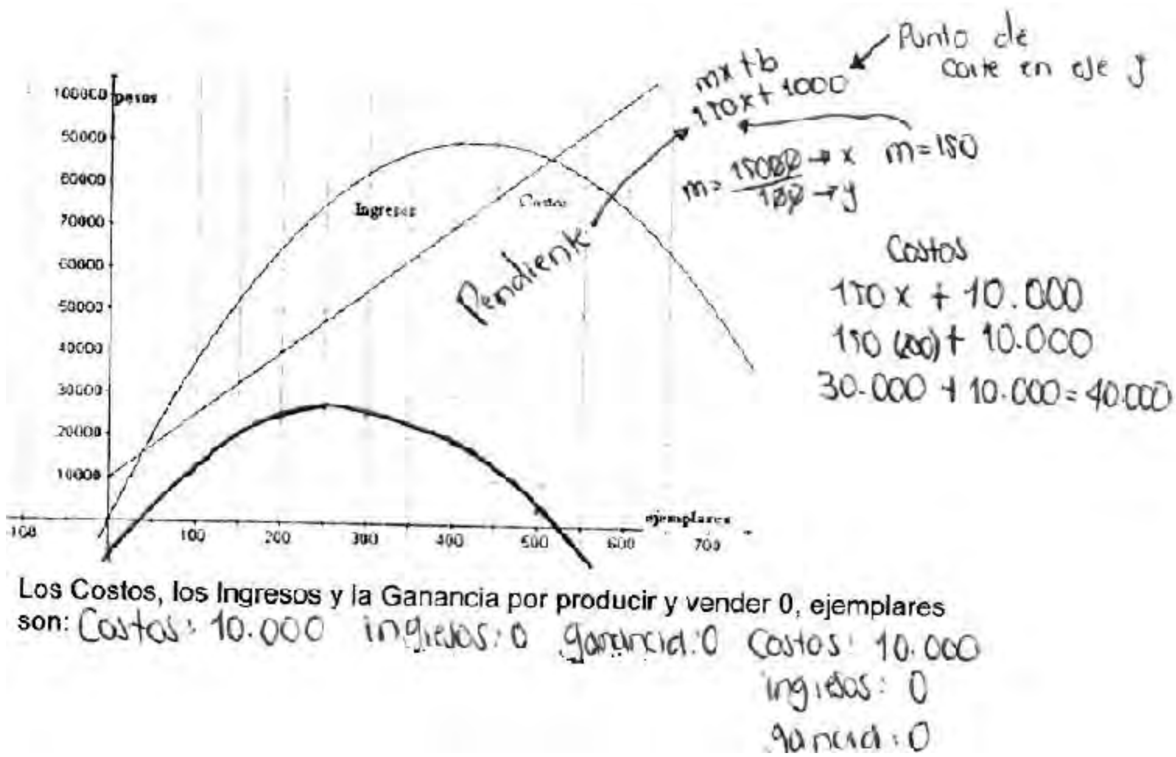


Figura 110. Respuesta dada por $P_{(6)2}$ a varios ítems del cuestionario.

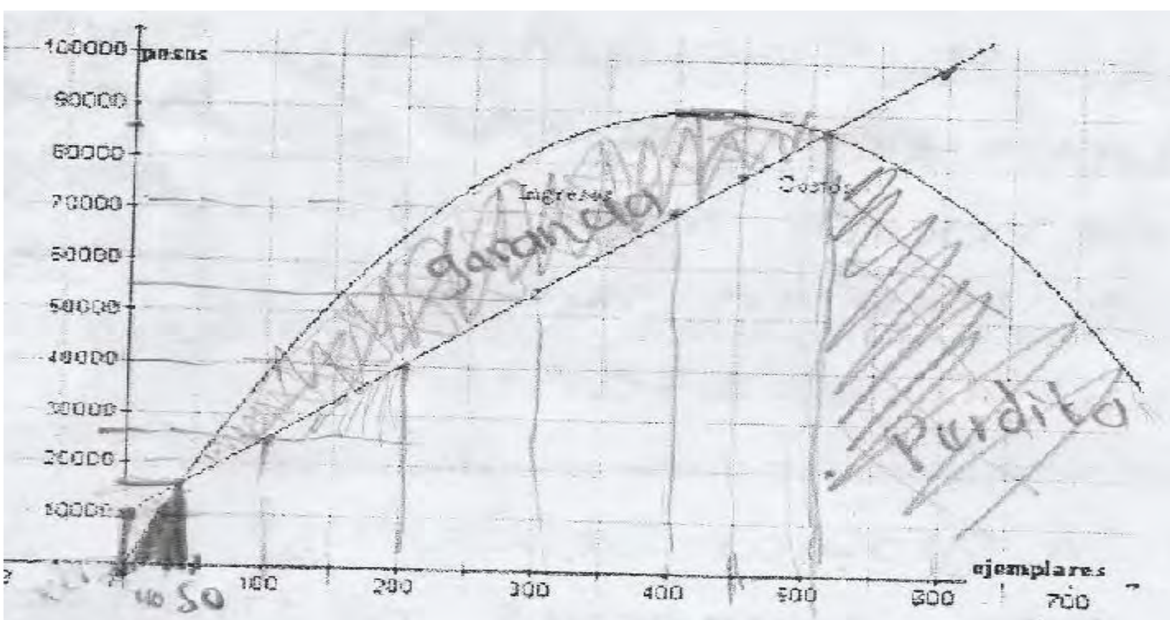
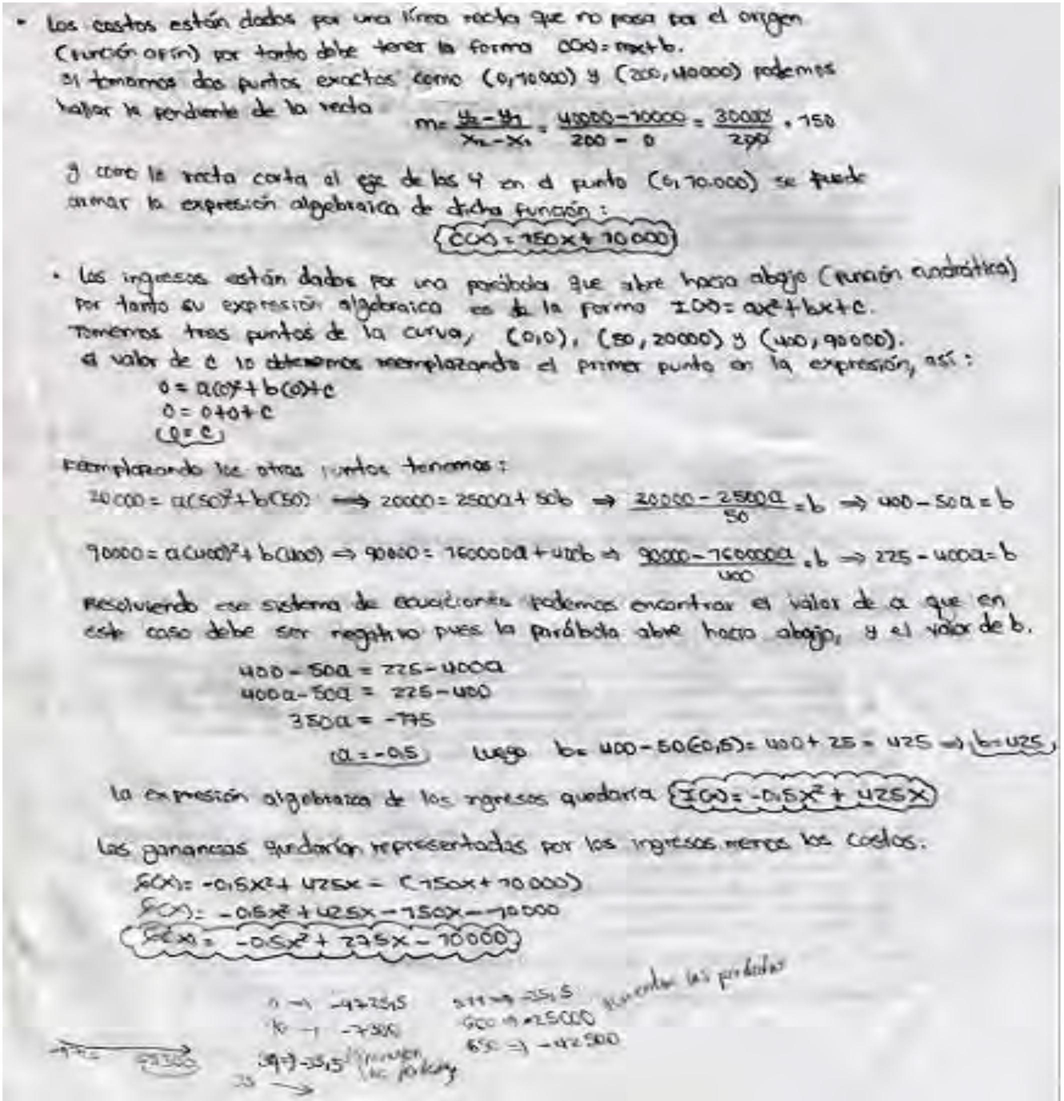


Figura 111. Ilustración hecha por el $P_{(8)26}$ al dar respuesta al cuestionario final.



- Los costos están dados por una línea recta que no pasa por el origen (función afín) por tanto debe tener la forma $C(x) = mx + b$.
Si tomamos dos puntos exactos como $(0, 10000)$ y $(200, 40000)$ podemos hallar la pendiente de la recta $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40000 - 10000}{200 - 0} = \frac{30000}{200} = 150$

y como la recta corta al eje de las y en el punto $(0, 10.000)$ se puede armar la expresión algebraica de dicha función:

$C(x) = 150x + 10\,000$

- Los ingresos están dados por una parábola que abre hacia abajo (función cuadrática) por tanto su expresión algebraica es de la forma $I(x) = ax^2 + bx + c$.
Tomemos tres puntos de la curva, $(0, 0)$, $(50, 20000)$ y $(400, 90000)$.
el valor de c lo determinamos reemplazando el primer punto en la expresión, así:

$0 = a(0)^2 + b(0) + c$
$0 = 0 + 0 + c$
$0 = c$

Reemplazando los otros puntos tenemos:

$20\,000 = a(50)^2 + b(50) \Rightarrow 20000 = 2500a + 50b \Rightarrow \frac{20000 - 2500a}{50} = b \Rightarrow 400 - 50a = b$

$90000 = a(400)^2 + b(400) \Rightarrow 90000 = 160000a + 400b \Rightarrow \frac{90000 - 160000a}{400} = b \Rightarrow 225 - 400a = b$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones podemos encontrar el valor de a que en este caso debe ser negativo pues la parábola abre hacia abajo, y el valor de b.

$400 - 50a = 225 - 400a$
$400a - 50a = 225 - 400$
$350a = -175$
$a = -0{,}5$ luego $b = 400 - 50(-0{,}5) = 400 + 25 = 425 \Rightarrow b = 425$

la expresión algebraica de los ingresos quedaría $I(x) = -0{,}5x^2 + 425x$

Las ganancias quedarían representadas por los ingresos menos los costos.

$G(x) = -0{,}5x^2 + 425x - (150x + 10.000)$
$G(x) = -0{,}5x^2 + 425x - 150x - 10\,000$
$G(x) = -0{,}5x^2 + 275x - 10000$

Figura 112. Respuesta dada por $P_{(6)1}$ a varias tareas/ítems del cuestionario final.

Para establecer relaciones entre los elementos de cada representación del objeto estudiado, los dos grupos de profesores en formación (24, 24) utilizaron diversos tipos de *elementos lingüísticos:* verbales, números naturales y el signo igual, como puede apreciarse en las soluciones dadas por $P_{(6)2}$, $P_{(6)22}$, $P_{(8)20}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)12}$ y $P_{(8)15}$ mostrados en las figuras 110, 114, 118, 119, 121 y 122 respectivamente (e.g., $P_{(6)5}$: "*al vender 0 ejemplares tenemos que los costos son 10.000 pesos y los ingresos son cero pesos ya que no ha vendido nada, las ganancias en este punto son 0 (cero)"; "*$P_{(8)20}$*: "los costos al realizar ejemplares serían de 10.000, los ingresos serían de 0 ya que no se vende nada. Las ganancias serían -10.000 ya que vendan o no vendan tienen que pagar por los ejemplares hechos";* $P_{(6)2}$: "c*ostos =10.000,* *Ingresos = 0 y Ganancias = 0"*, y $P_{(6)5}$: "*para el primer ítem después de haber buscado las expresiones correspondientes, lo único que se hizo fue sustituir el número de ejemplares en las ecuaciones correspondientes así:* $y = 150(0) + 10000 = 10000$, $ingresos = -0{,}5(0)^2 + 425(x) = 0, utilidad = 0 - 10000 = -10000$"; $P_{(6)12}$: "*a producir 0 ejemplares los costos fijos son de 10000 pesos, al no vender ejemplares no se obtienen ingresos, y como las ganancias es ingresos menos los costos, al vender cero ejemplares se obtiene una ganancia de -10000 pesos"*).

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destacan los interceptos al origen de las tres funciones involucradas, cantidades constantes, ecuaciones, expresiones algebraicas. En relación a las *proposiciones/propiedades*, en sus respuestas asocian claramente los puntos de corte de las gráficas de las funciones con el eje de las ordenadas, con los elementos contextuales correspondientes a una abscisa cero. Asociación que establecen aún aquellos que dan respuestas incorrectas, pero consecuentes con sus respuestas. En cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizadas, en los profesores en formación del octavo semestre predominó un análisis visual: e.g., $P_{(8)7}$: "*ya que en la gráfica de costos, cuando se venden 0 ejemplares esta gráfica toma el valor de 10000. En la gráfica de ingresos cuando se venden 0 ejemplares, la gráfica toma el valor de 0, la ganancia es cero*, ya que no se vende ningún ejemplar"; mientras que los del sexto predominó un análisis visual acompañado con procesos analíticos (procedimientos aritméticos y/o algebraicos, como se muestra en las soluciones dadas por $P_{(6)5}$ y $P_{(6)1}$ además, establecen congruencias entre los registros gráficos, analítico numérico y del lenguaje coloquial, y $P_{(6)5}$ y $P_{(6)1}$ al igual que algunos de sus compañeros muestran las operaciones realizadas para dar con la respuesta que comunicas. Y en relación a *los argumentos*, hay evidencias de éstos en las respuestas de muchos profesores en formación de ambos grupos, sin embargo son diferenciables, ya que *los argumentos* de los profesores en formación del sexto semestre los apoyaron en los procedimientos que realizaron, como es el caso de $P_{(6)5}$ y $P_{(6)1}$, de quienes no quedan dudas de qué hicieron y de cómo lo hicieron.

4.3.3.1.1.2 Identificación y uso de los intervalos de variación de una función

En este ítem/tarea se indagó por el intervalo de variación de la oferta para la que se obtienen pérdidas, es decir, por el dominio de la función pérdidas. Se esperaba que a partir de un análisis visual, los profesores en formación pudieran identificar los intervalos donde se producen pérdidas, o luego de realizar algunas transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, obtuvieran las expresiones algebraicas involucradas en la situación y se apoyaran en ellas para dar sus respuestas. El 70,0% (19, 16) de los profesores en formación dio respuestas acertadas a este ítem/tarea, pero un número considerable de ellos (6, 10) tuvieron ciertas dificultades para identificar el dominio de la función pérdidas en el registro gráfico, ya que en concordancia con lo respondido en la etapa diagnóstica, los resultados de los que dan cuenta no van más allá de lo visible (Amaya y Medina, 2013), lo que a su vez pudo impedirle conectar las representaciones involucradas (Meel, 2003) y a partir de ahí dar respuestas a las cuestiones por las que se les preguntó. Sin embargo el avance fue muy significativo en este aspecto, ya que se pasó de que ningún profesor en formación concibiera ganancias negativas o pérdidas, en el proceso diagnóstico, a que un 70% de ellos lo hiciera luego de realizada la intervención. En este aspecto se evidenció alta homogeneidad en las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 15.28$, $P < 0.05$), es decir, sin tener en cuenta los aciertos y los desaciertos, el grado de homogeneidad en las respuestas intra e inter grupos fue alto.

En las Figuras 113, 114, 115 y 116 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(8)7}$, $P_{(8)22}$, $P_{(8)26}$ y $P_{(6)21}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.

ya que en la grafica de costos, cuando se venden 0 ejemplares esta grafica toma el valor de 10000. En la gráfica de ingresos cuando se venden 0 ejemplares, la grafica toma el valor de 0. Las ganancias es 0, ya que no se vende ningun ejemplar

② Como vemos entre 0 y 40 ejemplares los costos son mayor a los ingresos y en 510 y 750 Tambien ocurre lo mismo

③ La opcion Correcta es la ⓑ ya que en este intervalo. es donde se obtienen mayores ingresos por los ejemplares.

④ observemos que para $15000 pesos se venden 25 ejemplares.
Ademas para 50 ejemplares se obtienen ingresos de 25000. para 100 ejemplares se obtengran ingresos de 40000
La funcion que cumple con estas condiciones es $G(x) = 150x + 10000$ Aproximadamente.

⑤ Como podemos ver cuando se venden 100 ejemplares se obtienen ingresos de $20000. cuando se venden 200 ejemplares se obtienen ingresos de 65000.
Cuando se producen 100 ejemplares se gastan 25000. Se gastan 40000 cuando se producen 200
Por lo tanto, el Costo varia en $150.

Figura 113. Respuestas dadas por $P_{(8)7}$ a los ítems/tareas del 1 al 5 del cuestionario final.

Ganancia

1) Ingreso - Costo =

- los costos son de 10000 porque así ellos no venden deben pagar eso
- los ingresos 0 pesos pues al no vender nada al contrario pierden.
- no obtienen ninguna ganancia ya que no venden nada...

2) Entre 0 y 40 ejemplares producidos y vendidos se obtiene pérdidas ya que al el no vender o vender 0 ejemplares tiene como costo $10000 ... y más de 510 ejemplares resto que la gráfica se refleja que los ingresos desienden.

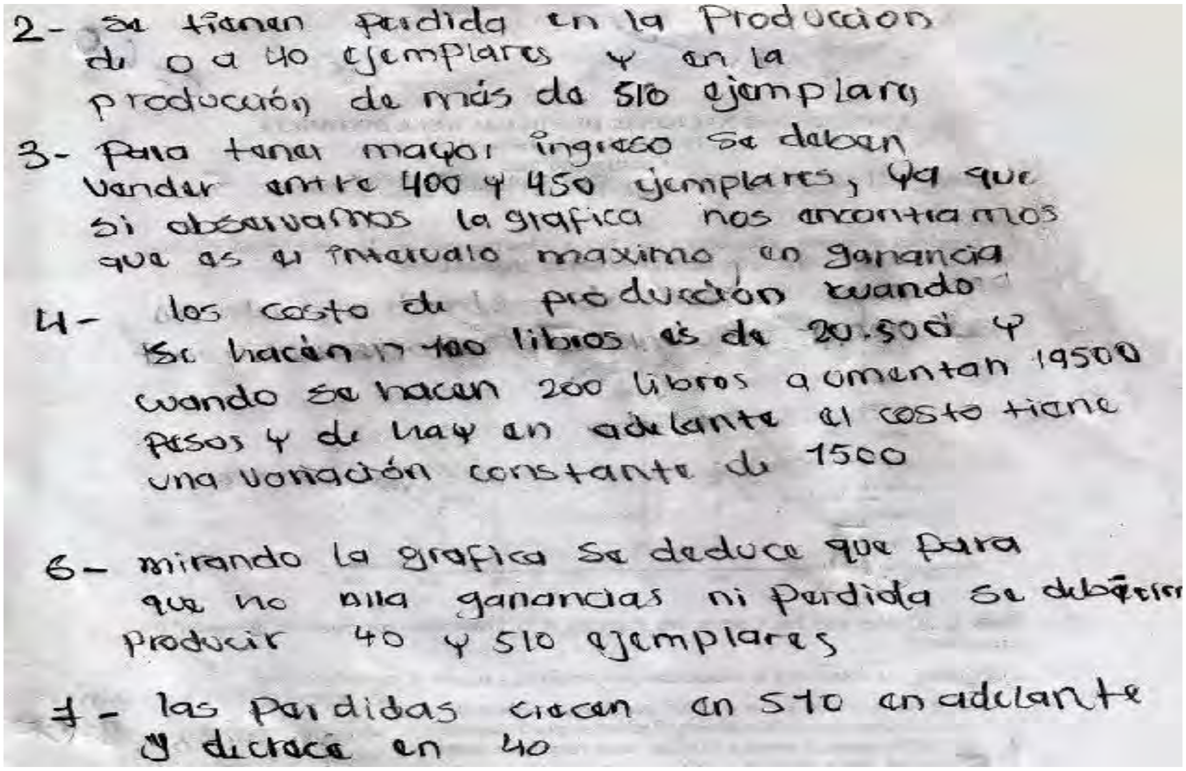
3) Si se observa en la gráfica entre 400 y 450 ejemplares los ingresos son mayores (90000) lo que deja claro la respuesta.

5) $-0.05(400)^2 + 425(400) = 90000$

$x = 400$ $\quad$ $G(x) = -0.05x^2 + 425x$

Ingresos - costos = Ganancias

Figura 114. Respuestas dadas por $P_{(6)22}$ a los ítem 1-3 de cuestionario final.


2- se tienen perdida en la Produccion di 0 a 40 ejemplares y en la producción de más de 510 ejemplares

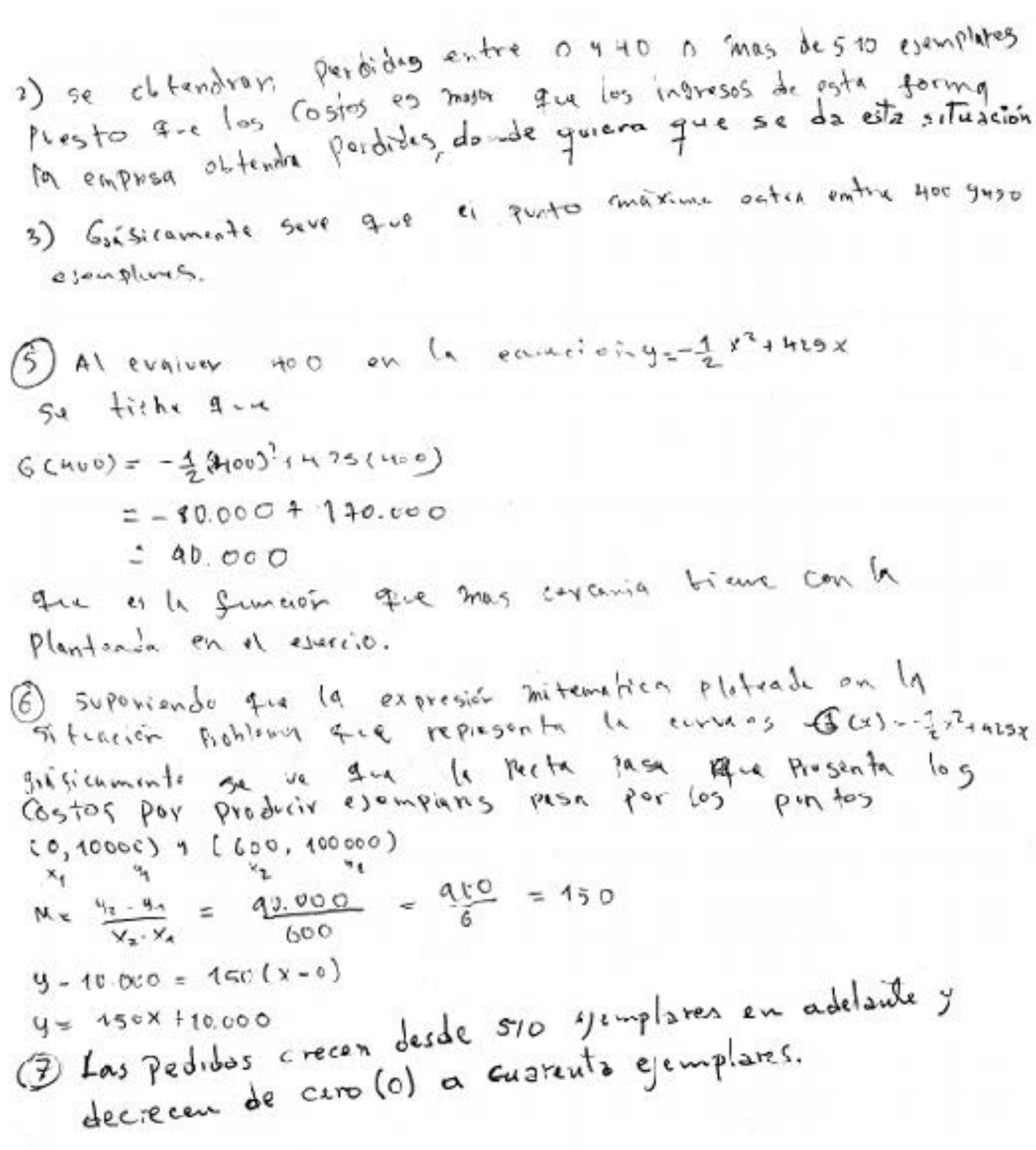
3- Para tener mayor ingreso se deben vender entre 400 y 450 ejemplares, ya que si observamos la grafica nos encontramos que es el intervalo maximo en ganancia

4- los costo de la producción cuando se hacen 100 libros es de 20.500 y cuando se hacen 200 libros aomentan 19500 pesos y de hay en adelante el costo tiene una variación constante de 1500

6- mirando la grafica se deduce que para que no alla ganancias ni perdida se deberian producir 40 y 510 ejemplares

7- las perdidas crecen en 510 en adelante y decrece en 40

Figura 115. Respuestas del $P_{(8)26}$ a los ítems 2-7 del cuestionario final.


2) se obtendran perdidas entre 0 y 40 o mas de 510 ejemplares
puesto que los costos es mayor que los ingresos de esta forma
donde quiera que se da esta situación
la empresa obtendra perdidas,

3) Gráficamente se ve que el punto máximo esta entre 400 y 450
ejemplares.

⑤ Al evaluar 400 en la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 + 425x$
se tiene que

$G(400) = -\frac{1}{2}(400)^2 + 425(400)$
$= -80.000 + 170.000$
$= 90.000$

que es la función que mas cercania tiene con la
planteada en el ejercicio.

⑥ suponiendo que la expresión matematica planteada en la
situación problema que representa la curva es $G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 425x$
gráficamente se ve que la recta que presenta los
costos por producir ejemplares pasa por los puntos
$(0, 10000)$ y $(600, 100000)$
$x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90.000}{600} = \frac{900}{6} = 150$

$y - 10.000 = 150(x - 0)$
$y = 150x + 10.000$

⑦ Los pedidos crecen desde 510 ejemplares en adelante y
decrecen de cero (0) a cuarenta ejemplares.

Figura 116. Respuestas dadas por el $P(6)_{21}$ a los ítems/tareas de la 2 a la 7 del cuestionario final.

En este ítem/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación de los dos grupos (22, 15) fueron mayoritariamente verbales combinados con números enteros, (e.g., $P_{(8)22}$: "*Entre 0 y 40 ejemplares producidos y vendidos se obtiene pérdidas ya que al él no vender, o vender 0 ejemplares tiene como costo $10.000… y más de 510 ejemplares puesto que la gráfica se refleja que los ingresos descienden";* $P_{(8)26}$: "*se obtienen pérdidas en la producción de 0 a 40 ejemplares y en la producción de más de 510 ejemplares*"; $P_{(8)20}$: "*si vemos la gráfica podemos ver que si no se vende ningún ejemplar se obtiene pérdidas";* $P_{(8)7}$: "*como vemos entre 0 y 40 ejemplares los costos son mayor a los ingresos y en 510 a 750* *ocurre lo mismo*"; $P_{(8)15}$: "*las pérdidas se obtienen cuando los costos superan los ingresos, en la gráfica esto es, cuando la curva parabólica se encuentra por debajo de la línea recta*"; $P_{(8)17}$: "*se obtienen pérdidas cuando se producen 510 ejemplares, puesto que no hay ganancias, es decir, no hay área encerrada y la parábola, es decir, los ingresos empiezan a descender*"; $P_{(6)12:}$ "*para obtener ganancias en la gráfica debe haber área bajo la curva de ingresos y sobre la recta de los costos, teniendo en cuenta los puntos de intercepción, los cuales son donde no hay ni pérdida ni ganancias, por tanto hay pérdida de 0 a 40 ejemplares y de 510 ejemplares en adelante";* $P_{(6)5}$: "*para el segundo interrogante con una simple observación y análisis de la gráfica se pueden obtener estos valores para donde se obtienen pérdidas, ya que la utilidad es igual a la diferencia de los ingresos menos los costos, y en estos puntos o intervalos los ingresos son menores que los costos, por lo cual se producirá una pérdida";* $P_{(6)6}$, "*de 0 a 40 ejemplares y de 510 ejemplares en adelante, ya que si los costos son mayores que las ganancias, siempre va a haber pérdidas";* $P_{(6)21}$: "*se obtienen pérdidas entre 0 y 40 o más de 510 ejemplares puesto que los costos son mayores que los ingresos, de esta forma la empresa obtendría perdidas donde quiera que se de esta situación".* Otro grupo (1, 6) gráficos donde muestra regiones o sectores del plano cartesiano para ilustrar su respuesta, como lo hacen $P_{(6)2}$, $P_{(8)26}$, $P_{(6)22}$ y $P_{(8)20}$ en las figuras 110, 111, 114 y 118 respectivamente.

