CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR UNIVERSITARIO PARA LA ENSEÑANZA DEL OBJETO GRUPO

Omaida Sepúlveda Delgado

Doctorado en Ciencias de la Educación
Red de universidades estatales de Colombia - RUDECOLOMBIA
Cade - Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Tunja 2016

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR UNIVERSITARIO PARA LA ENSEÑANZA DEL OBJETO GRUPO

Omaida Sepúlveda Delgado

Trabajo para optar al título de
Doctor en Educación

Director
Jorge Tomás Uribe

Doctorado en Ciencias de la Educación
Red de universidades estatales de Colombia - RUDECOLOMBIA
Cade - Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Tunja 2016

Nota de aceptación

Jurado
Aurora del Río Cabeza

Jurado
Pedro Javier Rojas Garzón

Jurado
Willian Alfonso Pacheco Serrano

Director
Jorge Tomás Uribe

Dedicado a:

Daniel Camilo, Johan Sebastián, Zagalo;
a mis padres, hermanos, sobrinos y a todas
las personas que forman parte de mi familia.

Como el camino está sembrado de espinas,
Dios ha dado al hombre tres dones:
la sonrisa, el sueño y la esperanza.
Immanuel Kant (1724 - 1804)

Agradecimientos

Doy gracias:

A Dios, por darme la fuerza y voluntad para llegar al logro de esta gran meta y a todas las personas que me ayudaron a consolidar este gran proyecto.

Al doctor Eliécer Aldana, que con su ejemplo, dedicación y conocimiento, se convirtió en un maestro de sabios consejos.

Al doctor Viçent Font Moll, que con sus conocimientos supo en el momento oportuno, indicarme el camino para el desarrollo del trabajo de investigación.

A la doctora Aurora del Rio Cabeza por su colaboración, sugerencias y especialmente, por la dirección en los temas de Álgebra Abstracta y su didáctica. De igual forma, a los doctores del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que me ofrecieron su colaboración y me permitieron compartir sus trabajos.

Al doctor Luis Rico y a la doctora Encarnación Castro, que a través de sus cursos y textos hicieron posible el llegar a comprender algunos de los temas que hacen parte de esta tesis doctoral.

Al doctor Jorge Tomás Uribe, por su dedicación y paciencia; por su comprensión y apoyo incondicional.

Doy gracias al doctor Willian Alfonso Pacheco Serrano, por su gran colaboración; por sus extraordinarias ideas y por su paciencia.

Al doctor Pedro Javier Rojas Garzón, por su colaboración, dedicación, conocimientos y aportes, en la organización del trabajo final.

Al doctor Alfonso Jiménez, por sus consejos, ayuda y dirección y a todos los profesores del Doctorado en Educación por sus grandes conocimientos y su apoyo: Celina Trimiño, Aracely Forero, Martha Pardo, Carlos Londoño, Nubia Agudelo, Wilson Valenzuela, Diana Elvira Soto, Luisa Amezquita; Janeth Vargas.

A mis colegas de la Escuela de Matemáticas y Estadística y a mis compañeros del doctorado que me ofrecieron su ayuda, amistad y apoyo en todo momento.

A los docentes de Álgebra: Nelsy R. González, Misael González, Verónica Cifuentes, Wilmer M. Gómez, Cesar Espinosa, Julián Serna, Héctor Suárez, Pedro Nel Maluendas, de igual forma, al doctor Ismael Gutiérrez, por su colaboración, paciencia y aportes en la revisión de documentos importantes para el desarrollo de la investigación.

A los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos,) les doy las gracias por permitirme compartir sus experiencias para llegar a la consolidación de estos conocimientos.

A Zagalo Enrique, Daniel Camilo y Johan Sebastián, gracias por su apoyo y cariño en todo momento.

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Título: Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo

Un problema de investigación en Didáctica de la Matemática en el campo de Formación de Profesores, corresponde a la identificación de las componentes del conocimiento del profesor, necesario para una enseñanza efectiva (idónea) de tópicos específicos de la Matemática en el ámbito universitario. Se han realizado investigaciones en torno a la identificación del complejo de conocimientos que el profesor necesita para que su práctica sea efectiva y así, se facilite el aprendizaje de sus estudiantes (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball & Schilling, 2008; Godino, 2009) pero, pocos estudios se han orientado a la caracterización del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) [1] de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) respecto al objeto matemático Grupo para la labor de la docencia universitaria.

En este sentido, este estudio pretende ser un aporte en el campo de formación inicial de profesores de matemáticas, al buscar una respuesta a la pregunta ¿qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática para una enseñanza idónea del objeto Grupo? La pregunta se relaciona con la caracterización del Conocimiento Didáctico y Matemático, que debe tener el profesor universitario sobre el contenido matemático como objeto institucional, cuya enseñanza se planifica, implementa y evalúa (Pino-Fan, Godino & Font, 2013). Para dar respuesta a la pregunta; en primer lugar, se reconstruyen los significados del objeto Grupo a través de su evolución histórica; de estos significados emerge precisamente el significado global [2] del objeto matemático. A partir de este estudio, se pasa a analizar los significados del objeto de investigación pretendidos por los libros de

[1] Modelo del Conocimiento del Profesor, desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2009).

[2] Significado Global o significado holístico de referencia que da cuenta de la complejidad del objeto de investigación. En el EOS, se entiende el significado de un objeto matemático desde una perspectiva pragmática es decir, en términos de los sistemas de prácticas en los que dicho objeto interviene.

texto: cuatro libros de los cursos clásicos de Teoría de Grupos y los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática. Finalmente, como otra de las fases de la investigación que hace uso de las anteriores, se diseña e implementa el instrumento que permite evaluar el conocimiento CDM de los estudiantes de formación matemática, sobre el objeto de investigación en la componente epistémica de este CDM (Godino, 2009).

La metodología del estudio es de tipo mixta; ya que, contempla tanto la parte cualitativa como la cuantitativa. La caracterización del significado Global del objeto Grupo, se desarrolló a partir de un estudio semiótico y documental de tipo histórico, epistemológico y fenomenológico, indagando en libros de Historia de la Matemática, biografías de autores e investigaciones realizadas en Didáctica del Álgebra. El análisis de los libros de texto se realizó también aplicando la técnica del análisis semiótico desarrollada en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y finalmente, para el diseño e implementación del instrumento que permitió evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo, se utilizó la metodología para el diseño de instrumentos orientados a explorar aspectos del CDM - Modelo CDM - desarrollado en el marco del EOS (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Vázquez, 2014).

En esta dirección, se presenta el desarrollo del estudio dirigido a caracterizar el Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática de una Universidad Colombiana, formadora de profesores de Matemáticas (UFPM), mediante el diseño e implementación de un instrumento para evaluar la componente epistémica del CDM de los estudiantes para la labor de la enseñanza universitaria.

Palabras claves: Formación inicial de Profesores universitarios, Conocimiento Didáctico-matemático del Profesor, Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática (EOS), objeto matemático Grupo.

Abstract

TITLE: DIDATIC-MATHEMATICAL UNIVERSITY TEACHERS' KNOWLEDGE FOR THE TEACHING OF THE OBJECT GROUP

Topic: University teachers' knowledge

One of the researches problems in mathematics' Didactic taking into account the teachers' training is about the identification of knowledge components from teachers, which are necessaries for obtaining an effective teaching (suitable) about specifics issues in mathematics in the university. There are some researches about the identification of knowledge which the teacher needs for obtaining an effective practice and in the same way, the students' learning will be easy for them (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball & Schilling, 2008; Godino, 2009) but, Few researches have been aiming at the characterization of Didactic- Mathematical knowledge (CDM) [1] of the mathematical students (Mathematical graduates and mathematicians) taking into account the mathematical object "Group" for practicing the university teaching.

In this way, this research tries to be a contribution in the initial training field of mathematics teachers, when they look for one answer to the question: ¿what basic mathematical knowledge do the mathematical training's students need for obtaining a suitable teaching about the object "Group"? This question is related to the characterization of Didactic- Mathematical knowledge, which the university teacher has to have about mathematical content like institutional object whose teaching is planned, implemented and evaluated (Pino-Fan, Godino & Font, 2013). For answering the question, are followed some steps: first, there are reconstructed meanings from the object "Group" through its historical evolution; justly, from those meanings appear a global meaning [2] of the mathematical object. Starting from this research, the meanings of the research's object found in the textbooks were analyzed: four books from the classic courses about groups' theory and syllabuses for mathematical training's students. Finally, there was one phase which used the other previous phases; there was designed and implemented an instrument which allows evaluating the knowledge CDM of mathematical training's students about the research object in the epistemic component from this CDM (Godino, 2009).

[1] Model of the knowledge of the teacher, developed in the Ontosemiotic approach of knowledge and the mathematical instruction (Godino, 2009).

[2] Meaning or Global holistic reference which gives an account of the complexity of the subject of investigation. In the EOS, understood the meaning of a mathematical object from a pragmatic perspective, in terms of the systems of practices in which said object involved.

The methodology in this research is mixed because it contemplates the qualitative part and the quantitative part too. The characterization of the global meaning of the object “group” was developed starting from a semiotic study and a historical, epistemological and phenomenological documentary; it was done, inquiring into books about mathematics history, biographies about authors and researches done in algebra’s Didactic. The analysis of textbooks was done applying the semiotic analysis technique developed in the ontosemiotic approach of knowledge and mathematical instruction (EOS) and finally, for the design and implementation of the instrument which allowed to evaluate the CDM of the mathematical training’s students about the object “Group”; there was used the methodology for the design of instruments which are aiming at exploring CDM aspects - CDM model - developed in the framework of the EOS (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Vázquez, 2014).

In this way, the development of the study is proposed; which is aimed at characterizing the Didactic Mathematical knowledge (CDM) of the mathematical training’s students from a Colombian University, Math a teacher educator (UFPM), by means of the design and implementation of one instrument which allows to evaluate the epistemic component of this CDM of the mathematical training’s students for teaching in the university.

Keywords: initial training of university teachers, Didactic Mathematical knowledge of the teacher, ontosemiotic approach of knowledge and mathematical instruction (EOS), mathematical object “group”.

Introducción general

Este estudio se realizó desde una corriente de investigación didáctica en *Formación de Educadores* y a través del marco conceptual del *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática - EOS*, que permitieron dar una respuesta parcial a la pregunta ¿cómo es que los estudiantes de formación matemática, construyen los significados matemáticos, los transforman y los representan para la enseñanza universitaria de tópicos de Teoría de Grupos? En esta dirección, la investigación se enfocó en la caracterización de unos conocimientos básicos, que necesitan los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas, Matemáticos), para la labor de la docencia universitaria en tópicos de Teoría de Grupos; específicamente del objeto Grupo. Para esto, se partió del hecho concreto que los estudiantes de formación matemática tienen un conocimiento de la materia o del contenido sobre el objeto matemático, que hace posible la realización del análisis sobre la potenciación o desarrollo de los conocimientos matemáticos y didácticos necesarios para la enseñanza universitaria del objeto Grupo (ver, capítulo 7).

La presente investigación, se inscribe en la línea del Doctorado en Educación: *Historia y prospectiva de la Educación superior y Formación de Educadores en Iberoamérica*. En esta dirección, para el presente estudio se realizó la primera fase de investigación centrada en el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo: objeto que se ubica en el estudio del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado de los estudiantes. En la misma dirección, se desarrolla la segunda fase de investigación relacionada con el estudio de los conocimientos matemáticos y didácticos de los estudiantes de Formación Matemática para la labor de la enseñanza universitaria como futuros profesionales; en este caso, se puede establecer que el análisis de dichos conocimientos se puede ubicar en el campo de la Formación de Educadores, en una Universidad Colombiana formadora de educadores (Jiménez, Leguizamón & Díaz, 2011; Uribe, 2010; Uribe & Soto, 2007). Así, el estudio de los conocimientos de los futuros profesores universitarios -estudiantes en formación- se viene desarrollando no solo a nivel local y nacional, sino que este estudio de los conocimientos matemáticos y didácticos relacionados con el objeto Grupo, viene realizando a nivel internacional, de aquí la importancia del estudio.

En este sentido, la investigación se dirige a la caracterización de la dimensión epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo; esta dimensión corresponde a uno de los componentes fundamentales del conocimiento CDM que se define en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) [3] y la *faceta epistémica del CDM* y se relaciona con el conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional (ver, capítulo 4) cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. En el modelo del CDM (Godino, 2009) esta faceta se encuentra dividida en tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido: éstos conocimientos se consideran en la investigación como base para el estudio de la potenciación o desarrollo de un conocimiento especializado, necesario para la labor de la enseñanza (Pino-Fan et al., 2013).

En esta dirección, el estudio se ha dividido en cuatro partes a través de las cuales se fue avanzando para lograr el objetivo propuesto en la investigación. La Parte 1, incluye el resumen, Introducción General, Tema y delimitación del tema; Áreas problemáticas, Antecedentes y problema de investigación, Objetivos y justificación, Marco Teórico y la Metodología. La Parte 2, corresponde al Estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo y el estudio del Objeto Grupo en los programas y libros de Texto. La Parte 3, se relaciona con el Diseño del instrumento para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático y la Evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático y finalmente la Parte 4, corresponde al Análisis de resultados y conclusiones generales, Referencias y Anexos. Estas cuatro partes se desglosan en los siguientes capítulos: el capítulo 1, donde se analiza la evolución de la investigación en el tema del Conocimiento Profesional del docente: investigación didáctica, en la línea de Formación de Profesores de Matemática. Estas investigaciones pretendían analizar la naturaleza, características y el grado del conocimiento matemático que tienen y deben tener los profesores para desarrollar la labor docente (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2001; Godino, 2012, en Rojas, Flores & Carrillo, 2013); de igual forma se presentan las diversas perspectivas teóricas desde las cuales se puede abordar el estudio del conocimiento del profesor para la enseñanza de tópicos de *Teoría de Grupos* hasta llegar a la perspectiva que se describe con más detalle en el marco teórico que corresponde al modelo del Conocimiento Didáctico - Matemático del profesor: modelo desarrollado por Godino (2009) en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática-EOS.

En el capítulo 2, se presentan las áreas problemáticas que hacen referencia en primer lugar, a la comprensión del objeto Grupo y que se centran en el estudiante de Licenciatura en matemáticas en formación inicial; en segundo lugar, se analiza el proceso de abstracción como

[3] Marco teórico desarrollado por (Godino, Contreras & Font, 2006; D'Amore, Font & Godino, 2007; Godino, Batanero & Font, 2007; Font & Contreras, 2008; Ramos & Font, 2008; Font, Planas & Godino, 2010, Pino-Fan, 2013)

parte de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado-PMA, necesarios para lograr esa comprensión del objeto de investigación; seguidamente, se presenta la problemática de la adquisición de significado de los objetos matemáticos: se describe la Fenomenología o el análisis fenomenológico, que pretende que el estudiante encuentre o le asigne un significado a los objetos matemáticos para llegar a una comprensión de los mismos. Finalmente, luego de establecer las problemáticas que muestran la complejidad del objeto Grupo para el estudiante de formación matemática se pasa a analizar al estudiante para su desempeño profesional, con unos conocimientos que va a utilizar en la enseñanza del tópico matemático y se describe entonces la problemática relacionada con la determinación de los componentes del conocimiento que el profesor necesitaría para su desempeño idóneo como docente universitario.

En el capítulo 3, se definen los objetivos específicos dando respuesta a preguntas concretas de investigación, resultado del análisis a las problemáticas y antecedentes presentados. Estos objetivos permiten describir el camino seguido en el logro del objetivo general y además, permiten dar respuesta a la pregunta de investigación formulada. Seguidamente, se justifica el porqué del interés en relacionar el objeto Grupo y el CDM del profesor universitario: se tiene presente en este capítulo que la investigación sobre el CDM de los profesores en formación es una línea de investigación en didáctica de la matemática, que se ha ido incrementando como lo muestra el gran número de investigaciones en esta dirección y por otro lado, se presentan investigaciones que estudian el objeto Grupo en ciertos aspectos de la comprensión. Se presenta después, la normatividad de los programas de Educación Superior, referente a los programas de formación matemática donde se establecen las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación y de igual forma para el programa de matemáticas; se justifica entonces bajo la normatividad cómo las universidades colombianas dentro de su autonomía universitaria establecen los perfiles para sus docentes dentro de los cuales se encuentran precisamente los profesionales egresados de los programas de formación matemática.

El capítulo 4, corresponde al marco teórico de la investigación orientado a explorar el conocimiento del estudiante de formación matemática sobre el contenido respecto del objeto Grupo: este capítulo se divide en tres secciones: una primera parte que hace referencia a los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado de los estudiantes. Una segunda parte, donde se presentan las nociones desarrolladas en la perspectiva teórica EOS, las cuales sirvieron de guía para el desarrollo de la investigación centrada en la exploración de la dimensión epistémica del conocimiento Didáctico-Matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo y finalmente, se presentan los modelos que estudian el Conocimiento del profesor y que integran el modelo del CDM: modelo que se define en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y que permite analizar la faceta epistémica de este CDM, a través de prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes cuando solucionan problemas relacionados con el objeto Grupo.

En el capítulo 5, se describe en primer lugar, la metodología de la investigación, la cual presenta un enfoque mixto a nivel exploratorio y con un carácter descriptivo; se presentan las etapas implementadas para el desarrollo del estudio: la primera fase, corresponde al estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; la segunda fase, corresponde al análisis semiótico de textos de Teoría de Grupos y en la tercera fase de la investigación, se presenta el diseño e implentación del instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo. Finalmente, se describe la población para el estudio, el cual se desarrolla en una Universidad Colombiana formadora de profesores de Matemática, con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas (estudiantes de formación matemática).

En el capítulo 6, se presenta el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; este capítulo inicia con la argumentación sobre "el porqué del estudio de los significados del objeto matemático grupo"; continúa con el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico, donde se presenta la evolución histórica del objeto de investigación a través de diferentes etapas hasta llegar al surgimiento del significado global en este caso del significado abstracto del objeto matemático. A partir de la descripción del proceso evolutivo del objeto Grupo, se realiza un análisis de las problemáticas que fueron dando forma al significado abstracto del objeto Grupo: esto se realizó mediante la determinación de diferentes configuraciones socio–epistémicas y a partir de estas configuraciones, se pasa a describir la emergencia del significado global del objeto de investigación.

En el capítulo 7, se analizan los programas de Teoría de Grupos; específicamente, las unidades relacionadas con el objeto Grupo para determinar los significados pretendidos por cada programa y de igual forma, se realiza el análisis de cuatro textos de Teoría de Grupos, en las unidades relacionadas con el objeto Grupo, para determinar el significado (institucional) pretendido por cada uno de estos textos para el objeto de investigación. Así, este capítulo, tiene como objetivo presentar el tratamiento otorgado al objeto Grupo en el currículo de los programas de formación matemática y en los libros de textos universitarios.

El capítulo 8, hace referencia al diseño e implementación del instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática; en este capítulo se presenta el objetivo del instrumento, los criterios para la selección de tareas y el análisis de las mismas. De igual forma se realiza un análisis de los resultados de la aplicación piloto de la prueba, el juicio de expertos y las tareas que constituyen el cuestionario final *CDM-Grupo*.

En el capítulo 9, se analizan los resultados de la aplicación del cuestionario final *CDM-Grupo*. Así, a partir de las respuestas dadas por los 36 estudiantes de formación matemática: 16 estudiantes de Licenciatura en el grupo G1; 16 en el grupo G2 y 4 estudiantes de Matemáticas, a las situaciones problemáticas planteadas en el cuestionario: se presenta el análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego por los estudiante, para la resolución de las situaciones problemáticas del cuestionario. Para el análisis, se divide este capítulo en tres secciones: la primera corresponde a la presentación del capítulo; en la segunda se describen algunos aspectos relacionados con la metodología y los sujetos participantes; los materiales y procedimientos empleados para la aplicación del cuestionario y finalmente, en la tercera sección se realiza un análisis de tipo cuantitativo-cualitativo (mixto) de los resultados de la aplicación del cuestionario junto con el análisis a la puntuación total del cuestionario y el análisis al índice de dificultad de los ítems. Se finaliza con un análisis detallado, desde una perspectiva mixta (cualitativo-cuantitativo) de algunos de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se pretenden evaluar con los ítems y subítems que componen el cuestionario.

Finalmente, se presentan las conclusiones respecto a los objetivos propuestos y a las tareas desarrolladas para la culminación del trabajo de Tesis doctoral que tiene el objetivo de evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático del estudiante de formación matemática, sobre el objeto grupo para la labor de la docencia universitaria.

En esta dirección, con la investigación se pretende el aporte de nuevos conocimientos, ya que en ella se caracterizan algunos de los conocimientos que tienen o deberían tener los estudiantes de formación matemática en su formación inicial y para la labor de la enseñanza universitaria del objeto matemático, para una enseñanza idónea de objetos algebraicos. Esta caracterización es importante ya que se definen los conocimientos básicos que debe implementar el profesor y se contrastan con los conocimientos que efectivamente tienen los estudiantes de formación matemática sobre el objeto de investigación. La caracterización de este conocimiento CDM, se logra a partir del estudio de los significados del objeto matemático. Además, en esta misma dirección la investigación también proporciona pautas para el diseño de metodologías didácticas que permitan en primer término potenciar y luego, desarrollar un conocimiento especializado necesario para la labor de la enseñanza sobre el objeto matemático Grupo.

CAPÍTULO 1

Tema y delimitación del tema

1.1. Introducción

En este capítulo se analiza la evolución de la investigación en el tema del Conocimiento Profesional del docente; investigación didáctica, en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas. Estas investigaciones pretenden analizar la naturaleza, características y el grado del conocimiento matemático que tienen y deben tener los profesores para desarrollar la labor docente (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2001; Godino, 2012 en Rojas, Flores & Carrillo, 2013); de igual forma, se presentan en este capítulo las diversas perspectivas teóricas desde las cuales se puede abordar el estudio del conocimiento del profesor para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos hasta llegar a la perspectiva que se describe con más detalle en el marco teórico (ver, capítulo 4) que corresponde al modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor: modelo desarrollado por Godino (2009) en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: EOS.

1.2. Conocimiento del Profesor Universitario

Las investigaciones sobre los Conocimientos del Profesor, tienen sus orígenes en el paradigma del Pensamiento del Profesor, abordada en sus inicios desde una perspectiva cognitiva (García, 1992) y comprendía aspectos como el estudio de los procesos de razonamiento, juicio y toma de decisiones que contribuían al desarrollo de la conducta del docente. Esta línea de investigación tiene el objetivo de explorar la naturaleza, forma, organización y contenido del conocimiento de los profesores (Grossman, Wilson & Shulman, 1989); en ella se utilizaron diferentes conceptos para referirse al conocimiento del profesor:

Conocimiento del Oficio (Brown & McIntyre, 1986 citado en García, 1992); Conocimiento Práctico Personal(Clandinin, 1985), Paradigmas funcionales de los profesores (Crocket, 1983 citado en García, 1992), Conocimiento Práctico (Elbaz, 1983), Teorías Implícitas de los Profesores (Hunt, 1985 citado en García, 1992),Conocimiento Profesional y reflexión en la acción (Schön, 1983); Conocimiento Didáctico del Contenido(Shulman, 1986; 1987); Conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Hill & Bass, 2005) y Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013).

Elbanz (1983) en sus estudios, incluye cinco categorías del Conocimiento práctico del profesor: conocimiento de sí mismo, del contexto, del contenido, del currículo y de la enseñanza; Leinhard & Smith (1985, citado en García, 1992) categorizan el conocimiento del profesor en: Conocimiento del contenido y Conocimiento de la estructura de la lección; en esta dirección, en el artículo The Knowledge Growth in Teaching, de Shulman (1986) se definen tres categorías del conocimiento del profesor: Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico y Conocimiento del currículo.

Posteriormente, Shulman (1987) en su artículo: knowledge and theaching: fundations of new reform, define siete categorías de la Base de Conocimientos del Profesor: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura; conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente; conocimiento didáctico del contenido: la amalgama entre materia y pedagogía que constituyen una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional; conocimiento de los alumnos y de sus características; conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

De otra parte, Carter (1990, citado en García, 1992) categoriza la línea de investigación sobre los conocimientos del profesor en tres grupos: Estudios sobre el procesamiento de la información y comparación expertos-principiantes; Estudios sobre el Conocimiento Práctico; Investigaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido; en este grupo se encuentran los estudios en los cuales se analiza específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como la forma en que los profesores trasladan ese conocimiento en un tipo de enseñanza que produce comprensión en los alumnos. Carter (1990) señala en el tercer grupo un cambio en el tipo de investigación sobre los conocimientos del profesor catalogada como del Pensamiento del profesor, hacia una investigación más comprometida con los contenidos que enseñan los profesores (García, 1992).

Así mismo, Elmore (1992) plantea que es probable que la enseñanza eficaz varíe considerablemente de disciplina a disciplina; a diferencia de la investigación sobre la enseñanza eficaz que intenta identificar destrezas genéricas de los docentes: se argumenta que la actual investigación se centraba en las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de disciplinas específicas y que la actual investigación sobre la enseñanza, se centra principalmente en los requisitos específicos para comprender una disciplina. Las investigaciones actuales, tratan de comprender la complejidad de la enseñanza de las diferentes disciplinas académicas que configuran los currículos (García, 1992).

En relación al tema, Ball, D.L., Hill, H.C. & Bass, H.(2005) proponen un modelo del Conocimiento del profesor, conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza: Mathematical Knowledge for Teaching-MKT; nombre que surge de los estudios referentes a la práctica docente en el ámbito matemático y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores. Ball y colaboradores estudian la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y cómo este ayuda en el trabajo de la enseñanza, estableciendo una base práctica basada en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza: MKT, que definen como una clase de conocimiento profesional de las matemáticas. El MKT hace referencia al conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos (Hill, Ball & Schilling, 2008).

Este conocimiento MKT es específico de los profesores e implica analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, explicar a los alumnos cuando no comprenden, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, disponer de representaciones, de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. De esta forma, las tareas del profesor exigirán no solo el conocimiento de la materia que enseña, sino también un conocimiento que es específico para desarrollar su labor docente (Rojas, Flores & Carrillo, 2013). El equipo de trabajo de Ball, caracterizó el MKT, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman (1987), distinguiendo dos categorías: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico (Pedagógico) del Contenido.

Bajo estas ideas, en esta tesis doctoral se profundiza sobre los conocimientos que necesitan los profesores universitarios de forma que la enseñanza se dirija a la comprensión del objeto Grupo por parte de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos). Así , en el marco teórico (ver, capítulo 4) se profundiza, en el modelo que orienta la investigación: modelo teórico desarrollado en el EOS (Godino, Batanero & Font, 2007), denominado el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático: CDM (Godino, 2009). Este modelo considera seis categorías o componentes del Conocimiento del Profesor (del contenido didáctico y matemático): Epistémica, Cognitiva, Afectiva, Mediacional, Interaccional y Ecológica.

CAPÍTULO 2

Áreas problemáticas, antecedentes y problema de investigación

2.1. Introducción

En este apartado se presentan las áreas problemáticas que hacen referencia en primer lugar, a la comprensión del objeto Grupo y se centran principalmente en el estudiante de Licenciatura en matemáticas (formación inicial); en segundo lugar, se analiza el proceso de abstracción como parte de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, necesarios para lograr esa comprensión del objeto de investigación; seguidamente, se presenta el problema de la adquisición de significado de los objetos matemáticos: se describe la Fenomenología y el análisis Fenomenológico que pretenden que el estudiante encuentre o le asigne un significado a los objetos matemáticos para llegar a una comprensión de los mismos. Finalmente, luego de establecer las problemáticas que muestran la complejidad del objeto Grupo para el estudiante de formación matemática, se pasa a analizar al estudiante en su futuro desempeño profesional, con unos conocimientos que van a ser utilizados para la enseñanza de este tópico matemático, esta dirección, se describe la problemática de la determinación de los componentes del conocimiento que el profesor necesitará para su desempeño como docente universitario.

2.2. Problemática relacionada con la comprensión de nociones de Teoría de Grupos

En algunas universidades la Teoría de Grupos es el primer curso donde los estudiantes deben ir más allá de aprender patrones de comportamiento imitativos repitiendo la solución de un gran número de variaciones, en un pequeño número de problemas. En estos cursos, los estudiantes se enfrentan con conceptos abstractos, trabajan principios matemáticos importantes y aprenden a escribir y a comprender pruebas. Aunque no existen estudios formales, muchos estudiantes afirman que después de tomar este curso, ellos tienden a desactivar las matemáticas abstractas y como un porcentaje significativo de estudiantes de Álgebra Abstracta: Teoría de Grupos, corresponden a profesores en formación es importante desarrollar estrategias didácticas que permitan mejorar la actitud de los profesores de matemáticas en formación hacia la abstracción (Dubinsky, Leron, Deuterman & Zazkis, 1994).

En la Universidad Colombiana, de igual forma aparece el interrogante para los Formadores de Profesores de Matemáticas sobre ¿cómo conseguir que el estudiante comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos? esto es, que los pueda aplicar en los diferentes contextos donde ellos aparecen. Esta pregunta se relaciona con el cuestionamiento de Freudenthal (1983) sobre ¿qué estrategias se necesitan para que los estudiantes logren la constitución de los objetos matemáticos? ¿Se pueden establecer criterios que determinen si un objeto matemático ha sido constituido o no por el alumno-estudiante de formación matemática? En torno a esta problemática de la comprensión y el tratamiento de los objetos algebraicos específicamente del objeto Grupo, existen estudios realizados por Dubinsky y colaboradores, junto con los estudios de Hazzan y los de Freudenthal.

El objeto Grupo del Álgebra Abstracta ha sido investigado desde diferentes aproximaciones teóricas: Cuestiones de índole cognitiva: concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores, dificultades (Kieran, 1992; Dubinsky & Leron, 1993; Nicholson, 1993; Dubinsky, Dauterman, J., Leron, U. & Zazkis, R., 1994; Leron, Hazzan & Zazkis, 1994; Dubinsky & Leron, 1993; Hazzan & Leron, 1996; Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics & Oktac, 1997; Dubinsky, 1997; Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas, 1997; Hazzan, 1999); e Investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de nociones de Teoría de Grupos (Hoch, 2003; Hoch & Dreyfus, 2006; Novotná, Stehlíková & Hoch, 2006; Simpson & Stehlíková, 2006; Novotná & Hoch, 2008). Las dos clasificaciones no son excluyentes ya que en algunos de los últimos estudios se abordan las dificultades de los estudiantes con temas de Álgebra Abstracta.

2.2.1. Estudios sobre la comprensión de nociones de Teoría de Grupos

En esta sección se presentan algunas investigaciones relevantes en otro de los marcos teóricos de investigación en Didáctica de la Matemática: La teoría APOE (Badillo, Azcárate & Font, 2011; Dubinsky et al., 1994) o APOS en inglés (acción, proceso, objeto, esquema). Esta teoría permite el análisis de la comprensión que tienen los estudiantes de los diferentes conceptos matemáticos, la descripción de las construcciones mentales o formas de conocer, los mecanismos de construcción y la triada del desarrollo del esquema utilizado en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Un primer estudio considerado para la investigación sobre el objeto Grupo, es el realizado por Dubinsky et al. (1994), en él se explora la naturaleza del conocimiento de los estudiantes sobre nociones de Teoría de Grupos, específicamente se da respuesta a la pregunta ¿cómo un individuo puede desarrollar una comprensión de ciertos temas de Teoría de Grupos? Los autores presentan observaciones generales sobre el aprendizaje de algunos tópicos específicos, la naturaleza compleja de la comprensión y el papel de los errores en el marco acción-proceso-objeto-esquema (APOE). Los objetivos del estudio se enfocaron en contribuir con los conocimientos básicos sobre el Pensamiento Humano y de servir a los propósitos de un área específica de la matemática; para esto, analizaron las dificultades de los estudiantes con la comprensión de conceptos del Álgebra Abstracta haciendo énfasis en la interpretación de ciertos problemas propuestos a profesores de matemáticas de secundaria cuando tratan de dar sentido a una serie de temas de teoría de Grupos (Dubinsky et al., 1994).

Entre las preguntas que orientan la investigación de Dubinsky et al. (1994) se encuentran ¿cómo puede un individuo aprender ciertos temas de Teoría elemental de Grupos? ¿Qué relación tiene esto con la comprensión de la matemática y la abstracción en general? El estudio de cómo un individuo aprende tópicos específicos de matemáticas, tenía el objetivo de determinar si era posible trazar una secuencia de este desarrollo o una descomposición genética para los tópicos matemáticos. La última intención del estudio correspondía a describir la secuencia de ideas matemáticas, esto es, a especificar las construcciones mentales particulares que los individuos usan para dar sentido a un concepto matemático específico. Las observaciones apuntaban a establecer estrategias efectivas instruccionales para estos temas específicos.

El estudio de Dubinsky partió del hecho que la mayor dificultad en la comprensión de tópicos de Teoría de Grupos aparece al inicio del programa, con los conceptos relacionados con el Teorema de Lagrange, los Grupos cocientes, las clases laterales, la multiplicación de clases laterales y la normalidad; así, este estudio se centra en estos tópicos. Se afirma que desde los días de la nueva matemática (matemática moderna) desarrollos curriculares habían sentido que incluso los estudiantes jóvenes pueden abordar con eficacia la idea básica de Grupo y subgrupo y comprender los requisitos de conjunto y función (operación binaria) en los cuales se apoyan los conceptos de Teoría de Grupos.

De las investigaciones sobre cómo las personas tratan de dar sentido a conceptos matemáticos específicos, se esperaba que proporcionaran alguna luz sobre cuestiones generales del aprendizaje ya que si complejos eran los conceptos relacionados con los Grupos en la mente de las personas ¿cómo iniciarían a comprenderlos? ¿cómo se podían interpretar para hacer frente a las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje? El trabajo de estos planteamientos, los realizó Dubinsky y colaboradores, desde la perspectiva teórica APOE. Las preguntas, la metodología que utilizaron y las interpretaciones de las respuestas de los estudiantes, fueron analizadas desde este enfoque constructivista basado en las ideas de Piaget (1975) las cuales trataron de adaptar a los estudios sobre el Pensamiento Matemático Avanzado. Este estudio presenta un intento por extender el concepto de Piaget de la abstracción reflexiva a las matemáticas de la enseñanza superior (Dubinsky et al. 1994).

Los investigadores tomaron las observaciones de un taller en seis semanas, donde 24 profesores de secundaria tomaron el curso de Álgebra Abstracta como parte de su trabajo y mediante la comparación de pruebas escritas y entrevistas a los estudiantes y a través de un análisis teórico, se llegó a describir las formas como estas personas se acercaron a los conceptos de grupo, subgrupo, grupo cociente, normalidad y clase lateral. A partir del taller se realizó una evaluación escrita la cual sirvió para determinar la comprensión de los participantes: la prueba tuvo una duración de dos horas y los participantes la describieron como una evaluación diseñada para ayudar a los instructores a evaluar el aprendizaje de los profesores.

El estudio se justifica, según los autores, al tener presente que existen una serie de teorías del aprendizaje que se aplican a las matemáticas del nivel post-secundario que incluyen los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938; Sierpinska, 1992), concept definition/imagen (Vinner, 1983), representaciones múltiples (Kaput, 1987) y la dicotomía operacional/estructural (Sfard, 1992), pero que ninguna de esas perspectivas teóricas se había aplicado en tópicos de Álgebra Abstracta (Dubinsky et al., 1994). Además, el estudio aplica métodos cualitativos para observar las experiencias de estos participantes.

La esencia de la perspectiva APOE, consiste en que un individuo desequilibrado por una situación problema que percibe en un contexto social particular, intenta reequilibrar por asimilación la situación a los esquemas existentes disponibles para él o ella, o, de ser necesario usa la abstracción reflexiva para reconstruir esos esquemas en un nivel más alto de sofisticación (Dubinsky et al., 1994). Se utiliza esta perspectiva teórica para analizar las construcciones que pueden intervenir y se encuentra que principalmente son de cuatro tipos: acciones, procesos, objetos y esquemas. Una acción, corresponde a cualquier manipulación física o mental repetible que transforma los objetos de algún modo. Cuando la acción total se lleva a cabo en la mente del individuo o simplemente es imaginada como teniendo lugar realizándose a través de pasos específicos se dice que la acción ha sido interiorizada para convertirse en un proceso: es entonces posible para el estudiante usar el proceso para obtener nuevos procesos por ejemplo, mediante la coordinación de este con otros procesos, es decir, se combinan dos o más procesos, conectando sus entradas y salidas apropiadamente de modo que se forma otro proceso. Además, un proceso puede invertirse para obtener un nuevo proceso: cuando es posible transformar un proceso por alguna acción, se dice que se ha encapsulado para convertirse en objeto.

Algunos de los resultados de la investigación de Dubinsky et al. (1994) corresponden a:

El desarrollo individual de los conceptos grupo y subgrupo pueden ser sintetizados simultáneamente. La comprensión puede pasar de ver los grupos y los subgrupos como conjuntos primarios de elementos discretos a un estado donde las operaciones así como los elementos del grupo son incorporados en una definición. Finalmente, un estudiante puede construir una comprensión de grupo como un objeto al cual se le pueden aplicar acciones.

Algunos estudiantes tratan de hacer frente a una situación-problema, involucrando un conjunto y una operación por asimilación de situaciones a un esquema de conjunto existente ignorando la operación presente. Los investigadores sugieren que tal estrategia puede representar una misconception temprana de los conceptos de grupo y subgrupo.

En la primera fase del aprendizaje del concepto grupo, un estudiante lo puede interpretar, primero en término de sus elementos, esto es como conjunto. Si el individuo se queda con esta comprensión elemental de grupo puede no distinguir el grupo por algo más que el número de sus elementos. De igual forma, se comprenden los subgrupos como subconjuntos.

Como los estudiantes encuentran situaciones en las cuales sus concepciones corrientes de grupos como conjuntos son inadecuadas, ellos pueden iniciar a incluir la operación en la determinación de grupos y subgrupos. Un estudiante puede realizar una experiencia apropiada y llegar a ver que un conjunto dado puede tener cierto número de propiedades, una de las cuales es la operación binaria que satisface ciertas condiciones y puede construirla y asociarla al conjunto.

La operación en el grupo se puede establecer de diferentes formas: por fórmula o tabla. Observaron que los estudiantes parecían estar más cómodos con ejemplos como adición módulo 3 y módulo 6. Para hacer estas operaciones se requiere que el estudiante domine conceptos sobre funciones generales con las ideas que surgen del estudio de Teoría de Grupos. Un esquema de función puede intervenir aquí con todo el poder y las dificultades relacionadas para el nivel de desarrollo de un esquema individual de función. Un estudiante puede eventualmente encapsular un conjunto de objetos (los objetos se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones; ya sean acciones o procesos, que pueden actuar sobre él y puede construir de esas transformaciones. Entonces piensa en el proceso como objeto. En este caso el proceso se ha encapsulado como objeto) y alguna operación en este conjunto para formar un objeto, esto es para él o ella la concepción de este grupo particular. Después de una desencapsulación del objeto grupo pueden haber otras operaciones que pueden ser aplicadas, pero la que procedía de la desencapsulación puede ser preferida.

Los estudiantes pueden llegar a la comprensión de los subgrupos de igual forma que los grupos como conjuntos con operaciones. Los estudiantes aprecian el papel de la operación binaria y comprenden que ella se induce en el subgrupo. Se observa que el desarrollo individual del concepto subgrupo puede ser coordinado con el desarrollo del concepto grupo.

Los grupos se comprenden como objetos. Encapsular un proceso en objeto puede ser extremadamente difícil para los estudiantes, esto puede ser muy retrasado o no ocurrir en algunos casos. El punto de análisis es que cuando el estudiante se encuentra en una situación en la cual se requiere aplicar una acción, entonces él o ella pueden tender a encapsular procesos en orden a tener objetos en los cuales se aplican las acciones. Otro tipo de acción que requiere la comprensión de grupos como objetos es ver que dos grupos y sus operaciones pueden ser la misma, esto es que ellos son isomorfos.

En esta dirección, las características tales como el orden, ser cíclicos, ser conmutativos o ser un grupo de simetrías vienen a ser propiedades de los grupos. Es probable que en esta etapa, el teorema de Lagrange se pueda aplicar para comprobar los subgrupos o mostrar que el subconjunto no es subgrupo. Según el autor, hay suficiente experiencia para sugerir que es muy duro para los estudiantes investigar en esta etapa y que muchos de ellos no lo hacen.

El paso final en la construcción del concepto como un grupo singular inicia con la construcción de que otros grupos aparentemente diferentes pueden construirse pero resultan que no son muy diferentes. En este punto, un desarrollo de la concepción de isomorfismo puede intervenir y el estudiante es forzado a construir el proceso de varias formas con grupos específicos y a establecer un isomorfismo entre ellos.

La investigación anterior de Dubinsky et al. (1994) plantea que la comprensión del concepto grupo se realiza primero como conjunto, luego como conjunto con una operación, después aparecen las propiedades que tienen los grupos, algunas de las cuales pueden ser muy difíciles para los estudiantes, seguidamente se llega al concepto de isomorfismo el cual le permite al estudiante pensar en la construcción de otros grupos como los grupos cocientes, grupos aparentemente diferentes, pero que resultan isomorfos a grupos conocidos. Se realizan acciones para llegar a los procesos y con estos se forma el objeto Grupo. El camino descrito para la comprensión del objeto Grupo, recibe el nombre de descomposición genética en esta perspectiva APOE y es importante porque define una metodología a seguir en la comprensión del objeto de investigación.

Una segunda investigación que se analiza en esta sección, hace referencia también, a la comprensión de nociones de Teoría de Grupos y es la desarrollada por Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas (1996): en ella los investigadores trabajan con los conceptos de clases laterales, normalidad y grupos cocientes. Para la descomposición genética propuesta, el concepto de clase lateral era entendido como una acción cuando el estudiante lo observa y lo trabaja como una situación próxima como si estuviera aplicando una fórmula. La concepción como proceso de clase lateral le permite al estudiante pensar en los subgrupos, sin realizar cálculos. Las clases laterales serán conocidas como objeto cuando el estudiante puede pensar en cómo se forman éstas o realizar acciones sobre las mismas o hacer comparaciones sobre los cardinales o aplicar el teorema de Lagrange, también se propone una descomposición genética de los conceptos de normalidad y grupo cociente, el esquema de grupo cociente aparece integrado por los esquemas de clase lateral, operación binaria y grupo.

Una tercera investigación en esta dirección fue la desarrollada por Brown et al., (1997), en ella se estudiaba la comprensión de los estudiantes sobre los grupos y los subgrupos: el estudio utilizó la teoría APOE para describir las formas de conocer y los mecanismos de construcción de los conceptos. Se aplica también una metodología experimental basada en un programa informático con la participación de 51 estudiantes a los que se les aplicaron cuestionarios y entrevistas individuales. En este estudio además de realizarse la descomposición genética se analiza el conjunto de las construcciones mentales denominadas esquemas que los estudiantes podían desarrollar para la comprensión del concepto grupo y subgrupo.

La descomposición genética inicial que plantearon incluía operaciones binarias, entendidas como funciones, lo que implicaba la construcción previa del esquema de función. El esquema de grupo comprendía otros esquemas como el de conjunto, operaciones binarias y el de axioma que podían relacionarse entre sí: el esquema de axioma incluía la noción general que una operación binaria en un conjunto puede o no satisfacer una determinada propiedad, lo cual es esencialmente el proceso de chequear la propiedad. El esquema de subgrupo, contenía los esquemas de grupo, subconjunto y función. Las actividades formuladas incluían relaciones de congruencia, permutaciones, clases laterales y grupos de simetría. Los resultados mostraron las distintas formas de comprensión de los estudiantes. Así, las operaciones binarias eran comprendidas como acción, cuando los estudiantes eran capaces de comprender el concepto de relación binaria con ejemplos específicos. La composición de dos simetrías específicas era entendida como proceso, cuando los alumnos podían usar ejemplos concretos y generalizarlos. La comprensión de la relación binaria se daba en un nivel superior cuando la percibían como una función de dos variables (Brown et al., 1997).

Finalmente, los autores analizaron como los estudiantes iniciaban a comprender las operaciones binarias, los grupos y los subgrupos; se realizó un análisis preliminar teórico de lo que podría significar la comprensión de esos tópicos en términos de la teoría APOS y además, se describe el tratamiento instruccional diseñado para ayudar con el desarrollo de las construcciones mentales postuladas en el análisis teórico. Los resultados del estudio indicaban que la aproximación pedagógica utilizada fue razonablemente efectiva para ayudar a los estudiantes a desarrollar fuertes concepciones de las operaciones binarias, los grupos y sus subgrupos. El método pedagógico para el tratamiento instruccional fue el método*ACE* (activities, class discussion, and exercises): la estrategia principal de este método incluía que los estudiantes construyeran ideas matemáticas con el computador usando un lenguaje de programación matemático y haciendo el trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo resolvieran los problemas y discutieran los resultados de las actividades realizadas en el computador (Brown et al., 1997).

El análisis teórico inicial del estudio de Brown et al. (1997) se basaba en que una operación binaria es una función de dos variables y entonces la descomposición genética estaba muy cerca de la descomposición genética del concepto función. De igual forma, en este estudio se describe cómo los estudiantes comprenden el concepto grupo: el concepto grupo puede comprenderse como un esquema que consiste de tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma. El esquema de conjunto y operación binaria eran tematizados para formar objetos y ellos estaban coordinados por el esquema de axioma. El esquema de axioma incluía la notación general de una operación binaria y un conjunto que podía o no satisfacer una propiedad, se incluían también cuatro objetos específicos obtenidos por encapsulación de cuatro procesos correspondientes a los cuatro axiomas de grupo. El esquema de grupo estaba tematizado para formar un objeto al que se le podían aplicar acciones. Ejemplos de tales acciones incluían determinar si un conjunto particular y una operación binaria formaban un grupo, revisando varias de las propiedades de grupo y considerando cuando dos grupos dados son isomorfos.

Un componente importante en el esquema Grupo, fue la capacidad de considerar grupos genéricos como ejemplos particulares de grupos. Esta investigación continuaba el estudio de Dubinsky et al. (1994), repitiendo el ciclo de la investigación para operaciones binarias, grupos y subgrupos y así, el análisis preliminar era muy similar a los análisis dados en el estudio de Dubinsky et al. (1994). Los investigadores tomaron como punto de partida (el cual podía o no podía ser el caso para los estudiantes) la existencia del esquema conjunto, subconjunto, y función y se centraron en la coordinación de estos esquemas y otros esquemas que resultaban de esas relaciones. El análisis en Dubinsky se centraba en como coordinar el surgimiento, iniciando por ejemplo con el concepto grupo y subgrupo inicialmente comprendido casi en su totalidad en términos de conjunto con una operación binaria dada: se evidenció que muchos estudiantes pensaban que el grupo $\mathbb{Z}_n$ era un subgrupo de $\mathbb{Z}$ (Brown et al., 1997).

En el estudio se establece una diferencia entre las dos investigaciones, ya que en Dubinsky et al. (1994) se sugería la posibilidad que los conceptos de grupo y subgrupo pudieran desarrollarse simultáneamente, mientras que en este estudio se inició con la idea que el concepto grupo esta más o menos presente cuando se va a desarrollar el concepto subgrupo. Los sujetos de la investigación fueron estudiantes universitarios que habían tomado o estaban tomando el curso de Álgebra Abstracta diseñado por matemáticos. El grupo principal estaba formado por 31 profesores de matemáticas de secundaria quienes tomaron el curso experimental y 20 estudiantes que tomaron el curso normal de Álgebra Abstracta en 1991 (Brown et al., 1997). Se presentaron dos resultados en el trabajo de Brown et al. (1997): primero se consideró la naturaleza de las respuestas de los estudiantes en términos de las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. Se usaron estos datos para ver cuando ellos parecían ser capaces de hacer esas construcciones mentales y ver que otras construcciones mentales podían hacer. El segundo resultado, fue un resumen de las realizaciones de los estudiantes en el sentido matemático, esto es ¿ellos respondieron cuestiones y solucionaron problemas razonablemente bien: qué errores típicos cometieron y que conceptos matemáticos demostraron con sus conocimientos?

Como conclusión, en el estudio se describen las preguntas y respuestas de los estudiantes; se realiza un análisis de las construcciones mentales para las operaciones binarias trabajando en el grupo D_4 de simetrías del cuadrado; se analiza también cuándo el estudiante realiza una acción, un proceso, cuándo construye un objeto; igualmente se desarrolla el trabajo para grupos y subgrupos y se presenta cómo se comprenden los conceptos de operación binaria, grupo, subgrupo en forma completa y detallada en el marco de la teoría APOS.

De las investigaciones presentadas se concluye que ellas permiten entender como los estudiantes comprenden los conceptos de operación binaria, grupo y subgrupo, pero estos estudios no pretenden analizar el conocimiento de los estudiantes para el desempeño de la labor docente respecto al objeto matemático; tampoco se realizan estudios de tipo fenomenológicos, históricos y epistemológicos que especifiquen el origen y significado del objeto de investigación: pero tienen un objetivo común con la presente tesis doctoral y es la búsqueda de estrategias que permitan la comprensión del objeto Grupo por parte de los estudiantes de formación matemática y de igual forma, que permitan potenciar un conocimiento Didáctico-Matemático del objeto de investigación. De estos planteamientos surge en primer lugar la necesidad de realizar un análisis fenomenológico, histórico y epistemológico del objeto de investigación que permita dar respuesta a la pregunta ¿qué significa el objeto Grupo? esto, corresponde a la búsqueda de un referente del objeto del Álgebra Abstracta direccionado al conocimiento que debe tener el profesor universitario sobre algunos tópicos de Teoría de Grupos.

En esta línea de investigación se presenta a continuación otra de las investigaciones relacionadas con la comprensión de los objetos matemáticos, pero en este estudio se particulariza en el proceso de abstracción que realizan los estudiantes para llegar a la comprensión de ciertos tópicos de Teoría de Grupos (Hazzan, 1999).

2.2.2. Investigaciones en pensamiento matemático avanzado

En 1985 se conformó el International Group for the psychology of Mathematics Education:PME, grupo que estudia la naturaleza del Pensamiento Matemático Avanzado y en particular se profundiza en investigaciones cognitivas acerca de los procesos de aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1991). En el currículo universitario, dentro de los temas del primer y segundo año de universidad, se abordan los tópicos de funciones, límites, integrales, espacios vectoriales, grupos, anillos: temas que corresponden a lo que se denomina las Matemáticas Avanzadas. Como consecuencia del trabajo realizado en estos temas, en especial en los que corresponden a las estructuras algebraicas, se detectan dificultades en el desarrollo de los procesos que llevan al estudiante a una comprensión de los conceptos matemáticos inmersos en ellos (Azcárate, 1996). No hay una distinción clara entre las Matemáticas Elementales y las Avanzadas, pero se señalan algunos rasgos distintivos, uno de los cuales corresponde a la complejidad de los contenidos y a la forma de efectuar su control: los procesos más potentes para este fin, son aquellos que permiten dicho control. En particular se estudian los procesos de representación y abstracción, ya que se puede pensar que el éxito en matemáticas se relaciona con la riqueza y flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos (Azcárate, 1996).

En el contexto de la enseñanza universitaria, las tendencias en los últimos años en Didáctica de la Matemática se han enfocado a considerar la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y no como la simple adquisición de competencias y habilidades (Azcárate, 1996). El campo de problemas que hasta hace pocos años se centraban en los conceptos básicos de la enseñanza de las matemáticas de primaria (procesos del Pensamiento Matemático Elemental), se ha ampliado a cuestiones relacionadas con el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), propio del currículo de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios (Azcárate, 1996). Dentro de los procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado se destaca el proceso de abstracción que se considera como la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana.

En la siguiente investigación se analiza dicho proceso de abstracción: específicamente, el estudio se enfoca al análisis de la forma como los estudiantes realizan este proceso. En el estudio de Hazzan (1999) se analizan procesos mentales, procesos del pensamiento matemático avanzado que los estudiantes universitarios realizan cuando resuelven problemas de Álgebra Abstracta. El autor afirma, que los resultados de la investigación en Educación Matemática, cada vez son más escasos al pasar del nivel de primaria al nivel de secundaria y de este al nivel universitario (Selden & Selden, 1993; Thompson, 1993; Dreyfus, 1991; 1995) además afirma que a nivel universitario, la mayoría de las investigaciones se relacionan con pre-cálculo, cálculo, álgebra lineal y matemáticas discretas.

Según Hazzan (1999), se ha investigado en el aprendizaje y enseñanza del Álgebra Abstracta: los documentos se focalizan en problemas del aprendizaje del Álgebra Abstracta, y los clasifica en dos grupos: En aprendizaje, comprensión y desarrollo de conceptos del Álgebra Abstracta (Selden & Selden, 1987, Hart, 1994; Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994; Hazzan, 1996; Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Hazzan & Leron, 1996; Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas, 1997, Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics & Oktac, 1997; Asiala, Brown, Kleiman & Mathews, 1998) y sobre Métodos para la enseñanza del Álgebra Abstracta (Pedersen, 1972; Lesh, 1976; Macdonald, 1976; Buchthal, 1977; Quadling, 1978; Lichtenberg, 1981; Simmonds, 1982; Petricig, 1988; Thras & Walls, 1991; Leron & Dubinsky, 1995).

El estudio de Hazzan lo ubica en la primera categoría. Las investigaciones describen las formas como los estudiantes tratan con conceptos del Álgebra Abstracta haciendo los conceptos mentalmente accesibles: específicamente, se analizan las formas en que los estudiantes conciben conceptos abstractos del Álgebra a través del tema de la reducción del nivel de abstracción. Como resultado en muchos casos la reducción del nivel de abstracción se presenta como una estrategia efectiva, sin embargo, según Hazzan a veces puede utilizarse de forma inadecuada y llega a convertirse en engañosa.

En este estudio se reconoce la importancia de aprender Álgebra Abstracta. Para Gallian (1990):

...el álgebra abstracta es importante en la educación de una persona instruida matemáticamente. La terminología y la metodología del Álgebra se utiliza cada vez más en la Informática, la Física, la Química y las Comunicaciones de Datos y por supuesto, el Álgebra todavía tiene un papel central en las matemáticas avanzadas por sí mismo. (Hazzan, 1999, p. 72) Se argumenta en la investigación que los formadores de profesores de matemáticas, son conscientes de la importancia de aprender Álgebra Abstracta, pero que al mismo tiempo, ellos informan de las dificultades que tienen los estudiantes con la comprensión de las ideas que se les intentan comunicar, así, los formadores tratan de encontrar formas de ayudar a los estudiantes a entender los conceptos del Álgebra Abstracta y a buscar formas relevantes de introducir estos conceptos (Hazzan, 1999).

En el estudio se cita a Herstein (1986) en la introducción de su libro de Álgebra Abstracta, donde afirma que:

...este es un pequeño propósito de servir en el estudio de algunos objetos del Álgebra Abstracta sin ver algunas consecuencias no triviales de este estudio: presentamos en el libro, interesantes, aplicables y significativos resultados, en cada uno de los sistemas que hemos elegido para hablar. (Hazzan, 1999, p.72)

En forma similar, Gallian (1990), describe su enfoque en la presentación de las ideas del Álgebra Abstracta:

...lo que he tratado de hacer aquí es capturar el espíritu tradicional del Álgebra Abstracta mientras se da una fundamentación concreta computacional incluyendo algunas aplicaciones: creo que los estudiantes aprecian mejor la teoría abstracta cuando tienen una sólida comprensión de lo que está siendo abstraído. (Hazzan, 1999, p.72)

Gallian y Herstein (Hazzan, 1999) hacen referencia al aprendizaje del Álgebra Abstracta en el aula tradicional, pero ya varias iniciativas habían utilizado lenguajes de programación (ISETL o Maple) en la enseñanza del álgebra; por ejemplo, en Dubinsky et al. (1994) se utiliza ISETL, tratando de ayudar a crear un entorno en el que los alumnos construyen por sí mismos conceptos matemáticos apropiados para la comprensión y resolución de problemas en esta área.

El marco teórico en la investigación, para explicar las formas de pensamiento de los estudiantes en situaciones del Álgebra Abstracta fue el centro del artículo (Hazzan, 1999) y se basa en la Teoría Fundamentada de Glaser & Strauss (1967). El estudio se basa en tres interpretaciones de los niveles de abstracción discutidos en la literatura:

- El nivel de abstracción como la cantidad de relaciones entre el objeto mental y la persona que piensa.
- El nivel de abstracción como reflexión de la dualidad proceso-objeto.
- El nivel de abstracción como el grado de la complejidad de los conceptos matemáticos.

El estudio de Hazzan (1999) pertenece a las investigaciones que tienen como objetivo analizar la comprensión de los objetos matemáticos: para este caso del objeto Grupo, las clases laterales, el Grupo cociente y el Teorema de Lagrange. Se aplicó una evaluación tradicional a los estudiantes que se identifica con las aplicadas en los cursos normales de Teoría de Grupos de las universidades Colombianas y representa una herramienta útil para el análisis de la comprensión de los estudiantes en estos tópicos; comprensión que se puede relacionar con el estudio sobre el conocimiento del estudiante de formación matemática y con el conocimiento del profesor Universitario en tópicos de Teoría de Grupos.

Surgen preguntas a partir del análisis de la investigación de Hazzan (1999) como ¿cuáles son los significados de la noción Grupo que como parte de la institución, se pretenden gestionar en los estudiantes de formación matemática? es decir, que es lo que debe comprender el estudiante en formación matemática y otra pregunta relacionada con el recurso de mayor uso por parte de los formadores de profesores ¿los significados del objeto Grupo pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global de dicho objeto? Estas preguntas hacen parte de los desarrollos realizados en la presente tesis doctoral.

Continuando con un orden lógico según las problemáticas presentadas, a continuación se describe la problemática que se relaciona con el significado que tiene para los estudiantes de formación matemática el objeto de investigación.

2.3. Problemática relacionada con el significado de los objetos matemáticos

Esta problemática se relaciona con el significado que le asignan los estudiantes de formación matemática al objeto Grupo; significado que según la propuesta de la Fenomenología de Freudenthal (1983) surge del conocimiento de los fenómenos (situaciones-problemas) que son organizados por los conceptos matemáticos.

Una dificultad que se presenta en la enseñanza de la noción Grupo, la plantea en primer lugar Freudenthal (1983): para concebir un objeto matemático, se enseña o se intenta enseñar el concepto: para concebir grupo, espacio vectorial, relaciones, etc. se tratan de inculcar los conceptos; es decir, se intentan materializar los conceptos; este hecho lleva a una falta de significado de los objetos matemáticos y por tanto, a una falta de comprensión de los mismos. Así, Freudenthal propone otra manera de afrontar la Educación Matemática desde la Fenomenología Didáctica, plantea que se debe preparar el enfoque contrario es decir, se debe iniciar con los fenómenos (situaciones-problema, en términos del enfoque EOS) que van a ser organizados por el objeto y desde este punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Es decir, que el profesor debe conocer los fenómenos que sirven para organizar cada uno de los objetos matemáticos.

En esta dirección, se analizan dos investigaciones a nivel nacional, que pretenden la búsqueda de significado de objetos matemáticos: objetos algebraicos que se relacionan con el objeto Grupo.

Las siguientes investigaciones se relacionan con análisis fenomenológicos, históricos y epistemológicos de nociones relacionadas con la Teoría de Grupos que tienen el objetivo de determinar los fenómenos de los cuales emergen algunas nociones algebraicas. Estos estudios tienen su aplicación en propuestas didácticas para la enseñanza secundaria. Primero se presenta el estudio desarrollado por Torres (2011) y a continuación el de Mejía (2004). En estos estudios se trabaja el objeto ecuación algebraica, objeto que se relaciona con uno de los orígenes del objeto Grupo.

2.3.1. Estudios sobre el significado de los objetos matemáticos

En el estudio de Torres (2011) el problema de investigación surge del reconocimiento de la existencia de una problemática general en la escuela y es el paso del pensamiento aritmético al algebraico. La problemática presentada se valida con el estudio y análisis del estado del arte en didáctica del álgebra elemental tanto a nivel nacional como internacional. A partir de la ubicación de esta problemática, se hace un estudio histórico, epistemológico del objeto ecuación algebraica en el marco teórico de la Fenomenología Didáctica propuesta por Hans Freudenthal (1983).

Esta investigación tiene como objetivo, comprender los fenómenos de enseñanza de los objetos algebraicos y específicamente de las ecuaciones, de manera integral; esto es, realizando un análisis desde la teoría de ecuaciones. El estudio histórico parte del hecho que los conceptos matemáticos son algo que no preexiste a nuestra experiencia sino que es la actividad matemática la que los crea, en particular la actividad matemática de los matemáticos (Puig, 2001), en este sentido, en el estudio se evidencian los fenómenos que organiza el objeto ecuación.

Entre los resultados de la investigación de Torres (2011) se encuentran: el análisis del libro de al-Khwarizmi en álgebra, obra de principios del siglo IX cuando por primera vez en la historia aparece el álgebra como una disciplina autónoma y en posesión de su nombre, marcando así una corriente de investigación posterior. A partir del texto de al-Khwarizmi se da cuenta de aspectos del origen del álgebra. En la época de al-Khwarizmi, aparece la teoría de las ecuaciones y el análisis indeterminado, todo esto antes de la traducción de la aritmética de Diofanto (Torres, 2011).

En una segunda fase del estudio histórico, se presenta el desarrollo de las ideas algebraicas que corresponden al Renacimiento con los trabajos de Del Ferro, Tartaglia, Ferrari y Cardano, donde la atención se dirige a la solución de ecuaciones de grado mayor que 2, fundamentalmente las ecuaciones de tercer grado. Se analiza, la obra del Ars Magna de Cardano de 1545, que es considerado el libro matemático más importante del siglo XVI, de donde se muestran los métodos de resolución de las ecuaciones cúbicas y cuarticas, acompañadas de las demostraciones geométricas de estos métodos, que dan cuenta de los fenómenos que organiza el objeto ecuación a través del estudio de la naturaleza de las raíces de estas ecuaciones algebraicas y de los métodos de solución de dichas ecuaciones, los problemas que se solucionan y el campo numérico de trabajo (Torres, 2011).

En una tercera fase de la investigación se presenta el trabajo de Descartes en relación a las ecuaciones. Se analizan los fenómenos que organiza este objeto matemático en este periodo importante de la historia de las matemáticas, expuesto a través de la obra del filósofo francés. En el trabajo de Descartes, los fenómenos organizados por el objeto ecuación corresponden a problemas geométricos con magnitudes de diferente naturaleza.

Entre los aspectos importantes del estudio, relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones, se encuentra la relación entre magnitudes geométricas, números y álgebra expresadas de distintas formas a través de la historia: se plantea que esto puede ser una fuente de contextualización para las ecuaciones en la iniciación de su estudio y así la resolución de problemas se podría presentar como un ámbito de producción de conocimiento.

El segundo estudio de Mejía (2004), hace referencia a la Factorización de expresiones polinómicas cuadráticas y tiene como objetivo: favorecer la comprensión de conceptos y procedimientos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas en estudiantes de noveno grado de educación básica secundaria, mediante algunas actividades con el uso de las calculadoras graficadoras algebraicas. En este problema de investigación se hace referencia a una falta de significado y uso de los conceptos y procesos algebraicos, por parte de los estudiantes que cursan los primeros años de álgebra en la educación secundaria. Es decir, una falta de comprensión de un referente, campo de problemas, fenómenos que modelan dicha noción y a una carencia en la transmisión de un saber a un contexto diferente en el que se han construido estos conceptos o procedimientos (Mejía, 2004). Este trabajo se realiza en el marco teórico del Análisis Didáctico de Rico (1997), donde junto al estudio Fenomenológico se presenta el estudio histórico y epistemológico de aspectos relacionados con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas que tratan el concepto ecuación de segundo grado. Los fenómenos que modelan las ecuaciones de segundo grado, corresponden a: Caída libre, Movimiento parabólico, las formas arquitectónicas de construcciones como templos y puentes, el tratamiento de problemas de áreas de figuras geométricas y superficies reflectantes con sección parabólica como lámparas y lentes Bedoya, Rico & Segovia (2000).