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan este grupo de profesores en formación se pueden destacar el de intervalo, parábola, línea recta, gráficas, área bajo la curva, puntos y mayor que, entre otros. En cuanto a las *proposiciones/propiedades* utilizadas, manifiestan explícitamente que se tiene pérdidas cuando la función de Costos es mayor que la de los Ingresos, reconocen que la ganancia es igual a la diferencia de los ingresos menos los costos, sin embargo $P_{(8)26}$, $P_{(8)20}$, $P_{(8)22}$ señalan regiones que no corresponden con sus respuestas escritas. $P_{(6)12}$ por ejemplo asocia el área bajo la curva, en la gráfica, con la ganancia. Los *procedimientos/estrategias* utilizadas por los profesores en formación al resolver este ítem/tarea fueron de dos tipos: como lo manifiesta $P_{(6)1}$: "*los resultados los obtuve remplazando en las expresiones algebraicas o también observando en la gráfica el valor de x que toma Y en ese punto*"; o $P_{(6)5}$ cuando dice "*con una simple observación y análisis de la gráfica se pueden obtener estos valores para donde se obtienen pérdidas".*

En relación con *los argumentos* utilizados, hay muestras claras de éstos sobre todo en las producciones de profesores en formación del sexto semestre, como las dadas por $P_{(6)12}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)6}$, y $P_{(6)21}$ y mostradas en los elementos lingüísticos dos párrafos más arriba. En las soluciones dadas por los profesores en formación del octavo semestre los argumentos son muy escasos como es el caso de $P_{(8)3}$, (e.g., $P_{(8)3}$: "*entre 510 y 750 ejemplares ya que los ingresos disminuyen en este intervalo*"), o carentes de solidez como es el caso de $P_{(8)22}$, $P_{(8)15}$, $P_{(8)17}$, transcritos en la descripción de los elementos lingüísticos, arriba. Y en términos generales los argumentos de los profesores en formación de los dos grupos tienen esa tendencia: los del sexto fueron bien sólidos y justificados, mientras los de los del octavo, carentes de justificación y fundamentación, fueron más bien superficiales.

Como puede apreciarse en las respuestas que se muestran de estos profesores en formación, son muy pocos los que presentan dificultades respecto al conocimiento común del CDM, sin embargo, al hacer las descripciones se notan ciertas incoherencias al redactar, sobre todo en los del octavo semestre, quizás en razón de que los del sexto han venido haciendo ensayos y describiendo sus actividades en los artículos y resúmenes para eventos. Estas actividades relacionadas con procesos investigativos son según Shulman (2005) unas de las que más aportan a la formación de un profesor.

4.3.3.1.1.3 Determinación de los máximos y mínimos de una función

Al indagar por el Ingreso máximo se esperaba que los estudiantes acudieran a un análisis visual para aportar sus respuestas, o que si ya habían encontrado una expresión algebraica para la función ingreso, encontraran el punto crítico, y que de ahí derivaran su respuesta. En este ítem el 62.0% (16, 15) de los estudiantes obtuvo respuestas acertadas. Y a pesar de que la gráfica de la función Ingresos estaba explicita en la situación, no pudieron asociarla con algo conocido (Suárez y Cordero, 2010) y dar una respuesta masiva acertada a este aspecto, y terminaron haciendo interpretaciones engañosas (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011) que para nada favorecieron la solución a este ítem. Al igual que en los anteriores ítems, en este aspecto también se evidenció altas concordancias en las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 9.54$, $P< 0.05$), además, el grado de aciertos en todos los grupos fue alto.

En las Figuras 117, 118, 119 y 120 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(8)22}$, $P_{(8)20}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(6)5}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.

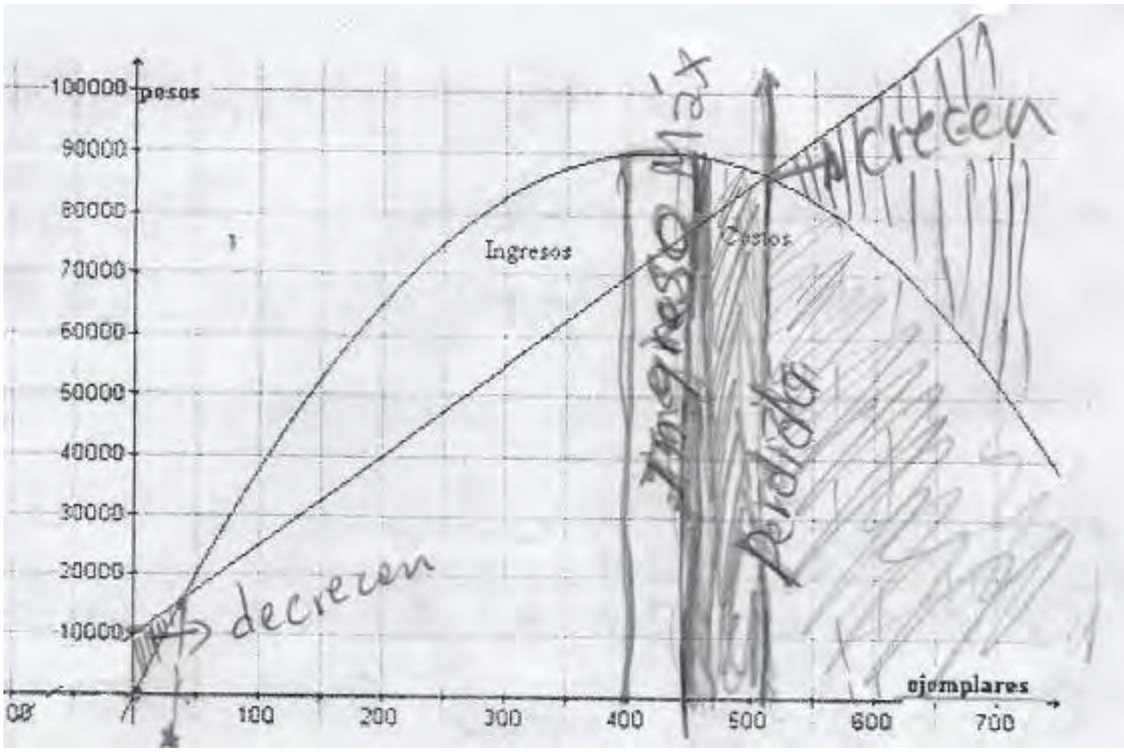


Figura 117. Ilustración hecha por el $P_{(8)22}$ al dar respuestas al cuestionario final.

1. los costos al realizar ejemplares serian de 10000
los ingresos serian de 0 ya que no se vende nada.
la ganancia seria -10000 ya que vendan o no vendan tienen que pagar por los ejemplares hechos.

2. Si vemos la grafica podemos ver que si no venden ningun ejemplar se obtiene perdidas

3. ya que es el intervalo donde mas se obtiene ganancia.

4. ya que en cada intervalo hay 150

5. $-0.5(400)^2 + 425(400) = 90.000$
lo que hice fue remplazar la variable por la suma del mayor ingreso

6. ya que en esos intervalos es que permanecen constante.

7. en el intervalo de 0 a 40 se ve que no se vende ningun ejemplar y sin embargo hay crecen los costos y disminuye el ingreso

Figura 118. Respuestas dadas por $P_{(8)20}$ al cuestionario final.

Para responder cada una de las preguntas propuestas en primera instancia hallare la formula o expresión matemática que modele la situación:

1) encontremos la expresión matematica para los costos podemos notar que la grafica de los costos es una función lineal, la cual la podemos buscar aplicando el concepto de la ecuacion punto pendiente

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 10000 = 150(x-0)$

$\underbrace{y = 150x + 10000}_{\text{costos}}$

para los puntos $(\underbrace{0}_{x_1}, \underbrace{10000}_{y_1})$ $(200, 40000)$

$m = \frac{40000 - 10000}{200}$

$= \frac{30000}{200} = 150$

2) ingresos la grafica se parece a una parabola, por tanto aplicaremos la siguiente expresion:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y hallaremos el valor de p luego lo sustituimos en la ecuacion y así encontramos la ecuacion de de los ingresos.

$-0{,}5x^2 + 425x$ = ingresos

3) la utilidad como se puede observar en la grafica es los ingresos menos los costos:

Utilidad = ingresos - costos

Utilidad $= -0.5x^2 + 425x - (150x + 10000)$

$= -0{,}5x^2 + 425x - 150x - 10000$

$= -0.5x^2 + 275x - 10000$

Figura 119. Modelación hecha por $P_{(6)5}$ a las funciones de Costos, Ingreso y Ganancia de cuestionario final.

a) Para el primer iten despues de haber buscado las expresiones correspondientes, lo unico que se hizo fue sustituir el numero de ejemplares en las ecuaciones correspondientes asi

$y = 750(0) + 10000 = 10000$

$\text{ingresos} = -0.5(0)^2 + 425(x) = 0$

$\text{utilidad} = 0 - 10000 = -1000$

b) para el segundo interogante con una simple observación y analisis de la grafica se pueden obtener estos valores para donde se obtienen perdidas, yaque la utilidad es igual a la diferencia de los ingresos menos los costos y en estos puntos o intervalos los ingresos son menores que los costos, por lo cual se producira una peidida

c) para el tercer interogante se puede extraer facilmente de la grafica que en la parte donde se obtiene el mayor ingreso es entre 400 y 450 ejemplares.

d) Esto se obtiene de la expresión matematica de los costos que es:
$y = 750x + 10000$ el cual nos indica que el costo de los libros varian $750 (Ademas 750 es la pendiente)

e) (Respuesta en la hoja de atraz).

f) pues este es el punto de corte entre ingresos y costos, en donde los ingresos son iguales a los costos, por tanto su restar sera cero. es decir ni ganancias ni perdidas.

g) Este se puede abtraer del analisis mismo de la grafica y al sustituir los valores de los intervalos en la ecuacion de la utilidad.

Figura 120. Respuestas dadas por $P_{(6)5}$ al cuestionario final.

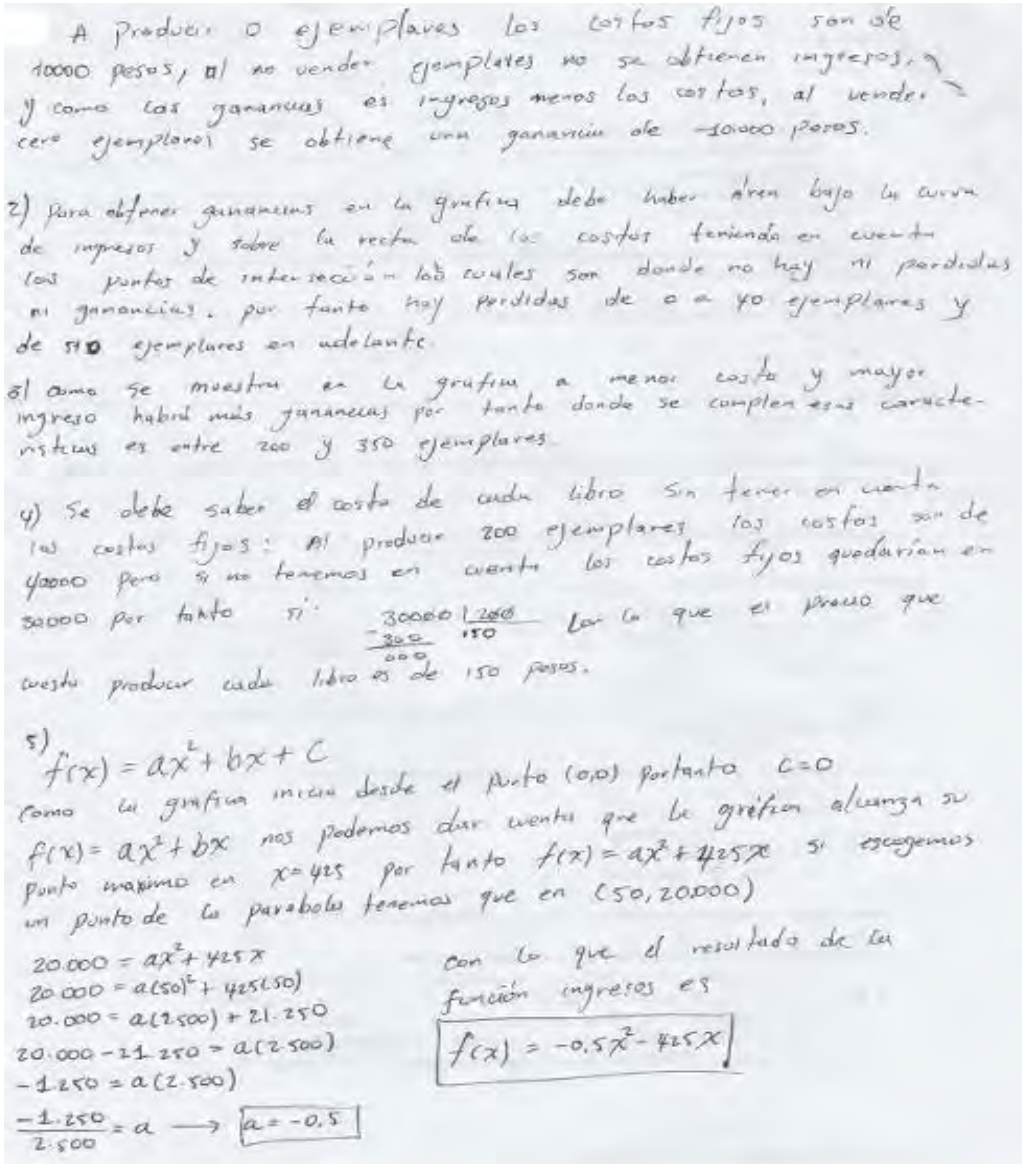
En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* que utilizan los profesores en formación de los dos grupos fueron verbales combinados con números naturales, como lo hacen $P_{(8)15}$, $P_{(6)22}$, $P_{(8)26}$, $P_{(8)17}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)21}$ y $P_{(6)12}$ mostrados en las figuras 122, 114, 115, 123, 119, 116 y 121 respectivamente, (e.g., $P_{(8)15}$: *"de la gráfica podemos interpretar que la mayor cantidad de ganancias se generarán cuando el área comprendida entre la curva y la recta sea mayor, es decir, que la respuesta es la a) entre 200 y 350"*; $P_{(8)22}$: *"si se observa en la gráfica , entre 400 y 150 ejemplares los ingresos son mayores (90.000) lo que deja claro la respuesta";* $P_{(8)26}$: "*para tener mayor ingreso se deben vender entre 400 y 450 ejemplares, ya que si* *observamos la gráfica nos encontramos que es el intervalo máximo en ganancias"* $P_{(8)17}$: "*la oferta debe ser entre 400 y 450 ejemplares, puesto que en ese intervalo se obtienen los mayores ingresos, puesto que los costos alcanzan su máximo punto";* $P_{(6)5}$: "*para el tercer interrogante se puede extraer fácilmente de la gráfica que en la parte donde se obtiene el mayor ingreso es entre 400 y 450 ejemplares";* $P_{(6)21}$: "*gráficamente se ve que el punto máximo está entre 400 y 450 ejemplares"*; y $P_{(6)12}$: "*como se muestra en la gráfica a menor costo y mayor ingreso habrá más ganancia, por tanto donde se cumplen esas características es entre 200 y 350 ejemplares*), otros ilustran sus respuestas mostrando elementos gráficos y/o figurales, como lo hacen $P_{(6)22}$, $P_{(8)20}$ y $P_{(8)26}$ mostrados en las figuras 114, 118 y 111 respectivamente.

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, están los de máximos y mínimos e intervalo, señalando $P_{(6)21}$ "*gráficamente se ve que el punto máximo está entre 400 y 450 ejemplares" y* $P_{(8)17}$: "*la oferta debe ser entre 400 y 450 ejemplares, puesto que en ese intervalo se obtienen los mayores ingresos, puesto que los costos alcanzan su máximo punto"*. En relación a las *proposiciones/propiedades*, asocian el punto más alto de la gráfica de la función Ingresos con los puntos donde esta función toma sus valores máximos, los valores para las ganancias con la región comprendida entre la parábola que representa la función Ingresos y la recta que representa la función de Costos. En relación a los *procedimientos/estrategias* utilizadas, se evidencian claros procesos de visualización como se pone de manifiesto en las respuestas de $P_{(8)15}$, $P_{(8)22}$, $P_{(8)26}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(6)5}$, además, ningún profesor en formación intentó encontrar una respuesta por derivación, como podría esperarse. Y en cuanto a los *argumentos*, los basan en sus percepciones visuales, explicando. Los profesores en formación del octavo semestre intentaron justificar sus respuestas pero en la mayoría de los casos argumentaron sobre sus propios errores, al confundir los ingresos máximos con las ganancias máximas, e.g., $P_{(8)17}$: "*la oferta debe ser entre 400 y 450 ejemplares, puesto que en ese intervalo se obtienen los mayores ingresos, puesto que los costos alcanzan su máximo punto".* Mientras que los del sexto explicaron con relativa facilidad que los ingresos son máximos en el intervalo entre 400 a 450 ejemplares, basándose en la representación gráfica, e.g., $P_{(6)21}$: "*gráficamente se ve que el punto máximo está entre 400 y 450 ejemplares"*.

4.3.3.1.1.4 Identificación y uso del concepto de pendiente de una recta

Al resolver el ítem/tarea propuesto para evaluar esta categoría, al igual que en la etapa diagnóstica, se esperaba que los profesores en formación reconocieran, en el contexto de la situación la pendiente de la función de Costos, luego localizaran dos puntos sobre su gráfica y utilizando la fórmula de la pendiente de una recta, la encontraran. El 76.0% de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem (21, 17). Se dieron dos tipos de errores, considerar la función lineal como una función afín (10%) (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011) y por tanto pretender encontrar una respuesta haciendo una regla de tres simple, lo que los llevó a respuestas incoherentes; la otra respuesta que se dio fue 1500 (14,0%), valor que pudo obtenerse por error al simplificar. En este aspecto también se presentó una alta homogeneidad en las respuestas intra e inter grupos ($\chi^2 = 15.93$, $P< 0.05$), es decir, hubo un alto grado de acuerdo, sobre todo en los aciertos, por lo que se puede inferir que el grado de comprensión de ese concepto es alto en el 76.0% de los evaluados.

En las Figuras 121, 122 y 123 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)12}$, $P_{(8)15}$, y $P_{(8)17}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.



A producir 0 ejemplares los costos fijos son de 10000 pesos, al no vender ejemplares no se obtienen ingresos, y como las ganancias es ingresos menos los costos, al vender cero ejemplares se obtiene una ganancia de -10000 pesos.

2) Para obtener ganancias en la grafica debe haber área bajo la curva de ingresos y sobre la recta de los costos teniendo en cuenta los puntos de intersección los cuales son donde no hay ni perdidas ni ganancias. por tanto hay perdidas de 0 a 40 ejemplares y de 510 ejemplares en adelante.

3) como se muestra en la grafica a menor costo y mayor ingreso habrá más ganancias por tanto donde se cumplen esas características es entre 200 y 350 ejemplares.

4) Se debe saber el costo de cada libro sin tener en cuenta los costos fijos: Al producir 200 ejemplares los costos son de 40000 pero si no tenemos en cuenta los costos fijos quedarían en 30000 por tanto si:

$$\begin{array}{r|l} 30000 & 200 \\ -300 & 150 \\ \hline 000 & \end{array}$$

Con lo que el precio que cuesta producir cada libro es de 150 pesos.

5)

$f(x) = ax^2 + bx + C$

Como la grafica inicia desde el punto (0,0) por tanto $C=0$

$f(x) = ax^2 + bx$ nos podemos dar cuenta que la gráfica alcanza su punto maximo en $x=425$ por tanto $f(x) = ax^2 + 425x$ si escogemos un punto de la parabola tenemos que en $(50, 20.000)$

$20.000 = ax^2 + 425x$

$20.000 = a(50)^2 + 425(50)$

$20.000 = a(2.500) + 21.250$

$20.000 - 21.250 = a(2.500)$

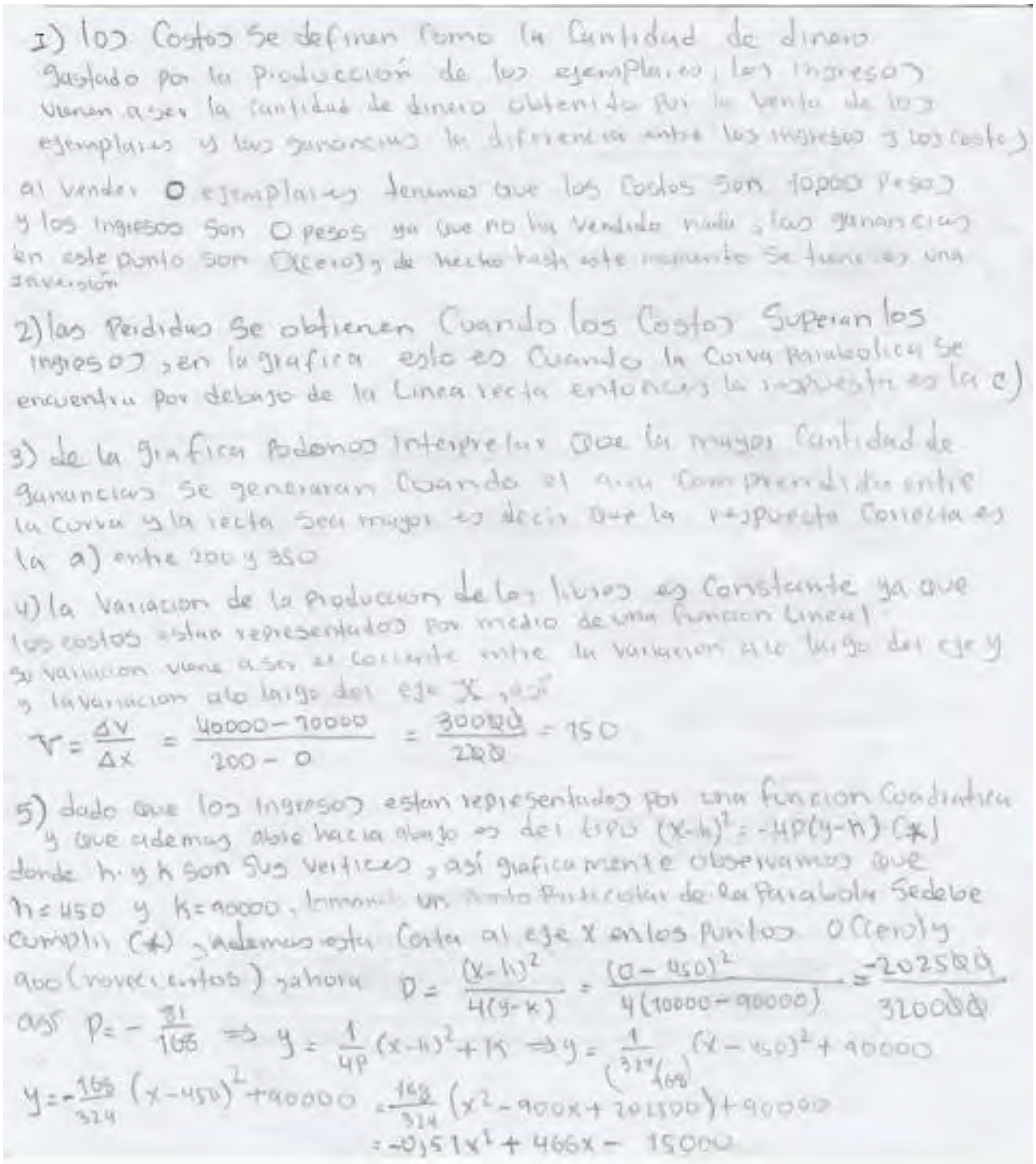
$-1.250 = a(2.500)$

$\frac{-1.250}{2.500} = a \longrightarrow \boxed{a = -0,5}$

Con lo que el resultado de la función ingresos es

$\boxed{f(x) = -0,5x^2 - 425x}$

Figura 121. Respuestas dadas por $P_{(6)12}$ a los ítems del 1 al 5 del cuestionario final.


1) los Costos se definen como la cantidad de dinero gastado por la producción de los ejemplares, los ingresos vienen a ser la cantidad de dinero obtenido por la venta de los ejemplares y las ganancias la diferencia entre los ingresos y los costos

al vender 0 ejemplares tenemos que los Costos son 10000 pesos y los ingresos son 0 pesos ya que no ha vendido nada, las ganancias en este punto son 0(cero), de hecho hasta este momento se tiene es una inversión

2) las Perdidas se obtienen cuando los Costos superan los ingresos, en la grafica esto es cuando la curva parabolica se encuentra por debajo de la linea recta entonces la respuesta es la c)

3) de la grafica podemos interpretar que la mayor cantidad de ganancias se generaran cuando el area comprendida entre la curva y la recta sea mayor es decir que la respuesta correcta es la a) entre 200 y 350

4) la variacion de la produccion de los libros es constante ya que los costos estan representados por medio de una funcion lineal su variacion viene a ser el cociente entre la variacion a lo largo del eje y y la variacion a lo largo del eje X, así

$$r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40000-10000}{200-0} = \frac{30000}{200} = 150$$

5) dado que los ingresos estan representados por una funcion cuadratica y que ademas abre hacia abajo es del tipo $(x-h)^2 = -4P(y-k)$ (*) donde h y k son sus vertices, así graficamente observamos que $h = 450$ y $k = 90000$, tomando un punto particular de la parabola se debe cumplir (*), ademas esta corta al eje X en los puntos 0 (cero) y 900 (novecientos), ahora

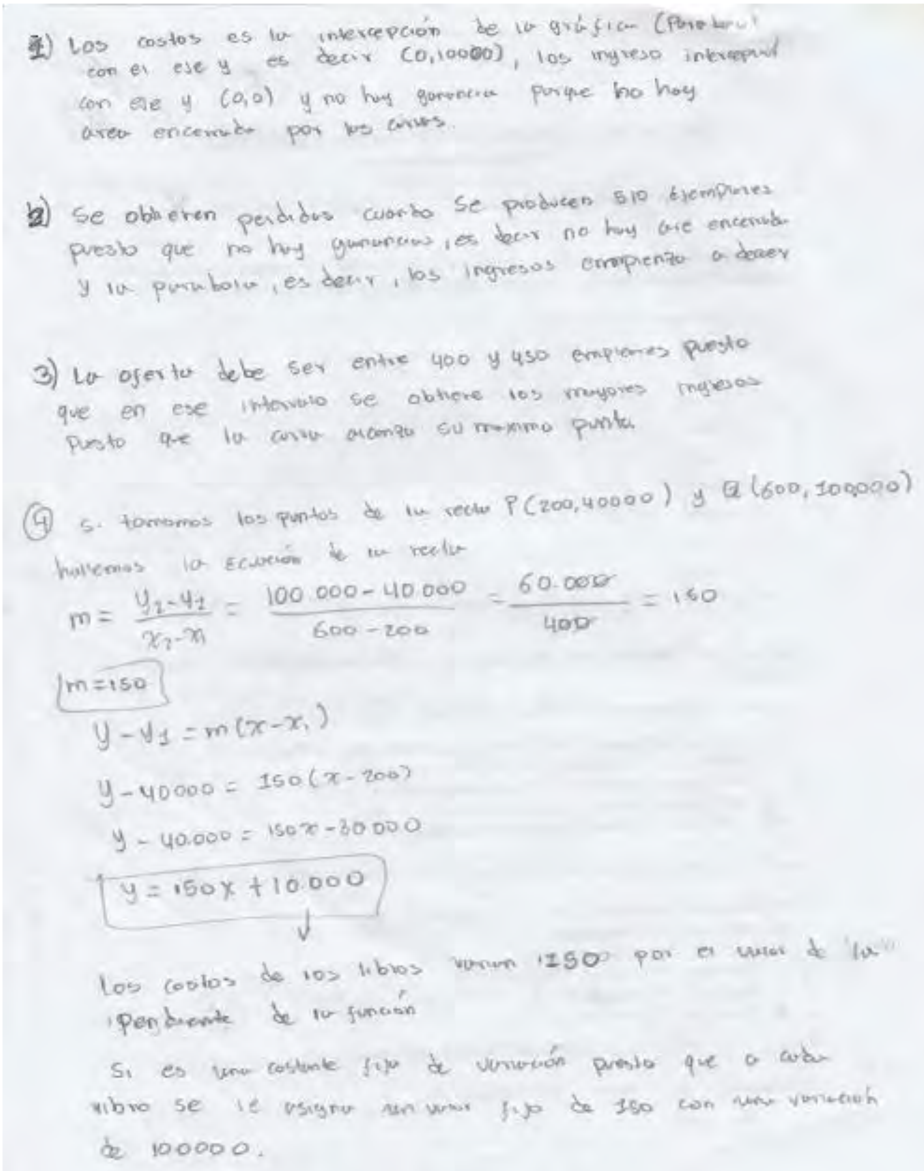
$$P = \frac{(x-h)^2}{4(y-k)} = \frac{(0-450)^2}{4(10000-90000)} = \frac{-202500}{320000}$$

así $P = -\frac{81}{128} \Rightarrow y = \frac{1}{4P}(x-h)^2 + k \Rightarrow y = \frac{1}{\left(\frac{324}{128}\right)}(x-450)^2 + 90000$

$$y = -\frac{128}{324}(x-450)^2 + 90000 = -\frac{128}{324}(x^2 - 900x + 202500) + 90000$$

$$= -0{,}51x^2 + 466x - 15000$$

Figura 122. Respuestas dadas por $P_{(8)15}$ a los ítems del 1 al 5 del cuestionario final.


1) Los costos es la intercepción de la gráfica (Parabola) con el eje y es decir (0,10000), los ingreso intercepción con eje y (0,0) y no hay ganancia porque no hay area encerrada por las curvas.

2) Se obtienen perdidas cuando se producen 510 ejemplares puesto que no hay ganancias, es decir no hay are encerrada y la parabola, es decir, los ingresos empiezan a decaer

3) La oferta debe ser entre 400 y 450 ejemplares puesto que en ese intervalo se obtiene los mayores ingresos puesto que la curva alcanza su maximo punto.

4) Si tomamos los puntos de la recta P(200,40000) y Q(600,100000) hallemos la ecuación de la recta

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{100\,000-40\,000}{600-200} = \frac{60.000}{400} = 150$$

$$\boxed{m=150}$$

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

$$y-40000 = 150(x-200)$$

$$y-40.000 = 150x-30\,000$$

$$\boxed{y = 150x+10.000}$$

Los costos de los libros varian 150 por el valor de la pendiente de la función

Si es una constante fija de variación puesto que a cada libro se le asigna un valor fijo de 150 con una variación de 10000.

Figura 123. Respuestas dadas por el $P_{(8)17}$ a los ítems/tareas de 1 a 4 del cuestionario final.

Para este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación fueron en su mayoría verbales combinados con números naturales, (e.g., $P_{(8)20}$: "*en que en cada intervalo hay 150*"; $P_{(8)26}$: "*los costos de producción cuando se hacen 100 libros es de 20.500 y cuando se hacen 200 libros aumenta 19.0500 pesos y de ahí en adelante el costo tiene una variación constante de 1500*"; $P_{(8)22}$: "no hay variación, son fijos los costos"; $P_{(6)10}$: *"si el costo cuando es 0 ejemplares es de 10.000, notamos que el costo de producción de 40 ejemplares es 16.000 aprox., entonces los 6.000 de variación se dividen entre el número de libros por tanto sería una variación de 150 pesos*"); otros además, utilizan puntos coordenados, expresiones algebraicas (e.g., $P_{(8)17}$: "*se tomaron los puntos de la recta P(200, 40.000) y B(600, 100.000) hacemos la ecuación de una recta* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100.000 - 40000}{600 - 200} = \frac{60.000}{400} = 150, m = 150$,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 40.000 = 150(x - 200)$

$y - 40.000 = 150x - 30.000$

$y = 150x + 10.000$";

$P_{(8)15}$: "*la variación de la producción de los libros es constante ya que los costos están representados por medio de una función lineal, su variación viene a ser el cociente entre la variación a lo largo del eje Y y la variación a los largo del eje X, así:*

$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40.000 - 10.000}{200 - 0} = \frac{30.000}{200} = 150$"; $P_{(8)7}$: "*observemos que para $15.000 pesos se venden 25 ejemplares. Además para 50 ejemplares se obtienen ingresos de 25.000. Para 100 ejemplares se obtienen ingresos de 40.000, la función que cumple con estas condiciones es* $G(x) = 150x + 10.000$ *aproximadamente";* $P_{(6)1}$: "*los costos están dados por una línea que no pasa por el origen (función lineal) por tanto debe tener la forma* $C(x) = mx + b$. *Si tomamos dos puntos exactos como (0, 10.000) y (200, 40.000) podemos hallar la pendiente de la recta:*

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40.000 - 10.000}{200 - 0} = \frac{30.000}{200} = 150$ *y como la recta corta al eje de las Y en el punto (0, 10.000) se puede armar la expresión algebraica de dicha función* $C(x) = 150x + 10.000$*";* $P_{(6)5}$: "*esto se obtiene de la expresión matemática de los costos que es:* $y = 150x + 10.000$ *el cual nos indica que el costo de los libros que varían $150, (Además 150 es la pendiente*)"; $P_{(6)12}$: "*se debe saber el costo de cada libro sin tener en cuenta los costos fijos: a producir 200 ejemplares los costos son de 40.000 pero si no tenemos en cuenta los costos fijos quedarían en 30.000 por tanto si: 30.000÷200 = 150 por lo que el precio que cuesta producir cada libro es de 150 pesos.*").

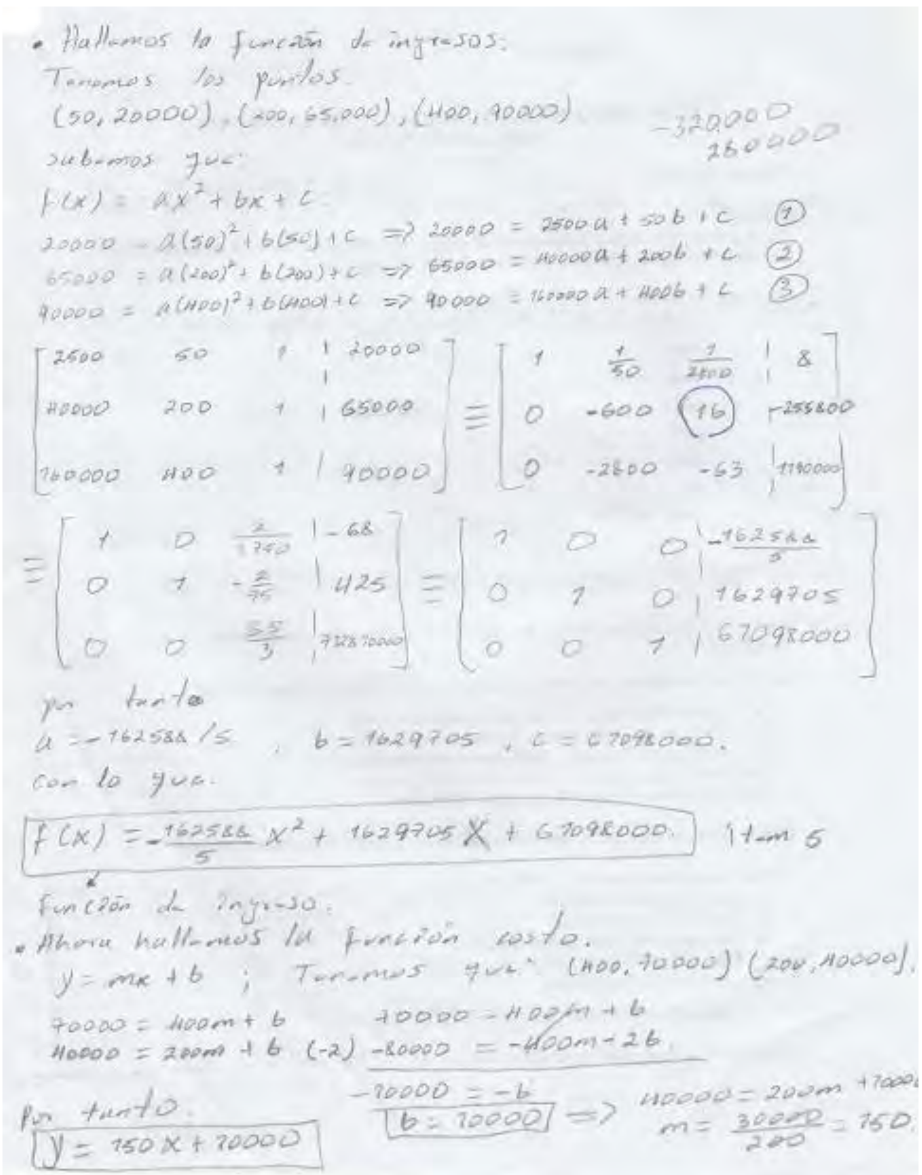
Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan se destaca par ordenado, el intercepto al origen de la función lineal involucrada, pendiente de una recta, función lineal, variación, intervalo, ecuación de una recta en la forma pendiente punto y expresión algebraica de la función lineal. En relación a las *proposiciones/propiedades*, al igual que en la etapa diagnóstica, los profesores en formación que dieron respuestas adecuadas a este ítem/tarea parecen reconocer la pendiente de la recta como quien determina la variación de la función lineal. $P_{(6)1}$: asocia una recta que no pasa por el origen con una función lineal, (e.g., "*los costos están dados por una línea que no pasa por el origen (función lineal))";* o el caso de $P_{(6)5}$ quien asocia directamente la pendiente de la recta con la variación de la función lineal, (e.g., "*la expresión matemática de los costos que es:* $y = 150x + 10.000$ *el cual nos indica que el costo de los libros que varían $150, (Además 150 es la pendiente*)". En la solución propuesta por $P_{(6)2}$, establece congruencias entre diferentes representaciones de diferentes elementos de los registros analítico numérico, gráfico y algebraico de la función involucrada (e.g., Pendiente →150; m = 150, punto de corte con el eje y → 10.000). Respecto a los *procedimientos/estrategias* utilizadas son mayoritariamente visuales, sin embargo, $P_{(6)2}$, $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, $P_{(8)7}$, $P_{(8)17}$ y $P_{(8)15}$ hacen una conversión del registros gráfico al analítico numérico, donde hacen algunos tratamientos hasta dar con su respuesta y utilizan estos elementos para realizar una conversión al registro algebraico, donde hacen una secuencia de tratamientos hasta obtener la expresión algebraica de los Costos. Respecto a los *argumentos*, en algunos casos como son establecidos claramente, como lo hacen $P_{(6)1}$, $P_{(6)12}$, $P_{(6)5}$, $P_{(8)22}$ y $P_{(8)15}$.

4.3.3.1.1.5 Modelación matemáticamente de una situación funcional

A los profesores en formación se les pedía encontrar una expresión matemática que permitiera un cálculo aproximado de los Ingresos, para lo que debían hacer un tratamiento al interior del registro gráfico: identificar el vértice y otro punto, o tres puntos y luego de una conversión al registro algebraico y una serie de tratamientos al interior del registro algebraico, encontrar una expresión algebraica que represente los ingresos. En este ítem el 72.0% (21, 15) de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem, Es decir, el 72% de los profesores en formación utilizó la expresión algebraica de la función Ingresos para cuantificar sus cambios y obtener la fórmula para hacerlo, a partir de su expresión analítica (Engler y Camacho, 2012).

La siguiente opción elegida por los profesores en formación fue una función lineal (0, 10), reforzando lo reportado por Marroquín (2009) quien reporta que al pedírseles a los estudiantes modelar algebraicamente una función, éstos generalmente tienden a optar por una función lineal. En este aspecto también se presentó una alta homogeneidad en las respuestas al interior de los grupos (χ^2 = 16.78%, $P< 0.05$), es decir, la tendencia por grupos fue a dar la misma respuesta, tanto en los aciertos como en los desaciertos. Y en ambos grupos sucedió algo similar, lo que es un indicador de que este es un tópico que puede estar bien fundamentado en los estudiantes del programa, en general.

En las Figuras 124, 125, 126 y 127 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(8)3}$, $P_{(6)10}$, y $P_{(8)17}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.



• Hallemos la función de ingresos:
Tenemos los puntos
(50, 20000), (200, 65.000), (400, 90000)
-320000
260000
Sabemos que:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$20000 = a(50)^2 + b(50) + c \Rightarrow 20000 = 2500a + 50b + c$ (1)
$65000 = a(200)^2 + b(200) + c \Rightarrow 65000 = 40000a + 200b + c$ (2)
$90000 = a(400)^2 + b(400) + c \Rightarrow 90000 = 160000a + 400b + c$ (3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2500 & 50 & 1 & 20000 \\ 40000 & 200 & 1 & 65000 \\ 160000 & 400 & 1 & 90000 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{50} & \frac{1}{2500} & 8 \\ 0 & -600 & 16 & -255800 \\ 0 & -2800 & -63 & 1190000 \end{array}\right]$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{1740} & -68 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{75} & 425 \\ 0 & 0 & \frac{55}{3} & 7328\,7000 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{162586}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1629705 \\ 0 & 0 & 1 & 67098000 \end{array}\right]$$

por tanto
$a = -162586/5$, $b = 1629705$, $c = 67098000$.
con lo que
$\boxed{f(x) = -\frac{162586}{5}x^2 + 1629705X + 67098000}$ Item 5
Función de Ingreso.
• Ahora hallemos la función costo.
$y = mx + b$; Tenemos que (400, 70000) (200, 40000)
$70000 = 400m + b$ $\quad 70000 = 400m + b$
$40000 = 200m + b$ (-2) $\quad -80000 = -400m - 2b$
$-10000 = -b$
$\boxed{b = 10000} \Rightarrow$ $40000 = 200m + 10000$
$m = \frac{30000}{200} = 150.$
Por tanto
$\boxed{y = 150X + 10000}$

Figura 124. Manuscrito hecho por $P_{(8)3}$ al modelar las funciones de Ingresos y de costos, al resolver el cuestionario final.

Ahora.

$$15000 = 750x + 10000$$

$$x = \frac{5000}{150} = 33,333$$

Por tanto la formula para hallar las ganancias es:

$$G = \int_a^b \left(-\frac{162588}{5}x^2 + 1629705x + 67098000\right) dx.$$

$(33;33 , 75000)$, $(450 , 90000)$

$$G = -\int_{75000}^{90000} \frac{162588}{5} x^2 dx + \int_{750000}^{90000} 1629705x\,dx + 67098000x\Big|_{75000}^{90000}$$

$$a\,40000 + b\,200 + c = 110000 \quad ①$$
$$a\,160000 + b\,400 + c = 90000 \quad ②$$
$$a\,2500 + b\,50 + c = 20000 \quad ③$$

$① \cdot -4$

$$-a\,160000 - b\,800 - 4c = -760000$$
$$a\,160000 + b\,400 + c = 90000.$$
$$-400b - 3c = -70000.$$
$$b = \frac{3c - 70000}{-400} \quad (*)$$

Reemplazamos $(*)$ en ③

$$a\,2500 + \left(\frac{3c - 70000}{-400}\right)50 + c = 20000.$$
$$a\,2500 - \frac{15c - 350000}{40} + c = 20000$$
$$a\,2500 - \frac{15c - 350000 + 40c}{40} = 20000.$$
$$a\,2500 - \frac{55c - 350000}{40} = 20000.$$

Figura 125. Manuscrito hecho por $P_{(8)3}$ al modelar la función Ganancias, al resolver el cuestionario final.

(5) Para hallar la función de ingresos tomamos tres puntos por donde ésta pasa:

$(50, 20.000)$, $(400, 90.000)$ y $(0,0)$ que al remplazarlos en la forma general de la ec. de una parábola, se obtiene el ste sistema:

$$0 = a(0)^2 + b(0) + c = 0a + 0b + c$$
$$20.000 = a(50)^2 + b(50) + c = 2500a + 50b + c$$
$$90.000 = a(400)^2 + b(400) + c = 160.000a + 400b + c$$

que se puede resolver aplicando Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2500 & 50 & 1 & 20.000 \\ 160.000 & 400 & 1 & 90.000 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/50 & 1/2500 & 8 \\ 160.000 & 400 & 1 & 90.000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/50 & 1/2500 & 8 \\ 0 & -2800 & -63 & -1190.000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/50 & 1/2500 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{63}{2800} & 425 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

entonces $b + \frac{63\cancel{c}^{\,0}}{2800} = 425$ y como $c = 0$, entonces $b = 425$ así que: $a + \frac{b}{50} + \frac{\cancel{c}^{\,0}}{2500} = 8$ y

$a + \frac{425}{50} = 8 \Rightarrow a + 8,5 = 8 \Rightarrow a = 8 - 8,5$

de donde $a = -0,5$ y $I(x) = -0,5x^2 + 425x$

Figura 126. Manuscrito de $P_{(6)10}$ al modelar la función de Ingresos, al resolver el cuestionario final.

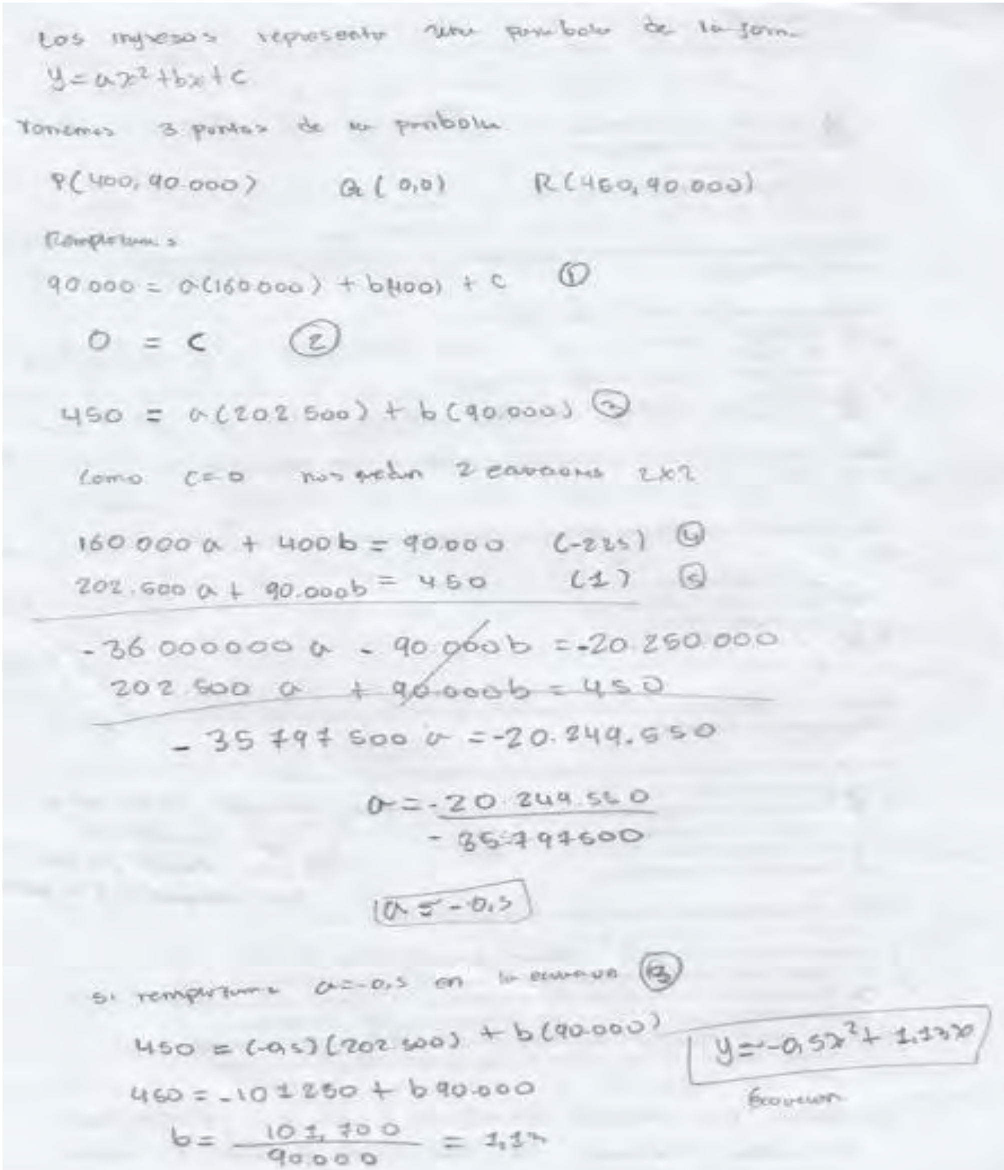

Los ingresos representa una parabola de la forma
$y=ax^2+bx+c$
Tomemos 3 puntos de la parabola
P(400, 90.000) Q(0,0) R(460, 90.000)
Remplazamos
$90.000 = a(160.000) + b(400) + c$ ①
$0 = c$ ②
$450 = a(202\,500) + b(90.000)$ ③
Como $c=0$ nos quedan 2 ecuaciones 2x2
$160\,000a + 400b = 90.000$ (-225) ①
$202.500a + 90.000b = 450$ (1) ③
$-36\,000000a - \cancel{90\,000b} = -20\,250\,000$
$202\,500a + \cancel{90.000b} = 450$
$-35\,797\,500a = -20.249.550$
$a = \frac{-20\,249\,550}{-35\,797\,500}$
$\boxed{a = -0,5}$
Si remplazamos $a=-0,5$ en la ecuación ③
$450 = (-0,5)(202\,500) + b(90.000)$
$450 = -101\,250 + b\,90.000$
$b = \frac{101\,700}{90\,000} = 1,13$
$\boxed{y=-0,5x^2+1,13x}$
Ecuación

Figura 127. Respuesta dada por $P_{(8)17}$ al tratar de modelar algebraicamente la función Ingresos.

Al igual que en la etapa diagnóstica, en el ítems/tarea correspondiente a esta categoría de análisis, los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación (24, 16) fueron mayoritariamente algebraicos combinados con números naturales y elementos verbales como se muestra en las soluciones dadas por $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)21}$, $P_{(6)12}$, $P_{(6)10}$, $P_{(8)17}$, $P_{(8)20}$, $P_{(6)22}$, $P_{(8)15}$ y $P_{(8)3}$ mostrados en las figuras 112, 119, 116, 121, 126, 123, 118, 114 y 122 respectivamente, (e.g. $P_{(6)12}$: "$f(x) = ax^2 + bx + c$, *como la gráfica inicia desde el punto (0, 0), por tanto c = 0,* $f(x) = ax^2 + bx$ *nos podemos dar cuenta que la gráfica alcanza su punto máximo en* *x = 425 por tanto* $f(x) = ax^2 + 425x$*, si escogemos un punto de la parábola, tenemos que en (50, 20.000)*

$20.000 = ax^2 + 425x$

$20.000 = a(50)^2 + 425(50)$

$20.000 = a(2500) + 21.250$

$20.000 = a(2500) + 21.250$

$20.000 - 21.250 = a(2500)$

$-1.250 = a(2500)$

$-\frac{1.250}{2500} = a \rightarrow a = -0.5$ *con lo que el resultado de la función Ingresos es:*

$f(x) = -0.5x^2 + 425x$*"*; $P_{(6)21}$: "*al evaluar 400 en la ecuación* $y = -\frac{1}{2}x^2 + 425x$ *se tiene que*

$G(400) = -\frac{1}{2}(400)^2 + 425(400)$

$= -80.000 + 170.000$

$= 90.000$"; $P_{(6)3}$: "*al observar la línea de ingresos nos damos cuenta que cuando x = 50 y = 20.000, con lo que procedemos a hacer lo siguiente, tomamos cada una de las posibles respuestas brindadas como opciones y la evaluamos en x = 50, y obtenemos un valor para "y", pero nosotros sabemos que "y" debería dar 20.000, con esto buscamos y comparar cada una de las expresiones y la que nos dé como resultado* $G(x) = 20.000$*, esto será la expresión que mejor representará la línea de los ingresos*"; "$P_{(8)20}$: *"*$-0.5(400)^2 + 425(400)$ *lo que hice fue remplazar la variable por la suma del mayor ingreso*"; $P_{(8)22}$: "$-0.05(400)^2 + 425(400) = 90.000$*, x = 400* $G(x) = -0.05x^2 + 425x$ *Ingresos – Costos = Ganancias*".

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan están: parábola, función y ecuación de una parábola, función cuadrática, expresión algebraica, punto, punto de corte con los ejes, vértice, ecuación de una recta. En relación a las *proposiciones/propiedades*, al igual que en la etapa diagnóstica, identifican gráficamente el vértice de la parábola al asociarlo con el punto más alto de la representación gráfica de los ingresos, además, identifican otros dos puntos por donde pasa la gráfica y los utilizan para encontrar una expresión algebraica que dan como respuesta; asocian el signo negativo del coeficiente del término cuadrático con el hecho de que la parábola abra hacia abajo; asocian la forma, tanto de la recta, como de la parábola, con sus respectivas expresiones algebraicas; $P_{(6)12}$ asocia el coeficiente del término lineal de la expresión algebraica de los ingresos, con la ordenada de un máximo de esta función; $P_{(8)3}$, $P_{(6)10}$ proponen su solución por Gauss-Jordan y $P_{(3)3}$ además, intenta encontrar la función Ganancias por integración; otras soluciones propuestas son, por tanteo y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de tres por tres por eliminación.

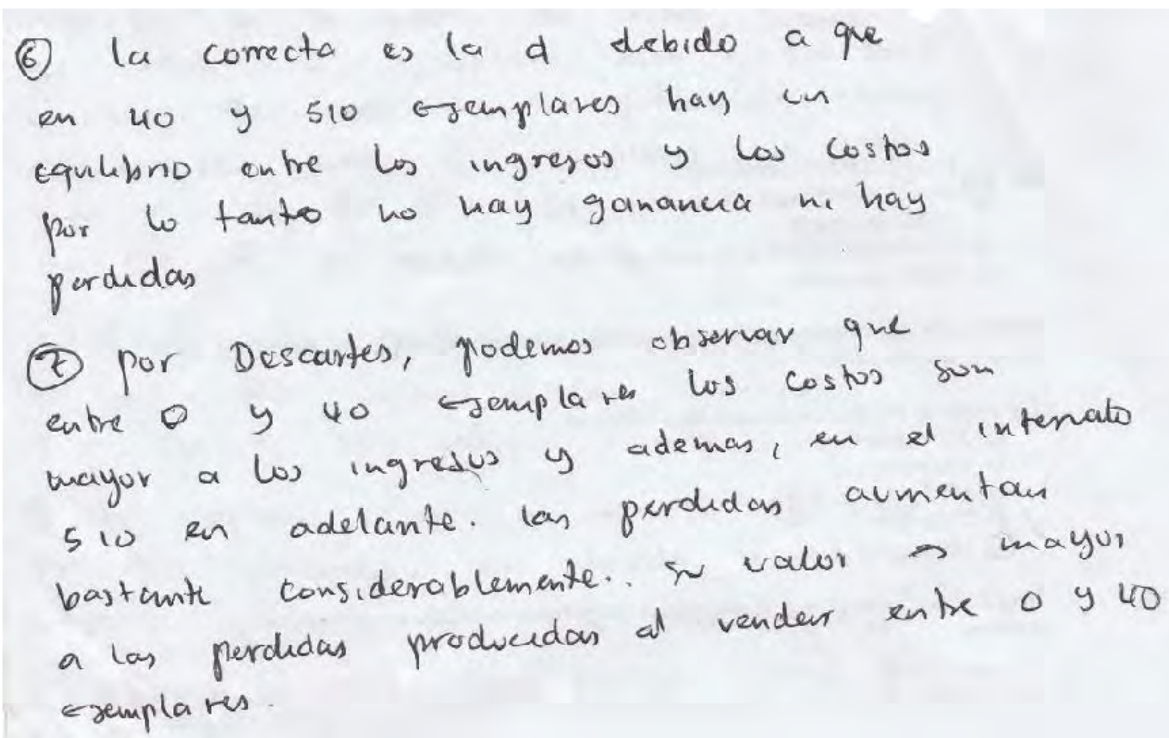
En cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizadas, un grupo bastante amplio (10, 14) de ambos niveles operan por tanteo y/o inspección, utilizando las expresiones algebraicas dadas como opciones de respuestas en el cuestionario, en la que remplazan un punto previamente identificado en la representación gráfica de los ingresos y a partir de ahí dan su respuesta. Otro grupo (7, 5) de profesores en formación identifican el vértice y otro par de puntos por donde pasa la gráfica de la parábola y utilizando la expresión general para una parábola de la forma vértice-parámetro, encuentran una expresión que dan como respuesta, y otros (1, 3) dan como respuesta la expresión algebraica que representa los Costos. $P_{(8)3}$, $P_{(6)10}$ seleccionan tres puntos por donde pasa la gráfica de los ingresos, los remplazan en la forma general de la expresión algebraica de una función cuadrática y arman un sistema de ecuaciones lineales de tres por tres, el que intentan resolver por eliminación de Gauss-Jordan y $P_{(8)17}$, $P_{(6)1}$ y $P_{(6)5}$ también seleccionan tres puntos por donde pasa la gráfica de los ingresos, los remplazan en la forma general de la expresión algebraica de una función cuadrática y arman un sistema de ecuaciones lineales de tres por tres y lo resuelven por eliminación simple. En este ítem/tarea la visualización les fue útil en la escogencia de los puntos por donde pasa la representación gráfica de los ingresos. En relación con los *argumentos* utilizados al comunicar sus respuestas, se evidencian con claridad en las respuestas dadas por $P_{(6)12}$, $P_{(6)10}$, $P_{(6)1}$, $P_{(6)21}$, $P_{(6)5}$, $P_{(8)15}$, $P_{(8)17}$ y $P_{(8)3}$ mostrados en las figuras 121, 126, 112, 116, 120, 122, 123 y 124; aunque en casos como el de $P_{(8)3}$ no llega a una respuesta adecuada.

Como puede apreciarse, hay una diferencia bien marcada entre los *elementos lingüísticos* usados por los profesores en formación del sexto semestre (01- 2015) al resolver la prueba final frente a los utilizados por este mismo grupo (tercer semestre 02- 2013) al resolver la prueba diagnóstica, ya que en sus respuestas a la prueba final, hacen muy buenas combinaciones de dichos elementos, y son muy variados los que usan, tendiendo a utilizar el registro analítico algebraico como primer registro auxiliar. Mientras en los profesores en formación del octavo semestre (01-2015), no se evidencian avances al resolver una prueba u otra, por el contrario, parecen haber retrocedido. Otros aspectos que diferencian las descripciones hechas por profesores en formación de ambos grupo: términos como expresión algebraica sólo fueron usados por estudiantes del sexto semestre (01-2015). Las estrategias utilizadas por profesores en formación de ambos grupos fueron diversas, sin embargo los del octavo semestre (01-2015) cometieron más errores y por tanto se les dificultó obtener una respuesta adecuada a la cuestión por la que se les indagó en ese ítem/tarea.