En este estudio se presenta la factorización como una herramienta para la resolución de las ecuaciones. En el estudio, se realiza el análisis cognitivo como uno de los componentes del análisis didáctico (Rico, 1997) y se presentan además las dificultades y errores de los alumnos en tareas relacionadas con la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas, evidenciadas en algunas investigaciones presentadas. El Análisis de la Tecnología se presenta como un organizador del currículo y se evidencian ventajas y desventajas de los mediadores tecnológicos entre ellos las calculadoras graficadoras algebraicas. Finalmente, se realiza el Análisis de la Instrucción como parte del análisis didáctico, con la descripción de la secuencia de tareas a realizar por el estudiante y el análisis de la actuación que se centra en la forma como los estudiantes abordan dichas tareas. En general, se presentan y analizan tareas propuestas para la implementación del estudio (Mejía, 2004).

Del análisis a estos estudios, se concluye que existe la necesidad de potenciar o desarrollar en los profesores en formación, un conocimiento sobre los objetos matemáticos que les permita promover en sus estudiantes la adquisición de significado de los objetos matemáticos.

En relación con la comprensión de los objetos matemáticos, se describe finalmente, la problemática que hace referencia a la comprensión de los objetos a partir de propuestas didácticas.

2.4. Problemática relacionada con la comprensión de los objetos matemáticos a partir de propuestas didácticas

Se describe en esta sección una problemática que se le presenta al profesor de Teoría de Grupos con la planeación de los procesos de instrucción: se pasa a analizar ahora al estudiante de formación matemática pero para la labor docente y en relación con la comprensión que debe tener sobre el objeto Grupo: comprensión que lo debería llevar a potenciar o desarrollar un conocimiento matemático y didáctico que le permita desarrollar la labor de enseñanza con idoneidad sobre este objeto matemático. Esta problemática se relaciona con la planeación de los procesos de enseñanza que en algunos casos se centra en el contenido matemático, descuidando otros componentes igualmente importantes, denominados por Rico (1997) como los organizadores del currículo: al futuro profesor se le da el conocimiento del contenido matemático, pero no el conocimiento didáctico respecto a ese contenido específico. Dentro de los organizadores del currículo propuestos por Rico, se encuentra la Fenomenología como parte del análisis de contenido dentro del Análisis Didáctico que realiza el profesor para el diseño, evaluación e implementación de los procesos de instrucción. El análisis fenomenológico, según Rico (1997) se realiza como parte del proceso de planeación en la tarea docente y según la Fenomenología didáctica propuesta por Freudenthal, que propone iniciar la instrucción con los fenómenos (situaciones-problema) que son organizados por el objeto matemático, en la búsqueda de significados para estos objetos matemáticos: hecho que llevaría a potenciar un conocimiento matemático y didáctico de los objetos.

Esta problemática se relaciona con los procesos de instrucción para la enseñanza de nociones matemáticas, los cuales tienen en cuenta las cuatro componentes del currículo: objetivos, contenidos, metodología y evaluación (Rico, 1997). En esta problemática se evidencia el hecho que la planeación en algunos casos se reduce al análisis de contenidos y a consideraciones genéricas sobre las otras tres componentes. Rico (1997) argumenta que este grado de generalidad con que aparecen las otras tres componentes del currículo, resulta dispar con la precisión con que se detallan los contenidos y que al momento de planificar la actividad cotidiana, hacen que la reflexión del profesor se centre principalmente en ellos.

De esta problemática surge el interrogante referente al análisis didáctico que realizan los formadores de profesores para el proceso de instrucción en cuanto a ¿qué conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo, se debe potenciar en el estudiante de formación matemática, que le permitan en el futuro, desarrollar eficazmente su práctica con el objeto Grupo y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes? Es decir, si los estudiantes de formación matemática pueden ser profesores universitarios, surge la necesidad de indagar por el CDM que se ha potenciado y en algunos casos desarrollado en su formación inicial en relación al objeto Grupo; de modo que le permita desarrollar eficazmente la labor de la enseñanza universitaria (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013).

A continuación, se analizan algunas de las investigaciones relacionadas con la comprensión de los objetos matemáticos a partir de propuestas didácticas implementadas.

2.4.1. Investigaciones en la comprensión de la noción grupo, a partir de propuestas didácticas

Se analizan en esta sección algunas investigaciones orientadas al diseño de estrategias pedagógicas para la enseñanza del objeto grupo. La primera propuesta permite determinar si el estudiante de formación inicial como futuro profesor, ha desarrollado un Sentido de la Estructura, que le permita realizar prácticas matemáticas, donde utilizará los conocimientos sobre operaciones binarias, inversos, identidad: propiedades del objeto Grupo.

En el estudio de Novotná, Stehlíková & Hoch (2006) se analiza el Sentido de la estructura del Álgebra Universitaria y en Novotná & Hoch (2008) se analiza cómo el sentido de la estructura para expresiones algebraicas o ecuaciones de la escuela secundaria se relaciona con el sentido de la estructura del Álgebra Abstracta o universitaria. En el primer estudio, se analizan e interpretan algunos de los problemas que tienen los estudiantes con la comprensión de las operaciones binarias y sus propiedades, la noción de identidad e inverso.

El estudio de Novotná et al. (2006) se sustenta en dos ejes: el primero, en las dos etapas presentadas por Simpson & Stehlíková (2006) y el segundo, que corresponde a la definición del Sentido de la Estructura dada por Hoch & Dreyfus (2006): un estudiante muestra *SE*-sentido de la estructura, si él/ella puede: a) reconocer una estructura familiar en una forma más simple; b) tratar con un término compuesto, como una sola entidad y a través de una substitución apropiada reconocer una estructura familiar en una más compleja y c) elegir manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura.

La investigación de Novotná et al. (2006) retoma los estudios de Simpson et al. (2006) en cuanto a la transición del trabajo con un ejemplo de estructura al trabajo abstracto, que involucra una secuencia complicada de pasos a través de los cuales el estudiante llega a realizar la transición del trabajo con un ejemplo de estructura al trabajo con elementos abstractos. Estas etapas utilizadas para el estudio de Novotná et al. (2006) corresponden a: a) ver los elementos en el conjunto como objetos sobre los cuales actúan las operaciones; b) atender a las relaciones entre los elementos del conjunto las cuales son consecuencia de las operaciones; c) ver los signos usados por el profesor en la definición de estructuras abstractas de objetos y operaciones y ver los nombres de las relaciones a través de los signos como los nombres de las relaciones entre los objetos y las operaciones; c) ver otros conjuntos y operaciones como ejemplos de una estructura general y un prototipo y d) usar el sistema formal de símbolos y propiedades para derivar consecuencias y ver que las propiedades inherentes en los teoremas son propiedades de todos los ejemplos: en Novotná et al. (2006) se hace uso de las dos primeras etapas mencionadas.

A nivel de enseñanza universitaria en Novotná (2000) se argumenta que los estudiantes llegan al curso de Aritmética y Álgebra con experiencias en conjuntos numéricos, Álgebra lineal y polinomial, pero que a menudo tienen problemas con conceptos algebraicos básicos. En el estudio, se evidencia que la transición de la escuela secundaria a la universidad es un proceso doloroso para los estudiantes: un obstáculo en esta transición se presenta cuando se quiere aprender una idea nueva; ya que, la que trae el estudiante no desaparece de su mente y que de igual forma este hecho aparece en la transición al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), ya que por un lado se encuentran las imágenes de los conceptos y por otro su definición. La imagen mental, se define como el conjunto formado por todas las imágenes asociadas al concepto, que incluyen las representaciones del concepto matemático, ya sea en forma gráfica, numérica o simbólica. La definición del concepto, se refiere a la definición verbal o escrita que especifica el concepto (Tall & Vinner, 1981). Se puede decir que el curso de Álgebra abstracta: Teoría de Grupos, se presenta este obstáculo para los estudiantes de formación matemática, en términos de Tall & Vinner, pero además, en este curso se presentan otras dificultades como los conflictos semióticos, con las nociones previas necesarias para la comprensión del objeto Grupo (Sepúlveda, 2014).

En el estudio de Novotná (2006) también se analizan los errores de los estudiantes al solucionar problemas con operaciones binarias y sus propiedades, el elemento identidad y el elemento inverso. Estos errores, primero fueron atribuidos a una insuficiencia en la comprensión de las operaciones binarias, sus propiedades y las nociones de identidad e inverso. Se tomaron inicialmente los errores según el desarrollo de las etapas en la comprensión y los investigadores trataron de organizarlos según el esquema propuesto por Dubinsky et al. (1994). Luego los clasificaron según la percepción de los autores de cómo abstraen los estudiantes la comprensión de una operación y en general de un objeto. Se tiene en cuenta también cuando él/ella basan sus consideraciones en el concept image del objeto (Tall & Vinner, 1981) o en la definición introducida en el curso. En la investigación según el esquema desarrollado por Simpson et al. (2006) combinado con la definición de Hoch et al. (2006), se desarrolla un modelo más complejo para la comprensión y se relacionan las dificultades de los estudiantes con problemas en el desarrollo del sentido de la estructura. Como resultado del estudio se concluye que si las dificultades que se evidencian en la comprensión de estos objetos algebraicos corresponden a problemas con el desarrollo del sentido de la estructura, se pueden trabajar estrategias didácticas en esta dirección, encaminadas a superar las dificultades de los estudiantes.

Entre los resultados de la investigación de Novotná et al. (2006) se determinan las siguientes etapas en el desarrollo del sentido de la estructura:

SSE: Sentido de la estructura aplicado a elementos del conjunto y la noción de operación binaria.
Un estudiante muestra sentido de la estructura si él/ella pueden:

- SSE1: Reconocer una operación binaria en estructuras familiares
- SSE2: Ver los elementos del conjunto como objetos a ser manipulados / comprender la propiedad de clausura
- SSE3: Reconocer una operación binaria en estructuras no familiares
- SSE4: Ver similitudes y diferencias en las formas de definir las operaciones (fórmula, tabla, otras)

SSP: Sentido de la estructura, como aplicado a propiedades de las operaciones binarias. Un estudiante se dice que muestra sentido de la estructura si él/ella pueden:

- SSP1: Entender la identidad en términos de su definición (abstractamente)
- SSP2: Ver la relación entre identidad e inverso: ID → IN

- SSP3: Usar una propiedad por otra: $C \to ID, C \to IN, C \to A$ (identidad, inverso, propiedad conmutativa, asociativa)
- SSP4: Mantener la cualidad y el orden de los cuantificadores
- SSP5: Aplicar el conocimiento de identidad e inverso, espontáneamente

De esta secuencia, se establece que el estudiante primero debe entender cómo trabaja una operación y cuáles son los objetos del conjunto: paso que no es necesariamente sencillo para poder continuar con las otras etapas. Se concluye que la investigación se centra en el aprendizaje de los estudiantes, en cómo comprenden ciertos tópicos de Teoría de Grupos y surge nuevamente, del análisis de estas investigaciones la necesidad de realizar un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico que proporcione al profesor en formación a un conocimiento amplio del objeto Grupo, en la búsqueda de significados para los objetos matemáticos.

Esta investigación resulta importante para el desarrollo de la presente tesis, ya que en ella se aplica una evaluación con el objetivo de analizar el desarrollo del sentido de la estructura en los estudiantes-profesores en formación y se analiza la comprensión del objeto de investigación con el fin de desarrollar estrategias metodológicas para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos.

El Sentido de la estructura, corresponde a uno de los procesos del Pensamiento Algebraico (ver, capítulo 4, sección 4.2.2) que es motivo de análisis en las configuraciones de procesos y objetos del estudiante de formación matemática, cuando efectúa prácticas matemáticas con el objeto Grupo: en este caso, las prácticas las realizan los estudiantes y ellas permitirán evaluar los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes sobre el objeto matemático. Los estudios presentados se relacionan con el tema de investigación sobre el conocimiento didáctico y matemático (CDM) del estudiante de formación matemática, ya que, establece pautas que permiten analizar las dificultades con el objeto de investigación de los estudiantes.

A continuación, se analiza la problemática general que relaciona todas las problemáticas anteriores y corresponde a la determinación de los componentes del conocimiento del profesor, para una enseñanza efectiva del objeto Grupo; tema en el cual se ubica este estudio.

2.5. Problemática relacionada con la determinacipon de los componentes del Conocimiento del Profesor

Se presenta la problemática relacionada con la determinación de los componentes del conocimiento del profesor para una enseñanza efectiva de tópicos matemáticos, para este caso el interés se centra en tópicos de Teoría de Grupos. En esta problemática se analiza al estudiante de formación matemática en relación con la profesión de docente universitario; oficio para el cual se necesitará de la comprensión del objeto matemático grupo. En este sentido, se dará respuesta a la pregunta ¿qué es lo que debe conocer un profesor para que la enseñanza del objeto Grupo, tenga la mayor idoneidad didáctica posible?

En esta dirección, en esta tesis doctoral se presenta un avance en cuanto a la caracterización de aquellos conocimientos que los profesores universitarios deben tener para gestionar idóneamente los aprendizajes del objeto Grupo en sus estudiantes. Se contrapone lo que deben conocer los futuros profesores con los conocimientos que efectivamente tienen como estudiantes de formación matemática sobre el objeto de investigación. Surge también la necesidad de establecer pautas que ayuden a responder en forma parcial a la pregunta enunciada, en la búsqueda de criterios que permitan diseñar acciones formativas o metodologías didácticas para una mejora en los programas de formación de profesores, mediante la potenciación del CDM requerido para la enseñanza del objeto Grupo (Pino-Fan, 2013).

En las investigaciones en la línea de Formación del Pensamiento del Profesor (Philipp, 2007), Sowder (2007), Woods (2008)) se encuentran diversos modelos teóricos que describen los tipos de conocimiento que los profesores ponen en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (Godino, 2009). Existe un consenso general en que los profesores deben dominar los contenidos disciplinares, pero no hay un acuerdo sobre la forma como deben lograr dicho dominio; tampoco acerca de cómo deben concebir la disciplina. Además, se reconoce que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar la competencia profesional [4] siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (¿cómo aprenden los estudiantes? el conocimiento de los afectos, obstáculos y errores, entre otros hechos) (Godino, 2009).

Los profesores organizan la enseñanza, diseñan las tareas de aprendizaje, usan los recursos adecuados y comprenden los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2009). La problemática de la determinación de los componentes del conocimiento del profesor es estudiada por Shulman (1987), Deborah Ball y colaboradores

[4] La Organización de Cooperación y desarrollo Económico (OCDE) en su estudio DeSeCo, las define como: "la capacidad para responder a las demandas y llevar a cabo tareas de forma adecuada."

(2000; 2001; 2005), Schoenfeld & Kilpatrick (2008) y por Godino, Batanero & Font (2007) entre otros. Existen modelos que describen y determinan los componentes del Conocimiento del Profesor y se han realizado numerosas investigaciones en torno a la identificación del complejo de conocimientos que un profesor de matemáticas necesita para que su práctica sea efectiva (Shulman, 1986; 1987; Ball, 2000; Rowland, Hackstep & Thwaites, 2005; Hill, Ball & Schilling, 2008; Schoenfel & Kilpatrick, 2008; Godino, 2009).

La Teoría de la Enseñanza propuesta por Lee Shulman, se pone de manifiesto por primera vez en dos de sus artículos: *Those who understand: Knowledge growth in teaching (1986)* [5] y posteriormente: *Knowledge and teaching: foundations of new reforms (1987)* [6]; a partir de estos artículos surge una propuesta teórica y el modelo: Pedagogical Content Knowledge-PCK, traducido en la literatura española como Conocimiento Didáctico del Contenido (Shulman 1986).

Las razones del sumergimiento de la noción PCK-CDC se encuentran en: la imperante necesidad de profesionalizar la enseñanza; los resultados desfavorables en el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes de secundaria en los exámenes nacionales e internacionales; las críticas recibidas a las corrientes imperantes sobre didáctica del profesor, denominadas proceso-producto y pensamiento del profesor; la ineludible necesidad de recuperar y asignarle el justo valor al Conocimiento del contenido como elemento igualmente importante en el perfil del profesor y la creación de un modelo que pudiera integrar el Conocimiento del Contenido, con el Conocimiento Pedagógico, y la reforma de la enseñanza en Estados Unidos, en la que se manifestaba de manera recurrente la necesidad de elevar la enseñanza a la categoría de una ocupación más respetada, partiendo del supuesto de que existe una base de conocimiento para enseñar (Pinto & González, 2008).

Surge así, la corriente que Shulman denominó Conocimiento Base para la Enseñanza, con la finalidad de analizar el Conocimiento Profesional del Profesor. Esta perspectiva teórica de Shulman y colaboradores (Shulman & Sykes, 1986; Wilson, Shulman & Richert, 1987) no dejó de lado los avances de la perspectiva teórica del Pensamiento del Profesor, sino que la considera y además destaca el papel central que ocupa en la enseñanza, la comprensión de los contenidos curriculares por parte del docente y los alumnos (López, 1999). Se reconoce como precursor de los estudios sobre los componentes del Conocimiento del Profesor de Matemáticas, a Shulman quien en un inicio propuso tres categorías de este conocimiento: El conocimiento del contenido de la materia específica; el Conocimiento Pedagógico del Contenido-PCK: Conocimiento Didáctico del Contenido y el Conocimiento Curricular; Shulman (1986) buscaba resaltar la importancia del Conocimiento del Contenido para la enseñanza y diferenciarlo del conocimiento del contenido que tienen otros profesionales.

[5] Esos quienes entienden: crecimiento del conocimiento para la enseñanza (traducción)

[6] El conocimiento y la enseñanza: fundamentos de las nuevas reformas (traducción)

Según, Ball et al. (2005) la enseñanza debe ser un trabajo profesional con su propio contenido base. Se define el PCK, como aquel que va más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza: El PCK, es la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza (Shulman, 1986, p. 9).

El Conocimiento del Contenido a enseñar, hace referencia a la cantidad y organización del conocimiento como tal en la mente del profesor e incluye: la comprensión de conceptos sobre la materia, marco explicativo de la materia, entre otros. El conocimiento didáctico del contenido, se relaciona específicamente con el conocimiento de la materia para la enseñanza, concretamente con los modos de representar y enunciar el contenido para hacerlos comprensibles a los demás; incluye comprender las características del alumno y del contexto educativo; disponer con claridad de metas educativas, bases filosóficas e históricas, identificar el grado de dificultad en el aprendizaje de determinados temas. El conocimiento del currículo, se constituye en el conocimiento de los materiales instruccionales válidos para enseñar diversos tópicos (materiales diseñados para la enseñanza) (Rojas, Flores & Carrillo, 2013).

Posteriormente, Shulman (1987) amplia a siete las categorías del conocimiento para la enseñanza:

- Conocimiento del contenido a enseñar
- Conocimiento pedagógico general
- Conocimiento del currículo
- Conocimiento pedagógico (didáctico) del contenido-CDC- PCK
- Conocimiento de los estudiantes y sus características
- Conocimiento de los contextos educativos y
- Conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación

El CDC-PCK define, propone y justifica un conjunto de conocimientos sobre el contenido específico y cubre un vacío sobre el conocimiento del profesor de la asignatura específica (Pinto & González, 2008); busca que el profesor comprenda lo que se ha de aprender y cómo se debe enseñar el contenido a partir de la propia práctica docente de la comprensión de cómo el alumno aprende y comprende, resuelve problemas y desarrolla su pensamiento crítico acerca de dicho contenido (Shulman, 1987); este conocimiento representa la intersección entre el conocimiento de la materia, los principios generales de la pedagogía y el contexto; sin embargo, no es solo la conjunción o integración de elementos, sino la transformación del conocimiento del contenido en un contenido enseñable. El PCK, se refiere a esos principios y estrategías generales que ayudan a la gestión y organización de la clase y que aparecen para hacer trascender el contenido.

Para Shulman el CDC, va más allá del conocimiento de la materia específica per se a la dimensión del conocimiento de la materia específica para la enseñanza, pero, se deben incorporar otros elementos adicionales (conocimiento curricular del contenido; repertorio de estrategias instruccionales; selección, diseño y uso de materiales de apoyo; conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido), que marcan la diferencia entre ser matemático y ser profesor de matemáticas (Pinto et al., 2008).

Shulman (1986) define y caracteriza el CDC como: las formas más útiles de representar las ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas; en una palabra, las formas de representar y formular el tema que hacen que sea más comprensible para los demás; incluye un conocimiento (o comprensión) de lo que hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y experiencias traen consigo al aprender estos tópicos y lecciones frecuentemente enseñadas con anterioridad (Pinto et al., 2008).

Shulman (1986) presenta las características y la naturaleza conceptual de los componentes del CDC que contribuyen a comprender el conjunto de conocimientos que debe tener y desarrollar el profesor en su práctica docente, el primer nivel de conocimiento corresponde al Conocimiento del Contenido de la disciplina a enseñar, que es un elemento esencial y previo a su labor de enseñanza: el profesor debe tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: el profesor necesita no solo conocer o comprender qué, sino además saber por qué esto es así, sobre que supuestos pueden ser ciertas las justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas.

Los profesores no solo tienen o deben conocer y comprender el contenido de su materia, sino también cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, esto es, conocer lo que parece ser más fácil o difícil para los estudiantes, cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades del estudiante (Shulman, 1987); para ello se debe tener un Conocimiento Pedagógico de métodos de enseñanza y aprendizaje adaptados al contexto específico de la materia, esto es, el conocimiento de la didáctica específica, el cual define como: las formas más útiles de la representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros (Shulman, 1986).

En el conocimiento de esta didáctica específica, se conjugan dos elementos centrales del CDC: el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales asociadas al contenido que se enseña.

El Conocimiento curricular, hace referencia a la comprensión de los materiales y programas que sirven como herramientas de trabajo para los profesores; el PCK, se constituye en una amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional: el conocimiento de los contextos educativos, va desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y finalmente, el conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Según Shulman, son fuentes de este conocimiento: la formación académica en la disciplina a enseñar; los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (los currículos, los libros de texto, la organización escolar, la financiación y la estructura de la profesión docente); la investigación sobre la escolarización, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores y finalmente, la sabiduría que otorga la práctica misma, las máximas que guían la práctica de los profesores competentes. Así, para Shulman, el PCK, identifica el cuerpo distintivo de conocimientos para la enseñanza; ya que, representa la mezcla entre contenido y pedagogía en la comprensión de cómo un tópico particular, problema o tema se organiza, representa y adapta atendiendo a la diversidad de intereses y habilidades de los estudiantes y se presenta para su enseñanza.

En esta dirección, Ponte & Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores se ubica en la categoría PCK, la cual en su momento representó uno de los avances más importantes en la caracterización y concepciones del conocimiento de los profesores. En esta línea, se encuentran los trabajos de Grossman (1990) que toma los desarrollos de Shulman y colaboradores sobre el Conocimiento Base, los reorganiza y propone un modelo del Conocimiento del Profesor que considera cuatro componentes (p. 5):

- Conocimiento pedagógico general: incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza: conocimiento y creencias concernientes al aprendizaje y los aprendices: conocimiento de los principios generales de instrucción tales como el tiempo de aprendizaje académico (Carroll, 1963), tiempo de espera (Rowe, 1974) o instrucción en pequeños grupos (Cohen, 1986); conocimiento y habilidades relacionadas con la gestión de la clase (Doyle, 1986) y conocimiento y creencias sobre los fines y objetivos de la educación (p. 6).

- Conocimiento del contenido: este conocimiento, se refiere a los conceptos y hechos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos (p.6).

- El PCK, se encuentra compuesto de cuatro componentes: concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido; conocimiento de la comprensión de los estudiantes; conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias instruccionales.

- Conocimiento del contexto: los profesores deben basarse en la comprensión del contexto particular en el que enseñan, para adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y a cada uno de los estudiantes. Este conocimiento incluye: conocimiento de los distritos en los que trabajan los profesores incluyendo las oportunidades, expectativas y limitaciones planteadas por los departamentos; conocimiento del entorno de la escuela incluyendo la cultura de la escuela, directrices y otros factores contextuales en el nivel de la escuela, que afectan la instrucción y el conocimiento de los estudiantes y comunidades específicas junto con los antecedentes de los estudiantes, familias, puntos fuertes, debilidades e intereses (p. 9)

Continuando con la línea de investigación sobre la identificación de los componentes del Conocimiento del Profesor, se encuentran los trabajos de Deborah Ball y colaboradores: Ball (2000), Ball, Lubienski & Mewborn (2001), Hill, Schilling & Ball (2004), Ball, Hill & Bass (2005), Hill, Ball & Schilling (2008) y Ball, Thames & Phelps (2008). Este grupo profundiza el trabajo de Shulman sobre las componentes del Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido y proponen la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT, el cual definen como: el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno (Hill et al., 2008. p. 374). Ball y colaboradores presentan dos categorías para el conocimiento del profesor: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido.

La primera categoría se encuentra constituida: por el conocimiento común del contenido-CCK, conocimiento especializado del contenido-SCK y conocimiento en el horizonte matemático-ECK y el Conocimiento Pedagógico del Contenido por: el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y el conocimiento del currículo (Ball, 2000). El conocimiento común del contenido corresponde al conocimiento que se usa para la enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas (Hill et al. 2008, p. 377). En palabras de Ball, Thames & Phelps (2008) el CCK es aquel que posibilita al profesor para resolver correctamente los problemas o tareas matemáticas que asignan a sus estudiantes; no obstante, los conocimientos y habilidades matemáticas que permiten la resolución de tareas no son exclusivos de la enseñanza, sino que son utilizados en una amplia variedad de contextos. El conocimiento especializado del contenido (SCK), (Ball, Thames & Phelps, 2008) se entiende como el conglomerado de conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza (p. 400). Este conocimiento incluye: como representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377).

Finalmente, el conocimiento en el horizonte matemático lo definen: como una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas (Ball & Bass, 2009, p. 6). Esto es, se trata de un tipo de conocimiento que puede guiar los siguientes tipos de actos y responsabilidades de enseñanza: hacer juicios sobre la importancia matemática; atención al significado matemático subyacente a lo que los estudiantes opinan; destacar y subrayar puntos claves; anticipar y hacer conexiones; notar y evaluar oportunidades matemáticas y detectar distorsiones matemáticas o posibles precursores de confusiones o interpretaciones matemáticas erróneas posteriores. Ball & Bass (2009) definen que el conocimiento en el horizonte matemático tiene cuatro elementos que lo constituyen: un sentido del medio ambiente matemático que rodea la situación actual en la institución; principales ideas disciplinares y su estructura; prácticas matemáticas claves, valores y sensibilidades matemáticas fundamentales.

La segunda categoría que corresponde al conocimiento pedagógico del contenido, se encuentra constituida por: El conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS,) que corresponde al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre como piensan los estudiantes; conocen o aprenden este contenido particular (Hill, Ball & Schilling, 2008); el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)que combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Los profesores secuencian contenidos particulares para la instrucción; los profesores eligen los ejemplos para comenzar con el proceso y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenido; los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las representaciones usadas para la enseñanza de ideas específicas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de las tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes (Ball, Thames & Phelps, 2009, p. 401) y finalmente, el conocimiento curricular que es entendido por el equipo de Ball y colaboradores en el sentido de los trabajos de Grossman (1990).

De otra parte, Schoenfeld & Kilpatrick (2008) en esta dirección de investigación hablan de una "proficiencia" en la enseñanza de las matemáticas haciendo referencia a los conocimientos y competencias que deberían tener los profesores para que su enseñanza sea de calidad. Una teoría de proficiencia para la enseñanza establece las destrezas que deben desarrollar las personas para ser proficientes. Se trata entonces de extender la noción de proficiencia de la matemática escolar (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001) que incluye: la comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

La noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas se interpreta en términos de Competencia Profesional del Profesor de Matemáticas. Schoenfeld & Kilpatrick (2008) proponen distinguir las siguientes dimensiones: conocer las matemáticas escolares en profundidad y amplitud; conocer a los estudiantes como personas que piensan; conocer a los estudiantes como personas que aprenden; diseñar y gestionar entornos de aprendizaje; desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la enseñanza para la comprensión y construir relaciones que apoyen el aprendizaje. Estas dimensiones, corresponden a:

- Conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud. El profesor tiene múltiples maneras de conceptualizar el contenido del nivel correspondiente, representarlo de diferentes maneras, comprender los aspectos claves de cada tópico y ver conexiones con otros tópicos del mismo nivel. El conocimiento profundo del contenido le permite seleccionar las grandes ideas para ser propuestas a los alumnos, así como responder con flexibilidad a las cuestiones que le plantean.
- Conocer a los estudiantes como personas que piensan: implica tener sensibilidad sobre lo que piensan los estudiantes; esto proporciona información adicional sobre cómo los estudiantes dan sentido a las matemáticas y sobre cómo pueden construir sus conocimientos.
- Conocer a los estudiantes como personas que aprenden: supone ser consciente de la teoría del aprendizaje asumida y sus implicaciones en términos de las actividades de clase y las interacciones con los estudiantes.
- Diseñar y gestionar entornos de aprendizaje: la creación de entornos productivos de aprendizaje, incluye bastante más que la sola gestión de la clase: implica la creación de comunidades intelectuales en las que los estudiantes se comprometen en actividades intelectuales legítimas (p. 338).
- Desarrollar normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la enseñanza para la comprensión. La clase debe trabajar como una comunidad de aprendizaje; esto supone que los alumnos tienen que adoptar ciertas normas sociales en la clase, tales como la obligación de explicar y justificar sus soluciones: deben intentar comprender el razonamiento de los otros estudiantes, preguntar si no comprenden, y desafiar los argumentos con los que no están de acuerdo.
- Construir relaciones que apoyen el aprendizaje: el profesor, debe trabajar para organizar el contenido, sus diversas representaciones y poner en relación a los estudiantes entre sí y con el contenido. El aprendizaje emerge de estas relaciones mutuamente constituidas.

- Reflexionar sobre la propia práctica: lograr proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, así como lograr proficiencia matemática, es un proceso interactivo a lo largo de la vida. En un problema práctico de enseñanza, el profesor de matemáticas necesita pensar reflexivamente sobre el problema si quiere resolverlo. Una vez que es habitual la reflexión, puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica (p. 348).

De igual forma, Rowland, Huckstep & Thwaites (2005) proponen un Cuarteto del conocimiento-KQ, como una herramienta que permite observar el conocimiento del contenido matemático de los profesores (tanto el MKT y el PCK) en la práctica de la enseñanza de las matemáticas y además, desarrollar la enseñanza de dicha disciplina. Estos autores consideran también cuatro grandes dimensiones para el cuarteto del conocimiento: Fundamentos: esta dimensión se refiere a los fundamentos o antecedentes teóricos y a las creencias de los profesores en formación. Se trata de los conocimientos, la comprensión y de los recursos que los profesores aprenden en la academia de cara a su preparación (intencional o no) para su papel en el aula; Transformación: se refiere, en congruencia con los aportes del Conocimiento Base de Shulman, a la capacidad del profesor para transformar el conocimiento del contenido que posee en formas que son pedagógicamente poderosas (p. 261). Esto incluye la demostración de los procesos, el uso de materiales instruccionales, la elección de representaciones y la elección de ejemplos (Turner & Rowland, 2011, p. 200); Conexión: se refiere a la coherencia de la planificación de la forma en que aparece un episodio, lección o serie de lecciones, para su enseñanza. La concepción de coherencia incluye la secuenciación de los tópicos dentro y entre las lecciones, incluye el orden de las tareas y ejercicios (p. 263). Esto involucra el hacer conexiones entre los conceptos, decisiones sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual (Turner & Rowland, 2011, p. 201); Contingencia: se refiere a eventos de la clase que son casi imposibles de planificar. Los dos componentes que constituyen esta categoría son: la disposición de responder a las ideas de los niños y la preparación consecuente cuando sea necesaria para desviarse de lo planificado, cuando la lección ha sido preparada (p. 263).

Este cuarteto del conocimiento, originalmente se desarrolló para el estudio del Conocimiento del Contenido, y del Conocimiento pedagógico del contenido de los profesores en formación inicial, pero su uso se ha centrado principalmente en el estudio del conocimiento de los profesores en acción. Esto se debe al contexto en el que se estudian cada uno de los cuatro componentes del cuarteto, lo cual es señalado por Rowland, Huckstep & Thwaites (2005) dentro de las tres categorías, a diferencia de la primera, que se refieren a la forma y al contexto en el cual el conocimiento se aplica para la preparación y desarrollo de la enseñanza. Estas tres categorías, se centran en el conocimiento en la acción, demostrado mediante la planificación para enseñar y el acto de la enseñanza en sí mismo (p. 261).

Godino (2009), en esta línea de investigación que se está analizando sobre el estudio del Conocimiento del Profesor, analiza algunas de las limitaciones en los modelos descritos: una de ellas, es la que incluye categorías demasiado generales: considera que los modelos deben permitir un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento puestos en juego para una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Como consecuencia de esto, propone un sistema de categorías y un modelo del Conocimiento Matemático y Didáctico del profesor que integra, articula y organiza los modelos anteriores desde diferentes puntos de vista. Este modelo del Conocimiento del Profesor se profundiza en el marco teórico (ver, capítulo 4) y corresponde al modelo seleccionado para el estudio del Conocimiento Didáctico y Matemático de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo.

2.5.1. Investigaciones relacionadas con el Conocimiento Didáctico-Matemático

Se presentan estudios sobre el conocimiento CDM del profesor que sirven de referentes en la construcción del marco teórico de esta tesis doctoral: estas investigaciones representan avances en esta línea de investigación, además de definirse como una guía teórica y metodológica para el análisis y la caracterización de las componentes del Conocimiento del Profesor respecto al objeto Grupo.

En primer lugar, se encuentra el estudio de Pino-Fan (2013) que hace referencia al Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor (CDM) y se centra en el tema: Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. La investigación tiene como objetivo determinar si al final del proceso de instrucción, se ha generado en los futuros profesores de bachillerato de México un conocimiento de la faceta epistémica suficiente para una enseñanza idónea de la derivada.

La metodología del estudio se define con un énfasis cualitativo que permite describir y caracterizar una de las dimensiones del Conocimiento didáctico-matemático de los profesores de secundaria/bachillerato para la enseñanza idónea de la derivada, mediante el diseño de instrumentos para evaluar dicho conocimiento en profesores en formación inicial (Pino, 2013). La muestra de los futuros profesores fue intencional y la investigación establece además, una componente cuantitativa al construir instrumentos de evaluación de respuesta escrita, aplicados a muestras representativas de profesores en formación inicial en distintos momentos. Estos datos fueron analizados con métodos estadísticos y así, la investigación en general se describe con un enfoque metodológico de tipo mixto siguiendo los alineamientos de Johnson & Onwuegbuzie (2006).

La población correspondía a futuros profesores de secundaria/bachillerato: estudiantes de Licenciatura en matemáticas, en el contexto mexicano; estudiantes con un conocimiento variado sobre matemáticas y concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La población objetivo se reduce a los estudiantes de sexto y octavo semestre de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, México. Para la recolección de los datos diseñaron un cuestionario que permitía explorar por medio de prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por los futuros profesores el Conocimiento Didáctico-Matemático referente a la Faceta Epistémica en el objeto matemático derivada; conocimiento que se presenta mediante la descripción de configuraciones cognitivas activadas y asociadas a dichas prácticas matemáticas(Pino, 2013).

Entre los resultados del estudio se encuentra: la caracterización de los pares (Prácticas, Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas). Mediante un estudio histórico y epistemológico de la derivada se identificaron los distintos significados parciales para este objeto matemático (Pino, 2013) y se identificaron nueve sistemas de prácticas a lo largo de la evolución histórica, es decir, adoptaron nueve significados distintos (significados parciales): es decir, que el objeto derivada se activa en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración de objetos y procesos matemáticos asociados y corresponden a: La tangente en la matemática griega-CE1; Sobre la variación en la edad media-CE2; Métodos algebraicos para hallar tangentes-CE3; Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes-CE4; Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos-CE5; Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes-CE6; El cálculo de fluxiones-CE7; El cálculo de diferencias-CE8 y la derivada como límite-CE9. Un segundo resultado corresponde a la reconstrucción de un significado global de referencia de la derivada mediante la consideración de los significados parciales obtenidos de la caracterización de los pares (Prácticas, Configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas): este resultado importante se resume en un esquema que muestra la complejidad del significado global de la derivada; se presenta en este esquema las relaciones entre los distintos significados parciales y el nivel de generalización referente a las configuraciones epistémicas asociadas a cada significado parcial.

Las anteriores (nueve) configuraciones aparentemente distintas, tienen similitudes y por tanto, en el estudio se consideran cronológicamente seis sistemas de prácticas/significados parciales que se pueden ver como primarios en cuanto a las configuraciones activadas en dichos sistemas (CE1, CE2, CE3, CE4, CE5 y CE6) y definen un primer nivel de significados. Estas configuraciones tienen un carácter extensivo porque resuelven ciertas situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Dentro de estas seis configuraciones primarias se encuentran algunas similares entre sí, como las CE1, CE3 y CE6 y de otro lado, las configuraciones CE2 y CE4, que dan lugar a un sistema más general que corresponde a: Tangentes, Variación, Velocidades, Máximos y Mínimos y definen un segundo nivel de generalidad en cuanto al significado del objeto matemático (Pino, 2013, pp. 163).

Continuando con el análisis histórico y epistemológico del objeto derivada; Newton, apoyado en la configuración subyacente al sistema de prácticas genérico de variación, velocidades, desarrolló un nuevo sistema de prácticas de la derivada como fluxión, en el cual activa una configuración más general (CE7) y de igual forma Leibniz, apoyado en la configuración asociada al sistema de prácticas tangentes, desarrolla un nuevo sistema de prácticas de la derivada como cociente de diferenciales en el que se activa una configuración más general (CE8) que definen un tercer nivel de generalidad del significado del objeto matemático. Finalmente, Newton y Leibniz, tomando como base sus desarrollos (CE7 y CE8) generaron un nuevo sistema de prácticas de carácter formal de la derivada como límite del cociente de incrementos el cual lleva asociado la configuración (CE9) que constituye la formalización del objeto derivada (Pino, 2013, p. 164).

Otro de los resultados de la investigación de Pino-Fan (2013), corresponde a la caracterización del significado de la derivada pretendido en los planes de estudio oficiales de bachillerato en México y se establece mediante el análisis de la dupla (Plan de Estudios, Libros de Texto) de cálculo diferencial. Esta caracterización se realizó mediante la descripción sistemática de las configuraciones de objetos y procesos activados en las distintas prácticas sobre derivadas que proponían tanto los libros de texto analizados como los planes de estudio. El resultado del análisis, tanto de los planes de estudio como el de los libros de texto de cálculo diferencial del nivel de bachillerato, reveló que en la actualidad el significado de la derivada pretendido en el currículo del bachillerato mexicano es el de la derivada como límite del cociente de incrementos, aplicado en distintos contextos o tipos de problemas.

Como una tercera fase de la investigación el autor realiza un estudio sobre la idoneidad epistémica, el cual proporciona las herramientas teóricas y metodológicas para valorar la representatividad de los significados pretendidos en el currículo de bachillerato mediante la dupla (Plan de Estudio, Libros de texto) respecto del significado global de la derivada. Como resultado del estudio de la idoneidad epistémica de los significados de la derivada pretendidos en el currículo de bachillerato en México, se evidenció que el enfoque moderno del cálculo diferencial se basaba fundamentalmente en el concepto de límite: como resultado se efectuaron investigaciones curriculares en torno a la adecuación de los significados pretendidos respecto del significado de referencia de la derivada (Pino, 2013).

Esta investigación contribuye con aportes importantes para el desarrollo del actual estudio, pero difiere de él; ya que, la noción derivada corresponde a la línea de Análisis y el objeto Grupo pertenece a la línea de Álgebra: dos líneas bien diferenciadas a través de la historia de la matemática. El Álgebra tiene un sentido global, mientras que el cálculo tiene un sentido local. En el capítulo 6, se presenta el estudio fenomenológico, histórico y epistemológico correspondiente al objeto Grupo, junto con el estudio de los significados pretendidos por los libros de texto para este objeto y de los planes de estudio. Estos estudios se utilizan para indagar sobre el conocimiento de la faceta epistémica del CDM, generado en los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo (ver, capítulo 9).

Otra investigación relevante relacionada con el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor para la enseñanza de la probabilidad es la desarrollada por Vásquez (2014); el objetivo de la investigación corresponde a: Evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad que poseen los profesores de educación primaria en activo. El objetivo general se enfoca a utilizar la información recogida en un instrumento de evaluación, para determinar directrices que contribuyan al desarrollo de un conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la probabilidad en profesores de educación primaria que permitan orientar los procesos de formación del profesorado respecto a este contenido y así, constituirse en un aporte en cuanto a la mejora de la práctica educativa.

El enfoque metodológico se define de tipo exploratorio, argumentando que los pocos estudios existentes sobre el tema del Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor, se centran solo en ciertos aspectos del conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad pero de futuros profesores de educación primaria, mientras que este estudio pretende bordar los distintos componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático de profesores de educación primaria en activo (conocimiento común, conocimiento ampliado y conocimiento especializado).

Entre los resultados de la investigación, de Vásquez (2014) se tienen:

- La construcción, validación y aplicación de un cuestionario basado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2011; Pino-Fan, Godino & Font 2013) donde se buscaba medir el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado junto a unas subcategorías de este.
- El estudio, da respuesta a la pregunta de investigación: ¿qué conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad poseen los profesores de educación primaria en activo? para esto se organiza el estudio en dos partes: una parte teórica, orientada a describir el objeto de estudio donde se consideraron diversos aspectos tales como: la evolución histórica y epistemológica de la probabilidad, la diversidad de significados en relación al concepto, aspectos relacionados con los errores y dificultades presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, así como aspectos relacionados con la formación de profesores para enseñar probabilidad. La segunda parte empírica se centra en tres aspectos fundamentales: un estudio exploratorio sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo nacional e internacional y en los libros de texto de educación primaria de chilenos; la construcción del Cuestionario

CDM-Probabilidad y la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores de educación primaria en activo. El interés de dar respuesta al interrogante se fundamenta en los desalentadores resultados (Vásquez, 2014) que obtienen tanto los alumnos chilenos en las pruebas de medición sobre el aprendizaje de las matemáticas a nivel nacional (SIMCE) e internacional (TIMSS, PISA, etc.), como los profesores chilenos en estudios internacionales (OCDE, 2010, TEDS-M, 2010, WEF, 2011-2012).

A partir del estudio histórico y epistemológico se obtiene información relacionada con el origen y evolución de la probabilidad a lo largo de la historia, donde se evidencian dificultades producto de la multiplicidad de significados de este objeto matemático. En este estudio se propone que los significados deben ser introducidos de manera progresiva, comenzando con las ideas intuitivas de los alumnos a lo largo de la educación matemática escolar, hasta llegar a una comprensión del objeto matemático desde sus distintos significados parciales (Batanero, 2005). Estos resultados condujeron a la realización de un análisis de los significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático) en el contexto de la matemática escolar. A partir de la concreción de los significados, identificaron con base en las investigaciones previas, los distintos elementos vinculados a las correspondientes configuraciones de objetos matemáticos primarios presentes en cada uno de los significados de la probabilidad analizados.

Además, en el estudio se presenta el análisis de la literatura especializada en relación al aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y primaria. Dicho estudio les permite conocer y comprender los diversos errores y dificultades asociados a la probabilidad, que se hacen presentes en muchas ocasiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para ello, contemplaron los estudios de algunos autores en esta dirección (Inhelder & Piaget, 1955; Green, 1983; Fischbein & Gazit, 1984; Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; Konold, 1991; Leocutre, 1992; Serrano, 1996; Cañizares, 1997 citado en Vásquez, 2014) quienes destacan la importancia del desarrollo del razonamiento probabilístico de forma gradual a partir de las intuiciones probabilísticas primarias, para así lograr una comprensión adecuada de la probabilidad al finalizar la etapa escolar.

Para el estudio de los principales errores y dificultades presentes en el aprendizaje de la probabilidad en niños de educación infantil y educación primaria, se indaga en la literatura previa sobre los conocimientos del profesor para enseñar probabilidad. Se encontró que las investigaciones relacionadas con este aspecto eran escasas y aún más las que se refieren a profesores de primaria en activo, ya que la gran mayoría se centra en los futuros profesores (Begg & Edward, 1999; Sthol, 2005; Batanero, Cañizares & Godino, 2005; Contreras, 2011; Mohamed, 2012, Gómez, 2014 citado en Vásquez, 2014). Se argumenta además, que las escasas investigaciones relacionadas con esta problemática de estudio, revelan un conocimiento deficiente de los profesores de primaria sobre probabilidad, dado que cuando se ven enfrentados a la enseñanza de la probabilidad, se limitan a enseñar un conjunto de técnicas y fórmulas sin mayores interpretaciones y que este tipo de práctica docente, de acuerdo con Mohamed (2012) no facilita la comprensión de la probabilidad y de los conceptos asociados a ella por parte de los alumnos, mostrando de este modo una debilidad en la comprensión de los contenidos a enseñar y del conocimiento necesario para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje (Vásquez, 2014).

En esta investigación, para el diseño del cuestionario se tiene en cuenta, el significado de referencia establecido a partir del análisis histórico y epistemológico; las investigaciones previas relacionada con el aprendizaje y preparación de futuros profesores para enseñar y el análisis de las orientaciones curriculares y libros de texto de educación primaria chilenos. Con estos datos dieron inicio a la construcción de la versión piloto del Cuestionario CDM-Probabilidad, para lo cual consideraron la selección de tipos de tareas y contenidos principales y la selección de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que era de interés a evaluar. La versión piloto del instrumento estaba compuesta por 10 ítems de respuesta abierta, algunos provenientes de investigaciones previas y otros de elaboración propia. Por medio de estos ítems se abordaron los diversos contenidos seleccionados y los aspectos del conocimiento didáctico-matemático a evaluar (conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado, junto a sus subcategorías) de acuerdo con el modelo del Conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Godino & Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Pino-Fan, Font & Godino, 2013).

Seguidamente, en el estudio, la versión piloto se somete al proceso de validación, para lo cual consideran el juicio de 8 expertos en didáctica de la matemática y la aplicación piloto del cuestionario a un grupo de 8 profesores de educación primaria en activo. A partir del análisis de estos resultados, las observaciones y los comentarios obtenidos de este proceso, se realizan algunas modificaciones que llevan a que el cuestionario en su versión final quede compuesto por 7 ítems. Así, por medio de este proceso garantizan la validez del contenido del instrumento (Muñiz, 1994).

En la investigación, el instrumento final se aplica a un grupo de 93 profesores chilenos de educación primaria de donde infiere que: el conocimiento común del contenido sobre probabilidad de la mayoría de los profesores de educación primaria que participaron del estudio es muy insuficiente; puesto que, el porcentaje de respuestas correctas no logra superar el 22.4 por ciento en promedio; además, observaron que los profesores presentan serias dificultades para resolver correctamente las situaciones problemáticas planteadas, manifestando variados errores y dificultades: evidenciándose la presencia de heurísticas y sesgos probabilísticos al igual que en los resultados obtenidos por Azcárate (1995) con futuros profesores de educación primaria; en cuanto al conocimiento ampliado del contenido, se afirma que tienen un nivel extremadamente insuficiente, puesto que ninguno de los profesores logra responder en forma correcta ni parcialmente correcta las preguntas planteadas, mostrando en su gran mayoría estrategias de resolución incorrectas a partir de concepciones erróneas.

Según los investigadores, los profesores de educación primaria en activo participantes del estudio no cuentan con un conocimiento adecuado y suficiente que les permita identificar los distintos contenidos involucrados en la resolución de las situaciones problemáticas. Con respecto al conocimiento especializado, evidencian que corresponde a un nivel muy insuficiente, siendo el segundo tipo de conocimiento con peor resultado, antecedido por el conocimiento ampliado del contenido. Se señala que al igual que en el caso del conocimiento común del contenido y del conocimiento ampliado del contenido, no se observan mayores diferencias en relación al desempeño obtenido de acuerdo con las variables que caracterizan a los sujetos, a pesar de que algunos presentaron en promedio, un mejor rendimiento, dichas diferencias eran muy leves.

En la investigación de Vásquez (2014) desarrollada con profesores en activo, al igual que en la de Pino-Fan (2013) con profesores en formación inicial, se evalúa el conocimiento didáctico-matemático sobre un objeto matemático y se analiza la faceta epistémica de dicho conocimiento, que según el enfoque EOS corresponde a las categorías descritas. Estos estudios presentan un marco teórico común que sirve de base para la construcción del nuestro; ya que, el estudio que se desarrolla en esta tesis doctoral se encuentra centrada de igual forma en el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo. Es de aclarar que los objetos matemáticos: Derivada y Probabilidad no se relacionan con el objeto Grupo.

En la investigación sobre el Conocimiento del Profesor de Pinto et al. (2008) se señala que según Marks, Even y Shulman es necesario desarrollar más investigación sobre los diferentes componentes, categorías, características, dimensiones e indicadores del Conocimiento Didáctico (pedagógico) del Contenido, para seguir generando un cuerpo de conocimientos que fundamente y oriente la formación de los programas de formación inicial con permanentes y subsecuentes investigaciones. Además, se afirma que es indispensable lograr la conexión entre la investigación didáctica del conocimiento del profesor (a través del CDC) y los programas de formación de profesores; ya que solo a través de la investigación es posible conocer y demostrar los beneficios del CDC, difundir sus alcances, incrementar su credibilidad como modelo de formación y dar cabida a programas de carácter práctico con un alto impacto en el mejoramiento del desarrollo profesional del profesor y del pensamiento crítico del estudiante.

Bajo esta visión y teniendo en cuenta que el enfoque EOS integra el modelo de Shulman del CDM y el modelo MKT de Ball y colaboradores, las afirmaciones anteriores toman gran relevancia; ya que, ellas justifican la importancia de aplicar el modelo del CDM al estudiante de formación matemática, para explorar la componente epistémica del conocimiento respecto al objeto matemático Grupo.

A continuación, se pasa a concretar a partir de las problemáticas expuestas y del análisis de los antecedentes, el problema de investigación del presente estudio centrado en el Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario relacionado con el objeto Grupo.

2.6. Formulación del problema de investigación

En las secciones anteriores, se estableció la necesidad de realizar un estudio que permita describir el significado global del objeto matemático Grupo: estudio sistemático de carácter fenomenológico, histórico y epistemológico, importante para la planificación de los procesos de instrucción. El estudio de los significados del objeto matemático corresponde a uno de los elementos necesarios para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática al final de su proceso de formación y sobre el objeto matemático. Esta exploración es importante; ya que, permite contrastar el conocimiento que debe adquirir el estudiante en formación inicial sobre el objeto Grupo, con el conocimiento real que posee sobre este objeto. En este sentido, esta investigación busca obtener aportes importantes tanto para las administraciones educativas, como para los programas de formación matemática y especialmente, se pretende la búsqueda de mejoras para los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática en cuanto al desempeño profesional para la enseñanza universitaria.

Los interrogantes planteados en las anteriores secciones, se concretan en la siguiente pregunta:

¿Qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática, para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

La pregunta, plantea la caracterización de la faceta epistémica del CDM que involucra: el conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación del conocimiento especializado que proporcione las herramientas para la labor de la enseñanza idónea del objeto Grupo. Estas componentes se desarrollan en el enfoque EOS e integran la componente epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario (ver, capítulo 4); por tanto, el presente estudio se centra en la caracterización de la dimensión epistémica, como una de las componentes del conocimiento del profesor; componente que le permitirá gestionar adecuadamente los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el objeto Grupo.

La faceta epistémica en el modelo del CDM, hace referencia al conocimiento sobre el contenido matemático (Pino-Fan, 2013), es decir, al conocimiento de los significados parciales del objeto matemático de los cuales emerge el significado global de dicho objeto; un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas (ver, figura 4.4) cada una de las cuales lleva asociado un significado parcial del objeto (Font & Godino, 2006). Estos significados parciales determinan el significado global del objeto matemático con diferentes grados de generalidad. Las configuraciones epistémicas se describen con más detalle en el marco teórico (ver, capítulo 4) y corresponden a las relaciones entre los objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) que llegan a formar redes de objetos y son los que intervienen y emergen de cada uno de los sistemas de prácticas determinados para los objetos matemáticos.

La caracterización de la faceta epistémica del CDM del profesor para la enseñanza del objeto Grupo, tiene implicaciones en los programas de formación inicial de profesores, ya que ella permite explorar por una parte, los conocimientos didácticos y matemáticos que deben tener los estudiantes de formación matemática y además, confrontarlos con los conocimientos que efectivamente tienen (conocimiento inicial); ya que, lo ideal en la formación inicial de profesores, es la búsqueda de un acoplamiento entre los conocimientos que efectivamente tienen los estudiantes respecto a los conocimientos de referencia (Pino-Fan, 2013, p. 345) (ver, figura 4.4).

A continuación, se describen los objetivos que permitieron el estudio de cada una de las categorías del CDM de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo.

CAPÍTULO 3

Objetivos y justificación

Se definen en este apartado, los objetivos específicos dando respuesta a preguntas concretas de investigación, resultado del análisis a las problemáticas y antecedentes presentados. Estos objetivos describen el camino, para la consecución del objetivo general y permiten dar respuesta a la pregunta de investigación formulada.

3.1. Objetivo general

Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en su dimensión epistémica, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado que sean la base de un conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo.

3.2. Objetivos específicos

Este objetivo general se descompone en los siguientes objetivos específicos que marcan la ruta para el logro del objetivo general propuesto, los cuales dan respuesta a tres preguntas concretas de investigación relacionadas con el objetivo general.

P1. ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo?

O1. Determinar los significados parciales del objeto Grupo.

O2. Reconstruir el significado global de referencia del objeto grupo (ver, figura 3.1)

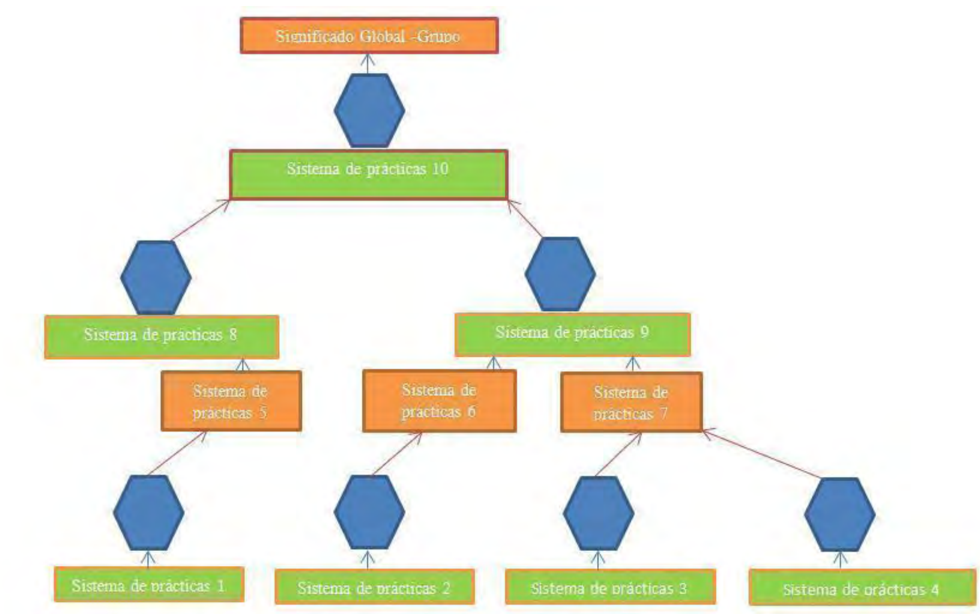


Figura 3.1: Significado Global del objeto Grupo

P2. ¿Los significados del objeto Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global de dicho objeto?

03. Caracterizar el significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura: Teoría de Grupos (4 libros).

O4. Caracterizar el significado de la noción Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos de los estudiantes de formación matemática.

P3. ¿Cómo diseñar un instrumento para evaluar la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática, integrada por un conocimiento común, un conocimiento ampliado como bases de un conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

O5. Seleccionar las tareas que permitan evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del estudiante de formación matemática.

O6. Diseñar e implementar un instrumento piloto que permita una primera exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo.

O7. Implementar el cuestionario definitivo *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado bases del conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

08. Analizar las categorías del CDM: conocimiento común, conocimiento ampliado y conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo.

En el siguiente capítulo se presentan las razones que justifican la búsqueda de una respuesta a la pregunta de investigación planteada y al desarrollo de los objetivos específicos.

3.3. Justificación

3.3.1. Introducción

Desde hace treinta años, el estudio de los conocimientos que un profesor debe tener para la enseñanza idónea de tópicos concretos de la matemática ha tomado cada vez mayor interés, tanto por la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática interesados en la formación de profesores, como por las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes, dependen esencialmente de los conocimientos y habilidades de sus profesores (Pino-Fan, 2013). Una de las problemáticas que ha generado gran interés en esta línea de formación de profesores es la identificación del CDM requerido por los futuros profesores (estudiantes en formación inicial) para desarrollar eficientemente su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

En esta dirección, gran cantidad de investigaciones se dirigen a identificar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debe tener para poder desarrollar eficientemente su práctica y así facilitar el aprendizaje de los estudiantes: en ésta línea de investigación se encuentran los trabajos de Shulman(1986; 1987); Fennema & Franke (1992) y Ball (2000), que presentan una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza (Pino-Fan, 2013). Además, se encuentran las investigaciones de Ball, Lubienski & Mewborn (2001); Llinares & Krainer (2006); Ponte & Chapman (2006); Philipp(2007); Sowder (2007); Ball, Thames & Phelps (2008); Hill, Ball & Schilling (2008); Rowland, Huckstep & Thawaites (2008); Sullivan & Wood (2008) y Godino (2009).

Las investigaciones anteriores, evidencian que no existe un acuerdo sobre un marco teórico que permita describir el conocimiento de los profesores de matemática (Rowland & Ruthven, 2011). Además, pocos de estos estudios se orientan al diseño de instrumentos para explorar y caracterizar el CDM del estudiante de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo y de otros aspectos que se incorporan en esta dirección tales como: el significado del objeto matemático Grupo, que permita explorar y caracterizar el CDM del profesor universitario; la determinación de criterios encaminados al diseño de metodologías didácticas para desarrollar y potenciar el conocimiento especializado sobre el objeto matemático; la determinación de criterios para evaluar el conocimiento del profesor sobre el objeto Grupo y el estudio de los programas de formación matemática, que den respuesta a las preguntas ¿cuál es el conocimiento real de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo? y ¿cuál es el conocimiento de referencia que deben tener estos estudiantes de formación matemática sobre dicho objeto matemático? además del conocimiento que se plantea en los textos y en los mismos programas académicos.

Respecto al modelo de Ball y Colaboradores (2000; 2008) se encuentran cuestiones abiertas como por ejemplo ¿cómo se evalúan o miden los diversos componentes del MKT?, ¿cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los diferentes componentes del MKT?, ¿cómo se relacionan entre sí los diversos componentes del MKT? (Godino, 2009).

Según lo expuesto, este estudio pretende dar respuesta a algunos de los interrogantes planteados y busca avanzar en la determinación de los componentes del conocimiento del profesor para la enseñanza idónea del objeto Grupo, considerado como un objeto esencial del Álgebra Abstracta. El Álgebra Abstracta en general y la Teoría de Grupos en particular, presentan serios problemas educativos: facultades de matemáticas y estudiantes, generalmente, consideran que ésta es una de las asignaturas de pregrado que parece dar a los estudiantes una gran cantidad de dificultades en ambos términos: en cuanto al contenido y con el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas abstractas (Hart, 1994; Selden & Selden, 1987).

Como conclusión, se puede establecer que se justifica el desarrollo de la presente investigación en parte, del análisis realizado a las investigaciones presentadas en los antecedentes de donde surgió precisamente el interés por relacionar el objeto Grupo y el CDM del profesor universitario. Además, se tiene presente que este estudio relacionada con el CDM de los profesores en formación inicial, es una línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que se ha ido incrementando como lo muestra el gran número de investigaciones en esta dirección. Por otro lado, existen investigaciones que estudian como tal el objeto Grupo pero, en ciertos aspectos de la comprensión y que proporcionan información respecto a las dificultades de los estudiantes con este objeto matemático; pero, en las investigaciones analizadas pocos son los estudios epistemológicos, históricos y fenomenológicos del objeto matemático. Así, la presente investigación surge del interés de relacionar estos dos campos, precisamente al evidenciar la existencia de unos antecedentes a nivel internacional y nacional que justifican la importancia de realizar más investigaciones que permitan describir el complejo de componentes del Conocimiento del Profesor para el caso: universitario, relacionadas con el objeto Grupo.

A continuación, se analiza el marco internacional y el local, para justificar la importancia y relevancia del presente estudio, centrado en la evaluación del CDM de los estudiantes de formación matemática relacionados con el objeto Grupo.

3.3.2. Contexto internacional

El objeto Grupo del Álgebra Abstracta ha sido investigado desde diferentes aproximaciones teóricas: a) Cuestiones de índole cognitiva: concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores, dificultades (Kieran, 1992; Dubinsky & Leron, 1993; Nicholson, 1993; Dubinsky, Dauterman, Leron & Zazkis, 1994; Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Dubinsky & Leron, 1994; Hazzan & Leron, 1996; Asiala, Dubinsky et al., 1997; Dubinsky, 1997; Brown, DeVries et al., 1997; Hazzan, 1999) e b) Investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de nociones de Teoría de Grupos (Hoch, 2003; Hoch, 2006; Novotná, Stehlíková & Hoch, 2006; Simpson & Stehlíková, 2006; Novotná & Hoch, 2008). Los anteriores estudios evidencian la existencia de una problemática a nivel internacional sobre dificultades tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos: la enseñanza y el aprendizaje de objetos de la matemática específicamente del objeto Grupo han presentado dificultades a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en varios aspectos, como se evidencia en los antecedentes y en las problemáticas presentadas.

La formación didáctica y matemática de los profesores en formación, es un campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas, hecho que se evidencia en estudios (Bishop et al., 2003; English et al., 2002; Llinares & Krainer, 2006; Hill et al., 2007; Franke et al., 2007; Sowder, 2007; Gómez, 2007) y en revistas como el Journal of Mathematics Teacher Education, de importancia para las administraciones educativas, los formadores de profesores y para los profesores en formación. Además, se encuentra un marco teórico de investigación didáctica el EOS, bajo el cual se han realizado estudios enfocados a explorar el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor en objetos matemáticos y estudios que implican Análisis Didácticos de procesos de instrucción y su valoración (Font, Planas & Godino, 2010; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Pino, Godino & Font, 2011; Pochulu & Font, 2011), pero hasta el momento el objeto Grupo no se ha estudiado en esta dirección y bajo el enfoque EOS.

3.3.3. Contexto nacional

A nivel nacional, se justifica el estudio del CDM del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo, dada la existencia de los programas de formación matemática (Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas) donde los egresados pueden desempeñar la labor de la docencia universitaria. Existe el cuestionamiento acerca de ¿cuáles son los conocimientos sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor docente? En esta dirección, a nivel nacional existe una normatividad en Educación Superior que establece que tanto los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, como los de Matemáticas pueden ser docentes universitarios; hecho que precisamente justifica el presente estudio enfocado en los conocimientos de estos estudiantes en las áreas de su desempeño.

La normatividad para los programas de Licenciatura en Matemáticas, define que para el Licenciado en Matemáticas su área de desempeño es la Matemática y para los estudiantes de Matemáticas establece la Teoría de Grupos como uno de los contenidos mínimos del programa; así, de la normatividad nacional se tiene que el estudiante de formación matemática al final de su proceso de estudio debe tener unos conocimientos básicos sobre el objeto Grupo y de ahí se deriva el hecho de pretender explorar este conocimiento CDM, que se ha potenciado y/o desarrollado en su proceso de formación.

En esta dirección, los docentes de Teoría de Grupos también se cuestionaron sobre ¿cómo conseguir que el estudiante de formación matemática comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos? Esto se podría basar en cierta forma en las notas de la asignatura de Teoría de Grupos o Álgebra I y en la experiencia de los docentes en esta asignatura. Se realizó un análisis de las calificaciones en Teoría de Grupos de los años 2007-2011 (ver, figura 3.2 y 3.3) en los programas de formación matemática de una universidad Colombiana y se presenta en este apartado para analizar los cuestionamientos de los profesores de la asignatura: este curso aparece por primera vez para los estudiantes de Matemática en el segundo semestre del año 2009 ya que el programa de Matemáticas e inició en el año 2007.