4.3.3.1.1.6 Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita

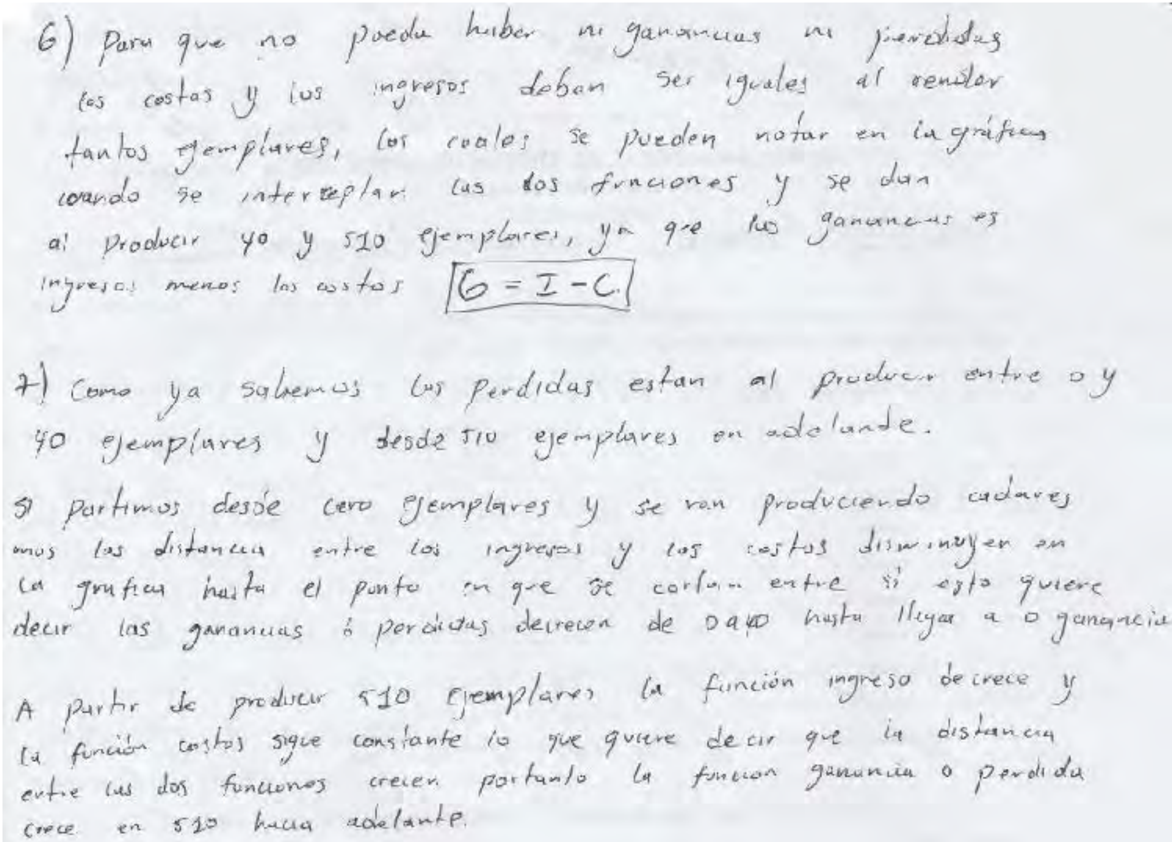
Aquí se pretendía que los profesores en formación identificaran gráficamente dos puntos para los cuales la función Ganancias es cero, es decir, aquellos puntos donde los ingresos son iguales a los costos; otra opción era que realizara una conversión al registro algebraico, encontrara la representación algebraica para la Ganancias y utilizara el concepto de ecuación, igualándola a cero (0) para encontrar los valores correspondientes para x, y al encontrar los valores de la incógnita, dieran su respuesta; o que hecha la conversión, por tanteo resolvieran un polinomio aritmético reiteradas veces hasta encontrar un valor de x donde la ganancia fuera cero (0). El porcentaje de aciertos en este ítem fue alto 74.0%, (22, 15) de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem/tarea, es decir, un análisis visual de la gráfica de las funciones involucradas (Engler y Camacho, 2012), les facilitó al 74.0% de los profesores en formación, cuantificar los cambios en la función Ganancias, entre ellos los puntos de equilibrio. En este caso, la interpretación que estos profesores en formación hicieron de la función Ganancias, a partir de un análisis visual de su gráfica, que en algunos casos los conllevó a procesos algebraicos un poco complicados, favoreció su comprensión, lo que los llevó a dar respuestas adecuadas a la cuestión por la que se les indagó (Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011). Aunque las respuestas incorrectas en este ítem/tareas estuvieron bien distribuidas entre los ítems restantes, la mayoría de las respuestas incorrectas (10%) apuntaban al intervalo donde los ingresos son máximos. Es decir, confundieron puntos máximos de la función ingresos, con interceptos al origen, sobre el eje X, de la función Ganancias, y quizás por no poder encontrar otra representación para los interceptos al origen de la función Ganancias, y terminaron estudiando la única representación que distinguieron y no el objeto matemático representado. Al respecto Duval (1999, 2004) considera que para poder diferenciar un objeto de su representación existe un solo medio: disponer de por lo menos otra representación semiótica del objeto representado y reconocerla como una misma representación, para a partir de ahí, poder estudiar el objeto representado a partir de varias de sus representaciones. Las respuestas en este ítem muestran evidencias significativas de cierta dependencia entre los grupos ($\chi^2 = 15.65$, $P < 0.05$), esto es, las respuestas tanto en uno como en el otro grupo apuntaron a una misma respuesta.

En las Figuras 128, 129 y 130 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(8)7}$, $P_{(6)12}$, y $P_{(6)22}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.


6 la correcta es la d debido a que en 40 y 510 ejemplares hay un equilibrio entre los ingresos y los costos por lo tanto no hay ganancia ni hay perdidas

7 por Descartes, podemos observar que entre 0 y 40 ejemplares los costos son mayor a los ingresos y ademas, en el intervalo 510 en adelante. las perdidas aumentan bastante considerablemente.. su valor es mayor a las perdidas producidas al vender entre 0 y 40 ejemplares.

Figura 128. Respuestas dadas por P(8)7 a los ítems/tareas 6 y 7 del cuestionario final.



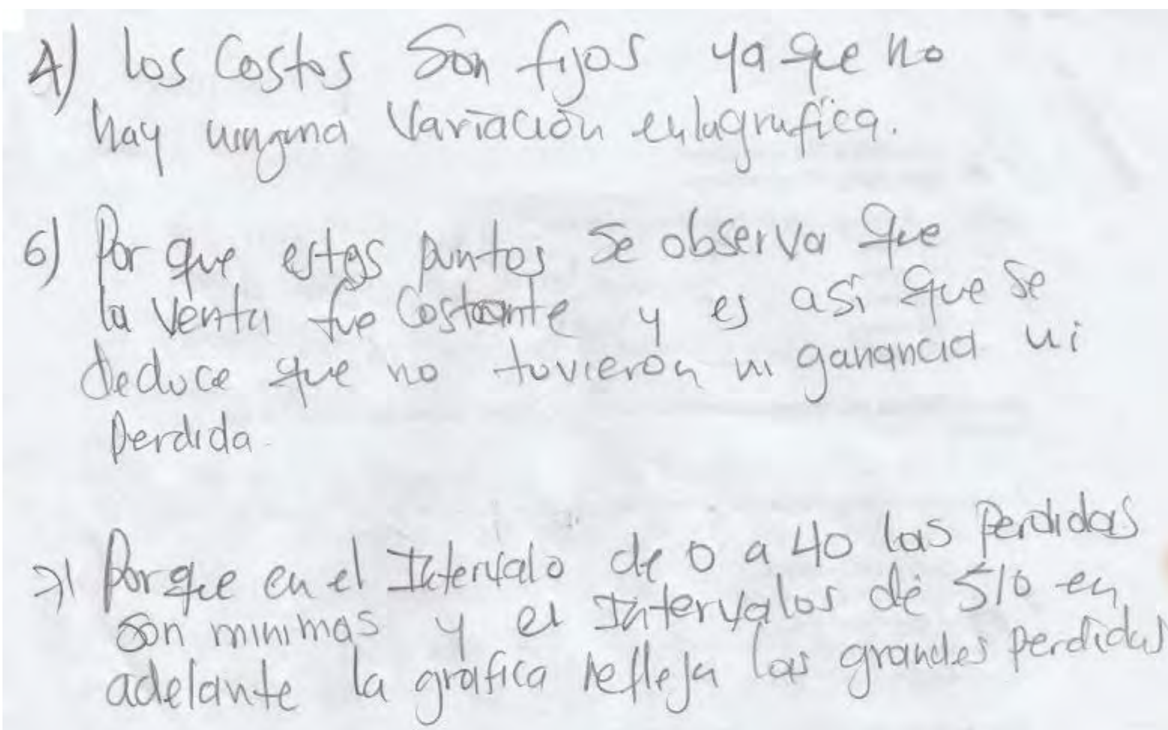
6) Para que no pueda haber ni ganancias ni perdidas los costos y los ingresos deben ser iguales al vender tantos ejemplares, los cuales se pueden notar en la gráfica cuando se intersectan las dos funciones y se dan al producir 40 y 510 ejemplares, ya que las ganancias es ingresos menos los costos $\boxed{G = I - C}$

7) Como ya sabemos las perdidas estan al producir entre 0 y 40 ejemplares y desde 510 ejemplares en adelante.

Si partimos desde cero ejemplares y se van produciendo cada vez mas las distancia entre los ingresos y los costos disminuyen en la grafica hasta el punto en que se cortan entre si esto quiere decir las ganancias ó perdidas decrecen de 0 a 40 hasta llegar a 0 ganancia

A partir de producir 510 ejemplares la función ingreso decrece y la función costos sigue constante lo que quiere decir que la distancia entre las dos funciones crecen portanto la funcion ganancia o perdida crece en 510 hacia adelante.

Figura 129. Respuestas dadas por $P_{(6)12}$ a los ítems del 6 y 7 del cuestionario final.



4) los Costos Son fijos ya que no hay ninguna Variación en la grafica.

6) Por que estos puntos se observa que la venta fue Costante y es así que se deduce que no tuvieron ni ganancia ni Perdida.

7) Porque en el Intervalo de 0 a 40 las Perdidas son minimas y el Intervalos de 510 en adelante la grafica refleja las grandes perdidas

Figura 130. Respuestas dadas por el $P_{(6)22}$ a los ítems 4, 6 y 7 del cuestionario final.

En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación fueron mayoritariamente verbales combinados con números naturales, (e.g., $P_{(8)7}$: "*la respuesta correcta es la d debido a que en 40 y 510 ejemplares hay un equilibrio entre los ingresos y los costos, por lo tanto no hay ganancias ni pérdidas*"; $P_{(8)20}$: "*ya que en esos intervalos es que permanecen constante*"; $P_{(8)15}$: "*el no tener ni ganancias ni pérdidas gráficamente lo podemos interpretar como los puntos de corte ya que en estos ninguno es mayor que el otro, entonces la solución es la d) 40 o 510 ejemplares*"; $P_{(8)26}$: "*mirando la gráfica se deduce que para que no haya ni ganancias ni pérdidas se debieron producir 40 o 510 ejemplares*"; $P_{(8)22}$: "*porque estos puntos se observa que la venta fue constante y es así que se deduce que no tuvieron ni ganancias ni pérdidas*" ; $P_{(6)5}$: "*pues este es el punto de corte entre ingresos y costos, en donde los ingresos son iguales a los costos, por tanto su resta será cero, es decir ni ganancias ni pérdidas*"; $P_{(6)1}$: "*en la gráfica se observa que justo cuando x vale 40 o 510, la línea recta y la curva se cortan, por tanto al restar una misma cantidad nos dará como resultado 0 (ni gana ni pierde)*"; $P_{(6)12}$: "*para que no pueda haber ni ganancias ni pérdidas, los costos y los ingresos deben ser iguales al vender tantos ejemplares, los cuales se pueden notar en la gráfica cuando se interceptan las dos funciones y se dan al producir 40 y 510 ejemplares, ya que las ganancias es ingresos menos costos* $\boxed{G = I - C}$". Y $P_{(6)21}$ que combina elementos verbales, puntos cartesianos y elementos algebraicos: "*suponiendo que la expresión matemática planteada en la situación problema que representa las curvas* $G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 425x$, *gráficamente se ve que la recta que representa los costos por producir ejemplares pasa por los puntos (0, 10.000) y (600, 100.000)*

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90.000}{600} = \frac{900}{6} = 150,\ Y - 10.000 = 150(x - 0)$,

$Y = 150x + 10.000$"). Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destacan, puntos, puntos de corte, puntos de equilibrio, puntos de intercepción entre funciones expresión matemática, situación problema, recta, mayor que, intervalos. En cuanto a las *proposiciones/propiedades*, un grupo amplio (22, 15) de profesores en formación asociaron los puntos donde se interceptan las representaciones gráficas de la función de Ingresos con la de los Costos y los relacionan con elementos del contexto sociocultural donde se plantea la situación como lo son los puntos de equilibrio (e.g., $P_{(8)7}$: "*la respuesta correcta es la d* *debido a que en 40 y 510 ejemplares hay un equilibrio entre los ingresos y los costos, por lo tanto no hay ganancias ni pérdidas"*). Los *procedimientos/estrategias* utilizadas son mayoritariamente visuales, sólo $P_{(6)12}$ realiza algunos procedimientos algebraicos, aunque no los utiliza para armar una ecuación, encontrar los valores de la incógnita y dar una respuesta. Los *argumentos* dados por los profesores en sus respuestas se basan esencialmente en sus procesos de visualización, como lo hace $P_{(8)15}$, $P_{(8)26}$, $P_{(6)1}$ y $P_{(6)12}$ al comunicar su respuesta (e.g., $P_{(8)26}$: "*mirando la gráfica se deduce que para que no haya ni ganancias ni pérdidas se debieron producir 40 o 510 ejemplares*"; *)*"; $P_{(6)12}$: "*para que no pueda haber ni ganancias ni pérdidas, los costos y los ingresos deben ser iguales al vender tantos ejemplares, los cuales se pueden notar en la gráfica cuando se interceptan las dos funciones y se dan al producir 40 y 510 ejemplares, ya que las ganancias es ingresos menos costos* $\boxed{G = I - C}$*"*).

Los argumentos dados por los profesores en formación del octavo semestre son débiles y parecen más proposiciones que argumentos, ya que no dan razones de su actuar, sólo tratan de explicar cómo lo hacen, más no por qué lo hacen, como ejemplo está la descripción hecha por $P_{(8)26}$; mientras que en los argumentos de los profesores en formación del sexto semestre se dan tanto explicaciones como razones, como se muestra en los manuscritos de $P_{(6)5}$, $P_{(6)1}$, e.g., $P_{(6)5}$: "*pues este es el punto de corte entre ingresos y costos, en donde los ingresos son iguales a los costos, por tanto su resta será cero, es decir ni ganancias ni pérdidas*".

4.3.3.1.1.7 Analiza el crecimiento y decrecimiento de una función

Aquí se indagó por los intervalos de crecimiento de las pérdidas, es decir, por aquellos intervalos donde las perdidas crecían. Se esperaba que los profesores en formación identificaran visualmente, en la representación gráfica de las funciones involucradas, los intervalos donde la función de Costos es mayor a la de Ingresos y analizaran la tendencia en cuanto a su distanciamiento y este análisis requería concebir el infinito potencial por inferencia del infinito actual (Franco y Ochoviet, 2006) y eso resultó problemático para un porcentaje considerable (44.0%) de estos profesores. El 56.0% de los profesores en formación dieron respuestas acertadas a este ítem (14, 14). Entre los elementos de la función sobre los que se proyectaron intervenciones, es en este aspecto donde persisten mayores dificultades, ya que 18% de los profesores en formación relacionaron el crecimiento con las ganancias y el decrecimiento con las pérdidas. Mientras el 26% restantes dieron respuestas muy heterogéneas. En este ítem también se evidenció alta homogeneidad en las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 12.57$, $P < 0.05$), es decir, las respuestas en los aciertos y en los desaciertos tendieron a ser las mismas al interior de cada grupo.

En las Figuras 131, 132, 133 y 134 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(8)20}$, $P_{(6)1}$, $P_{(8)15}$ y $P_{(6)10}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario final.

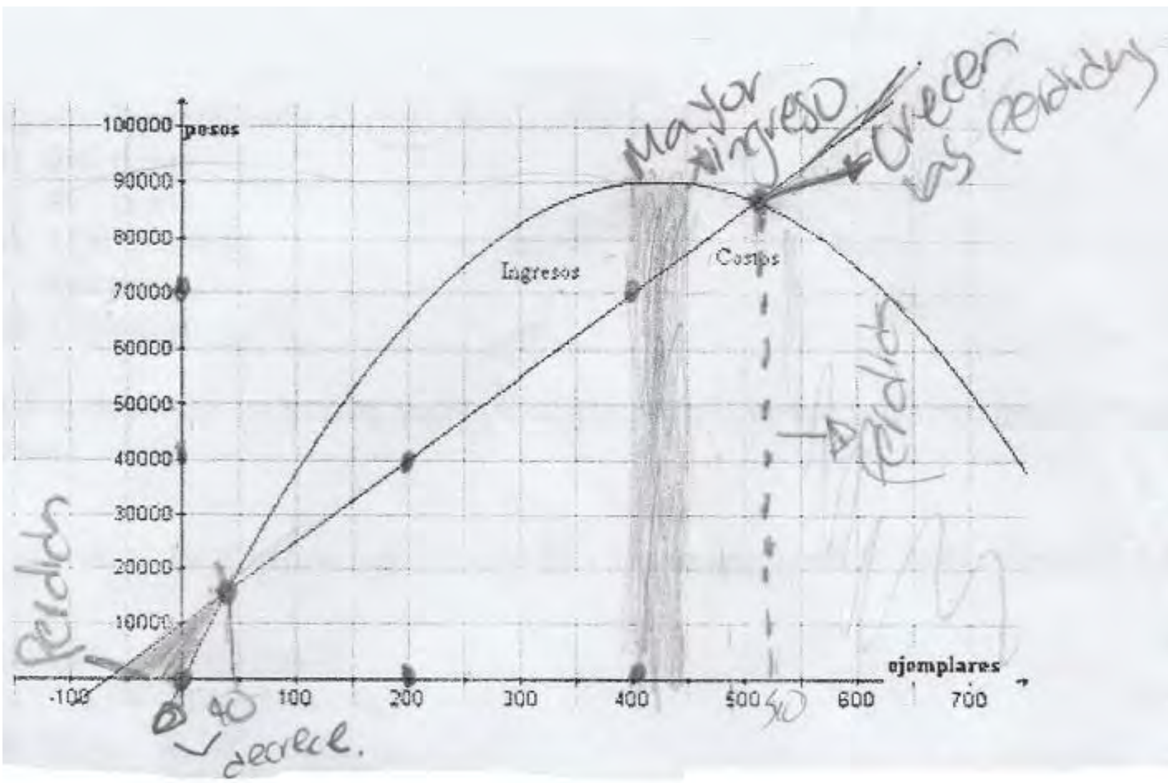


Figura 131. Ilustración hecha por $P_{(8)20}$ al responder el cuestionario final.

7) como los intervalos de Perdidas son entre cero y 40 o mas de 510 ejemplares, si observamos estos dos intervalos en la gráfica vemos que cuando son más de 510 ejemplares la curva y la línea recta se distancian cada vez más, por allí los Perdidas aumentan más, o si remplazamos algunos valores lo Podemos apreciar numericamente:

Ej: $G(1) = -0,5(1)^2 + 275(1) - 10.000 = -9725,5$ El signo
$G(10) = -0,5(10)^2 + 275(10) - 10.000 = -7300$ negativo
$G(39) = 0,5(39)^2 + 275(39) - 10.000 = -35,5$ indica Perdida
Para el intervalo de 0 a 40 las Perdidas decrecen

$G(511) = -0,5(511)^2 + 275(511) - 10.000 = -35,5$
$G(600) = -0,5(600)^2 + 275(511) - 10.000 = -25.000$
$G(650) = -0,5(650)^2 + 275(650) - 10.000 = -42.500$
Al igual que antes el signo negativo indica Perdida. Por lo tanto en el intervalo de 510 en adelante las Perdidas crecen.

Figura 132. Respuesta dada por $P_{(6)1}$ a la tarea/ítem 7 del cuestionario final.

6) el no obtener ni ganancias ni perdidas
graficamente lo podemos interpretar como
los puntos de corte ya que en estos ninguno
es mayor que el otro entonces la solucion es
la d) 40 o 510 ejemplares.

7) Podemos ver que si la curva se aproxima
por debajo de la recta vemos que las perdidas decrecen
y si esta se aleja por debajo de la recta las perdidas
crecen, es decir entre 0 y 40 las perdidas decrecen y entre
510 en adelante las perdidas crecen, entonces la respuesta
es la B)

Figura 133. Respuesta dada por $P_{(8)15}$ a las tareas/ítems 6 y 7 del cuestionario final.

(7) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se pueden obtener al observar la gráfica

- En $x=0$ la función costos es mayor que la función ingresos, y como $G(x) = I(x) - C(x)$ ahí tenemos pérdida; y a medida que x crece la pérdida es menor, hasta $x = 40$ donde $I(x) = C(x)$, por lo tanto en este punto no hay ni ganancias ni pérdidas. Esto quiere decir que de 0 a 40 $[x \in [0,40]]$ las pérdidas decrecen.
- cuando $x \in (40,510)$ las ganancias son positivas es decir $I(x) > C(x)$.
- y cuando $x \in (510,\infty)$, $C(x) > I(x)$, por lo tanto en este intervalo hay pérdida. Además, como $C(x)$ crece y $I(x)$ decrece, $C(x)$ es cada vez mayor que $I(x)$, por lo que en este intervalo las pérdidas crecen cada vez más.

Figura 134. Respuesta dada por $P_{(6)10}$ a la tarea/ítem 7 del cuestionario final.

En este ítems/tarea los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación (8, 16) fueron mayoritariamente verbales combinados con números naturales como se evidencia en las soluciones dadas por $P_{(6)12}$, $P_{(6)21}$, $P_{(6)5}$, $P_{(8)22}$, $P_{(8)26}$, $P_{(8)17}$, $P_{(8)15}$, $P_{(8)20}$ y $P_{(8)7}$, e.g., $P_{(6)12}$: "*como ya sabemos las pérdidas están al producir entre 0 y 40 ejemplares y desde 510 ejemplares en adelante. Si partimos desde cero ejemplares y se van produciendo cada vez más, la distancia entre los ingresos y los costos disminuyen en la gráfica hasta el punto en que se cortan entre sí, esto quiere decir, las ganancias o pérdidas decrecen de 0 a 40 hasta llegar a 0 ganancias. A partir de producir 510 ejemplares la función de costos sigue constante, lo que quiere decir que la distancia crece en 510 hacia adelante.*" $P_{(6)21}$: "*las* *pérdidas crecen desde 510 ejemplares en adelante y decrecen de cero (0) a cuarenta ejemplares.";* $P_{(6)5}$: *Este se puede obtener del análisis mismo de la gráfica y al sustituir los valores de los intervalos en la ecuación de la utilidad*."; $P_{(8)22}$: "*porque en el intervalo de 0 a 40 las pérdidas son mínimas y el intervalo de 510 en adelante la gráfica refleja las grandes pérdidas*"; $P_{(8)26}$: "*las pérdidas crecen en 510 en adelante y decrecen en 40";* $P_{(8)15}$: "*podemos ver que si la curva se aproxima por debajo de la recta, vemos que las pérdidas decrecen y si ésta se aleja por debajo de la recta, las pérdidas crecen, es decir, entre 0 y 40 las perdidas decrecen y entre 510 en adelante las pérdidas crecen, entonces la respuesta es la b)";* $P_{(8)20}$: "*en el intervalo de 0 a 40 se ve que no se vende ningún ejemplar, y 510 porque hay crecen los costos y disminuye el ingreso";* $P_{(8)7}$: "*por descarte, podemos observar que entre 0 y 40 ejemplares los costos son mayores a los ingresos y además, en el intervalo 510 en adelante las pérdidas aumentan bastante considerablemente, su valor es mayor a las pérdidas producidas al vender entre 0 y 40 ejemplares"*. Un grupo más reducido (12, 4) utilizan elementos verbales combinados con números naturales, signos de agrupación como paréntesis para designar los intervalos, signos de igualdad, desigualdad, intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos e infinitos, símbolo de pertenencia (ϵ), como puede apreciarse en las soluciones presentadas por $P_{(6)10}$ y $P_{(8)17}$, e.g., $P_{(6)10}$: " *los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se pueden obtener al observar la gráfica:*

-En x = 0 la función costos es mayor que la función ingresos, y como $G(x) = I(x) - C(x)$*, ahí tenemos pérdida; y a medida que x crece la pérdida es menor, hasta x = 40 donde* $I(x) = C(x)$*, por lo tanto en este punto no hay ni ganancias ni pérdidas. Esto quiere decir que de 0 a 40 ($x \epsilon [0, 40]$) las pérdidas decrecen.*

-Cuando $x \epsilon (40, 510)$ las ganancias son positivas es decir, $I(x) > C(x)$.

-Y cuando $x \epsilon (510, \infty)$, $I(x) < C(x)$, por lo tanto en este intervalo hay pérdida. Además, como C(x) crece y I(x) decrece, C(x) es cada vez mayor que I(x), por lo que en este intervalo las pérdidas crecen cada vez más."; $P_{(8)17}$: "*entre los intervalos ¨[0, 40) y [510, ∞), puesto que en estos intervalos no hay área encerrada, es decir, no hay ganancias"*. Mientras que otro grupo muy reducido (4, 0) utiliza elementos verbales combinados con números enteros y polinomios aritméticos como lo hacen $P_{(6)1}$: "*como los intervalos de pérdida son entre cero y 40 o más de 510 ejemplares, si observamos estos dos intervalos en la gráfica vemos que cuando son más de 510 ejemplares la curva y la línea recta se distancian cada vez más, por*

tanto allí las pérdidas aumentan más. O si remplazamos algunos valores lo podemos apreciar numéricamente:

$G(1) = -0{,}5(1)^2 + 275(1) - 10.000 = -9.725{,}5$

$G(10) = -0{,}5(10)^2 + 275(10) - 10.000 = -7.300$

$G(39) = -0{,}5(39)^2 + 275(39) - 10.000 = -35{,}5$ *el signo negativo indica pérdida*

Para el intervalo de 0 a 40 las pérdidas decrecen

$G(511) = -0{,}5(511)^2 + 275(511) - 10.000 = -35{,}5$

$G(600) = -0{,}5(600)^2 + 275(600) - 10.000 = -25.000$

$G(650) = -0{,}5(650)^2 + 275(650) - 10.000 = -42.500$

Al igual que antes el signo negativo indica pérdidas. Por lo tanto en el intervalo de 510 en adelante las pérdidas crecen.".

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizan, se destaca intervalo abierto, cerrado y semiabierto, crecimiento, decrecimiento, área entre dos curvas, línea recta, gráficas, mayor que, menor que, función y puntos de corte. En relación a las *proposiciones/propiedades*, la mayoría (21, 15) de los profesores en formación asociaron los intervalos solicitados al comportamiento visible de las gráficas analizadas. Asocian las pérdidas con signos negativos y el área encerrada entre las representaciones gráficas de los ingresos y la de los costos, con la ganancia, mientras que y el no encerramiento lo asocian con las pérdidas como lo hace $P_{(8)17}$: "*entre los intervalos ¨[0, 40) y [510, ∞), puesto que en estos intervalos no hay área encerrada, es decir, no hay ganancias"*. Además, asocian la distancia entre las representaciones gráficas de los costos y de los ingresos con el crecimiento/decrecimiento de las perdidas. En el caso específico de $P_{(8)20}$ asocia las perdidas con la ausencia de ventas. Los *procedimientos/estrategias* realizadas por los profesores en formación de los dos grupos, fueron mayoritariamente visuales. En cuanto a los *argumentos* utilizados se evidencian grandes avances, sobre todo en las respuestas dadas por los profesores en formación del sexto semestre (01-2015), como lo muestran $P_{(6)12}$, $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$ y $P_{(6)10}$ mostrados más arriba transcritos y en las figuras 129, 132, 120 y 134 respectivamente.

4.3.3.1.2 Conocimiento ampliado del contenido.

Como se dijo anteriormente, es el conocimiento matemático necesario para entender las matemáticas tanto en el nivel que se orienta, como en el nivel posterior (Pino-Fan y Godino, 2015), para determinar los requerimientos de estos dos niveles a los niveles anteriores y la relación entre los conocimientos de todos los niveles, con los recursos requeridos para su estudio y con otras áreas del currículo. Es el conocimiento que permite relacionar diferentes objetos matemáticos y a partir de ahí establecer conexiones entre representaciones de un mismo objeto matemático. Pone a prueba la habilidad del docente en el uso de recursos matemáticos, al resolver una situación problema, es decir, le permite al docente, de entre su repositorio de recursos, saber cuál utilizar para orientar, de la mejor manera, un determinado tema.

Las respuestas dadas por los dos grupos de profesores en formación a los siete ítems del cuestionario fueron muy diversas. Y (24, 17) de los profesores en formación dieron respuestas adecuadas a por lo menos el 60% de los ítems/tareas de la situación; mientras que otro grupo mucho más reducido (0, 9) presentaron serias dificultades, tanto con la comprensión de los enunciados de algunos ítems/tareas, así como con la realización de los procedimientos al establecer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones involucradas, y con la comunicación de los resultados.

De acuerdo a los resultados anteriores de puede asegurar que los profesores en formación del sexto semestre (01-2015) poseen un dominio bastante adecuado del conocimiento común del contenido de CDM para resolver problemas con las características del que se les planteó, ya que fueron muy pocas las dificultades presentadas al resolver este tipo de situaciones. Mientras que respecto a los profesores en formación del octavo semestre (01-2015) se puede decir que también fueron muy pocos los que presentaron dificultades mayores al identificar y relacionar los elementos de una función en una o varias de sus representaciones. Que se reconozcan los elementos de las funciones en una situación funcional, según Hitt (2003a) podría favorecer el desarrollo del pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo, ya que en estos, a diferencia de los del sexto semestre, es poco lo que se puede hacer, ya que cursaron el programa en su totalidad y saldrán al mercado laboral, con dichas dificultades. Afortunadamente los que presentaron estas dificultades al resolver el cuestionario fue sólo el 34,61% de los profesores en formación del octavo semestre, que es además, sólo el 18% del total de la muestra, los restantes (82%), aunque algunos cometieron errores al resolver el cuestionario, fueron muy pocos, tanto los errores como el porcentaje de quienes los cometieron. fueron dificultades en un grupo reducido de profesores en formación de ambos niveles, que según Shulman (2005) podrían ser superadas por éstos, en su ejercicio como docentes.

Que los profesores orientadores de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas salgan al mercado laboral con muy pocas dificultades en la solución de problemas matemáticos favorece la enculturación matemática de las comunidades donde se desempeñarán como docentes de matemáticas, ya que si poseen sólidas bases en el conocimiento común del contenido matemático del CDM, esto les facilitará gestionar los aprendizajes de sus estudiantes (Godino, 2009; Turner, Rowland, 2011).

En relación con el conocimiento ampliado del contenido de CDM, se presentaron claras evidencias de su desarrollo, como ejemplo de ello están las soluciones dadas por $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, $P_{(6)10}$, $P_{(6)12}$, $P_{(8)17}$, $P_{(8)15}$, y $P_{(8)3}$ mostrados en las figuras 112, 119, 126, 121, 123, 122 y 124. Las soluciones dadas por $P_{(6)10}$ y $P_{(8)3}$ son algo atípicas, ya que luego de escoger tres puntos del plano sobre la representación gráfica de la función Ingresos y remplazarlos en la forma general de la expresión algebraica de una parábola y armar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, intentaron resolverlo por el método de eliminación de Gauss-Jordan. Sin embargo $P_{(8)3}$ comete un error al realizar las operaciones con las filas en la segunda matriz de equivalencias, lo que le impide dar con una respuesta adecuada; el mismo $P_{(8)3}$ intenta por integración encontrar el área entre las gráficas de los ingresos y la de los costos, para hallar las ganancias, pero fue inadecuado su procedimiento, ya que por esa vía no lograría encontrarla. Mientras que $P_{(6)10}$ si logra dar respuestas adecuadas por el método usado por ambos. En los casos de $P_{(6)1}$ y $P_{(6)5}$ dan respuestas a los mismos ítem/tareas utilizando diferentes estrategias: parten por encontrar las expresiones algebraicas de las tres funciones involucradas y la utilizan para resolver polinomios aritméticos, como medio de verificación para dar sus respuestas, pero también manifiestan apoyarse en procesos de visualización al utilizar elementos visuales en la gráfica, luego de tener una respuestas por medios analíticos.

Otros que parten de encontrar primero las expresiones algebraicas son $P_{(6)21}$, $P_{(6)2}$, $P_{(8)15}$ y $P_{(8)17}$ quienes basan sus respuestas en la interpretación de dichas expresiones o en la solución de polinomios aritméticos, al remplazar valores correspondientes a un número de ejemplares propuestos por ellos, reiteradas veces hasta obtener una respuesta satisfactoria para ellos. $P_{(6)21}$, $P_{(6)1}$ y $P_{(6)15}$ utilizan la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. Otro grupo de profesores en formación (2, 4) para designar las ganancias o las pérdidas subrayaron una región del plano, en algunos casos errados, como lo hacen $P_{(8)22}$, $P_{(8)26}$. En la explicación de $P_{(6)10}$ al ítem/tarea sobre crecimiento/decrecimiento de las pérdidas utiliza múltiples recursos para hacerse entender y toma cada caso por separado, dando una muy buena explicación.

En la dimensión matemática del CDM de los futuros profesores de matemáticas, los profesores en formación del sexto semestre (01-2015) muestran un desempeño ligeramente superior al de los del octavo (01-2015), tanto en el conocimiento común del contenido como en el ampliado, ya que al resolver las tareas son más abiertos la combinación de elementos lingüísticos, al uso de recursos y representaciones que les permite, con mayor facilidad, establecer conexiones entre los elementos de las representaciones de las funciones estudiadas.

Los conflictos epistémicos presentados por los futuros profesores de matemáticas, al hacer transformaciones de las representaciones de una función están relacionados con el uso indistinto de la letra como magnitud o como variable generalizada, al uso inconsciente del concepto de función en contextos sociales y a no reconocerlo en contextos académicos. En cuanto a la Caracterización de las prácticas y configuración de objetos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función, al igual que en la solución al cuestionario diagnóstico, aunque mejoraron ostensiblemente, hay algunas diferencias entre los profesores en formación de ambos niveles; a favor de los del sexto semestre (01-2015).

4.3.3.2 Dimensión didáctica.

Esta dimensión está relacionada con la forma en que el profesor concibe un contenido disciplinar y lo adecúa hasta que sea comprensible para quien aprende a través de la utilización de diversas y variadas estrategias. Es la comprensión de un contenido u objeto matemático para sí y tener la capacidad de adecuarlo para que otros lo comprendan de acuerdo a sus posibilidades. Es encontrar y utilizar diversas representaciones del objeto estudiado, establecer conexiones entre sus elementos, determinar elementos con los cuales no es conveniente hacer congruencias entre dos o más representaciones, poder analizar con los estudiantes dichas congruencias e incongruencias, priorizar el orden en que va a utilizar los registros semióticos de representación, cuál usa como registro principal y cuál o cuáles como registros auxiliares, determinar aquellos aspectos que puedan resultar problemáticos para el estudiante al resolver la tarea y prever estrategias para ayudarlos a minimizar dichas dificultades, pero así mismo, provocar conflictos para luego ayudárselos a resolver. Es la dimensión que le permite al docente contextualizar las actividades/tareas propuestas a los estudiantes, para que puedan relacionar lo que se aprende con algo conocido, permite conocer al estudiante, entenderlo y por tanto poderlo ayudar con mayor facilidad, facilita analizar las producciones de los estudiantes con fines de mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje, y aporta a la habilidad del docente para comunicar los resultados encontrados, de forma que puedan ser útiles a la comunidad de educadores matemáticos.

Esta dimensión está compuesta por cinco categorías: Conocimiento Especializado de la dimensión matemática, Conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes, Conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes, Conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula, Conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes y Conocimiento del Currículo.

Como nuestro objetivo es evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de matemáticas, de la Universidad de Sucre al hacer transformaciones de las representaciones de una función, y esta incluye la dimensión matemática con sus dos componentes y, de la dimensión didáctica incluye el Conocimiento Especializado de la dimensión matemática, a continuación se presenta el análisis de las respuestas dadas a las preguntas realizadas con el fin de estudiar esta dimensión.

4.3.3.2.1 Conocimiento Especializado de la dimensión matemática.

Un profesor que posee el Conocimiento Especializado de la dimensión matemática aprende las matemáticas para hacérselas comprender a otros, es decir, realiza las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones que considere necesarias para poner un contenido disciplinar al alcance de las posibilidades de quien aprende, esto es, hace las transposiciones didácticas necesarias para hacer que el conocimiento matemático puesto en juego se convierta en saber. Lo que lo lleva a realizar transformaciones tipo conversión y/o tipo tratamiento para facilitar al aprendiz la comprensión de los conceptos matemáticos estudiados, y analizar las congruencias e incongruencias entre representaciones semióticas de un mismo objeto. Es, como dije antes, el conocimiento que le facilita al profesor pasar de la comprensión personal a la preparación para la comprensión ajena, es decir, decodificar un conocimiento instalado en sí y facilitar condiciones para que el aprendiz lo decodifique y a su manera lo recodifique y lo convierta en saber. Determina patrones de errores, los clasifica según algún criterio establecido y diseña actividades que faciliten minimizar dichos errores, utiliza ejemplos adecuados a los contenidos enseñados, fundamenta y comunica los resultados de este proceso. Para explorar esta dimensión se plantearon tres ítems/tareas, las cuales se analizan a continuación.

4.3.3.2.1.1 Enseñar el tema utilizando ese cuestionario

Al resolver este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación propusieran algunas estrategias para enseñar funciones utilizando, para ello, el cuestionario que se les proporcionó; la totalidad de ellos (24, 26) propusieron algún tipo de estrategia para enseñar funciones utilizando esa situación. En las figuras de 135 a 152 se muestran algunas de las respuestas dadas por profesores en formación de ambos grupos a los ítems 8 a 10 del cuestionario final.

En las soluciones de los profesores en formación, los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales, (e.g., $P_{(8)20}$: "*primero le preguntaría a los estudiantes si conocen del tema y cuánto o qué conocen de él, luego les daría bases para que resuelvan el cuestionario y después los pondría a trabajar en la solución de dicho cuestionario, para así saber cuánto saben o entienden de dicho tema y después aclarar dudas*"; $P_{(6)21}$: "*particularmente primero los coloco a resolver el cuestionario y luego identifico los errores cometidos para posteriormente analizarlos, categorizándolos y buscar una posible solución").*

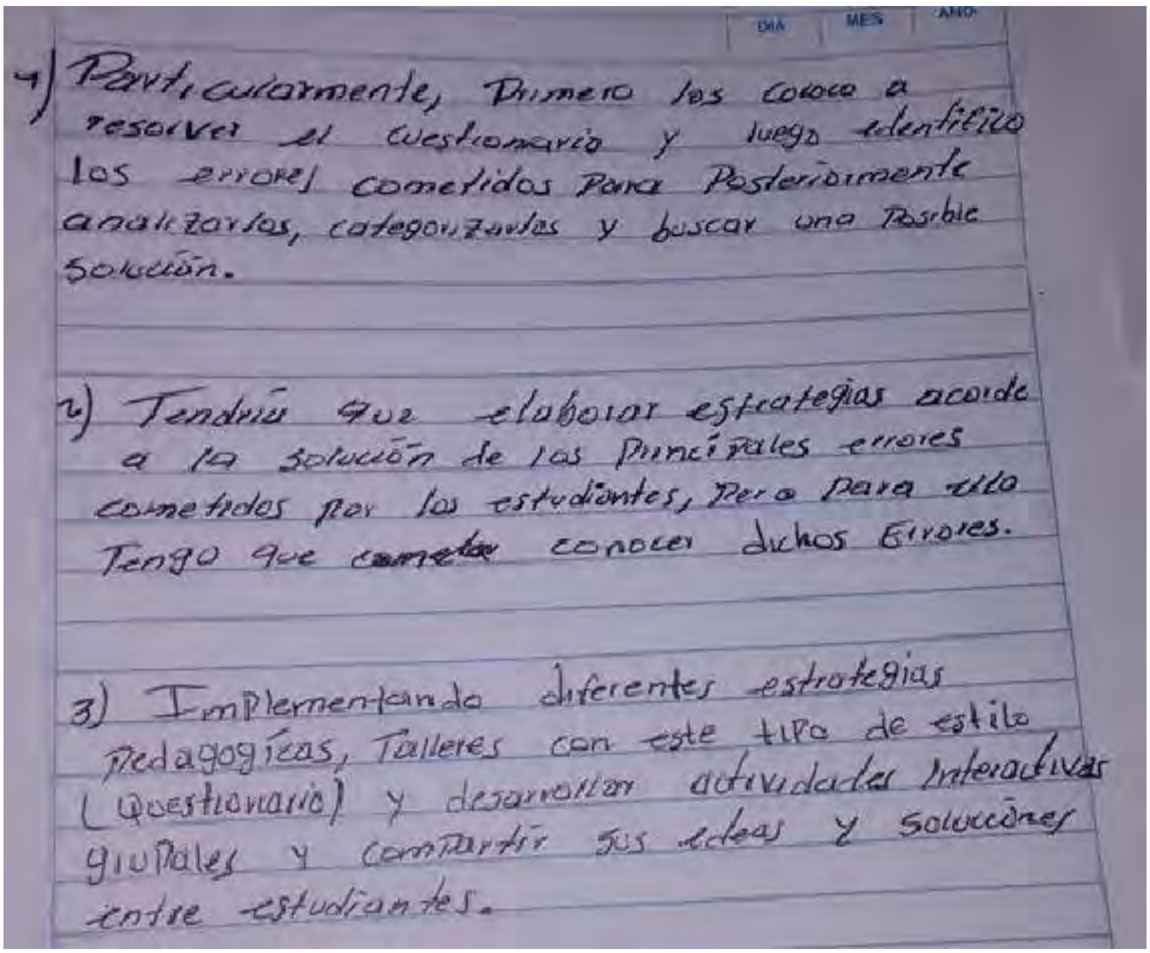
En general las soluciones en cada grupo tienen características similares a las dadas en los ejemplos anteriores, pero diferentes inter grupos: mientras los profesores en formación del octavo semestre centran su atención en ellos mismos como centro del proceso educativo, proponiendo estrategias conductistas, proponen preguntarles a los estudiantes qué saben del tema o proponiendo explicar el cuestionario antes de aplicarlo, con lo que estarían subestimando la capacidad resolutiva de los estudiantes a los que se les aplique dicho cuestionario, y de paso quitándoles protagonismo como centro del proceso educativo; los del sexto dan mucho protagonismo a los estudiantes, al trabajo en equipo, a indagar por el dominio sobre funciones por parte de los estudiantes, pero a través de lo que ellos evidencien en sus soluciones. Hay contrastes evidentes: los profesores en formación del octavo semestre focalizados en preguntar si saben sobre funciones, mientras los del sexto buscan evidencias del saber en las soluciones; los del octavo proponen explicar desde el inicio el cuestionario, los del sexto proponen esperar que resuelvan el cuestionario, analizar sus ideas previas y a las dificultades que surjan serán las que entrarían a combatir.

Todos parecen coincidir con Sierpinska (1994) en que en el proceso de construcción del concepto de función siempre surgirán obstáculos y que estos son inevitables. Sin embargo, los del sexto semestre parecen estar conscientes de la importancia de que los estudiantes reconozcan la complejidad del concepto y de las dificultades que se pueden presentar durante su aprendizaje, más que presentarles una exposición clara del concepto (Hitt, 2003c), para que cuando se les presente un desequilibrio mental, puedan enfrentarlo al compararlo con lo concebido como correcto hasta entonces y ajustarlo a lo nuevo que se aprende. Un grupo bien amplio coincide con González y Hernández (2002) en que el estudio de las funciones debe partir de las dificultades encontradas en los estudiantes, relacionadas con el concepto y buscar que éstos desarrollen habilidades que les permitan corregir los errores presentados, que los lleven a comprender y por tanto a usar espontáneamente el concepto en contextos tanto académicos como socioculturales.

Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones, función lineal, función cuadrática, parábola, gráficas, rango, variable dependiente, dominio, variable independiente, pendiente de una recta, intercepto al eje Y, e intervalo y sector del plano (franja). En relación a las *proposiciones/propiedades*, algunos estudiantes como $P_{(8)7}$ asocian punto de corte con los puntos de equilibrio en el marco se la situación, e.g., "… *es necesario introducir el concepto de punto de equilibrio que usualmente se usa en el área de economía y que en matemática representa el corte de dos puntos del plano*"; o proponen transformaciones que les faciliten establecer conexiones entre las diferentes representaciones y asocian el área entre las gráficas de las dos curvas con la ganancia, e.g., $P_{(6)1}$: "*Cada gráfica tendría su color para diferenciarse entre sí, es decir, los costos tendrían un color puede ser rojo y los ingresos un color azul y además se resaltaría la franja donde hay ganancias*". En cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizados, por la misma estructura y tipo de pregunta no se prestaba para *procedimientos/estrategias* diferentes a las visuales.

En relación a los *argumentos* utilizados, en ambos grupos dan explicaciones, pero no claras razones de lo que harían, entre los pocos que dan razones están $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, y $P_{(6)10}$, e.g., $P_{(6)1}$: "*Utilizando el cuestionario, lo que buscaría principalmente es despertar el interés en los estudiantes por dicho tema, de esta manera ellos se sentirían obligados a recurrir a sus ideas previas lo cual me permitirá conocer qué tanto conocen y desconocen los estudiantes el tema, sería mi punto de partida para lograr desarrollar una serie de competencias que serían pertinentes o necesarias para que los estudiantes tengan la capacidad de resolver este cuestionario*"; $P_{(6)10}$: "*simplemente les entrego el cuestionario a los estudiantes para que lo resuelvan, y al intentar hacerlo le surgirán dudas y preguntarán, así esperaría sus preguntas, para a partir de ahí poderlos ayudar en los bloqueos que les generen en el enfrentamiento que se dé entre sus conocimientos previos y/o presaberes, con las transformaciones que vayan sufriendo al visionar las cosas de nuevas formas, lo que en definitiva sería lo que los* *lleve a adquirir un conocimiento nuevo. Para que hacer tantos planes si al final la clase la determinan muchos factores que son externos al profesor y que uno como profesor debe tener en cuenta, si quiere hacer una buena clase*".

En las figuras 135, 136, 137, 138, 139 y 140 se muestran las respuestas dadas por $P_{(6)21}$, $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$ $P_{(8)7}$, $P_{(8)20}$ y $P_{(6)10}$ a los ítems 8, 9 y 10 del cuestionario final.

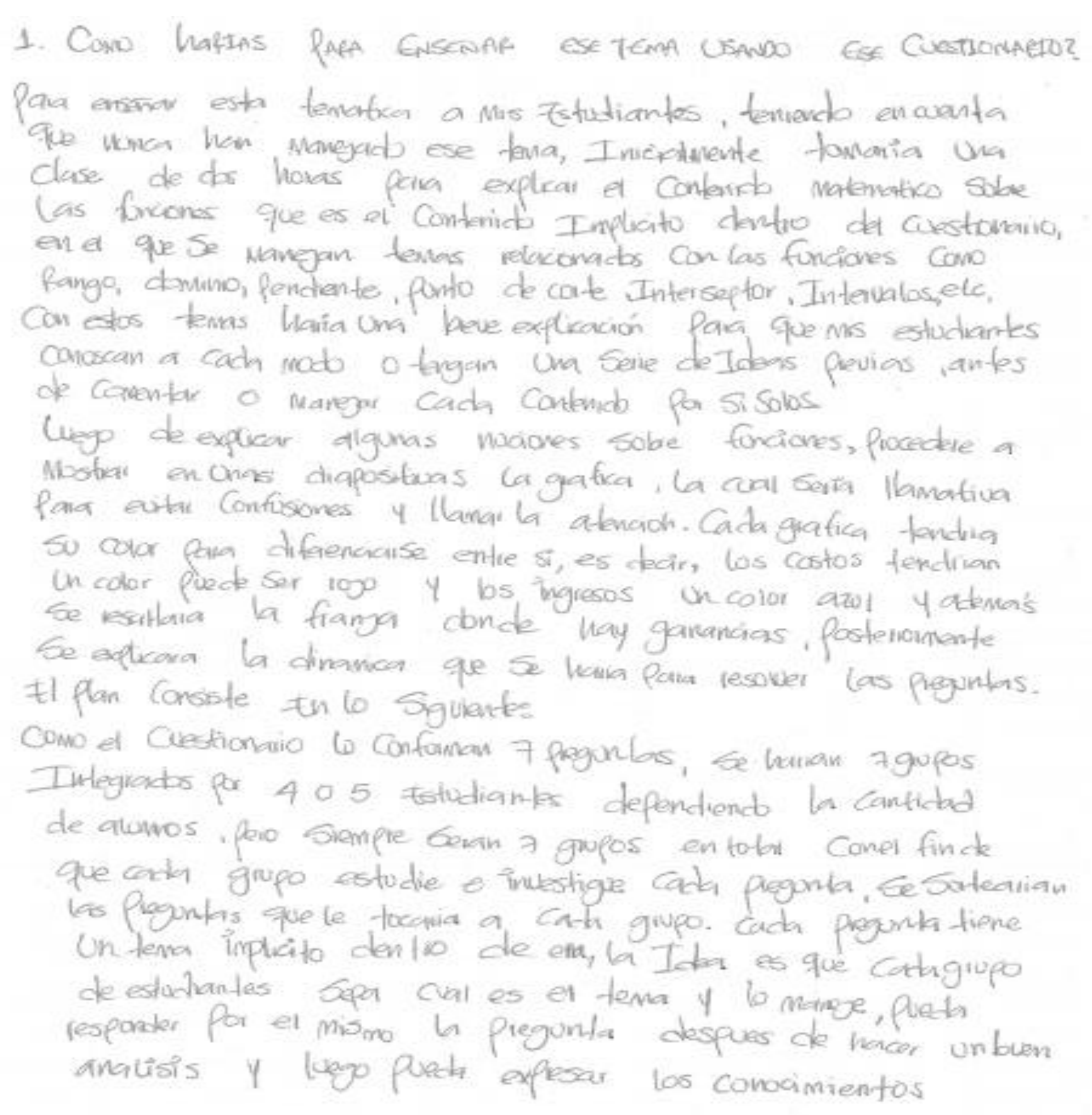

DÍA MES AÑO

1) Particularmente, Primero los coloco a resolver el cuestionario y luego identifico los errores cometidos Para Posteriormente analizarlos, categorizarlos y buscar una Posible solución.

2) Tendría que elaborar estrategias acorde a la solución de los Principales errores cometidos por los estudiantes, Pero para ello Tengo que ~~cometer~~ conocer dichos Errores.

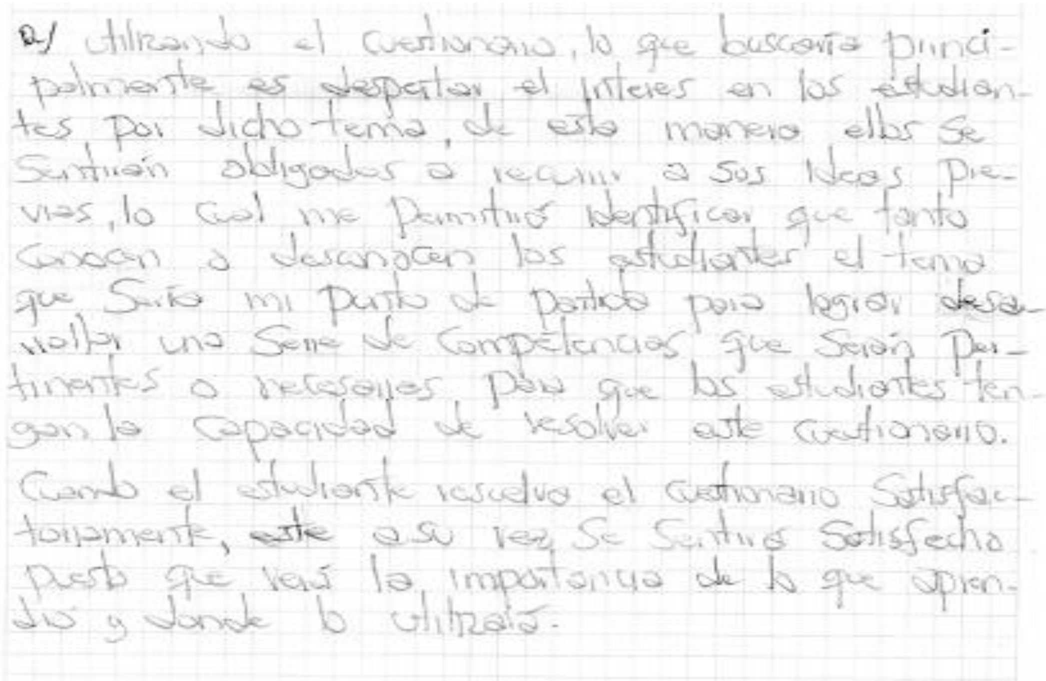
3) Implementando diferentes estrategias Pedagógicas, Talleres con este tipo de estilo (Questionario) y desarrollar actividades Interactivas grupales y compartir sus ideas y soluciones entre estudiantes.

Figura 135. Respuestas dadas por $P_{(6)21}$ los ítems 8 al 10 del cuestionario final.


1. Como harías para enseñar ese tema usando ese cuestionario?

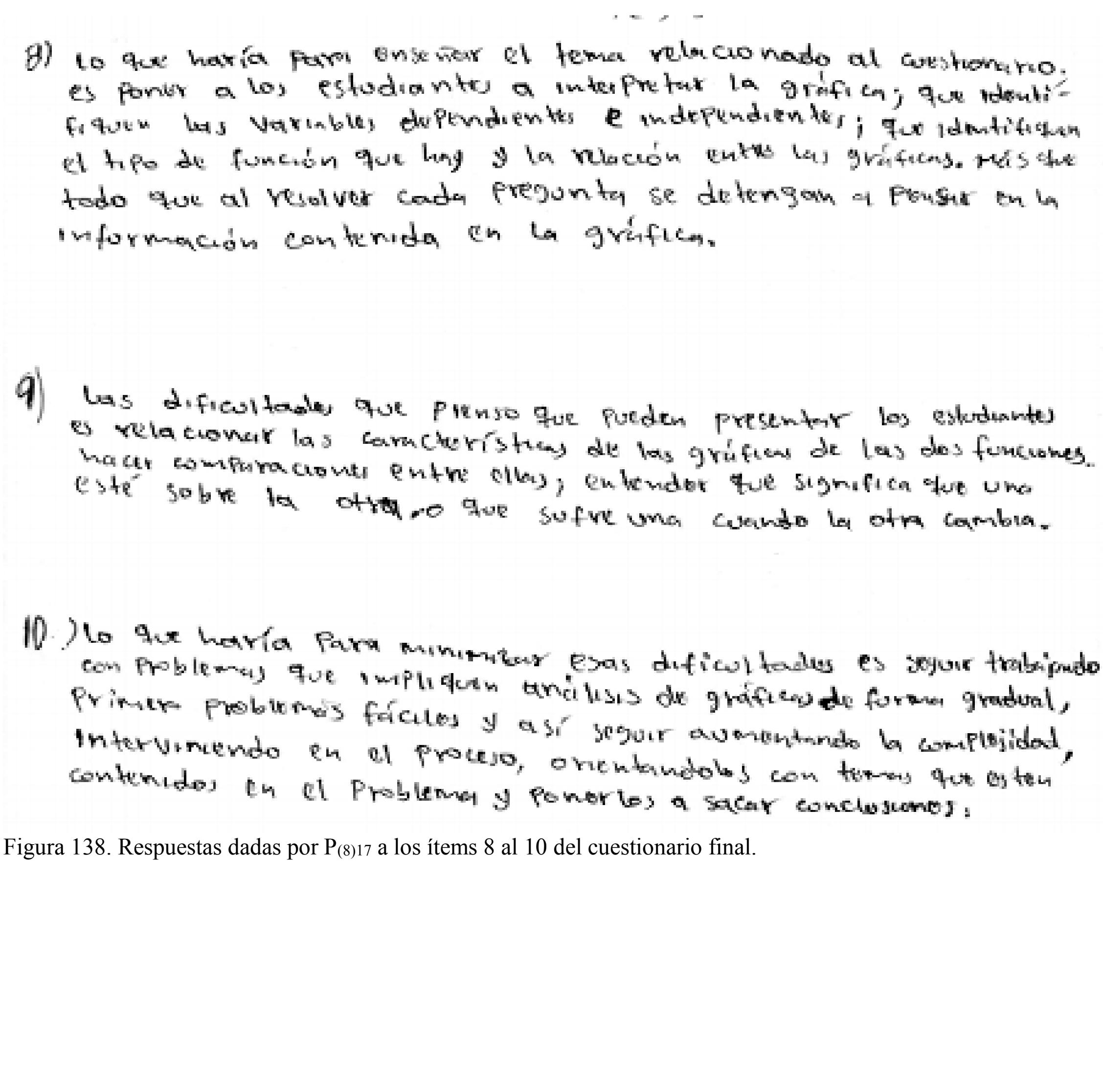
Para enseñar esta temática a mis estudiantes, teniendo en cuenta que nunca han manejado ese tema, inicialmente tomaría una clase de dos horas para explicar el contenido matemático sobre las funciones que es el contenido implícito dentro del cuestionario, en el que se manejan temas relacionados con las funciones como rango, dominio, pendiente, punto de corte intersector, intervalos, etc. Con estos temas haría una breve explicación para que mis estudiantes conozcan a cada modo o tengan una serie de ideas previas, antes de comentar o manejar cada contenido por sí solos.
Luego de explicar algunas nociones sobre funciones, procedería a mostrar en unas diapositivas la gráfica, la cual sería llamativa para evitar confusiones y llamar la atención. Cada gráfica tendría su color para diferenciarse entre sí, es decir, los costos tendrían un color puede ser rojo y los ingresos un color azul y además se resaltaría la franja donde hay ganancias, posteriormente se aplicaría la dinámica que se haría para resolver las preguntas.
El plan consiste en lo siguiente
Como el cuestionario lo conforman 7 preguntas, se harían 7 grupos integrados por 4 o 5 estudiantes dependiendo la cantidad de alumnos, pero siempre serían 7 grupos en total con el fin de que cada grupo estudie e investigue cada pregunta, se sortearían las preguntas que le tocaría a cada grupo. Cada pregunta tiene un tema implícito dentro de ella, la idea es que cada grupo de estudiantes sepa cual es el tema y lo maneje, pueda responder por el mismo la pregunta después de hacer un buen análisis y luego pueda expresar los conocimientos

Figura 136. Respuestas dadas por $P_{(6)1}$ al ítem 8 del cuestionario final.