Programa	Año	Semestre	Promedio
Lic. Matemáticas	2007	1	23
Lic. Matemáticas	2007	1	34
Lic. Matemáticas	2007	2	33
Lic. Matemáticas	2007	2	27
Lic. Matemáticas	2008	1	27
Lic. Matemáticas	2008	1	34
Lic. Matemáticas	2008	2	32
Lic. Matemáticas	2008	2	31
Lic. Matemáticas	2009	1	30
Lic. Matemáticas	2009	1	31
Lic. Matemáticas	2009	2	24
Lic. Matemáticas	2009	2	30
Lic. Matemáticas	2010	1	25
Lic. Matemáticas	2010	1	30
Lic. Matemáticas	2010	2	30
Lic. Matemáticas	2010	2	29
Lic. Matemáticas	2011	1	29
Lic. Matemáticas	2011	1	27
Lic. Matemáticas	2011	2	33
Lic. Matemáticas	2011	2	28
Matemáticas	2009	2	29
Matemáticas	2010	1	29
Matemáticas	2010	2	33
Matemáticas	2011	1	36
Matemáticas	2011	2	26

*La asignatura de Álgebra I, cambia de nombre a Teoría de Grupos en el programa de Licenciatura en Matemáticas.

Figura 3.2: Promedios por semestre de la asignatura Teoría de Grupos o Álgebra I

El promedio general de los dos programas corresponde a 30 puntos en una escala de 0-50. El programa de Licenciatura en Matemáticas presenta un promedio de 29 puntos y el de Matemáticas de 31 puntos. Así, el 42 por ciento de los Licenciados aprueban en promedio el curso de Teoría de Grupos versus un 62 por ciento del programa de matemáticas en este periodo de tiempo. Se puede decir que los promedios generales no presentan una variación significativa, pero del porcentaje de aprobación surgieron algunas preguntas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de Teoría de Grupos en los programas de formación matemática.

En la Figura 3.3, presentamos un comparativo de notas por año y por semestre de los promedios de los dos programas. En el primer semestre del año 2011, se alcanza una máxima variación de 7 unidades entre estos promedios. Para el programa de Licenciatura en Matemáticas de 20 semestres, 9 presentan pérdida y para Matemáticas de 5 semestres, 3 presentan pérdida. Las temáticas generales para los dos cursos son las mismas; el cambio se puede presentar en los textos a seguir (el docente elige sus textos) y en la metodología usada por el profesor. Los profesores del curso, son docentes en la línea de Álgebra y el director de la Escuela de Matemáticas lo asigna en cada uno de los programas; además, existen tres cursos de Teoría de Grupos, dos en la licenciatura (programa diurno y nocturno) y uno en Matemáticas.

Año / semestre	Matemáticas	Lic. Matemáticas
2009 (2)	29	27
2010 (1)	29	28
2010 (2)	33	30
2011 (1)	36	29
2011 (2)	26	30

Figura 3.3: Promedios por semestre de la asignatura: Teoría de Grupos en los programas de formación matemática

De estos análisis también surge el interrogante sobre ¿qué conocimientos poseen los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo? Estos estudiantes de pregrado, según la normatividad de Educación Superior en Colombia y de los mismos programas pueden ingresar como docentes a las universidades para las escuelas de Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas; como se evidencia en las dos secciones siguientes. Así, en esta investigación se indaga sobre los conocimientos que llevarán al estudiante de formación matemática a la realización de buenas prácticas educativas y a la comprensión del objeto matemática Grupo (Ley 115 de 1994; Resolución 5443 de 2010).

3.3.4. Normatividad en educación superior

La legislación educativa colombiana, en su resolución 5443 del 30 de junio de 2010, artículo 2, define las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación, en el marco de las condiciones de calidad y resuelve en cuanto al Perfil del educador:

" el educador es un profesional con formación pedagógica que, atendiendo a las condiciones personales y de los contextos, orienta procesos de enseñanza y de aprendizaje y guía, acompaña y promueve la formación y el desarrollo de las competencias de sus estudiantes. " En este sentido, los programas de Formación de Educadores, deben fortalecer las competencias básicas del educador para: conocer y utilizar procesos y conceptos fundamentales de las matemáticas que le permitan interpretar y representar situaciones cotidianas y especializadas de manera gráfica, simbólica, numérica y verbal y solucionar problemas en diversos contextos. De esta resolución, se deduce que el profesor debe poseer un CDM del contenido que le permita promover el desarrollo de las competencias en sus estudiantes; este es un argumento que hace que la exploración del CDM de los estudiantes de formación matemática en el objeto Grupo, tenga relevancia para la comunidad educativa universitaria; ya que, además se pretende dar respuesta a la siguiente problemática en Educación Matemática: ¿cómo diseñar programas de formación que influyan en la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores?

La, normatividad en Educación Superior en Colombia se encuentra conformada en primer lugar por: una Constitución Política de Colombia de 1991 que establece que la educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social, con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura (artículo, 67). Se garantiza la autonomía universitaria. Las universidades podrán darse sus directivas y regirse por sus propios estatutos de acuerdo con la ley. La ley establece un régimen especial para las universidades del Estado. El Estado fortalecerá la investigación científica en las universidades oficiales y privadas y ofrecerá las condiciones especiales para su desarrollo. El Estado facilitará mecanismos financieros que hagan posible el acceso de todas las personas aptas a la educación superior (artículo, 69).

La estructura y funcionamiento para la Educación Superior en Colombia se basan en:

a) Una normatividad enmarcada en la Constitución Política de 1991 y la Ley 30 de 1992 de Educación Superior. Posteriormente, tiene desarrollos en la Ley 115 de 1994 del 8 de febrero o Ley General de Educación. A partir de allí, el marco normativo se completa con decretos reglamentarios y con sentencias de la Corte Constitucional.

b) Está entendida como un servicio público que puede ser ofrecido tanto por el estado como por particulares y se realiza con posterioridad a la educación media.

c) Se establece la autonomía universitaria con la que el Estado otorga a las universidades el derecho a definir sus estatutos, designar sus autoridades académicas y administrativas, crear, organizar y desarrollar sus programas académicos, definir y organizar sus labores formativas, académicas, docentes, científicas y culturales, otorgar los títulos correspondientes, seleccionar a sus profesores, admitir a sus alumnos y adoptar sus correspondientes regímenes y establecer, arbitrar y aplicar sus recursos para el cumplimiento de su misión social y de su función institucional.

d) El Estado garantiza la calidad del servicio educativo a través de la práctica de la suprema inspección y vigilancia de la Educación Superior.

e) Las políticas y planes para el desarrollo de la Educación Superior son primeramente, propuestos por el Consejo Nacional de Educación Superior (CESU), organismo con funciones de coordinación, planificación, recomendación y asesoría, integrado por representantes de todas las instancias relacionadas con la Educación Superior.

f) Existe un Sistema Nacional de Acreditación (SNA) para programas e instituciones de carácter voluntario y temporal, que fomenta y reconoce altos niveles de calidad en la Educación Superior. Para orientar y liderar dicho sistema, se conformó el Consejo Nacional de Acreditación (CNA,) organismo encargado de aplicar las políticas de acreditación diseñadas por el CESU.

g) Se han definido varios tipos de IES según su naturaleza y objetivos (Instituciones Técnicas Profesionales, Instituciones Tecnológicas, Instituciones Universitarias y Universidades).

h) Actualmente, funciona el SNIES (Sistema Nacional de Información de la Educación Superior) con el objetivo de orientar a la comunidad sobre la calidad, cantidad y características de las instituciones y programas del sistema así como de canalizar toda la información sobre la Educación Superior en Colombia.

En cuanto a las universidades, éstas son instituciones que acreditan su desempeño con criterio de universalidad en investigación científica o tecnológica; formación académica en profesiones o disciplinas y la producción, desarrollo y transmisión del conocimiento de la cultura universal y nacional. Sus programas tienen una duración de diez semestres, que generalmente se extiende a once y doce para el caso de los programas nocturnos. Estas instituciones están facultadas para adelantar programas de formación en ocupaciones, profesiones o disciplinas, programas de especialización, maestrías, doctorados y posdoctorados (Capítulo III, artículos 18, 19, capítulo IV, Ley 30 de 1992, de 28 de diciembre).

Respecto a las exigencias en el número, dedicación, nivel de formación y experiencia de los profesores, el Consejo Nacional de Acreditación, al describir las características para ingresar al Sistema Nacional de Acreditación y optar por la acreditación de calidad (LA, 2013), afirma que: De acuerdo con la estructura organizativa de la institución y con las especificidades del programa, este cuenta directamente o a través de la facultad o departamento respectivo, con un número de profesores con la dedicación, el nivel de formación y la experiencia requeridos para el óptimo desarrollo de las actividades de docencia, investigación, creación artística y cultural, y extensión o proyección social, y con la capacidad para atender adecuadamente a los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, los profesores universitarios son nombrados por las facultades o los departamentos, quienes definen el nivel de formación y experiencia requeridas: cada universidad define sus criterios de selección de docentes. Esta normatividad garantiza que las universidades adelantan programas de formación en ocupaciones, profesiones o disciplinares.

El artículo 117 de la ley 115 de febrero 8 de 1994, señala las normas generales para regular el servicio público de la educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público. Define la correspondencia entre la formación y el ejercicio profesional de educador. El ejercicio de la profesión de educador corresponderá a la formación por él recibida; como consecuencia, las instituciones de educación superior certificarán el nivel y el área del conocimiento en que hizo énfasis el programa académico.

En esta dirección, el artículo 118 de la ley 115, establece el ejercicio de la docencia por otros profesionales: por necesidades del servicio, quienes posean título expedido por las instituciones de educación superior, distinto al de profesional en educación o licenciado, podrán ejercer la docencia en la educación por niveles y grados, en el área de su especialidad o en un área afín. Estos profesionales podrán también ser inscritos en el Escalafón Nacional Docente, siempre y cuando acrediten estudios pedagógicos en el país o en el extranjero, en una facultad de educación o en otra unidad académica responsable de la formación de educadores, con una duración no menor de un año.

Con estos artículos se justifica la necesidad de estudiar los programas de formación matemática: Licenciatura en Matemáticas y Programa de Matemáticas: respecto a sus profesionales para el desempeño en la enseñanza universitaria y en relación con el objeto Grupo.

3.3.5. Normatividad de los programas de formación matemática

El Decreto 2566 de Septiembre 10 de 2003, establece las condiciones mínimas de calidad y demás requisitos para el ofrecimiento y desarrollo de los programas académicos de educación superior y dicta otras disposiciones. En el artículo 3. en cuanto a la justificación del programa, establece que: La justificación del programa deberá tener en cuenta los siguientes criterios:

a) La pertinencia del programa en el marco de un contexto globalizado, en función de las necesidades reales de formación en el país y en la región donde se va a desarrollar el programa.

b) Las oportunidades potenciales o existentes de desempeño y las tendencias del ejercicio profesional o del campo de acción específico.

c) El estado actual de la formación en el área del conocimiento, en el ámbito regional, nacional e internacional.

d) Las características que lo identifican y constituyen su particularidad.

e) Los aportes académicos y el valor social agregado que particularizan la formación propia de la institución y el programa con otros de la misma denominación o semejantes que ya existan en el país y en la región.

f) La coherencia con la misión y el proyecto educativo institucional.

La resolución 2769 del 20 de Noviembre de 2003 define las características específicas de calidad para los programas de pregrado en Ciencias Exactas y Naturales, en su artículo 2, respecto a los aspectos curriculares y en su literal 2.3.4. establece que: para el programa de formación académica en Matemáticas, se exige la formación teórica y práctica en: Cálculo: diferencial, integral y vectorial; Álgebra lineal; Álgebra abstracta: teorías de grupos, teorías de anillos y teoría de cuerpos; Ecuaciones diferenciales; Geometría: euclidiana, diferencial; Análisis numérico; Análisis matemático; Topología; Probabilidad y Estadística; Teoría de Números; Métodos Numéricos y Variable compleja.

A partir de la ley 1188 de 2008 del 25 de abril y el Decreto 1295 de 2010 del 20 de abril, se establece en la Resolución 5443 de 2010 del 30 de junio, que deroga la Resolución 1036 de 2004 del 22 de abril, las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación:

a) Se establece que los programas de formación profesional en educación deben fortalecer las competencias básicas y desarrollar las competencias profesionales de los educadores, entendidos como profesionales en formación pedagógica.

b) Se replantean los criterios para la denominación de los programas, estableciendo así de manera particular, la existencia de las Licenciaturas en Matemáticas que forman docentes para el ciclo de secundaria para la Educación Básica y para la Educación Media y deja por fuera las Licenciaturas en Educación Básica con énfasis en Matemáticas promovidas por aquel decreto.

c) Se establece la necesidad de demostrar la pertinencia de los programas frente a la demanda del contexto.

d) Se determina que la práctica pedagógica debe durar un año lectivo.

e) Se plantea que se deben formular políticas de investigación educativa, pedagógica y didáctica, que fomenten la reflexión o el pensamiento crítico, la indagación y el planteamiento de soluciones innovadoras (artículo 7).

f) Se exige que los formadores de profesores posean las competencias básicas y profesionales que promoverán en sus estudiantes.

g) Se requiere incluir el uso pedagógico de las TICS en el desarrollo de los programas de formación.

h) Se ratifica la necesidad de la autoevaluación para plantear un plan que cualifique el programa en los aspectos de calidad evidenciados como oportunidades de mejoramiento.

j) Se abre una opción para que los normalistas graduados se integren a las licenciaturas.

En la normatividad presentada, se establece que el programa de Matemáticas presenta unos contenidos mínimos (art. 2, numeral 2.3.4, Resolución 2769 de 2003, del 13 de noviembre) a diferencia de la indefinición de contenidos para los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas, en la normatividad análoga. Los programas de Matemáticas tienen la opción de ofrecer además el título de Licenciados en Matemáticas: " Aquellos programas que además de cumplir con las características específicas de calidad contempladas en esta resolución, cumplan con las establecidas para los programas de pregrado en educación, podrán otorgar, además del título propio al área de ciencias exactas y naturales, el de licenciado en biología, física, geología, matemáticas o química, según el caso" (art. 1, Resolución 2769 de 2003, del 13 de noviembre), pero, esta condición no es explícita para los programas de formación de profesores; además, no está claramente determinado cuales programas son los responsables de la formación de los profesores de Matemáticas para la Educación Superior: "seguramente los programas de posgrado en Matemáticas seguirán teniendo el papel protagónico en tal dirección, pero no deberán permanecer por mucho tiempo ajenos a las dinámicas de campos como la Didáctica de las Matemáticas o la Educación Matemática" (Guacaneme, Bautista & Salazar, 2012).

La normatividad establece que para los programas de Licenciatura en Matemáticas, la Pedagogía es la disciplina fundante y dentro de ella ubica la Didáctica que para este caso correspondería a la Didáctica de la Matemática. Con esta normatividad se justifica la relevancia de este estudio donde se analiza el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, al final de su proceso de formación, en tópicos específicos de la Matemática, para este caso del objeto Grupo.

A continuación, se pasa a establecer las nociones teóricas que sirvieron como herramientas de análisis y que permitieron el desarrollo de las fases propuestas para este estudio centrado en el análisis y caracterización del CDM del profesor universitario en relación con el objeto Grupo.

CAPÍTULO 4

Marco teórico

4.1. Introducción

La normatividad descrita para los programas de Educación Superior, referente a los programas de formación matemática, establece características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación y de igual forma para el programa de matemáticas, establece unos conocimientos mínimos respecto al objeto de investigación, por tanto, bajo esta normatividad las universidades colombianas dentro de su autonomía universitaria establecen los perfiles para sus docentes donde se encuentran los profesionales en formación matemática.

En este sentido, con el fin de explorar el conocimiento del estudiante de formación matemática sobre el contenido y respecto al objeto Grupo, este capítulo se divide en tres secciones: una primera parte que hace referencia a los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado-PMA de los estudiantes. Una segunda parte, donde se presentan las nociones desarrolladas en la perspectiva teórica EOS las cuales sirvieron de guía para el desarrollo de la investigación centrada en la exploración de la dimensión epistémica del conocimiento Didáctico-Matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo y finalmente, se presentan los modelos que estudian el Conocimiento del profesor y que integran el modelo del CDM: modelo que se define en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y que permitieron analizar la faceta epistémica de este CDM, a través de prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes cuando solucionan problemas relacionados con el objeto Grupo.

4.2. Pensamiento matemático avanzado

El grupo de trabajo en Pensamiento Matemático Avanzado, nace en 1985, en la sociedad Psychology of Mathematics Education con el objetivo de profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall 1991). Alrededor de los años 80, el interés en Didáctica de la Matemática se desplazó hacia la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos, reorientando la preocupación hacia las competencias y habilidades. Las investigaciones evolucionaron y empezaron a ocuparse también de tópicos que por su naturaleza y complejidad, se situaban dentro de la llamada matemática escolar superior. Entre estos tópicos, se encuentran: límite, derivada, integral y el objeto Grupo, entre otros. Para trabajar con estos objetos se admitió que era necesario poner en juego procesos de abstracción y de generalización, que tienen un papel clave en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

Dreyfus (1991) define la abstracción como el proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos y la generalización como el derivar o inducir desde casos particulares para identificar generalidades y expandir los dominios de validez. Por su parte Tall (1991) a partir de los aspectos cognitivos que observó, distinguió diferentes procesos de generalización: (a) expansiva (generalización en la cual el estudiante extiende su estructura cognitiva pero sin producir cambios en las ideas corrientes); (b) reconstructiva (generalización en la cual se requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva) y (c) disyuntiva (generalización en la que los estudiantes son capaces ahora de operar en un amplio rango de ejemplos y no parece ser muy duradera) (Sánchez, 2012).

Tall (1981) y Vinner (1991) proponen una teoría cognitiva sobre la forma en la que los alumnos aprenden los conceptos matemáticos. Para muchos estudiantes, una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas es su alto grado de abstracción. Aunque la abstracción y la generalización no pueden ser consideradas características exclusivas del pensamiento matemático avanzado, parece haber cierto acuerdo en que éstas, junto con la definición, la demostración y la formalización, adquieren mayor importancia en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

El paso del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA) exige una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva con la cual se pasa, por un lado, de "describir" a "definir" y por otro, de "convencer" a "demostrar". Para Tall (1991) los alumnos que tienen entre 16 y 20 años están intelectualmente preparados para dicha transición. Tall, además expone algunas diferencias entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, pero advierte que no es fácil dar una explicación precisa o satisfactoria del paso del pensamiento matemático elemental al avanzado (Sánchez, 2012).

Se proponen diferencias entre el PME y el PMA: Robert & Schwarzenberger (1991) establecen que, en el pensamiento matemático avanzado: (a) los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además, éstos son presentados de manera formal; (b) los conceptos enseñados llevan asociados procesos (generalización, abstracción y formalización) que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior: el que se tenía sobre el concepto y finalmente, (c) los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos (Sánchez, 2012).

Existe, una distinción entre el PME y PMA, al considerar que el PMA es un pensamiento que requiere razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas, que no es enteramente accesible a través de los cinco sentidos (p. 17-18): un concepto se considera como parte del pensamiento matemático avanzado según los aspectos que involucre. Por su parte, Edwards, Dubinsky & McDonald (2005) no creen que se pueda delimitar exactamente una línea divisoria entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado, consideran que el PMA forma parte de un proceso continuo de pensamiento que trasciende la experiencia procedimental o las intuiciones del pensamiento matemático elemental, sin ignorarlas ni abandonarlas. Se acepta que el clasificar un concepto como de PMA depende del contexto en el que se está trabajando (Sánchez, 2012).

Las formas de pensamiento se separan de las formas de comprensión; por un lado, los significados particulares que los estudiantes dan a un término, sentencia o texto, la resolución de un problema o la justificación que usan para validar o refutar una afirmación, son formas de comprensión. Y de otro lado, las teorías generales implícitas o explícitas que subyacen a tales acciones son formas de pensamiento (Harel & Sowder, 2005). Así, se define que un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con la cual ha superado estos obstáculos. (pp. 34-35).

Un obstáculo se considera epistemológico si cumple tres condiciones: (a) hay trazas de él en la historia de las matemáticas; (b) no está generado por una ausencia de conocimiento, o por una mala concepción, sino por una o más piezas de conocimiento o concepciones que producen respuestas satisfactorias en un contexto determinado y generan respuestas inválidas fuera de ese contexto y (c) ocasiona contradicciones y generan deseablemente un mejor conocimiento que, sin embargo, no es suficiente para que el conocimiento anterior desaparezca (Harel & Sowder, 2005).

Esta línea de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado, surge en España, en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de

Barcelona (Azcárate, 1996) y se amplia luego a otras universidades y corresponde también, a una línea que tiene entre sus objetivos profundizar en el estudio de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas, que adquiere una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, son procesos que tienen una componente psicológica.

En este sentido, se analizan algunos de los procesos del PMA como parte de los objetos primarios que conforman las configuraciones epistémicas que se activan en el desarrollo de las prácticas matemáticas que son motivo de análisis dentro de la exploración del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática.

Como conclusión, el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) se relaciona con los procesos mentales propios de las Matemáticas Superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario y que de acuerdo con Azcárate & Camacho (2003, p. 136-141), este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que destaca: el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración. En esta dirección, lo que diferencia a las Matemáticas elementales de las avanzadas es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla: entre los procesos más potentes para esto, se encuentran los que permiten dicho control, en particular, la representación y la abstracción: Azcárate (1996) establecen que en las matemáticas elementales los objetos se describen mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen (Aldana, 2011).

4.2.1. El objeto Grupo y el pensamiento matemático avanzado

En esta sección, se describen algunos de los procesos del PMA, que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático Grupo, pero primero, se presenta el aporte de la Psicología a este pensamiento.

4.2.1.1. La psicología en el pensamiento matemático avanzado

Una dificultad fundamental en la discusión de la naturaleza de la psicología del pensamiento matemático avanzado aparece debido a:

> ...el tema involucra las dos disciplinas, la psicología y las matemáticas, y sería necesario, con el fin de ser tratados adecuadamente, ser a la vez psicólogo y matemático. Debido a la falta de este equipo, el sujeto ha sido investigado por los matemáticos, por un lado, y por los psicólogos de otro (Hadamard, 1945, p. 1).

Los exponentes de las dos disciplinas ven el tema de diferentes maneras: el psicólogo para extender las teorías psicológicas a los procesos del pensamiento en un dominio de conocimiento más complejo y el matemático para buscar información sobre el proceso de pensamiento creativo, para mejorar la calidad de la enseñanza o de la investigación (Tall, 2002). Se da una atención especial al ciclo completo de la actividad del pensamiento matemático avanzado desde: el acto creativo de considerar un problema en un contexto y desde la investigación matemática que conduce a la formulación creativa de conjeturas junto con la fase final de refinamiento y prueba; muchas de las actividades que se realizan en este ciclo, se producen desde la primaria con la resolución de problemas matemáticos: sin embargo, la posibilidad de una definición formal y de la deducción son un factor que distingue al pensamiento matemático avanzado.

Las matemáticas para la enseñanza a menudo presentan la forma final de la teoría deducida en lugar de permitir que el estudiante participe en el ciclo creativo completo. En palabras de Skemp (1971), los enfoques actuales para la enseñanza de pregrado tienden a dar a los estudiantes el producto del pensamiento matemático en lugar del proceso del pensamiento matemático (Watson & Tall, 2002). Los métodos actuales de enseñanza, presentan el conocimiento matemático avanzado dejando de darle todo el poder al pensamiento matemático y además, tiene otra deficiencia igual de grave: una presentación lógica que puede no ser la apropiada para el desarrollo cognitivo del alumno (Watson & Tall, 2002).

El célebre matemático Henri Poincaré afirmaba que: Es imposible estudiar las obras de los grandes matemáticos, sin darse cuenta y distinguir dos tendencias opuestas, o más bien dos tipos de pensamiento completamente diferentes. Unos están preocupados por la lógica; al leer sus trabajos, uno cree que han avanzado paso a paso, sin dejar nada al azar. El otro tipo es guiado por la intuición y en la primera carrera van a hacer conquistas rápidas pero a veces precarias (Poincaré, 1913, p. 210). No hay solo dos diferentes tipos de pensamiento matemático, sino muchos. Kronecker, estaba de acuerdo con Weierstrass quién prueba que la lógica es de suma importancia y que transciende los argumentos visuales intuitivos: pero las creencias fundamentales en la naturaleza de los conceptos matemáticos eran muy diferentes. Tales argumentos acerca de los fundamentos de las matemáticas, llevan al desarrollo de líneas diferentes de la filosofía matemática a principios del siglo XX. La visión intuicionista, representada por Kronecker, afirmaba que solo existen conceptos matemáticos cuando su construcción se demuestra a partir de los números enteros, la visión formalista de Hilbert, afirmaba que la matemática es la manipulación significativa de símbolos sin sentido escritos en papel, mientras que el punto de vista logicista de Russell, declara que las matemáticas constan de deducciones que utilizan las leyes de la lógica (Watson & Tall, 2002).

Las prácticas de los matemáticos tienden a distanciarse de argumentos esotéricos y simplemente, siguen adelante con su trabajo de afirmar y demostrar teoremas. Así, en el siglo XX desaparecen los puntos de vista de Kronecker y triunfa una mezcla pragmática de formalismo y lógica. Se vio la creación de un gran número de sistemas formales basados en una deducción lógica a partir de definiciones y axiomas formales: un enfoque que sobrevivió al golpe dado por el teorema de la incompletitud de Gödel: cualquier sistema axiomático que incluya a los enteros debe contener afirmaciones verdaderas que no pueden ser probadas por una secuencia finita de pasos dentro del sistema (Watson & Tall, 2002).

El libro Bishop (1967) sobre un análisis constructivo, insiste en las pruebas de construcción de algoritmos y no permite la prueba por contradicción. Sin embargo, con la introducción de la informática se pudo ver un nuevo renacimiento en la constructibilidad, por la forma en que las computadoras manipulan datos: con las computadoras es posible probar algunas hipótesis y compilar datos con una facilidad que antes no había sido posible a través de técnicas más sofisticadas. Esto afectó el tipo de preguntas que los matemáticos trabajaban y su modo de pensar. En este sentido, surge la pregunta ¿qué ejemplos pueden ser probados en un ordenador? una cuestión que obliga a considerar algoritmos concretos y a tratar de que sean eficientes. Debido a esto y porque los algoritmos tienen aplicaciones en la vida real de considerable importancia, el desarrollo de algoritmos se convirtió en un tema respetable (Edwards & Mercer, 1987).

Así, cualquier teoría de la psicología del aprendizaje de las matemáticas tiene en cuenta las crecientes concepciones de los estudiantes y además, las concepciones de los matemáticos maduros-expertos. Las matemáticas son una cultura compartida y hay aspectos que son dependientes del contexto. Por lo tanto, cualquier teoría de la psicología del pensamiento matemático se ve en un contexto más amplio de la actividad mental y cultural humana. No hay una forma verdadera y absoluta de pensar en las matemáticas, lo que existe son diversas formas desarrolladas culturalmente de pensar en las que los diversos aspectos se relacionan con el contexto (Watson & Tall, 2002).

Existe una distinción entre la forma en que el individuo piensa el concepto matemático y su definición formal, distinguiéndose así las matemáticas como actividad mental y las matemáticas como sistema formal (Tall & Vinner, 1981). Esta teoría se aplica también a los matemáticos expertos y a los estudiantes: el cerebro humano no es una entidad puramente lógica: la manera compleja en la que funciona va a menudo en contradicción con la lógica de las matemáticas. No siempre es la pura lógica la que da una idea, ni es casualidad lo que hace cometer errores (Watson & Tall, 2002).

El término “imagen del concepto” describe la estructura cognitiva total que se le asocia al concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados: se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que la persona cumple con nuevos estímulos y madura. Como la imagen del concepto se desarrolla, no tiene que ser coherente en todo momento. El cerebro no funciona de esa manera. La información sensorial excita ciertas vías neuronales e inhibe otras. De esta manera, diferentes estímulos pueden activar diferentes partes de la imagen del concepto; se desarrolla de una manera que no necesariamente es un todo coherente (Tall & Vinner, 1981). De esta manera, es posible que puntos de vista conflictivos se organicen en la mente del individuo y sean evocados en diferentes momentos sin que el individuo sea consciente del conflicto hasta que sean evocados simultáneamente.

El matemático maduro-experto no es inmune a los conflictos internos, pero él o ella han sido capaces de unir una gran parte de los conocimientos en secuencias de argumentos deductivos. Para unas personas parece mucho más fácil clasificar este conocimiento de una manera lógicamente estructurada. Así, un matemático maduro puede considerarlo útil para presentar el material a los estudiantes de una manera que pone de relieve la lógica al sujeto. Sin embargo, un estudiante sin la experiencia del maestro puede encontrar un enfoque formal inicialmente difícil: un fenómeno puede ser visto por el profesor como la falta de experiencia o del intelecto por parte del estudiante. Este es un punto de vista para tomar, sobre todo cuando el maestro es parte de una comunidad matemática que comparte la comprensión matemática: pero no es realista en el contexto más amplio de las necesidades de los estudiantes: lo que es esencial para ellos, es un enfoque del conocimiento matemático que crezca a medida que crecen: un enfoque cognitivo que tenga en cuenta el desarrollo de su estructura de conocimiento y los procesos de pensamiento (Piaget, 1975). Para llegar a ser matemáticos maduros en un nivel avanzado, se debe tener una perspectiva de los caminos de los matemáticos avanzados: lo que requiere de una transición fundamental en los procesos de pensamiento (Watson & Tall, 2002).

Hay muchas teorías que compiten en psicología. La teoría conductista, construida con la observación externa de estímulo y respuesta, se niega a especular sobre el funcionamiento interno de la mente. Proporciona evidencias observables y repetibles del comportamiento de los animales, incluyendo los seres humanos, en virtud de estímulos repetidos, pero tiene una aplicación limitada para el pensamiento matemático más allá de la mecánica de algoritmos de rutina. La Psicología constructivista, por su parte, nace de los intentos de discutir cómo las ideas mentales se crean en la mente de cada individuo. Esto puede suponer un problema de dialéctica para el matemático; como un ideal platónico de las matemáticas que existe independientemente de la mente humana, pero resulta para dar una información valiosa sobre los procesos creativos de los matemáticos en la investigación, así como de las dificultades que experimentan los estudiantes de matemáticas.

Piaget (1975) vio la necesidad en el individuo de estar en una dinámica de equilibrio con su medio ambiente, como tema fundamental de su obra. Este equilibrio podría ser perturbado a través de la confrontación con nuevos conocimientos que entraban en conflicto con la edad y que en un período de transición puede ocurrir que la estructura de conocimiento sea reconstruida para dar un nivel más maduro de equilibrio. Piaget vio al niño desde su crecimiento hasta llegar a ser adulto, a través de una serie de etapas de equilibrio, cada una más rica que la anterior: identificó cuatro etapas principales: la primera era la etapa sensorio-motriz antes del desarrollo del lenguaje significativo, seguido de una etapa pre-operatoria cuando el niño se da cuenta de la permanencia de los objetos, que continúan existiendo incluso si están temporalmente fuera de la vista. Luego, el niño pasa por una transición en el período de las operaciones concretas, donde él o ella pueden considerar estables los conceptos que están vinculados a los objetos físicos, pasando de allí al período de las operaciones formales en los primeros años de adolescencia, cuando el tipo hipotético "si-entonces" se hace posible (Watson & Tall, 2002).

La teoría de las etapas de Piaget, se ha extendido a los niveles más altos para abarcar el pensamiento matemático avanzado. Por ejemplo, Ellerton (1985) sugiere que el ciclo de Piaget: sensorio-motor, pre-operativo y concreto corresponde al primer nivel de un desarrollo cognitivo en espiral en el que la etapa formal y es el comienzo de otro ciclo del mismo tipo en un nivel más alto de abstracción. Biggs & Collis (1982) sugieren una repetición de las operaciones formales en un nivel cada vez más elevado, cada repetición del ciclo de aprendizaje: uniestructural, multiestructural y relacional. Una dificultad de aplicar dicha teoría a la enseñanza de las matemáticas de la universidad es que muchos, probablemente la mayoría de los estudiantes universitarios, no son capaces de actuar en el nivel abstracto de las operaciones formales, que según Piaget ocurre en los niños durante sus primeros años de adolescencia.

Por su parte, Ausubel critica esta teoría de las etapas:

... porque un alto porcentaje de los estudiantes de secundaria y universitarios estadounidenses no llegan a este nivel abstracto de operaciones lógicas cognitivas (Watson & Tall,2002).

Luego, la distinción concreta-formal ha demostrado ser un buen punto de partida en el desarrollo de las jerarquías de las dificultades en extensos estudios (Hart, 1981) en el rango de 11 a 16 años de edad y en el desarrollo de conceptos de cálculo (Orton, 1980). Pero una falla importante de la teoría de las etapas de Piaget para el diseño de nuevas estrategias de enseñanza, es su propia afirmación que el movimiento de una etapa a otra no se puede acelerar en gran medida por los efectos de la enseñanza. Las diferencias de demanda cognitiva se han utilizado a menudo en un sentido negativo para describir las dificultades de los estudiantes, pero rara vez, para proporcionar criterios positivos, para el diseño de nuevos enfoques en la materia. En esta dirección, Papert (1980) afirmó:

La teoría de las etapas de Piaget es esencialmente conservadora, casi reaccionaria, al enfatizar lo que los niños no pueden hacer. Me esfuerzo por descubrir un Piaget más revolucionario, que vea que las ideas epistemológicas podrían ampliar los límites conocidos de la mente humana.

Las Matemáticas avanzadas ofrecen una metáfora útil que amplía la visión de la teoría del escenario a una teoría más valiosa en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Piaget utilizó una analogía con la teoría de grupos para apuntalar su sentido del equilibrio dinámico del crecimiento cognitivo. Ve el elemento identidad como la representación del estado estable y señala que la estabilidad podría mantenerse si cualquier transformación de este estado puede revertirse, lo que sugiere una estructura de grupo en la que cada elemento tiene un inverso.

Un aspecto valioso de la teoría de Piaget, es el proceso de transición de un estado mental a otro: durante esta transición, el comportamiento inestable es posible con la experiencia de las ideas anteriores en conflicto con los nuevos elementos. Piaget, utiliza el término “asimilación” para describir el proceso por el cual el individuo toma nuevos datos y los acomoda: es el proceso por el cual la estructura cognitiva del individuo se modifica. Él ve que la asimilación y la “acomodación” son procesos complementarios: durante una transición se requiere mucha acomodación. Se presentan ideas similares de una manera diferente al distinguir entre el caso en que el proceso de aprendizaje provoca una simple expansión de la estructura cognitiva del individuo y el caso donde hay conflicto cognitivo, lo que requiere de una reconstrucción mental (Skemp, 1978). Es este proceso de reconstrucción el que provoca las dificultades que se producen durante una fase de transición. Estas transiciones se producen a menudo en las matemáticas avanzadas como las luchas individuales con las nuevas estructuras del conocimiento.

El problema más grave ocurre cuando las nuevas ideas no están acomodadas de forma satisfactoria. En este caso, puede ser posible que ideas conflictivas estén presentes en el individuo al mismo tiempo: el nuevo conocimiento entra a menudo en contradicción con la edad y el aprendizaje efectivo y requiere de estrategias para hacer frente a dicho conflicto. A veces las piezas de conocimiento en conflicto pueden reconciliarse, a veces uno u otro conocimiento deben ser abandonados y algunas veces los dos pueden “mantenerse” si se mantienen de forma segura en compartimientos separados. (Papert, 1980, p. 121).

En este sentido, se define el obstáculo como un conocimiento: es parte del conocimiento del estudiante (Cornu, 1983); un conocimiento que fue en un tiempo en general satisfactorio para la solución de ciertos problemas. Es precisamente este aspecto satisfactorio el que ha anclado el concepto en la mente y el hecho de que sea un obstáculo. El conocimiento más tarde resulta ser inadecuado cuando se enfrenta a nuevos problemas y esta insuficiencia puede no ser obvia (Watson & Tall, 2002). Por el principio genérico de extensión, si una persona trabaja en un contexto restringido en el que todos los ejemplos considerados tienen una cierta propiedad, entonces, en ausencia de contraejemplos, la mente asumirá las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos. En este sentido, una dificultad común que se observa en los estudiantes, respecto al aprendizaje de las matemáticas avanzadas, es su denuncia en relación a que el tema es “demasiado abstracto”. ¿Cuál es la razón cognitiva para su dificultad? Los términos “generalización y abstracción” se utilizan en matemáticas tanto para denotar procesos en los que los conceptos se ven en un contexto más amplio como para los productos de esos procesos (Watson & Tall, 2002).

En cuanto a la intuición y el rigor matemático, algunos matemáticos consideran que estos términos son mutuamente excluyentes, por lo que sugieren que una explicación intuitiva es aquella que carece necesariamente de rigor. Por lo general, una intuición llega a la mente y puede ser difícil separar sus componentes en un orden lógico deductivo. Pero la oposición entre los dos conceptos es una falsa dicotomía. Es inapropiado considerar solo dos tipos de pensamiento en matemáticas; se puede prever que la mente humana inmersa en el pensamiento lógico puede llegar a desarrollar intuiciones que se basan en una lógica. La intuición es el producto de las imágenes del concepto individual. Cuanto más educado sea el individuo en un pensamiento lógico, es probable que el concepto imaginario (imagen del concepto) del individuo vaya a razonar con una respuesta lógica. Esto es evidente en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes que pasan de las intuiciones iniciales basadas en sus matemáticas pre-formales, a las intuiciones formales más refinadas a medida que su experiencia crece: entonces, se tienen muchos tipos de intuición; primero, la apelación a los sentidos y la imaginación; al lado, la generalización de la inducción, copiado, de los procedimientos de las ciencias experimentales y por último, se tiene la intuición pura (Poincaré, 1913, p. 215).

Desde un punto de vista psicológico, se citan dos tipos diferentes de intuición: intuiciones primarias, que se refieren a esas creencias cognitivas que se desarrollan en sí mismas en los seres humanos, de una manera natural, antes e independientes de la instrucción sistemática y las intuiciones secundarias, que son aquellas que se desarrollan como resultado de la formación intelectual sistemática (Fischbein, 1975). En el mismo sentido, Felix Klein (1898) utilizaba el término "intuición refinada´´ y F. Severi (1951) escribía acerca del segundo grado intuición avanzada (Fischbein, 1978, p. 161).

Por lo tanto, los aspectos de la lógica también pueden ser perfeccionados para ser más intuitivos a la mente matemática. El desarrollo de esta intuición lógica refinada debería ser uno de los principales objetivos de la educación matemática. En el plan de estudios nacional del Reino Unido y en los estándares NCTM de los EE.UU. para las matemáticas escolares, se aboga por un nivel de resolución de problemas de composición abierta, que rara vez se especifican en los cursos de pregrado de las universidades. Los procedimientos de resolución de problemas de entrada, el ataque y la revisión pueden y están siendo llevados a cabo por los niños más pequeños en investigaciones matemáticas. Así, muchos de los procesos del pensamiento matemático avanzado, ya se encuentran en un nivel más elemental. Se describe el proceso de verificación del pensamiento Matemático en tres niveles: convencerte; convencer a un amigo y convencer a un enemigo (Mason et al., 1982).

Convencerse a uno mismo implica tener una idea de por qué alguna afirmación puede ser cierta, pero convencer a un amigo requiere que los argumentos estén organizados de una manera más coherente. Convencer a un enemigo significa que el argumento ahora debe ser analizado y perfeccionado para que resista la prueba de la crítica. Esto es lo más cercano que el pensamiento matemático llega a la noción de prueba. Lo que está totalmente ausente es la noción de las definiciones formales y la lógica de las deducciones formales de esas definiciones. Podría ser la hipótesis de que el pensamiento matemático en cada nivel puede incluir fases de entrada, el ataque y la revisión, incluyendo un nivel de justificación matemática, pero que, en el pensamiento matemático elemental falta el proceso de abstracción formal y no incluye la fase final del "precisado" en su apariencia formal.

El paso del pensamiento elemental al pensamiento matemático avanzado implica una transición significativa, que la descripción de la definición sea convincente para poder demostrar de una manera lógica con base en estas definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva que se ve durante la lucha inicial de los estudiantes universitarios con abstracciones formales; ya que, se abordan en el primer año de universidad. Es la transición de la coherencia de las matemáticas elementales a las matemáticas avanzadas, basadas en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de deducciones de las definiciones formales (Watson & Tall, 2002).

4.2.1.2. Procesos del pensamiento matemático avanzado

Según las ideas anteriores, es posible pensar en temas de matemáticas avanzadas en forma elemental: por ejemplo, muchos ejercicios en anillos o grupos pueden ser desarrollados con solo conectarse con los números correctos y esto sería pensamiento avanzado en temas elementales. Una característica distintiva entre el pensamiento avanzado y el elemental es la complejidad y la forma de abordarla: conceptos avanzados, tales como anillos o grupos de Lie, pueden ser muy complejos; la distinción está en la forma de gestionar esta complejidad. Los procesos más poderosos, son los que permiten hacer esto, en particular, la abstracción y la representación: por medio de la abstracción y la representación, se puede pasar de un nivel de detalle a otro y así gestionar esta complejidad (Dreyfus, 1991).

Estos procesos del PMA, son procesos matemáticos y psicológicos y en muchos casos, son las dos cosas: de hecho, los aspectos matemáticos y psicológicos de un proceso rara vez se pueden separar. Las imágenes mentales y la matemática están estrechamente vinculadas. No puede surgir una sin la otra y son generadas por el mismo proceso que son respectivamente: los aspectos matemáticos y los psicológicos. Existe una vinculación similar entre las matemáticas y la psicología con respecto a los otros procesos del pensamiento matemático avanzado. Es precisamente esta vinculación la que hace que los procesos sean interesantes y relevantes para entender el aprendizaje y el pensamiento en matemáticas avanzado (Dreyfus, 1991).

Lo que la mayoría de los estudiantes aprenden en los cursos de matemáticas, conlleva un gran número de procedimientos estandarizados, emitidos en formalismos que precisamente proporcionan las respuestas a las clases de preguntas de los ejercicios y las delimitan claramente. De este modo, adquieren la capacidad de realizar, aunque en forma lenta, el tipo de operación que un ordenador puede llevar a cabo por medio de un programa adecuado. Así, terminan con una cantidad considerable de conocimientos matemáticos, pero sin la metodología del trabajo del matemático; es decir, que carecen de los conocimientos técnicos que les permite utilizar sus conocimientos de una manera flexible para resolver los problemas de un tipo desconocido por ellos: se les han enseñado los productos de la actividad de los matemáticos en su forma final, pero no han ganado la penetración en los procesos que han llevado a los matemáticos a crear estos productos (Dreyfus, 1991).

Parte de las expectativas de los maestros y del desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas, se debe a que los profesores a menudo no se dan cuenta de cuánto de la experiencia con los procesos matemáticos y conceptos se utilizan. Hoffman (1989) propone una filosofía de la educación matemática con base en el simple reconocimiento de que la matemática es una actividad humana, útil en el mundo real: sobre esta base, se requiere transmitir a los alumnos una imagen de las matemáticas como ciencia que incorpora la observación, la experimentación y el descubrimiento.

En cuanto a las representaciones de los objetos matemáticos, ellas tienen una función muy importante en las matemáticas: si se habla por ejemplo del grupo de permutaciones de n-objetos, que corresponde al grupo simétrico de grado n se denota por S_n: la notación S_n es el signo al que se refiere; lo que representa o simboliza el grupo, es una representación simbólica del grupo. Estos símbolos son absolutamente indispensables en las matemáticas modernas, pero también, hay algunos peligros asociados a ellos. Los símbolos implican relaciones entre signos y significados; sirven para hacer explícito el conocimiento implícito de una persona -el significado que le asigna- en términos de símbolos (Campbell,1992). Tiene que haber algún significado asociado a una idea antes que un símbolo de la noción; posiblemente, puede ser de utilidad en el discurso educativo de la enseñanza de las matemáticas, esto que a menudo se pasa por alto y que conduce al conocido fenómeno de la presión del símbolo: el símbolo colocado (Dreyfus, 1991).

En la misma dirección, otro de los significado para las representaciones, que resulta ser más importante en el aprendizaje y el pensamiento en matemáticas, se tiene cuando se habla o se piensa por ejemplo, en un grupo, una integral, una aproximación o cualquier objeto matemático o proceso; cada uno se refiere a algo que se tiene en la mente - una representación mental del objeto o un proceso en consideración. Aunque se puede esperar que la mayoría de los matemáticos lleguen a definiciones más o menos equivalentes, las representaciones mentales de la noción pueden ser muy diferentes. Entonces, aparece la pregunta ¿qué es lo que viene a la mente de los matemáticos cuando trabajan en las diferentes áreas, cuando piensan en un objeto matemático?

En este sentido, representar un concepto significa generar una instancia, muestra, ejemplo, una imagen de la misma. Pero esta breve descripción no es suficiente, ya que no especifica si la instancia generada es simbólica o mental, ni indica que "generar" significa en términos de los procesos, que las representaciones mentales entran en existencia y se desarrollan. La representación simbólica, está externamente escrita o hablada, por lo general, con el objetivo de hacer que la comunicación sobre el concepto sea más fácil. La representación mental, por otro lado, se refiere a esquemas internos o marcos de referencia que una persona utiliza para interactuar con el mundo exterior. En el caso de los Grupos, motivo de estudio; como es el caso particular del grupo simétrico, la representación mental de una persona puede consistir en el símbolo S_n; otra, podría pensar en un conjunto de cubos de colores que se están permutando, una tercera, podría ver en los ojos de la mente símbolos como (1 3 5) (2 4 6 7) que pueden o no tener un significado asociado y otra persona podría concebir el grupo por medio de sus representaciones irreducibles.

Continuando con estos procesos del PMA, "la visualización", también juega un papel esencial en el trabajo de muchos eminentes matemáticos. Por ejemplo, Einstein escribió a Hadamard (Hadamard, 1945, p. 82):

Las palabras y el lenguaje, escritos u orales, no parecen desempeñar ningún papel en mi pensamiento. Las construcciones psicológicas que son los elementos de pensamiento son ciertos signos o imágenes, más o menos claras, que pueden ser reproducidos y combinados en libertad.

La visualización, por tanto, corresponde al proceso mediante el cual las representaciones mentales pueden llegar a existir; de acuerdo con Kaput, el acto de generar una representación mental, se basa en los sistemas de representación: es decir, algo concreto, objetos externos, que pueden ser realizados materialmente (Dreyfus, 1991).

Una persona puede crear representaciones mentales únicas o varias que compiten por el mismo concepto matemático. Para tener éxito en las matemáticas, es conveniente contar con representaciones mentales ricas de los conceptos. Una representación es rica si contiene muchos aspectos vinculados de ese concepto. Una representación es pobre si no tiene suficientes elementos para permitir flexibilidad en la resolución de problemas. Tal falta de flexibilidad a menudo se observa en los estudiantes: el más mínimo cambio en la estructura de un problema, o incluso en su formulación, puede bloquearlo por completo (Dreyfus, 1991).

Sin embargo, diferentes representaciones mentales también pueden entrar en conflicto. En los casos más favorables, varias representaciones mentales para el mismo concepto pueden complementarse entre sí y con el tiempo pueden ser integradas en una sola representación del concepto. Este proceso de integración se relaciona con la abstracción. Como resultado de este proceso, se tiene lo que se describe como representaciones múltiples: un estado que permite utilizar varias de ellas al mismo tiempo y de manera eficiente, cambiar entre ellas en los momentos adecuados previstos por el problema o situación (Dreyfus, 1991).

Muchos de los procesos mencionados, se dan en cualquier nivel del pensamiento matemático: incluso los niños pequeños crean representaciones mentales de todo lo que piensan y en particular de los objetos matemáticos del pensamiento, como números o triángulos. Comenzando en la escuela primaria, los niños trabajan con estos objetos, especialmente los números, en diferentes representaciones. Otros procesos, sin embargo, adquieren mayor importancia como la experiencia matemática de los estudiantes y las habilidades que desarrollan; además, los contenidos matemáticos que tratan se vuelven más avanzados: el más importante de estos procesos avanzados es el de abstraer. Si el estudiante desarrolla la habilidad de hacer conscientemente abstracciones de situaciones matemáticas, ha logrado un nivel avanzado del pensamiento matemático. El logro de esta capacidad para abstraer bien puede ser el objetivo más importante de la educación matemática avanzada (Dreyfus, 1991).

Existen dos procesos, además de representar, que son requisito previo para la abstracción: generalizar y sintetizar. Generalizar es derivar o inducir de lo particular, para identificar puntos en común, para ampliar los dominios de validez; sintetizar, significa combinar o componer partes de tal manera que formen un conjunto, una entidad. Esto corresponde a la suma de las partes. El proceso de fusión en una sola imagen corresponde a una "síntesis". Se ha reconocido que debido en parte a esta posibilidad de síntesis, las matemáticas son compresibles (Thurston, 1990). También se señala que, si bien la idea que va con la compresión y este es uno de los placeres reales de las matemáticas, este proceso es irreversible; por lo tanto, es muy difícil para el matemático ponerse en el estado del estudiante que aún no ha alcanzado esta síntesis y ver no solo la cantidad de detalles que están involucrados en aprender, incluso conceptos y operaciones simples: se necesita de una gran cantidad de trabajo detallado con los conceptos y operaciones para poder empezar a sintetizar (Dreyfus, 1991).

Este proceso de abstracción, se encuentra íntimamente vinculado con el de generalización. Uno de los principales incentivos para la abstracción es la naturaleza general de los resultados que se pueden obtener. Otro incentivo es el logro de la síntesis. Grupos de estudiantes muestran que es posible describir de una manera unificada un gran número de situaciones que hasta ahora han sido consideradas por separado e independientemente una de la otra. Pero ni generalizar ni sintetizar, hacen las mismas demandas cognitivas en los estudiantes que la abstracción. La generalización por lo general implica una expansión de la estructura de conocimiento de la persona, mientras que la abstracción es probable que implique una reconstrucción mental (Dreyfus, 1991).

Por lo tanto, la abstracción contiene el potencial tanto para la generalización como para la síntesis y viceversa y consigue su propósito, principalmente de este potencial de generalización y de síntesis. La naturaleza del proceso mental de abstraer es, sin embargo, muy diferente de la de generalizar y de la de sintetizar. La abstracción, es un proceso constructivo: la construcción de estructuras mentales de las estructuras matemáticas, es decir, de las propiedades y de las relaciones entre los objetos matemáticos. Este proceso es dependiente del aislamiento de propiedades y de las relaciones apropiadas. Se requiere la capacidad de desviar la atención de los propios objetos a la estructura de sus propiedades y relaciones. Tal actividad mental constructiva por parte del estudiante, depende en gran medida de la atención de centrarse en aquellas estructuras que van a formar parte del concepto abstracto y apartarse de las que son irrelevantes en el contexto previsto; la estructura se vuelve importante, mientras que los detalles irrelevantes se omiten, reduciendo así la complejidad de la situación (Dreyfus, 1991).

Un problema didáctico abierto, es el hecho de si se debe llevar al estudiante a abstraer de muchos casos o de uno solo. Más general, varios casos, por ejemplo de grupos concretos permitirían a los estudiantes identificar puntos en común; ésta es una manera para que el profesor centre la atención de los estudiantes en esas propiedades y relaciones que son importantes tener previstas y de esta forma, enfocar la atención podría funcionar bien si la cantidad de información en la descripción detallada de la estructura interna de los ejemplos es limitada. Sin embargo, si los ejemplos son demasiado complejos; es decir, si tienen muchas propiedades que son ignoradas en el proceso de abstracción, puede ser difícil el lograr este enfoque (Dreyfus, 1991).

Hay una dificultad inherente a la abstracción: ¿cómo generar estructuras mentales, que estén vinculadas con las imágenes visuales, si se deben representar relaciones que se retiren de los objetos concretos que originalmente fueron vinculados? ¿cuál es el papel de la visualización en el proceso de abstracción? No hay una respuesta definitiva a esta pregunta. Las imágenes visuales son generalmente globales y subrayan aspectos estructurales. Por lo tanto, si se pueden encontrar imágenes visuales apropiadas, es probable que sean de gran ayuda para los estudiantes que participan en la abstracción.

De propiedades concretas se espera abstraer las representaciones particulares de un concepto matemático abstracto; las funciones son un ejemplo de ello, pero también lo son los vectores, los espacios vectoriales, los grupos, los campos, álgebras, categorías y funtores. Las propiedades y relaciones del concepto abstracto son representaciones independientes. La representación y la abstracción son así, procesos complementarios en direcciones opuestas: por un lado, un concepto a menudo se abstrae de varias de sus representaciones; de otro lado, las otras representaciones son siempre representaciones de un concepto más abstracto. Cuando se utiliza una sola representación de un concepto, la atención puede centrarse en el lugar del objeto abstracto. Sin embargo, cuando varias representaciones están siendo consideradas en paralelo, la relación con el concepto abstracto se vuelve importante. A menudo se necesitan varias representaciones para llevar a cabo algún trabajo específico con el concepto; por ejemplo, las representaciones de un grupo, luego de grupos abstractos que se utilizarán para cálculos con grupos teóricos (Dreyfus, 1991).

Esta necesidad de representaciones concretas con el fin de llevar a cabo algún proceso de pensamiento específico no es solamente matemático. Hay una necesidad cognitiva paralelamente: el pensamiento de muchos matemáticos y estudiantes de matemáticas se ve reforzado a ver si son capaces de poner mentalmente una representación particular, por ejemplo, una visual. Es más, si son capaces de utilizar varias representaciones en paralelo. Una vez más, hay una complementariedad, esta vez entre los aspectos matemáticos y los cognitivos de las representaciones de las estructuras matemáticas (Dreyfus, 1991). Ambos aspectos son complementarios: el que existe entre la abstracción y la representación y el que existe entre las representaciones matemáticas y mentales, ambos aspectos pueden ser y han sido objeto de uso didáctico en los procesos de aprendizaje. Los procesos de aprendizaje pueden ser vistos como constituidos por cuatro etapas:

- El uso de una sola representación
- El uso de más de una representación en paralelo
- Establecer conexiones entre representaciones paralelas
- Integración de las representaciones y la conmutación flexible entre ellas

En la primera etapa, los procesos parten de un caso concreto, una sola representación. Pero en el aprendizaje del concepto de función, por ejemplo, los estudiantes suelen reunir varias representaciones (gráficas, tabulares, algebraicas, diagramas de flechas, entre otros). En la segunda etapa, por lo tanto, varias representaciones sobre el mismo objeto matemático se utilizan en paralelo. El difícil proceso de transición hacia el concepto abstracto depende de manera esencial de la relación entre las representaciones que se forman. El establecimiento de estos enlaces constituye la tercera etapa. Fuertes vínculos permiten a los estudiantes cambiar las representaciones, que a su vez los hace conscientes del concepto subyacente y es por lo tanto probable que influya positivamente en la abstracción. En la cuarta etapa, hay un proceso de integración entre las diferentes representaciones que están sucediendo, una síntesis de la clase que se ha demostrado anteriormente es parcial en el proceso de abstracción: los vínculos, las relaciones, las propiedades comunes permanecen para formar el concepto abstracto, mientras que aspectos específicos de la representación se retraen en el fondo. Una vez que este proceso se ha completado, se ha formado la noción abstracta del concepto dado y de alguna manera, ya se es “dueño” del concepto (Dreyfus, 1991).

El uso de varias representaciones para ayudar a los estudiantes a hacer la transición de un entendimiento concreto limitado de un tema determinado a una comprensión más abstracta y flexible, ha sido investigado por Kaput y sus colaboradores (1988). Para algunos estudiantes especialmente dotados, tales construcciones de los conceptos son diseñadas cuidadosamente; aunque pareciera ser algo superfluo, a los ocho años de edad, Terence Tao (Clements, 1983) es uno de esos casos: a pesar de su edad, él fue capaz de aprender directamente de estructuras algebraicas abstractas pero representaciones concretas tendían a molestarlo. Cuando se le preguntó si una determinada estructura era un anillo, de inmediato se dio cuenta que solo tenía que demostrar tres cosas y procedió a probar esto con la confianza máxima de los resultados estructurales probados antes. Una situación similar puede presentarse en los estudiantes avanzados de matemáticas que han tenido la oportunidad de adquirir una experiencia considerable con la abstracción; esta experiencia es probable que sea superflua en algunas de las etapas anteriores y para estructuras matemáticas complejas, presentar un obstáculo con la abstracción; como se ha señalado, la abstracción de uno o incluso de varios casos, puede ser más fácil para este tipo de alumnos. Pero la mayoría de los estudiantes que toman cursos universitarios y de secundaria de matemáticas no pertenecen a esta categoría y para ellos la abstracción es probablemente el más exigente de todos los procesos matemáticos avanzados.

Los procesos de representación y abstracción, se encuentran entre los más importantes para el pensamiento matemático avanzado; sin embargo, solo algunos entre muchos procesos son los que deberían ocurrir y ocurren como un interactuar de eslabones de cadenas que pueden incluir además, descubrir, intuir, revisar, probar, definir y otros: intuir, es la aprehensión por intuición, por la cognición directa inmediata sin evidencia de pensamiento racional, que tiene un papel central en cualquier secuencia de procesos que se inicia desde el descubrimiento y tiene estrechos vínculos con los procesos de visualización.

En esta dirección, comprobar significa tomar acciones para convencerse que el resultado, de hecho responde correctamente a la pregunta que se hizo. Una forma útil de control es utilizar un procedimiento inverso; por ejemplo, la diferenciación para comprobar si se ha encontrado correctamente una función primitiva. Con demasiada frecuencia, la comprobación no es vista por los estudiantes como una parte esencial de la actividad matemática. Aunque la comprobación puede darles mucha seguridad, la mayoría de los estudiantes no parecen estar muy interesados en esta seguridad. Esto puede y debe ser cambiado mediante la transferencia de más responsabilidad del maestro al estudiante en los procesos de aprendizaje, o por ejemplo, dar a los estudiantes actividades abiertas en lugar de ejercicios de un minuto para trabajar, es un paso en esta dirección (Dreyfus, 1991).

El trabajo matemático utiliza muchos procesos en forma definitiva y permite a los estudiantes interactuar de manera eficiente. El objetivo debería ser el de llevar el pensamiento matemático de los estudiantes lo más cerca posible al trabajo del matemático: esto es, la comprensión de los procesos matemáticos avanzados y a su interacción; esto es un requisito necesario para el logro de este objetivo (Dreyfus, 1991).

4.2.2. Pensamiento algebraico

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática presentó en el año 1999 (III SEIEM), al grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Pensamiento Algebraico. Este grupo se formó por los vínculos existentes entre los conocimientos numéricos y los algebraicos, enfatizando en que los problemas, derivados de la enseñanza y el aprendizaje de estos dos campos son similares y que las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen componentes comunes; también, se establece que existen diferencias entre estos dos tipos de pensamientos.

El pensamiento algebraico, se constituye como una de las líneas de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas, que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos. Se define el pensamiento algebraico, como aquel que aparece inmerso en muchos de los problemas del pensamiento matemático: la cognición es intrínsecamente contextual mientras que el lenguaje algebraico es intrínsecamente abstracto.

El pensamiento algebraico tiene presencia como contenido matemático en el sistema educativo, desde la secundaria hasta la universidad. En secundaria se ha investigado en las letras con significado algebraico, en las variables, en las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales. Las investigaciones en Pensamiento Algebraico, tienen enfoques desde la psicología cognitiva, el lenguaje, las calculadoras y computadores, la historia y la epistemología, la enseñanza y el desarrollo curricular y por último, desde la perspectiva de las situaciones didácticas (Godino, 2012).

La enseñanza del álgebra aparece en todo el currículo de las matemáticas, en educación media y básica (secundaria). Existe un espacio importante en el cual, los estudiantes desarrollan la capacidad de abstracción y generalización; procesos propios del álgebra, presentándose bajo este enfoque el álgebra como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos, tanto del bachillerato como para los problemas que surgen en las asignaturas relacionadas con las matemáticas avanzadas de los programas universitarios.

Los investigadores en álgebra del International Group of the psychology of Mathematics Education (PME) en 1900, en el XIV- PME realizado en México iniciaron el trabajo con procesos y estructuras algebraicas y lo culminan en el año 1997 con un texto editado por Sutherland, Rojano, Bell & Lins que tenía el objetivo inicial de caracterizar los cambios producidos en el pensamiento algebraico y el papel del simbolismo en este cambio. Las investigaciones del grupo PME, se dirigían al estudio de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra, en los que diferenciaron dos grandes bloques: por un lado, los procesos cognitivos que se derivaban de considerar la aritmética como fundamento del álgebra y por otro lado, los procesos específicos del pensamiento algebraico; de igual forma, buscaban desarrollar una teoría de la enseñanza y del aprendizaje en álgebra elemental, distinguiéndola del Álgebra Superior o abstracta en la cual se ubica la asignatura universitaria de Teoría de Grupos.

El razonamiento algebraico se pone de manifiesto en tareas relacionadas con aritmética, medida, geometría y análisis de datos y con diversos grados de algebrización. En la práctica algebraica intervienen entre otros procesos la generalización y la simbolización y existen objetos denominados algebraicos, que corresponden a: relaciones binarias, las operaciones que se efectúan con los elementos de un conjunto; las funciones entre conjuntos y las estructuras en el sentido de un conjunto y una operación binaria definida en él, que cumple ciertas propiedades. Así, un estudiante puede dar respuesta a un problema utilizando solo aritmética o utilizando álgebra y aritmética. La presencia de estos objetos y de los procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva. En general, el trabajo con actividades algebraicas busca el desarrollo del pensamiento algebraico elemental, a través del trabajo con estructuras. Un enfoque basado en aspectos estructurales, necesita además de la descripción y fundamentación, la determinación de medios para abordar los problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje en relación con las tareas y competencias algebraicas; además de acciones en la formación de docentes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Las siguientes actividades matemáticas se consideran algebraicas; esto es, el Álgebra tiene los siguientes rasgos característicos:

- El proceso de Generalización, es decir, el paso de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos a las clases o tipos de tales objetos. Por ejemplo: llegar al concepto de Grupo a partir del análisis de conjuntos y de sus propiedades. Las generalizaciones empíricas en esta dirección se basan en el reconocimiento de características o cualidades comunes a los objetos o situaciones y las generalizaciones teóricas resultan de la identificación de invariantes. Para Dörfler, generalizar significa construir variables (1991, p. 84).

- Los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización como las de indeterminación; esto es, el uso de incógnitas y ecuaciones que permiten modelizar situaciones.

- Las nociones de relación, función y estructura.

- El estudio de relaciones de equivalencia y sus propiedades.

- El estudio de operaciones entre los elementos de conjuntos numéricos o de otro tipo y las propiedades de las estructuras que se generan de dichos conjuntos.

En relación con las actividades algebraicas, estas pueden ser de tipo Generacional, transformacional y Global o de meta nivel: las actividades de tipo Generacional, implican la formación de expresiones y ecuaciones que se consideran como objetos del álgebra; por ejemplo, las ecuaciones en una incógnita para representar una situación problema: expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas; expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas (Kieran, 2007).

Entre las actividades de tipo Transformacional que son las actividades basadas en reglas, se encuentran: agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes. Estas actividades tienen como objetivo los cambios en la forma simbólica conservando la equivalencia, no implica esto que sean actividades rutinarias; ya que, su justificación se basa en axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La categoría Global o de meta nivel hace referencia al uso de procesos matemáticos más generales. Son actividades no exclusivas del álgebra donde ésta se usa como herramienta. Por ejemplo, se tiene la resolución de problemas, la modelización, el estudio de patrones generalizables, la justificación y la prueba, la formulación de predicciones y conjeturas, el estudio del cambio en situaciones funcionales y la búsqueda de relaciones o estructuras. Éstas son actividades que se pueden realizar sin usar expresiones simbólico-literales (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

La caracterización del pensamiento algebraico no implica solo ver lo general en lo particular, se debe de expresar algebraicamente (Kieran, 2007). Esta expresión es una condición para la manipulación de las representaciones simbólicas que producen otras equivalentes y que permiten la resolución de problemas. Algunos investigadores proponen separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico debido a que se podría realizarse una manipulación de expresiones sin sentido y además, se debe tener presente que el objetivo que se busca es el trabajo con las estructuras, en lugar de procesos de cálculo numérico.

En esta dirección, el simbolismo algebraico viene a ser el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, es el lenguaje que permite expresar la generalidad (Mason, 1996). Sin embargo, hay estudiantes que pueden expresarse verbalmente con cierto grado de generalidad y no pueden expresar la notación algebraica con facilidad; la generalidad es esencial para el álgebra, pero no todas las actividades algebraicas involucran este proceso (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

El proceso por el cual se da la transición de la aritmética al álgebra cruza por una zona transicional en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual, pero creciente. La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de diversas naturalezas como los medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. Entonces la caracterización de una práctica y del pensamiento que la acompaña, como de la índole algebraica, se hace en términos de cierto tipo de objetos y de procesos que intervienen en dichas prácticas. Los objetos y los procesos involucrados en las prácticas se interrelacionan formando configuraciones (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Una práctica matemática bajo esta visión, corresponde a toda actuación o expresión, ya sea verbal o gráfica, que realiza la persona o las personas de una institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Los objetos primarios que sirven para indagar sobre las prácticas algebraicas caracterizados en el enfoque EOS, corresponden a: el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, los conceptos-definiciones, los problemas-tareas y las propiedades-proposiciones. Una práctica se considera algebraica si los siguientes objetos primarios algebraicos se hacen presentes:

- Relaciones binarias que pueden ser de equivalencia o de orden, junto con sus respectivas propiedades.
- Las operaciones y sus propiedades, realizadas en un conjunto de objetos; sin embargo, a la aplicación de propiedades tales como la asociativa, la conmutativa, la distributiva, la existencia de un elemento neutro y de los inversos se le denomina: cálculo algebraico, además, se encuentran los conceptos de: ecuación, transposición de términos, factorización, desarrollo de términos.

- Funciones, sus tipos, operaciones y propiedades; funciones proposicionales (verdadero/falso); variables, fórmulas, parámetros.
- Las estructuras y sus tipos como los semigrupos, monoides, semi-módulos, grupos, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial y las propias del álgebra superior o abstracta.

Estos objetos mencionados se expresan mediante diversos lenguajes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012). En la escuela se usa el lenguaje ordinario o cotidiano, gráfico, tabular, incluso se puede considerar el gestual. Un tipo de actividad algebraica primaria es la traducción o transformación entre distintos lenguajes. Las prácticas algebraicas y los objetos que intervienen en las mismas, se pueden analizar desde diversos puntos de vista, relativos al contexto donde se definen, caracterizan y realizan: éstos puntos de vista, se pueden presentar a través de las siguientes dualidades:

- Extensivo-Intensivo; esto es, lo particular y lo general y los procesos de particularización-generalización. Por ejemplo, la función $y = 3x$ corresponde a una función particular; es decir, un objeto extensivo, pero esta función pertenece a la clase de funciones de la forma $y = mx$ que es un objeto intensivo.
- Unitario-Sistémico; esta dualidad describe los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica; es decir, un intensivo pasa a ser visto como una entidad unitaria que puede participar en otros procesos de generalización dando lugar a otros intensivos de orden superior.
- Ostensivo-no Ostensivo; aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización de los objetos intensivos resultantes: la ostensión (que se ve, se comprueba con facilidad, visible), hace referencia a los recursos perceptivos de expresión que pueden ser simbólicos o de otro tipo. Por lo general, los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones), se consideran ideales o mentales, es decir, no ostensivos, pero su comunicación se hace con objetos perceptibles (palabras, símbolos y gestos), esto es, con objetos ostensivos.
- Personal-Institucional: se relaciona con los significados personales e institucionales.
- Expresión-Contenido: un objeto matemático se usa como expresión en algunos casos, pero luego puede pasar a ser el contenido para otro objeto (significado - significante).

Los objetos y procesos aportan criterios para definir las siguientes Configuraciones Algebraicas, las cuales permiten distinguir diferentes tipos y niveles de algebrización de la actividad matemática (Godino et al., 2012):

- Configuración de tipo relacional, en las tareas matemáticas que ponen en juego; relaciones binarias; Configuración operacional para operaciones; Configuración funcional, para las tareas con funciones y Configuración estructural, en el trabajo con estructuras.

- Configuración transformacional, presente en las tareas que buscan la transformación entre diferentes modos de expresión; especialmente, entre el lenguaje natural, icónico y gestual al lenguaje alfanumérico.
- Se reconoce cierto nivel de abstracción o generalización en una práctica por la presencia de objetos intensivos.

Según los razonamientos expuestos, se establece que el álgebra tiene presencia en las matemáticas escolares; ya que, en actividades como el conteo de una colección de objetos, realizada por niños de preescolar, hay procesos de generalización y conceptualización. El razonamiento algebraico se inicia con las primeras actividades de cuantificación de cantidades mediante los procesos de simbolización numérica. Los símbolos numéricos se originan desde los primeros niveles, como un sistema formado por elementos relacionales mediante operaciones; estas operaciones que inicialmente hacen referencia a acciones sobre cantidades, pasan a ser operaciones sobre los propios símbolos, pero están relacionadas con un sistema de propiedades estructurales; por ejemplo, los números naturales con la suma, tienen la estructura de monoide. Se inicia el trabajo con estructuras, con un primer ejemplo de estructura algebraica: los semigrupos aditivos y multiplicativos de los números naturales.

Los niños como tal no conocen el nombre de las estructuras, pero en su actividad con las operaciones aritméticas que son funciones, se trabajan los conceptos y teoremas propios de las estructuras algebraicas mencionadas. El razonamiento algebraico surge entonces, de un primer proceso de generalización, cuando de una cantidad concreta por ejemplo, del número de lápices, se pasa al símbolo que representa la cantidad de una magnitud cualquiera, como cuadernos, personas, ovejas. Este sistema de símbolos emergentes de las prácticas de cuantificación se encuentra regulado por los axiomas de Peano y se convierte para el estudiante de primaria en un sistema numérico natural (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

En esta dirección, la aritmética es la parte del álgebra que trabaja con ciertos ejemplos particulares y es el de los conjuntos numéricos que posteriormente, llegarán a ser ejemplos de otros ejemplos más generales. Un nivel más avanzado de Pensamiento Algebraico, se pone de manifiesto en las actividades que involucran las relaciones binarias y las funciones: primero, entre cantidades y luego entre símbolos estructurados. La igualdad es otro objeto emergente de las prácticas matemáticas que caracteriza al Pensamiento Algebraico; ya que, la igualdad es un primer ejemplo de relación de equivalencia entre números. A partir de esta relación de equivalencia aparecen las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes que son los objetos característicos del álgebra; además de las correspondencias o funciones que llevan a la identificación de isomorfismos entre estructuras (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Tabla 4.1: Variables que caracterizan la actividad algebraica

Extensivos - Particularizaciones	$(-)$		$(+)$	Intensivos - Generalización
Lenguaje Natural, Gráfico, gestual	$(-)$		$(+)$	Lenguaje Alfanumérico

Las variables que caracterizan el trabajo algebraico se representan en la Tabla 4.1. (Godino et al., 2012) y el uso del lenguaje alfanumérico, junto con objetos algebraicos de tipo relacional, operacional y estructural caracterizan los niveles más avanzados de algebrización. Cuando se reconoce la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad se tiene cierto grado de algebrización en dicha práctica, tanto si el intensivo se expresa de forma alfanumérica como si no. Si se expresa en forma alfanumérica se está ante una práctica algebraica y de lo contrario, la práctica se puede considerar como proto-algebraica (pre-algebraica). Hay una amplia zona donde los estudiantes comienzan a pensar algebraicamente aunque no hagan uso de signos alfanuméricos; esta zona es la zona de emergencia del Pensamiento Algebraico y es la zona donde el profesor debe presentar actividades en la búsqueda de una continuidad en el desarrollo del Pensamiento Algebraico, ya que este pensamiento se da en forma continua.

La diferencia entre el Pensamiento Aritmético y el Algebraico, es el trabajo con cantidades indeterminadas de forma analítica, es decir, se consideran cantidades indeterminadas como incógnitas o variables y se opera con ellas como se hace con los números. Se busca el desarrollo del pensamiento matemático a través de todos los niveles educativos, en especial, se plantea el conocimiento que debe tener el profesor, para ayudar a los estudiantes en la búsqueda del desarrollo del Pensamiento Algebraico, presente en la mayoría de actividades matemáticas (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

El desarrollo del Pensamiento Algebraico, se presenta desde la educación primaria hasta la educación secundaria. Es de importancia el trabajo que se realiza con los sistemas numéricos; es decir, el trabajo desde la aritmética: en esta actividad se tienen objetos denominados algebraicos y por tanto, estas actividades se deben direccionar al trabajo con estructuras para lograr que el paso de la aritmética al trabajo con estructuras, no sea un conflicto para el estudiante al llegar en la educación media y la básica (secundaria) a la manipulación con otros objetos algebraicos, al igual que con el trabajo en las matemáticas universitarias (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012)

Esta clarificación de la naturaleza de las prácticas matemáticas, en sus diversas áreas de contenido, junto con los objetos y procesos matemáticos, es de interés para la investigación en Didáctica de la Matemática, al tener presente que la educación busca mejorar la enseñanza y el aprendizaje y que para esto, se propone, como un paso preliminar comprender en profundidad los conocimientos y compentencias que se deben desarrollar en los estudiantes.

Así, se considera el Álgebra como la rama de las matemáticas que sirve de herramienta a otros campos de la matemática; que es un área de investigación en sí misma y especialmente, que la investigación didáctica la reconoce como un área conflictiva para los estudiantes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

4.3. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática

Se presenta en esta sección la perspectiva ontosemiótica que evidencia el desarrollo de un modelo epistemológico para las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo, con bases semióticas, de índole pragmatista y un modelo instruccional y se precisan las nociones teóricas desarrolladas en este enfoque: herramientas útiles para el desarrollo de la presente investigación; además, se presenta la técnica del análisis semiótico; la visión de la complejidad de los objetos matemáticos y finalmente, a la Fenomenología (Freudenthal, 1983) como otra de las herramientas coherentes con el enfoque y de gran importancia para la presente investigación.

El EOS surge del análisis a las diversas teorías y al considerar que no hay una respuesta clara, satisfactoria y compartida entre ellas (Teoría de las Situaciones Didácticas-TSD, Teoría Antropológica de lo Didáctio-TAD, Dialéctica Intrumento Objeto: DIO y Juego de Marcos-JM, Teoría de los Campos Conceptuales-TCC) al problema epistemológico (en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este problema se formula como un PE (problema epistemológico): ¿qué es un objeto matemático? de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, grupo) en un contexto o marco institucional determinado? El PE, se refiere al objeto matemático, como entidad cultural o institucional, que se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el del objeto como entidad personal o psicológica: PC (problema cognitivo): ¿qué significa un objeto matemático, para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? Para dar respuesta a estas preguntas de naturaleza ontosemiótica, Godino & Batanero (1994) parten de la noción de objeto propuesta por Chevallard (1991), clarifican algunas nociones introducidas por la TAD y las hacen operativas; determinan semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente, tales como concepción y significado (Godino, 2012).

En la problemática inicialmente abordada, existía una cuestión epistemológica de base y era precisar y explicitar la naturaleza del objeto matemático y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas y un problema cognitivo, que era caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo (Godino, 2012). Para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en la Didáctica de la Matemática, se conformaron las nociones claves de Sistema de Prácticas, Configuración de Objetos y Procesos (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). Estas herramientas teóricas permiten formular el problema epistémico, (conocimiento institucional, socio-cultural) y cognitivo (conocimiento personal) de la didáctica de la matemática.

El enfoque EOS, tiene entre sus objetivos “comparar, coordinar e integrar las teorías: TSD, TCC, DIO-JM, TAD, Teoría de los Registros de Representación Semiótica-TRRS (Duval, 1996), que permitan abordar los problemas didáctico-matemáticos” además, pretende ser un marco teórico que incluye las herramientas necesarias y suficientes respetando el principio fundamental de la parsimonia metodológica, formulado en los siguientes términos: Problema de epistemología de la didáctica de la matemática: Dadas las teorías $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ¿es posible elaborar una teoría **T** que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i ? (Godino et al., 2006; Godino, 2012).

4.3.1. Nociones teóricas

Se presentan las herramientas teóricas del EOS, que permitieron realizar análisis detallados para el estudio de los Conocimientos Didácticos-Matemáticos relacionados con el objeto Grupo.

4.3.2.1. Sistemas de prácticas

En primer lugar, se presenta la noción de Práctica matemática y objeto matemático introducidas por Chevallard (1991; 1992), que se conectan en este enfoque, con las ideas centrales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Una práctica matemática es una acción o manifestación (verbal o escrita) operativa y discursiva que puede ser de un sujeto personal, o puede ser compartida en una institución (profesor, textos), para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 1994). Esta noción se generaliza a los sistemas de prácticas matemáticas personales (estudiante) e institucionales (profesor) y juega un papel central desde el punto de vista epistemológico y didáctico. Con esta noción se asume y se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en el cual se basa el EOS. Estas prácticas matemáticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el interior de la institución, lo cual da lugar a las nociones de sistemas de prácticas personales y sistemas de prácticas institucionales las cuales se definen (Godino et al., 1994, p. 337) como:

> El sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución. Los sistemas de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas.

Según Font, Godino & Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104). Los sistemas de prácticas dan respuesta a la pregunta de naturaleza semiótica ¿que significa un objeto matemático? y a la pregunta de naturaleza ontológica ¿qué es el objeto matemático? (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011).

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero, corresponde a la distinción entre la faceta personal o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional, compartida y social de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular, es necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y las logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales, también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, las pretendidas y las prácticas de referencia (Pino-Fan, 2013).

4.3.2.2. Objeto matemático

Otra noción importante en este enfoque, es la de objeto matemático que corresponde, a una entidad emergente e interviniente en las prácticas matemáticas. Se entiende por objeto alguno de los elementos: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación-problema. Cada uno de estos elementos (excepto la situación-problema) se entienden como emergentes de una práctica cuya finalidad es la resolución de una situación-problema (Godino et al., 1994; 1998) (ver, figura 4.1). En el EOS, se adopta una visión pragmática, al considerar que los objetos matemáticos son emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino et al., 1994). Para Font et al. (2013) la propuesta ontológica, se deriva de las prácticas matemáticas, siendo éstas, el contexto básico en el que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales emergen los objetos matemáticos; así, el objeto matemático adquiere un estatus derivado de las prácticas matemáticas que le proceden (p. 104).

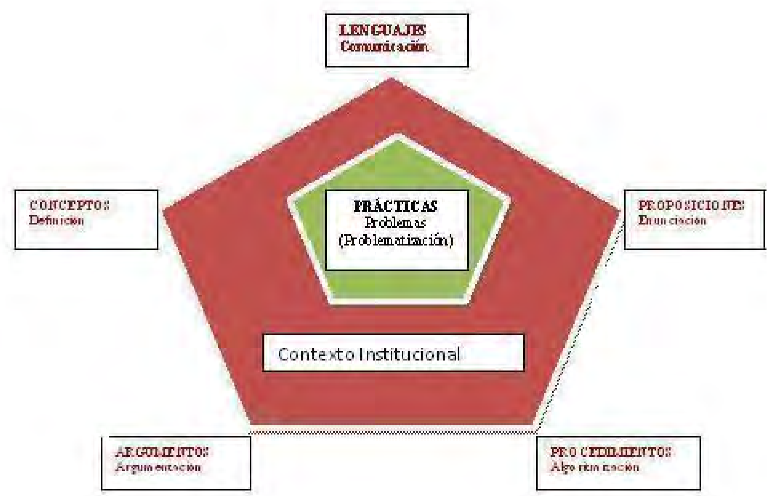


Figura 4.1: Objetos matemáticos (Godino et al., 1994)

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc), que se evocan al hacer matemáticas y que se representan en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Como los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces de igual forma, se considera a los objetos emergentes como objetos institucionales, si provienen de sistemas de prácticas compartidos en el interior de la institución, mientras que a los objetos emergentes de los sistemas de prácticas personales se les denominará objetos personales Godino et al. (1994).

Los autores señalan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado (Pino-Fan, 2013).

El EOS en consonancia con el interaccionismo simbólico, considera como objeto o entidad matemática (ver, figura 4.1.), todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando se hace, se comunica o se aprende matemática. En la descripción de la actividad matemática se hace referencia a muchos y diversos objetos, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos (Godino, 2002). Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy (2011), señalan que los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde una perspectiva proceso - producto y para esto consideran los procesos duales: Institucionalización-Personalización; Generalización- Particularización; Descomposición/análisis-Composición/reificación; Materialización-Idealización; Representación- Significación (ver Figura 4.2.).

Figura 4.2: Objetos y procesos matemáticos (Godino et al., 1994)

La noción de “Sistema de prácticas personales” describe los conocimientos de un sujeto individual sobre el objeto, de manera global concretada en la trama de funciones semióticas (relaciones) que el sujeto puede establecer en las que el objeto se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en el sistema de prácticas se distinguen entre las que son de naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, respecto de las discursivas, se obtiene un constructo que guarda relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999): dándole a dicha noción una dimensión personal. En estas prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), en este sentido en el EOS, se propone una tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino, Batanero & Font, 2007) que corresponde a: elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos. De igual forma, estos objetos se organizan en entidades más complejas: los sistemas conceptuales, teorías. Estos seis tipos de objetos primarios amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales al considerarlas como insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática (Pino-Fan, 2013).

4.3.2.3. Significados de los objetos matemáticos

En el EOS, se concibe el significado de los objetos matemáticos (operación binaria, grupo) desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto, se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas: Significado institucional y Significado personal del objeto matemático, que se desarrollan y precisan en Godino et al. (1994; 1998) en términos de los sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización, además, se relacionan con las nociones de conocimiento y comprensión. Desde supuestos pragmáticos-antropológicos, estas ideas centran el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder al sujeto individual al cual se dirige el esfuerzo educativo. Godino et al. (1994) definen estos significados:

El significado de un objeto institucional, es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto matemático en un momento dado (p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución en el tiempo y la dependencia institucional. De igual forma, Godino et al. (1994) definen:

El significado personal de un objeto como el sistema de prácticas personales (de una persona) para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal, en un momento dado(p.341).

En este enfoque, las nociones de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas. El significado de un objeto matemático, es el contenido de cualquier función semiótica en el sentido de Hjemslev (1943); por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo-intensivo, personal o institucional (ver, figura 4.3 y 4.2); puede referirse a un sistema de prácticas o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto). En el EOS una de las formas de entender el significado de un objeto desde la perspectiva pragmatista, es en términos de los sistemas de prácticas en las que dicho objeto interviene (significado sistémico). Los sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, donde se distinguen diferentes significados cuando se abordan distintos problemas (Pino-Fan et al., 2013).

Algunos sistemas de prácticas se consideran como primarios, por su carácter extensivo (particular), esto hace referencia a que resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Los sistemas de prácticas primarios se agrupan en sistemas más genéricos en los cuales se pueden abordar situaciones-problemas más generales. Este proceso continúa por niveles, hasta llegar a la formalización del objeto matemático. La consideración conjunta de los elementos y sus relaciones, conforman el Significado epistémico global del objeto matemático.

Reconstruir el significado global de un objeto matemático significa identificar los sistemas de prácticas en las cuales se utiliza, los cuales llevan asociadas, configuraciones epistémicas que constituyen un significado parcial del objeto matemático (Godino, 2009). El sentido en el EOS, se interpreta como un significado parcial del objeto matemático y se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinado. El uso del término sentido en la Teoría de Situaciones Didácticas, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge y le da sentido (se describe como significado situacional). En el EOS esta correspondencia es crucial, ya que es la razón de ser del objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero, tienen en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre el objeto y los otros componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que se considera que proviene el objeto, entendido en términos cognitivos o en términos epistémicos (Godino, Contreras & Font, 2006).

La interpretación semiótica de las prácticas, lleva a hablar de tipología de significados personales (globales, declarados y logrados) y significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). Según Godino et al. (1994), los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificadas para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados (ver figura 4.4.). Además, el profesor como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución concreta de enseñanza este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado Global u holístico, requiere realizar un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como el tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas-fenómenos) de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático (Pino-Fan, 2013).

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global, también denominado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático y significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden

Figura 4.3: Tipología de significados sistémicos (Pino-Fan, 2013)

incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Para una institución de enseñanza el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

La identificación de los significados parciales se hace mediante la descripción sistemática de los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto matemático (Font & Godino, 2006; Pino-Fan et al., 2011) (ver, figura 3.1 y 4.1) En el análisis de las configuraciones epistémicas, cada objeto interviniente en una práctica matemática, puede verse desde distintas facetas duales (ver, figura 4.5) Para determinar los diferentes niveles de generalización entre las configuraciones, se trabajarán los aspectos intensivos-extensivos (general-particular).

4.3.2.4. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

La Configuración epistémica, se compone de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en los diferentes contextos de su uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas, las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial diferente de dicho objeto matemático (Godino et al., 2006). Las configuraciones epistémicas permiten reconstruir el significado global de referencia, definido a partir de las nociones de significado global-holístico-holosignificado que comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático (ver, figura 3.1).

La noción de sistemas de prácticas, es útil en los análisis de tipo macrodidáctico, particularmente, cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en diferentes marcos institucionales, contextos de uso o juegos del lenguaje.

Para los análisis más finos de la actividad matemática, se ha introducido en este enfoque, una tipología de objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estos objetos matemáticos primarios se relacionan entre sí, formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en este enfoque se denomina: Configuración. Las configuraciones pueden ser: socio-epistémicas, que corresponden a redes de objetos institucionales; o cognitivas, que corresponden a las redes de objetos personales. El término de Configuración Cognitiva hace referencia, al sistema de objetos matemáticos primarios que están involucrados en las prácticas matemáticas personales llevadas a cabo para resolver un problema específico (Godino, Batanero & Font, 2007), y la noción de Configuración Didáctica, se relaciona con la secuencia interactiva que tiene lugar a propósito de una situación-problema. Una configuración didáctica se compone de una Configuración Epistémica, esto es la situación-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que puede estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien distribuirse entre ambos en interacción (ver, figura 4.4) (Font, Planas & Godino, 2010).

Este término de configuración epistémica o cognitiva es útil, ya que, en la realización de una práctica matemática y específicamente, en la interpretación de su resultado como satisfactorio, se necesita poner en juego determinados conocimientos; así, entre los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver una situación-problema, se encuentran: en primer lugar, el lenguaje (verbal, simbólico): estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica y ella en tanto a acción compuesta, es satisfactoria. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado de objetos, formados por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se encuentran articulados en la configuración epistémica (ver, figura 4.4; (Font & Godino, 2006, p. 69)).

Estos objetos primarios que conforman la configuración, se manifiestan de diversas maneras durante la actividad matemática: el lenguaje, con el que nos referimos a ellos, a su vez, evoca a conceptos o definiciones, los cuales se operativizan mediante procedimientos y propiedades asociadas, que se manifiestan durante la solución de las tareas matemáticas. Además, cada uno de los objetos matemáticos primarios pueden ser considerados desde distintas facetas o dimensiones duales: personal-institucional, unitario-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y ejemplar-tipo (ver, figura 4.2). En esta dirección, Godino,

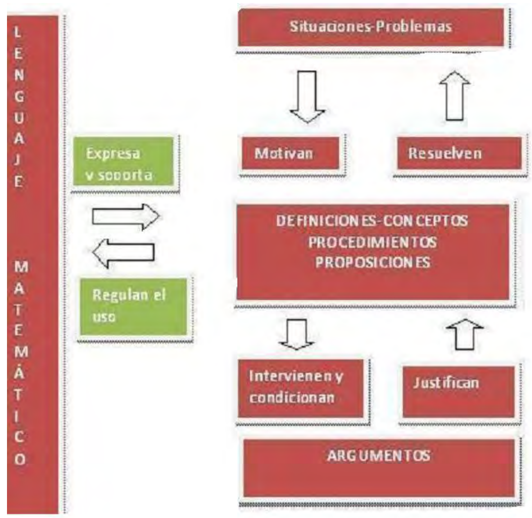


Figura 4.4: Configuración epistémica (Font & Godino, 2006)

Font, Wilhelmi & Lurduy (2011) señalan que tanto estas dualidades como los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso-producto, lo cual lleva a considerar los siguientes procesos: Institucionalización-Personalización; Generalización- Particularización; Descomposición/Análisis-Composición/Reificación; Materialización-Idealización y Representación- Significación (Pino-Fan, 2013).

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados, llevan asociados, respectivamente los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enumeración y argumentación (ver, figura 4.2) Otros procesos como la resolución de problemas y la modelización se ven en este enfoque como mega-procesos, e implican la intervención y la activación de los procesos mencionados. Las situaciones-problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, tienen un papel central, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

4.3.2. Facetas y niveles del análisis didáctico

Las nociones teóricas del EOS son un conjunto de herramientas de análisis y reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se han elaborado varios sistemas de objetos y relaciones (categorías) que ayudan a analizar y comprender, de manera sistemática y con distintos niveles de profundidad, los diversos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este enfoque se proponen las siguientes facetas para el análisis de los procesos de instrucción matemática (Godino, 2009):

Epistémica: conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
Cognitiva: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
Afectiva: estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
Mediacional: recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
Interaccional: patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
Ecológica: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.

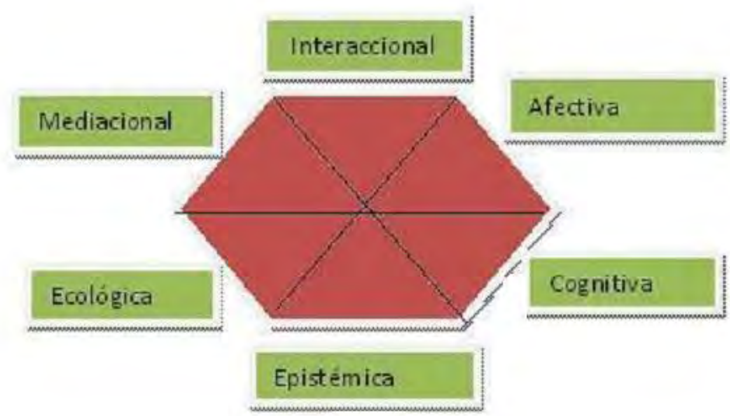


Figura 4.5: Facetas del Análisis Didáctico (Godino, 2009)

En este modelo teórico se consideran claves las facetas epistémica y cognitiva y se postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones-problema, específicos. Además, se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, mediacional, interaccional y ecológica;) ya que, condicionan los aprendizajes y la enseñanza (Godino, 2009).

En los trabajos de investigación realizados en el marco del EOS (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009) se proponen cinco niveles para el análisis del proceso de instrucción:

Nivel 1. *Identificación de prácticas matemáticas.* Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. Se parte del supuesto, que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y sobre todo, una *práctica discursiva* (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, se entiende el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que el profesor puede considerar como matemática. Así, se considera como práctica matemática a cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas con el fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994).

Nivel 2. *Identificación de objetos y procesos matemáticos y didácticos.* Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje. Se considera que cuando un agente realiza una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos de los objetos: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimiento y argumentos. Estos seis tipos se articulan formando la configuración de la figura 4.4. (Font & Godino, 2006).

En el EOS, se consideran relevantes en la actividad matemática a dieciséis procesos: los procesos de generalización- particularización, institucionalización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de evaluación que se analiza). Existen otros procesos igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, que pueden entenderse como mega procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 3. *Descripción de conflictos semióticos*. Según Godino et al. (2007) se entiende por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones. Cuando la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto se habla de conflicto semiótico de tipo cognitivo. El conflicto semiótico interaccional, surge entre las personas, pero se interpreta que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas y finalmente, si la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes, se habla de un conflicto semiótico de tipo epistémico.

Los tipos de conflictos semióticos no son excluyentes, puesto que un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro según la perspectiva que se adopte. Por ejemplo, un conflicto epistémico entre el profesor y el alumno, también se puede considerar como un conflicto de tipo interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son el resultado de interacciones sociales generadoras del conflicto (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 4. *Identificación del sistema de normas y meta normas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones. La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social; ya que, la clase se puede considerar como una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por meta conocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas socio-matemáticas (Planas & Setati, 2009; Yackel & Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1997).

Nivel 5. *Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción*, donde se identifican potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementan la idoneidad didáctica (Godino, 2009). La identificación de seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permiten considerarlo un proceso idóneo; estas son: la idoneidad epistémica, donde se valora si las matemáticas que se enseñan son unas buenas matemáticas; idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos; idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de instrucción y finalmente, idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las conclusiones del entorno social y profesional (Font, Planas & Godino, 2010).

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero & Font, 2007):

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia y permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia; la *idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados; la *idoneidad interaccional* hace referencia a que un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, esto es, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y por otra parte, permiten resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción: esta idoneidad, busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que efectivamente se producen durante el proceso de instrucción (ver, figura 4.6)

La *idoneidad mediacional*, responde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje: esta idoneidad, se encarga de la valoración del grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción; la *idoneidad afectiva*, corresponde al grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio y se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. La idoneidad emocional, valora la situación afectiva de los estudiantes, la cual determina su grado de interés o motivación hacia el proceso de estudio; finalmente, la *idoneidad ecológica* representa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y pretende valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, su pertinencia con el entorno, etc. (a priori y a posteriori).

Estos niveles de análisis permiten el desarrollo de un análisis completo para describir, explicar y valorar los procesos de instrucción (Font, Planas & Godino, 2010). En un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 permite describir la secuencia de las prácticas matemáticas. La realización de una práctica moviliza elementos distintos, a un

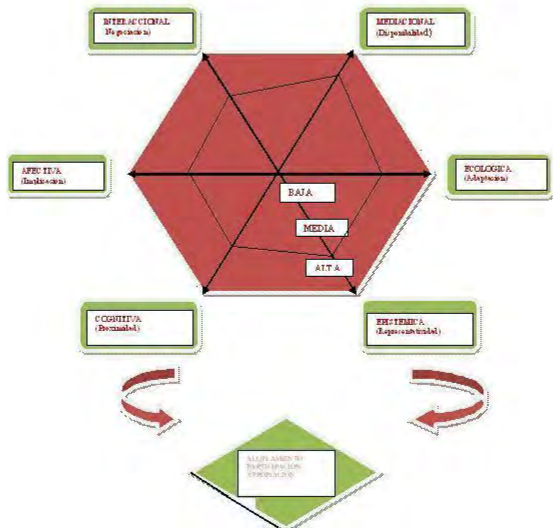


Figura 4.6: Idoneidad didáctica (Godino, 2011)

saber, un agente (persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza. El agente realiza la práctica matemática orientada a la resolución de situaciones-problema, esto hace que sea necesario considerar otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas. Esto se realiza en el nivel 2 del análisis. Este segundo nivel tiene como finalidad, describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos descritos en el enfoque EOS (Godino, 2012).

El *análisis didáctico* de un suceso de clase parte del planteamiento de una situación-problema por parte del profesor; seguidamente, los estudiantes realizan prácticas matemáticas necesarias para la resolución de dicho problema. Existen las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, que hacen posible realizar estas prácticas matemáticas (nivel 2), de ahí se avanza al estudio de las interacciones entre el profesor y los alumnos presentes en el proceso de instrucción. Estas interacciones didácticas que suceden en un proceso de instrucción pueden ser muchas y se analizan en el nivel 3, en especial interesan, las interacciones en torno a los *conflictos de tipo semiótico* (Planas & Iranzo, 2009). En el nivel 4 del análisis didáctico se consideran las prácticas matemáticas e interacciones que están condicionadas y soportadas por una trama de normas y meta-normas que regulan las acciones (Godino, 2012).

Estos cuatro niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa; ya que, sirven para comprender y responder a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Sin embargo, no evalúan la pertinencia del proceso de instrucción matemática ni determinan pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso. Para esto son necesarios criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y que permiten guiar la mejora de dichos procesos; de esto se ocupa el nivel 5 del modelo (Font, Planas & Godino, 2010).

Finalmente, dentro del análisis didáctico, el estudio de los Conflictos Semióticos se enmarca dentro del estudio de errores y dificultades que tienen los estudiantes para abordar el objeto de estudio y se ubica también dentro del estudio de las concepciones de los estudiantes (Sepúlveda, 2014).

4.3.3. Análisis semiótico

El análisis semiótico de un texto matemático y en general, de la actividad matemática en el enfoque ontosemiótico contempla el análisis de los siguientes elementos: a) Las notaciones y sus representaciones (lenguaje); b) Las situaciones-problemas; c) Las definiciones; d) Los procedimientos y las técnicas; e) Las proposiciones, propiedades y teoremas y f) Los argumentos. Estos elementos se articulan formando las configuraciones epistémicas descritas anteriormente; estas configuraciones son herramientas útiles para describir la complejidad de los objetos matemáticos y las prácticas de donde emergen los objetos matemáticos.(Godino, 2002).

El lenguaje, según Godino (2002) se encuentra constituido por los términos, las expresiones, las notaciones, las gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y matemático) se describen otros objetos lingüísticos.

Las situaciones, corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios. Son las tareas que inducen la actividad matemática.

Los procedimientos, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo. Son las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas.

Los conceptos, son dados por las definiciones o descripciones; por ejemplo, número, punto, recta, función.

Las proposiciones, son las propiedades o los atributos de los objetos mencionados y suelen darse como enunciados.

Las argumentaciones, pueden ser deductivas o de otro tipo; se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos seis tipos de objetos se califican como matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática y son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, las teorías. Las entidades lingüísticas, tienen un papel representacional -se ponen en lugar de las restantes- e instrumental; o sea, se ven como instrumentos de la actividad matemática. Las situaciones - problemas, son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones (procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin (Godino, 2002).

Se define el "análisis semiótico" de un texto matemático como su descomposición en unidades, que se llaman semióticas, junto con la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas (relaciones) que se establecen entre los mismos por parte de los diferentes sujetos. El criterio para definir las unidades de análisis es el cambio del elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerados, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, al empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones; es decir, se tiene presente en la delimitación de las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en este enfoque teórico (Godino, 2002).

El análisis semiótico según Godino (2002) es la indagación sistemática de los significados puestos en juego a partir de la transcripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas, el análisis permite caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, para formular hipótesis sobre los conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

El análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Se considera el análisis semiótico a priori como una etapa previa y crucial del análisis didáctico-matemático porque permite identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requieren de procesos instruccionales específicos. Este análisis permite describir el significado institucional local del contenido estudiado y la distribución temporal de los distintos elementos. Para la valoración del carácter más o menos completo del significado local, se requiere disponer de un patrón de comparación que se denomina el significado institucional de referencia. La comparación entre significados institucionales se puede describir como la transposición didáctica localmente implementada en el proceso de estudio. El significado de referencia se elabora a partir del análisis de textos y de la práctica del análisis estadístico (Godino, 2002).

El análisis semiótico de texto, desde el punto de vista del estudiante tiene el carácter de análisis a priori (o potencial); ya que, se refiere a las interpretaciones (y a los conflictos semióticos) que pueden poner en juego los alumnos que estudian un objeto matemático en el sistema didáctico a considerar. Desde el punto de vista del profesor, que para el caso puede ser el autor del texto, el análisis tiene un carácter a posteriori; ya que, el texto es la expresión efectivamente emitida por el autor. Las interpretaciones del investigador (persona que analiza y valora los diversos significados puestos en juego) se adscriben al autor de la investigación y tienen un carácter a posteriori.

4.3.4. El conocimiento

Se describe de manera general como lo propone Chevallard (1992), esto es, como la relación de alguien (persona o institución) con un objeto. Esta noción abarca todos los constructos cognitivos usados en las diversas ciencias y tecnologías de la cognición humana (Varela, 1988), pero para hacerla operativa se modeliza adecuadamente el objeto de conocimiento, esto es, aquello con lo que se establece la relación y los tipos de relaciones posibles (Godino, 2012). En general, la relación de (X) (persona o institución) a un objeto (O) se traduce en las correspondencias que (X) puede establecer entre (O) y otros objetos: correspondencias que se interpretan como funciones semióticas (Godino, Batanero & Font, 2006). Si (O) es un término o expresión, el sujeto (X) puede atribuir a (O) otro objeto, su significado (S); si (O) es una tarea, (X) puede aplicar a (O) una técnica o varias técnicas de solución, así como aportar explicaciones y justificaciones, etc. El objeto (O) puede ser una organización matemática más o menos compleja y el sujeto puede tener distintas relaciones a cada uno de sus componentes.

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, al igual que en la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1992; 1999), los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, esto es, sistemas compuestos de praxis y logos. El sujeto puede tener una relación bien adaptada a la praxis, pero no al componente discursivo. En este caso, decimos que el sujeto conoce cómo hacer un tipo de tareas, tiene competencia o capacidad para hacerla, pero no comprende (o comprende parcialmente) el porqué de las técnicas que aplica (Godino, 2012).

Las expresiones del tipo, (X) es competente para realizar la tarea T, indican que el sujeto (X) domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica t que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias, se dice que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que: conoce cómo hacer la tarea. En cambio, la expresión (X) comprende la técnica t que permite realizar la tarea T, se aplica si (X) conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas.

La competencia matemática, se entiende en el sentido restringido, como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas y se complementa con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. En el EOS, se considera que la competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Es necesaria una dialéctica competencia-comprensión, teniendo en cuenta que es imprescindible tener disponible cierta práctica instrumental (adquirida en contextos significativos que involucra la comprensión de la misma) para avanzar hacia otras problemáticas de comprensión más complejas (Barallobres, 2001).

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático lleva a reconocer una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se trata más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además, deben ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes. El problema del logro del binomio (competencia, comprensión) está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas (no ostensivas, generalizaciones) cuya naturaleza y origen se tienen que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué se entiende por la comprensión de tales objetos (Godino, 2012).

4.3.5. La complejidad de los objetos matemáticos

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista o empirista se consideraba como objeto matemático, con una existencia independiente de las personas, en el EOS, se explica como un objeto virtual o ficticio que emerge de las diferentes maneras de ver, hablar, operar; esto es, el objeto es el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícitamente o implícitamente el par (Prácticas matemáticas, configuración epistémica que las activa). Este objeto virtual primero, considera la referencia global de una configuración epistémica y después, el conjunto de varias configuraciones epistémicas (Godino, 2002).

Font, Godino & Gallardo (2013) consideran que el proceso por el cual emergen los objetos matemáticos a partir de las prácticas es complejo y se deben distinguir, al menos dos niveles. En el primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, problemas y argumentos (objetos primarios) que se organizan en configuraciones epistémicas que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos. En el segundo nivel, emerge una referencia global asociada a una o varias configuraciones epistémicas. La emergencia de este objeto virtual o ficticio se explica por la combinación de efectos de las diferentes dualidades consideradas para cada objeto.

En el EOS se considera que los objetos primarios matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, según el juego del lenguaje en el que participan según Wittgenstein (1987) pueden ser considerados desde diferentes maneras de estar participando; estas formas se agrupan en las siguientes facetas o dimensiones duales: unitaria/sistémica; expresión/contenido; ostensivo/no ostensivo; personal/institucional; extensivo-intensivo (ver, figura 4.1 y 4.2)

La dualidad, *unitaria/sistémica*, permite considerar una configuración epistémica, como la descripción del objeto que tiene una definición, la cual forma parte de la configuración y en la cual hay propiedades que se asume pertenecen al objeto matemático, además de procedimientos que son los que permiten usar el objeto. Esta dualidad hace referencia al objeto, que se puede considerar como unitario o perteneciente a un sistema, es decir, que hace parte de otro objeto matemático. Las otras dualidades que se mencionan, son importantes; ya que, permiten delimitar propiedades que se le atribuyen al objeto.

La dualidad *expresión/contenido (significante-significado)*, permite duplicar el objeto considerando la representación y el objeto representado como objetos diferentes. Esta distinción permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. El uso que en este marco se hace, es el propuesto por el lingüista danés Hjemslev (1943). Para el autor, una función semiótica, es la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o funciones) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

La dualidad *ostensivo/no ostensivo*, permite considerar que el objeto representado es un objeto ideal diferente de sus representaciones materiales. Hace referencia al hecho que cualquiera de los objetos tiene una faceta ostensiva, es decir, perceptible y otra no ostensible.

Las entidades lingüísticas en principio, se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). Pero las entidades praxémicas y discursivas, aunque son intrínsecamente diferentes de las lingüísticas, necesitan a estas entidades de manera esencial para su constitución y funcionamiento. El lenguaje es el medio por el cual no solo se expresan los no ostensivos, además, es instrumento para su constitución y desarrollo.

La dualidad *extensivo/intensivo* lleva a considerar el objeto como algo general y la dualidad personal/institucional, como un objetivo. Esta dualidad, permite referirse al objeto matemático como personal o institucional. Se trata entonces, de la manifestación de un sujeto individual, como la respuesta a una prueba de evaluación, la realización de una tarea escolar por el estudiante, se habla así de objetos personales, al ser portadores de sus conocimientos. Si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones del profesor ante su clase, se ponen en juego objetos institucionales al tener connotaciones normativas o convencionales, es decir, los objetos se usan como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de los conocimientos matemáticos es fundamental para describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La distinción entre persona e institución es esencial en el análisis de la actividad matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esta distinción de posiciones, en el sistema didáctico interesa que se refleje en los propios objetos de enseñanza y de aprendizaje (objetos y significados personales e institucionales;) ya que, esto permite caracterizar el aprendizaje como un acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales. Estos significados pueden ser elementales o sistémicos (praxeológicos). En el límite, ambos significados pueden coincidir, pero puede no ocurrir.

La combinación de las dualidades produce la emergencia de una referencia global sobre la cual se pueden realizar determinadas acciones (Rondero & Font, 2014). Esta referencia global, en la actividad matemática se concreta en una configuración epistémica determinada. Así, en el contexto de la actividad matemática el objeto matemático, virtual o ficticio se presenta en forma de configuración y lo que se puede hacer con este objeto está determinado por la configuración en la que dicho objeto se presenta. Se tiene en cuenta, que el objeto emerge con el tiempo desde varios sistemas de prácticas matemáticas diferentes. Por esta razón, el objeto se considera como singular y plural. Singular, por razones de simplicidad y plural, porque en cada subconjunto de prácticas, la configuración de objetos en la cual se presenta varía, posibilitando prácticas diferentes (Font, Godino & Gallardo, 2013). Se considera de acuerdo a Font et al. (2013) que el objeto matemático es uno y muchos a la vez. Se considera de manera unitaria, como emergente de varios sistemas de prácticas diferentes; en este caso, es el objeto asociado al sistema de pares (prácticas matemáticas, configuraciones que las activan.) Esta asociación explica que el objeto se puede definir de diferentes maneras equivalentes y que se puede representar por diferentes representaciones; por otra parte, se puede considerar que en cada configuración el objeto asociado es diferente.

4.3.6. Fenomenología

En el análisis didáctico se define la Fenomenología, como un procedimiento para explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2007). La caracterización de este análisis didáctico, se fundamenta en la teoría curricular que se articula a partir de cuatro dimensiones: cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social, y en diferentes niveles de especificidad, así, el análisis didáctico es un recurso que le permite al profesor organizar la actividad de enseñanza de un tema matemático específico (Rico, 1997, p. 46-50).

La realización de un análisis didáctico, establece unos organizadores del currículo dentro de los que se encuentra en primer lugar, los errores y dificultades de los estudiantes detectados en el aprendizaje de las matemáticas, que se presentan para cada tópico, así como los problemas y obstáculos de aprendizaje que se detectan o se plantean para cada concepto. En segundo lugar, se encuentran las representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con algunas modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos. En tercer lugar, la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos. En cuarto lugar, la diversidad de los materiales de tipo manipulativo y de los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico y finalmente, la evolución histórica de cada campo e incluso de cada concepto.

Estas cinco perspectivas junto con los propios contenidos, no determinan todas las posibilidades para reflexionar sobre cada una de las unidades de un currículo de matemáticas desde un planteamiento didáctico. Estos organizadores ofrecen la posibilidad de realizar un análisis didáctico de cada tema de matemáticas, es decir, un análisis de los contenidos para su enseñanza en el sistema educativo. Este análisis hace parte del trabajo del profesor en el proceso de planificación de sus unidades o temas para el proceso de instrucción. El desarrollo de los componentes del análisis didáctico activa una serie de conocimientos que en conjunto se denomina: El conocimiento didáctico del profesor. Este conocimiento está compuesto de herramientas teóricas, denominadas los organizadores del currículo; estos organizadores corresponden a los conocimientos que le permiten al profesor articular el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades del currículo (Segovia & Rico, 2001. p. 102) y se consideran elementos teóricos y metodológicos, mediadores, articuladores del análisis didáctico y de los sistemas de conocimiento, que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos (Bedoya, 2002, p. 55).

El análisis didáctico tiene entonces, como objetivo facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su actuación, mediante cuatro tipos de análisis parciales: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007).

Se ha mencionado a la Fenomenología, las representaciones, el pensamiento matemático avanzado, las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes como organizadores del currículo (Rico, 1997).

El término fenomenología (Freudenthal, 1983) no hace referencia al sentido dado por Husserl, Hegel o Heidegger. El *noumenon* se refiere a lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y *phainomeno* también de origen griego significa lo que parece. Los fenómenos se consideran que son las apariencias o lo que se nos parece de las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo de los noúmenos era el que se calificaba de real. La contraposición entre fenómeno y noúmeno es una contraposición entre mundos, el de los fenómenos que es el de la apariencia, de la experiencia y el noumenon que es lo sensible, lo inteligible.

Identificar los conceptos matemáticos con noumenon, los sitúa fuera del campo de nuestra experiencia y esto contradice las ideas de Freudenthal al presentar el concepto matemático como medio de organización de fenómenos, que posteriormente, pasarán a formar parte de otro campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, así, los conceptos no caen fuera de la experiencia ni están en un mundo diferente del mundo de los fenómenos que organiza: los fenómenos son objetos de la experiencia matemática y se establecen las cadenas (fenómenos, medio de organización 1), (medios de organización 1, medios de organización 2) y esta cadena continúa.

Hacer fenomenología es describir cada una de estas series o pares, es decir, es determinar cuáles son los fenómenos para los cuales el concepto es un medio de organización, teniendo en cuenta que la actividad matemática no permanece en el nivel inferior (fenómeno, medio de organización); el proceso de creación de los objetos matemáticos es un proceso por medio del cual los medios de organización se convierten en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos. Así, los objetos matemáticos se incorporan a nuestra experiencia y entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y este proceso continúa reiterativamente (Puig, 2001).

Se define la fenomenología como el método de análisis de los contenidos matemáticos y el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático; corresponde a la descripción del objeto matemático. El análisis fenomenológico se hace con una intención didáctica; ya que, es un análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular y se entiende en este contexto como un componente del análisis didáctico (Rico, 1997, p. 61), que tiene el objetivo de servir de base para organizar la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas (Freudenthal, 1983).

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura o de una idea matemática, significa describir el noumenon (conceptos) en su relación con los phainomenon para los cuales es el medio de organización, indicando los fenómenos para cuya organización fue creado y a los cuales puede ser extendido, de qué manera actúa sobre ellos como medio de organización y que poder nos da sobre esos fenómenos. En la fenomenología didáctica se analiza el elemento didáctico en la relación entre noúmeno y phainomenon, esto es, cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en el proceso de enseñanza y aprendizaje: se tiene una fenomenología didáctica, donde intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza, se trata así, de los fenómenos que están organizados por el concepto en las matemáticas tomadas en el momento actual.

Si se analiza cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en la historia, se tiene una fenomenología histórica, es decir, se analizan los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extiende a otros fenómenos. El orden para los análisis fenomenológicos, corresponde a iniciar con una fenomenología pura, es decir, con el conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones. Se completa con la fenomenología histórica y se continúa con la fenomenología didáctica, para lo cual se necesita conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje y finalmente, se realiza la fenomenología genética, en cuanto al crecimiento cognitivo de los alumnos (Freudenthal, 1983).

Una de las tareas de la fenomenología es indagar, analizando los conceptos matemáticos, sobre cuáles son los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos. Así, en el estudio de las configuraciones epistémicas que corresponde a la identificación de los diferentes significados de un objeto matemático, se realiza este estudio fenomenológico al determinar las situaciones - problemas, de donde emergen estos significados parciales del objeto matemático y se incluye así, la fenomenología dentro de las herramientas del EOS.

4.3.7.1. La noción de significado de Frege

Frege (1998a; 1998b; 1998c) introduce la idea de triángulo semántico para abordar el significado de un término (ver, tabla 4.2). Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa; un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un término conceptual, en el triángulo semántico viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto propiamente tal, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos (ver, tablas 4.2 y 4.3).

El triángulo semántico propuesto por Frege (Gómez, s.f.) identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que el interés por el significado de los conceptos matemáticos se centra en el ámbito de la matemática, se adaptan las ideas de Frege para considerar un sis-

Tabla 4.2: Triángulo semántico (término) de Frege

		Sentido		
	Expresa		Determina	
Signo(término)		Designa		Referencia

tema de relaciones amplio. Se interpretan las ideas de Frege, al enfatizar en el hecho de que los sentidos con los que se usa el término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos y por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar.

Tabla 4.3: Triángulo semántico (concepto) de Frege

	Sentido	
Signo-Término		Referencia-Concepto

Se adopta así, un punto de vista funcional, por el cual el sentido con el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustenta el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también, mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto. Se aborda así, el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que se denominan: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología :

En la estructura conceptual es donde se incluyen las relaciones del concepto con otros conceptos atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.

En los sistemas de representación es donde se incluyen las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos. En la fenomenología, es donde se incluyen aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática se ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de la clase: la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares. Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o unidad didáctica, es deseable que el profesor conozca las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar y sea capaz de adquirir la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; además, de seleccionar a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción y utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

4.3.7.2. El Objeto grupo y la fenomenología didáctica

Freudenthal indica que le ha dado a su método de análisis de los contenidos matemáticos el nombre de fenomenología porque parte de la contraposición establecida en la tradición filosófica entre lo que se expresa en esa tradición con los términos phainomenon y noumenon. Esa contraposición, cuyo carácter de antítesis pone en duda, la establece en las matemáticas entre los conceptos o estructuras matemáticas que serían noúmenos y los fenómenos que esos conceptos organizan (Puig, 1997).

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización, considera la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, se toman las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también se indican cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente. La descripción de la relación con los fenómenos en cuestión debe mostrar de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos. La relación entre fenómenos y conceptos se torna más compleja al intervenir un tercer componente en la relación, el objeto mental; además, el análisis fenomenológico toma en consideración las relaciones entre fenómenos y objeto mental y entre objeto mental y concepto (Puig, 1997).

Los términos noúmeno y fenómeno, provienen del griego. Noúmeno, procede de nous (no uc) y significa: lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y fenómeno, proviene de phainómenon, que significa lo que aparece. El término noúmeno, se toma como medio de organización, esto es, por la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos. El término fenómeno, hace relación a lo que es objeto de nuestra experiencia matemática, se deja de lado su significado original de apariencia y se tiene presente que los medios de organización de los fenómenos, son aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática, que son tomados a su vez como objeto de experiencia (Puig, 1997).

El análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal, toma prestados términos de la filosofía y tiene consecuencias en el hecho de cómo se concibe la naturaleza de las matemáticas, está hecho al servicio de la didáctica. Sin embargo, Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, todos importantes desde el punto de vista de la didáctica, pero solo uno de ellos calificado de didáctico. Esos tipos son: Fenomenología, Fenomenología didáctica, Fenomenología genética y Fenomenología histórica (Puig, 1997).

Lo que caracteriza cada uno de estos análisis fenomenológicos son los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto cuyo análisis se realiza. En el primer caso, se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado, en el momento actual y considerando su uso actual. En el caso didáctico, intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. En el caso genético, los fenómenos se consideran con respecto al desarrollo cognitivo de los aprendices. En el caso histórico, se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos.

La descripción de las relaciones entre los fenómenos y el concepto toma en consideración en el primer caso, las que están establecidas y en los otros tres, cómo se produjeron, se adquirieron o se conformaron esas relaciones en el sistema educativo, con respecto al desarrollo cognitivo o en la historia, respectivamente. Además, en el caso de la fenomenología pura, los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como productos cognitivos, mientras que en el caso de la fenomenología didáctica se tratan como procesos cognitivos, es decir, situados en el sistema educativo como materia de enseñanza y siendo aprendidos por los alumnos (Puig, 1997).

Freudenthal dice que al describir una fenomenología didáctica se puede pensar que debería estar basada en una fenomenología genética, pero que esta idea es errónea. El orden en que hay que desplegar los distintos tipos de análisis fenomenológico comienza por la pura fenomenología (para la cual se deben conocer las matemáticas y sus aplicaciones), se completa con una fenomenología histórica, sigue por una fenomenología didáctica (para lo que se debe conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje) y termina, con una fenomenología genética. Ningún análisis fenomenológico puede resultar efectivo cuando se organiza posteriormente la enseñanza a partir de él si no se sustenta en un sólido análisis de fenomenología pura.

Una de las tareas de la fenomenología es indagar, analizando los conceptos matemáticos, sobre cuáles son los fenómenos que organizan, de modo que, no se puede pretender saber de antemano cuales son. Al situarnos en el origen, o en el nivel más bajo, se puede decir que los fenómenos que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos de ese mundo real, físico, cotidiano. Nuestras experiencias con ese mundo físico tienen que ver con los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades que tienen esas acciones. De modo que, los fenómenos que van a organizar las matemáticas son los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones, cuando objetos, propiedades, acciones o propiedades de acciones son vistos como lo que organizan esos medios de organización y se consideran en su relación con ellos (Puig, 1997).

Freudenthal no se queda en el nivel más bajo al describir la actividad matemática simplemente como un juego entre fenómenos del mundo y medios de organización de las matemáticas, en el que los fenómenos solicitan ser organizados y se crean medios para ello en las matemáticas. Por el contrario, el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización, lo acompaña de un proceso por el que los medios de organización se convierten en objetos que se sitúan en un campo de fenómenos. En consecuencia, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos, en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y este proceso se reitera una y otra vez.

Las matemáticas están en el mismo mundo de los fenómenos que organizan: no hay dos mundos sino uno que crece con cada producto de la actividad matemática. Los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular, los productos de la propia actividad matemática; los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos son los objetos de ese mundo, sus propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en tanto se encuentran en el primer término de un par fenómenos/medios de organización.

La progresión escalonada de pares fenómenos/medios de organización comporta dos procesos: el proceso de creación de conceptos matemáticos como medios de organización, que viene indicado por cada par y el proceso por el cual se objetiva un medio de organización, de forma que puede entrar a formar parte de un nuevo par, ahora en la posición de los fenómenos. La progresión escalonada dibuja una imagen de la producción de objetos matemáticos cada vez de nivel más elevado, más abstractos y muestra que la actividad matemática genera su propio contenido. Esta idea es importante porque a partir de ella, Freudenthal adopta una toma de partido didáctico: el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar debe ser básicamente la constitución de objetos mentales y solo en segundo lugar, la adquisición de conceptos tanto temporalmente como en orden de importancia.

Freudenthal plantea en una primera aproximación, la contraposición objeto mental/concepto que puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes, histórica, social o culturalmente establecidos. Al hablar de los conceptos matemáticos se consideran básicamente en la disciplina y poco se hace intervenir a las personas concretas; en todo caso aparece, el sujeto ideal que realiza acciones con poderes superiores a los que nosotros tenemos. Se puede partir de una imagen inicial: la contraposición objeto mental/concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas, los objetos mentales y lo que está en las matemáticas como disciplina, los conceptos.

En el uso corriente del lenguaje, no suele aparecer el término "objeto mental". Lo habitual es que también se hable del concepto que tiene una persona, de número o de triángulo o de cualquier otra cosa, ya sea que pertenezca a las matemáticas o no, o que se use el término "concepción" en lugar de concepto y se hable de la concepción que una persona tiene de circunferencia, por ejemplo; pero en este caso, suele quererse subrayar que lo que hay en la mente de esa persona es una parte o una forma de ver el concepto. Por ejemplo, lo que Freudenthal llama "objeto mental número" corresponde en una descripción semiótica al campo semántico personal. La toma de partido didáctico de Freudenthal por la constitución de objetos mentales, es que la intención de los sistemas educativos tendría que ser expresada en los términos que se están usando: que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico, abarque suficientemente la enciclopedia, como para permitirles interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que se deba usar número o los números (Puig, 1997).

Constituir un objeto mental conlleva entonces, a poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos, o poder organizar todos los fenómenos correspondientes; así, el objeto mental estará bien constituido. El objetivo de los sistemas educativos que marca Freudenthal es esta constitución de buenos objetos mentales. Adquirir el concepto implicaría examinar cómo ha sido establecido en las matemáticas, organizado local o globalmente en un sistema deductivo. La relación particular que cada concepto matemático tiene con el objeto mental correspondiente, determina cómo se relaciona la constitución del objeto mental con la adquisición del concepto. Los constituyentes del objeto mental bueno se determinan gracias al análisis fenomenológico del concepto correspondiente.

El análisis que conduce a distinguir entre objeto mental y concepto es un análisis didáctico; esto es, en el análisis se tiene presente que lo que interesa es examinar las matemáticas, sus conceptos y sus estructuras, en la medida en que hay personas que quieren aprenderlas y hay un sistema, el sistema escolar, que quiere enseñar contenidos social y culturalmente establecidos. Por ello, se debe tener presente, por un lado, los conocimientos que los alumnos elaboran, los objetos mentales y por otro, los contenidos social y culturalmente establecidos que son los conocimientos a los que se quiere que los alumnos accedan: a los conceptos.

La contraposición objetos mentales/conceptos se está examinando en el sistema educativo. Los objetos mentales se sitúan en la mente de las personas porque son lo que éstas elaboran a partir de su experiencia, como medios de organización que les permite dar cuenta de ella y lo que les da poder sobre ella. Los conceptos se sitúan en las matemáticas como disciplina, pero también, son medios de organización de fenómenos y como tales se tratan. Lo que sucede en el sistema educativo, es que para los alumnos los conceptos preexisten a su experiencia con los fenómenos correspondientes y lo que el sistema quiere es que los alumnos constituyan un objeto mental como medio de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia les ha legado como medios valiosos de organización de esos fenómenos, es decir, a los conceptos (Puig,1997).

En la historia, los conceptos matemáticos no son algo que preexista a nuestra experiencia, sino que es la actividad matemática la que los crea y la actividad matemática no es otra cosa que la actividad de los matemáticos. En ese sentido, los conceptos matemáticos vistos ahora en la historia, no son sino cristalizaciones de objetos mentales. Incluso puede darse el caso, como señala Freudenthal: los matemáticos trabajan durante mucho tiempo con un objeto mental sin convertirlo en concepto: es lo que sucedió por ejemplo, con la continuidad. En otro contexto, que no corresponde al de aprender algo que ya está establecido en las matemáticas y que por tanto, preexiste a nuestra experiencia, sino en la creación de nuevos conceptos matemáticos, se pone de relieve que uno de los procesos que crean nuevos conceptos matemáticos es el análisis de los objetos mentales que los matemáticos están usando como medios de organización de fenómenos, con el fin de definirlos conceptualmente, es decir, incorporarlos al sistema de las matemáticas. La actividad matemática produce así, conceptos a partir de objetos mentales (Puig, 1997).

4.3.7.3. El Álgebra moderna y la Fenomenología

El Álgebra Moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.

Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX, en el momento en que *al-Khwarizmi* escribe el Libro conciso de al-jabr y al-muqabala y se toma este acontecimiento como el nacimiento del “álgebra” en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas. Lo que hace al-Khwarizmi, que lo separa de todos los trabajos que desde el suyo se verán como álgebra, es comenzar estableciendo todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos: tesoros, raíces y simples números o dirhams, en su terminología, a continuación todas las combinaciones posibles de esos tipos, seis tipos:

tesoros más raíces igual a números, etc. y luego, un algoritmo para resolver cada uno de los tipos; hallar su tesoro o su raíz. Cada uno de los tipos es una forma canónica a la que se puede reducir cualquier problema por intermedio de su traducción en términos de cosas, tesoros, raíces y dirhams. Lo que es nuevo en al-Khwarizmi no son pues los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas, todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas (Puig, 1997).

El siguiente salto de nivel lo da Galois, al dejar de buscar nuevas soluciones para estudiar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones; el resto de la historia hasta el álgebra moderna actual puede verse como sucesivos saltos de nivel por objetivación de los medios de organización de fenómenos del nivel anterior.

Las estructuras Matemáticas y la Fenomenología

Una estructura multiplicativa en un conjunto de cuatro elementos {e, a, b, c} se puede representar por una tabla de multiplicar para ser leída en la forma habitual. Este es el llamado "grupo V-4 de Klein". Sin embargo, no es usual definir estructuras tan explícitamente (tabla); muy a menudo se hace implícitamente, es decir, se introduce un conjunto con ciertas relaciones en él y se necesitan esas relaciones para observar ciertos postulados.

Tabla 4.4: Grupo V-4 de Klein

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	a
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Freudenthal (1983) define el anterior grupo, como un conjunto G con la relación $ab = c$ y coloca como postulados:

Asociatividad: $(ab)c = a(bc)$
Un elemento identidad, e tal que $ea = ae = a$
Para cada elemento un inverso, a^{-1}, tal que, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Además, establece que esto no define un solo grupo, sino más bien el concepto de grupo, lo que se puede ejemplificarse por muchos (finitos o infinitos) modelos y para cada par de grupos se podría preguntar si ellos son isomorfos, es decir, si muestran la misma estructura.

Se continuará en la siguiente sección con el análisis de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, relacionadas con el análisis del modelo CDM, del conocimiento didáctico-matemático del profesor que se toma como parte del marco teórico necesario para el desarrollo de los capítulos 8 y 9; primero se presentan los modelos que integran el modelo CDM y luego se presenta el análisis a los componentes del CDM en su dimensión epistémica.

4.4. Modelos para el estudio del Conocimiento del Profesor

La Didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje donde interviene un contenido, estudiantes, profesor y unos medios tecnológicos. Estos procesos se realizan en una institución educativa que condiciona y hace posible el proceso educativo; así, este estudio se relaciona con sistemas heterogéneos y complejos que necesitan de modelos teóricos específicos para cada uno de sus componentes: componentes que interactúan entre sí y para lo cual se hace necesario identificar y tener en cuenta las facetas que intervienen en estas interacciones. En este sentido, se detalla en esta sección el modelo del CDM: modelo para el cual se definen facetas o componentes del Conocimiento del Profesor, para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, 2009).

El término "Conocimiento del Profesor" en la investigación didáctica, corresponde a la integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de los diferentes dominios científicos y prácticos. Este término tomó fuerza con los estudios sobre el Pensamiento del Profesor, cuyos supuestos básicos eran: el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional y los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan. Estos supuestos, dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor (Pino-Fan, 2013).

Según Schön (1983; 1987), los docentes son profesionales que generan y desarrollan un conocimiento sobre la enseñanza que debe ser investigado, en este sentido, no solo los procesos formales del pensamiento de los docentes median e influyen en el proceso de instrucción, sino que además, los contenidos implícitos y explícitos en tal pensamiento, han dirigido la atención de los investigadores hacia la necesidad de comprender mejor las características del conocimiento de los profesores. La dificultad de conceptualizar el término Conocimiento del Profesor, ha dado paso a varios intentos por delimitarlo a través de sus diversos componentes, tal y como lo evidencia Shulman (1986, 1987), quien puso de manifiesto que el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, más que considerarse dos componentes separados se deben de considerar integrados (Llinares, 1996).

Para el término "conocimiento" no se encuentra una definición en la literatura; lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intentan especificar los componentes de dicho conocimiento, como lo proponen Ball y colaboradores. Así, la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, consideran que está formado por los siguientes componentes (Llinares, 1997):

- Conocimiento de matemática (conceptos, procesos) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática escolar).
- Conocimiento del currículo matemático.
- Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizaje de las nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos.
- Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas, etc.
- Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización de la enseñanza, evaluación (p. 57).