R/ utilizando el cuestionario, lo que buscaría principalmente es despertar el interes en los estudiantes por dicho tema, de esta manera ellos se sentirían obligados a recurrir a sus ideas previas, lo cual me permitirá identificar que tanto conocen o desconocen los estudiantes el tema que sería mi punto de partida para lograr desarrollar una serie de competencias que serán pertinentes o necesarias para que los estudiantes tengan la capacidad de resolver este cuestionario. Cuando el estudiante resuelva el cuestionario satisfactoriamente, ~~este~~ a su vez se sentirá satisfecho puesto que verá la importancia de lo que aprendió y donde lo utilizará.

Figura 137. Respuestas dadas por $P_{(6)5}$ al ítem 8 del cuestionario final.



8) lo que haría para enseñar el tema relacionado al cuestionario. es poner a los estudiantes a interpretar la gráfica; que identifiquen las variables dependientes e independientes; que identifiquen el tipo de función que hay y la relación entre las gráficas. más que todo que al resolver cada pregunta se detengan a pensar en la información contenida en la gráfica.

9) las dificultades que pienso que pueden presentar los estudiantes es relacionar las características de las gráficas de las dos funciones. hacer comparaciones entre ellas; entender que significa que una esté sobre la otra, o que sufre una cuando la otra cambia.

10.) lo que haría para minimizar esas dificultades es seguir trabajando con problemas que impliquen análisis de gráficas de forma gradual, primero problemas fáciles y así seguir aumentando la complejidad, interviniendo en el proceso, orientandolos con temas que esten contenidos en el problema y ponerlos a sacar conclusiones;

Figura 138. Respuestas dadas por $P_{(8)17}$ a los ítems 8 al 10 del cuestionario final.

8) Como harias para enseñar ese tema utilizando ese Cuestionario:

R// Primero le Preguntaria a los estudiantes si Conocen del tema y Cuanto o que Conocen de el, luego les daría bases para que resuelvan el Cuestionario y después los pondría a trabajar en la solución de dicho Cuestionario para así saber cuánto saben o entienden en realidad de dicho tema y por último aclarar dudas.

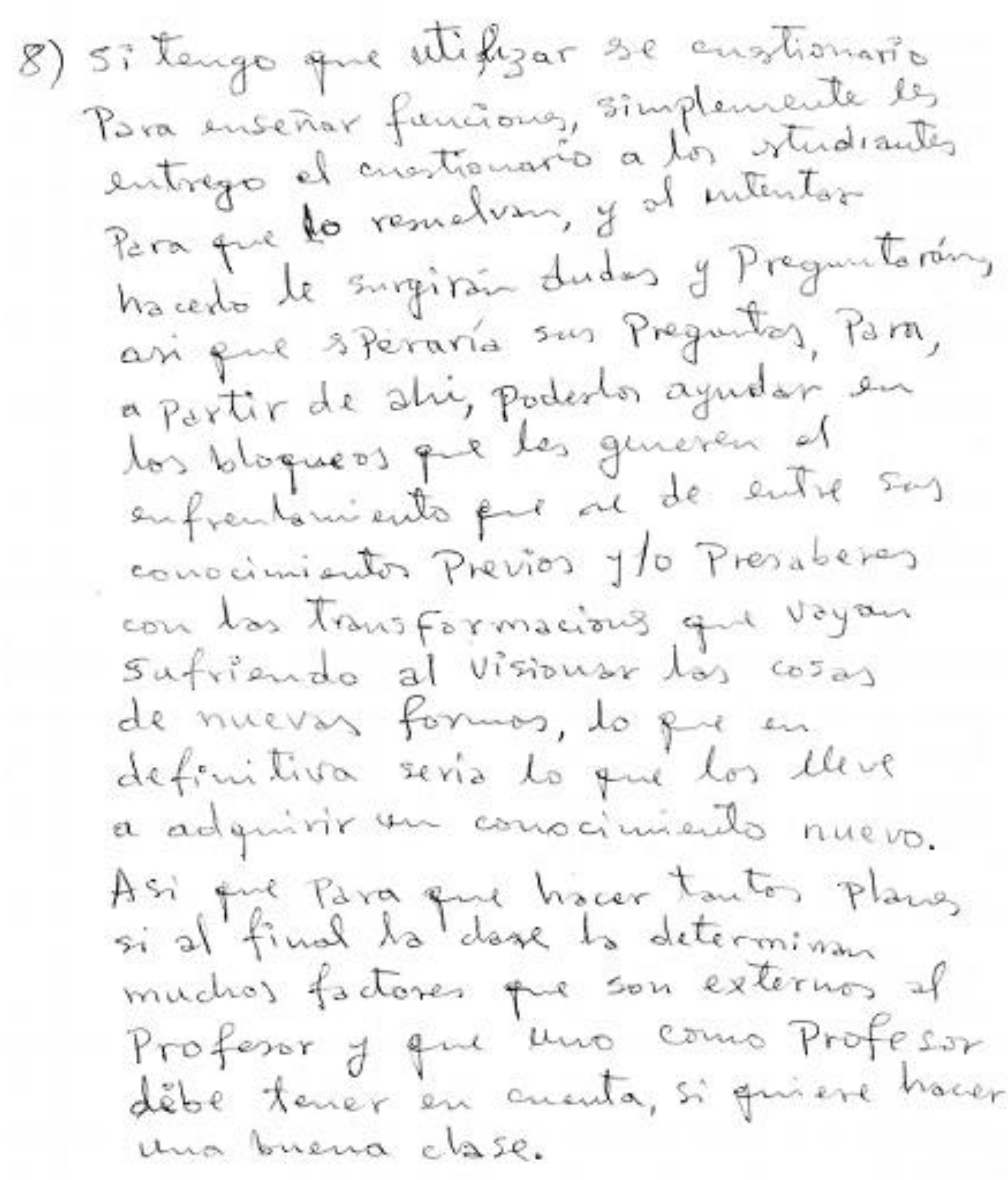
9) Que dificultades crees que presentaran los estudiantes al resolver ese cuestionario con las estrategias que tu implementastes?

R// Que algunos no presenten Conocimientos Previos Concretos acerca del tema ó si los presentan estén errados, Que lo resuelvan solo por la nota, que la Comprensión del tema no sea equitativo para todos los estudiantes

10) Como harias tu para minimizar esas dificultades?

R// Pondria a los estudiantes a comparar en grupos las soluciones que ellos han hecho de los cuestionarios y luego resolverlos entre todos, Para estar seguro de la comprensión del tema y aclarar dudas.

Figura 139. Respuestas dadas por $P_{(8)20}$ a los ítems 8 al 10 del cuestionario final.



8) Si tengo que utilizar se cuestionario
Para enseñar funciones, simplemente les
entrego el cuestionario a los estudiantes
Para que lo resuelvan, y al intentar
hacedo le surgirán dudas y Preguntarán,
así que esperaría sus Preguntas, Para,
a partir de ahí, poderlos ayudar en
los bloqueos que les generen el
enfrentamiento que se de entre sus
conocimientos Previos y/o Presaberes
con las transformaciones que vayan
sufriendo al visionar las cosas
de nuevas formas, lo que en
definitiva sería lo que los lleve
a adquirir un conocimiento nuevo.
Así que Para que hacer tantos planes
si al final la clase la determinan
muchos factores que son externos al
Profesor y que uno como Profesor
debe tener en cuenta, si quiere hacer
una buena clase.

Figura 140. Respuestas dadas por $P_{(6)10}$ al ítem 8 del cuestionario final.

4.3.3.2.1.2 Dificultades que presentarán los estudiantes al resolver el cuestionario con las estrategias implementadas

Al resolver este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación propusieran algunas dificultades que habitualmente presentan los estudiantes en el trabajo con funciones, que visionaran por el conocimiento que tienen en su interacción con estudiantes de los niveles donde sea posible aplicar el cuestionario, o bien fuera por el recuerdo que ellos mismos tienen de su paso por ese nivel, algunas dificultades al resolver este tipo de tareas. Todos los profesores en formación (24, 26) visionaron algún tipo de dificultades en los estudiantes en el trabajo con funciones, como las propuestas en el cuestionario final. En las figuras de 135 a 152 se muestran algunas de las respuestas dadas por profesores en formación de ambos grupos a los ítems 8 a 10 del cuestionario final.

En las soluciones dadas por los profesores en formación de ambos grupos, los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Tales dificultades las relacionan con tres aspectos, los cuales fueron considerados por Albert (1997):

1) ***Dificultades de tipo epistemológicos*** atinentes a la temática de la situación (8, 7), como es el caso de $P_{(6)12}$: "*tendrían dificultades al modelar la expresión algebraica, para interpretar las gráficas y para encontrar los intervalos de crecimiento/decrecimiento para las pérdidas, porque son temas con los que siempre los estudiantes tienen dificultades"*, de $P_{(8)26}$: "*yo pienso que una de sus mayores dificultades sería la interpretación de las gráficas, la interpretación de funciones y además, los procesos de variación de cada gráfica"*, y de $P_{(8)17}$: "*las dificultades que pienso que pueden presentar los estudiantes es relacionar las características de las gráficas de las funciones, hacer comparaciones entre ellas, entender qué significa que una esté sobre la otra o qué sufre una cuando la otra cambia";* o como lo muestra $P_{(6)10}$ presentado en la figura 140.

2) ***Dificultades cognitivas***, son dificultades que presentan los estudiantes (10, 11) relacionadas con sus conocimientos previos, o con su desarrollo cognitivo. Se presentan como muestras las respuestas de $P_{(8)15}$: "*pienso que faltaría desarrollar los conceptos claves por parte de los estudiantes, es decir, desarrollarlos paso a paso con un plan de estudios, ya que muchos se les haría dificultoso debido a que es un tema extenso que por lo general necesita mayor profundización";* $P_{(8)20}$: "*que algunos no presenten conocimientos previos concretos acerca del tema, o si los presentan estén errados, que lo resuelvan solo por la nota, que la comprensión del tema no sea equitativa para todos los estudiantes";* $P_{(6)5}$: "*que* *no comprendan de forma clara el tema que presenta el cuestionario, es decir, que no interpreten claramente de que se trata".*

Y 3) ***Dificultades de origen ontogenético***, relacionados con la interacción entre los estudiantes con su medio o entre ellos al resolver el cuestionario (6, 8), como es el caso de $P_{(6)1}$: "*una de las dificultades que se presentaría sería la de trabajo en grupo o en equipo puesto que en ocasiones de trabajo en equipo puede resultar un poco arriesgado, ya que como son 5 personas se tiende a forma desorden o existen desacuerdos entre ellos, puede suceder que trabajen una o dos personas y las otras no aporten nada al grupo. Otra dificultad podría ser el dejarlos solos que ellos busquen cómo resolver las preguntas y más aun teniendo el internet como una herramienta, ya que éste puede ser utilizado como un distractor al ser manejado con otro fin diferente al de estudiar. Además, al dejarlos construir solos el conocimiento puede llegar a haber confusión y conflictos de aprendizaje. Una dificultad más sería el hecho de dividir las preguntas y asignarlas una a cada grupo, representaría una dificultad puesto que cada grupo estudiaría un tema diferente y tendrá más claridad en ese tema, pero si los estudiantes no están atentos a los demás temas que expondrían sus compañeros puede resultar que no se maneje totalmente el resto de temas que no se les ha sido asignado"*; $P_{(6)5}$: *"que no se sientan muy contentos al resolver el cuestionario*, *es decir, falta de interés por el tema, esto debido a que no le vean utilidad a el mismo por el que deberían resolver el cuestionario. Estudiantes que se desconcentran fácilmente y que no logren resolver bien el cuestionario";* $P_{(8)3}$:"*una de las dificultades que presentarán los estudiantes es la interpretación de dicho tema y si no lo interpretan sería difícil resolver situaciones problema y aplicarlas en la vida cotidiana".*

En este ítem/tarea los profesores en formación, además, tienen en cuenta aspectos relacionados con el currículo como lo hace $P_{(8)15}$: "*... desarrollarlos paso a paso con un plan de estudios, ya que muchos se les haría dificultoso debido a que es un tema extenso que por lo general necesita mayor profundización"; o* $P_{(6)10}$, quien manifiesta este es un tema complejo para un chico de 11°, dejando entrever que es el nivel medio donde aplicaría este cuestionario. Y este mismo profesor en formación dice que él sabe que tendrán esas dificultades "*sencillamente porque es un aspecto donde los chicos siempre presentan* *dificultades”*, lo que es un claro indicio de su conocimiento de los estudiantes (Ball, et al. 2008) y de la integralidad que logra de los conocimientos que domina.

Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones, gráficas, pendiente, crecimiento y decrecimiento, intervalo, cambio, variación y *expresión algebraica*. En relación a las *proposiciones/propiedades*, entre los pocos que las utilizan, $P_{(6)10}$ reconoce en las pérdidas algún tipo de inversa respecto a las ganancias; $P_{(6)1}$ relaciona la estrategia de trabajo en equipo con mucha atención por parte, tanto de estudiantes como del profesor, para que el proceso sea exitoso; $P_{(8)15,}$ $P_{(8)20,}$ y $P_{(6)5}$ reconocen en los conocimientos previos, un requisito para el desarrollo de la clase utilizando el cuestionario. En cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizados, por la estructura y características de la tarea, son como habría de esperarse, totalmente visuales.

En relación a los *argumentos* utilizados, los profesores en formación del octavo semestre dan explicaciones, no muy claras, más no razones de sus decisiones, como lo hace $P_{(8)22}$ cuando dice ”*la dificultad que se puede presentar en los estudiantes son las falencias como representar el concepto como tal, y cuando hacerlo en la realización de las actividades”*; un grupo amplio (66,67%) de los del sexto semestre argumentan con claridad, dando tanto explicaciones como razones de sus propuestas, $P_{(6)10}$ dice “t*endrían problemas para encontrar el crecimiento y el decrecimiento de las pérdidas porque funcionan al revés que las ganancias, y eso es realmente complejo para un chico de 11°. Tendrán dificultades para encontrar una expresión algebraica para los ingresos, sencillamente porque es un aspecto donde los chicos siempre presentan dificultades”.*

En las figuras 141, 142, 143, 144, 145 y 146 se muestran las respuestas dadas por $P_{(6)1}$, $P_{(6)9}$, $P_{(6)11}$ $P_{(8)1}$, $P_{(8)15}$ y $P_{(8)16}$ a los ítems 8, 9 y 10 del cuestionario final.

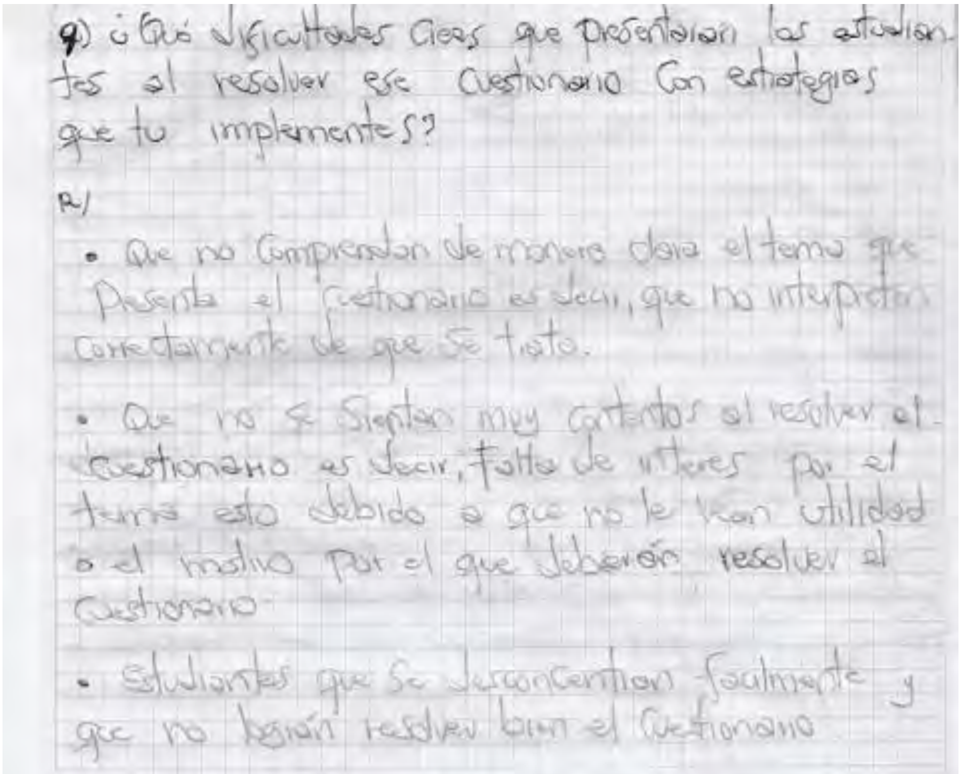
delante del resto de los grupos, es decir, socializar los contenidos y realizar una retroalimentación de todo el cuestionario con la ayuda e intervensión de cada grupo. Como recursos didácticos podían utilizar los apuntes que hicieron en la corta explicación que se dio al inicio, tendrían libros y se daría la opción de que utilicen el internet para investigar sobre el tema a tratar. Un ejemplo sería: la pregunta #1 tiene inmerso el tema de intercepto en el eje y, entonces ese grupo investigara de que se trata esa temática buscaría algunos ejemplos sobre interseptos en el eje Y. lo interiorizaría y luego la expondría ante sus compañeros. Se escogería un representante del grupo para que explique que hizo con sus compañeros de trabajo.

Este mismo proceso se realizaría sucesivamente con cada pregunta y con cada tema dentro de esta. Cabe resaltar que cada interrogante que puede tener se daran 4 horas de clase para que analicen y respondan las preguntas y luego se tomarian otras dos horas para la socialización. El objetivo de esta actividad es fomentar el trabajo en grupo.

2. QUE DIFICULTADES CREES QUE PRESENTARAN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER ESE CUESTIONARIO CON LAS ESTRATEGIAS QUE TU IMPLEMENTES?

- Una de las dificultades que se presentaría sería la del trabajo en grupo o en equipo puesto que en ocasiones el trabajo en equipo puede resultar un poco arriesgado ya que como son 5 personas se tiende a formar desorden o existen desacuerdos entre ellos, puede suceder que trabajen una o dos personas y las otras no aporten nada al grupo.

Figura 141. Respuestas dadas por $P_{(6)I}$ a los ítems 8 y 9 del cuestionario final.


9) ¿Qué dificultades crees que presentarían los estudiantes al resolver ese cuestionario con estrategias que tú implementes?

R/

- Que no comprendan de manera clara el tema que presenta el cuestionario es decir, que no interpreten correctamente de que se trata.
- Que no se sientan muy contentos al resolver el cuestionario es decir, falta de interes por el tema esto debido a que no le ven utilidad o el motivo por el que deberán resolver el cuestionario.
- Estudiantes que se desconcentran facilmente y que no logran resolver bien el cuestionario

Figura 142. Respuestas dadas por $P_{(6)5}$ al ítem 9 del cuestionario final.

8. Los pondría a resolver el cuestionario en pequeños grupos de tres o cuatro estudiantes, liderados por un estudiante de buen desempeño academico, que se encargue de explicarle a los que no entiendan.
Les pediria a los estudiantes que planten una pregunta nueva a la situación y que la resuelvan.

9. Tendrían dificultades al modelar la expresión algebraica, para interpretar las gráficas y para encontrar los intervalos de creciciento/decrecimiento para las perdidas, porque son temas con los que siempre los estudiantes tienen dificultades.

10. Con el trabajo en equipo se van venciendo esas dificultades, ya que los estudiantes líderes van explicandoles a todos aquellos que tengan concepciones erradas y en última, yo como profesor haría un remate de la clase donde formalice todos los concepto con los que se haya tenido dificultad en la solución del cuestionario.

Figura 143. Respuestas dadas por $P_{(6)12}$ a los ítems del 8 al 10 del cuestionario final.

8. ¿ Como harías para enseñar ese tema utilizando ese cuestionario. ?

para poder enseñar el cuestionario, lo primero es que yo, tengan dominio del tema, para implementar las herramientas necesaria para que entiendan dicho concepto, y, que pongan en practica lo que se le esta enseñando. de su entorno.

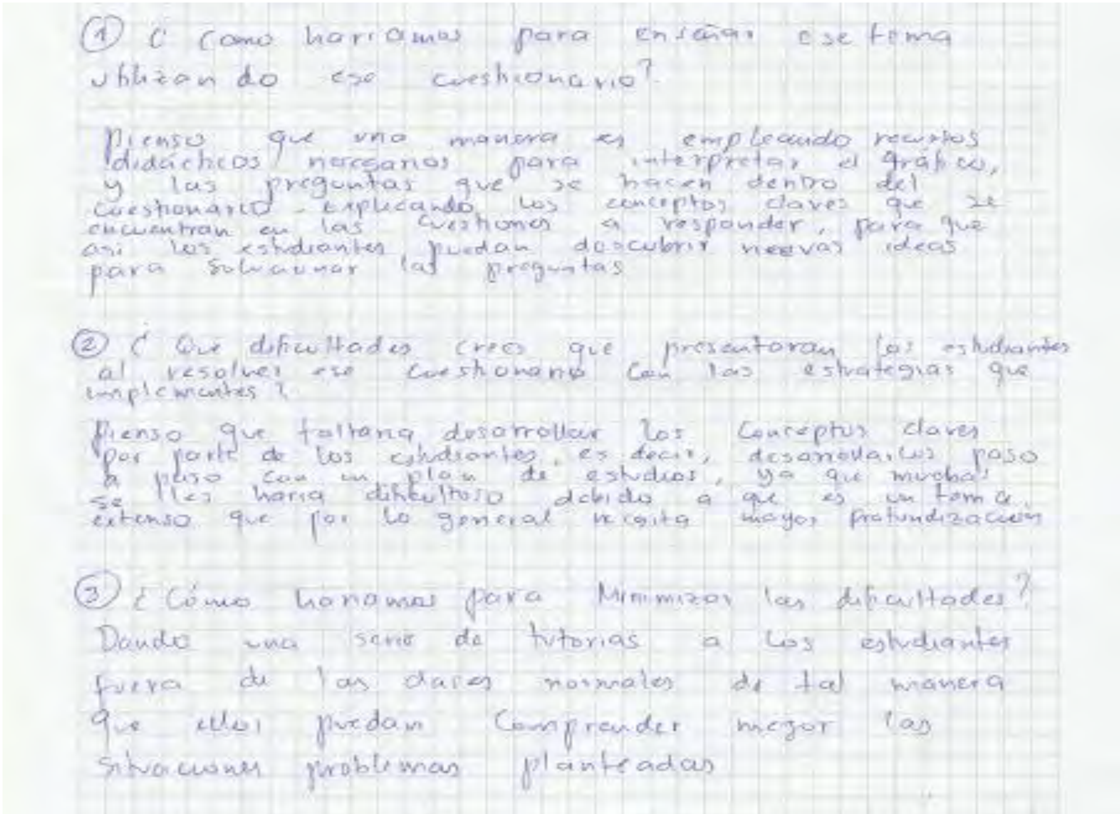
9. ¿ Que dificultades crees que presentará los estudiante al resolver ese cuestionario con las estrategias que tu implementaste.

La dificultades que se puede presentar en los estudiantes son las falencia como representar el concepto como tal, y cuando hacerlo en la realizacion de las actividades.

10. ¿ Como harias tu para minimizar esas dificultades

para minimizar esas dificultades en los estudiantes, que aprendan a indentificar y analizar sus errores, para que, ellos tome conciencia de lo que se esta haciendo y reflexionen de esas falencia que presenta al momento de resolver un problema.

Figura 144. Respuestas dadas por $P_{(8)22}$ a los ítems del 8 al 10 del cuestionario final.


① ¿Como hariamos para enseñar ese tema utilizando ese cuestionario?

Pienso que una manera es empleando recursos didácticos necesarios para interpretar el gráfico, y las preguntas que se hacen dentro del cuestionario - explicando los conceptos claves que se encuentran en las cuestiones a responder, para que así los estudiantes puedan descubrir nuevas ideas para solucionar las preguntas

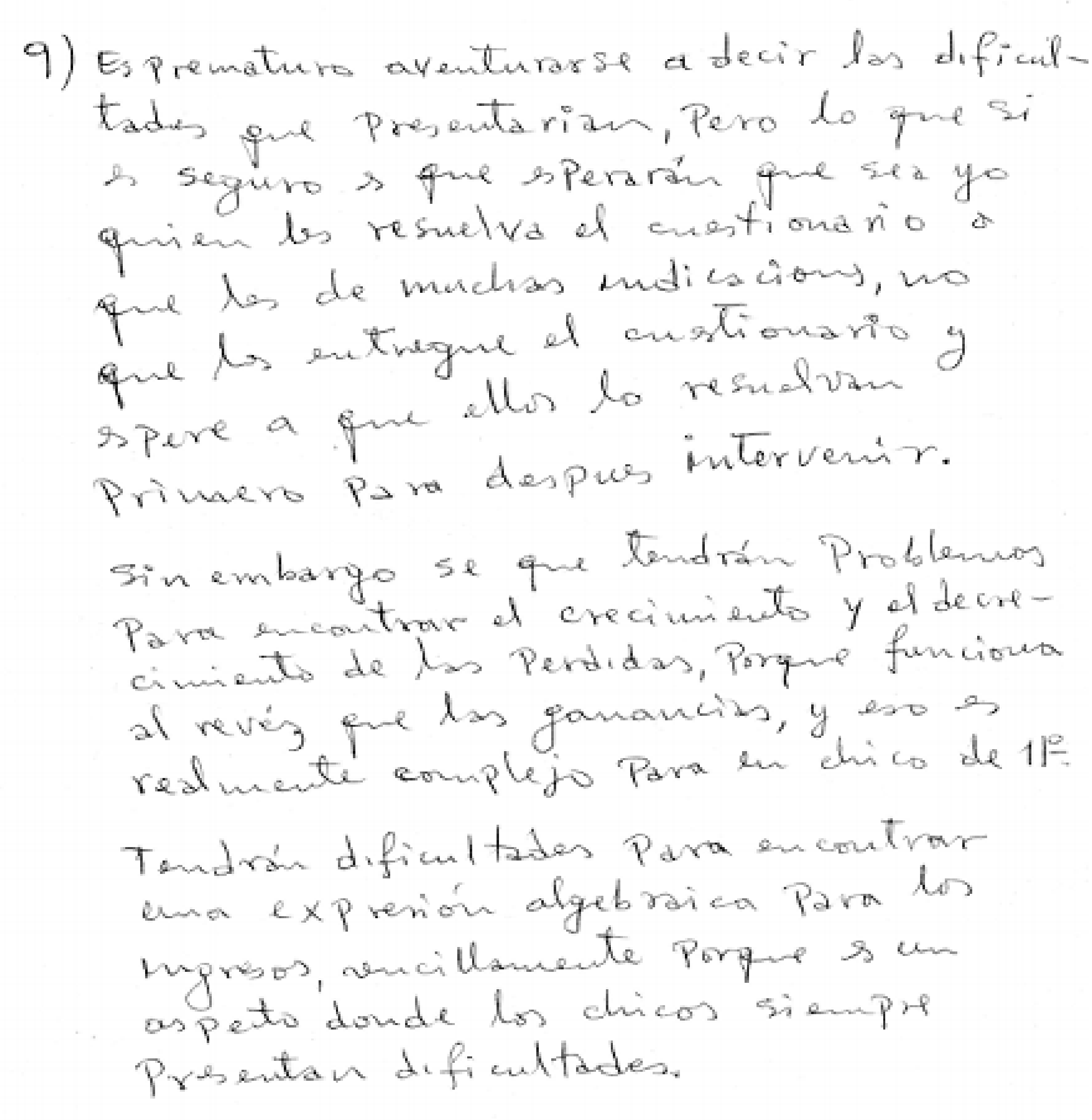
② ¿Qué dificultades crees que presentaran los estudiantes al resolver ese cuestionario con las estrategias que implementastes?

Pienso que faltaría desarrollar los conceptos claves por parte de los estudiantes, es decir, desarrollarlos paso a paso con un plan de estudios, ya que muchos se les haría dificultoso debido a que es un tema extenso que por lo general necesita mayor profundización

③ ¿Cómo haríamos para minimizar las dificultades?

Dando una serie de tutorias a los estudiantes fuera de las clases normales de tal manera que ellos puedan comprender mejor las situaciones problemas planteadas

Figura 145. Respuestas dadas por $P_{(8)15}$ a los ítems del 8 al 10 del cuestionario final.