Los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza, elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas: el modelo de Ball y colaboradores (Hill, Ball & Schilling, 2008) denominado Mathematical Knowledge for Teaching - MKT (ver, tabla 4.5) supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas. Pero quedan cuestiones por responder: ¿cómo determinar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Específicamente, ¿de qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT?¿cómo se puede enseñar a los profesores a adquirir o desarrollar los diferentes componentes del MKT?

El conocimiento matemático para la enseñanza MKT, es un concepto importante en la comunidad de investigación en formación de profesores; sin embargo, hay una comprensión limitada, de cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (Silverman & Thomson, 2008). Además, se observa que existe una desvinculación aparente entre los componentes del conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento curricular) (Godino, 2009).

Este modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT (Ball et at., 2000; 2005; 2008) se basa en las componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman y se distinguen dos categorías: Conocimiento del contenido y Conocimiento didáctico del contenido. Cada una de estas categorías presenta una subdivisión. El Conocimiento del contenido, tiene las subcategorías: a) Conocimiento común del contenido-CCK, que corresponde al conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza (Ball et al., 2008) e incluye el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades; b) El Conocimiento especializado del contenido- SCK, hace referencia al conocimiento matemático y la habilidad exclusiva para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400-401) (ver, tabla 4.5). El profesor para desarrollar las tareas de enseñanza, requiere de un conocimiento que le permita participar en tal actividad, incluyendo poder representar las ideas de manera clara a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas, entre otras actividades (Ball et al., 2005).

Finalmente, c) El Conocimiento en el horizonte matemático-HCH, se define como el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo (Ball et al., 2008). Se considera como el conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los diferentes niveles escolares. Puede entenderse como aquellas relaciones que enlazan los conocimientos previos y los futuros, permitiendo estudiar propiedades de un concepto o procedimientos en situaciones nuevas o más complejas (Martínez, Giné, Figueiras & Deulofeu, 2011).

Continuando con la segunda componente: el Conocimiento Didáctico del Contenido: se describe como la composición de tres subdominios del conocimiento (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008): a) El conocimiento del contenido y los estudiantes-KCS, que se refiere al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular (Hill et al., 2008); es el conocimiento que se utiliza en las tareas de enseñanza e implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos; además, incluye el conocimiento de los errores comunes y las dificultades más habituales de los estudiantes; b) El Conocimiento del contenido y la enseñanza-KCT, se relaciona con el conocimiento y combina: el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático (Ball et al., 2008) e incluye, saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y de las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas y c) El Conocimiento del currículo-KCC, se relaciona con el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza y le permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (ver, tabla 4.5).

Tabla 4.5: Conocimiento matemático para la enseñanza - MKT (Hill et al., 2008)

Mathematical knowledge for teaching	
Subject Matter Knowledge	Pedagogical Content Knowledge
Common Content Knowledge-CCK	Knowledge of Content and Students-KCS
Knowledge at the mathematical horizon-SCK	Knowledge of Content and Teaching-SKT
Specialized Content Knowledge-SCK	Knowledge of Curriculum

El modelo del CDM, se define en el EOS y hace referencia a la fusión de los modelos MKT y PCK: El CDM del profesor se compone de la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios y los procesos de significación, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos, para implementar procesos de instrucción eficaces que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). Esta forma de entender el CDM, bajo el enfoque EOS verifica el hecho de poder formular preguntas como ¿qué debe conocer un profesor para que la enseñanza del objeto Grupo, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? o bien preguntas relacionadas con competencias tales como ¿qué competencias debe desarrollar un profesor para que la enseñanza de un determinado contenido matemático, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Preguntas a las cuales se pretende dar respuesta con el desarrollo de la presente tesis doctoral.

En el modelo del conocimiento CDM, se distinguen seis categorías o facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y ecológica. En cada faceta se distinguen componentes y herramientas para su análisis (ver, figura 4.5) Cada una de estas facetas se encuentra involucrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los tópicos específicos de la matemática (Godino, 2009):

La Faceta Epistémica de un proceso de estudio, hace referencia a los significados institucionales puestos en juego (implementados) en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación.) Estos significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos.

La Faceta Cognitiva, que hace referencia a los conocimientos personales de los estudiantes y a la progresión de los aprendizajes (desarrollo de los significados personales).

La Faceta Afectiva, tiene en cuenta los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

En la Faceta Mediacional, se analizan los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

La Faceta Interaccional, tiene en cuenta los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.

La Faceta Ecológica, se refiere al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico que soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, 2009).

Se hace énfasis en la Faceta epistémica del CDM: ella se relaciona con el conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. La primera referencia a esta faceta, se analizó en relación con el proceso de instrucción; se retoma en el modelo del CDM y se propone una división en tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático; categorías que son similares a las del modelo MKT pero que se reestructuraron en este enfoque y corresponden a (Pino-Fan et al., 2013):

- Conocimiento común del contenido
- Conocimiento ampliado del contenido
- Conocimiento especializado del contenido

La categoría del Conocimiento especializado, se subdivide en: conocimiento del contenido especializado; conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje. Se introduce este modelo y las tablas 5.3; 5.4, que reestructuran el modelo MKT con el fin de describir la relación e interacción entre cada una de las facetas o dimensiones incluidas en este modelo; además, se establecen pautas para la creación de otros ítems que permitan evaluar y analizar cada una de las facetas del CDM. Con la división del conocimiento especializado, se logró un avance respecto al modelo inicial del CDM, propuesto por Godino (2009), primero, porque atiende a la relatividad de los tópicos matemáticos y además, en cuanto a la exploración y descripción de la faceta epistémica del CDM en los aspectos teóricos que se tenían como base, unidos a los aspectos empíricos de los análisis de investigaciones (Pino-Fan, 2013; Vázquez, 2014).

El conocimiento especializado del contenido comprende el conocimiento y las habilidades matemáticas únicas para la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400). Este conocimiento incluye: Cómo representar con precisión ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes y examinar y comprender los métodos poco usuales para la resolución de problemas (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377-378); sin embargo, surge la pregunta sobre ¿qué criterios específicos permiten analizar y potenciar dicho conocimiento especializado? (ver, tabla 4.5).

Así, se redefine este Conocimiento Especializado del modelo del CDM y se proponen dos niveles para el conocimiento especializado. Un primer nivel, en el que los futuros profesores utilizan diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, así como el uso de los diversos significados del objeto matemático, para resolver las tareas pertinentes. El segundo nivel, se refiere a la competencia de los futuros profesores para identificar conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea (Pino-Fan, 2013); con estas características, es claro que el conocimiento especializado implica conocimiento común y parte del conocimiento ampliado.

Dadas las características de estos dos niveles del conocimiento especializado en el modelo MKT, este se encuentra íntimamente vinculado, dentro del modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno de aplicación, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, proporcionará al profesor los medios para un desempeño idóneo en su práctica de enseñanza futura. Por su parte, el nivel dos de identificación, se vincula con las facetas cognitiva y afectiva (knowledge of content and students), puesto que faculta al profesor para detectar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados, significados de los objetos matemáticos, así como conflictos y errores de los alumnos, gestionando así, los aprendizajes de éstos de una manera más eficaz. Se concluye entonces, que el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) propone una reestructuración de los componentes del modelo-Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y una vinculación e interacción entre las dimensiones del CDM (ver, figura 4.7).

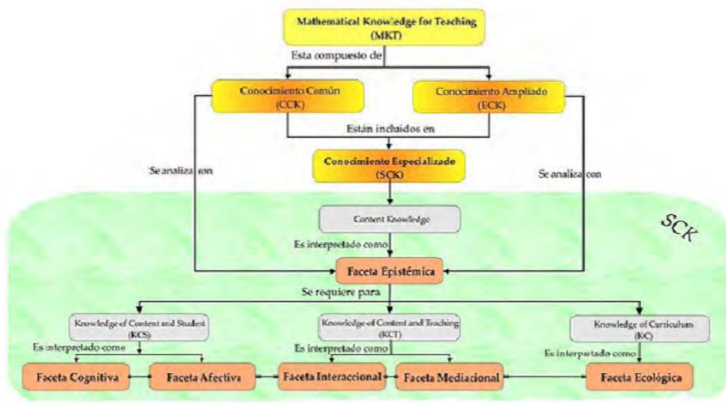


Figura 4.7: Relación entre los modelos: MKT y CDM (Pino-Fan, 2013)

Los Niveles de análisis en el EOS, para cada una de las facetas permiten el análisis del CDM del profesor, de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles corresponden a:

Nivel 1. Prácticas matemáticas y didácticas (operativas, discursivas y normativas.) Se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994). La aplicación de este nivel corresponde a la descripción de la secuencia de las prácticas matemáticas en la solución de un problema. El EOS, asume una concepción pragmatista - antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta en este enfoque como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Estos sistemas permiten describir las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También, se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes (Godino, 2009).

Nivel 2. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas en los diversos contextos de su uso. Corresponde al segundo nivel de análisis. Este nivel permite describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos y sus tipologías (Font, Planas & Godino, 2010). Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado, que articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemáticos y de representación de los restantes objetos matemáticos. Permite describir los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) (ver, figura 4.1). La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje: también, permite la reconstrucción del significado global de referencia de un objeto matemático mediante la identificación de los significados parciales del objeto matemático (Font et al., 2010)

Nivel 3. Normas y metanormas. En este nivel se identifican las reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible un proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones (Godino, 2009).

Nivel 4. Idoneidad. En este nivel, se identifican las potenciales mejoras para el proceso, que puedan incrementar la idoneidad didáctica (Godino, 2009).

En la figura 4.2 se resumen las categorías de objetos y procesos, introducidos en el EOS que permiten realizar los análisis pormenorizados de la actividad matemática y por tanto, de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas. Este tipo de análisis realizado por los propios profesores, representa una de las competencias cuyo logro es deseable alcanzar (Godino, Rivas & Castro, 2008), ya que, permite profundizar en el Conocimiento del Contenido Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Especializado y en el Horizonte Matemático, según Ball y colaboradores) (ver, tabla 4.5 y figura 4.7). El modelo del CDM (Godino, 2009) propuesto desde el enfoque EOS, además de las facetas y niveles de análisis que refieren a categorías de análisis más finas de los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor, propone una serie de pautas para la formulación de consignas (items de evaluación) que permiten evaluar este CDM de los profesores. Así, en el modelo se propone que la faceta epistémica del CDM, incluye y refina el Conocimiento del Contenido: Conocimiento Común, Especializado y en el Horizonte Matemático (ver, tabla 4.6). La propuesta que se tiene se presenta en la tabla 4.6 (Godino, 2009, p. 25).

Se pasa en el siguiente capítulo, a describir la metodología seleccionada para el desarrollo de cada una de las fases de la investigación centrada en la evaluación del CDM del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo.

Tabla 4.6: Conocimiento común, especializado y ampliado del contenido matemático

FACETA EPISTÉMICA	**CONSIGNAS**
Conocimiento Común:	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas: *Tipos de problemas:* Identifica las variables de las tareas, generaliza (particulariza) el enunciado. *Lenguajes*: Resuelve las tareas usando diferentes representaciones. *Procedimientos:* Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos, formales). *Conceptos-Propiedades:* Identifica los conceptos y propiedades puestos en juego en las soluciones. *Argumentos:* Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	*Conexiones:* Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

CAPÍTULO 5

Metodología

5.1. Introducción

El presente estudio tiene un enfoque mixto a nivel exploratorio y de carácter descriptivo. En las tres etapas de la investigación se analiza la variable cualitativa: *configuración epistémica, activada en las prácticas matemáticas* y la variable cuantitativa: *grado de corrección de los ítems*, esta variable se analiza en la tercera fase de la investigación (ver, figura 5.1), donde además, se utilizan técnicas estadísticas para el análisis de la variable cuantitativa (tercera fase) y técnicas en investigación cualitativa (todas las fases) para determinar el tipo de configuración epistémica activada en las diferentes prácticas realizadas por los estudiantes de formación matemática, cuando responden el cuestionario diseñado con el objetivo de evaluar aspectos del conocimiento común y del conocimiento ampliado, como bases de un conocimiento especializado para futuro desempeño de profesor universitario y sobre el objeto de investigación.

Este enfoque metodológico corresponde a un enfoque de tipo mixto, al tener presente que la investigación mixta implica la mezcla de factores cuantitativos y métodos cualitativos o características de este paradigma (Onwuegbuzie & Johnson, 2004; Tashakkori & Teddlie, 1998, 2003) y de acuerdo con el principio fundamental de la investigación mixta, ella implica la combinación de métodos cuantitativos y cualitativos, los enfoques y conceptos que tienen fortalezas complementarias y debilidades que no se superponen (Brewer & Hunter, 1989; Johnson & Turner, 2003).

5.2. Componentes y fases de la investigación

Se detallan a continuación, los componentes y las fases de la investigación (ver, Figura 5.1): La primera fase, corresponde al desarrollo del estudio: E1. Estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo; esta fase se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, con un alcance descriptivo que permite determinar los significados parciales del objeto Grupo, buscando el porqué de ciertos fenómenos (Arias, 1999). A partir del análisis de diversas fuentes (libros de historia de la matemática, investigaciones), se identifican las diferentes configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a ellas; la forma como éstas se encuentran articuladas y la complejidad asociada al objeto Grupo. Esta articulación de significados parciales lleva a la emergencia del significado global del objeto de investigación.

La segunda fase de la investigación, corresponde al estudio E2. Análisis semiótico de textos de Teoría de Grupos, donde se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos, propuesta en el EOS; en esta fase se buscaba dar respuesta a la pregunta ¿los significados de la noción Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global del objeto Grupo? Ésta fase se realiza bajo un enfoque cualitativo de tipo explicativo y descriptivo que permite dar respuesta a la pregunta planteada donde se analiza la variable cualitativa de "configuración epistémica" a través de los objetos matemáticos primarios que la componen. El significado "Global" del objeto matemático, corresponde al conocimiento que realmente deberían tener los estudiantes de formación matemática sobre el objeto matemático y se contrasta con el significado(s) que se propone en los libros de texto y en los planes de estudio y que dan lugar al conocimiento que se pretende que adquieran los estudiantes de Formación Matemática.

La tercera fase de la investigación corresponde al E3. Diseño e implementación de un instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de Formación Matemática, en relación con el objeto Grupo. Esta fase tiene un enfoque mixto, a nivel exploratorio y en ella se hace uso de las herramientas teóricas desarrolladas en el EOS. Específicamente, en esta fase se toman las herramientas teóricas y metodológicas propuestas para el análisis del modelo del CDM y también, se hace uso del análisis de las dos fases anteriores de investigación para llegar al diseño e implementación del cuestionario *CDM-Grupo*. En primer lugar, se inicia con el diseño de una prueba piloto, la cual permitió llegar a la versión final del instrumento, con el cual se evalúan los conocimientos de los estudiantes de Formación Matemática en relación con el objeto de investigación.

Para el logro de cada uno de los objetivos específicos se plantearon las siguientes actividades:

Primera Fase de la investigación: actividades para el objetivo específico 1:

1. Estudio para determinar y describir los objetos primarios (fenómenos-situaciones-problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas, de los cuales emerge el objeto Grupo: estudio histórico, fenomenológico y epistemológico, que permite identificar los distintos significados parciales del objeto matemático.

Segunda Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos: 2, 3 y 4:

2. Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo, mediante la descripción de los significados parciales obtenidos de la caracterización (prácticas, configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas) (objetivo 2).

3. Estudio del tipo de configuraciones epistémico-didácticas que se proponen en la dupla (libros de texto, planes de estudio) para el objeto matemático grupo, (objetivo 3 y 4) y estudio de la representatividad del significado pretendido por los textos y los planes de estudio sobre el objeto de investigación.

Tercera Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos 5, 6 y 7:

4. Estudio empírico del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de Formación Matemática en relación con con el objeto grupo; se realiza mediante el diseño e implementación del cuestionario piloto, recogida de datos y el análisis de los mismos.
5. Análisis mediante triangulación del juicio de expertos junto con los resultados obtenidos en el punto anterior: en busca de una mejora al cuestionario *CDM-Grupo*.
6. Análisis del cuestionario piloto para evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática relacionado con el objeto matemático Grupo.
7. Caracterización de las categorías: Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Ampliado del Contenido, de los estudiantes de Formación Matemática relacionadas con el objeto Grupo, bases del conocimiento especializado del contenido.
8. Implementación del cuestionario definitivo a muestras intencionales de estudiantes de Formación Matemática; análisis de los resultados y estudio sobre los conocimientos personales y los conocimientos de referencia.

9. Análisis de las implicaciones del estudio y sus resultados, en cuanto al aporte para el programa de formación inicial de profesores y para el programa de Matemáticas.

Tabla 5.1: Fases de la investigación

FASES DE LA INVESTIGACIÓN	
1. ESTUDIO HISTÓRICO, EPISTEMOLÓGICO Y FENOMENOLÓGICO DEL OBJETO GRUPO: SIGNIFICADO GLOBAL DEL OBJETO GRUPO	2. ESTUDIO DEL SIGNIFICADO PRETENDIDO PARA EL OBJETO GRUPO, EN LOS PROGRAMAS Y LOS LIBROS DE TEXTO
3. EVALUACIÓN DEL CDM DE LOS ESTUDIANTES DE FORMACIÓN MATEMÁTICA	

5.3. Población

El estudio se desarrolla una Universidad Colombiana formadora de educadores, con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y estudiantes de Matemáticas (estudiantes de formación matemática). Para el diseño del instrumento de evaluación, en primer lugar se aplica la prueba piloto a los estudiantes en la asignatura de Teoría de Anillos de los dos programas. El diseño del cuestionario de evaluación, se sometió a la revisión de expertos: Magister en ciencias Matemáticas en la línea de Álgebra Abstracta, doctores en la línea de Álgebra y doctores en Didáctica de la matemática en la línea de Álgebra abstracta y el cuestionario final se aplicó a los estudiantes que cursaban igualmente la asignatura de Teoría de anillos en los dos programas (Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas). Estos estudiantes, ya habían cursado asignaturas en la línea de Álgebra Abstracta, junto con asignaturas donde se trabajan grupos numéricos y por tanto, se espera que los estudiantes posean un conocimiento del contenido matemático del objeto de investigación, en las categorías del Conocimiento Común y Conocimiento Ampliado, como bases de un conocimiento Especializado, necesario para la enseñanza del objeto Grupo (ver, Capítulo 8 y 9).

En esta misma dirección, se analizaron los libros de textos de la asignatura de Teoría de Grupos; éstos son textos utilizados en los cursos de los programas de Formación Matemática; dos son textos clásicos de Álgebra Abstracta: el de Herstein (1986) y el de Gallian (1990) y los otros dos textos han sido elaborados por profesores de la Universidad Nacional de Colombia. Estos son cuatro libros de uso por parte de los profesores que dirigen la asignatura de Teoría de Grupos. El análisis de los libros de texto se realiza en las unidades relacionadas específicamente con el objeto de investigación y la muestra (libros de texto y alumnos) no se considera representativa.

5.4. Variables

En la tercera fase de la investigación relacionada con el diseño del instrumento para indagar el desarrollo y la potenciación del conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática, se considera la variable cuantitativa: grado de corrección de los ítems para el análisis del cuestionario y la variable cualitativa que corresponde al tipo de configuración epistémica activada en cada una de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes al solucionar las situaciones problemáticas planteadas; esta variable se analiza en las tres fases de la investigación.

La variable cualitativa: configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas, se identifica a partir del análisis documental en la primera fase del estudio y de igual forma, en el análisis de los libros de texto y en la evaluación del cuestionario. Esta variable se denomina configuración epistémica cognitiva si es del sujeto que realiza la práctica y se relaciona con las configuraciones epistémicas caracterizadas en la primera fase de la investigación.

5.5. Técnicas e instrumentos para la recolección y el procesamiento de datos

Para los estudios E1 y E2, se utiliza la técnica del análisis semiótico que permite caracterizar la variable cualitativa: configuración epistémica. Esta técnica permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática de los matemáticos en los dos primeros estudios, como la actividad realizada por los estudiantes de Formación Matemática al resolver los problemas planteados en el cuestionario, junto con los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007) algunos de los cuales corresponden a procesos del PMA. La segunda variable tiene un carácter cuantitativo: grado de corrección de los ítems y se analiza con técnicas estadísticas.

Finalmente, en la tercera fase del estudio, se diseñó el cuestionario que permitió explorar por medio de prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por los estudiantes, el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionado con el objeto Grupo: se caracteriza a partir de las prácticas matemáticas y en las componentes del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como bases del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático.

Los siguiente capítulos, se orientan al desarrollo de las fases de la investigación (3), conducentes al logro del objetivo general, centrado en la evaluación del CDM del profesor universitario en relación con el objeto Grupo.

CAPÍTULO 6

Estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo

6.1. Introducción

El presente capítulo se inicia con la argumentación sobre la importancia del estudio de los significados del objeto matemático grupo y se continúa con el análisis epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto de investigación: en especial, se retoma la obra de Piaget & García (2008) para un primer análisis sobre la génesis del álgebra. Para Piaget & García (2008) "la epistemología explica cómo el pensamiento real del hombre, puede producir la ciencia en tanto sistema coherente de conocimiento objetivo" (pp.134-155); desde este punto de vista, los autores presentan en su obra consideraciones importantes sobre la evolución del pensamiento científico desde la antigüedad griega, hasta la evolución newtoniana, para el objeto Grupo: en la obra se describen unos mecanismo de un progreso evolutivo que resultaron evidentes para los autores: para Piaget & García, el conocimiento se produce por la interacción del individuo con su medio y de acuerdo con unas estructuras que posee el individuo.

El capítulo continúa, con la descripción del desarrollo histórico del objeto matemático a través de diferentes etapas (algunas se traslapan y es difícil establecer una partición clara de éstas) hasta llegar al surgimiento del significado global del objeto matemático, que para el caso corresponde a su significado de Grupo como grupo abstracto: se describe cómo el álgebra inició con una definición muy restringida y cómo fue adquiriendo su propia identidad hasta convertirse en el estudio de las estructuras algebraicas varios siglos después de su nacimiento; entre estas estructura se encuentra precisamente el objeto Grupo o la estructura de Grupo.

A partir de la descripción del proceso evolutivo del objeto matemático, se realiza un análisis de las principales problemáticas que fueron dando forma al significado abstracto del objeto Grupo: esto se realiza mediante la determinación y análisis de las configuraciones socio−epistémicas (ver, capítulo 4) y a partir de estas se describe la emergencia del significado global del objeto de investigación (ver, figura 3.1).

6.2. Estudio de los significados del objeto Grupo

En el análisis de los antecedentes de la investigación (ver, capítulo 2) surgieron algunas preguntas importantes para la investigación, como: *¿qué es el objeto Grupo?* y la pregunta *¿cuáles son los significados del objeto matemático?* Estas preguntas llevaron a enfocar la investigación en el análisis de la relación entre la evolución del objeto Grupo y la exploración del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática sobre dicho objeto; este conocimiento se explora ya que él es que se pone en juego para la labor de la enseñanza universitaria. Para dar respuesta a las preguntas formuladas, fue necesario comprender ampliamente qué debían conocer los estudiantes de formación matemática sobre el objeto de investigación, para poder llegar así, en una siguiente fase de investigación y bajo estos supuestos a explorar y evaluar este conocimiento didáctico-matemático; es decir, fue indispensable en primer lugar dar respuesta a la pregunta ¿cuál es el significado global del objeto Grupo? y en especial cuáles son los distintos significados asignados al objeto matemático, en su desarrollo histórico.

En este sentido, el estudio de los significados del objeto de investigación, adquiere gran importancia ya que a partir del significado global del objeto, el profesor como representante de una institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción del tópico matemático (Pino-Fan, 2013) (ver, figura 4.3).

Para determinar el significado global del objeto Grupo, se requiere en primer lugar, del estudio epistemológico, histórico y fenomenológico sobre el origen y evolución del objeto y de igual forma, se requiere conocer los contextos de su uso, esto es, donde se pone en juego el objeto matemático. En esta dirección, en las siguientes secciones se presenta el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico sobre el origen y evolución del objeto Grupo.

6.2.1. Génesis del álgebra: visión Piagetiana

El uso de la palabra “álgebra” para designar una de las ramas de las matemática tiene su origen en el libro *Hisãb al−jabr w' al−muqãbalah* del matemático Muhammed ibn Musa, al–Khowarizmi (al–Juarismi). Esta obra corresponde al año 825 y una traducción del título corresponde a: La solución de ecuaciones por medio de restitución y reducción, que el mismo al–Juarismi menciona en el prólogo del libro:

...es un corto trabajo sobre [cómo] calcular por medio de [las reglas de] Completación y Reducción, confinándose a lo que es lo más fácil y de más utilidad en aritmética, tal como los hombres constantemente requieren en casos de herencias, legados, reparticiones (Dávila, 2002, p.9).

Así, la palabra *al–jabr* y *al–muqãbalah* significaban: restauración y oposición, por lo que en el contexto hacían referencia a resolver la ecuación agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado de la ecuación, lo cual restaura el balance de la misma (esto es al–jabr) y simplifica la ecuación por medio de la cancelación de los términos opuestos (al–muq$\tilde{a}$balah).

En la obra de Piaget & García (2008) se presenta un estudio basado en una *epistemología genética* sustentada en el método histórico-crítico, el cual se apoyaba en el método psicogenético para tratar de extraer los procesos inherentes a toda construcción de conocimiento; en este caso, se retoma el capítulo de la obra orientado a la emergencia del objeto Grupo y en general al desarrollo del álgebra: los autores, subordinan la psicogénesis y la historia de la ciencia a la verificación de la hipótesis de una epistemología constructivista: la visión de la génesis del conocimiento del niño se refina y profundiza en este estudio histórico relacionado con la evolución del pensamiento científico (p. 134).

Algunos historiadores de la matemática, hacen remontar los orígenes del álgebra a diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios y egipcios; otros, ubican el punto de partida, en la escuela de Alejandría. Se tiene a *Diophanto* como la figura que representa al formulador de los problemas de la aritmética en términos simbólicos; el que introduce los valores determinados, representados no por números sino por letras para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas propuestos. Para Piaget & García (2008) esta interpretación histórica es insatisfactoria, ya que resultaba claro por una parte, que las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, se explicaba por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Por otra parte, resultaba difícil explicar el estancamiento total de una ciencia que solo vuelve a florecer en el siglo XVI.

En esta interpretación, aparece Viète (Vieti-Vieta) como un renacentista en el sentido estricto del término. Su vuelta a los griegos, le permitió retomar la ciencia de Diophanto y perferccionarla, para convertirla en el punto de partida del álgebra en la época moderna. No es claro, para los autores, el papel que desempeñaron los árabes, fuera de la introducción de una notación más adecuada para las operaciones aritméticas; de haber aportado el concepto de cero como número (que ellos importaron de la India) y del uso generalizado de las *letras* para representar cantidades indeterminadas. En este contexto, la obra de*Viète* es la de un erudito y un sistematizador, más que la de un creador y un revolucionario en el campo científico.

El panorama se modifica con la obra de Jacob Klein, publicada en Alemania en 1934, con el título *Die grieschische Logistik und die Entstehung der Algebra,* pero un mayor impactó surge, con la publicación de la versión inglesa en 1968, Greek mathematical thought and the origin of algebra. En ella, Jacob Klein presenta una profunda interpretación de las obras de Diophanto y de Viète sobre la base de un erudito análisis del pensamiento griego y del significado de la nueva ciencia desarrollada en los siglos XVI y XVII (Piaget & García, 2008, p.136).

Piaget & García (2008) citan el estudio de J. Klein , el cual les permitió ubicar los orígenes del álgebra dentro del esquema general de unos mecanismos que se encontraron en el desarrollo de otros campos de la matemática y la física, así, como de las etapas más avanzadas del álgebra misma. El capítulo *On the difference between ancient and modern conceptualization* da los elementos para la interpretación de unos mecanismos puestos en juego, siendo coherente y sólidamente fundados. El eje de distinción entre Diophanto y Viète, eje que una vez identificado daba sentido a toda la reinterpretación histórica a la cual se hace referencia, pasa por una diferenciación que se establece sobre el uso de símbolos matemáticos. El carácter algebraico atribuido a la Aritmética de Diophanto, se basaba en la utilización de diversos signos y abreviaturas, particularmente con referencia a las incógnitas de las ecuaciones, a las cuales se las ha interpretado como un simbolismo algebraico: pero la simple utilización de letras para representar números o entes geométricos no le confiere el carácter simbólico al tratamiento de un problema (p.136).

Euclides y aún antes que él Archytas, habían hecho uso de tales representaciones: al respecto Klein (1972) cita el juicio de Tannery: La letra reemplaza bien a un número cualquiera...pero solamente allí donde ese número se supone está situado; no simboliza su valor, ni se presta a las operaciones.(Piaget & García, 2008, p. 137)

También, Aristóteles hizo uso de tales letras matemáticas, por ejemplo en la física y en el De Caelo y aun llegó a introducirlas en sus investigaciones lógicas y éticas: pero tal letra no es jamás un símbolo en el sentido que tiene cuando lo que es significado por el símbolo es en sí mismo un objeto general.

A partir del siglo XVI el uso de letras inició a tener un carácter simbólico. Cuando se le atribuye a Diophanto, la invención del álgebra (o a sus predecesores con respecto a quienes él no sería sino un compilador) se toma partido, explícita o implícitamente, sobre el carácter simbólico de sus métodos de solución. El hecho de que Diophanto hable de problemas generales y de una solución general, podría sustentar la interpretación clásica. Sin embargo, la reinterpretación de Klein pone en tela de juicio el carácter simbólico -en el sentido algebraico del término- que pudiera atribuirse a estas expresiones. A este respecto, su distinción entre "generalidad del método" y "generalidad del objeto de investigación" fue fundamental: La matemática antigua se caracterizó por una tensión entre método y objeto. Los objetos en cuestión (figuras y curvas geométricas, sus relaciones, proporciones de magnitudes geométricas conmensurables e inconmensurables, relaciones numéricas) daban la dirección en la que avanzaba la investigación, ya que ellos eran a la vez el punto de partida y el de llegada (Piaget & García, 2008, p.137).

La forma en que determinaban el método de investigación se muestra especialmente en el caso de demostraciones de existencia, es decir, demostraciones de que el ser de un cierto objeto es posible, puesto que no involucra auto contradicciones. El problema de la aplicabilidad general del método es, por consiguiente, el problema de la generalidad de los objetos matemáticos mismos y ellos podrían resolver este problema solo sobre la base de una ontología de los objetos matemáticos. En contraste con esto, la matemática moderna y por consiguiente también la interpretación moderna de la matemática antigua, dirigen su atención del comienzo al fin al método como tal: los objetos quedan determinados por una reflexión acerca de la forma en la cual estos objetos se tornan accesibles a través de un método general.

Viète, retoma una metodología característica del pensamiento griego, pero le da una extensión y una profundidad que le permiten reorganizar la obra de Diophanto en un nivel muy diferente. El mérito en la obra de Klein, se encuentra en mostrar, en qué se basó dicha reorganización y por qué Viète debe de ser considerado como el verdadero fundador del álgebra. La introducción al "arte analítico" incluye una presentación de lo que Viète llama una cierta vía de inquisición de la verdad, que sería característica de las matemáticas y cuyo descubrimiento él mismo atribuye a Platón. El nombre de "análisis" dado a esta forma de investigación provenía según Viète, de Zhéon, de quien presenta la siguiente cita: "considerar la cosa investigada como establecida y proceder por medio de lo que sigue de ello hasta una verdad que sea incontestada". En un sentido corriente -agrega- la síntesis, es un proceso que comienza con la suposición de aquello que es aceptado y que por sus consecuencias se llega a la conclusión y a la comprensión de aquello que se busca. Klein observó también que Pappo había provisto una explicación más clara de este doble proceso de análisis y de síntesis (Piaget & García, p.138).

Respecto al análisis, Viète retoma una distinción, hecha por los griegos, en dos géneros: el análisis zetético o teórico y el análisis porístico o problemático. Pero agrega un tercer género al que llama rético o exegético. Hay por consiguiente -según Viète- un arte zetético por el cual se encuentra la ecuación o la proporción entre la magnitud que se busca y aquella que es dada; un arte porístico por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción, se busca verificar el teorema establecido y un arte exegético por el cual, a partir de la ecuación establecida o de la proporción, se descubre la magnitud que se busca.

Viète afirmaba (Piaget & García, p. 138):

Ahora bien, lo que pertenece realmente al arte zetético es establecido por el arte de la lógica a través de silogismos o entimemas, cuya fundamentación está dada por las estipulaciones mismas (símbolos) por medio de las cuales se llega a las ecuaciones y proporciones: estipulaciones que, a su vez, se derivan de nociones comunes como también de teoremas que son demostrados por el poder del análisis mismo. En el arte zetético, sin embargo, la forma de proceder es peculiar al arte mismo, en tanto el arte zetético no emplea su lógica en los números -que fue el tedio de los analistas antiguos- sino que usa su lógica a través de una logística que tiene que ver, con una forma que es nueva, con especies. Esta logística es mucho más eficaz y poderosa para comparar magnitudes entre sí que la logística numérica, una vez que la ley de homogeneidad ha sido establecida.

El hecho esencial en la formulación de Viète es que el término "magnitud" se utilizó en su sentido más general: la magnitud buscada es, o bien un número determinado, o una magnitud geométrica específica medible (Piaget & García, 2008, p. 138).

Klein citado en Piaget & García (2008) establece en su obra (1972):

De allí deriva el doble nombre de la tercera forma de análisis cuyo objetivo es, tanto el cálculo de las magnitudes aritméticas, como la construcción de las magnitudes geométricas partiendo de las ecuaciones canónicas ordenadas; ella es llamada rética con respecto a los números a los cuales conduce y que pueden ser expresados por los nombres comunes de los números de nuestro lenguaje; ella es llamada *exegética* con respecto a las *magnitudes geométricas* que considera como directamente presentes a nuestra vista (p. 138).

Para Klein, convergen allí dos líneas independientes: el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto. La nueva álgebra de Viète es a la vez geométrica y aritmética. Para lograrlo, fue necesario llegar a un nivel de generalización más elevado que lo que estuvo al alcance de los antiguos. En la obra de Viète se introduce una nueva distinción aclaratoria:

Las consideraciones numéricas (logistice numerosa) operan con números; las consideraciones por especies (logistice speciosa) operan con especies o formas de las cosas como por ejemplo, con las letras del alfabeto (citado en Piaget & García (2008, p. 139).

Se tiene como palabra clave "las especies". El largo estudio de Klein refuta de manera concluyente, las interpretaciones corrientes, aun cuando sean tan autorizadas como la interpretación de Cantor. La importancia de este punto justifica una nueva cita de Klein, en la cual pone de manifiesto cuál es el punto crucial de la formulación de Viète: Las especies, son en sí mismas formaciones simbólicas, es decir, formaciones cuya objetividad solamente potencial es entendida como una objetividad actual. Ellas son, por consiguiente, solo comprensibles dentro del lenguaje del "formalismo simbólico" que es completamente enunciado por primera vez por Viète como único capaz de representar el finding of finding, es decir el arte zetético. A partir de aquí la herramienta más importante de la ciencia natural matemática, la "fórmula" se torna posible por primera vez, pero por encima de ello, una nueva forma de entendimiento inaccesible al episteme antiguo se abre de esta manera.

La distinción crucial hecha por Viète que le permitió dar un gran paso adelante y constituir el álgebra, como una nueva disciplina, fue el pasaje del concepto de "arithmos" al concepto de "símbolos generales". El arithmos hace referencia inmediatamente a las cosas o a las unidades, mientras que los símbolos (letras) utilizados por Viète hacían referencia directamente a la propiedad de ser un número, propiedad que pertenece a cada uno de los números e indirectamente a las cosas o a las unidades cuya numerosidad está representada por un número. En otros términos, las letras remiten al concepto de número en general. Esto es expresado por Klein en Piaget & García (2008), en los siguientes términos:

El signo que corresponde a una letra designa el objeto intencional de una segunda intención (intentio secunda), a saber, de un concepto que a su vez va dirigido a otro concepto y no a un ser (p. 140).

Las leyes de la zetética, parecían contener un aspecto absolutamente esencial de la formulación de Viète y desde el punto de vista de Piaget & García (2008), su base epistemológica más importante. Klein, relega este capítulo a una referencia en la nota 250. El capítulo de referencia contiene las leyes de transformación de *las ecuaciones* que él considera que son tres: antítesis (la transferencia de un término, de un miembro de la ecuación al otro); hipobibasmo (la reducción del grado de la ecuación, dividiendo los dos miembros por la especie común a todos los términos de la ecuación) y parabolismo (la división de los coeficientes de la ecuación por una cantidad convenida).

Viète (Piaget & García, 2008) concluye el capítulo con la observación: Diophantus, en aquellos libros que tenían que ver con aritmética, empleó la zetética en la forma más sutil. Pero él lo presentó como si fuera establecido por medio de números y no también por especies (las cuales fueron, sin embargo, usadas por él), a fin de que su sutileza y habilidad pudiera ser más admirada, en tanto aquellas cosas que parecen más sutiles y ocultas para quien usa consideraciones acerca de números (logistece numerosa) son enteramente comunes e inmediatamente obvias para quien usa consideraciones acerca de especies (logistece speciosa) (p.140).

Para Piaget & García (2008), no parecía que en el capítulo se encontrara la verdadera raíz del razonamiento que consiste en hacer abstracción de los números y trabajar con especies, sino que una vez que éstas aparecen -aunque no de manera expresa- como invariantes en las transformaciones de una ecuación. Esta interpretación de la razón subyacente: es el salto que realiza Viète, cuando pasa a otro nivel de generalización para fundamentar su nueva álgebra y se encuentra explícita por aquel que se sitúa en la continuación directa de esta línea de pensamiento: Descartes.

6.2.1.1. Las ecuaciones algebraicas

A partir de Viète y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limita al estudio de las ecuaciones algebraicas. El método de resolución de la ecuación de segundo grado fue descubierto por los hindúes, aun cuando los babilonios hubieran encontrado anteriormente soluciones de ecuaciones particulares de dicho grado. Las ecuaciones de tercero y cuarto grado fueron resueltas hacia finales del siglo XVII; la disputa entre Tartaglia y Cardano, sobre quién fue el verdadero descubridor de la fórmula que permitía resolver las ecuaciones de tercer grado es un hecho histórico conocido (Piaget & García, 2008, p.141).

Durante largo tiempo tuvieron lugar numerosas tentativas para encontrar fórmulas que permitieran resolver ecuaciones de grado superior a cuatro: pero los únicos logros de este período se refieren a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En la misma época se encuentran también soluciones algebraicas para ciertos problemas particulares provenientes de la geometría o de la mecánica. Sin embargo, cada problema necesitaba de un método de resolución propio. Este es un período que se caracteriza como “intra-operacional” (Piaget & García, 2008).

La ausencia de progreso significativo durante el siglo XVII y primera mitad del siglo XVIII se debe a que la atención de los matemáticos se concentró, durante ese largo intervalo de tiempo, en el nuevo instrumento creado por Leibniz y por Newton: el cálculo infinitesimal. Esta herramienta, en manos de matemáticos como: Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, conducen el álgebra -durante la segunda mitad del siglo XVIII- a un nuevo nivel de desarrollo. En ese momento se llegan a formular, en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, tal como el que condujo al “Teorema Fundamental del Álgebra”. Pero allí se llega haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas y sus transformaciones, tomadas del cálculo infinitesimal. Este período corresponde a una etapa inter-operacional. Durante largo tiempo, fueron las “transformaciones” las que dominaron el álgebra, hasta el surgimiento de la primera estructura algebraica: el grupo, que conduce a la etapa “trans-operacional” (Piaget& García, 2008, p.141).

La figura clave en la transición entre la etapa intra-operacional y la etapa inter-operacional es*Lagrange*. Las tentativas empíricas para resolver ecuaciones de diversos grados (propias de la etapa intra operacional) fueron sustituidas por Lagrange, por una cuestión de alcance mucho más general; Lagrange se cuestionó sobre **¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado y cuál ha sido la razón de su éxito?** Lagrange pensó obtener de ésta forma, ideas que le permitieran abordar las ecuaciones de grado superior. En su análisis llegó a mostrar que todos los métodos consistían en introducir funciones que transformaran la ecuación de la cual se parte y que permitieran llegar a una ecuación reducida. El problema así formulado se reducía a encontrar la relación entre las soluciones de la ecuación reducida y las soluciones de la ecuación original (Piaget & García, 2008, p.142).

Lagrange, utilizó otra idea muy fecunda que contiene el germen; las ideas que conducirán a la teoría de los grupos: el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las formas posibles. Para esto, analizó ciertas funciones de las raíces de una ecuación y demostró que el número de valores que puede tomar una función de las raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ cuando se permutan las x_j de todas las maneras posibles es un divisor de n !, el número de permutaciones posibles de las raíces (Piaget& García, 2008, p.142).

Para una ecuación de cuarto grado, por ejemplo, con raíces x_1, x_2, x_3, x_4 la función $y = x_1 x_2 + x_3 x_4$ toma tres valores diferentes cuando se permutan las raíces de las 24 formas posibles. Además, Lagrange demostró que el número de dichos valores diferentes determina el grado de la ecuación reducida que permite resolver la ecuación dada (Piaget & García, 2008).

Seguidamente, *Ruffini* retoma las ideas de Lagrange e intenta demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por radicales de la ecuación de quinto grado. Su demostración queda incompleta, pero el marco conceptual en el interior del cual trabajo lo sitúan en un lugar excepcional dentro de este período inter-operacional del álgebra, muy próximo ya a la etapa siguiente que Galois tuvo el mérito de inaugurar (Piaget & García, 2008, p.143).

Ruffini define las permutaciones (se define una permutación como una función biyectiva, para este caso de un conjunto finito en el mismo) de variables de una función dada y las clasifica en géneros. Es posible cambiar la terminología que él utiliza y traducirla en términos de la teoría de grupos de sustituciones-permutaciones. Sin embargo, no se trata simplemente de un cambio de terminología; para Ruffini, las permutaciones estaban ligadas a los valores de las raíces. La clase de las permutaciones que no cambiaban el valor de la función, no tenían para él estructura: él concibe la transformación implicada en el pasaje de una permutación a otra, pero no concibe la estructura matemática dentro de la cual esta transformación está a su vez implicada (Piaget & García, 2008, p.143).

Por su parte, *Cauchy* considera las funciones con un grado mayor de generalidad: se trata de funciones de cantidades, pero dichas cantidades no eran consideradas como raíces de las ecuaciones: se trataba solamente de letras que representan cantidades indeterminadas. Cauchy, llama “permutación” al orden de las letras. La transición de una permutación A_1 a otra A_2 la llama *sustitución* y la representa con la notación:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Define también la multiplicación de sustituciones y la sustitución idéntica, llegando a la introducción de la sustitución inversa:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

A partir de estos desarrollos se demuestran algunos teoremas que se consideran como los antecesores inmediatos de los teoremas generales sobre los grupos de sustituciones. Pero no hay en Cauchy una idea de estructura ya tematizada (interiorizada), sino de cierto modo explícitada (Piaget & García, 2008, p.143).

Continuando con estos desarrollos, las investigaciones aritméticas de *Gauss* también ocuparon un lugar singular hacia el final de este período. En particular en su obra, la sección quinta tenía el título: "De las formas y de las ecuaciones de segundo grado". Gauss, estudió las formas cuadráticas en relación con la solución de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas; su análisis minucioso de las formas cuadráticas binarias y ternarias se convirtieron en su tema principal. No solo clasificó las formas, en cuanto tales, definiendo sus órdenes y tipos: además logró, por primera vez en la historia de las matemáticas, componer formas entre sí, esto es, definir operaciones entre formas. Algunas de éstas definiciones generales, dadas por Gauss y los problemas abordados en la sección quinta de sus Investigaciones Aritméticas, corresponden a:

> En esta sección hablaremos sobre todo de las funciones de dos indeterminadas de la forma $ax^2+2bxy+cy^2$, donde a, b, c son números enteros dados; funciones que llamaremos formas de segundo grado, o simplemente formas.

Estas investigaciones conducen a encontrar todas las soluciones de una ecuación indeterminada cualquiera de segundo grado, con dos incógnitas, ya sea que la solución corresponda a números enteros, o solamente números racionales (Piaget & García, 2008, p. 144). Un poco más adelante, en el mismo texto, precisa aún más la definición de forma:

> Representaremos la forma $ax^2+2bxy+cy^2$ por el símbolo (a, b, c) cuando no se trate de las indeterminadas x e y. Así esta expresión designará de una manera indefinida la suma de tres partes, de las cuales la primera es el producto de un número dado a por el cuadrado de una indeterminada cualquiera, la segunda el doble del producto de b y de esta indeterminada multiplicada por otra, y la tercera el producto de c por el cuadrado de esta segunda indeterminada. Por ejemplo $(1, 0, 2)$ expresa la suma de un cuadrado y del doble de otro cuadrado (p. 119, citado en Piaget & García, 2008, p.144).

Para Piaget & García (2008) Gauss, llega a uno de los puntos más originales de su obra, que introduce en los siguientes términos: vamos a pasar a otro tema muy importante y del cual nadie se ha ocupado hasta ahora, a la composición de formas (p. 241). La definición de composición de formas dada por Gauss constituye la primera operación introducida en un dominio no numérico, cuyas propiedades no pueden ser deducidas directamente de las operaciones entre números. Gauss llega así a numerosos teoremas importantes tales como:

Si las formas f, f' son de los mismos órdenes, géneros y clases que g, g' respectivamente, la forma compuesta de f y f' es de la misma clase que la forma compuesta de g, g' (p. 273).

El enunciado, va seguido del comentario: se ve de allí qué es lo que debe entenderse por una clase compuesta de dos o más clases (p. 273). De esto, resulta que las formas estudiadas por Gauss y las propiedades que él demuestra con tanta minuciosidad, pueden ser traducidas hoy en el lenguaje de la *teoría de los grupos*. En efecto, una forma cuadrática, con una ley de composición como la define Gauss, es un grupo abeliano que tiene como elemento unitario; la clase que Gauss llama clase principal (Piaget & García, 2008, p. 145).

Traducciones similares a las anteriores, se pueden establecer de los resultados obtenidos por Ruffini o Cauchy. La mayor parte de los historiadores muestran su asombro ante la ausencia de respuesta a la cuestión ¿por qué estos autores, habiendo llegado tan cerca de los conceptos de teoría de grupos, no pudieron dar el pequeño salto que hacía falta para constituirla? Hay una respuesta a esta cuestión, el pequeño salto solo lo es, en apariencia. Gauss constituye, junto con Lagrange, Ruffini, Cauchy y algunos otros que se han omitido, la culminación del período "inter-operacional" en el desarrollo del álgebra y más particularmente, en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sus métodos consisten esencialmente en transformar funciones y encontrar las relaciones que permanecen estables. Las propiedades que ellos dedujeron corresponden a: "los invariantes de sistemas de transformaciones" (Piaget & García, 2008, p. 146).

El tipo de desarrollo que se ha encontrado tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis, evidencia que hay un largo camino por recorrer antes de poder pasar de un sistema dado de transformaciones a una estructura total dentro de la cual, aquéllas resultan variaciones intrínsecas. Pero en eso consiste, el pasaje de las conexiones inter-operacionales a las conexiones trans-operacionales. A nivel psicogenético, la etapa "trans" se alcanza cuando el sujeto puede efectuar operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008, p.146).

A este respecto, no es trivial señalar que *Galois* introduce la noción de grupo a partir de la acción de agrupar. Las definiciones siguientes constituyen su punto de partida (Piaget & García, 2008, p.146):

La permutación de la cual se parte para indicar las sustituciones es totalmente arbitraria cuando se trata de funciones; puesto que no existe ninguna razón para que en una función de varias letras, una ocupe un rango más que otra. Sin embargo, como apenas se puede formar la idea de una sustitución sin la de permutación, haremos en el lenguaje un empleo frecuente de las permutaciones y no consideraremos las sustituciones sino como el pasaje de una permutación a otra.

Cuando deseemos agrupar sustituciones, las haremos provenir todas de una misma permutación. Como se trate siempre de cuestiones donde la disposición primitiva de las letras no influye en nada, en los grupos que consideraremos, se deberán tener las mismas sustituciones cualquiera que sea la permutación de donde se haya partido. Por consiguiente, si en un grupo tal, se tienen las sustituciones S y T, se está seguro de tener la sustitución ST (Piaget & García, 2008, p. 146).

Más adelante, dice explícitamente: "Se llama grupo a un sistema de permutaciones tal que [...] representaremos este conjunto por G" (Piaget & García, 2008, p. 146).

Aquí, se encuentran las fuentes de la primera noción de estructura de la historia del álgebra, se encuentra el hilo, que permite comprender el pasaje del periodo inter al periodo trans: exactamente como en el caso de la psicogénesis, esta transición supone el pasaje de las operaciones sobre elementos, a las operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008).

En los estudios de Jacob Klein (citado en Piaget & García, 2008, p.147), respecto a la historia del álgebra, presenta las siguientes conclusiones :

- Viète realizó la transición (que los antiguos no habían logrado llevar a cabo) del concepto de arithmos al concepto de símbolos generales y es sobre estos últimos en los que se construirá el álgebra como una disciplina nueva.

- Viète llega a este logro mediante una síntesis entre el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto.

Si bien los conceptos de "transformación y de invariante" no son explícitados (tematizados-interiorizados) en esta época, desempeñan un papel fundamental. Es gracias a su utilización que se hace posible el pasaje del concepto de símbolo utilizado por los antiguos para representar de una manera general un número particular, al concepto de símbolo general, en tanto forma que representa un número general (es decir, un número cualquiera).

Cuando el álgebra se constituyó como disciplina independiente, su tema central y único, fue la resolución de ecuaciones. En este caso se han podido diferenciar las tres etapas características del desarrollo. Durante un primer período, extremadamente prolongado, se trataba de la resolución de ecuaciones especificas. El método que se aplicaba era puramente empírico, por tanteos sucesivos. Cada ecuación era objeto de un tratamiento particular. Se estaba entonces, en un período intra-operacional.

Solo en el siglo XVIII se inicia la búsqueda de métodos más generales y el planteamiento de problemas generales, tales como, la existencia o no de soluciones. Las transformaciones de ecuaciones que pudieran permitir reducir una ecuación no resuelta a una ecuación resoluble dominaban ampliamente las investigaciones. Aquí, como en el caso de la geometría, el análisis desempeñó un papel fundamental. Lagrange y Gauss son, entre otros, las grandes figuras de este período que constituye un período inter-operacional. Con Galois y el desarrollo de la teoría de grupos -primera estructura tematizada en matemáticas- culmina la historia de la resolución de ecuaciones y comienza el predominio del estudio de estructuras. Es el punto de partida de un largo período trans-operacional.

Como conclusión, se establece que existe una diferenciación en cuanto a la psicogénesis de la Teoría de Grupos en tres períodos de desarrollo: *el intra-operacional* caracterizado por la solución de ecuaciones algebraicas en una forma empírica: cada ecuación se solucionaba con un método particular. Luego se pasa al período *inter-operacional* caracterizado por una búsqueda de métodos más generales para la solución de estas ecuaciones algebraicas, con métodos basados en la transformación de las ecuaciones en otras de menor grado que fueran resolubles y finalmente con los trabajos de Galois, se da inicio al período *trans-operacional* y comienza el desarrollo de la Teoría de Grupos, cerrando el estudio de las ecuaciones algebraicas y la solución por el método de radicales y se inicia con el problema del estudio de las estructuras algebraicas, donde la primera estructura algebraica corresponde al estudio del objeto Grupo.

En el primer período se ubican los trabajos de Viète y Ruffini; en el segundo período se encuentran los trabajos de Lagrange, Gauss, Ruffini y Cauchy y con los trabajos de Galois se inicia el tercer período denominado por Piaget & García (2008) el período trans-operacional. Estos períodos de evolución se retoman en la teoría APOS, para determinar al igual que en las etapas de la evolución del conocimiento científico, los períodos de evolución del conocimiento de los estudiantes respecto a los diferentes objetos matemáticos; específicamente se toma como marco teórico, en algunas de las investigaciones relacionadas con el objeto Grupo, presentadas en los antecedentes de la presente investigación (ver, capítulo 2): algunas investigaciones fueron analizadas en los antecedentes en un marco teórico importante para el desarrollo de investigaciones en *didáctica del Álgebra* en relación precisamente con las estructuras algebraicas: en este marco teórico, se han desarrollado estudios muy importantes relacionados con la comprensión de objetos algebraicos (ver, capítulo 2).

Luego de la visión general tomada de la obra de Piaget & García (2008), se pasa a analizar en forma más detallada la evolución del objeto Grupo en cada una de las etapas de su desarrollo.

6.2.2. Época antigua y edad media (Siglo V-XV)

6.2.2.1. Período cero: Métodos empíricos de solución de ecuaciones algebraicas particulares de grado 1, 2,3 y 4

En la sección anterior se presentó la evolución del objeto Grupo según la mirada de Piaget & García (2008); ahora se profundizará en algunos de los aportes mencionados en la sección anterior y otros que son relevantes para la determinación de los significados del objeto Grupo según su evolución histórica. La obra de Piaget & García (2008), define unos períodos de evolución del objeto grupo y con base en estos períodos se presentan detalles relevantes de los mismos; puntos, necesarios para la identificación de los distintos significados que se han dado al objeto Grupo a lo largo de la historia de la matemática hasta el presente siglo. Se inicia con el período cero, que corresponde a los aportes de los griegos, babilonios, egipcios y árabes.

6.2.2.2. Periodo cero: El álgebra en las civilizaciones antiguas

Se presentan los aportes de las civilizaciones antiguas en los años (1600 a. C. al 600 d. C.) En el siglo II a. C. los matemáticos chinos escribieron el libro: El arte del cálculo matemático: en el se plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado; gracias a su ábaco tenían la posibilidad de trabajar números positivos y negativos y se reconoce a Diofanto de Alejandría, como el precursor del álgebra moderna. Diofanto fue un matemático griego, que publicó su gran obra "Arítmètica" en la que trataba en una forma rigurosa no solo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo e introduce un simbolismo algebraico muy elemental, designando la incógnita con un signo que corresponde a la primera sílaba de la palabra griega arithmos (número). Los problemas de álgebra que propuso, prepararon el terreno para lo que siglos más tarde sería la teoría de las ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002).

La matemática egipcia, babilónica y griega se clasifica como de "tipo algebraico," cada una de distinta índole y se habla de una pre−álgebra ya que en ésta etapa no se toma conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y la geometría (en el caso de Egipto y Babilonia, se habla de un "álgebra aritmética" y en el caso de Grecia de un "álgebra geométrica". En ambos casos se encuentran problemas algebraicos específicos, para los cuales existían métodos de solución para ciertos tipos de ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 5).

Varios de los pueblos que habitaron Mesopotamia resolvieron problemas concretos que involucraban ecuaciones algebraicas de primer, segundo y tercer grado; la matemática tenía un fin utilitario y no se desarrolló como ciencia autónoma como ocurrió en Grecia donde la Geometría y la Aritmética (Teoría de números) lograron un alto nivel de desarrollo respecto a las matemáticas de las civilizaciones que les precedieron. Con el declinar de la matemática griega (250−600 d. C.) se retomaron las antiguas tradiciones de los calculistas de Mesopotamia y aparece nuevamente el interés por solucionar ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 7).

El álgebra babilónica, fue de tipo verbal al igual que la egipcia y existen registros de alrededor del año 1600 a. C. donde se muestra que los problemas de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y podían resolver problemas que involucraban *ecuaciones cuadráticas y cúbicas* usando fórmulas desarrolladas. Se concluye de las tablillas que los babilónicos podían resolver ecuaciones cuadráticas con un método que corresponde a la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado; este método se basaba en expresar una ecuación cuadrática en su "forma normal" y luego aplicar un método para resolverla; el método se resume como: encontrar dos números si se conoce su suma y su producto (Dávila, 2002, p.13).

En esta dirección, al matemático, Mohammed ibn-Musa Al-Jwarizmi, que vivió entre los años 780 y 850, miembro de la Casa de la Sabiduría, se le debe el término "álgebra", que proviene del título de su libro: Al-jabr w'al-mugabalah, que significaba: Ciencia de la transposición y de la simplificación (Dávila, 2003a, p. 35). La resolución de las ecuaciones de segundo grado entonces tiene dos orígenes distintos: uno aritmético, usado por los babilónicos y otro geométrico utilizado por los griegos. Uno de los problemas más significativos encontrados en textos antiguos corresponde a:

Obtén el lado de un cuadrado si su área menos su lado es igual a 870.

Para la solución de ecuaciones, los babilónicos utilizaron procesos aritméticos de suma, resta y producto: ellos no conocían los números negativos. Varios siglos después, los griegos resolvieron este problema y otros similares mediante la utilización de el método de aplicación del área. El matemático alemán Johann Widmann dEger, escribe por primera vez en 1489, los símbolos + y − para sustituir las letras p y m que eran las iniciales de las palabras plus (más) y minus (menos) y que hasta entonces se utilizaba para representar la suma y la resta respectivamente; se señala que los símbolos para la multiplicación × y para la división : fueron introducidos por William Oughtred en el año 1657 (Dávila, 2002).

Los egipcios, por su parte, disponían de un método para resolver ecuaciones de primer grado, al que llamaban: "el método de la falsa posición". En el papiro de Rhind, se encuentra una serie de problemas planteados donde inician utilizando unas primeras estrategias algebraicas y al número desconocido, el que se quiere obtener, lo llaman *montón*. Entre los problemas más representativos y famosos de dicho papiro se encuentra el número 24 (Dávila, 2002, p.12):

Calcula el valor del montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.

A partir de estos desarrollos, se establece que la ciencia tuvo su origen en la Grecia clásica y que su legado fue de gran impacto para la civilización occidental: todos los hombres, por naturaleza, desean conocer; dice Aristóteles y estas palabras reflejan el espíritu aventurero griego (Dávila, 2002, p. 16): el deseo de conocer los llevó a Egipto y a Babilonia en donde aprenden la ciencia de éstas civilizaciones, la cual desarrollaron hasta crear su propia ciencia. Reconocieron su deuda con estas dos grandes civilizaciones; como dice Platón: "todo lo que nosotros los griegos recibimos lo mejoramos y perfeccionamos". Además, supieron reconocer en el uso de la razón una poderosa herramienta para entender la naturaleza y tenían el convencimiento de que ésta podía ser explicada en términos matemáticos (Dávila, 2002, p. 16).

Los griegos, dieron a la matemática el rango de ciencia deductiva por excelencia. Esto fue posible gracias a que entendieron la diferencia que existía entre manejar ideas abstractas y generales en lugar de las limitaciones que imponía la ciencia, orientada a resolver los problemas cotidianos: ellos distinguían que una recta, un triángulo, un círculo: eran conceptos abstractos que surgían cuando se idealizaban sus imperfectas realizaciones en la naturaleza o en las cosas que se usaban en la vida diaria: ellos, estaban convencidos que solo con el uso de la razón era posible conocer, ya que los sentidos daban imágenes imperfectas del mundo que los rodeaba. Esta fue la semilla que dio lugar a una real preocupación por la "formalización" es decir, por la justificación lógica de los razonamientos. Esto los llevó a reconocer que en todo razonamiento era preciso partir de ciertos principios básicos y evidentes por sí mismos y de los cuales se pudiera deducir, con el uso de la razón, resultados más profundos: tenían claro que no era posible basar sus principios básicos en otros todavía más elementales o demostrarlos mediante otros principios:

...En cuanto a la demostración circular, su imposibilidad absoluta es patente, si es cierto que la demostración ha de partir siempre de cosas anteriores y más notorias. En efecto, es imposible que las mismas cosas sean respecto de unas mismas cosas anteriores y posteriores a la vez... Los partidarios de la demostración circular, no solo cometen la falta que aquí indicamos, sino que en el fondo se limitan a decir que una cosa existe si existe (Aristóteles, 1993: citado en Dávila, 2002, p.17).

Bajo esta visión, no podían haber demostraciones con retroceso infinito ni con un proceso circular y todo sistema deductivo debía partir de axiomas. Esto trae como consecuencia el surgimiento del "método axiomático" del cual se puede decir que es la aportación más grande de los griegos a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. Este método tuvo su mayor realización en los *Elementos* de Euclides y durante miles de años fueron el modelo a seguir en los desarrollos matemáticos (Dávila, 2002, p. 17).

Los logros más grandes de los griegos fueron geométricos y el punto de vista pitagórico de que todo podía ser explicado en términos de los números naturales o sus razones (arithmos), pero esto no fue suficiente para detener el dominio de la geometría. No se sabe por qué la preferencia de los matemáticos griegos por la geometría, pero se cree que el descubrimiento de los números inconmesurables (los que no se pueden expresar como razones de enteros positivos) acabó con las bases de la fe pitagórica en los números (Dávila, 2002).

Al álgebra de tipo geométrico, se le puede llamar "álgebra geométrica" y fue la que prevaleció en la matemática griega y permaneció por muchos siglos; así, las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación, propias del álgebra, tales como la asociatividad de la suma o la propiedad distributiva resultaban obvias en el álgebra geométrica; también las identidades $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ se demostraban fácilmente en este contexto y por ejemplo la ecuación $x^2 = ab$ era fácil de resolver. Las fórmulas anteriores se demuestran en el segundo libro de los Elementos en términos geométricos; esto hace difícil el manejo de las ecuaciones de grado mayor que dos, por lo que raramente trabajaron ecuaciones cúbicas o bicuadráticas (Dávila, 2002).

El libro quinto de los "Elementos" es uno de los más admirados de los trece que componen la obra. En el se trata: la teoría de magnitudes, de la cual Bourbaki dice que es la creación más original de la matemática griega. Gran parte del material se le atribuye a Eudoxo ya que su teoría de proporciones se aborda en él mismo y en cierta forma esta fue una respuesta al problema de la inconmensurabilidad ya que desde que se descubrieron las proporciones no conmensurables, los griegos trataron de eliminar en lo posible el uso de las proporciones: Eudoxo establece una teoría de las proporciones que es independiente de la conmensurabilidad (Dávila, 2002, p. 18).

Para el álgebra, este libro es importante ya que en él se prueban algunas propiedades para magnitudes que son las equivalentes a las propiedades distributivas $m(a+b) = ma + mb$ y $(a+b)n = an + bn$; incluso, se llega a probar que el producto de dos razones es independiente del orden en que se realiza la operación, esto es, la multiplicación es conmutativa. Otro de los grandes matemáticos que aportó al trabajo geométrico−algebraico en la antigua Grecia, fue Diofanto de Alejandría, en plena decadencia de la matemática griega. Con Diofanto se vuelve a la tradición de los calculistas babilónicos en virtud a que su libro *Aritmética* se encontraba más cerca de la matemática babilónica de la matemática griega. En el texto, Diofanto no se preocupa por dar una representación geométrica a los números y desarrolla algunas reglas del cálculo simbólico: *introduce símbolos* para representar la incógnita de un problema y desarrolla una notación que usa para abreviar potencias de números, relaciones y operaciones (Dávila, 2002).

Se presenta en la tabla 6.1 el aporte de las civilizaciones antiguas a la evolución del concepto Grupo.

Tabla 6.1: Período cero: 1. Civilizaciones antiguas

Significado Pre-algebraico	Egipto	Babilonia	Grecia	Hindúes	Árabes
Objeto de estudio: No son las ecuaciones.	Álgebra - Aritmética	Álgebra - Aritmética	Álgebra - Geométrica		
Notación simbólica: No; introducción de algunos símbolos para representar cantidades y operaciones matemáticas.					
Tipo de ecuación: 1,2 y 3 grado.			Diophanto (s. III)		Al-Jhwarizmi (s. VIII)
Elementos del conjunto: No son las raíces de las ecuaciones; problemas algebraicos específicos y cotidianos.					
Método de solución: empíricos y específicos para cada tipo de ecuación.	Método de la falsa posición	Fórmula para ecuaciones de 2 grado	Método Axiomático	Aportan el concepto de cero; introducen una notación más adecuada para las operaciones	Origen del nombre de Álgebra
Idea de estructura: No					
Teorema fundamental del Álgebra: No					

6.2.3. Edad Media (siglo V - siglo XV)

6.2.3.1. Periodo cero: Los Hindúes y la solución de las ecuaciones algebraicas

En este período se estudian los desarrollos del álgebra entre los años 650 y 1750. En este período surgieron las condiciones que le dieron al álgebra un lugar independiente dentro de las matemáticas y se desarrolla una notación adecuada, que prepara el camino para el álgebra simbólica y se propicia el desarrollo del álgebra moderna (Dávila, 2003a, p.27).

Con el declinar de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizaron en la India y en el mundo árabe, que en el siglo VII estaba en plena expansión. En el auge de la matemática griega, Alejandría era el centro del saber y en el caso de las matemáticas árabes, Bagdad se convirtió en la ciudad cosmopolita donde van los hombres de ciencia, sin interesar su origen étnico ni su religión (Dávila, 2002, p. 27). Sin embargo, las matemáticas en la India no se desarrollaron como en la cultura árabe: entre los aportes más importantes de los hindúes se encuentra, su sistema de numeración del cual proviene el que se usa actualmente y que fue importante para el surgimiento de un álgebra de tipo aritmético en la cultura hindú (Dávila, 2003a).

Sin embargo, los egipcios y los griegos usaron sistemas de numeración de base diez aunque no eran posicionales y los babilónicos usaban un sistema posicional base 60; además, en la matemática griega también se encontraban símbolos especiales para los diez primeros dígitos, pero fue en la India donde funcionaron los aspectos de: a) Base decimal; b) El principio de numeración posicional y c) El uso de un símbolo especial para cada los diez primeros dígitos (Dávila, 2003a).

Con Brahmagupta (598-670), se da lugar a una de las contribuciones importantes de la matemática hindú al álgebra. Su obra más significativa, el "Brahmasphuta Siddh$\tilde{a}$nta" es un escrito en trigonometría, geometría y álgebra donde aparecen resultados correctos e incorrectos. En relación al álgebra, los aportes más importantes son las fórmulas para calcular áreas y Brahmagupta presenta soluciones generales para ecuaciones cuadráticas y considera el caso de soluciones negativas (Dávila, 2003a, p. 29).

El matemático hindú Bhaskara (1114-1185) realizó contribuciones en álgebra; este matemático escribió seis textos matemáticos y dentro de los más conocidos se encuentran: "Vija−Ganita y Lilavati" que contienen problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas, cálculo de áreas, progresiones aritméticas y geométricas y ternas pitagóricas; algunos de los problemas provienen de textos hindúes anteriores tales como el Brahmasphuta Siddh$\tilde{a}$nta, que tenían algunos errores, pero que Bhaskara corrige. Además, este matemático es el primero en afirmar que el cociente de una cantidad positiva al ser dividida por cero es infinito. Con las palabras: "...no hay alteración aunque mucho sea agregado o extraído..." lleva directamente al problema del infinito, que solo lo resuelve George Cantor en el último cuarto del siglo XIX y que desde la época de los griegos había desafiado las mentes más brillantes(Dávila, 2003a, p. 32). En el texto, se afirma que: $\frac{a}{0}0 = a$ lo cual expresa que no tenía completamente clara la idea de división por cero.

Bhaskara, estudió también la ecuación de Jhon Pell (1688) que corresponde a $px^2 + q = y^2$ que había sido trabajada por Brahmagupta para el caso $q = 1$ perfeccionando el método y considerando los casos $q = -4, -2, -1, 1, 2 \quad y \quad 4$. Los hindúes a diferencia de los griegos, consideraron verdaderos números a las raíces irracionales de números tales como $\sqrt{2}$ que tiene gran significado en álgebra (Dávila, 2003a).

6.2.3.2. Periodo cero: Los Árabes (476-1492) y la solución de ecuaciones algebraicas

La caída de Roma (476 D.C.) marcó el inicio de la Edad Media; esto no significó el fin del imperio romano, ya que el centro de poder se encontraba en Constantinopla donde surgieron cambios especialmente religiosos; la adopción del cristianismo como religión oficial y el nacimiento del imperio Bizantino. Otro movimiento, que se gestó en el Medio Oriente, que tuvo repercusiones en esta etapa fue el Islam en el año 622, así, fue la civilización árabe la que dio un nuevo impulso al estudio de las ciencias, preservando y cultivando el legado de los griegos y otras civilizaciones como la hindú. Además, como los árabes habían conquistado gran parte de la península Ibérica; España se convirtió en un centro cultural importante al que acudían eruditos de Europa a nutrirse del conocimiento científico. Así, Euclides, Aristóteles, Platón, Arquímedes, Ptolomeo y otros pensadores griegos fueron conocidos por los escolares medievales por las traducciones al latín realizadas por los árabes.

Bajo el régimen del califa Harún al-Rashid, del 786 a 809 Bagadad alcanzó su máximo esplendor y llegó a ser un centro científico muy importante para los académicos hindúes, sirios, judíos y cristianos. Bagdad se convirtió en la nueva Alejandría y bajo el régimen del califa al-Mamún del 809 al 833 se traducen todos los tratados griegos disponibles y se funda la Casa de la Sabiduría que era equivalente a un centro de investigación.

Con el auge del comercio en Italia en los siglos XIII y XIV se llegó a adoptar los números indo−árabigos en occidente y junto con estos llegaron tratados científicos de los árabes, traducidos al latín por académicos europeos. Esta revolución comercial, fue la responsable de que se fundaran las *escuelas del ábaco* a finales del siglo XIII; pero a medida que se extendía el uso de los números indo−árabigos los *maestros algoristas* que dominaban estas técnicas de operación superaron por mucho a los maestros abacistas. De esta forma, los comerciantes adoptaron su uso y propagaron el nuevo sistema.

El álgebra de los árabes se orientaba a resolver problemas por métodos aritméticos que involucraban: ecuaciones lineales de primer grado y ecuaciones cuadráticas; estos problemas trataban sobre repartición de herencias, transacciones comerciales y medida de terrenos. Así, el álgebra fue una herramienta indispensable para los comerciantes y en el siglo XIV ya los maestros del ábaco se convierten en algebristas y hacen contribuciones originales en el área como: solución de ecuaciones cúbicas y bicuadráticas particulares, relacionadas con problemas específicos.

En el álgebra árabe se tenían métodos generales para resolver ecuaciones cuadráticas que consistían en completar cuadrados; entonces aparece de manera natural la búsqueda de métodos que funcionen para cualquier tipo de ecuación cúbica o de cuarto grado. El álgebra de esta época tenía un carácter "retórico" es decir, verbal, ya que no se tenía la notación simbólica y además las soluciones de las ecuaciones solo podían ser positivas o cero ya que no se tenía idea de los números negativos, que fueron introducidos mucho después (Dávila, 2002, p. 8).

Otro matemático árabe, poeta, filósofo y astrónomo fue Omar Khayyam (1050-1123), escribió un tratado de álgebra más avanzado que el de al-Juarismi ya que presentaba la teoría para resolver la ecuación de segundo grado y aborda la solución de ecuaciones cúbicas por medio de construcciones geométricas. Las soluciones que obtiene en el caso de la cúbica están dadas como los puntos de intersección de curvas: por ejemplo, una hipérbola y un círculo o una hipérbola y una parábola. Este problema había sido abordado por Arquímides, pero Omar da un tratamiento sistemático que incluye muchos casos según los coeficientes de la cúbica, ya que al no manejar los números negativos, se tenían distintos tipos para la ecuación, como cubos y cuadrados iguales a números $(ax^3 + bx^2 = c)$ o cubos y raíces iguales a cuadrados $(ax^3 + bx = cx^2)$ (Dávila, 2003a).

En esta dirección, al matemático árabe Muhamed $Abu'l-Wefa$ (940−998) se le atribuye un tratado de álgebra, la traducción de la Aritmética de Diofanto y una versión abreviada del Almagesto y también Abu Bekr al−Kharki (953−1029) escribe un texto de álgebra, el "Al−Fakhri" donde da la primera solución numérica de ecuaciones de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$ y por tanto, se cree que es el primer matemático en liberar completamente al álgebra de las operaciones geométricas y reemplazarlas con operaciones de tipo aritmético (Dávila, 2003a).

No se sabe por qué el interés de los árabes en el álgebra, pero se cree que fue por el complicado sistema de leyes de herencia, ya que la repartición de las propiedades, involucraba el tener que resolver ecuaciones algebraicas muy sofisticadas. Se pueden distinguir cuatro características de las matemáticas árabes: su sistema numérico y su aritmética que se derivan de fuentes indias, pero los árabes le agregaron su invención de las fracciones decimales. De

otro lado, el álgebra, tenía raíces griegas, indias y babilónicas pero los árabes le dieron nuevas formas (Dávila, 2003a).
En los siglos V al XII en la India y en la cultura árabe se dan grandes contribuciones a la ciencia en general y a las matemáticas en particular, pero Europa vivía un procesos de inestabilidad y retroceso. En contraste, la España árabe de los siglos VIII a XII fue un centro cultural importante al que concurrían los europeos interesados en aprender la ciencia árabe. Así, el siglo XII representa un punto de quiebre en la historia de la ciencia de Europa. En este siglo el sistema de enseñanza cambia con el nacimiento de las universidades y con la toma de una nueva actitud hacia las ciencias físicas y matemáticas (Dávila, 2003a).

Leonardo de Pisa (1175−1240) conocido como Fibonacci; hijo de Guilielmo de la familia Bonnacci, quién era el representante de los mercaderes de Pisa (Italia) en el comercio que éstos realizaban en el norte de Africa. Por esto, Leonardo estudió con un maestro árabe y viajó a Egipto, Siria y Grecia y aprendió álgebra y el sistema de numeración de los árabes; escribe el libro: “Liber Abaci” en 1202 que no es un libro sobre el uso del ábaco, sino un tratado en el que se incluyen problemas en los que se usa el sistema de numeración indo−árabigo de las nueve figuras significativas y el cero (zephirum). En este texto se explicaban las operaciones aritméticas y la extracción de raíces, problemas sobre transacciones comerciales y cálculos sobre conversión de diferentes tipos de monedas. Debido a la originalidad de sus trabajos, se considera a Fibonacci como el algebrista europeo más importante de la edad media (Dávila, 2003a).

En el siglo XV se conjugaron varios factores que trajeron como consecuencia nuevas formas de organización política, social y económica en Europa. Se inventó la imprenta y la brújula; fue posible entonces explorar y descubrir nuevos continentes; los libros alcanzaron a un mayor número de lectores y se favoreció una visión antropocéntrica del mundo, esto es, el hombre como centro de todas las cosas y el fin absoluto de la naturaleza; la edad media llegó a su fin y se da inicio al Renacimiento (Dávila, 2003a).

Se resume a continuación, en la tabla 6.2 los aportes de algunos matemáticos y culturas, al desarrollo del concepto Grupo en la edad media (siglo V-XV) y en la tabla 6.3 se presenta el resumen en cuanto a la evolución del significado dado al objeto Grupo, según los aportes de los matemáticos mencionados.

Tabla 6.2: Período cero: 2. Edad Media

Significado Pre-algebraico	Egipto	Babilonia	Grecia	Hindúes	Árabes
Objeto de estudio: No son las ecuaciones, problemas de tipo algebraico.	Álgebra verbal	Álgebra verbal	Álgebra retórica		
	Sistema de numeración base 10, no posicional	Sistema posicional base 60	Sistema de numeración base 10 no posicional	Sistema de numeración	Números indo-arábigos
Notación simbólica: No; se desarrolla una notación adecuada y el concepto de incógnita.					
Tipo de ecuación: 1,2; 3 y 4 relacionadas con problemas específicos.				Brahmagupta (VI): ecuaciones de 2 grado: $px^2 + 1 = y^2$	Traducciones al latín de tratados griegos
				BhasKara (XII) : ecuaciones de 2 grado: $px^2 + q = y^2$	Maestros abacistas; maestros algoristas

Significado Pre-algebraico	Egipto	Babilonia	Grecia	Hindúes	Árabes
Elementos del conjunto: No son las raíces de la ecuaciones; problemas de reparticiones, medida de terrenos, transacciones comerciales.					
Método de solución: específicos para cada tipo de ecuación. Inician la búsqueda de métodos que funcionen para cualquier tipo de ecuación de grado 3 y 4. Soluciones solo positivas o cero.					Completación de cuadrados para solucionar la ecuación grado 2
Idea de estructura: No					
Teorema fundamental del Álgebra: No					

6.2.4. El renacimiento (siglo XV-XVI)

6.2.4.1. Periodo uno: Determinación de las relaciones entre los coeficientes y las raíces para la solución de ecuaciones algebraicas de grado 2, 3 y 4 y el simbolismo algebraico

Un trabajo significativo a finales del siglo XV fue el de Nicolás Chuquet (1445−1488) su principal obra *Triparty en la science des nombres* apareció en forma manuscrita en 1484 y es el primer libro francés sobre álgebra. En este se percibe una clara evidencia italiana y se cree que es posible que Chuquet estuviera familiarizado con el *Liber Abaci* de Fibonacci. La tercera parte de esta obra, está dedicada a problemas de tipo algebraico y Chuquet desarrolla su propia notación; así, $,5^1.\quad ,6^2.\quad y\quad ,10^3.$ representaban $5x\quad 6x^2\quad y\quad 10x^3$ (Dávila, 2003a, p.43).

También escribe $,4^1.$ egaulx a $\bar{m}.\quad 2^0.$ que representa la ecuación $4x = -2$ con esto se cree que Chuquet es el primero en escribir una ecuación algebraica en la cual un término negativo aparece de forma aislada. Este trabajo, no tuvo gran influencia debido a la aparición en 1494 del primer libro impreso de álgebra: “Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportiolanita” del fraile Luca Pacioli (1445−1517) publicado en italiano, lo cual era inusual en ese tiempo. En este trabajo se hace un compendio del conocimiento matemático general de la época y trata sobre aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y teneduría de libros (Dávila, 2003a, p.43).

Tabla 6.3: Significado dado al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas y al inicio de la edad media

PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa-Fibonacci (1175-1240)	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998)	
	Hindúes: Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	Civilizaciones antiguas: Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

Respecto al álgebra, en su obra "Summa" se presentan métodos de solución para las ecuaciones lineales y cuadráticas que eran bien conocidos. Para la ecuación cúbica intervienen: a) Número, cosa e cubo (n, x, x^3); b) Número, censo e cubo (n, x^2, x^3) y c) Número, cubo e censo de censo (n, x^3, x^4); Paciolo comenta en su obra que *no ha sido posible hasta ahora formar reglas generales* para resolverlas. Paciolo, fue profesor de varias universidades italianas; amigo de Leonardo da Vinci de quien recibió gran influencia; entre estas universidades se encuentra la de Bolonia donde enseñó de 1501-1502 y conoció a Scipione del Ferro que era profesor de matemáticas allí (Dávila, 2003a).

En los siglos XV y XVI en Italia se formaron los algebristas más importantes de Europa y se habla de la escuela italiana de álgebra. Pero en Alemania, en forma similar, se daban avances en esta disciplina y en 1524 aparece la obra: "Die Coss" de Adam Riese (1492-1559) donde se trabajan problemas algebraicos y en especial problemas del al-jabr de al-Juarismi; otros trabajos alemanes fueron "Coss" que se traduce como la cosa: la incógnita, de Cristoph Rudolff (1499-1545) publicado en 1525 donde se usó por primera vez la notación decimal para fracciones y el símbolo $\surd$ para raíz cuadrada; $v\surd$ para raíz cúbica y $vv\surd$ para raíz cuarta. En esta dirección, Michael Stiefel (1487-1567) publica su obra: "Arithmetica" en 1544, donde trabaja números negativos, radicales y potencias positivas y negativas; su trabajo sirvió para hacer extensivo el uso de los símbolos alemanes + y − que aparecieron impresos en 1489 en un trabajo de Johanes Widman (1462-1498), publicado en Alemania (Dávila, 2003a, p. 44).

6.2.4.2. Periodo uno: La escuela italiana en el renacimiento y la solución de ecuaciones algebraicas

A mediados del siglo XVI se publicaron simultáneamente tres obras que se consideran las aportaciones renacentistas más importantes a la ciencia: De revolutionibus orbium celestium- sobre las revoluciones de las esferas celestes, de Nicolás Copérnico (1473-1543) publicada en 1543; De humanis corporis fabrica-sobre la estructura del cuerpo humano, de Andreas Vesalius (1514-1564) publicada en 1543 y el Artis magnae sive de regulis algebraicis, de Girolamo Cardano (1501-1576) publicada en 1545. Las dos primeras obras cambiaron la idea medieval sobre el universo y el cuerpo humano y el Arte magno, fue un aporte importante para el posterior desarrollo del álgebra moderna donde se daban reglas generales para solucionar ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, similares a las cuadráticas que se trabajaban desde las civilizaciones antiguas (Dávila, 2003a).

Para la ecuación cuadrática las soluciones estaban dadas por una expresión que involucraba expresiones aritméticas elementales de los coeficientes de la ecuación: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. A este proceso se le conoce como resolver la ecuación algebraica por radicales. Para las cúbicas y bicuadráticas, se pretendía el mismo proceso: este problema fue considerado en el mismo nivel que el problema griego de la cuadratura del círculo por Pacioli; se resuelve en forma correcta en la obra de Cardano y al mismo tiempo se genera una controversia por la autoría de los métodos de solución (Dávila, 2003a).

Como se mencionó, Scipione del Ferro (1465-1526) enseñaba matemáticas en la universidad de Bolonia y resolvió un caso especial de la ecuación cúbica: en este tiempo, no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico; por ejemplo, el problema:

El cubo y la cosa igual a un número.

Se representa por la ecuación:

$$x^3 + px = q$$

Donde, p, q eran enteros positivos y el método de solución se expresaba en forma verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema, en su forma general, había estado sin solución de los tiempos de Arquimedes, quién pudo resolver ecuaciones cúbicas por métodos geométricos (Dávila, 2003a, p. 46). Del Ferro no publicó sus resultados, pero, antes de morir reveló el método a su yerno, Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior, quién de regreso a su tierra Venecia, pretendía formarse como matemático y para ello retó a una contienda matemática a Niccolo Fontana (1499-1557), profesor de matemática: este profesor era conocido como Tartaglia, que significa tartamudo. Cada uno proponía 30 problemas y se estableció la fecha de solución como el 13 de febrero de 1535. Tartaglia advirtió que todos los problemas eran lo mismo, resolver el problema del cubo y la cosa igual a un número. Tartaglia da solución al problema y así, a todos los problemas propuestos por Fior, quién no pudo solucionar los problemas planteados (Dávila, 2003a).

En este tiempo, Cardano preparaba su libro: Practicae Arithmeticae Generalis y se enteró de la competencia entre Fior y Tartaglia y de los resultados de la misma. En 1539 Cardano contacta a Tartaglia para enterarse del método del cubo y la cosa y obtener el permiso para incluirlo en su libro. Obtuvo una respuesta negativa, pero en marzo de 1539 establece contacto con Tartaglia quién le revela el método de solución de la cúbica, en una forma poco clara: en verso y bajo el juramento de no revelarlo. Cardano afirmó en su obra el Ars Magna que Tartaglia se quedó con la demostración por lo que tuvo que darse a la tarea de buscarla por sí mismo (Dávila, 2003a).

En conclusión, a inicios del siglo XVI se dieron cambios importantes con la introducción de una nueva notación que lleva el álgebra poco a poco de lo verbal a lo simbólico y se le da el reconocimiento como ciencia autónoma dentro de las matemáticas, separándola de la Teoría de las ecuaciones algebraicas: esta labor la inicia la escuela inglesa en el siglo XIX al colocar las bases del álgebra moderna actual (Dávila, 2002, p. 9). En este siglo XVI, algunos académicos europeos entre ellos Viète, trataron de rechazar la palabra álgebra argumentando que no tenía un significado en las lenguas europeas y se propuso el nombre de análisis y logística, para nombrar el de Arte mayor: por esta razón, durante mucho tiempo, todo lo que no era geometría se le llamaba análisis, pero con los desarrollos que se dieron en Inglaterra, en el siglo XIX que dieron forma al álgebra simbólica, la palabra álgebra se uso para nombrar esta rama autónoma dentro de las matemáticas (Dávila, 2002).

Otra aportación del Ars Magna de Cardano, corresponde al método para resolver la ecuación de grado cuarto o bicuadrática y el crédito de su solución lo da Cardano a Ludovico Ferrari quién inicia sirviendo en la casa de Cardano; a los 14 años aprende bien la matemática y llega a ser un brillante matemático: descubre métodos de solución para las ecuaciones de grado cuarto. El Ars Magna, marca un punto en la historia del desarrollo del álgebra donde se muestra un gran cambio entre el al-jabr de al-Juarismi y el Ars Magna de Cardano. El tener métodos de solución para las ecuaciones de grado tres y cuatro por medio de radicales fue un paso significativo para las matemáticas en general, además se establecieron las bases para el surgimiento del álgebra moderna (Dávila, 2003a, p.53).

El álgebra del siglo XVI estuvo conectada con la geometría y por consiguiente las demostración de la solución de una ecuación algebraica requerían una demostración geométrica como se presenta en los trabajos de al-Juarismi y Cardano. Se pensaba la incógnita como la longitud de un segmento de recta; el cuadrado de la incógnita como el área del cuadrado y su cubo como el volumen del cubo formado y desde este punto de vista los números negativos y las potencias más grandes eran imposibles de considerar; así el álgebra era un conjunto de reglas que se usaban para solucionar ecuaciones particulares (Dávila, 2003a).

A finales, de este siglo XVI se da un avance importante y el álgebra se convierte en una herramienta a la cual se le provee de un simbolismo; se introduce la notación exponencial y lo que se escribía como A cubus o AAA se reemplazó por A^3 además, se introducen los símbolos + , −, =, este último por Robert Recorde (Dávila, 2003a).

6.2.4.3. Período uno: El surgimiento del álgebra abstracta

François Viète (1540-1603), conocido en los textos españoles como, Francisco Vieta, fue un matemático francés; hijo de un procurador, estudio derecho en Poitiers; en 1560, se convierte en abogado en Fontenay-le-Comte: se le confían importantes asuntos, en particular la liquidación de las tierras en la región de Poitou de la viuda de Francisco I y los intereses de María Estuardo, reina de Escocia. En 1571, pasa a ser abogado en el Parlamento de París y es nombrado consejero en el Parlamento de Rennes en 1573: en 1576, entra al servicio del rey Enrique III de Francia, quien le encomienda una misión especial; en 1580, pasa al servicio exclusivo del rey en el Parlamento de París, luego de la muerte de Enrique III, pasa a formar parte del consejo privado de Enrique IV y partir de 1594, se encarga exclusivamente de descifrar los códigos secretos enemigos.

Viéte, fue un conocedor de Diofanto y Cardano y establece las reglas para la extracción de raíces; también da a la trigonometría su forma definitiva en Canon mathematicus (1570). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra, puesto que se dedicó al estudio de los fundamentos del álgebra, con la publicación, en 1591, de *In artem analyticam isagoge,* en el cual introduce un sistema de notación que hace uso de letras en las fórmulas algebraicas. Finalmente, se ocupó de diversas cuestiones geométricas, como la trigonometría plana y esférica (Dávila, 2003a).

Este abogado francés aficionado a las matemática, inicia con el uso de vocales para representar variables y consonantes para representar constantes. Esto permitió a los matemáticos representar las ecuaciones cuadráticas como $A^2 + BA = C$ y lleva a la discusión de técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. Es Viète quien interpreta la cúbica general como una ecuación en la que todos los casos que consideraba Cardano eran casos particulares. Además, Viète da un método de solución que se puede aplicar a todos los casos (Dávila, 2003a).

Viéte, describe su obra *In Artem Analyticam Isagoge* como el texto del análisis matemático restaurado. Esta obra, traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita se considera un paso previo a la matemática moderna. Una de las consecuencias más importantes tras la publicación del *Ars magna* de Cardano, fue que la solución de la ecuación cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número.

También, Ludovico Ferrari (1522-1565) contribuye a la solución de la ecuación de grado cuarto, apoyado en su maestro Jerónimo Cardano: Lodovico fue un matemático italiano, que nació en Bolonia, Italia, el 2 de febrero de 1522 y murió en la misma ciudad envenenado de trióxido de arsénico por su hermana el 5 de octubre de 1565. Fue un estudioso de las matemáticas y en unión de otros colaboradores, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia. Se dedicó principalmente al estudio del álgebra, llegando al descubrimiento de la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado (ver, sección 6.3.13). Dio también la demostración de la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado (Dávila, 2003a).

6.2.4.4. Periodo uno: El simbolismo algebraico

La contribución de Francisco Viète (1540-1603) fue muy importante ya que fue el primero en introducir una notación más adecuada para el análisis algebraico y además por proveer al álgebra de un nuevo enfoque: del "simbolismo" para denotar entidades algebraicas; una inclinación hacia el análisis como el método del álgebra y una negación de la geometría como su fundamento: este método que llamó: logística simbólica lo introduce en su arte analítico y emplea símbolos o signos para las cosas, como, digamos, las letras del alfabeto (Viète, 1983). Este método le permite representar por medio de las letras del alfabeto las variables, e incluso los coeficientes de la ecuación, esto trae la ventaja de hacer visibles las operaciones en la solución de la ecuación para dar el paso hacia la generalización de los diferentes métodos que se tenían para solucionar las ecuaciones algebraicas: lo cual abre el camino que le permite al álgebra consolidarse en los dos siglos siguientes como una rama independiente de las matemáticas (Dávila, 2003b, p.38).

Una falla de Viète, fue el no considerar números negativos ni los imaginarios como solución de ecuaciones, por lo que en este aspecto no igualó a Cardano, que trabajaba las cantidades negativas como raíces de ecuaciones a las que llamaba *soluciones falsas* y las identificaba con débitos y a los números imaginarios con entidades *verdaderamente sofisticadas*. Este simbolismo de Vieta, no estaba completamente desarrollado ya que fue una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico, pero sentó las bases de la *teoría moderna de ecuaciones*: él consideró ecuaciones generales y no casos particulares como Cardano y sus antecesores. Cardano ya había entendido la estrecha relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces, pero con el nuevo simbolismo quedaba clara esta relación para los matemáticos. Por tanto, Vieta, fue un analista (algebrista) que con su simbolismo pudo encontrar resultados para ecuaciones algebraicas generales y aplicarlos a casos particulares (Dávila, 2003b).

En Inglaterra, las ideas de Viète, tuvieron gran impacto en los académicos Thomas Harriot (1560-1621) y William Oughtred (1574-1660), precursores de una escuela inglesa que favorece el estilo simbólico y establece las bases para el desarrollo del álgebra simbólica en la isla. La producción de Harriot se calcula entre siete mil y ocho mil páginas, pero su trabajo se conoció poco ya que nunca publicó sus investigaciones y en su testamento dio instrucciones para que solo su amigo y discípulo Nathaniel Torpoley, dispusiera de sus escritos y los publicara: quién no pudo completar la compilación de estos escritos y 10 años después de la muerte de Harriot fue Walter Warnes otro discípulo, el que edita y publica parte de los manuscritos algebraicos en 1631 con el título de *Artis Analyticae Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas - Práctica del arte analítico para la resolución de ecuaciones algebraicas*, en el cual Harriot introduce una notación que va más allá de la propuesta por Viète (Dávila, 2003b, p. 39).

En esta dirección, William Outhtred, es un matemático inglés influenciado por las ideas de Viète y se dió a la tarea de difundir las ideas del francés en Inglaterra, trabajando el simbolismo de Viète y su Arte Analítico. Outhtred enseñaba los métodos del arte analítico, con muchos discípulos que hicieron grandes contribuciones en el siglo XVII, entre ellos John Wallis, Chistoper Wren y Richard Delamain. En 1631, año de la publicación de la *Praxis* de Harriot también se publicó el trabajo de Oughtred *Clavis Mathematicae* que influyó en los matemáticos de su tiempo y es considerada como una de las publicaciones matemáticas más influyentes en la historia de las matemáticas de Gran Bretaña. Se consideró como un libro de texto en el cual "...su autor no hacía concesiones a estudiantes débiles"; la Clave, cubría tópicos de aritmética, álgebra y geometría; en él se introducían símbolos inventados por Oughtred de los cuales sobreviven × para la multiplicación y :: para las proporciones (Dávila, 2003b, p. 41).

En la Clave, el autor se centra en la parte de álgebra, en el ánálisis algebraico de ecuaciones cuadráticas y solo se abordan cuestiones que Oughtred consideraba adecuadas para estudiantes que iniciaban su entrenamiento en métodos de ánalisis tales como: la solución general de la ecuación de grado dos con raíces positivas, reglas para simplificar ecuaciones y ejemplos de aplicación del arte analítico. Para la escritura de las ecuaciones, el estilo era similar al usado por Viète y no tan desarrollado como el de Harriot, así para A quadratum, A cubus, A quadrato-quadratum utiliza Aq,Ac, Aqq, al igual que Vieta, acepta los números negativos como coeficientes de las ecuaciones algebraicas pero no su uso como raíces negativas de ecuaciones y tampoco acepta las raíces complejas. Pero, el éxito de su texto se encuentra en la difusión que logró del estilo simbólico, logrando una aceptación por parte de los matemáticos ingleses (Dávila, 2003b, p. 41).

La notación algebraica que se usa en la actualidad se debe en gran parte, a René Descartes (1596-1650) que en su obra: "La Géométrie", en uno de los tres apéndices, ejemplifica su método: ...para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias... que expone en su tratado: Discours de la Méthode, publicado en 1637. En su obra, se formaliza la teoría de ecuaciones y se establecen muchos símbolos y terminología del álgebra actual. Este trabajo influyó en el álgebra, ya que con el método de Descartes las curvas podían ser estudiadas a través de las ecuaciones y las ecuaciones a través de las curvas: para Descartes:

...cualquier problema en geometría puede ser reducido fácilmente a tales términos que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción (Dávila, 2003b, p. 42).

Al denotar las líneas por medio de símbolos algebraicos y realizar operaciones geométricas que involucraban construcciones con regla y compás que correspondían a las cinco operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, inicia un camino en el cual el álgebra jugaba un papel importante al introducir una nueva notación: por a^2, b^3 y expresiones similares, yo ordinariamente hago referencia a simples líneas, a las cuales, sin embargo, llamó cuadrados, cubos... de tal manera que pueda hacer uso de los términos empleados en el álgebra...(citado en Dávila, 2003b, p. 42). Además, usa las primeras letras en este nuevo simbolismo algebraico para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras para denotar las incógnitas; también se dispone de una notación más compacta: $x, x^2, x^3, etc.$ y define los conceptos de ecuación y raíz de una ecuación, aceptados casi de inmediato por los matemáticos de su tiempo.

Para Descartes, era claro que si a es raíz de una ecuación polinomial, $x - a$ era un factor de la ecuación; además establece la *regla de los signos* para estimar el máximo número de raíces reales de una ecuación de acuerdo a los cambios de signo de los coeficientes de ésta, hecho que ilustra con varios ejemplos. Pero, Descartes va más allá, al afirmar que: toda ecuación puede tener tantas raíces distintas como el número de la dimensión de la incógnita de la ecuación (Dávila, 2003b, p. 43) lo que constituye una primera aproximación al "Teorema fundamental del álgebra (Dávila, 2003b).

Descartes aceptaba y trabajaba con raíces negativas a las que llamaba "falsas" y también trabajaba las raíces complejas; en el Libro III de La Géométrie, hace una afirmación que se acerca mucho al Teorema Fundamental del Álgebra: Un polinomio de grado n tiene n raíces, sean estas positivas, falsas reales o complejas. Así, para Descartes las raíces que no correspondían a cantidades eran solo producto de la imaginación y las llamó "imaginarias". Este reconocimiento de las raíces imaginarias, va más allá de lo aceptado por sus colegas matemáticos legitimando su uso (Dávila, 2003b, p. 43).

En esta dirección, Fermat (1601-1665), es otro matemático francés, a quien se le atribuye la invención de la *Geometría Analítica* casi simultáneamente que Descartes y de forma independiente. A Fermat, se le debe el uso de las *coordenadas cartesianas* que introduce en la exposición de su método de geometría analítica y que desarrolla en su escrito *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge - Introducción a los lugares [geométricos] planos y sólidos,* escrito en 1643 . Mucho del material expuesto por Fermat era familiar para él desde 1629 y para 1636 ya había descubierto el principio fundamental de la geometría analítica y en sus palabras: "siempre que en una ecuación final estén presentes dos cantidades desconocidas, tenemos un lugar geométrico, uno de cuyos extremos describe una línea recta o curva" (Dávila, 2003b, p. 44). Pero, hasta después de su muerte se publicaron, por primera vez muchas de sus investigaciones en su: Varia Opera, que salió en 1679.

En la introducción de su obra, Fermat sigue la notación de Vieta y por ejemplo la ecuación del círculo la escribe como $Bq. + Aq. = Eq.$ con A, B incógnitas, E una constante y q por quadratum. También, clasifica las secciones cónicas de acuerdo con su ecuación y muestra que toda ecuación cuadrática en dos incógnitas representa una línea recta, o una cónica. Fermat, es el fundador de la teoría moderna de números, donde presentó una gran cantidad de resultados, pero sin dar demostración a muchos de sus teoremas, los cuales se ha probado que en su mayoría son correctos (Dávila, 2003b).

En Inglaterra un discípulo de Outhtred, John Wallis (1616-1703) llegó a ser reconocido como uno de los mejores matemáticos del continente. En 1648 estudió a Descartes y se replanteó el trabajo de este con respecto a la ecuación bicuadrática, dándole un nuevo enfoque al factorizarla por medio de dos ecuaciones cuadráticas; en el año 1656 publicó su libro: Operum Mathematicorum Pars Altera-Obra matemática selecta que consta de dos partes, una de ellas: El Tractatus de Sectionibus Conicis-Tratado de secciones cónicas; que es el primer texto sobre cónicas desde un punto de vista Cartesiano; también estudió las curvas planas, como la parábola cúbica $a^2y = x^3$ y la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ que juegan un papel importante en el desarrollo del cálculo infinitesimal. En su texto *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical* publicado en 1685, acusa a Descartes de haber tomado gran parte del trabajo de Harriot y trata de hacer ver que el álgebra simbólica de Viète ya estaba presente en la matemática griega (Dávila, 2003b).

En la tabla 6.4 y 6.5 se presentan los aportes más relevantes en la evolución del concepto Grupo, en la edad media (V-XV).

Tabla 6.4: Período uno: Edad Media

Significado Algebraico						Luca Pacioli (1445-1517) Italiano
Objeto de estudio: No son las ecuaciones. Obra: Suma de arithmetica, geometrica, proportioni et proportiolaniti: tratado de aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y teneduría de libros.						
Notación simbólica: No; para la cúbica intervienen número, cosa, cubo, censo.						
Tipo de ecuación: 1,2 y 3 grado.						
Elementos del conjunto: No son las raíces de la ecuaciones; problemas algebraicos específicos y cotidianos.						
Método de solución: métodos de solución para las ecuaciones de grado 1, 2 y 3. No ha sido posible formar reglas generales para la solución de las ecuaciones.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						

Significado Algebraico						Adam Ries (1492-1559) Alemán
Objeto de estudio: No son las ecuaciones. Obra: Die Coss: tratado de álgebra nunca se publicó.						
Notación simbólica: No; para la cúbica intervienen número, cosa, cubo, censo.						
Tipo de ecuación: 1,2 y 3 grado.						
Elementos del conjunto: No son las raíces de la ecuaciones; problemas algebraicos y en especial del Al-jbr.						
Método de solución:						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						

Significado Algebraico						Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán
Objeto de estudio: No son las ecuaciones. Obra: Coss: que se traduce como la cosa=incógnita.						
Notación simbólica: No; introduce los signos $\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}$, definición de $x^0 = 1$.						
Tipo de ecuación: 1,2 y 3 grado.						
Elementos del conjunto: No son las raíces de la ecuaciones.						
Método de solución:						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						

Significado Algebraico y Geométrico						Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano
Objeto de estudio: No son las ecuaciones.						
Notación simbólica: No; álgebra de tipo retórica.						
Tipo de ecuación: 1,2 y 3 grado; $x^3 + px = q$ (cubo, cosa y número).						
Elementos del conjunto: No son las raíces de la ecuaciones.						
Método de solución: geométrico.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						
Significado Algebraico: Conjuntos de permutaciones						Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano
Objeto de estudio: las ecuaciones; las raíces de las ecuaciones, los Conjuntos de Permutaciones. Obra: Arithmetica Universalis.						
Notación simbólica: No; introduce los signos $\sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}$, definición de $x^0 = 1$. Considera los números negativos como soluciones de las ecuaciones, las llama soluciones falsas y los imaginarios.						
Tipo de ecuación: 1,2, 3 y 4 grado, considera casos particulares. Comprende la relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces (grado 3).						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, permutaciones de las raíces.						

Método de solución: regla para la solución de las ecuaciones de grado 3 y 4 que lleva su nombre y por el método de radicales. Evidencia que no es importante conocer las raíces de una ecuación sino suponer su existencia, para la ecuación de grado 3. Trabaja la relación entre los polinomios simétricos y los coeficientes de la ecuación algebraica de grado 2,3 y 4. No acepta los números negativos ni los complejos; pero opera con ellos.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						
Significado Algebraico: Conjunto de Permutaciones						Francois Viéte (1540-1603) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones; los conjuntos de permutaciones.						
Notación simbólica: simbolismo algebraico: primero en introducir una notación más adecuada para el análisis algebraico. Emplea símbolos o signos: representa con letras las variables y los coeficientes de la ecuación. El simbolismo no estaba completamente desarrollado; sentó las bases de la teoría moderna de ecuaciones algebraicas. Comprende la relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces que queda clara con el nuevo simbolismo.						
Tipo de ecuación: Grado 1,2 ,3 y 4: considera la solución de ecuaciones generales y las aplica a casos particulares.						
Elementos del conjunto: raíces de la ecuaciones, conjuntos de permutaciones de las raíces. No considera los números negativos ni los imaginarios como solución de ecuaciones.						

Método de solución: el arte analítico; negación de la geometría como el fundamento del álgebra.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No Enuncia un teorema sobre la suma de potencias de las raíces de la ecuación polinomial.						
Significado Algebraico-Geométrico						René Descartes (1596-1650) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones						
Notación simbólica:en su obra: La Géométrie, formaliza la teoría de las ecuaciones y establece muchos símbolos y terminología del álgebra actual. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, los conjuntos de permutaciones de las raíces. Acepta y trabaja raíces negativas a las que llamaba falsas y también raíces complejas						
Método de solución: Propuso el método cartesiano con el cual las curvas podían ser estudiadas a través de las ecuaciones y viceversa. Para las ecuaciones de grado 4. establece que hay 4 soluciones; ni más ni memos.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No Tenía claro que si a es raíz de un polinomio $x-a$ es un factor de la ecuación. Va más allá en afirmar que: toda ecuación puede tener tantas raíces reales distintas como el número de la dimensión de la incógnita de la ecuación. Primera aproximación al TFA: un polinomio de grado n tiene n raíces, sean éstas positivas, falsas, reales o complejas.						

Tabla 6.5: Período uno: Edad Moderna

Significado Algebraico-Geométrico						Albert Girard (1595-1632) Francés
Objeto de estudio:las ecuaciones algebraicas.						
Notación simbólica: Obra: Invention Nouvelle, en la parte de Álgebra trata el tema de la *relación entre los coeficientes de una ecuación y las funciones simétricas de sus raíces.* Introduce numerosos símbolos matemáticos. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones.						
Método de solución: Para las ecuaciones de grado 4, establece que hay 4 soluciones; ni más ni memos. Descartes ya había presentado este teorema en su obra con algunos ejemplos. Demostró la existencia de raíces imaginarias.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						

6.2.5. Edad moderna (finales del siglo XVII-XVIII)

6.2.5.1. Periodo uno: Newton (1643-1727) y los polinomios simétricos

Isaac Newton (1642-1727) fue un matemático británico a quién se le considera como a uno de los más grandes científicos de la humanidad. Uno de los trabajos más conocidos corresponde a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica-Principios matemáticos de la filosofía natural,* publicado en 1687 donde establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de la gravitación universal sobre bases geométricas; también hace contribuciones en óptica y se le considera como un físico-matemático; con grandes contribuciones al desarrollo del álgebra. En el período de 1664 a 1667 produce sus más revolucionaria ideas; había aprendido el estilo de razonamiento lógico de Aristóteles en su complicado sistema filosófico (Dávila, 2003b).

Newton había leído a Euclides, pero sus conocimientos en geometría no eran suficientemente sólidos y su interés por la astrología lo llevaría a estudiar la trigonometría en 1663 al no entender varias de las demostraciones, por falta de bases geométricas; por tanto, vuelve al estudio de la geometría euclidiana, donde al releer el teorema de pitágoras, cambia de opinión ya que las demostraciones le parecían muy sencillas y vuelve a leer a Euclides; después lee la *Clave* de Oughtred con dificultades para entenderlo. Cambia de lectura a la Geometría, de Descartes en la edición latina realizada por Frans Schooten publicada en

1649; esta es una edición ampliamente comentada y con explicaciones muy valiosas sobre el trabajo de Descartes. Luego de varias lecturas, comprende a Descartes mejor que a Euclides. Continúa con la lectura de la Arithmetica Infinitorum de Wallis; *Euclides Elementorum* de Isaac Barrow, quien también fue su maestro y finalmente con: *La opera Mathematica*, de Viète (Dávila, 2003b).

Con la lectura de la Arithmetica, de Wallis, descubre su famoso teorema del Binomio de Newton, el cual ya se conocía desde mucho antes para exponentes enteros no negativos; lo generaliza para exponentes fraccionarios y negativos y lo publica por primera vez en el Tratado de Álgebra, de Wallis, con el debido crédito a su descubridor. Newton, no dio una prueba rigurosa del teorema, sino que llegó a su formulación después de sus investigaciones en cálculo de áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^2$. En el texto: la Arithmetica ya había estudiado cómo calcular estas áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ donde n era un entero positivo par. Este resultado fue importante ya que con el llega a la formulación del cálculo diferencial e integral. (Dávila, 2003b, p. 46).

El trabajo con "polinomios simétricos" es otro de los resultados importantes de Newton: estos polinomios corresponden a aquellos polinomios donde al cambiar el orden de las variables en la ecuación polinomial no cambia su forma. Los polinomios simétricos elementales, para la ecuación de grado dos, en el caso de dos variables corresponden a:

$$\sigma_1(u,v) = u+v$$
$$\sigma_2(u,v) = uv$$

Y para la ecuación de grado dos $x^2+ax+b=0$ con a,b con números complejos, se tiene que:

$$x^2+ax+b=(x-u)(x-v)=x^2-(u+v)+uv$$

De donde, encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos elementales en sus raíces, así:

$$u+v=-a$$
$$uv=b$$

En forma similar, para la ecuación cúbica se tiene:

Sea $x^3+ax^2+bx+c=0$ con coeficientes a,b,c complejos y con raíces u,v,w entonces, los polinomios simétricos elementales corresponden a:

$x^3+ax^2+bx+c=(x-u)(x-v)(x-w)=x^3-(u+v+w)+(uv+uw+vw)-uvw$
Entonces,

$$u+v+w=-a=\sigma_1(u,v,w)$$
$$uv+uw+vw=b=\sigma_2(u,v,w)$$
$$uvw=-c=\sigma_3(u,v,w)$$

Que corresponden a las relaciones de los coeficientes de la cúbica y polinomios simétricos elementales $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ en las raíces u,v,w. Así, evidencia que no es importante conocer las raíces, sino suponer su existencia. Cardano, ya había entendido esta relación al menos para la cúbica y con el nuevo esquema de Viète estas relaciones fueron más evidentes y él observó que esta era una regla que se cumple siempre para las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que cinco (Dávila, 2003b).

En 1707, Newton publica el libro: Arithmetica Universalis, cuando tenía gran fama y había cesado en parte su actividad científica, con resultados que habían sido descubiertos tiempo atrás; entre estos resultados, enuncia un teorema sobre la suma de potencias de las raíces de la ecuación polinomial de la forma $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$, el cual viene a ser muy importante en los desarrollos siguientes del álgebra (Dávila, 2003b).

Para el caso de la cúbica, deduce las siguientes relaciones:

$$u+v+w=-a$$
$$u^2+v^2+w^2=a^2-2b$$
$$u^3+v^3+w^3=-a^3+3ab-3c$$

Además, da muchas fórmulas para diferentes combinaciones de potencias de las raíces para la cúbica y para ecuaciones de grado 8 y fue consciente de la existencia de fórmulas análogas para ecuaciones de cualquier grado, es decir, que cualquier polinomio simétrico en las raíces de la ecuación se podía expresar en términos de los coeficientes de la ecuación. Este resultado fue la piedra angular en el que se basaron los trabajos siguientes en la teoría de ecuaciones algebraicas, los cuales culminan la Teoría de Galois (Dávila, 2003b).

Continuando con el desarrollo del álgebra, otro de los matemáticos que hace aportes al desarrollo del álgebra es Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), coinventor del cálculo diferencial e integral de manera independiente a Newton, con aportaciones importantes en álgebra aunque poco conocidas: generalizó el teorema del binomio a expresiones multinomiales tales como $(a+b+c)^n,(a+b+c+d)^n$ y es el primero en introducir la noción de determinante al trabajar con sistemas de ecuaciones. Otra aportación la hace en los números complejos, cuyo estudio había sido relegado en ese tiempo. Leibniz probó en 1676 que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ y en 1702:

$$x^4+a^4=(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

Estos descubrimientos hicieron que Leibniz se sintiera impresionado por el potencial de los números complejos aunque no exploró la posibilidad de darles una representación geométrica y les dio un estatus que estaba a medio camino entre la existencia y la no existencia (Dávila, 2003b, p.48).

Como conclusión, en los siglos XVI y XVII surge una nueva álgebra que influye en el desarrollo del cálculo diferencial e integral y además con sus métodos, su simbolismo y su relación con la geometría conformaron una parte fundamental para los grandes progresos matemáticos que se dieron en los siglos XVIII y XIX. Esta álgebra tuvo sus fuentes en el *Ars Magna* de Cardano y en el *Artem Analyticem* de Viète y se caracterizó por nuevos resultados, los objetos con los que se trabajaba, su justificación metodológica y una relación distinta con la geometría, ya que deja de depender de ésta para la confirmación de sus resultados.

Newton, realiza en Matemáticas muchos aportes, entre ellos también se encuentran: las identidades de Newton, conocidas como las fórmulas de Newton-Girard, que son dos formas diferentes para describir la raíz de un polinomio. Estas fórmulas relacionan las sumas de potencias con los polinomios simétricos elementales. Las identidades fueron encontradas por Isaac Newton alrededor de 1666, aparentemente ignorando el trabajo anterior de Albert Girard(1595-1632); antes de Cardano ya se conocían algunos de los resultados que relacionaban las raíces de un polinomio con sus coeficientes: pero es Cardano quien presenta desarrollos concretos en diversos casos de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Cardano mostró que para la ecuación de tercer grado $x^3+ax^2+bx+c=0$ la suma de las raíces:

$$\begin{gathered} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b \\ x_1x_2x_3=-c \end{gathered}$$

Cardano no aceptaba los números negativos y por tanto, los complejos, pero al encontrar raíces de ese tipo operaba con ellas para comprobar los anteriores resultados, así, que estos eran considerados como raíces de la ecuación (Chavarría, 2014, p.76). En cuanto a las propiedades existentes entre las raíces del polinomio y sus coeficientes en forma generalizada y no como el caso particular de Cardano, es Vieta quién muestra de manera simbólica esas propiedades (Chavarría, 2014).

Aparecen entonces, los polinomios simétricos, que se caracterizan por ser invariantes bajo cualquier permutación, esto es, un polinomio simétrico de grado n es un polinomio tal que al intercambiar alguna de las variables sigue siendo el mismo; estos polinomios relacionan las raíces y los coeficientes del polinomio. Para un polinomio de grado n se definen como polinomios simétricos elementales los siguientes:

$$\prod_1(x_1,...,x_n) = \sum_{1\leq 1\leq n} x_i$$
$$\prod_2(x_1,...,x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$
$$\prod_3(x_1,...,x_n) = \sum_{1\leq i<j<k\leq n} x_i x_j x_k$$
$$\prod_4(x_1,...,x_n) = \sum_{1\leq i<j<k<l\leq n} x_i x_j x_k x_l$$
$$\vdots$$
$$\prod_n(x_1,...,x_n) = \prod_{1\leq i\leq n} x_i$$

En (6.1) se muestra la relación entre las raíces y los coeficientes del polinomio, utilizando estos polinomios simétricos.

6.2.5.2. Periodo uno: Fórmulas de Girard-Newton

Para las raíces del polinomio también se definieron las sumas de las potencias de las ráices del polinomio:

$$S_p(x_1,...,x_n) = \sum_{k=1} x_k^p$$

Y las relaciones entre estas S_p y los polinomios simétricos $\prod_n$ estan dadas por lo que se conoce como las fórmulas de Newton-Girard, que se generalizan:

$$(-1)^m \prod_m(x_1,...,x_n) + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+m} S_k(x_1,...,x_n)\prod_{m-k}(x_1,...,x_n) = 0$$

Para cada $1 \leq m \leq n$ y para un número arbitrario de variables n. Las cinco primeras identidades corresponden a:

$$S_1 - \prod_1 = 0$$
$$S_2 - S_1\prod_1 + 2\prod_2 = 0$$
$$S_3 - S_2\prod_1 + S_1\prod_2 - 3\prod_3 = 0$$
$$S_4 - S_3\prod_1 + S_2\prod_2 - S_1\prod_3 + 4\prod_4 = 0$$

Estos desarrollos se conocen como las fórmulas de Newton para el polinomio de grado n, $\quad p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ a las relaciones:

$$0 = a_1 + S_1a_0$$

$$\begin{aligned}
&0 = 2a_2 + S_1a_1 + S_2a_0\\
&0 = 3a_3 + S_1a_2 + S_2a_1 + S_3a_3\\
&\vdots\\
&0 = na_n + S_1a_{n-1} + ... + S_na_0\\
&\vdots\\
&0 = a_nS_i + ... + S_{n+i}a_0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En la obra: *Arithmetica Universalis*, de Newton de 1707, aparece el teorema:

Cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se puede expresar en términos de los coeficientes de la ecuación (Chavarría, 2014, p.78).

En este teorema se basaron las demostraciones sobre la imposibilidad de resolver por medio de radicales las ecuaciones de grado mayor que cinco. Además del teorema, Newton conocía el procedimiento para representar los polinomios simétricos, pero, Lagrange es el primero en darse cuenta sobre las simetrías que resultaban al permutar las raíces de una ecuación (Chavarría, 2014).

6.2.5.3. Periodo uno: El teorema fundamental del álgebra

Continuando con los desarrollo del álgebra, Albert Girard (1595-1632) es otro matemáticos francés, a quien se le reconoce como el primero en establecer en forma explícita que una ecuación polinomial de grado n debe tener n raíces. En 1629 en su tratado de álgebra: Invention Nouvelle en l'Algebra, trata ampliamente el tema de la relación entre los coeficientes de una ecuación y las funciones (polinomios) simétricas de sus raíces y presenta algunos ejemplos de ecuaciones de grado cuatro para las cuales establece que hay cuatro soluciones, no más ni menos. Descartes, ya había presentado este teorema en su obra: la Geométrié, con algunos ejemplos para ilustrarlo. También, deja claro que si t es una raíz de una ecuación polinomial, entonces $(x-t)$ es un factor de la misma. Newton y Colin Maclaurin (1698-1746) también dieron versiones parecidas de este teorema que recibiría el nombre del Teorema fundamental del álgebra-TFA (Dávila, 2003b).

D'Alambert (1717-1783) físico matemático francés; hizo el primer intento de demostración del TFA, pero su prueba no fue totalmente correcta, ya que usó el hecho de que una función continua en un conjunto compacto toma un valor mínimo; lo cual se probaría mucho tiempo después; sin embargo, sus ideas fueron de utilidad años más tarde. Por esa fecha, Leonhard Euler (1707-1783) matemático suizo; prueba que todo polinomio real de grado n con $n \leq 6$ tiene exactamente n raíces complejas y que si $a+b\sqrt{-1}$ es una raíz compleja de un polinomio, su conjugada $a-b\sqrt{-1}$ también era raíz del polinomio. En 1749 intenta la prueba general del teorema pero su prueba es incompleta y es Joseph Louis Lagrange (1736-1813) matemático francés, quien en una memoria presentada a la academia de Berlín en 1772, trata de completar la prueba de Euler, con un razonamiento no muy preciso, ya que Lagrange, al igual que Euler y otros matemáticos de la época, operaban libremente las raíces de las ecuaciones como si fueran números ordinarios, sin tener en cuenta que las raíces fueran números complejos (Dávila, 2003b).

Le corresponde a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático Alemán, el mérito de haber sido el primero en dar una prueba convincente, aunque no completamente rigurosa del TFA en su tesis doctoral titulada: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primer o segundo grado, en 1799. En este trabajo hace la crítica a los trabajos de D'Alambert, Euler y Lagrange y aborda el TFA desde una perspectiva distinta, ya que Gauss no calcula las raíces del polinomio real, sino que demuestra su existencia por medio de un método original (ver, sección 6.3.28) (Dávila, 2003b, p.50).

En 1814, Jean Robert Argand (1768-1822) matemático francés; presentó una prueba sencilla del TFA basado en las ideas de D'Alambert y en 1816 Gauss presenta la prueba basado en las ideas de Euler, con una demostración completa y correcta. En ese mismo año, presenta una tercera prueba del teorema desde una perspectiva geométrica, como en su primera demostración y en 1849 Gauss, prueba el TFA en forma general, esto es:

Teorema 6.1. *Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Dávila, 2003b).*

En la terminología moderna este teorema equivale a decir que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado.

Se presenta en la tabla 6.6 los principales aportes de los matemáticos más sobresalientes de la edad moderna (siglo XVI-XVIII) y en la tabla 6.7 los significados dados al objeto Grupo según los desarrollos presentados.

Tabla 6.6: Período uno: Edad Moderna

Significado Algebraico: Aritmética Modular, conjuntos $\mathbb{Z}_n$						Pierre Fermat (1601-1665) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones; aritmética modular: conjuntos $\mathbb{Z}_n$.						
Notación simbólica: se le debe el uso de coordenadas cartesianas que expone en la introducción de su obra de Geometría Analítica. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones; el conjunto de los enteros módulo $n - \mathbb{Z}_n$.						
Método de solución: invención de la geometría analítica simultáneamente con Descartes, pero en forma independiente. Fundador de la teoría moderna de números.						
Idea de estructura: No						
Teorema fundamental del Álgebra: No						

Significado Algebraico-Geométrico						John Wallis (1616-1703) Inglés
Objeto de estudio: las ecuaciones, conjuntos de permutaciones de las raíces. Estudio a Descartes y se replanteó su trabajo respecto a las ecuaciones de grado 4, dando un nuevo enfoque al factorizarla por medio de ecuaciones cuadráticas.						
Notación simbólica: sí. Obra: Tratado de Álgebra. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones.						
Método de solución: Factoriza la ecuación de grado 4 por medio de ecuaciones cuadráticas.						
Idea de estructura: No.						
Teorema fundamental del Álgebra: No.						

Significado Algebraico: conjuntos de Permutaciones						Isaac Newton (1643-1727) Británico
Objeto de estudio: las ecuaciones, permutaciones de las raíces de las ecuaciones.						
Notación simbólica:sí. Obra: Arithmetica Universalis. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones; el conjunto de permutaciones. Evidencia que no es importante conocer las raíces sino suponer su existencia, para las ecuaciones de grado ≤ 5.						
Método de solución: Trabaja con polinomios simétricos. Generaliza el teorema del binomio de Newton a exponentes fraccionarios. Formulación del cálculo integral y diferencial. Encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos, para las ecuaciones de grado 2 y 3. Deduce muchas fórmulas para las diferentes combinaciones de potencias de las raíces de ecuaciones de grado 3 y 8.						
Idea de estructura: No.						
Teorema fundamental del Álgebra: No. Enuncia un teorema sobre la suma de las potencias de las raíces de la ecuación polinomial de grado n. Teorema: Cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación, se puede expresar en término de los coeficientes de la ecuación.						

Significado Algebraico: conjunto de permutaciones						D'Alembert (1717-11783) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones; las funciones continuas.						
Notación simbólica:sí. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones; las funciones continuas.						
Método de solución:						
Idea de estructura: No.						
Teorema fundamental del Álgebra: No. Primer intento por demostrar el TFA, pero su prueba no fue totalmente correcta, al usar el hecho que una función continua en un conjunto compacto toma un valor mínimo (hecho que se demostró mucho tiempo después).						

Significado Algebraico-Geométrico						Leohnard Euler (1707-1783) Suizo
Objeto de estudio: las ecuaciones; las funciones trigonométricas. Aportes al cálculo integral; establece la identidad de Euler.						
Notación simbólica:sí. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones; las funciones trigonométricas, los números complejos.						
Método de solución:cambia los métodos de demostración geométricos, por algebraicos. Reducción de una ecuación de grado 3.						
Idea de estructura: No.						
Teorema fundamental del Álgebra: No. Prueba que todo polinomio real de grado n con $n<6$ tiene exactamente n raíces complejas. Intenta la prueba general del TFA, pero su prueba es incompleta. Prueba que si $a+b\sqrt{-1}$ es una raíz compleja de un polinomio, su conjugada $a-b\sqrt{-1}$ también es raíz del polinomio.						

Significado Algebraico: conjunto de permutaciones.						Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones; las funciones analíticas, permutaciones de las raíces de la ecuación algebraica. Obra: Teoría de las funciones analíticas y resolución de ecuaciones numérica.						
Notación simbólica: sí. Aportes al cálculo diferencial e integral. Determinantes de orden 2 y 3. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones; funciones analíticas; los números complejos, conjuntos de permutaciones de las raíces de la ecuación.						
Método de solución: sí. Métodos particulares utilizando las permutaciones de las raíces de las ecuaciones.						
Idea de estructura: No. Primera vez que se asocian las soluciones de la ecuación polinomial y las permutaciones de sus raíces.						
Teorema fundamental del Álgebra: No. En una memoria presentada a la academia de Berlín, trata de completar la prueba de Euler, con un razonamiento no muy preciso. Es el primero en darse cuenta de las simetrías que resultaban al permutar las raíces de una ecuación.						

Significado Algebraico: conjunto de permutaciones, los conjuntos $\mathbb{Z}_p$.						Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán
Objeto de estudio: las ecuaciones, los grupos abelianos (sin utilizar la terminología de la teoría de Grupos). Obra:						
Notación simbólica:$(\mathbb{Z}_n, +_n)$ Obra: Disquisiciones Aritméticas. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces, los enteros módulo n, con la operación módulo n, el conjunto de los números primos relativos con n y la operación multiplicación módulo n, las clases de equivalencia de las formas cuadráticas binarias, el grupo de las raíces n-ésimas de la unidad.						
Método de solución:demuestra la existencia de las raíces de un polinomio por medio de un método original. Prueba que el conjunto $\mathbb{Z}_p$ de los enteros módulo p es un grupo multiplicativo cíclico. Prueba el pequeño teorema de Fermat que: si a no divide a p entonces $a^{p-1} \cong 1 mod \quad p$. Los grupos anteriores son conmutativos, por eso se llaman Grupos Abelianos.						
Idea de estructura: sí						
Teorema fundamental del Álgebra: Sí Presenta un prueba completa del TFA en forma general (se basó en las ideas de Euler).						

Tabla 6.7: Significados dados al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas, en la edad media y en la edad moderna

PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768-1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto $\mathbb{Z}_p$ Conjunto de permutaciones de las raíces. Conjunto de los enteros y la aritmética módulo n.
PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo n.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones de las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes:Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670) CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO

6.2.6. Edad contemporánea (XIX a la actualidad

6.2.6.1. Período dos: Búsqueda de métodos generales para la solución de la ecuación algebraica de grado n. Demostración de la imposibilidad solucionar por radicales las ecuaciones algebraicas generales de grado $n > 4$

Hacia la segunda mitad del siglo XVIII, uno de los problemas centrales era: encontrar las soluciones de la ecuación general de grado n por el método de radicales, esto es, haciendo operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, con los coeficientes de la ecuación:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{6.1}$$

Los métodos para resolver las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas de los algebrista italianos del siglo XVI se generalizaron en los siglos posteriores; se retomó a Viète, Descartes, Euler y Bézout: por el éxito con el análisis algebraico en la solución de la ecuación (6.1), para los casos $n = 3$ y $n = 4$ así, muchos matemáticos de los siglos XVII y XVIII trataron de encontrar un método de solución para la ecuación general de grado quinto; entre ellos Newton, Leibniz, Tschimhausen, D'Alambert y Euler. Se pensaba que el método debía existir y por esta razón, no se lograron avances significativos sino hasta 1770 con los trabajos de Vandermonde y Lagrange (ver, sección 6.3.24).

En 1770, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) matemático Francés: presenta a la academia de Ciencias de París su trabajo: Mémoire sur la Résolution des Equations, en el cual enunciaba que toda ecuación de la forma:

$$x^p - 1 = 0$$

con p un número primo, es soluble por radicales.

Vandermonde, da un método similar para encontrar las raíces de la bicuadrática e incluso analizó algunos casos de ecuaciones particulares de grado superior; pero su trabajo se publicó en 1774 y sus razonamientos fueron opacados por el trabajo de Lagrange, con la "Teoría de ecuaciones algebraicas"; en 1771, se publica la memoria de Lagrange: *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* por la Academia Prusiana de Ciencias. En este tratado, se analizaban, desde diferentes puntos de vista varios de los métodos para resolver por radicales las ecuaciones de grado tres y cuatro; con base en este análisis, Lagrange presenta un método que resume los anteriores y logra encontrar la característica común de los métodos: los métodos funcionan porque es posible reducir cualquier cúbica o bicuadrática a una ecuación auxiliar cuya grado es menor en uno, que la original; éstas por lo tanto, son las que admiten una solución por radicales (Dávila, 2003b, p. 52).

Con respecto a la ecuación de grado quinto Lagrange escribe: "El problema de resolver [por radicales] las ecuaciones cuyo grado es mayor que el cuarto, es uno de esos problemas que no han sido resueltos, si bien nada prueba la imposibilidad de resolverlos" (Lagrange, 1867, p. 305 citado en Dávila, 2003b).

Más adelante en el texto, Lagrange afirma: "De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado puedan dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado" (Lagrange, 1867, p. 307 citado en Dávila, 2003b. p. 55).

Las palabras de Lagrange expresaban por primera vez, duda sobre la posibilidad de resolver por radicales las ecuaciones polinomiales de grado superior a cuatro (Dávila, 2002, p. 55). Aunque Lagrange no tuvo éxito y a pesar de no obtener resultados concluyentes para las ecuaciones de grado mayor a cuatro, los resultados de su análisis sobre la resolución de ecuaciones algebraicas fueron una parte fundamental en el desarrollo del álgebra moderna, además de la gran influencia que pudo ejercer en la comunidad matemática de finales del siglo XVIII y el siglo XIX. Se afirma que este fue el germen de una de las grandes teorías algebraicas que transformaron profundamente la matemática, la física y la química del siglo XX, como es la Teoría de Grupos y se encuentra en su obra de las "Rèflèxions" (Dávila, 2003b).

Antes de Lagrange, nadie había escrito sobre la posibilidad de la no existencia de métodos generales para resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro. Hay matemáticos que creyeron haber resuelto la ecuación de grado quinto: en el siglo XVII, el algebrista Tschirnhausen (1661-1708) desarrolló un método que se basaba en transformar la ecuación dada en una más simple, proceso en el cual era necesario resolver una ecuación auxiliar. Este método funcionaba bien para las ecuaciones de grado dos, tres y cuatro; pero, después se probó que para la ecuación de grado quinto, la ecuación auxiliar que previamente se debía resolver resultaba de grado sexto. Así que fue necesario esperar hasta el siglo XIX para resolver el problema completamente (Dávila, 2003b, p. 56).