9) Es prematuro aventurarse a decir las dificultades que presentarían, pero lo que si es seguro es que esperarán que sea yo quien los resuelva el cuestionario o que les de muchas indicaciones, no que les entregue el cuestionario y espere a que ellos lo resuelvan primero para despues intervenir.

Sin embargo se que tendrán problemas para encontrar el crecimiento y el decrecimiento de las perdidas, porque funciona al revéz que las ganancias, y eso es realmente complejo para un chico de 1º.

Tendrán dificultades para encontrar una exprerión algebraica para los ingresos, sencillamente porque es un aspecto donde los chicos siempre presentan dificultades.

Figura 146. Respuestas dadas por $P_{6)10}$ al ítem 9 del cuestionario final.

4.3.3.2.1.3 Estrategias para minimizar dificultades debidas a estrategias implementadas

Al resolver este ítem/tarea se esperaba que los profesores en formación propusieran algunas estrategias que permitieran minimizar las dificultades que ellos mismos visionaron en los estudiantes al resolver el cuestionario bajo las estrategias propuestas para la aplicación de éste. Varios de ellos (24, 16) propusieron algún tipo de estrategia para minimizar las dificultades en el trabajo con funciones utilizando la situación propuesta en el cuestionario final. En las figuras de 135 a 152 se muestran las respuestas dadas por profesores en formación de ambos grupos a los ítems 8 a 10 del cuestionario final.

En las soluciones dadas por los profesores en formación de ambos grupos, los *elementos lingüísticos* utilizados fueron en su totalidad verbales. Las estrategias que plantearon se pueden clasificar en cuatro tipos:

1) basadas en un ***modelo constructivista*** (0, 4), como se muestra en lo propuesto por $P_{(8)7}$: "*yo como docente trataría de ser más pedagogo y práctico con el tema, utilizaría otras herramientas pedagógicas que sean más accesibles a los estudiantes y que estén relacionados con sus habilidades y modos de vida".*
2) Basadas en un ***modelo social cognitivo*** (12, 2), un ejemplo de ello es lo propuesto por $P_{(8)17}$: "*lo que haría para minimizar esas dificultades es seguir trabajando con problemas que impliquen análisis de gráficas de funciones de forma gradual, primero problemas fáciles y así seguir aumentando la complejidad, interviniendo en el proceso, orientándolos con temas que estén contenidos en el problema y ponerlos a sacar conclusiones";* $P_{(8)22}$: *para minimizar en los estudiantes que aprendan a identificar y analizar sus errores, para que ellos tomen conciencia de lo que se está haciendo y reflexionen de esas falencias que presentan al momento de resolver un problema";* $P_{(6)1}$: "*para minimizar la primera y la segunda dificultad sería estar constantemente vigilando cada grupo y haciéndoles preguntas a cada estudiante con el fin de que todos estén atentos en el estudio, para cuando se haga una pregunta con respecto a lo que se está haciendo sepan responder, y en el caso de que no, asignar un punto negativo si no responde adecuadamente cualquier interrogante que puedan tener al tratar de interpretar el tema y así no se frustren al tratar de aprender por si solo o puedan tener unas ideas erróneas del tema. Con la otra dificultad para minimizarla sería proponer hacer un informe sobre el cuestionario donde tendrían que prestar más atención a cada explicación de sus compañeros para que puedan hacer un buen informe y evitar de esta forma no prestar la debida atención a los demás temas".*
3) Basadas en un ***modelo conductista*** (0, 8), como se muestra en lo propuesto por $P_{(8)15}$: "*dando una serie de tutorías a los estudiantes fuera de las clases normales, de tal manera que ellos puedan comprender mejor las situaciones problemas planteados".*

4) Basadas en un ***modelo ecléctico*** (***social cognitivo, constructivista, conductista)*** (12, 2), como se muestra en la respuesta de $P_{(6)10}$: "*primero es dejarlos que socialicen ante el grupo, sus soluciones al cuestionario, que muestren todas las soluciones posibles y las iría dejando todas en el tablero y les iría pidiendo a los mismos estudiantes que analicen en cuál o cuáles soluciones hay error y que muestren por qué y den una posible corrección. Y así ir dejando sólo aquellas soluciones correctas. Finalmente yo como profesor daría aquellas soluciones que los estudiantes no pudieron dar, y corrigiendo lo que no esté bien y formalizando matemáticamente lo que esté pendiente por formalizar";* $P_{(6)12}$: "*con el trabajo en equipo se van venciendo esas dificultades, ya que los estudiantes líderes van explicándoles a todos aquellos que tengan concepciones erradas y en última, yo como profesor haría un remate de la clase donde formalice todos los conceptos con los que se haya tenido dificultad en la solución del cuestionario";* $P_{(8)20}$: "*Pondría a los estudiantes a comparar en grupos las soluciones que ellos han hecho de los cuestionarios y luego resolverlos entre todos, para estar seguro de la comprensión del tema y aclarar dudas".*

Las soluciones dadas por este grupo de profesores en formación son muy diversas y con mucha heterogeneidad, tanto intra como inter grupos, pero en términos generales hay muchos elementos que vale la pena resaltar en el conocimiento didáctico de este grupo de profesores en formación: un grupo considerable de ellos hace referencia a las dificultades debidas a concepciones erróneas, que son aspectos enmarcados en la teoría de Brousseau (1999, 2007) y proponen minimizarlas con estrategias de trabajo en equipo, utilizando a los estudiantes más avanzados académicamente como líderes de cada equipo para que ayuden a sus propios compañeros, o a través de algún tipo de interacción entre pares, que son rasgos distintivos de la teoría de Vygotsky (1995). Algunos llegan solo hasta aquí, pero otro grupo va más allá y terminan formalizando matemáticamente los conceptos que se trabajan, convirtiendo su propuesta en un modelo ecléctico bien interesante.

Entre los *conceptos/definiciones* que mencionan se destacan: funciones, gráficas, concepciones erradas, dificultades, problemas. En relación a las *proposiciones/propiedades*, todas las soluciones son en sí mismas proposiciones, que como se dijo antes, tienen algunos aspectos en común pero en otros son muy heterogéneas. En cuanto a los *procedimientos/estrategias* propuestas son en su mayoría (24, 8) grupales, donde se dé un liderazgo por parte de un grupo de estudiantes, utilizados como líderes para viabilizar la clase.

En relación a los *argumentos* utilizados, en su mayoría, los profesores en formación de ambos grupos explican sus estrategias, sólo las proponen, más no dan razones claras de su actuar, como lo hacen $P_{(8)20}$ y $P_{(8)15}$; este último dice "*dando una serie de tutorías a los estudiantes fuera de las clases normales de tal manera que ellos puedan comprender mejor las situaciones problemas planteadas*". Algunos como $P_{(6)12}$, $P_{(8)26}$ y $P_{(6)5}$ argumentan levemente sus propuestas: $P_{(6)5}$ dice: "*para minimizar esas dificultades pienso que debemos tomar como centro del aprendizaje a los estudiantes y así poder ubicarnos en sus problemas y dificultades, una de las estrategias utilizadas por mí sería: Debe ser conveniente hacer una introducción acerca del tema, esto con el fin que los estudiantes interactúen entre todos y generen un conocimiento que a la vez será útil y significativo y por último tomaría el cuestionario ya resuelto por los estudiantes y socializaría las respuestas buscando que los estudiantes identifiquen sus propios errores";* $P_{(8)26}$: "*lo principal que haría, llevar el concepto de función a los computadores y trabajar con los jóvenes en Geogebra y Derive para que ellos analicen los conceptos de variación y luego hagan una síntesis de lo que hicieron y entendieron en clase*".

En las soluciones de este grupo de profesores en formación los argumentos son bastante débiles, ya que no justifican con claridad sus propuestas, solo un pequeño grupo lo hace sin mucha contundencia.

En las figuras 147, 148, 149, 150, 151 y 152 se muestran las respuestas dadas por $P_{(6)1}$, $P_{(6)5}$, $P_{(8)7}$ $P_{(8)26}$, $P_{(6)10}$ y $P_{(8)3}$ a los ítems 8, 9 y 10 del cuestionario final.

- Otra dificultad podría ser el dejarlos solos que ellos busquen como resolver las preguntas y más aún teniendo el internet como una herramienta ya que este puede ser utilizado como un distractor al ser manejado con otro fin diferente al de estudiar. Además al dejarlos construir solo el conocimiento puede llegar a haber confusiones y conflictos de aprendizaje.

- Una dificultad más sería el hecho de dividir las preguntas y asignarlas una a cada grupo, representaría una dificultad puesto que cada grupo estudiaría un tema diferente y tendría más claridad en ese tema, pero si los estudiantes no están atentos a los demás temas que expondrían sus compañeros puede resultar que no se maneje totalmente el resto de temas que no se le ha sido asignado.

3. COMO HARÍAS TÚ PARA MINIMIZAR ESAS DIFICULTADES?
Para minimizar la primera y la segunda dificultad sería estar constantemente vigilando cada grupo y haciendo les preguntas a cada estudiante con el fin de que todos estén atentos en el estudio, para cuando se haga una pregunta con respecto a lo que se está haciendo sepan responderlas y en el caso de que no se asignar un punto negativo si no responde adecuadamente cualquier interrogante que puedan tener al tratar de interpretar el tema y así no se frustren al tratar de aprender por sí solo o puedan tener unas ideas erróneas del tema.
Con la otra dificultad para minimizarla sería proponer hacer un informe sobre el cuestionario donde tendrían que prestar más atención a cada explicación de sus compañeros para que puedan hacer un buen informe y evitar de esta forma no presta la debida atención a los demás temas.

Figura 147. Respuestas dadas por $P_{(6)1}$ a los ítems 9 y 10 del cuestionario final.

10 ¿Cómo harías tú para minimizar esas dificultades?
Para minimizar esas dificultades pienso que debemos tomar como centro del aprendizaje a los estudiantes y así poder ubicarnos en sus problemas y dificultades, una de las estrategia utilizada por mi sería:

• Debe ser conveniente hacer una introducción acerca del tema, esto con el fin que los estudiantes interactúen entre todos y generen un conocimiento que a la vez sea útil y significativo y por último tomaría el cuestionario ya resuelto por los estudiantes y socializaría las respuestas buscando que los estudiantes identifiquen sus propios errores.

Figura 148. Respuestas dadas por $P_{(6)5}$ al ítem 10 del cuestionario final.

Respuesta:

8) Primero enseñarle a los estudiantes el concepto de pendiente de una recta y la función parábola, es necesario introducir el concepto de punto de equilibrio, q' usualmente se usa en el área de economía y q' en matemáticas representa el corte entre dos puntos del plano.

si utilizamos solo el cuestionario para enseñar ese tema, entonces partir de su gráfica primero explicar la construcción de la misma, paso por paso en el tablero a los estudiantes o por medio de otras herramientas didácticas como cartelera etc. Después podemos explicar a partir de las gráficas los conceptos de punto de equilibrio, ecuación de una recta y pendiente.

9) Pienso q' los estudiantes tendrán dificultades sobre todo al comprender el concepto de pendiente solo con los dos puntos dados y el punto de equilibrio.

10) Yo como docente trataría de ser más pedagogo y práctico con el tema. Utilizaría otras herramientas pedagógicas q' sean más accesibles a los estudiantes y q' estén relacionadas con sus hábitos y modos de vida.

Figura 149. Respuestas dadas por $P_{(8)7}$ a los ítems 8 al 10 del cuestionario final.

1. ¿ Como harias para enseñar ese tem utilizando ese cuestionario?

La manera como enseñar dicho tem que es funciones lo haria de la siguiente manera

1- Pregunta Introductoria ¿ Qué es una funcion y clases de funciones

2- ¿Como representar las funciones en la vida real

3- Luego iniciar con el concepto de pendiente y mas tarde con el concepto de función lineal

4 hablariamos sobre el concepto de funcion cuadratica y sus elementos

5- Luego comenzariamos a debatir el cuestionario y si hay dudas se da la retroalimentacion

2. ¿ Que Dificultades crees que presentaran los estudiantes al resolver ese cuestionario con las estrategias que tu implementastes?

Yo pienso que una de las mayores dificultades sera la interpretación de las gráficas, la intercepción de funciones y ademas los procesos de variacion de cada gráfica.

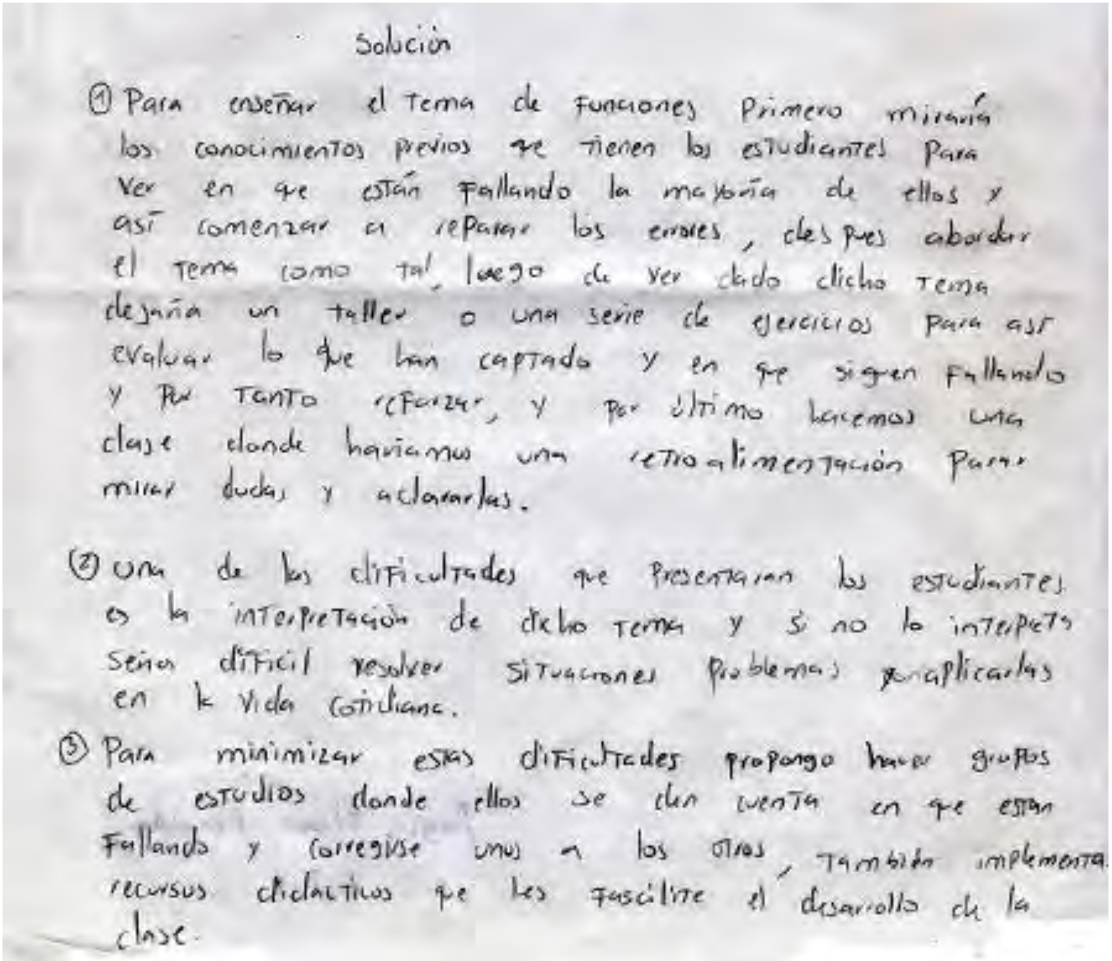
3. ¿ Como harias para minimizar esas dificultades?

Lo principal que haria, llevar el concepto de función a las computadoras y trabajar con los jovenes en geogebra, sirve para que ellos practiquen los conceptos de variación y luego hagan una síntesis de lo que hicieron y entendieron en clase

Figura 150. Respuestas dadas por $P_{(8)26}$ a los ítems del 8 al 10 del cuestionario final.

10). Primero es dejarlos que socialicen ante el grupo, sus solucions al cuestionario que muestren todas las solucions Posibles y las iria dejando todas en el tablero y les iria Pidiendo a los mismo studiantes que analicen en cual o cuales solucions hay error y que muestren Porqué y de una Posible corrección. Y asi ir dejando sólo aquellas solucións correctas.
Finalmente yo como Profesor daría aquellas solucions que los studiantes no Pudieron dar, ycorrigiendo lo que no sté bien y formalizando matematica mente lo que sté Pendiente por formalizar.

Figura 151. Respuestas dadas por $P_{(6)10}$ al ítem del 10 del cuestionario final.



Solución

(1) Para enseñar el tema de funciones primero miraría los conocimientos previos que tienen los estudiantes para ver en que están fallando la mayoría de ellos y así comenzar a reparar los errores, después abordar el tema como tal, luego de ver dado dicho tema dejaría un taller o una serie de ejercicios para así evaluar lo que han captado y en que siguen fallando y por tanto reforzar, y por último hacemos una clase donde haviamos una retroalimentación para mirar dudas y aclararlas.

(2) Una de las dificultades que presentarían los estudiantes es la interpretación de dicho tema y si no lo interpreta sería difícil resolver situaciones problemas y aplicarlas en la vida cotidiana.

(3) Para minimizar estas dificultades propongo hacer grupos de estudios donde ellos se den cuenta en que están fallando y corregirse unos a los otros, también implementa recursos didácticos que les fascilite el desarrollo de la clase.

Figura 152. Respuestas dadas por $P_{(8)3}$ a los ítems del 8 al 10 del cuestionario final.

La dimensión didáctica del CDM de los futuros profesores de matemáticas, al igual que la dimensión matemática, está mejor fundamentada en los del sexto semestre (01-2015) que en los del octavo (01-2015) ya que proponen claras estrategias para implementar procesos educativos, las dificultadas que estos procesos podrían ocasionar y estrategias para minimizarlas, basándose en teorías psicológicas del aprendizaje. Las características de las prácticas y configuración de objetos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función, se presenta una ligera diferencia a favor de los estudiantes del sexto semestre (01-2015), ya que echan mano de diversas representaciones, proposiciones y procedimientos, y dan muestras claras de argumentos: con explicaciones y razones claras, y aunque no es la totalidad de los estudiantes del grupo quienes lo hacen, un amplio porcentaje de ellos lo hicieron.

CAPITULO 5

5 CONCLUSIONES, CUESTIONES ABIERTAS, PROPUESTA DE MEJORA Y PRINCIPALES APORTACIONES

5.1 CONCLUSIONES

Al evaluar la faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de los dos grupos de profesores en formación, del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre al hacer transformaciones de las representaciones de una función, se tuvo en cuenta, las dos sub-categorías de ***la Dimensión Matemática***: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, y de la ***Dimensión Didáctica*** sólo el conocimiento especializado de la dimensión matemática.

Los resultados permiten concluir que en el ***conocimiento*** que se presentó mayor heterogeneidad en cada una de las dos pruebas fue en el ***Conocimiento común del contenido*** de ***la Dimensión Matemática*** del CDM. Al resolver las tareas que se les presentaron, los conocimientos movilizados por los profesores en formación de ambos grupos presentaron diferencias estadísticamente significativas en las calificaciones al resolver las dos pruebas: en la prueba diagnóstica, la diferencia fue a favor de los profesores en formación del sexto semestre (02-2013), y en la final a favor de los sexto semestre (01-2015). Las dificultades de algunos de estos profesores en formación, en ambas pruebas, estuvieron relacionadas con la comprensión de la noción función, específicamente con la identificación y uso de los elementos de las funciones involucradas, con la identificación de los interceptos al origen sin ayuda gráfica, con el análisis de los valores extremos así como con los intervalos de crecimiento, con la modelación (construcción de la representación algebraica y gráfica) de las funciones involucradas en las situaciones y con la identificación de la pendiente de la función lineal. Lo que deja ciertas dudas sobre su idoneidad en el saber disciplinar y sobre su competencia para orientar el aprendizaje de las matemáticas, que según la estructura del programa, deberían saber.

Se presentaron altos niveles de heterogeneidad inter grupos, en las respuestas de los profesores en formación al resolver el cuestionario diagnóstico; además, se presentaron altos niveles de homogeneidad al interior de los grupos e inter grupos, en las respuestas dadas a las cuestiones planteadas en el cuestionario final, lo que indica un alto grado de acuerdo al resolver este cuestionario. Este alto nivel de asociación entre respuestas y nivel académico, tanto inter como intra grupos, se puede interpretar como que, el hecho de obtener resultados positivos en este tipo de pruebas es una condición del ámbito de los profesores de matemáticas, más que de este programa de formación en particular.

Como puede apreciarse, las diferencias entre los grupos se dieron en las calificaciones al resolver los cuestionarios, mientras que las características de los objetos primarios y procesos presentes en las prácticas que desarrollan los estudiantes al hacer transformaciones de las representaciones de las funciones involucradas en la situación, fueron muy similares en los dos grupos de estudiantes en el cuestionario diagnóstico, y con una ligera diferencia, a favor de los del sexto semestre (01-2015), al resolver el cuestionario final. Por ejemplo, en el uso de las definiciones, de los procedimientos, proposiciones, así como las explicaciones de las mismas (Godino, 2011) se presentaron resultados más similares que en otros subdominios, mientras que en los argumentos, procedimientos/estrategias utilizados por los profesores en formación, los del sexto semestre (01-2015) fueron mucho más adecuados.

Entre los *elementos lingüísticos* utilizados por los profesores en formación del octavo semestre (01-2015) predominaron elementos verbales, números naturales y subrayados de regiones del plano. Mientras en los profesores en formación del sexto semestre (01-2015) predominó la combinación de regiones del plano, emparejadas con su correspondiente representación del lenguaje coloquial, el uso de elementos analíticos como expresiones algebraicas y polinomios aritméticos, y algunas respuestas las acompañaron con ejemplos muy adecuados, lo que denota un mayor de desarrollo de los estudiantes de este grupo en el conocimiento común del contenido.

Entre los *conceptos/definiciones* que utilizaron ambos grupos se destacan ecuaciones, funciones y algunos de sus elementos. En relación a las *proposiciones/propiedades*, los profesores en formación de ambos grupos, en sus respuestas asocian claramente puntos de las gráficas de las funciones involucradas con los elementos contextuales correspondientes. En cuanto a los *procedimientos/estrategias* utilizadas, en los profesores en formación del octavo semestre (01-2015) predominó un análisis visual, mientras en los del sexto semestre (01-2015) predominaron procesos visuales combinados con procesos analíticos. Y en relación a *los argumentos*, hay evidencias de éstos en las respuestas de muchos profesores en formación de ambos grupos, pero diferenciables entre sí: los del sexto semestre (01-2015) los apoyaron en los procedimientos analíticos que realizaron, mientras los del octavo semestre (01-2015), en un análisis visual. Surge una nueva duda respecto a si este grupo de profesores salen capacitados para comunicar coherentemente sus ideas en forma oral o escrita, como elemento fundamental para articular diferentes contenidos en su quehacer como docentes. Sin embargo Shulman (2005) considera que en su práctica profesional, los profesores mejoran su comprensión de los temas a enseñar, por lo que con las dificultades descritas anteriormente, el conocimiento común del contenido en ambos grupo podría considerarse adecuado.

En cuanto al ***conocimiento ampliado del contenido*** del CDM, mientras que en el proceso diagnóstico los desempeños en este aspecto fueron bastante limitados en ambos grupos, en la prueba final a los profesores en formación del sexto semestre (01-2015) se les facilitó más la realización de conexiones entre los elementos de las funciones estudiadas, así como seleccionar y utilizar diferentes representaciones de un objeto, diversificaron los registros y las representaciones usadas en la solución de cada tarea. Por ejemplo, asociaban con mucha facilidad la distancia entre la representación gráfica de la función de Costo y la de Ingresos, con la ganancia o pérdida para un determinado número de ejemplares. Así mismo, utilizaron diversos temas y contenidos matemáticos, estableciendo conexiones entre ellos, (por ejemplo, armaron un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y utilizaron diferentes métodos, como el de eliminación, igualación o eliminación de Gauss-Jordan, para encontrar la solución al sistema) en la solución de las diferentes tareas que se les propusieron. Conexiones que les permitió poner en correspondencia diferentes elementos ostensibles en las diversas representaciones (Del Castillo, 2003) de las funciones involucradas y establecer congruencias entre ellos, es decir, decodificar los elementos de la representación de cada función en el registro gráfico y recodificarlo en cualquier otro registro escogido como registro auxiliar y a partir de ahí, decidir sobre la pertinencia procedimental (Sgreccia y Massa, 2012) y emparejar los elementos equivalentes en las diferentes representaciones, entre las que les fuera posible hacerlo, y asignar significado y sentido a los objetos matemáticos al hacer conversiones al registro fenomenológico, rasgo este bien distintivo del afianzamiento del conocimiento ampliado del contenido, en este grupo de profesores en formación.

Los profesores en formación del octavo semestre (01-2015) en varios de sus procedimientos seleccionaran recursos matemáticos avanzados y estrategias adecuadas, pero cometieran errores procedimentales que les impidieron establecer conexiones entre los conceptos matemáticos estudiados y tomar decisiones adecuadas sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual. Conexiones que según Duval (2004) facilitan al profesor de matemáticas hacer un análisis onto-semiótico entre elementos de varias representaciones de un objeto matemático, fundamentales para su entendimiento, ya que según Villa-Ochoa (2015), si una persona no es capaz de hacer conversiones y/o tratamientos entre por lo menos dos representaciones del objeto estudiado, termina estudiando la representación que haya concebido en lugar del objeto que ésta representa.

El conocimiento ampliado del contenido de los profesores en formación del sexto semestre (01-2015) es bastante adecuado, mientras que un grupo considerable (34,61%) de los del octavo semestre (01-2015) presentaron serias dificultades al identificar y relacionar los elementos de las funciones involucradas, en una o varias de sus representaciones, lo que según Hitt (2003a) pudo impedirles establecer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones involucradas y adecuar mejor sus respuestas a lo solicitado en las situaciones, y además, pudo obstaculizar el desarrollo de su pensamiento variacional, indispensable para el acceso al cálculo, lo que a su vez puede desfavorecer el aprendizaje matemático de los estudiante que ellos orienten, por lo que sería recomendable que se establezcan planes de mejoras con estos profesores, que favorezcan un mejor desarrollo de esta dimensión.

En relación al conocimiento especializado de la dimensión matemática, en términos generales, las mayores dificultades de los profesores en formación, al analizar el cuestionario diagnóstico estuvieron relacionadas con la discriminación de los ítem y asociarlo con su tema correspondiente, con los procesos argumentativos al dar explicaciones de los procesos realizados para obtener sus respuestas, esto quizás como consecuencia del poco dominio del conocimiento ampliado del contenido. Ellos reconocieron que su mayor dificultad en la solución y análisis del cuestionario estuvo con el reconocimiento de la función en el contexto donde se les presentó; no tienen suficiente claridad en los conceptos y al momento de aplicarlos no encuentran los recursos apropiados para hacerlo. Sin embargo, los procesos de socialización y las discusiones en los grupos, permitieron hacer muchas aclaraciones y precisiones sobre muchos aspectos de las funciones y sobre todo de la identificación de sus elementos en contextos socioculturales y en cualquiera de las representaciones que se analizaron de este concepto.

Al preparar la clase se presentaron dificultades al hacer una transposición didáctica del concepto de función a un lugar donde los estudiantes lo pudieran comprender (Chevallard, 1991). Y a la hora de escoger los estándares básicos de competencias seleccionaron cualquiera que hiciera mención del tema en cuestión, independiente de si tenía o no una estrecha relación con los objetivos y los indicadores de logros que ellos mismos plantearon previamente. Los mismos estándares se constituyeron en un obstáculo, puesto que son demasiado generales. Por lo demás, los planes de clases estuvieron muy bien concebidos.

Para la ejecución de la clase ante estudiantes de la básica o de la media académica, utilizaron materiales y ayudas didácticas y representaciones semióticas adecuadas, pero sin sacarle el mayor provecho a sus potencialidades, realizando pocas congruencias entre elementos de las representaciones que ellos ya tenían producidas, sin establecer conexiones entre diferentes elementos de las funcioes que les permitiera un análisis a profundidad del tema. Sin embargo, estos profesores en formación, pudieron establecer conexiones entre la noción función y diversas nociones matemáticas involucradas en su definición, y con otras nociones matemáticas relacionadas muy estrechamente con funciones. Conexiones relacionadas con relaciones de dependencia del volumen y el área de una figura geométrica de sus dimensiones, lo que se relaciona directamente con funciones.

La generalidad de las dificultades presentadas por los profesores en formación en sus prácticas docentes iniciales fue con la distribución de los tiempos de la clase, es decir, en la ejecución de las clases que se prepararon y revisaron previamente, no manejaron adecuadamente los tiempos dados a los alumnos para resolver las actividades planteadas: o les dejaban demasiado tiempo para realizar una actividad o ellos prematuramente terminaban realizándola. Sin embargo la mayoría de los elementos de la función –dominio, rango, interceptos, punto máximo, crecimiento y decrecimiento y concavidad- fueron identificados y abordados adecuadamente.

En el análisis de las producciones de los estudiantes de la media académica se puede destacar que los profesores en formación tienen en cuenta los aciertos, los desaciertos, los totales y porcentajes, analizan los *procedimientos/estrategias* utilizadas por los estudiantes al resolver el cuestionario, describen las *dificultades/conflictos* y analizan posibles causas. Y en relación al desarrollo de una clase utilizando, para ello, el cuestionario que se les proporcionó, los profesores en formación (24, 26) propusieron algún tipo de estrategia para enseñar funciones utilizando esa situación, (24, 26) visionaron algún tipo de dificultades en los estudiantes en el trabajo con funciones como las propuestas en el cuestionario, y (24, 16) propusieron algún tipo de estrategia para minimizar las dificultades en el trabajo con funciones utilizando la situación propuesta en ese cuestionario.