Paolo Ruffini (1765-1822), matemático italiano, discípulo y admirador de Lagrange, fue quien en un trabajo titulado: *Teoría generale delle equazioni*, del año 1799, logra probar usando el método de Lagrange, que para las ecuaciones de grado superior a cuatro es imposible encontrar ecuaciones resolventes de grado menor que cinco (ver, sección 6.3.24). Publicó una segunda memoria sobre el mismo tema en las *Memorie di Matemática e Física della Societá Italiana delle Scienze*, en 1802; posteriormente publicó otro trabajo en 1813 titulado: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*; versión más elaborada sobre sus trabajos anteriores y estudió con gran detalle las permutaciones de las raíces de una ecuación, con lo cual pudo demostrar la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior a cuatro (Dávila, 2003b, p. 56).

El trabajo de Ruffini, fue analizado con escepticismo por los matemáticos de la época: Malfatti, Carnot y Legendre que expresaron sus dudas acerca de la validez de las demostraciones presentadas. La prueba dada por Ruffini, no era del todo concluyente ya que en ella se asumía que si una ecuación es soluble por medio de radicales, entonces las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales involucrados sean funciones racionales de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad (Kline, 1972, p. 605). Este resultado no fue probado y por tal motivo sus conclusiones no fueron definitivas, aunque esto fuera correcto (Dávila, 2003b, p. 56).

Aparece el joven matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802−1829) quien tuvo éxito al demostrar que era imposible resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro (ver, sección 6.3.27). Abel había leído las obras de Euler, Lagrange y Gauss y creyó haber encontrado un método para resolver la ecuación general de quinto grado, pero pronto se dio cuenta de su error por lo que continuó sus investigaciones en el problema: finalmente, en 1824, demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado mayor que cuatro. Publicó sus resultados en un panfleto titulado: *Mémoire sus les équations algébriques*, corriendo él mismo con los gastos de la publicación por su precaria situación económica. Luego, en 1826 publicó una versión más elaborada de su prueba, en el Journal “für die reine und angewandte Mathematik” - Revista de Matemáticas puras y aplicadas de Crelle, con el título de *Démostration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatriéme degré*. Estos dos trabajos, tenían las mismas ideas solo que algunas partes eran mejor explicadas en el segundo artículo y otras simplificadas (Dávila, 2003b, p. 57).

Abel, conocía el trabajo de Ruffini y había expresado sus dudas sobre la validez de la demostración dada, respecto al problema de la no solubilidad de la ecuación general de grado n: “Su memoria es de tal manera complicada que es muy difícil juzgar sobre la justeza de sus razonamientos. Me parece que su razonamiento no es del todo satisfactorio” (Dávila, 2003b, p. 57).

Uno de los mayores logros de Abel, fue probar lo que Ruffini había asumido implícitamente: “Los radicales requeridos para resolver una ecuación siempre se pueden escoger de tal manera que sean funciones racionales de las raíces de la ecuación y de ciertas raíces de la unidad” (Dávila, 2003b, p. 57).

Para probar este teorema hizo uso de otros resultados obtenidos por Lagrange, Ruffini y Cauchy en relación con el número de valores que una función de n variables puede tomar si éstas son permutadas (ver, sección 6.3.27). Así queda resuelto un problema que por más de dos y siglos y medio había resistido los embates de muchos matemáticos destacados. Como consecuencia de este resultado, demostró que era imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n para $n \geq 5$.

En 1829, dos meses antes de su muerte, en extrema pobreza Abel publica otro trabajo en el Journal de Crelle con el título: *Mémoire sur une classe particuliére d'équations resoluble algébraiquement*, el cual trata sobre el problema de la división de la lemniscata, que es la curva en forma de 8 (la división del círculo llevaba a ecuaciones llamadas “ciclotómicas”. En el caso de dividir la lemniscata en arcos de igual longitud se obtenía una familia de ecuaciones algebraicas las cuales prueba que son solubles por radicales; a estas ecuaciones se les llama hoy abelianas. Otras, nociones importantes que Abel introduce en su estudio de la resolución de ecuaciones son: campo y polinomio irreducible, las cuales se convirtieron en nociones centrales del trabajo de Galois (Dávila, 2003b, p. 58).

El trabajo de Abel fue muy importante, pero le faltó dar respuesta a la pregunta: Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales. Se sabía de la imposibilidad de dar métodos generales, que permitieran resolver cualquier tipo de ecuación de grado superior a cuatro (Teorema de Abel); pero, existían familias particulares de ecuaciones de grado mayor que cuatro que eran solubles por radicales. Este hecho había sido demostrado por Karl Frederick Gauss, desde 1801, año en que se publicó su famoso libro: *Disquisitiones Aritmethicae*, el cual fue la fuente de inspiración para muchos matemáticos y fundamental en el desarrollo de la teoría de números y del álgebra (ver, sección 6.3.28) (Dávila, 2003b).

Se presenta la tabla 6.8 los aportes de los matemáticos más sobresalientes de la edad contemporánea y en la tabla 6.9 los significados dados al objeto Grupo en la edad contemporánea (XVII -) y en el período dos de evolución del objeto.

Tabla 6.8: Período dos: Edad Contemporánea

Significado Algebraico						Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones. El conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones.						
Notación simbólica: sí. Obra: Memoire sur la Résolution des Equations En su obra, prueba que toda ecuación de la forma $x^p - 1$ es soluble por radicales. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 , 4 y 5.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, el conjunto de permutaciones de las raíces.						
Método de solución: Da un método para encontrar las raíces de la ecuación de grado 4 y analiza unos casos particulares de las ecuaciones de grado superior. Su trabajo se publicó en 1774, pero fue opacado por los trabajos de Lagrange.						
Idea de estructura: No.						
No solubilidad de la ecuación general de grado n por radicales: No.						

Significado Algebraico						Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones de grado 3, 4 y 5. El conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones.						
Notación simbólica : sí. Obra: Réfléxions sur la Résolution des Equations - 1771. Analiza varios métodos para resolver ecuaciones por radicales. **Tipo de ecuación:** Grado 3, 4 y 5.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, el conjunto de permutaciones de las raíces.						
Método de solución: Presenta un método que resume los métodos anteriores; encuentra la característica común de los métodos: "los métodos funcionan porque es posible reducir cualquier ecuación de grado 3 o 4 a una ecuación auxiliar de grado menor en 1 a la original: éstas son las ecuaciones que admiten solución por radicales.						
Idea de estructura: No.						
Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n : No. Vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado, puedan dar una completa solución a las ecuaciones de grado 5 (1867).						

Significado Algebraico						Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano
Objeto de estudio:las ecuaciones de grado 3, 4 y 5. El conjunto de permutaciones.						
Notación simbólica :sí. Obra: Teoría de las ecuaciones algebraicas. **Tipo de ecuación:** Grado 3,4 y 5.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, el conjunto de permutaciones, funciones racionales de las raíces, raíces de la unidad.						
Método de solución:elabora una demostración de la imposibilidad de la solución general de la ecuación algebraica de grado 5 y superiores. Comete ciertas inexactitudes: asume que si una ecuación es soluble por radicales, entonces las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales involucrados sean funciones racionales de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad. Esto es correcto, pero el resultado no fue probado en ese momento. Descubridor del llamado método de Ruffini que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de este por el binomio $x-a$.						
Idea de estructura: No.						
Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n: sí No prueba el resultado completamente y por tanto, sus conclusiones no fueron definitivas.						

Significado Algebraico: Grupos de Permutaciones						Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones, las permutaciones, los grupos de permutaciones (1815), los valores que puede tomar una función racional-no simétrica en n variables. Abel usa este resultado para probar su famoso teorema. Obra:						
Notación simbólica: S_4, conjunto de todas las permutaciones con cuatro elementos, (1234) introduce la notación de ciclo. Define una permutación, como una función biyectiva. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 y 4.						
Elementos del conjunto: las raíces, conjuntos de permutaciones, funciones biyectivas en un conjunto finito, Grupos de permutaciones.						
Método de solución: particulares. Prueba el teorema: “Toda permutación es producto de 3-ciclos. Teorema sobre el número de valores que una función de n variables puede tomar si éstas son permutadas. Teorema: si un número primo p es divisor del número de elementos de un grupo, entonces el grupo contiene un subgrupo de orden p.						
Idea de estructura: sí.						
Teorema fundamental del Álgebra: sí. **Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n:** No.						

Significado Algebraico: conjuntos de permutaciones.						Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego
Objeto de estudio: las ecuaciones de grado 3, 4 y 5; funciones de las raíces. El conjunto de permutaciones, funciones racionales de las raíces de las ecuaciones algebraicas.						
Notación simbólica: Sí. Introduce en su estudio de la resolución de ecuaciones las nociones de campo y polinomio irreducible. Obra: Démostration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générale qui passent le quatriéme degré. Obra: Mémoire sur une clase particuliére d'équations resoluble algébriquement (1829). **Tipo de ecuación:** Grado 3,4 y 5.						
Elementos del conjunto: las raíces de la ecuaciones, el conjunto de permutaciones, funciones racionales de las raíces, raíces de la unidad. Introduce en su estudio de la resolución de ecuaciones las nociones de campo y polinomio reducible; nociones centrales para el trabajo de Galois.						
Método de solución: demostración de la imposibilidad de la solución general de la ecuación algebraica de grado 5 y superiores. Hace uso de los resultados de Lagrange, Ruffini y Cauchy, para su demostración, en relación al número de valores que una función en n variables puede tomar si éstas son permutadas. Demuestra lo que Ruffini supone: los radicales requeridos para resolver una ecuación siempre se pueden escoger de tal forma que sean funciones racionales de las raíces de la ecuación y de ciertas raíces de la unidad.						

Significado Algebraico: conjuntos de permutaciones.						Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego
Idea de estructura: No.						
Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n: Sí. Demuestra que es imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n para $n \geq 5$. **¿Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales?** (No da respuesta.) Sabía de la imposibilidad de dar métodos generales para resolver cualquier tipo de ecuación de grado superior a 4, pero existían familias particulares de ecuaciones de grado mayor que 4 que eran solubles por radicales (hecho que había sido demostrado por Gauss desde 1801 en sus Disquisitiones Arithmethicae).						

Tabla 6.9: Significados dados al objeto Grupo en la edad contemporánea

PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy(1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).

6.2.6.2. Período tres: Determinación de las familias de ecuaciones algebraicas de grado $n > 4$ solubles por radicales y la Teoría de Galois

Evariste Galois (1811–1832) fue el matemático Francés, que tuvo el mérito de dar respuesta definitiva al problema de la solubilidad de las ecuaciones algebraicas por medio de radicales y creó la teoría algebraica llamada hoy "Teoría de Galois" que corresponde a una de las más grandes creaciones en la historia de la matemática, tanto por las aportaciones a ésta, como por los desarrollos posteriores de la teoría, dando lugar a un área de investigación en las matemáticas contemporáneas (Dávila, 2003b, p. 59).

Su talento matemático empezó a mostrarse cuando aún estaba en la escuela secundaria, ya que en esa época iniciaba con sus importantes descubrimientos. En abril de 1829 publica por primera vez el artículo: Demostration d'un théorème sur les fractions continues périodiques, en los Annales Mathématiques de Gergonne. En este período, el interés de Abel lo había llevado a leer a los grandes matemáticos como Legendre y Lagrange; luego a Gauss y Abel. Sin embargo, su talento no fue apreciado por los examinadores de la más prestigiosa escuela francesa de ciencias de la época, la École Politechnique, ya que se presentó dos veces al examen y fue rechazado; lo cual provocó un sentimiento de frustración y amargura que estaría presentes por el resto de su vida ya que consideró esto como una gran injusticia. Así, ingresa a la École Normale, a prepararse para la enseñanza (Dávila, 2003b, p.60).

En 1829, el 25 de mayo Galois presenta a la Academia de Ciencias de París los primeros resultados de sus investigaciones sobre la solubilidad de las ecuaciones de grado primo por intermediación de Cauchy, quien fue designado para revisar los trabajos; sin embargo, el día de dar su reporte, Cauchy se excusa y pide programar su presentación para otra sesión; en la siguiente sesión, presenta un trabajo suyo y no hace mención al trabajo de Galois. Se tiene la hipótesis de que Cauchy animo a Galois a unificar y extender sus investigaciones y presentar su memoria para el Grand Prix de Matemáticas, cuya convocatoria cerraba el primero de marzo. Así, en Febrero de 1830 Galois presentó una memoria en la cual se analizaban las condiciones para que una ecuación fuera soluble por radicales; esta memoria fue asignada a Fourier en calidad de secretario perpetuo de física y matemáticas de la Academia. Después de varios meses, Galois envía una carta a la Academia quejándose por el negligente trato con su trabajo; la respuesta que obtuvo fue: "...el asunto es muy simple, la memoria se perdió con la muerte de Cauchy, a quien se le había confiado la tarea de examinarla... " También, Fourier muere el 16 de mayo de ese año y no se encontró entre sus papeles por lo que no participó en el concurso (Dávila, 2003b, p. 60).

Galois, publica varios trabajos en el período de abril a junio de 1830 en el prestigioso: Bulletin de sciences mathematiques, physiques et chimiques, dirigido por el Barón de Férussac; estos trabajos correspondían a un resumen de la memoria enviada al Grand Prix, *Analyse d'une mémoire sur la résolution algébrique des équations*, en la cual enunciaba sin demostrar los teoremas principales que aquélla contenía y un artículo titulado: *Notes sur la résolution des équations numériques*; además, un artículo muy importante titulado: Sur la théorie des nombres. Por invitación de Poisson, vuelve a reescribir la memoria presentándola de nuevo a la Academia el 17 de enero de 1831, con el título de: *Mémoire sur les Conditions de Résolubilité des Équations par Radicaux*: los revisores designados fueron Lacroix y Poisson. En julio recibió la respuesta:

Estimado señor Galois:
Su artículo fue enviado al Sr. Poisson para su revisión. El lo ha regresado con su reporte, que ahora citamos:

Hemos hecho todo esfuerzo para entender las demostraciones del Sr. Galois. Su argumento no es lo suficientemente claro no lo suficientemente desarrollado de tal manera que nos permita juzgar su rigor; ni siquiera es posible para nosotros darnos una idea sobre este artículo.
El autor afirma que las proposiciones contenidas en el manuscrito son parte de una teoría general la cual tiene muchas aplicaciones. Con frecuencia, diferentes partes de una teoría se aclaran unas a otras y se pueden entender más fácilmente cuando son tomadas juntas en vez de aisladas. Por lo tanto, deberíamos mejor esperar para formarnos una opinión más definida, hasta que el autor publique una versión más completa de su trabajo.
Por esta razón, le estamos regresando el manuscrito esperando que encuentre útiles las observaciones del Sr. Poisson para su trabajo futuro.

Francois Arago, Secretario de la Academia (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois, vuelve a leer la memoria, durante la noche anterior al duelo haciéndole algunas correcciones y anotaciones: “ha sido uno de los más grandes testamentos científicos en la historia de las matemáticas” (Dávila, 2003b, p. 61). Todas las proposiciones y teoremas enunciados eran correctos. Algunas demostraciones, requerían de ciertos retoques ya que estaban solo esbozadas, al estilo de Galois; sin embargo, resultaba impresionante la claridad y la profundidad de las ideas, así como la seguridad de este, sobre la importancia de sus resultados (Dávila, 2003b, p. 61)(ver, sección 6.3.31).

Entre los aspectos de la memoria se encuentran:

Iniciaba introduciendo algunas ideas para analizar la ecuación polinomial $f(x) = 0$ como que los coeficientes eran cantidades conocidas y podían ser números racionales, irracionales o simplemente letras; que cualquier función de los coeficientes se llama una función racional; que era necesario adjuntar algunas cantidades conocidas como las raíces n de la unidad y además establece que: “llamaremos racional a toda cantidad que se exprese como función racional de los coeficientes de la ecuación y de un cierto número de cantidades adjuntas a la ecuación y arbitrariamente convenidas” (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois, al igual que Abel, tenía claro el concepto de campo como el conjunto a donde pertenecían los coeficientes de la ecuación y además, que al adjuntar otras cantidades al campo, se iban construyendo extensiones del campo base y que éstas extensiones eran campos. Define polinomio reducible, como aquel que se puede factorizar en el campo base, de lo contrario se llama irreducible; una ecuación que es irreducible en el campo original, puede volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad (campo extensión). Otro de los conceptos fundamentales en este trabajo fue el de Grupo de permutaciones. Así, es Galois el primero en usar el término “Grupo” en un sentido técnico, como una colección cerrada de permutaciones bajo la operación de composición: “si uno tiene en el mismo “grupo” las sustituciones S y T uno deberá tener la sustitución ST. ” Estas sustituciones eran permutaciones de las raíces de la ecuación (Dávila, 2003b, p. 62).

Los conceptos anteriores, fueron la base de una teoría general de la cual Galois tenía una idea completamente clara, lo cual se puede constatar con sus escritos; así, en la introducción de su memoria escribe: “me debo conformar con describir de una manera sintetizada los principios generales y una sola aplicación de mi teoría” (Dávila, 2003b, p. 62). La aplicación era la solubilidad de las ecuaciones por radicales; ya que con ésta teoría, las principales propiedades de la ecuación se reflejan en ciertas propiedades del grupo asociado a la ecuación: que hoy se denomina: El grupo de Galois de la ecuación. La existencia del grupo y de sus propiedades fueron probadas por Galois en su memoria (Dávila, 2003b).

La memoria no fue entendida por los matemáticos de la Academia de Ciencias encargados de su revisión; tuvieron que pasar 14 años después de la muerte de Galois para que fuera publicada por Joseph Liouville (1809-1882) matemático Francés, en su Journal de Mathématiques Pures et Apliquées, en el año 1846. Aquí, Liouville hace algunos comentarios y cuenta el gran regocijo que sintió, después de llenar unas cuantas omisiones leves por parte de Galois y al verificar que los resultados propuestos eran totalmente correctos. Otra de los aportes de Galois al álgebra, en su memoria: *Sur la théorie de nombres*, fue el inicio de lo que hoy se llaman los campos de Galois, importantes en el álgebra contemporánea (Dávila, 2003b, p. 63).

Entre los primeros que estudiaron y continuaron los trabajos de Galois se encuentran: Liouville, Charles Hermite, Victor Puiseux y Joseph–Alfred Serret. Este último tomó algunos cursos con Liouville sobre la Teoría de Galois y publicó en 1854 un libro titulado: *Cours d'Algebre Supérieure*, cuya tercera edición de 1866 incluye un capítulo dedicado a exponer esa teoría. Las dos ediciones anteriores no la incluían, debido al anuncio hecho por Liouville de publicar: Las obras de Galois, lo cual no llevó a cabo. Sin embargo, el primero en hacer una exposición completa de esta teoría y presentar en forma detallada todas las demostraciones fue Enrico Betti en 1852. Después de este, Camille Jordan publica en 1870 un tratado que tuvo mucha influencia en el desarrollo posterior de la teoría de Grupos y la Teoría de Galois (Dávila, 2003b).

6.2.6.3. Período tres: Los conjuntos de permutaciones

Una de las aportaciones fundamentales de Lagrange, fue el hecho de que sus métodos mostraran la importancia que tenía el estudio de las permutaciones de las raíces de la ecuación algebraica respecto a sus soluciones. Lagrange consideraba que en este estudio residía la verdadera filosofía de todo el problema (Dávila, 2003b, p. 65). De hecho, según Kleiner (1986): "...era la primera vez que se hacía una asociación entre las soluciones de una ecuación polinomial y las permutaciones de sus raíces..." Este punto de vista de Lagrange era correcto como lo apreció Galois en su trabajo (Dávila, 2003b).

En la misma dirección, el matemático Francés, Augustin–Louis Cauchy (1789-1857) en 1815 realiza grandes aportes a la teoría de los grupos de permutaciones; a él se debe que esta teoría se haya desarrollado de manera autónoma, ya que antes de Cauchy solo se estudiaban las permutaciones en relación a la teoría de ecuaciones. En ese año, Cauchy publicó un importante resultado relacionado con los distintos valores que puede tomar una función racional no-simétrica en n variables. Ruffini había probado que para el caso de una variable el número de valores distintos no podía ser menor que 5, a menos que fuera 2; Cauchy generaliza este resultado para el caso de n variables y Abel usa el resultado para probar su famoso teorema (Dávila, 2003b).

En los años 1844 a 1846 Cauchy continua su producción respecto a los grupos de permutaciones en varios artículos, en los que prueba algunos teoremas importantes de la teoría moderna de grupos. Además, Cauchy introduce una notación que es muy usada para las permutaciones: para el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ define una permutación como una función biyectiva de X en sí mismo. Al conjunto de todas las permutaciones lo denota por S_4 y este conjunto con la operación de composición de funciones viene a ser el grupo denominado grupo de permutaciones de cuatro objetos que tiene $4! = 24$ elementos; Cauchy denota una permutación como:

$$f = \binom{1234}{2341}$$

Y en su notación cíclica como (1234), simbología que se usa hasta la fecha. Entre los resultados más importantes de Cauchy respecto a este grupo de permutaciones se tiene: a) Toda permutación es producto de $3-$ciclos y b) Si un número primo p es divisor del número de elementos de un grupo, entonces el grupo contiene un subgrupo de orden p (ver, sección 6.3.29) (Dávila, 2003b).

Un trabajo que unificó las ideas de Galois (grupos asociados a las ecuaciones) y Cauchy (grupos de permutaciones en sí mismos) fue el trabajo de Camille Jordan (1838-1922). En su libro: Traité des substitutions et des équations algébriques, publicado en 1870, no solo aplica el concepto de grupo a la teoría de ecuaciones, sino también a la geometría algebraica; las funciones trascendentes y la mecánica teórica. Como lo expresa Klein (citado en Dávila, 2003b, p. 66): "En este libro, Jordan deambula por toda la geometría algebraica, la teoría de números y la teoría de funciones; buscando grupos de permutaciones interesantes". Otra opinión, respecto al tratado de Jordan fue la de Waerden: "El trabajo monumental de Jordan de 667 páginas... es una obra maestra de arquitectura matemática. La belleza del edificio eregido por Jordan es admirable" (Dávila, 2003b).

Entre las nociones que introduce Jordan en su tratado, se encuentran: el concepto de homomorfismo, isomorfismo y grupo soluble. También, define el concepto de serie de composición para un grupo (de permutaciones) y prueba parcialmente el famoso teorema de Jordan−Hölder, que establece que: "cualquiera dos series de composición para un grupo son equivalentes; por lo que todo grupo que tenga una serie de composición determina una lista única de grupos simples. Esto hace referencia a grupos de permutaciones que no tienen subgrupos normales no triviales. En este contexto, Jordan prueba que los grupos A_n son simples para $n \geq 5$ (Dávila, 2003b, p. 66).

6.2.6.4. Período tres: Grupos abelianos

Gauss (1777-1855) matemático Alemán, en su obra *Disquisitiones,* inicia el estudio de los *grupos abelianos finitos,* obteniendo muchos resultados pero sin usar la terminología de la teoría de grupos. Los objetos, con los que trataba Gauss y que en la actualidad se dan como ejemplos importantes de grupos son: *el grupo aditivo de los enteros módulo n,* $\mathbb{Z}_n$*; el grupo multiplicativo de enteros que son primos relativos con n, módulo n; el grupo de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias y el grupo de las raíces n−ésimas de la unidad.* Además, prueba que el conjunto $\mathbb{Z}_p^* = \{\bar{1},...,\overline{p-1}\}$ es un grupo multiplicativo cíclico, esto es, que todos sus elementos se generan como potencias de uno solo de ellos y usa argumentos propios de la teoría de grupos, para probar el pequeño teorema de Fermat (ver, sección 6.3.28):

Teorema 6.2. *Si p no divide al entero a, entonces $a^{p-1} \cong 1$ mod p.*

En los grupos mencionados, la operación definida entre los elementos del grupo es conmutativa y por eso se llaman *grupos abelianos.* Muchos de estos grupos provienen de la *teoría de números* y aunque el concepto de grupo estaba implícito en estos desarrollos, no se usó el término *grupo* en este contexto sino hasta el último tercio del siglo XIX.

A continuación, se presenta en la tabla 6.10, los principales aportes de algunos de los matemáticos del periodo tres de la edad contemporánea.

Tabla 6.10: Período tres: Edad contemporánea

Significado Algebraico: Grupo asociado a la ecuación.						Evariste Galois (1811-1832) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones, las permutaciones, funciones racionales, raíces de la unidad, grupo de Galois de la ecuación. Artículo: Demostration d'un théorème sur les fractions continues periodiques. Lee a Legendre, Lagrange, Gauss y Abel. 1829: presenta a la academia de ciencias de París, los primeros resultados sobre la solubilidad de las ecuaciones de grado primo; pero Cauchy no da a conocer el resultado. 1830: presenta la memoria: Analyse d'une mèmoire sur la résolution algébrique des équations, en la cual analiza las condiciones para que una ecuación sea soluble por radicales (la memoria se perdió con la muerte de Cauchy como examinador y luego la muerte de Fourier el otro examinador). Reescribe la memoria: Mèmoire sur les conditions de Résolubilitié des èquations par radicaux (revisares Lacroix y Paisson), pero tampoco es aceptada. Todos los teoremas y proposiciones enunciados son correctos.						
Notación simbólica: sí. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 , n >4.						
Elementos del conjunto: las raíces, funciones racionales, permutaciones, funciones biyectivas en un conjunto finito, grupos de permutaciones, grupo asociado a la ecuación.						

Significado Algebraico: Grupo asociado a la ecuación						Evariste Galois (1811-1832) Francés
Establece que: "llamaremos racional, a toda cantidad que se exprese como función racional de los coeficientes de la ecuación y de un cierto número de cantidades adjuntas a la ecuación y arbitrariamente convenidas". Define polinomio reducible, si se puede factorizar en el campo base, de lo contrario lo llama irreducible. Tenía claro que una ecuación irreducible en un campo, podía volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad (campos extensión).						
Método de solución:Sí. Hallar el grupo asociado a la ecuación algebraica. Tenía claro el concepto de Campo, al igual que Abel, como el conjunto a donde pertenecen los coeficientes de la ecuación y que además al ir adjuntando otras cantidades al campo se iban construyendo extensiones del campo base y que éstas extensiones eran campos. Primero en usar el término **grupo** como una colección cerrada de permutaciones bajo la operación composición. En la introducción de su memoria escribe: "me debo conformar con describir de una manera sintetizada los principios generales y una sola aplicación de mi teoría. La aplicación era la solubilidad de las ecuaciones por radicales.						
Idea de estructura: Sí						

Significado Algebraico: Grupo asociado a la ecuación						Evariste Galois (1811-1832) Francés
Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n: sí.						
¿Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales?(Da respuesta a la pregunta en forma completa.) Prueba la existencia de un grupo asociado a la ecuación, ya que las propiedades de la ecuación se reflejaban en ciertas propiedades del grupo asociado a la ecuación. Prueba la existencia del grupo y sus propiedades. Los matemáticos de la academia de ciencias no entendieron la memoria de Galois y pasaron 14 años después de su muerte, para que fuera publicada por Joseph Liouville.						

Significado Algebraico: Grupo de permutaciones, Grupo soluble, Grupo simple						Camille Jordan (1838-1922) Francés
Objeto de estudio: las ecuaciones, las permutaciones, funciones racionales, raíces de la unidad, grupos de permutaciones, los homomorfismos, isomorfismos y los grupos solubles. Define el concepto de "serie de composición" para un grupo de permutaciones y prueba parcialmente el teorema de Jordan-Hölder que establece que: cualquiera dos series de composición para un grupo son equivalente; por lo que todo grupo que tenga una serie de composición determina una lista única de grupos simples.						
Notación simbólica: sí. Obra: Tratado sobre permutaciones. **Tipo de ecuación:** Grado 1,2 ,3 , n >4.						
Elementos del conjunto: las raíces, funciones racionales, permutaciones, funciones biyectivas en un conjunto finito, Grupos de permutaciones, Grupos de sustituciones lineales que corresponden a los grupos de matrices invertibles de orden n con entradas en un campo finito, Grupos simples, Grupos simples finitos. Establece que: "llamaremos racional, a toda cantidad que se exprese como función racional de los coeficientes de la ecuación y de un cierto número de cantidades adjuntas a la ecuación y arbitrariamente convenidas". Define polinomio reducible, si se puede factorizar en el campo base, de lo contrario lo llama irreducible. Tenía claro que una ecuación irreducible en un campo, podía volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad (campos extensión).						
Método de solución:sí.						
Idea de estructura: sí.						

Significado Algebraico: Grupo de permutaciones, Grupo soluble, Grupo simple						Camille Jordan (1838-1922) Francés
Clasificación de los grupos finitos simples:(No). Ésta clasificación fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX.						
Imposibilidad de la solubilidad por radicales de la ecuación general de grado n: sí.						
¿Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales?(Sí.) Prueba que los grupos A_n para $n \leq 5$ son simples.						

Tabla 6.11: Significados dados al objeto Grupo

PERIODO TRES	EDAD CONTEMPORÁNEA Camille Jordan (1838-1922) Francés Evariste Galois (1811-1832) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones. Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy(1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768-1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto de permutaciones. Aritmética módulo n.
PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo n.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes:Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670) CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO

6.2.6.5. Período cuatro: Establecimiento de la Teoría Abstracta de Grupos en los siglos XIX

Como se mencionó, el tratado de Jordan sobre grupos de permutaciones, tuvo gran influencia en la evolución de la teoría general de grupos. Además, en el se hace un estudio de ciertos grupos de sustituciones lineales, que en la terminología moderna corresponden a grupos clásicos sobre el campo de Galois $GF(p), p$ un número primo. Así, el grupo lineal $GL(n,p)$ de matrices invertibles de orden n con entradas en el campo finito $GF(p)$ es uno de ellos, esto en notación moderna. Además, Jordan logró probar que algunos de los grupos clásicos o sus subgrupos son simples.

Los grupos simples, con un número finito de elementos son importantes ya que con ellos se construye cualquier grupo finito. La clasificación de todos los grupos finitos simples, fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX. Así, Otto Hölder en 1889, es el primer matemático en estudiar de forma abstracta los grupos simples; según Hölder : "seria de gran interés si una lista de todos los grupos simples con un número finito de elementos se pudiera conocer" (citado en Dávila, 2003b, p. 73).

Este anhelo de clasificación toma sentido hacia la segunda década del siglo XX, cuando ya había una lista de varias familias de grupos finitos simples y se estaban probando teoremas que hacían que los teóricos de grupos guardaran ciertas esperanzas de poder completar la lista. La clasificación completa de estos grupos se da en 1982 (Dávila, 2003b).

La importancia de los tratados de Jordan en teoría de Grupos es indiscutible; sin embargo, el concepto unificador de Jordan de *grupo de permutaciones,* quedó rebasado con los trabajos de dos matemáticos que fueron atraídos a París, por la fama de Jordan. Fueron estos matemáticos, Félix Klein y Sophus Lie, quienes permanecieron allí de abril a junio de 1870 justo cuando el libro de Jordan hacia su aparición. Klein y Lie se hicieron amigos cuando Lie visitó Berlín en 1869 ya que sus investigaciones tenían puntos en común. Lie había sido introducido a la teoría de grupos por L. Sylow, matemático noruego. Klein y Lie viajaron a Francia, donde tendrían estrecho contacto con Jordan y su estancia fue determinante para sus desarrollos posteriores (Dávila, 2003b).

La generalidad del concepto grupo, no como grupo de permutaciones de Jordan, Cauchy y Galois sino como "grupo de transformaciones", aparece en un artículo publicado en 1871 por Klein y Lie en Mathematische Annale. En este artículo se explora la idea de "grupo continuo dimensión uno" y se establece la conmutatividad de éstos. Luego de esto, los intereses de los dos matemáticos tomaron caminos separados aunque siempre ligados al estudio de grupos: Lie desarrolló su teoría de grupos continuos y la aplica al estudio de las ecuaciones diferenciales; Klein, por su parte, aplicó la noción de grupo de transformaciones, al estudio de las geometrías y luego inicia trabajos en "grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales" importantes en el estudio de las funciones automorfas (Dávila, 2003b).

6.2.6.6. Período cuatro: Los grupos de transformaciones y la clasificación de las geometrías

Klein, en la conferencia inaugural para su admisión como profesor de la Universidad de Erlangen en 1872, marcó un cambio profundo en la *concepción de la noción grupo*. La conferencia tenía como título *Resumen comparativo de investigaciones recientes en Geometría:* allí establece lo que sería llamado "el Programa de Erlangen" cuyo eje principal era la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas), como el estudio de invariantes bajo varios grupos y sus geometrías asociadas, tales como: el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, el grupo hiperbólico, etc., creando así una nueva concepción, tanto del concepto grupo como del de geometría.

En 1873, Klein, introduce en un artículo publicado en *Mathematische Annale,* el concepto de "grupo de transformaciones" en relación al estudio de geometrías no euclidianas; en este artículo, define el concepto de *grupo,* a la manera de Jordan: "si dos transformaciones A, B pertenecen al grupo, entonces también su producto AB es un elemento del grupo". Además, se da cuenta que aparte de ésta condición de cerradura, el producto también requiere que el inverso de cada elemento pertenezca al grupo; esto es, que si A es una transformación del grupo, entonces A^{-1} la transformación inversa de A también debe pertenecer al grupo (Dávila, 2003b).

En su artículo afirmaba, que cada uno de los métodos de la geometría se caracteriza por un grupo de transformaciones. La idea ya estaba en su programa de Erlangen. Según esto, la geometría proyectiva, no es otra cosa, que el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo transformaciones proyectivas; la geometría euclidiana, es el estudio las propiedades invariantes, bajo el grupo de desplazamientos euclidianos, las transformaciones de similitud y las reflexiones (el grupo euclidiano) y así sucesivamente (Dávila, 2003b, p. 74).

6.2.6.7. Período cuatro: Los grupos continuos de transformaciones

En la misma dirección, Lie trabaja los grupos continuos de transformaciones, que iniciaron a tomar forma en 1870 y lo llevaron a formular lo que ahora se conoce como: "La teoría de Lie" (grupos de Lie y Álgebras de Lie,) la cual se convirtió en una rama independiente de las matemáticas: sus investigaciones se publicaron entre 1872 y 1879; sus ideas fueron de fecundidad extraordinaria ya que aún hoy los matemáticos siguen demostrando resultados relacionados con los grupos y álgebras de Lie; además las aplicaciones de esta teoría, son muchas dentro y fuera de la matemática (Dávila, 2003b).

Las ideas de Lie, se relacionaban con la integración de ecuaciones diferenciales parciales; sus investigaciones lo llevaron a considerar "grupos de transformaciones" que dejaban invariante una ecuación diferencial parcial (simetrías de ecuaciones diferenciales) y así pudo darse cuenta que los distintos métodos conocidos en la época para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse debido a que ésta quedaba invariante bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones que, para estos casos, se podía calcular fácilmente. Así, la intención de Lie, fue la de crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales similar a la de Galois con las ecuaciones algebraicas. De ésta forma, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo, simplificar la ecuación para resolverla. Lie, no pudo dar una formulación completa de una teoría de Galois para ecuaciones diferenciales, pero su trabajo fue fundamental en el desarrollo de la teoría de grupos (Dávila, 2003b, p. 74).

6.2.6.8. Período cuatro: La definición abstracta de Grupo (Cayley)

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de grupo, ya que representaba una visión más amplia del concepto, dando ejemplos de grupos infinitos y además extiende el campo de aplicación de la noción de grupo, la cual estaba presente en algunos desarrollos de la teoría de números, la geometría, ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones.

El paso que definió la teoría de grupos de forma abstracta lo da Arthur Cayley (1821-1895) matemático Británico, en 1854 en su artículo: *Sobre la teoría de grupos que dependen de la ecuación simbólica* $\theta^n = 1$ en el cual se encuentra la primera definición abstracta de un grupo:

Un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, ...,\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualesquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de cualquiera de ellos consigo mismo, pertenece al conjunto; se dice ser un grupo (Dávila, 2003b, p. 75).

Como parte de la definición, Cayley establece que el producto de esos símbolos, no tiene por que ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presenta varios ejemplos, tales como: a) Los cuaternios con la suma; b) Las matrices invertibles con la multiplicación y c) Grupos de permutaciones con la compuesta. También muestra que cualquier grupo abstracto, es isomorfo a un grupo de permutaciones: resultado que hoy recibe el nombre del *Teorema de Cayley.* Además, introduce una tabla de multiplicación de un grupo y afirma que: " un *grupo abstracto* queda determinado por ésta" (Dávila, 2003, p. 75).

Desafortunadamente, a pesar de que Cayley era un matemático reconocido de la época, su definición de grupo no llamó la atención de la comunidad y se tuvo que esperar que pasaran muchos años para que el concepto abstracto de grupo, iniciara a permear a los matemáticos de finales del siglo XIX. Ésta tarea la realizó Cayley, en una serie de artículos, donde llama la atención sobre el tema: Cayley estaba inmerso en un ambiente de abstracción. Otros matemáticos que dieron definiciones abstractas de grupo fueron: R. Dedekind (1831-1916), H. Weber (1842-1913) y W. von Dyck (1856-1934) matemáticos alemanes.

Para H. Wussing (historiador de las matemáticas): "La teoría de grupos aparece como una disciplina distinta a través de toda la matemática moderna. Permea las áreas más variadas como un principio ordenador y clasificante" (Dávila, 2003b, p. 75).

6.2.6.9. Período cuatro: El álgebra moderna

Un concepto fundamental en el álgebra contemporánea, es el de "operación o ley de composición" que según Bourbaki, es uno de los conceptos matemáticos que se pueden considerar entre los más primitivos. Así, una vez que el hombre primitivo tuvo cierta familiaridad con el proceso de contar, el siguiente paso fue calcular. En todo cálculo intervienen dos componentes: los objetos con los que se opera (calcula) y las reglas de operación (las reglas del cálculo). Estas últimas son las que interesan, ya que de los objetos solo interesa que satisfagan las reglas de operación. Esta es, precisamente, la característica principal del álgebra contemporánea: su objeto de estudio son los sistemas algebraicos, entendidos como un conjunto de objetos que satisfacen ciertas reglas (axiomas) dadas de antemano. Así, la "abstracción" viene del hecho, que no interesa la naturaleza de los elementos con los que se opera; lo que interesa es que cumplan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos (Dávila, 2003b).

La escuela inglesa de la segunda mitad del siglo XIX tomó conciencia del papel independiente del álgebra y entre los matemáticos ingleses iniciadores de este movimiento se encuentran: G. Peacock (1791-1858), D. Gregory (1813-1844) y A. De Morgan (1806-1871) matemáticos Británicos; una cita de Gregory respecto al álgebra simbólica es muy clara:

> ...La luz entonces en la cual consideraría el álgebra simbólica es la de que es la ciencia que trata de la combinación de operaciones definidas no por su naturaleza, esto es, por lo que son o por lo que hacen, sino por las leyes de combinación a las que están sujetas... es verdad que estas leyes han sido en muchos casos sugeridas por las leyes conocidas de las operaciones de números, pero el paso que lleva de álgebra aritmética a álgebra simbólica es que, dejando de lado la naturaleza de las operaciones que los símbolos que usamos representan, nosotros suponemos la existencia de clases de operaciones desconocidas sujetas a las mismas leyes. Es así posible que probemos ciertas relaciones entre las diferentes clases de operaciones las que, cuando se expresan en símbolos, son llamados teoremas algebraicos...

(Dávila, 2003b, p. 76).

Se estaba construyendo el camino hacia la "abstracción". Los pasos decisivos hacia la noción abstracta de ley de composición, los dan los algebristas de la escuela inglesa, entre 1830 y 1850 a partir de sus reflexiones sobre la naturaleza de los números imaginarios. Luego, se ampliarían los dominios del álgebra al aplicar el concepto de ley de composición, a una multitud de nuevos entes matemáticos: álgebra de la lógica con Boole; vectores, cuaternios y sistemas complejos generales con Hamilton; matrices y leyes no asociativas con Cayley. Como consecuencia de todas esas ideas originales, se preparaba el camino hacia la abstracción y la generalización. El álgebra dejaba de ser el estudio de las ecuaciones algebraicas y se orientaba a lo que hoy se considera como: El problema fundamental del álgebra: "el estudio de las estructuras algebraicas por sí mismas: dentro de estas estructuras se encuentra precisamente, el objeto matemático de investigación: objeto Grupo" (Dávila, 2003b).

6.2.6.10. Período cuatro: Clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XX

En el siglo XX se da todo un movimiento renovador para el álgebra del cual surgieron nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras: el nombre de "álgebra moderna" se hizo popular con la publicación del trabajo de B. L. van der Waerden (1903-1996) matemático Holandés, en 1930 titulado: *Modern Algebra,* que fue el primer documento publicado, donde se hace una exposición de forma axiomática de las nuevas ideas y tendencias del álgebra de esa época (Dávila, 2003b, p. 77).

La axiomatización del álgebra, se da principalmente en la escuela alemana moderna donde se inicia con una unificación de las tendencias que se habían dado, entre las que se encuentran los trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Weber, Sylvester, Clifford, Peirce, Dickson, Wedderburn, Weierstrass, Frobenius, Molien, Laguerre y Cartan, entre otros. Ésta síntesis fue iniciada por Dedekind y Hilbert en los últimos años del siglo XIX y fue continuada por E. Steinitz, E. Artin, E. Noether, Hassen, Krull, Schreier y culmina con los trabajos de van der Waerden en su tratado de 1930, donde se reúnen por primera vez estos trabajos en una exposición en conjunto, abriendo el camino y sirviendo de guía a las investigaciones posteriores en álgebra abstracta (Dávila, 2003b, p. 77).

Finalmente, en relación al problema de la clasificación de los grupos finitos simples, en 1983 se consigue terminar una clasificación de éstos grupos, estableciéndose que existen cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 6.1). Así, todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:
Un grupo alternado de grado al menos 5.
Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito.
Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$
Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo.

Hay quienes como John Conway consideran al grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos. Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el "baby monster group" de orden superior a 4Ö1033 y el "monstruo" de orden superior a 8Ö1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1, J3, J4, O'N, Ru, Ly$ se les llama "grupos parias"; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos ((s.f.). Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

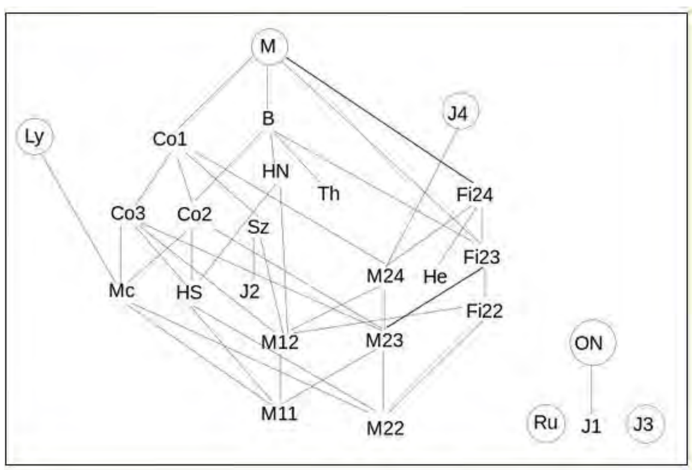


Figura 6.1: Clasificación de los grupos finitos simples

6.2.6.11. Período cuatro: Los grupos a partir del siglo XX

Según Rivero (1999), la simetría es una característica de la forma que no depende del movimiento y permanece constante bajo ciertos movimientos del plano y del espacio. El hecho de poder estudiar conceptos de tipo geométrico mediante el movimiento, abrió una nueva línea de pensamiento en la matemática a mediados del siglo XIX. Dicha fusión nació de lo que se llama la *Geometría de las transformaciones*: un nuevo método de estudio de la geometría, usando coordenadas, transformaciones lineales en el plano, álgebra lineal y teoría de Grupos. Se define transformación en el plano, como una función uno a uno del plano en sí mismo: si P es un punto del plano el es enviado a un único punto P' del plano y se escribe $T(P) = P'$. Es posible que algunos puntos queden fijos, esto es, que $T(Q) = Q$. En este caso se dice que el punto Q permanece **invariante** bajo la transformación T.

Se define en la misma dirección, una *isometría* para el caso en que la transformación T no altere la distancia entre los puntos (cuando se habla de plano se hace referencia a su estructura afín. En este sentido, todas las transformaciones consideradas, incluyendo las isometrías, son transformaciones afines). Se prueba que un movimiento en el plano es una isometría; esto es, todo movimiento preserva la forma de los objetos en el plano, aunque los puede mover. Se prueba que el conjunto de movimientos con la operación compuesta es un grupo: el *Grupo de los movimientos del plano* $O(\mathbb{R}^2)$; entre sus elementos se encuentran: las traslaciones (la traslación es una isometría), rotaciones, reflexiones y la simetría de deslizamiento (Rivero, 1999).

Grupos ornamentales del plano

El concepto de simetría de una figura plana, se define con precisión al usar el grupo de movimientos del plano $O(\mathbb{R}^2)$. En general, si H es cualquier figura del plano, el conjunto de movimientos que fijan a H es un subgrupo de $O(\mathbb{R}^2)$ y se denota por G_H: se llama *grupo de simetrías de* H. Este grupo da información sobre los aspectos geométricos y en especial sobre las simetrías de la figura H.

Entre los grupos ornamentales se encuentran:

*Los grupos de Leonardo,*donde la figura se genera por la acción de un grupo de rotaciones (por ejemplo un pétalo sobre un circulo) un ángulo determinado y donde se tiene que $G_H \supseteq \langle\sigma\rangle$ y σ es una rotación determinada. El grupo de simetrías de H contiene también algunas reflexiones. *El grupo de Frisos*, que contiene solo una traslación y corresponde a las decoraciones que se ven en los frisos de las fachadas de los templos o en las paredes de las casas coloniales. Se considera un friso H, como una figura que se extiende infinitamente a lo largo de una línea recta; donde H no tiene simetrías de tipo rotatorio y finalmente, cuando el grupo de traslaciones está generado por dos traslaciones no paralelas y la figura básica se repite en todo el plano inifinitamente, generando una celosía o papel tapiz, se tienen los “grupos cristalográficos planos (Rivero, 1999).

En 1981, el cristalógrafo E. S. Feodorov, demostró que solo existen 17 grupos cristalográficos, al hacer una clasificación exhaustiva de ellos. Más tarde, en 1897 Felix Klein y R. Fricke redescrubrieron este resultado; pero ya los árabes en la edad media, conocían éstos 17 grupos y los emplearon en la decoración de las mezquitas, castillos y fortalezas:

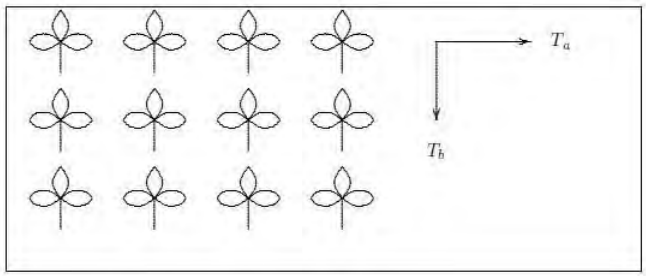


Figura 6.2: Grupo cristalográfico plano, (Rivero, 1999)

En la figura 6.2 se considera a H como una figura similar a un campo florido, que se extiende por todo el plano: H se ha generado a partir de una flor K la cual se ha trasladado en dos direcciones mediante un par de traslaciones independientes T_a, T_b. Luego el grupo G_H contiene al grupo $\langle T_a, T_b \rangle$ y además, G_H contiene infinitas reflexiones, unas con ejes verticales que pasan por los centros de las flores y otras con ejes equidistantes de dos flores. Se prueba que G_H se genera por T_a, T_b y una reflexión cualquiera de las anteriores (Rivero, 1999).

6.2.11.1. Período cuatro: Grupos cristalográficos planos

Un cristal se encuentra formado por millones de moléculas iguales que al colocarse unas al lado de otras en forma ordenada generan formas simétricas casi perfectas: la misma molécula se repite en forma ordenada y periódica en todas las dimensiones del espacio y es posible asignarle a cada compuesto cristalino un “grupo de simetrías” a fin de poderlos diferenciar bien, unos de otros. Existen millones de ellos en la naturaleza. La forma de hacer esta clasificación, consiste en partir de una figura básica o celda, formada por una cierta combinación de moléculas y entonces se va copiando la celda en el espacio, como una imagen reflejada, rotada o trasladada de la original. Para esto, se necesita considerar solo un cierto tipo de traslaciones que coloque las moléculas en el lugar que le corresponda en forma ordenada, sin que se solapen o se fundan unas con las otras: un grupo de traslaciones con éstas características, se llama un “Grupo discontinuo” (Rivero, 1999).

Un grupo G de movimientos en el plano es un grupo discontinuo si para cada punto P del plano existe un entorno, disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad. Es decir, los movimientos de G no triviales, mueven a P fuera del entorno D. Y un grupo G de movimientos en el plano es un "Grupo cristalográfico" si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos (Rivero, 1999).

6.2.11.2. Período cuatro: Grupos puntuales

En simetría molecular, se define como operación de simetría a una permutación de átomos que transforma una molécula o cristal en un estado que no es posible distinguirla del estado original. Asociada a cada operación de simetría se tiene un elemento de simetría, que corresponde a un punto, línea o plano respecto del cual se realiza la operación de simetría. Así, una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto, en contraste con el cristal que presenta simetría de tipo espacial y los elementos de simetría que posee una molécula determinan el grupo puntual al que pertenece.

Por ejemplo, se tiene:

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
C_3	$E, 2C_3$	3	C_3

Se tienen las siguientes operaciones de simetría:

Operaciones de Simetría	Símbolo
Identidad	E
Rotación propia de $\frac{2\pi}{n}$	C_n^m
Reflexión	σ
Inversión	i
Rotación impropia de $\frac{2\pi}{n}$	S_n^m

Y se tienen los siguientes elemetos de simetría:

Elementos de Simetría	Símbolo
Eje de simetría de orden n (eje propio)	C_n
Plano de simetría	σ
Centro de inversión	i
Eje impropio de orden n	S_n

Se cumple que $S_1 = \sigma$ y $S_2 = i$; esta operación de identidad i, deja la molécula igual: es la operación que tiene cualquier molécula y no necesita ningún elemento de simetría. Se dice, que existe un eje propio de orden n cuando la molécula no cambia después de una rotación de $\frac{360}{n}$; el eje de mayor orden de una molécula se denomina eje principal y, por convención se define como el eje z. De igual forma, el eje impropio corresponde a una rotación impropia que resulta de la operación compuesta de una rotación convencional (propia) seguida de una reflexión entorno a un plano perpendicular al eje de rotación (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://www3.uah.es/edejesus/resumenes/DECI/tema1.pdf).

A continuación, se presenta en las tabla 6.12 los aportes de los principales matemáticos del siglo XX y a continuación en la tabla 6.13 el significado del objeto de investigación.

Tabla 6.12: Período cuatro: el objeto grupo en el siglo XX

Significado Algebraico: Grupo de transformaciones: Grupos continuos, Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales						Félix Klein (1849-1925) Alemán
Objeto de estudio: Grupos de Transformaciones, estudio de las geometrías.						
Notación simbólica: sí. Artículo publicado en 1871 con Lie donde se explora la idea de Grupo continuo de dimensión uno. Conferencia: Resumen comparativo de investigaciones recientes en geometría. Aquí establece lo que sería llamado: El programa de Erlangen, cuyo eje principal era la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas).						
Elementos del conjunto: Transformaciones, los invariantes bajo grupos y sus geometrías asociadas tales como: el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, el grupo hiperbólico, Geometría proyectiva.						
Nueva concepción del objeto Grupo: Crea una nueva concepción del concepto Grupo como el de Geometría. **Define el concepto de Grupo** a la manera de Jordan: Si dos transformaciones A, B pertenecen al grupo, entonces también su producto AB es un elemento del grupo. Se da cuenta que aparte de esta propiedad de cerradura, el producto también requiere que el inverso de cada elemento pertenezca al grupo. En su artículo afirmaba que cada uno de los métodos de la geometría se caracteriza por un Grupo de Transformaciones.						

Significado Algebraico: Grupo de transformaciones: Grupos continuos, Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales						Félix Klein (1849-1925) Alemán
Clasificación de todos los grupos finitos simples:(No). Ésta clasificación fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX.						

Significado Algebraico: Grupo de transformaciones: Grupos continuos de transformaciones.						Sophus Lie (1842-1899) Noruego
Objeto de estudio: Grupos de Transformaciones que dejan invariante una ecuación diferencial parcial (simetrías de las ecuaciones diferenciales), estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. Se da cuenta que los diferentes métodos conocidos para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse, debido a que ésta queda invariante bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones, que para éstos casos se podía calcular fácilmente. Tuvo la intención de crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales parciales, similar a la de Galois para las ecuaciones algebraicas. No pudo dar una formulación completa de una teoría para las ecuaciones diferenciales parciales.						
Obras: Artículo publicado en 1871 con Klein, donde se explora la idea de Grupo continuo de dimensión uno. Las ideas de Lie se relacionaban con la integración de ecuaciones diferenciales parciales.						
Elementos del conjunto: Grupos continuos de Transformaciones, las ecuaciones diferenciales parciales.						
Nueva concepción del objeto Grupo:sí. Grupo continuo de Transformaciones. Lie, buscaba encontrar un grupo de transformaciones, que dejara invariante la ecuación diferencial parcial y por medio del estudio de las propiedades de grupo simplificar la ecuación diferencial. Visión más amplia del concepto Grupo.						

Significado Algebraico: Grupo de transformaciones: Grupos continuos de transformaciones.						Sophus Lie (1842-1899) Noruego
Clasificación de todos los grupos finitos simples:(No). Esta clasificación fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX.						

Significado Algebraico: GRUPO ABSTRACTO						Arthur Cayley (1821-1895) Británico
Objeto de estudio:los grupos abstractos: El grupo de los cuaternios con la suma, El grupo multiplicativo de las matrices invertibles, los grupos de permutaciones con la operación compuesta.						
Obras: Artículo: Sobre la teoría de grupos que dependen de la ecuación cúbica $\theta^n = 1$; en el cual se encuentra la primera definición abstracta de grupo.						
Elementos del conjunto: Grupos abstractos.						
Nueva concepción del objeto Grupo: sí. Definición: un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, ...,\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de ellos consigo mismo, pertenecen al conjunto, se dice ser un **grupo.** Como parte de la definición establece que el producto de éstos símbolos no tiene por que ser conmutativo, pero sí asociativo. Muestra que cualquier grupo abstracto, es isomorfo a un grupo de permutaciones; resultado que hoy se denomina: El teorema de Cayley. Introduce una tabla de multiplicación para los elementos del grupo y afirma que: un grupo abstracto queda determinado por esta. La definición de grupo abstracto, no llamó la atención de los matemáticos de la época y Cayley tuvo que esperar muchos años para que el concepto abstracto de grupo iniciará a permear los matemáticos a finales del siglo XX.						

Significado Algebraico: GRUPO ABSTRACTO						Arthur Cayley (1821-1895) Británico
Clasificación de todos los grupos finitos simples:(No). Esta clasificación fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX.						

Tabla 6.13: Significado del objeto Grupo

PERIODO CUATRO	EDAD CONTEMPORÁNEA Arthur Cayle (1821-1895) Británico	SIGNIFICADO ABSTRACTO: El grupo de los cuaternios con la suma. El grupo de matrices invertibles con la multiplicación. Los grupos de permutaciones con la operación compuesta.
	Félix Klein (1849-1925) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupo de transformaciones. Grupos de Transformaciones: Grupos continuos de transformaciones. Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales. Grupo proyectivo.
	Sophus Lie (1842-1899) Noruego	Grupos continuos de transformaciones. Grupo de transformaciones que dejan invariante a la ecuación diferencial. Grupo de transformaciones.
PERIODO TRES	EDAD CONTEMPORÁNEA Camille Jordan (1838-1922) Francés Evariste Galois (1811-1832) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupos de permutaciones Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy(1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupos de permutaciones. Grupo S_4 de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).

PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768-1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto de permutaciones. En Aritmética módulo n.
PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones) y en Aritmética módulo n.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes:Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670) CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO

PERIODO CUATRO	EDAD CONTEMPORÁNEA: SIGLO XX **Arthur Cayle (1821-1895) Británico**	SIGNIFICADO ABSTRACTO: El grupo de los cuaternios con la suma. El grupo de matrices invertibles con la multiplicación. Los grupos de permutaciones con la operación compuesta.
	Félix Klein (1849-1925) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupo de transformaciones. Grupos de Transformaciones: Grupos continuos de transformaciones. Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales. Grupo proyectivo.
	Sophus Lie (1842-1899) Noruego	Grupos continuos de transformaciones. Grupo de transformaciones que dejan invariante a la ecuación diferencial. Grupo de transformaciones.
PERIODO TRES	EDAD CONTEMPORÁNEA Camille Jordan (1838-1922) Francés **Evariste Galois (1811-1832) Francés**	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupos de permutaciones, **Grupo de Galois asociado a la ecuación.** Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles.
PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy(1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano **Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano** Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupos de permutaciones. Grupo S_4 de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768-1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto de permutaciones. En Aritmética módulo n.
RENACIMIENTO	Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés **Francois Viéte (1540-1603) Francés** Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones). Conjuntos de los enteros con la aritmética módulo n.
	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998)	
	Hindúes:Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

6.3. Configuraciones socio–epistémicas en problemas relacionados con el objeto Grupo

En este apartado se pasa a describir las configuraciones socio-epistémicas (ver, capítulo 4) identificadas a partir del estudio histórico sobre la evolución del objeto Grupo. Estas configuraciones, se determinaron a partir de la identificación de 13 problemáticas que se fueron presentando a lo largo de la evolución del objeto matemático y como resultado del estudio epistemológico, histórico y fenomenológico desarrollado en el capítulo anterior. Estas problemáticas se agruparon según la identificación de unas etapas a partir del estudio de la psicogénesis del objeto matemático realizado por Piaget & García (2008) en cuanto al desarrollo del álgebra; específicamente del surgimiento del objeto Grupo, como una primera estructura algebraica.

Las etapas descritas por Piaget et. al. (2008), corresponden a la etapa inter, la intra y la trans-operacional; en esta dirección, se establece una etapa 0 donde se da solución por métodos empíricos a ecuaciones algebraicas (civilizaciones antiguas); se continua con la primer etapa denominada intra-operacional (1), a la cual se le asocian las problemáticas determinadas en ésta etapa a la configuración epistémica CE1; de igual forma, la CE2 que se relaciona con las problemáticas de la etapa inter-operacional y finalmente, la CE3 que se relaciona con las problemáticas de la etapa trans-operacional, que inició Galois. Finalmente, se identificaron otras problemáticas en el desarrollo del objeto y corresponden a problemas relacionados con contextos intra- matemáticos y extra-matemáticos las cuales se agruparon en las configuraciones epistémicas CE4.1, CE4.2 y CE4.3 y finalmente, la configuración epistémica CE5 que se relaciona con el significado global del objeto de investigación que corresponde a la definición abstracta del objeto Grupo y representa el significado global del objeto de investigación. Las configuraciones surgieron de las problemáticas identificadas tanto en la evolución del objeto, como en la aplicación a otros campos de las matemáticas y por tanto se describen con subíndices, como por ejemplo la CE1.1 según el período evolutivo donde se encuentran.

Según el desarrollo histórico del objeto de investigación y las etapas definidas por Piaget & García (2008), se determinaron como problemáticas principales: (0) Problemas relacionados con Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); (1) Problemas relacionados con la determinación de la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); (2) Problemas geométricos que involucran ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); (3) Problemas en Teoría de números en la edad moderna; (4) Problemas relacionados con la búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ en la edad moderna (siglo XVII-XVIII); (5) Problemas con las ecuaciones de grado $n > 4$ resolubles por radicales y la Teoría de Galois en la edad contemporánea (siglo XVIII-); (6) Problemas en Aritmética modular en la edad contemporánea (Gauss); (7) Problemas relacionados con el surgimiento de la teoría abstracta de Grupos; (8) Problemas con el conjunto de matrices (Cayley); (9) Problema de la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas; (10) Problemas en ecuaciones diferenciales parciales; (11) Problema de la clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XIX y (12) El problema de la definición abstracta del objeto grupo en el siglo XIX.

En el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico, se analizaron algunos de los desarrollos descritos en Dávila (2002; 2003a, 2003b), Chavarría (2014) y libros de Historia de la Matemática. A partir de estos estudios, se realizó la determinación de las configuraciones epistémicas y se utilizaron las herramientas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática para caracterizar cada una de las configuración: para esto, se utilizaron las herramientas descritas en el marco teórico, para describir los objetos matemáticos primarios (lenguaje, situaciones problema, reglas: proposiciones–propiedades–teoremas, conceptos, argumentos, notaciones, procedimientos–técnicas) que conforman cada configuración junto con las relaciones entre los objetos que las componen. En esta dirección, se presenta a continuación, la caracterización de estas configuraciones de donde emerge el significado global del objeto Grupo.

6.3.1. Problema 0.1: Solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática egipcia

Problema: Hallar el valor del aha si el aha y una séptima parte del aha es 19 (Hallar el valor del montón si montón y una séptima parte de montón hacen 19)

La respuesta del escriba Ahmés fue $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Este problema es el número 24 del papiro Rhind y corresponde a ecuaciones resueltas por la regla de la falsa posición.

Solución:

La ecuación a resolver corresponde a $\frac{8}{7}x = 19$ y se utilizó la regla de la falsa posición que era conocida:
1) Se daba una solución al azar en este caso $x = 7$ (solución falsa)
2) Se reemplaza en la ecuación: $7 * \frac{8}{7} = 8$ (Resultado falso)
3) Debe dar 19 pero en este caso $8(2 + \frac{3}{8}) = (2 + \frac{3}{8})8$
4) Entonces $19 = (2 + \frac{3}{8})8$ un número 8 veces
5) La respuesta correcta corresponde entonces $(2 + \frac{3}{8})7$ por la solución falsa
6) $= 14 + \frac{21}{8} = 16 + \frac{5}{8} = 16 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
$= 16 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{8}$
$= 16 + \frac{8}{16} + \frac{1}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ que es la respuesta dada.

Una de las fuentes históricas sobre las matemáticas en egipto que se conserva, es el *papiro de Rhind y el papiro de Moscú.* El primero se conoce como papiro de Ahmés (Ahmose lo copió en el año 1700 a. C. de un prototipo que se puede situar entre 2000 y 1800 a. C.) Este papiro daba solución a *problemas* sobre repartición de pan y cerveza, cálculo de áreas de terrenos con varias formas trigonométricas y cálculo de volúmenes, e incluso se encuentran rudimentos de trigonometría en algunos de ellos; entre estos problemas se encuentra el 24 que corresponde al presentado anteriormente.

El problema se relaciona con la configuración−epistémica, “Las ecuaciones lineales en la matemática egipcia” y se observa que el objeto matemático predominante, corresponde a los *procedimientos,* ya que para dar solución al problema se aplica un método concreto: el método o la regla de la falsa posición. En el papiro Rhind se utiliza una forma de aritmética o unos *procedimientos* que hacían uso de las fracciones unitarias, que eran precedidas a menudo por un número entero y se tomaban las fracciones de los números enteros y de la unidad juntas como una sola declaración, como cocientes y restos, o simplemente como aritmética del resto.

En este papiro los problemas del 24 al 29 correspondían a la búsqueda de números (28 y 29) y a ecuaciones resueltas por regula falsis, como en el caso del problema anterior (24 al 27). El papiro matemático de Rhind contiene también, una tabla de la serie egipcia de la fracción $2/n$ (101 entradas) y 87 problemas y su resolución. En cuanto a la *notación o a los términos,* estos aparecen escritos en hierático: este término proveniente del griego(hieratika, sagrado) y permitía a los escribas del antiguo Egipto escribir en forma rápida, simplificando los jeroglíficos cuando lo hacían en papiros y se relaciona con la escritura jeroglífica (ver figura 6.3). Fue la escritura utilizada en los textos administrativos y religiosos.

Los *problemas* del papiro correspondían a cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. El papiro fue escrito por el escriba Ahmes (Ahmés) aproximadamente en el año 1650 A. C. según reivindica el propio Ahmés al principio del texto, además, resultaba imposible saber qué partes correspondían a textos anteriores y cuáles no. Para la solución de los *problemas* el escriba debía tener en cuenta los siguiente *procedimientos*: la suma de las fracciones unitarias indicaban la cantidad de magnitud medida con una unidad inicial, que correspondía a cada uno de los participantes del reparto de a unidades entre b individuos (se podría en notación actual denotar por $a:b$); los repartos se realizaban dando inicialmente a cada participante unidades enteras y si ello no era posible se dividían las unidades en un número de partes iguales de modo que se pudiera dar a cada participante una de las partes resultantes y si con ello no se finalizaba el reparto se hacía en fases sucesivas (Gairín,2001).