En el proceso de evaluación, al reconstruir el cuestionario se siguieron por las respuestas dadas por los estudiantes de once grado, e identificaron adecuadamente los elementos de la función por los que se indagó. Las dificultades estuvieron relacionadas con cuestiones muy puntuales, como la redacción de las preguntas y cuestiones por las que se indagaron, con el manejo adecuado de software para realizar las gráficas.

A pesar de los esfuerzos de los estudiantes por establecer conexiones entre diferentes representaciones de las funciones estudiadas, la generalidad es que privilegien transformaciones tipo conversión hacia un solo registro, donde recodificaron la información, realizaron algunos tratamientos y procedieron a responder; siendo deseable que establecieran conexiones entre diferentes registros, ya que según Font (2011) estos ponen en a funcionar diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con otros. Con este tipo de actividades, además, se podría pensar en los procesos cognitivos que pudieran activarse haciendo conexiones entre representaciones, por lo que cabe pensar en la representación como una herramienta que posibilita prácticas que sin ella no serían posibles.

En el análisis gráfico todos los profesores en formación logran distinguir algunas propiedades geométricas de las funciones involucradas. Pero generalmente reconocen elementos separados, es decir, no logran integrar los elementos de un registro a otro o los de un mismo registro, que les permitan establecer argumentos sólidos para defender sus posiciones ante una idea que ellos mismos crean, aspecto este que "evidencia la debilidad en el conocimiento especializado del contenido" (Sgreccia y Massa, 2012, p.36), lo que puede deberse a la falta de oportunidades en el trabajo conceptual del objeto función y su desplazamiento por el habitual trabajo de lo algebraico. De lo anterior puede asegurarse que la forma como se han preparado estos profesores para facilitar que otras personas comprendan al ser orientados, evidencia ciertas debilidades formativas en el manejo de la función, muy especialmente en el diseño y ejecución de estrategias que permitan poner los contenidos del concepto en un lugar comprensible para los estudiantes del nivel básico (Chevallard, 1991), lo que puede ser perjudicial para la enculturación matemática de las comunidades donde estos profesores vayan a desempañarse.

Las características de los objetos matemáticos primarios y procesos presentes en las prácticas matemáticas que desarrollan los profesores en formación al responder las cuestiones que se les plantearon ante la posibilidad de implementar actividades utilizando ese cuestionario, se evidencian algunos contrastes inter grupos: mientras los profesores en formación del octavo semestre (01-2015) centran su atención en estrategias conductistas, proponen explicar desde el inicio el cuestionario, preguntar a los estudiantes qué saben sobre funciones; los del sexto semestre (01-2015) privilegian el trabajo en equipo, el análisis de las soluciones que los estudiantes den, buscando evidencias de su saber en dichas soluciones. En relación a los *argumentos* utilizados, la generalidad en ambos grupos son explicaciones claras de las proposiciones dadas por cada profesor en formación, pocas o nulas justificaciones por parte de los del octavo semestre (01-2015) y algunas justificaciones adecuadas por parte de los del sexto semestre (01-2015).

Teniendo en cuenta las exigencias del contexto se aprecia un desajuste entre lo pretendido por el programa y lo que exige el medio. Un ejemplo de ello es la ausencia en el programa de una signatura como Geometría analítica, necesaria para orientar este tema en décimo grado; donde en el currículo de las instituciones educativa se dedica gran parte, y en algunos casos, la totalidad del segundo semestre académico al desarrollo de la geometría analítica. Ésta es indispensable ya que contiene temas como rectas y cónicas, los cuales son indispensables para el desarrollo del cálculo en cursos posteriores.

Otro aspecto donde se presenta incoherencia entre lo pretendido por el programa de Licenciatura en matemáticas y los requerimientos del medio y de los currículos de las instituciones educativa, como posibles escenarios de desempeño profesional de estos profesores, es en la inexistencia de asignaturas de física en el programa; ya que es tradición que tanto física I como física II las orienten licenciados en matemáticas, y para preparar docentes capacitados para ofrecer estos cursos se requiere que vean estos cursos de física con sus respectivos laboratorios a profundidad, en la carrera que los prepara para docentes.

Entre los conflictos epistémicos en relación con la identificación y uso de las funciones se destaca el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su uso consciente a nivel social, es decir, el concepto se usa inconscientemente en contextos sociales, pero no es reconocido por los estudiantes en contextos académicos. Esto se manifestó en la no aceptación, por algunos estudiantes, de las representaciones involucradas en la situación como algo relacionado con las matemáticas: la tendencia fue a reconocer solo la representación algebraica como representación de una función, desconociendo representaciones como la gráfica, la analítico numérica o la tabular, reforzando lo reportado por Guzmán (1998) en cuanto a que las respuestas los estudiantes que manifestaron este tipo de conflicto están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más de ellos, lo que evidencia que les cuesta hacer conversiones, derivando sus respuestas de alguna transformación tipo tratamiento, y en las pocas ocasiones en que las realizan, acuden al registro algebraico como primer registro auxiliar. Otros conflictos epistémicos presentados fueron el uso indistinto de la letra como magnitud o como variable generalizada, la escogencia/mención de una sola coordenada al mencionar un punto. Esto a pesar de que las actividades propuestas fueron pensadas teniendo en cuenta este tipo de conflicto reportado en algunos de los antecedentes revisados (Font, 2011; Godino, 2002; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Guzmán, 1998). Estos conflictos pudieron causar en los profesores en formación dificultad con algunas tareas del cuestionario. Dificultades que estuvieron relacionadas con la conversión del registro gráfico como registro principal, al fenomenológico como primer registro auxiliar y de ahí hacia los otros registros que cada uno utilizó como registro auxiliar, y luego establecer congruencias entre los elementos de las funciones en cada representación. Es decir, a los profesores en formación, de ambos grupos (más a los del octavo 01-2015), les costó aceptar que una gráfica pudiera representar los Costos, los Ingresos o la Ganancias, que estas gráficas representaran funciones, y en aquellos que las aceptaron, sobrevino una nueva dificultad, saber a qué elementos de las otras representaciones de las funciones correspondía cada uno de los elementos de las gráficas, cómo se relacionan estos elementos y a qué corresponden en la situación, esto es, el establecimiento de congruencias entre cualquiera de las representaciones con la representación fenomenológica, o determinar qué significa cada elemento en cada una de las representaciones de cada función. Un ejemplo de lo anterior fue que no utilizaban las representaciones gráficas de las funciones para analizar su crecimiento o decrecimiento, teniendo que resolver polinomios aritméticos sucesivamente, hasta obtener una respuesta.

En relación con la forma como se relacionan las variables, las dificultades se relacionaron con la identificación de las cuatro variables en el registro gráfico y establecer relaciones entre éstas. Algunos se quejaron de su poco conocimiento de administración y economía: de Costos e Ingresos y de cómo se obtiene una Ganancias, de qué relación hay desde el punto de vista económico entre las cuatro variables involucradas en las situaciones, y que por esto no pudieron dar respuestas acertadas a gran parte del cuestionario.

La carencia en el conocimiento específico del contenido de las funciones son evidentes y manifiestas cuando los formadores en formación (Sgreccia, Amaya y Massa, 2012) deben reconocer sus elementos en una situación funcional y hacer las transformaciones requeridas en la planeación de las clases, en las explicaciones durante la clase o en el análisis de las producciones de los estudiantes luego de la clase. Aspectos estos requeridos para hacer una transposición didáctica adecuada de este concepto y con ello facilitar su comprensión por parte de los estudiantes y para orientar idóneamente una clase.

5.2 CUESTIONES ABIERTAS

En este apartado se presentan algunas cuestiones que se consideran interesantes en aras de continuar en la línea de este trabajo, ya que hay que ser consciente de que, a pesar los valiosos hallazgos obtenidos en este trabajo y en otros anteriores sobre el CDM, en esta línea de investigación hay mucho por hacer, por lo que el trabajo apenas comienza. Sería importante abordar, en trabajos posteriores, algunas de las múltiples cuestiones abiertas que conlleven a nuevas investigaciones que aporten nuevas formas de potencializar los conocimientos didácticos-matemáticos iniciales de los profesores de matemáticas. A continuación se presentan algunas cuestiones que se han considerado como posibles objeto de estudio en esta línea de investigación, y que podrían significar un aporte significativo en el avance hacia el desarrollo del CDM de los futuros profesores sobre las funciones o en cualquier tema que facilite potencializar lo mejor del CDM.

Sobre la formación recibida por los profesores en formación: en este trabajo se han evidenciado serias dificultades relacionadas con el conocimiento ampliado del contenido y con el conocimiento especializado del contenido que poseen los profesores en formación, por lo que sería pertinente indagar las causas de dichas dificultades, ya que ambos dominios están íntimamente relacionados con la posibilidad del profesor de utilizar diferentes recursos o realizar transposiciones didácticas, indispensables para la orientación de cualquier aprendizaje matemático que se pretenda. ¿Se deberán a la falta de oportunidades en el trabajo instructivo cuando se orientan funciones y su desplazamiento por el habitual trabajo de lo algebraico? Para averiguarlo sería conveniente realizar un trabajo que implique la observación y el análisis del proceso instructivo realizado por los formadores de estos formadores en formación.

Sobre la formación inicial de los profesores en formación: debido a las serias dificultades encontradas especialmente en los estudiantes del octavo semestre (01-2015) en el conocimiento ampliado del contenido y en el especializado, sería pertinente implementar algún tipo de estrategias para ayudarlos a minimizar dichas dificultades. Para lograrlo sería conveniente implementar algunos ciclos formativos con actividades escogidas o diseñadas especialmente para favorecer el desarrollo de competencias en estos dominios del conocimiento del profesor.

Sobre los conflictos epistémicos: en este trabajo se encontraron algunos conflictos epistémicos relacionados con la identificación y uso inconsciente de las funciones a nivel social y su no reconocimiento y uso en contextos académicos, el uso indistinto de la letra como magnitud o como variable generalizada, la escogencia/mención de una sola coordenada al mencionar un punto y el desconocimiento de representaciones como la tabular, la analítico numérica o la gráfica, como representaciones de una función. Estos conflictos son algunos de los causales de errores en la solución de tareas matemáticas como las que se les presentó a estos profesores en formación, por los que sería conveniente implementar algún tipo de estrategias que los ayuden a vencerlas o minimizarlas.

Sobre la producción, el uso y el establecimiento de conexiones entre representaciones de una función: uno de los conflictos epistémicos encontrados en este trabajo fue el desconocimiento de representaciones como la tabular, la analítico numérica o la gráfica como representaciones de una función. Reconociendo como representación de una función sólo la representación algebraica, lo que permite inferir que los estudiantes que presentaron este tipo de conflicto no pudieron establecer conexiones entre las diferentes representaciones de las funciones involucradas y que van a tener dificultades en la orientación de actividades que involucren funciones, lo que afectaría directamente la enculturación de los miembros de las comunidades donde vayan a desempeñarse estos profesores. Por lo que sería conveniente implementar algunos ciclos formativos con actividades que favorezcan la producción de representaciones de funciones, el establecimiento de congruencias e incongruencias entre los elementos ostensibles en cada representación (Del Castillo, 2003), que faciliten las conexiones entre dichas representaciones y con ello, el estudio de la función como objeto representado, en lugar del estudio de su representación algebraica o de alguna otra que se conciba sin la posibilidad de transformarla en otra representación.

5.3 PROPUESTA DE MEJORA

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en este trabajo habría que pensar la forma de realizar un acompañamiento a los egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas, buscando favorecer su desempeño como formadores de las futuras generaciones, donde se les ofrezcan situaciones que los lleven a comprender mejor lo que hacen (Godino, Rivas y Arteaga,2012), cómo funcionan los algoritmos que enseñan, si esa es la única manera en que pueden funcionar o qué otras alternativa pueden haber para hacerlo. Profundizar en el desarrollo de los componentes tanto disciplinar como didáctico hasta lograr la mejor y mayor integración posible de estos componentes, que de acuerdo a los resultados de esta investigación, están aislados.

Además, habría que convencer a los diferentes actores del programa de que las competencias docentes no se adquieren de forma definitiva, pues siempre hay algo por aprender (Watson y Mason, 2007) es decir, que dentro de los componentes formativos se debe incorporar el aprender a aprender, el utilizar su propia práctica como una alternativa de mejoramiento de la profesión (Pérez, 2005). Que no es fácil formar profesores de matemáticas idóneos, pero uno de los desafíos en su formación es el desarrollo del conocimiento especializado del contenido cuya construcción en la etapa de formación inicial podría potenciarse (Ball, 2009), si se trabaja consciente de la dificultad en hacerlo y si el formador de los formadores en formación tiene la competencia para hacerlo.

Teniendo en cuenta lo anterior, sería necesario ayudar a los profesores en formación a identificar y producir diversas representaciones de los objetos estudiados y establecer conexiones entre elementos de estas representaciones. Esto los ayudará a analizar conceptos matemáticos como un todo. Esto implica llevarlos a utilizar diferentes representaciones del objeto estudiado, establecer congruencias e incongruencias entre sus elementos, utilizar diversas estrategias de solución y recursos que faciliten su representación y a que vinculen objetos estudiados con otros objetos matemáticos, y con elementos del contexto sociocultural, que faciliten asignar significado y sentido a los conceptos en estudio. Pero además, a poder explicar lo que hacen y dar razones del por qué lo hacen. Considero que para lograrlo, la universidad podría articular su programa al desarrollo curricular de las instituciones de educación básica y media, donde estos profesores irían a desempeñarse, que las asignaturas de didáctica de las matemáticas sean teórico-prácticas: que sean el escenario donde los profesores en formación vean y comiencen a desarrollar sus primeras clases, con orientación y acompañamiento de los profesores que orientan estas asignaturas.

También es importante que se promuevan y desarrollen investigaciones al interior del programa o desde el programa en donde se involucren estudiantes, donde los desarrollos del conocimiento del profesor sean observados privilegiadamente y a cámara lenta (Shulman, 2005), donde el tropezón del principiante se convierta en insumo para los productos del investigador, y que los profesores en formación vivencien estos procesos, acompañando a los investigadores a investigar, donde se pueda indagar sobre aquello que los futuros profesores saben o ignoran de forma tal que les permita enseñar de una o de otra manera un determinado tema.

Sin embargo hay algunas limitaciones en el caso de los profesores que terminan el programa, salen a trabajar y quedan por fuera de cualquier posibilidad de compartir resultados de un estudio de esta naturaleza, o de personas que orientan algunos procesos en el programa sin conocer las necesidades formativas de un profesor de matemáticas y se niegan a cualificarse. Por lo que habría que seguir indagando sobre las necesidades formativas de los profesores y tratar de llevar soluciones, ya que según Ball (2010) en este campo de investigación hay muchas cosas por hacer, sobre todo relacionado con las formas de articular los saberes.

5.4 PRINCIPALES APORTACIONES A LA COMUNIDAD DE EDUCADORES MATEMÁTICOS

Entre los aportaciones más significativos de este trabajo a la comunidad de educadores matemáticos se pueden destacar: el tipo de situaciones utilizadas para recoger la información, el análisis de las dificultades de estudiantes de bachillerato y de los profesores en formación al resolver dichas situaciones, los conflictos epistémicos que lograron aislarse y muy especialmente la forma de recoger la información. La forma de recoger la información es un protocolo que hasta donde tengo conocimiento se implementa por primera vez, el cual consiste en analizar: la fundamentación del tema previo a la preparación de la clase, la estructura de un cuestionario y luego su proceso de construcción, la elaboración de planes de clase, la ejecución de la clase ante estudiantes del bachillerato, el análisis de las respuestas dadas por estos estudiantes a un cuestionario.

Entre las aportaciones en relación con el marco teórico hay dos aspectos significativos: 1) la descripción de las potencialidades del CDM a partir de la integralidad de sus diferentes componentes, presentado en la sección 2.2.2.5 y 2) la descripción de la importancia de la dimensión Meta Didáctico-Matemática en la formación matemática de personas de bien, si la intención es que la formación matemática contribuya a la formación de mejores seres humanos y capaces de vivir en comunidad, integrados a la sociedad, este aporte se evidencia en las secciones 1.1.3.11 y 2.2.2.5.

Entre las aportaciones que se han realizado al campo de investigación de Educación Matemática, sobre las dificultades que presentan los estudiantes de la media académica y los profesores en formación en el trabajo con funciones y cuyos resultados se han obtenidos a lo largo del proceso de formación doctoral, y en el desarrollo de esta tesis doctoral están:

Amaya, T. & Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Revista Educación Matemática*, 25(2), 119-140.

Amaya, T. & Sgreccia, N. (2014). Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función. *Revista Epsilon*, 31(3), 21-38.

Amaya, T. (2015). Evaluación sobre conocimientos didácticos e investigativos de futuros profesores de matemáticas de la Universidad de Sucre. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *28*, 1452-1458. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Amaya, T. (2015). Dificultades de los estudiantes al hacer transformaciones de representaciones de una función. Memorias del XVI Encuentro colombiano de matemática Educativa. (En prensa).

Amaya, T. & Barboza, J. (2016). Análisis de la dimensión matemática del conocimiento matemático para enseñar de profesores en formación. En R. Flores (Ed), *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa núm. *29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. (En prensa).

Amaya, T., Pino-Fan, L. & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática (en revisión).*

Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H. & Amaya, T. (2015). Errores y dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado al factorizar polinomios. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *28*, 677-683. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Baltazar, A., Rivera, J., Martínez, R., Cárdenas, H. & Amaya, T. (2016). Errores y dificultades en alumnos de octavo grado al factorizar polinomios teniendo en cuenta el contexto sociocultural. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. (en prensa).

Escobar, D., Fuentes, L., Arcia, & Amaya, T. (2016). ¿Cuáles son las causas de las dificultades que presentan los estudiantes al resolver situaciones problemas que involucran fracciones?. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. (en prensa).

Fernández, M., Moreno, E., Ortega, K., Tous, & Amaya, T. (2016). Estrategias didácticas: dificultad o fortaleza en el aprendizaje de los estudiantes en el trabajo con fracciones algebraicas. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *29*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. (en prensa).

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Acosta, I. (2009). *La comprensión lectora, enfoques y estrategias utilizadas durante el proceso de aprendizaje sobre el idioma español como segunda lengua*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Alarcón, G. Albarrán, D. Dolores, C. (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria*. Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 5. IPN, Cinvestav. México. p, 248.

Albert, A. (1997). *Introducción a la epistemología*. En Serie Antologías (pp. 1-28). México: Área de Educación Superior Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados de IPN.

Amaya, T. & Gulfo, J. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. En P. Leston (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *22*, 895-901. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Amaya, T. & Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Revista Educación Matemática*, *25(2), 119-140*.

Amaya, T. & Sgreccia, N. (2014). Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función. *Revista Epsilon*, 31(3), 21-38.

Apóstol, T. (1985). *Calculus*. (Tomo I). Barcelona: Reverté.

Arce, J. Torres, L. Ramírez, M. Valoyes, L. Malagón, M. & arboleda, L. (2005). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación*. Cali: Universidad del Valla; Colciencias.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51, 241-247*.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge*. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed., pp. 433-456)*. Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*, 14-22.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). "Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?". *Journal of Teacher Education,* 59(5), 389-407.

Ball, D. (2009). Developing Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching. Recuperado el 22 de diciembre de 2014 de, http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/102108_UNC.pdf

Ball, D. (2010). "Learning to do mathematics as a teacher". Recuperado el 22 de diciembre de 2014 de, http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/042110_NCSM.pdf

Barallobres, G. (2013). La noción de cientificidad en la teoría de situaciones didácticas. *Revista Educación Matemáticas, 25(3), 9-25*.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Revista Educación Matemática, 22(1), 5-29*.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Traducido por Fregona, D. Buenos Aires: Libros del Zarzal.

Cabrera, M. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de cálculo. un estudio de caso*. Tesis doctoral. México: Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. & Farfán, R. Lezama, J. & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, núm. Esp, pp. 83-102.

Cantoral, R. & farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Educación y Pedagogía, 15(35), 201-214*.

Cárdenas, J. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria*. Tesis doctoral. Badajaz: Universidad de Extremadura.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *N° 11, pp. 19-57*.

Castaño, J. (2008). Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas. *Universitas Psicologica*, *5(3), 895-907*.

Chaucanés, A. Amaya, T. Escorcia, J. López, A. Medrano, A & Terán, E. (2009). Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento variacional, en P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, núm. 22, pp. 739-746.

Chevallard, Y. (1991). *La transpositión didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Buenos Aires: Aique.

Cid, E. y Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/ Comunicaciones_TAD_II/11%20-%20Cid&Bolea%20TAD%202.pdf.

Colás, M.P. y Buendía, E.L. (2004). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar

Contreras, A. & Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Educación Matemática, 9(1), 65-84*.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, *1 (1), 56-74*.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculouna espistemología a través de la actividad humana. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *4(2), 103-128*.

Creswell, J. (2009). *Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática,* 9(1), 177-195.

De Berg, K. & Greive, C. (1999). Understanding the siphon: An example of the development of pedagogical content knowledge using textbooks and the writings of early scientists. *Australian Science Teachers' Journal*, *45(4), 19-26*.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de septiembre de 2015, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

De Souza, S. (2009). Un análisis de los errores de los alumnos en clases virtuales de geometría descriptiva bajo las teorías del desarrollo del pensamiento geométrico y del concepto figural. *Revista Iberoamericana de Educación*, *(51), 1-13*.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato, México: *Revista Latinoamericana de investigación en matemática Educativa, 7(3), 195-218*.

Domenicantonio, R. Costa, V. & Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (27), 75-87*.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2), 5-31*.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Engler, A., & Camacho, A. (2012). Una mirada a investigaciones sobre la derivada desde la perspectiva del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Premisa, 14(54), 18-36*.

Estrada, J. (2005). Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo. Recuperado el 23 de abril de 2015, de http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf.

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Barcelona España: Editorial Gedisa S.A.

Font, V. Acevedo, J. Castells, M. & Bolite, J. (2008). Metáforas y ontosemiótica. El caso de la representación gráfica de funciones en el discurso escolar. Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz; B. Gómez; & M. Torralbo (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de

Educación Matemática SEIEM. (pp.111 – 128). Córdoba. Recuperado el 21 de octubre de, http://funes.uniandes.edu.co/1303/1/Font2005Una_SEIEM_111.pdf

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didàctica de las Matemáticas, 56, 86-94*.

Franco, G. & Ochoviet, C. (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 19 (pp.509-513). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM & IAP. Para la enseñanza

Gallardo, J. González, J. & Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25(2), 61-88*.

García, B. Loredo, J. & Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, número especial.* Consultado el 17 de diciembre de 2015, en: http://redie.uabc.mx/NumEsp1/contenido-garcialoredocarranza.html

Gavilán, P. & Alario, R. (2012). Efectos del aprendizaje cooperativo en el uso de estrategias de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación, 60(2), 1-13*.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), pp. 325-355*.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques 22(2/3), 237-284*.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática, (20), 13-31*.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* **(**CIAEM-IACME), Recife (Brasil).

Godino, J. (2013a). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8 (11), 111-132*.

Godino, J. (2013b). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. Recuperado el 20 de julio de 2014, de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_2013_Dise%F1o_tareas.pdf

Godino, J. (2013c). Actividades de iniciación a la investigación en educación matemática. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 63, 69-76*.

Godino, J. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska, y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177- 195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39 (1-2): 127-135*.

Godino, J. Bencomo, C. Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27(2), 221-252*.

Godino, J. Wilhelmi, M. & Bencomo, C. (2005). Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de Función. Implicaciones para la Formación de Profesores. En J. Lesama (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* núm. *18*, 348-355. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013) Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat, 8, (1)*, *46-74*.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. Nueva York: Teachers College Press.

Grossman, P., Wilson, S. & Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2), 1-25.*

Gudmundsdóttir, S. & Shulman, L. (2005). Conocimiento didáctico en ciencias sociales. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2),1-12*.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 1(1), 5-21.*

Herbst, P. (2011). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (1), 5–22*.

Hernández, F. & Soriano, E. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria, una experiencia didáctica*. Murcia: Universidad de Murcia.

Hernández, V. (1996). Algunas conjeturas sobre la noción de problema, lingüística y educación matemática y las perspectivas del uso de tecnología. Recuperado el 2 de febrero de 2016, del sitio web. http://fractus.uson.mx/Papers/Varios/Cap1.html

Hill, H. Ball, D. & Schilling, S. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*(1), *11-30*.

Hill, H. Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, *372-400*.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10(2), 213-223*.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Hitt, F. & Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electrónic Journal of research in educational psychology,* 7(17), *243-260*.

Kleiner, (1989): "Evolution of the function Concept: A Brief Survey". *The college Mathematics Journal, Published by: Mathematical Association of America September 1989, 20(44), 282-300*.

Konic, P. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Leinhardt, G., Stein, M. K., & Zaslavky, O. (1990). Function, Graphs, and graphing. task, Learning and Teaching. *Review of Educational Research,* 0(1), *1-64*.

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome & N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Marroquín, C. (2009). *Construcción del concepto ecuaciones lineales con dos variables mediante visualización y registros de representación en alumnos de primer semestre de ingeniería agroindustrial*: secuencia de una situación didáctica. Tegusigalpa: Universidad tecnológica Nacional Francisco Morán.

Medrano, C. (1995). La interaccion entre compañeros: el conflicto sociocognitivo, el aprendizaje cooperativo y la tutoría entre iguales. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, (23), 177-186*.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), *221-271*.

Mendoza, J. (2015). Otra mirada: la construcción social del conocimiento. *Polis. Investigación y Análisis Sociopolítico y Psicosocial, 11(1), 83-118*.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. & Waldegg, G. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Múnera, J. (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista Educación y Pedagogía, 23(59), 179-193*.

Nájera, V. (2008). ¿Las gráficas una representación natural? Recuperado el 19 de mayo de 2016 del sitio web: http://www.valois.com.mx/archivos/Valois_Najera_Graficas_Y_Representaciones_2008.pdf

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23(3), 91-121*.

Oviedo, L. Kanashiro, A. Bnzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria (13), 29-36*.

Parra, Y., & Pino-Fan, L. (2016). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. *Artículo en revisión.*

Parcerisa, A. (2004). *Didáctica en la educación social. Enseñar y aprender fuera de la escuela*. Barcelona: Editorial Graó.

Peirce, Ch. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Pérez, A. (2005). *Comprender y enseñar a comprender. Reflexiones en torno al pensamiento de J. Elliott*. En Elliott, J. (2005). La investigación-acción en educación. Madrid: Ediciones Morata.

Peronard, M. (1997). *¿Qué significa comprender un texto escrito?*. Santiago de Chile: Editorial Andrés Bello.

Pino-Fan, L., & Assis, A. (2015). Hacia una metodología para el análisis y caracterización del conocimiento didáctico-matemático de los profesores: El caso de una actividad sobre patrones. Documento aceptado para ser presentado en la XIV CIAEM- IACME, Chiapas, México.

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L. Godino, J. & Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada*. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores e Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México. 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. *Educación Matemática Pesquisa Sao paulo, 3(1), 141-178.*

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *Revemat, 8(2)*, 1– 49.

Pino-Fan, L. & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico – matemático del profesor. *Paradigma, 36(1), 87– 109*.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, & Duval, R. (2016). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the function f(x) =|x|. An approach from two theoretical perspectives. *PNA*. (Article under review).

Ramos, A. Font, V. (2004). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.) *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 119-134). Barcelona: EDEBÉ.

Rodríguez, D. (2003). La teoría de los signos de charles sanders peirce: semiótica filosófica. Tesis de licenciatura. Universidad Católica Argentina.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de Problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp), Educación Matemática. *Aportes a la Formación Docente desde distintos Enfoques Teóricos* (pp. 153-174). Buenos Aires: Eduvim-Ediciones UNGS.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Tesis doctoral. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Romero, J., Rojas, P. & Bonilla, M. (2010). Modificación de un conflicto semiótico en un ambiente de trabajo colaborativo. *Paradigma*, 31(1), 161-182.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires.

Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), *61-74*.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), *267-296*.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155. doi: 1815-0640.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Sgreccia, N. Amaya, T. & Massa, M. (2012). ¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d?. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* Vol. 22, 1-20.

Sgreccia, N. Massa, M. (2012). 'Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 24(3), *33-66*.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. Hong Kong: Graphicraft typesetters.

Silva, S. (2007). La Salud y la Independencia Personal. Barcelona: Editorial Barcelona.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57(1), 1-22*.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículo y formación del profesorado, 9(2), 1-30*.

Strauss, A. & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Stylianides, A. & Ball, D. (2004). *Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof.* Paper prepared for the 2004 Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-Graficación. Una categoría en Cálculo para resignificar la variación en una situación de modelación del movimiento. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13(4), 319-333*.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland, y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). London and New York: Springer.

Unesco. (2008). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la Unesco*. Recuperado el 7 de Abril de 2016, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.

Ursini, S. & M. Trigueros (2006), "¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?", *Educación Matemática*, *18(3), 5-38*.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *8(16), 133-148*.

Vygotsky, L. (1995). Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. *Perspectivas: Revista trimestral de educación comparada*, *24(3-4),773-799*.

Watson, A, & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education, (10), 205-215.