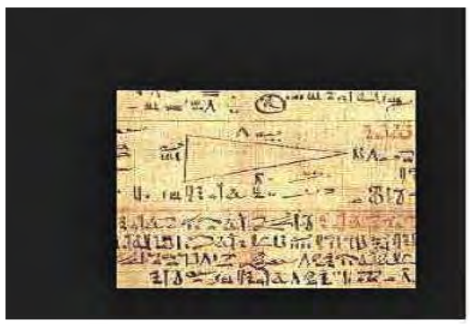


Figura 6.3: Papiro Rhind

El papiro (ver figura 6.3) se cree que pudo ser un documento con intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para otros historiadores de la matemática, representa una guía de las matemáticas del antiguo Egipto y se considera como el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los *problemas* aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomados de las propias experiencias de los escribas; en general, representa una fuente valiosa de información.

En cuanto al *lenguaje y los términos* utilizados en la solución del problema, se considera que las fracciones constituían un sistema de representación (Rico, Castro & Romero, 1997), un lenguaje de comunicación de las cantidades no enteras y positivas y que como tal este sistema estaba sometido a unas normas sintácticas que pueden evaluarse sistemáticamente (Kaput, 1987 citado en Gairín, 2001). Se puede entender que este *sistema de representación* al igual que otros, surgió de las necesidades de comunicación de los resultados de las manipulaciones de objetos del mundo real y que estaba asociado con la cuantificación de cantidades de magnitudes que se obtenían al resolver problemas cotidianos.

Se afirma que la aparición de las fracciones tuvo lugar al hacer tareas diferentes a las de contar, ya que los resultados de contar se comunicaban con el sistema de numeración aditivo del que ellos disponían. Estas tareas como se mencionó correspondían a problemas de reparto, problemas que eran habituales en el quehacer de los escribas:

Los papiros de Rhind y de Moscú son manuales para los escribas, que dan ejemplos de cómo hacer las cosas que forman parte de sus tareas cotidianas (Fauvel & Gray, 1987 citado en Gairín, 2001, p. 657).

Los 110 problemas del Papiro Rhind y de Moscú tenían un origen práctico relacionado con repartos de pan y de cerveza, con mezclas de comida para ganado y aves domésticas y con el almacenamiento de grano (Eves, 1969 citado en Gairín, 2001, p.657).

También hay problemas que no conciernen a problemas específicos[...] se puede pensar que el papiro Rhind es un manual con ejercicios para jóvenes estudiantes. Detrás de problemas prácticos hay algunos problemas teóricos puestos en forma concreta y a veces el escriba parece tener en la mente pruzzles o recreaciones matemáticas (Grattan,1993, citado en Gairín, 2001, p. 657).

En cuanto a los *símbolos o notaciones*, para la suma se unen los signos. Si los pies señalan en la dirección de la escritura, significaban suma, si no correspondían a restas (ver, figura 6.4).

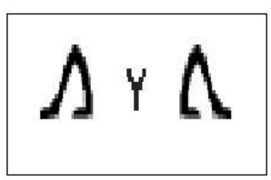


Figura 6.4: Signos para sumar y restar

Las matemáticas egipcias corresponde a un tipo de *pre-álgebra* ya que en este período no se tenía conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y de la geometría. En Egipto y Babilonia específicamente se tenía un*álgebra aritmética. Los problemas* fueron específicos y se pueden llamar de tipo-algebraico; para su solución se tenían métodos equivalentes a resolver ciertos tipos de ecuaciones algebraicas.

En cuanto a los *conceptos* que utilizaron los egipcios para la solución del problema, se tiene el de *fracciones unitarias,* que se interpretaban como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas; se elaboraban dos posibles alternativas sobre el modo en que el escriba realizaría los cálculos numéricos asociados al reparto (Gairín, 2001). En los resultados del texto del escriba no se justificaban las fracciones que utilizaba y por la forma precisa e inequívoca en que se presentan los resultados se puede concluir que el escriba lo que hacía era comprobar que la descomposición estuviera bien hecha, pero no se considera que allí se plasmara el modo en que se encontraba la solución (Gairín, 2001, p. 656).

6.3.2. Problema 0.2: Solución de ecuaciones: Distribución de un área en cuadrados - egipcios

Problema: Si se te dice que distribuyas 100 ells cuadrados [ell: unidad de área]sobre dos cuadrados de tal modo que el lado de uno sea $\frac{3}{4}$ del otro: por favor, dame cada una de las incógnitas

Este problema fue encontrado en Egipto y corresponde a un tiempo anterior al de la edad de oro de Grecia. En nuestro lenguaje el problema equivale a solucionar la ecuación cuadrática:

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$y = \frac{3}{4}x$$

Solución:

Se supone que el lado de un cuadrado es 1 y el otro lado es $\frac{3}{4}$. La suma de las áreas es $\frac{25}{16}$ siendo $\frac{5}{4}$ una raíz de ésta. Como la raíz de 100 es 10, se tiene que 10 es al lado requerido como $\frac{5}{4}$ es a 1 por lo que un cuadrado es de lado 8 y el otro tiene lado 6.

En el problema la *situación-problema* corresponde a un reparto de áreas y se encuentra relacionado con un problema geométrico. Los papiros Ahmés y de Moscú, muestran que la matemática en Egipto permaneció prácticamente en un mismo nivel durante varios milenios y además que no se desarrolló un sistema de numeración eficiente, que hubiese llevado sus matemáticas por otros senderos más productivos. Además, los problemas del papiro muestran que los egipcios podían resolver cierto tipo de ecuaciones de segundo grado, aunque aún desconocían un método general para la resolución (Dávila, 2002, p. 12).

El *procedimiento* utilizado en la solución, fue el uso de proporciones para reducir el problema a una ecuación lineal o de grado uno que se soluciona por el método de la regla falsa; además, utilizaron conocimientos geométricos para llegar a la solución del problema. En cuanto a los *conceptos* para dar solución al problema, se utilizaron las fracciones unitarias; la solución de las ecuaciones de grado uno y algunos conocimientos geométricos.

6.3.3. Problema 0.3: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 y 3 por los babilonios

Problema: Encontrar dos números si se conoce su suma y su producto

El método de los babilónicos para resolver esta ecuación, comprendía los siguientes pasos (Dávila, 2002, p. 13):

Solución:

a) Tomar la mitad de la suma $\left[\frac{s}{2}\right]$
b) Elevar al cuadrado el resultado obtenido $\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2\right]$
c) De lo anterior, restar el producto $\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p\right]$
d) Tomar la raíz cuadrada de lo que resulta $\left[\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\right]$
e) Sumar al resultado la mitad de la suma $\left[x = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} + \frac{s}{2}\right]$
f) El resultado anterior es uno de los números que se buscan
g) El otro es la suma menos este último número $y = s - x$

Este *procedimiento* para resolver la ecuación de segundo grado es equivalente a resolver la cuadrática por fórmula (radicales), ya que si se tiene que:

La suma de los números es $s = x + y$
$sx = x^2 + yx$ multiplicando por x
$x^2 + p = sx$ ya que $p = xy$

$x^2 - sx + p = 0$ realizando operaciones se tiene que x es solución de la ecuación;
$sy = xy + y^2$ multiplicando la suma por y
$y^2 - sy + p = 0$ esto es, y también es solución de la ecuación.

Ahora, al considerar la ecuación general de grado dos $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c números racionales, con $a \neq 0$ se tiene la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
entonces, $x + y = s = -\frac{b}{a}$ y $xy = p = \frac{c}{a}$.

Los pasos del 1) al 5) de los babilónicos para resolver la forma normal, en notación simbólica llevan a:

$[x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$
$[y = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$
Estas dos soluciones se pueden expresar como:
$[x, y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}]$
$[x, y = \frac{\frac{-b}{a} \pm \sqrt{\frac{-b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2}]$ reemplazando valores
$[x, y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}]$ simplificando valores.

Los *procedimientos*, para resolver esta ecuación de grado dos, corresponden a la deducción y aplicación de la fórmula cuadrática o método de radicales para la ecuación de grado dos; además, consideraron ecuaciones de la forma $x^2 + bx = c$ con b, c no necesariamente enteros, pero $c \geq 0$. Utilizaron tablas de cuadrados en reversa para encontrar raíces cuadradas y siempre usaron la raíz positiva ya que esto tenía sentido al resolver problemas reales; *los problemas* incluían: encontrar las dimensiones de un rectángulo dada su área y la cantidad por la cual el largo excedía el ancho.

Además, en sus *procedimientos,* tenían tablas para calcular $m^3 + m^2$ que usaban para resolver cierta clase de ecuaciones cúbicas:

$$ax^3 + bx^2 = c$$

$(\frac{ax}{b})^3 + (\frac{ax}{b})^2 = \frac{ca^2}{b^3}$ multiplicando por a^2 y dividiendo por b^3 y sustituyendo $y = \frac{ax}{b}$ en la ecuación se obtiene: $y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$ la cual resolvían buscando en la tabla de $m^3 + m^2$ el valor más cercano al lado derecho.

Estos *procedimientos* los realizaban *sin una notación algebraica* mostrando gran entendimiento; sin embargo, no poseían un *método* para resolver la ecuación de tercer grado. Las matemáticas babilónicas fueron las matemáticas desarrolladas en Mesopotamia desde la temprana civilización Sumeria hasta la caída de Babilonia en el 539 a. C. Los textos de la matemática babilónica, fueron abundantes y bien editados: se puede hacer una clasificación en dos períodos temporales: el referido a la Antigua Babilonia (1830-1531 a. C.) y el correspondiente al Seléucida de los últimos tres o cuatro siglos a. C.; en cuanto a estos textos, se encontraron solo algunas diferencias entre los dos grupos. La matemática babilónica permaneció constante en carácter y contenido aproximadamente por dos milenios.

El conocimiento de las matemáticas en Babilonia, se deriva de más de 400 tablillas de arcilla encontradas desde 1850 y el *lenguaje* que representan en estas tablillas corresponde a una escritura cuneiforme, esto es, dejaban marcas en forma de cuña y las grababan mientras la arcilla estaba húmeda, para posteriormente cocinarlas en un horno o secarlas al sol (ver, figura 6.5). El álgebra babilónica, fue de tipo verbal y se han encontrado registros que muestran que *los problemas* de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y además, podían resolver problemas que involucraran ecuaciones cuadráticas y cúbicas usando fórmulas desarrolladas exprofeso.

Algunos de los registros, parecen ser tareas graduadas y las tablillas encontradas de alrededor del año 1600 a. C. muestran que algunos de los *problemas* involucraban resolver ecuaciones cuadráticas por la fórmula general. Este *método* se basaba en expresar la ecuación cuadrática en su forma normal y luego aplicar el método explicado para su solución. Este *método o procedimiento* se describe como el de: *encontrar dos números si se conoce su suma y su producto:* $x + y = s$ *y* $xy = p$ *con* $p, \quad s$ *dados* y como se mostró, esto, era equivalente a solucionar la cuadrática por la fórmula de segundo grado.

Se resalta así, que la fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado, se conoce y se aplica desde hace más de 3700 años con uso hasta nuestros días (Dávila, 2002, p.14). En general, las *situaciones–problema,* se orientaban a resolver problemas cotidianos de cálculo de impuestos, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Pero a diferencia de las matemáticas egipcias, se tenía conciencia de algunas reglas generales que hacían que los métodos funcionaran en los casos particulares a los que cuales se les aplicaba; aunque no lograron dar el paso a lo general que es lo que distingue el pensamiento abstracto del común (Dávila, 2002, p. 13).

La mayoría de las tablillas de arcilla fueron recuperadas (1800 al 1600 a. C.) y en ellas se describen *conceptos* que incluyen fracciones, problemas de álgebra, ecuaciones cuadráticas y cúbicas y tríos de enteros en aplicación de un esbozo del teorema de Pitágoras, demostrado en Grecia tiempo después. La tablilla babilónica YBC 7289, presenta una aproximación de $\sqrt{2}$ con cinco decimales de exactitud. En cuanto a los *términos,* utilizado en estas matemáticas babilónicas, estas fueron escritas con un sistema de numeración sexagesimal (base 60): de

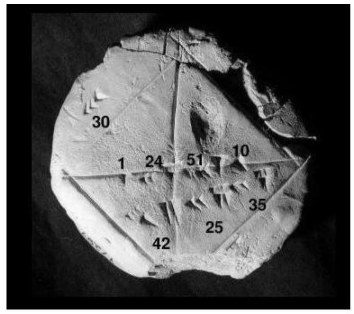


Figura 6.5: Tablilla de arcilla

ahí se deriva la división de un minuto en 60 segundos y de una hora en 60 minutos, así como la de un círculo en $360 = (60 * 6)$ grados y las subdivisiones sexagesimales de esta unidad de medida de ángulos en minutos y segundos.

6.3.4. Problema 0.4: Solución de la ecuación algebraica de grado 2 por los griegos

Problema: Encontrar dos números** x, y **tal que** $x + y = s$ **y** $xy = p$ **para** p, s **dados

Solución:

Los pitagóricos, conocían el álgebra babilónica y por tanto, ella debía ajustarse a la geometría, así, la forma normal de las ecuaciones de segundo grado para encontrar dos números dada su suma y su producto, se debía interpretar geométricamente. El problema de encontrar dos números x, y tal que $x + y = s$ y $xy = p$ para p, s dados lo solucionan de la siguiente forma:

Construir un rectángulo sobre un segmento de longitud s, con una anchura x de tal forma que el área del rectángulo sx sea mayor que el área p en un cuadrado de área x^2 para llegar a la ecuación $sx = p + x^2$ (que la solucionaban por el método del problema anterior).

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d. C.) son los *Sulvasütras*, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. El *lenguaje (términos, expresiones)* de la cultura *griega* se transmite también en rollos de papiro y es precisamente en Grecia, donde el libro adquiere por primera vez su verdadera dimensión debido principalmente, a la aparición de la escritura alfabética procedente de los fenicios: hecho que facilitó en gran medida la técnica de escribir para la democracia griega (sistema político inédito hasta el momento, que permitía a cualquier ciudadano libre que supiera leer y escribir participar en el gobierno).

En cuanto a los *procedimientos* utilizados para la solución del problema, es de aclarar, que en este esquema no era posible sumar longitudes con áreas ni áreas con volúmenes. Por ejemplo, la ecuación $ax = bc$ se interpretaba como una igualdad entre las áreas ax y bc y no como una proporción. Estos cambios, fueron negativos para la evolución del álgebra ya que se cancelaba toda posibilidad de desarrolló independiente de ésta y los intentos encaminados a crear una notación simbólica que les permitiera a los calculistas *aritméticos* abreviar sus fórmulas y métodos de cálculo. Estos *procedimientos,* fueron de tipo *geométrico* por lo que se tenía un *álgebra de tipo geométrica* que perduró por mucho tiempo en Grecia. Todas las fórmulas que utilizaron para resolver las ecuaciones se muestran en el II libro de los Elementos, en términos geométricos: esto hizo que fuera muy difícil el manejo de las ecuaciones de grado mayor a dos, por lo que raramente se trataron las ecuaciones de grado tres y cuatro (Dávila, 2002, p. 18).

Mientras los egipcios y babilónicos perdían fuerza en la producción de obras intelectuales, emergía en la antigua Grecia una nueva forma de hacer matemáticas que constituyó un gran legado para todo el desarrollo de las matemáticas occidentales (Chavarría, 2014, p.22): esto en los siglos VIII, VII, VI antes de Cristo. Luego de algunas guerras, en las civilizaciones: caldea, egipcia y en general en el antiguo oriente se da origen a una fusión que constituyó la civilización griega. Las mas grandes personalidades de la ciencia helénica se nutrieron del conocimiento de las legendarias cunas del oriente, en particular de Egipto, a donde fueron a estudiar diversas áreas del conocimiento: en particular, de matemática aprendieron la geometría y la aritmética, así como los conocimientos astronómicos que los egipcios habían acumulado por siglos.

En el siglo VII a.C., Mileto fue una de las mas florecientes ciudades jónicas de la antigua Grecia: en esta ciudad nació la matemática griega; además, los griegos lograron tener éxito en donde sus predecesores habían fallado, ya que supieron dar a la matemática el rango de *ciencia deductiva por excelencia.* Esto fue posible ya que en sus *procedimientos,* entendieron la diferencia entre manejar las ideas abstractas y generales en lugar de las limitaciones de la ciencia práctica, es decir, aquella que se orienta a la solución de problemas cotidianos.

Para la aplicación de los *procedimientos,* estaban convencidos de que solo con el uso de la razón era posible conocer, pues los sentidos siempre daban imágenes imperfectas del mundo que los rodeaba. Esta fue la semilla, que dio origen a una preocupación por la *formalización* es decir, por la justificación lógica de los razonamientos. De ahí, que reconocieran que para todo razonamiento era preciso partir de ciertos *principios básicos y evidentes por sí mismos* de los cuales se pudieran deducir, con el uso de la razón resultados más profundos. Por tanto, no podían haber demostraciones con un retroceso infinito ni con un proceso circular y todo sistema deductivo debía partir de *axiomas.* Surgiendo de esta forma, el método axiomático, como la aportación más grande de los griegos a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. Este método tuvo su mayor realización en los *Elementos* de Euclides y durante miles de años fueron el modelo a seguir en los desarrollos matemáticos (Dávila, 2002, p. 17).

6.3.5. Problema 0.5: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 por los hindúes

El hindú: Arybhata, escribió su tratado en verso *Aryabhatiya* en el año 499 y de su texto se obtuvo el siguiente problema:

Problema: En la regla de tres, multiplica la fruta por el deseo y divide por la medida. El resultado será la fruta del deseo.

Solución:

La traducción en el lenguaje actual corresponde a la ecuación $ax = bc$ donde a es la medida, b es la fruta y c es el deseo, entonces la fruta del deseo es x y el procedimiento establece que $x = \frac{bc}{a}$.

La obra de Arybhata, el *Aryabhatiya* fue un trabajo de gran significado ya que en él se encuentran las referencias a un sistema de numeración posicional en base 10: “De lugar en lugar cada uno es diez veces el anterior”. Esta obra contiene algunos *procedimientos* incorrectos, ya que no se tenía un método riguroso como en el de los griegos para verificar las soluciones. De otra parte, la geometría parece no haber sido de mucho interés para los matemáticos hindúes ya que solo bastaban las reglas elementales usadas en sus mediciones; al respecto Boyer opina: “En vez de eso, a los matemáticos hindúes les fascinaba trabajar con los números, ya sea que este trabajo involucraba las operaciones aritméticas ordinarias o la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas (citado en Dávila, 2003, p. 29.)” Así, los *métodos* que usaron para sumar y multiplicar fueron muy similares a los que se usan actualmente; además, desarrollaron un método para la división de enteros positivos que llegó a Italia a través de los árabes.

Problema: ya v 1 ya 1 $\dot{0}$ ***ru*** $\dot{9}$

Solución:
El problema se traduce en solucionar la ecuación $1x^2 - 10x = -9$

Aquí el número absoluto $\dot{9}$ multiplicado por (1) el [coeficiente del] cuadrado $(\dot{9})$ y agregado al cuadrado de la mitad del [coeficiente del]término medio, esto es, 25, hace 16; de lo cual la raíz cuadrada es 4, menos la mitad [del coeficiente de la] incógnita $(\dot{5})$ es 9; y dividido por el [coeficiente del] cuadrado (1) produce el valor de la incógnita 9.

En la, terminología actual corresponde al *procedimiento*:

$x = \frac{\sqrt{-9\times1+(-5)^2}-(-5)}{1} = 9$ lo cual equivale:
$x = \frac{-(-10)}{2} + \frac{\sqrt{10^2-4(9)}}{2}$

Procedimiento que corresponde a la solución por fórmula de las ecuaciones de grado dos. Con el declinar de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizaron en la India y en el mundo Árabe, que para ese tiempo (siglo VII) estaba en plena etapa de expansión. Con respecto a los aportes de los matemáticos hindúes, Brahmagupta (598-670) dio una regla o *procedimiento* correcto para resolver las ecuaciones de segundo grado y en su *notación* usa un simbolismo que hace pensar en un *álgebra abreviada* como se muestra en el planteamiento del problema; así por ejemplo, $ya \quad v \quad 1$ significaba $1x^2$ y el punto sobre los numerales indicaba que la cantidad era negativa: esta ecuación, aparece en su texto. La obra más significativa de Brahmagupta fue el *Brahmasphuta Siddhānta*, que es un texto de trigonometría, geometría y álgebra, donde se mezclan resultados correctos con algunos incorrectos y este es el primer texto antiguo donde se da un tratamiento sistemático a la aritmética de los números negativos.

Se cree además, que Brahmagupta fue el primero en solucionar la ecuación lineal Diofántica $ax + by = c$ donde a, b, c son números enteros y con solución entera. En el lenguaje de la *Teoría de Números*, resolver esta ecuación equivale a encontrar todas las soluciones de la congruencia $ax \cong c \quad mod(b)$ las cuales existen si y solo si el máximo común divisor de a y b divide a c; para el caso donde $(a, b) = 1$ da todas las *soluciones* de la ecuación que se puede escribir como $x = p + mb$ y $y = q - ma$ con m un entero arbitrario y p, q soluciones particulares (Dávila, 2003a, p. 32).

6.3.6. Problema 0.6: Solución de las ecuaciones de grado 2 por los árabes

Problema: He dividido diez en dos porciones: he multiplicado una de las porciones por la otra; después de esto, he multiplicado la una de las dos por sí misma y el producto de la multiplicación por sí misma es tanto como cuatro veces el de una de las porciones por la otra.

Solución:

Al-Juarismi resuelve el problema de la siguiente forma:

Llama *cosa* a una de las dos porciones; la otra es *diez menos la cosa.* Al multiplicar las dos obtiene *diez cosas menos un cuadrado (mal)* y siguiendo con el problema, le resulta la ecuación: *un cuadrado, el cual es igual a cuarenta cosas menos cuatro cuadrados.*

Si x es la cosa, entonces $10 - x$ es diez menos la cosa. Se multiplica x consigo misma y se obtiene x^2 que debe ser igual a cuatro veces el producto de x por $10 - x$. Es decir, resulta la ecuación $x^2 = 4x(10 - x)$, por lo que $x^2 = 40x - 4x^2$. Aquí Al-Juarismi usa el *al–jabr* para restaurar el balance:
$x^2 + 4x^2 = 40x - 4x^2 + 4x^2$
luego aplica *al–muq ãbalah* para cancelar los opuestos:
$5x^2 = 40x$
de donde $x^2 = 8x$
y se obtiene $x = 8$

El *problema* se encuentra en el libro *al–jabr* escrito por al–Juarismi. El texto, se encuentra dividido en tres partes: en la primera, tiene *procedimientos* que explican cómo resolver *problemas* que involucran *la cosa* y su *cuadrado* a los cuales Al-Juarismi llamó *shaî y mal* respectivamente: estos *problemas* de ecuaciones lineales y cuadráticas, los clasificó en 6 tipos diferentes y en particular el *problema* presentado correspondía al caso de *cuadrados iguales a raíces.* Todas las ecuaciones se consideraban diferentes y en este tiempo no se trabajaron los números negativos, razón por la cual era necesario separar los 6 casos: a) Cuadrados iguales a raíces; b) Cuadrados iguales a números; c) Raíces iguales a números; d) Cuadrados y raíces iguales a números; e) Cuadrados y números iguales a raíces y f) Raíces y números iguales a cuadrados (Dávila, 2002, p.10).

Figura 6.6: Portada del al-jabr de Al-Juarismi

Entre los *conceptos* que aparecen en el texto de al–jabr se encuentra la clasificación de las ecuaciones de grado dos, en los siguientes tres tipos: a) $x^2 + px = q$; b) $x^2 = px + q$; c) $x^2 + q = px$. Esta clasificación perduró durante toda la edad media y la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ solo se introduce con la notación desarrollada a finales del siglo XVI. Al-Jaurismi (780-850) fue un matemático y astrónomo que pertenecía a la "Casa de la Sabiduría" y que ejerció gran influencia en el desarrollo de las matemáticas en Europa, con su libro sobre el sistema de numeración hindú y el libro de álgebra que fueron determinantes en esta etapa de evolución de las matemáticas. Los *términos: al–jabr y al–muqãbalah* significaban *restauración y oposición* por lo que el libro hacía referencia al *procedimiento* de resolver una ecuación agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado, lo cual restauraba el balance de la misma (al–jabr) y la simplificaba por medio de la cancelación de los términos opuestos (al–muq$\tilde{a}$balah - oposición) como se presentó en la solución del problema.

En el texto de al–jabr del año 825, Al-Juarismi no solo soluciona los problemas que plantea, sino que va más allá; en su libro escribe: *Hasta aquí hemos dicho bastante sobre los cálculos numéricos en lo que respecta a los 6 tipos de ecuaciones. Ahora, sin embargo, es necesario que demostremos geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado con números (Boyer, 1991, p. 230).* Esta preocupación, revela una clara influencia griega por la *argumentación* o demostración de la *validez de los métodos.* Se puede decir, que el álgebra de Al-Juarismi, se caracterizó por representar un espíritu ecléctico ya que aprovechó lo mejor de los babilónicos, los hindúes y los griegos (Dávila, 2002, p.10).

En general, los *métodos* del álgebra, fueron métodos aritméticos que daban solución a ecuaciones lineales (grado 1) y cuadráticas (grado dos) y los *problemas* planteados correspondían a repartición de herencias, transacciones comerciales, medida de terrenos: *lo que los hombres hacen constantemente requiere ... en todos sus tratos entre ellos...* Y el *lenguaje* utilizado para el tratamiento de los problemas fue de tipo verbal, como se muestra en el planteamiento del problema presentado.

Se presenta el siguiente ejemplo del libro de al-Juarismi:

Problema: ¿Cuál es el cuadrado que combinado con diez raíces dará una suma total de 39?

Lo que corresponde en notación simbólica a resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$. En esta época no se confiaba en las soluciones de las ecuaciones si no estaban *justificadas* geométricamente ya que el álgebra no era concebida como una rama independiente de las matemáticas y la única ciencia que se tenía como segura por su carácter deductivo era la geometría, la cual se pone en evidencia con los *Elementos* de Euclides, que los matemáticos árabes conocían bien y que eran el paradigma a seguir para todo conocimiento que pretendiera ser científico. Así, el álgebra árabe y luego el álgebra italiana estuvieron influenciadas por el pensamiento geométrico griego, así, los números fueron comprendidos como longitudes de segmentos de rectas, como áreas o como volúmenes (Dávila, 2003a, p. 36).

6.3.7. Problema 0.7: Solución de las ecuaciones de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo, Fibonacci)

Problema: Encontrar un número tal que su cuadrado sumado con cinco y su cuadrado menos cinco sean ambos cuadrados

Solución:

El problema se plantea dando solución al sistema:
$x^2 + 5 = a$ y $x^2 - 5 = b$

En el texto: "Liber Quadratorum-Libro de los números cuadrados" se presenta un análisis detallado de la solución del problema. Fibonacci descubrió que ningún número entero cumplía la condición, por tanto, el resultado debía ser una fracción. La solución dada corresponde a $x = 3\frac{5}{12}$ por lo que $x^2 + 5 = (4\frac{1}{12})^2$ y $x^2 - 5 = (2\frac{7}{12})^2$.

La edad media, inicia en Europa con la caída de Roma en el año 476 y se termina con la conquista de Constantinopla en el año 1453 por los turcos. En el siglo XII, se presenta a Leonardo de Pisa (1170-1250) como a un matemático relevante del mundo occidental, conocido como Fibonacci (hijo de la familia Bonacci). Su padre fue representante de los mercaderes de Pisa en el comercio que éstos realizaban en el norte de Africa. Por ese motivo, Leonardo estudió con un maestro árabe y viajó a Egipto, Siria y Grecia y aprendió álgebra y el sistema de numeración de los árabes. El texto *Liber Abaci* junto con *Flos* (1225) y *Liber Quadratorum*(1225) fueron los trabajos más famosos de Fibonacci. En *Flos* se resuelven ecuaciones algebraicas determinadas e indeterminadas de las cuales se presentan dos problemas especiales.

Fibonacci, utilizó *propiedades* relacionadas con ternas pitagóricas e identidades notables y demostró que $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ formaban una terna pitagórica para m, n enteros y $0 < n < m$.

6.3.8. Problema 0.8: Método de Fibonacci para la solución de ecuaciones algebraicas de grado 3

Problema: Encontrar un número tal que su cubo, dos cuadrados y diez raíces sean veinte

Solución:

Como:
$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (1)
se tiene que:
$10(x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2) = 20$ (2)
de donde:
$x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 = 2$ (3)
Y en consecuencia $x < 2$.

Pero de (1) se tiene que $1 + 2 + 10 = 13 < 20$ por lo que $x > 1$
Además, x no puede ser una fracción, ya que si $x = \frac{a}{b}$ entonces de (3) se tiene que:
$\frac{a}{b} + \frac{a^3}{10b^3} + \frac{a^2}{5b^2}$ no puede ser un entero.
Por tanto, x debe ser un número irracional; pero tampoco puede ser un irracional de la forma $\sqrt{m}$ para un entero positivo m, pues de (1) se tiene que:
$x = \frac{20-2x^2}{10+x^2}$

Por lo que si $x = \sqrt{m}$ entonces:
$\sqrt{m} = \frac{20-2m}{10+m}$

Lo cual es absurdo al ser x un irracional. Pero x no puede ser alguna de las irracionalidades discutidas en el libro X de los Elementos de Euclides, tales como $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Así, la solución es un número irracional x que cumple $1 < x < 2$ y se presenta la solución aproximada: $x = 1;22,7,42,33,4,40$, en notación sexagesimal: que corresponde a:
$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^{66}}$

Por lo que $x \approx 1{,}368808106$

y al sustituir el valor en la ecuación (1) se obtiene 19,99999995 por lo tanto $20-(x^3+2x^2+10x) = 0{,}00000005$ y la solución propuesta es notablemente precisa.

En la obra *Flos (1225)* de Fibonacci, se encuentra este problema y su solución, que también presenta en la obra de *Los números cuadrados.* En el *problema,* se establece que no es posible encontrar una solución exacta por *métodos algebraicos*, por lo que recurre a la solución por un *procedimiento* de *aproximaciones;* no es claro como logra realizar el proceso de resolución, sin embargo, en algunas fuentes (Boyer, 2001) se afirma que posiblemente utilizó el *método de Horner,* el cual se conocía en China desde mucho tiempo atrás (Chavarría, 2014, p.43).

Entre los *conceptos* que utiliza para la solución de los problemas, se encuentran precisamente el de los *números cuadrados* cuyo estudio inició a partir de los rudimentos de lo que se conocía desde la antigua Grecia y fue avanzando gradualmente y resolviendo proposiciones hasta dar solución al *problema del análisis indeterminado* que le había propuesto como desafío un matemático de la corte de Federico II (Teodoro) en el cual se le propone: Encontrar un cuadrado tal que si se le suma o resta el número cinco, da como resultado en ambos casos números cuadrados. Curiosamente, el año de publicación del libro también es un número cuadrado y la respuesta corresponde a la que se presenta para la solución del problema. Pasaron tres siglos para que Tartaglia y Cardano atacaran el problema de la ecuación cúbica; sin embargo, Fibonacci en este segundo problema, encontró que la solución no era entera y pudo dar una buena aproximación.

Otro de los *conceptos* que utilizó corresponden al sistema de numeración Hindú–arábigo, extracción de raíces y fracciones unitarias. Fibonacci replanteó los algoritmos para la resolución de las ecuaciones como los propuestos por Al–Juarismi, Diofanto y Euclides. En su obra de los números cuadrados, introduce los *conceptos* de números a los que denominaba congruentes (proposición IX) y que los *define* según la terminología actual, como $c = m.n(m^2 - n^2)$ donde m y n son enteros positivos impares con $m > n$. De esta forma, el menor de ellos es 24. También, enuncia y demuestra que el producto de un número congruente por un cuadrado es otro número congruente: utilizó estos números como herramientas para sus posteriores proposiciones y los hace intervenir en una identidad que es conocida como la identidad de Fibonacci (proposición XI): $[1/2(m^2 + n^2)]^2 \pm mn(m^2 - n^2) = [1/2(m^2 - n^2) \pm mn]^2$ esta identidad le permite pasar con facilidad de un triángulo rectángulo a otro.

En cuanto al *método* que utilizó, frecuentemente usaba las proposiciones precedentes como lemas para las siguientes, por lo que el libro de *Los números cuadrados,* lleva un encadenamiento lógico. Sus demostraciones fueron de *tipo retórico* y usó segmentos de recta como representación de cantidades. Algunas *proposiciones* no se encuentran rigurosamente demostradas, sino que realiza una especie de *inducción incompleta,* dando ejemplos prácticos y específicos: su dominio algorítmico fue excelente y todo lo que afirmó se puede demostrar con las herramientas actuales. No se encuentran errores importantes al hacer la excepción de la incompletitud de algunas demostraciones (Dávila, 2003b, p. 41).

En el texto *Liber Abaci,* (abaci en el sentido de aritmética y no del ábaco) mostró la importancia del nuevo sistema de numeración, aplicándolo a *problemas* de: contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda y otras numerosas aplicaciones. También, describió el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos y criterios de divisibilidad. El libro fue recibido con entusiasmo en la Europa ilustrada y tuvo un impacto profundo en el pensamiento matemático europeo.

6.3.9. Problema 0.9: Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a Del Ferro, profesor de matemáticas de la universidad de Bolonia.

Problema: El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número

Solución:

El problema corresponde a la solución de la ecuación $x^3 + px = q$ con p, q números enteros positivos.

En este tiempo no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico, por lo que la ecuación que se conocía era la que se enunciaba en el problema: el *método* de solución fue de tipo verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema en forma general había estado sin solución desde los tiempos de Arquímedes, quien resolvió ecuaciones cúbicas por métodos geométricos. Además, otros matemáticos habían resuelto casos particulares de esta ecuación. Del Ferro, nunca publicó sus resultados, pero antes de su muerte, reveló el método a su yerno Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior (Tartaglia), quién pretendía de regreso a Venecia formarse un buen nombre como matemático (Dávila, 2003b, p. 46) y cuyo método se explica en el siguiente problema.

6.3.10. Problema 0.10: Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a del Ferro, profesor de matemáticas de Bolonia como se describió en el problema anterior.

Problema: $x^3 + px = q$

Solución	
Quando chel cubo con le cose appresso Se aggualia à qualche numero discreto Trouan dui altri differenti in esso Dapoi terrari questo per consueto Che'l lor produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo general Delli lor lati cubi ben sustratti Varra la tua cosa principale	Cuando el cubo junto a la cosa se iguala a cualquier número discreto encuentra dos números que difieran en eso despúes tendrás esto por costumbre: que su producto siempre sea igual al cubo del tercio de [el coeficiente de]la cosa entonces su residuo general de sus lados cúbicos que han sido restados te dará la cosa principal

El álgebra era de tipo retórico, ya que no se había desarrollado una notación adecuada todavía; por lo que la solución dada era la que se presentó en la tabla anterior. El *procedimiento* correspondía a hallar dos números u, v tal que $u - v = q$ pero estos números debían satisfacer que $uv = \frac{1}{3}p^3$ para finalmente llegar a obtener que, $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Con este problema solucionado, Tartaglia afirmó que le había dado una explicación completa de su método a Cardano; pero en el libro del *Ars Magna* Cardano, explica que Tartaglia se quedó con la demostración, por lo que tuvo que buscarla; lo cual le resultó difícil aunque luego de varios intentos llegó a la demostración (Dávila, 2003b, p. 48).

Las anteriores 10 problemáticas dieron origen a la configuración epistémica que se presenta de la tabla 6.16: se inicia con los problemas de las civilizaciones antiguas y en la parte superior se registran los problemas de la edad media.

Tabla 6.15: Configuración epistémica CE0

CE0. Métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media	
CE0.10	Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)
CE0.9	Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)
CE0.8	Método de Fibonacci para la solución de la ecuación de grado 3
CE0.7	Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Fibonacci)
CE0.6	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática árabe
CE0.5	Las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática hindú
CE0.4	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática griega
CE0.3	La solución de ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 por los babilonios
CE0.2	Ecuaciones relacionadas con la distribución de un área en cuadrados
CE0.1	Las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en la matemática egipcia

6.3.11. Problema 1.1: Solución de un caso especial de la ecuación cúbica (Gerolamo Cardano)

Problema: $x^3 + 6x = 20$

Solución:

Cardano procede de la siguiente forma (método para el problema de Tartaglia):

$(\frac{1}{3}6)^3 = 8$

$\frac{1}{2}20 = 10$ ahora $10^2 = 100$
Se suma $100 + 8 = 108$ luego se toma la ráiz cuadrada $\sqrt{108}$

$(\sqrt{108} + 10)$ es el *binomio*
$(\sqrt{108} - 10)$ es la *apotama*

Se toma raíz cúbica $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Por lo tanto el valor de la cosa es:

$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Así, si $u = \sqrt{108} + 10$ y $v = \sqrt{108} - 10$
entonces, $u - v = 20$ como lo establece el método de Tartaglia y además $uv = 2^3$
finalmente, la solución es de la forma $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Cardano no dice nada de las otras raíces de la ecuación, ya que esta es la única verdadera porque no considera las raíces negativas o complejas como tales. Pero, el verdadero mérito de Cardano es que no solo solucionó este problema, sino que inició con el estudio de los otros casos de la cúbica con éxito. Así, para otro de los *problemas* que corresponde al caso del cubo igual a la cosa y un número, da la siguiente regla:

Caso $x^3 = px + q$

"Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la cosa no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y de nuevo, réstalo de la misma mitad y tendrás, como se dijo, un binomio y su apotama: la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la cosa" (Dávila, 2003b, p. 49.)

Un punto importante en el *procedimiento* dado, es la restricción que impone a la diferencia $(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{2}^2)$ la cual debe ser no negativa ya que es necesario tomar la raíz cuadrada de este número. Otros casos de la cúbica fueron analizados por Cardano, pero al tratar el *problema* del cubo y el cuadrado iguales a un número, aparece un importante hecho al tratar de reducir la ecuación a una cúbica donde no aparezca el término cuadrático, eliminándolo con la sustitución $x = y - \frac{p}{3}$ para llegar a la cúbica del caso anterior: $y^3 = 3(\frac{p}{3})^2 y + [q - 2(\frac{p}{3})^3]$ la cual resuelve para y y vuelve a reemplazar para obtener los valores de x.

De igual forma, el *problema:* del cuadrado y la cosa igual a un número, al igual que para el caso anterior, se reduce a solucionar una ecuación que no tenga el término cuadrático. Otro ejemplo de los problemas dados por Cardano corresponde a:

Problema: Un oráculo le ordenó a un príncipe construir un edificio sagrado cuyo espacio debería ser de 400 cubits, del cual lo largo debe ser seis más que lo ancho y lo ancho tres más que la altura. Se deben encontrar estas cantidades.

El *procedimiento* para la solución es el siguiente: Si x es la altura, entonces lo ancho es $x+3$ y el largo $x+6$ y se obtiene la ecuación $x^3 + 12x^2 + 27x = 400$ de la cual se procede a eliminar el término cuadrático y se obtiene la ecuación cúbica $y^3 = 21y + 380$ de donde, al igual que para el primer caso $y = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}}$ así que $x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} + 4$. De igual forma analiza en total 13 casos de la cúbica y otros casos que se derivan de ellos.

Cardano llegó al *argumento*: "...de esto es evidente que el coeficiente cuadrado, en los tres ejemplos en los cuales hay tres soluciones para la cosa, es siempre la suma de las tres soluciones..." Esta es la primer vez que se menciona este hecho que tiene relación con los polinomios simétricos elementales y la relación de los coeficientes de la ecuación y sus raíces.

6.3.12. Problema 1.2: Solución por radicales de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media

Problema de Gerolamo Cardano y la resolución general de la ecuación cúbica:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{6.2}$$

Para la ecuación cúbica general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con raíces x_1, x_2, x_3 y a, b, c números racionales, el *procedimiento* dado por Cardano, corresponde a:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$
de donde, se describen los polinomios simétricos elementales en relación con los coeficientes de la ecuación:

$x_1 + x_2 + x_3 = -a$
$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$
$x_1x_2x_3 = -c$

Para solucionar la cúbica general procede con la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para llegar a una ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$ y toma como solución:
$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ luego como:

$y^3 = (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})^3 = u + v + 3(\sqrt[3]{u})^2\sqrt[3]{v} + 3(\sqrt[3]{u})(\sqrt[3]{v})^2$
$= (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$

se tiene la ecuación $y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$ que la compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ y obtiene que:

$\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v} = \frac{-p}{3}$
$u + v = -q$ de donde:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$

Se halla la ecuación cuadrática con u, v raíces y se reemplazan las fórmulas anteriores para obtener:

$z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3 = 0 = z^2 - (u + v)z + uv = 0$

Soluciona la cuadrática en z y obtiene:

$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

Por lo que:

$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

$v = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$

Y como se supuso la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Y ésta es la solución de la cúbica general (6.2) que se conoce como la *fórmula de Cardano.*

En la configuración epistémica, correspondiente a la solución de la cúbica general de Cardano, se tiene que entre los objetos matemáticos, predominan los *procedimientos* ya que en este caso, también se describe en forma completa un método de solución. Se observa que si se tiene una ráiz, es fácil encontrar las otras dos y que las raíces de la cúbica general (6.2) se obtienen mediante la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$. Cardano descubrió con su alumno Ferrari que efectivamente el primero en descubrir el método para resolver el problema *del cubo y la cosa igual al número* había sido del Ferro al rededor de 1515 (Dávila, 2003b, p. 53). De igual forma otro de los objetos matemáticos de la configuración, son los *conceptos* que aparecen en los resultados de Cardano y Ferrari, que llevaron al descubrimiento y al estudio de los números complejos. En principio, los algebristas trataban de resolver ecuaciones con coeficientes reales (normalmente racionales), pero tales ecuaciones podían tener *soluciones imaginarias.* En cambio, cuando una ecuación cubica tiene tres raíces reales distintas -que pueden ser conocidas si se construyen tal que verifiquen la fórmula de Cardano- resulta que esta proporciona expresiones para las raíces en la que aparecen raíces cuadradas de números negativos. Fue este hecho, el que indujo a los matemáticos a plantearse que tal vez fuera posible operar coherentemente con cantidades “imaginarias” de manera que al simplificar las expresiones imaginarias que proporcionaba la fórmula de Cardano, se pudiera llegar finalmente a las soluciones reales de la ecuación (Ivorra, 2011).

6.3.13. Problema 1.3: Solución general de la ecuación bicuadrática (Ludovico Ferrari)

Otra de las aportaciones del *Ars Magna* de Cardano, fue el *método* para resolver la ecuación de grado cuarto y el crédito del descubrimiento lo da a Ludovico Ferrari como el mismo Cardano lo hace saber. Ferrari alumno de Cardano, encontró un método para calcular las raíces de la ecuaciones de cuarto grado $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$.

Problema:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{6.3}$$

Solución:

Primero se elimina el término cúbico con la sustitución $x=y-k$
$(y-k)^4+a(y-k)^3+b(y-k)^2+c(y-k)+d=0$

Se hace el coeficiente del término cúbico $-4k+a=0$ para obtener que $k=\frac{a}{4}$
Entonces se llega a la ecuación $y^4+y^2(-\frac{3a^2}{8}+b)+y(\frac{a^3}{8}-\frac{ba}{2}+1)+(-\frac{3a^4}{256}+\frac{ba^2}{16}-\frac{a}{4}+d)=0$
Que se representa como:

$y^4+py^2+qy+r=0$
Ahora, se introduce un parámetro α y se expresa la ecuación en términos de p,q,r como:

$$(y^2+\frac{p}{2}+\alpha)^2=2\alpha y^2-qy+(\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}) \tag{6.4}$$

Luego, se toma el lado derecho de la igualdad de (6.4) y se factoriza:
$2\alpha(y^2-\frac{q}{2\alpha}y+(\frac{\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}}{2\alpha}))$
Ahora, para que la expresión sea un cuadrado perfecto se necesita que:

$\frac{q^2}{16\alpha^2}=\frac{\alpha^2+p\alpha-r+\frac{p^2}{4}}{2\alpha}$

Para que esto suceda α debe ser la raíz de la ecuación cúbica auxiliar que actualmente se conoce como "la cúbica resolvente" de la ecuación cuartica:

$8\alpha^3 + 8p\alpha^2 + (2p^2 - 8r)\alpha - q^2 = 0$
la cual se resuelve usando la fórmula de Cardano (fórmula del Ferro).

Y se obtiene la raíz α_0 de la cúbica, luego la ecuación 6.4 se expresa como:
$(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0)^2 = 2\alpha_0(y - \frac{q}{4\alpha_0})^2$
Y se encuentra que,
$(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0) = \pm\sqrt{2\alpha_0}(y - \frac{q}{4\alpha_0})$

Estas son dos ecuaciones cuadráticas para y por lo que se obtienen las cuatro soluciones, las cuales se reemplazan en $x = y - \frac{a}{4}$ para obtener las raíces de (6.3).

En la configuración-epistémica predomina el objeto matemático correspondiente a *procedimientos* que describe Cardano, para dar solución a la ecuación (6.3). este procedimiento es diferente al de los algebristas italianos del siglo XVI, pero en esencia los *métodos* son equivalentes (Dávila, 2003, p. 54). La obra de Cardano del *Ars Magna,* marca un punto en la historia del desarrollo del álgebra y a Cardano se le considera como una figura central de este proceso. Además, el hecho de tener *procedimientos* para hallar las soluciones de las ecuaciones de tercer y cuarto grado significó un gran avance para la matemática en general donde se establecieron las bases para el advenimiento del álgebra moderna.

6.3.14. Problema 1.4: Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas (Cardano y Viète)

Problema: ¿Qué relación existe entre las raíces y los coeficientes de la ecuación algebraica?

Solución:

Para la ecuación de grado dos $ax^2 + bx + c = 0 = (x - x_1)(x - x_2)$ se tiene que si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación, entonces:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Para la ecuación algebraica general de grado n:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ se tiene entonces que:

$a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + ... + x_n)$
$a_{n-2} = a_n(x_1 x_2 + ... + x_1 x_n + x_2 x_3 + ... + x_{n-1} x_n)$
$a_{n-3} = a_n(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 + x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n)$
$\vdots$

$a_1 = (-1)^{n-1} a_n(x_1 x_2 ... x_{n-2} x_n + ... + x_2 ... x_{n-1} x_n)$
$a_0 = (-1)^n a_n(x_1 x_2 ... x_n)$

La configuración epistémica asociada al *problema* hace referencia a la generalización de la relación que existe entre los coeficientes de la ecuación algebraica de grado n y sus raíces. La configuración tiene como objeto primario matemático predominante a los *argumentos,* ya que éstos se presentan en fórmulas generales las cuales establecen las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación de grado n. Las relaciones se pueden definir como funciones de los polinomios simétricos elementales los cuales fueron descritos por Newton y otros matemáticos.

6.3.15. Problema 1.5: Solución general de las ecuaciones de grado 2 (Francois Viète)

Problema: a quadr +B2in A aequantur Z plano

Solución:

Para la solución de la ecuación que corresponde a $x^2+2ax=b$, Viéte inicia con la sustitución $x=u-v$:
$(u-v)^2+2a(u-v)=b$ y luego hace la sustitución $v=\frac{a}{2}$ para obtener:
$(u-\frac{a}{2})^2+2a(u-\frac{a}{2})=b$
así,
$u^2-au+(\frac{a}{2})^2+2au=a^2+b$
$(u+\frac{a}{2})^2=a^2+b$
entonces,
$u=\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2}$
así,
$x=u-\frac{a}{2}=(\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2})-\frac{a}{2}$
$x=\sqrt{a^2+b}-a$

En esta configuración, se verifica que el *procedimiento* descrito por Viéte, corresponde al desarrollo de la fórmula para las ecuaciones de segundo grado; pero la nueva *notación* que introduce Viéte, hace posible la discusión de las técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. En 1590 aproximadamente, Vieta realiza otros avances importantes respecto a los métodos algebraicos para solucionar ecuaciones algebraicas, consiguiendo reducir la cuadrática general a una cuadrática pura utilizando una hábil sustitución. De ésta forma, Viéta es quien, a través de sus *procedimientos y métodos* llega a interpretar la cúbica general, como una ecuación en la cual todos los casos considerados por Cardano resultaban casos particulares y proporciona un solo *método* de solución que puede aplicarse a todos los casos. Sin embargo, el simbolismo algebraico de Viéta no corresponde totalmente al que actualmente se usa, sino que fue muy similar.

6.3.16. Problema 1.6: Solución general de la ecuación algebraica de grado 3 (Francois Viète)

Problema: $x^3+ax^2+bx+c=0$

Solución:

Primero hace la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para reducir la ecuación a una de la forma $y^3 + 3py = q$:

$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$

De donde se obtiene:
$y^3 + 3(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9})y + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$

Se hace $p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}$ y
$q = -(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)$

Se llega a la ecuación $y^3 + 3py = q$ equivalente a $y^3 + py + q = 0$
que según los métodos de Cardano:

Primero se supone la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.
Así, que:

$y^3 = (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$ y
$y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$
Ecuación que se compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ para obtener:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$
$u + v = -q$

En segundo lugar, si u, v son raíces de la cuadrática, se tiene:

$z^2 - (u + v)z + uv = 0 = z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3 = 0 =$ cuyas soluciones son:

$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ entonces como:
$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y
$v = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y como la solución es de la forma:

$y = \sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ de cuyas combinaciones salen 6 raíces pero solo 3 raíces cumplen la condición que $uv = -(\frac{p}{3})^3$ así que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En la configuración epistémica relacionada con la practica matemática, los *términos* en el álgebra de Vieta, tenía algo de verbal, ya que no se adoptó el *símbolo* + hasta mucho tiempo después de éstos desarrollos; también se puede observar de la solución al problema que el objeto matemático predominante corresponde a *procedimientos* ya que la solución presenta un método claro para solucionar las ecuaciones de grado tres. El *simbolismo* de Viéta no estuvo completamente desarrollado, ya que fue una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico; pero, fue lo suficientemente flexible para sentar las bases de la teoría moderna de ecuaciones. Vieta consideró en sus *procedimientos,* casos generales y no casos particulares como Cardano y sus antecesores; además Cardano había tenido conocimiento de la relación con los coeficientes de la ecuación algebraica y sus raíces; con el nuevo simbolismo de Viéte quedó más clara dicha relación para los matemáticos de la época (Dávila, 2003b, p. 39). En Inglaterra las ideas de Viéta tuvieron mucha influencia en dos académicos a los que se les considera como los precursores de una escuela inglesa que favoreció el estilo simbólico y que establecen las bases para el desarrollo de un álgebra simbólica en la isla: ellos son: Tomás Harriot(1560-1621) y Willian Oughtred (1574-1660).

6.3.17. Problema 1.7: El simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4 (Thomas Harriot)

Problema: $aaaa - 6aa + 136a = 1155$

Solución:

La ecuación es $a^4 - 6a^2 + 136a = 1155$	
Parte de la ecuación equivalente $aaaa - 2aa + 1 = 4aa - 136a + 1156$ Así que : $(aa-1)^2 = (2a-34)^2$	
$aa - 1 = 2a - 34$	$aa - 1 = 34 - 2a$
$33 = 2a - aa$	$aa + 2a = 35$
$aa - 2a = -33$	$aa + 2a + 1 = 1 + 35$
$aa - 2a + 1 = +1 - 33$	
$a - 1 = \sqrt{-32}$	$a + 1 = \sqrt{36}$
$1 - a = \sqrt{-32}$	$a = \sqrt{36} - 1 = 5$
$a = 1 + \sqrt{-32}$	$-a - 1 = \sqrt{36}$
$a = 1 - \sqrt{-32}$	$a = -\sqrt{36} - 1 = -7$

En la obra *Praxis,* Harriot a excepción de dos casos, solo reconoce raíces positivas de ecuaciones, pero trabaja las ecuaciones con coeficientes negativos. En sus manuscritos da ejemplos de ecuaciones de grado cuarto, con un análisis completo en las que obtiene todas las raíces sean estas positivas, negativas o complejas. El ejemplo anterior, se toma de sus manuscritos y no está incluido en la obra de *Praxis*. El *problema* en este caso corresponde a resolver la ecuación de grado cuarto (Dávila, 2003b, p. 40). En el *procedimiento* que desarrolla, se observa como completar cuadrados y la simplificación de algunos pasos elementales en el proceso de obtener las raíces de la ecuación; el conocimiento sobre la extracción de la raíz cuadrada cuyo resultado corresponde a dos valores; uno positivo y el otro negativo y el manejo de todas las raíces sean negativas, positivas, reales o complejas. En el *procedimiento* se hace evidente el manejo de la *notación* relacionada con un simbolismo algebraico que sirvió para influenciar a las dos siguientes generaciones de matemáticos ingleses; incluso a Lagrange en el siglo XVIII y a Silvester en el siglo XIX, los cuales se expresaron bien del trabajo de Harriot.

En la obra de *Praxis* presenta como *conceptos*, una introducción a la teoría de ecuaciones algebraicas, donde repite ejemplos similares, tal vez haciendo uso de un *método* de tipo pedagógico. La obra destaca el simbolismo usado por el autor, el cual le permite una mayor generalización de los procesos algebraicos: simbolismo que es novedoso para su tiempo. Se establece que la generalidad de sus *métodos* lo dirigen hacia una nueva álgebra y al aplicar su método por medio de aproximaciones sucesivas, consolida un *método algorítmico*; también, a Harriot se le considera como el primero en dar una solución algebraica simbólica a la ecuación cúbica y el primero en observar que si a, b, c son raíces de la cúbica, entonces la ecuación se puede escribir como $(x-a)(x-b)(x-c)=0$.

6.3.18. Problema 1.8: Solución de la ecuación algebraica de grado 4 (Euler)

Problema: $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$

Solución:

Para la ecuación $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ se inicia eliminando el término cúbico: para esto, se divide por A y propone la sustitución:
$y=x-\frac{B}{4A}$ lo cual lleva a una ecuación donde se ha eliminado el termino de grado tres:

$y^4-ay^2-by-c=0=x^4-ax^2-bx-c$
Euler, toma la solución para la ecuación de grado cuarto de la forma:
$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$
donde, p, q, r se calculan en función de las raíces a,b,c.

Elevando al cuadrado la solución, obtiene:
$x^2-(p+q+r)=2(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$

Elevando nuevamente al cuadrado se obtiene que:
$x^4-2(p+q+r)x^2+(p+q+r)^2=4(pq+pr+qr)+8\sqrt{pqr}x$

Se realizan las sustituciones:
$f=p+q+r$
$g=pq+pr+qr$
$h=pqr$

Y se establece la ecuación reducida de cuarto grado como:
$x^4-2fx^2-8\sqrt{h}x-(4g-f^2)=x^4-ax^2-bx-c=0$
Luego:
$f=\frac{a}{2}$
$h=\frac{b^2}{64}$

$g=\frac{4c+a^2}{16}$

Y se llega a la ecuación reducida:

$x^4+Px^2+Qx+R=0$ donde se conoce P,Q,R

Ahora, pasa a construir la ecuación cúbica auxiliar con raíces p, q, r:

$(z-p)(z-q)(z-r) = z^3-(p+q+r)z^2+(pq+pr+qr)z-pqr = z^3-fz^2+gz-h = 0 = x^3+ax^2+bx+c$ de donde se conocen los coeficientes f, g, h utilizando el método de Cardano (utiliza la ecuación en x).

Para esto se hace la sustitución:
$x = z-\frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático:
$z^3+(b-\frac{a^2}{3})z+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c = 0$
$z^3+pz+q = 0$
con $p = (b-\frac{a^2}{3})$
$q = (\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c)$

Esta ecuación tiene como solución (método de Cardano):
$z = (\frac{-q}{2}+\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}}+(\frac{-q}{2}-\sqrt{\Delta})^{\frac{1}{3}})-\frac{a}{3}$
$\Delta = (\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$
Donde se tiene que si:
$\Delta = 0$ todas las raíces son reales y al menos dos de ellas iguales.
$\Delta > 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos imaginarias.
$\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples.
Ahora, la raíz Δ se escoge arbitrariamente y se fija; las raíces $u, \quad v$ se escogen de modo que cumplan la relación $p = -3uv$, es decir, se escoge una arbitrariamente y la otra se calcula mediante la relación dada y se tiene que:
$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\Delta}}$ es una raíz cúbica arbitraria del radicando, se define la raíz v mediante la relación $p = -3uv$ para obtener:
$v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\Delta}}$

Con estas tres raíces llamadas $p, \quad q, \quad r$ se obtienen cuatro raíces:
$x_1 = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$
$x_2 = \sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$
$x_3 = -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$
$x_4 = -\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$

Finalmente, como se tenía que la solución a la ecuación de grado cuatro era de la forma $y_i = x_i-\frac{B}{4A}$ se reemplaza y se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación de grado cuatro.

Cardano en su obra del "Ars Magna" establece que el primero en conseguir dar solución a la ecuación de grado cuarto fue Ludovico Ferrari; sin embargo, Leonhard Euler también interviene en la solución de las ecuaciones de grado cuarto, como lo muestra el *procedimiento* descrito para dar dicha solución; este *procedimiento* inicia con una sustitución adecuada que permita eliminar el término cúbico, de donde resulta una ecuación incompleta de grado cuatro; para ésta toma una solución apropiada de la forma $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ que eleva hábilmente al cuadrado dos veces para obtener una ecuación incompleta de grado cuarto en p, q, r. Luego, construye la ecuación algebraica de grado tres con raíces p, q, r donde conoce los coeficientes de la ecuación y utiliza el método de Cardano para solucionar la ecuación de grado tres, iniciando con la eliminación del término cuadrático: mediante una sustitución, propone una solución para la cúbica de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ y construye la ecuación de grado dos con u, v raíces de la ecuación que resuelve por fórmula la ecuación de grado dos. Este procedimiento, le permite obtener las soluciones para la ecuación de grado tres y llegar finalmente a la solución de la ecuación de grado cuatro. Se observa que en esta configuración epistémica, el objeto matemático primario predominante corresponde a los *procedimientos* y métodos particulares para encontrar la solución general de las ecuaciones de grado cuarto.

6.3.19. Problema 1.9: Planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4 (René Descartes)

Problema:

$$\mathbf{x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$$

Solución:

Descartes, primero plantea un cambio de variable:
$z = x + \frac{b}{4}$ así que $x = z - \frac{b}{4}$ que se reemplaza para suprimir el término cúbico:
$z^4 + (c - \frac{3b^2}{8})z^2 + (d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8})z + (e - \frac{bd}{4} + \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{216}) = 0$
llegando a la ecuación:
$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

La idea *genial,* de Descartes fue factorizar la ecuación de la forma:

$(z^2+\alpha z+\beta)(z^2-\alpha z+\gamma)=0$

De donde resulta:
$z^4+(\gamma+\beta-\alpha^2)z^2+\alpha(\gamma-\beta)z+\beta\gamma=0$
Llegando a una ecuación de la forma $z^4+pz^2+qz+r=0$
Donde se obtiene que:

$\gamma+\beta-\alpha^2=p$
$\alpha(\gamma-\beta)=q$
$\beta\gamma=r$
Con estas ecuaciones y haciendo operaciones se llega a la ecuación:

$\alpha^6+2p\alpha^4+(p^2-4r)\alpha^2-q^2=0$
Ecuación de sexto grado, donde α tiene solo potencias pares.

Finalmente se hace la sustitución, $A=\alpha^2$ y se obtiene la ecuación cúbica:
$A^3+2pA^2+(p^2-4r)A-q^2=0$
Ecuación que se resuelve nuevamente por el método de Cardano para hallar α,β,γ y reemplazarlas en las ecuaciones:

$(z^2+\alpha z+\beta)=0$
$(z^2-\alpha z+\gamma)=0$

Se obtienen así, las cuatro raíces para finalizar con la sustitución $x=z-\frac{b}{4}$ y obtener los valores de las raíces en la variable x.

En el problema, se observa que el objeto matemático primario predominante en la configuración epistémica, corresponde nuevamente a *procedimientos;* ya que se da un método general para solucionar éstas ecuaciones de grado cuarto, diferente al de Euler. Entre los *conceptos* que se utilizan se encuentra la factorización de trinomios, que representan la idea genial de Descartes. En su obra *La Géométrie,* en uno de los apéndices ejemplifica su *método: para bien conducir la razón y buscar la verdad de las ciencias;* método que expone en su tratado *Discours de la Méthode* de 1637.

Respecto a la solución de las ecuaciones algebraicas afirmó:
Ni las verdaderas raíces ni las falsas son siempre reales; algunas veces son solamente imaginarias; esto es, mientras que siempre podemos concebir tantas raíces para cada ecuación de la forma como las que ya las he asignado, no siempre existe una cantidad definida que corresponda a cada raíz así concebida. De esta

manera, si bien podemos concebir que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ *tiene tres raíces, solamente existe una raíz real, mientras que las otras dos, de cualquier manera que las incrementemos, disminuyamos o las multipliquemos de acuerdo con las reglas expresadas, permanecen imaginarias.*

Descartes inicia su obra de *La Géométrie* con la resolución de *problemas* geométricos con el uso del álgebra (Chavarría, 2014, p.66). Primero muestra el *procedimiento* para interpretar geométricamente las operaciones algebraicas: incluida la resolución de las ecuaciones cuadráticas y luego pasa a centrarse en la aplicación del álgebra a determinados *problemas* geométricos, formulando un planteamiento general de una manera mucho más clara que los *cosistas* del Renacimiento. A lo largo de los libros I y III se dedica a este tipo de *problemas geométricos* en el que la ecuación algebraica resultante solo puede contener una incógnita: insistía, en que al resolver geométricamente una ecuación se deberían utilizar únicamente los métodos más sencillos, compatibles con el grado de la ecuación. Para las ecuaciones cuadráticas eran suficientes rectas y circunferencias y para las cúbicas y las cuárticas bastaban las cónicas.

6.3.20. Problema 1.10: El problema de Pappus (Descartes)

Problema de Pappus descrito por Descartes: "Teniendo tres, cuatro o un mayor número de rectas dadas en su posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no hayan sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro; o bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro, guarde la proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro. De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de líneas" (Descartes, 1596).

El problema se traduce en términos modernos: Dado un número par de rectas (2n rectas), encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas se encuentre en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas.

Solución:

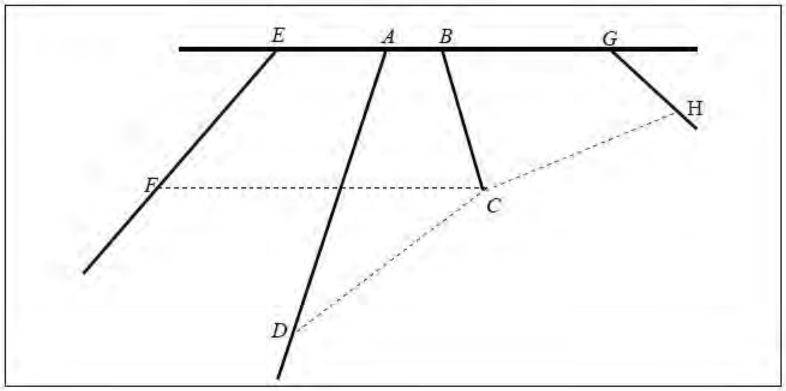


Figura 6.7: Caso particular para cuatro rectas (Chavarría, 2014, p. 69)

Descartes inicia llamando AB, AD, EF, GH a las líneas dadas. El problema a resolver se presenta en la siguiente figura 6.7. Descartes utiliza el método analítico para resolver el problema, para esto supone el problema resuelto estableciendo una relación entre las líneas dadas y las que desea encontrar. Según la figura 6.7 se desea hallar el punto C de forma que después de trazar los segmentos CB, CD, CF, CH y tener los ángulos $CDA = \alpha \quad CFE = \delta, \quad CHG = \varepsilon$, el producto de CF, CD guarde una razón con el producto de CB, CH (ver, figura 6.7, 6.8).

Lo anterior corresponde a una *técnica* que utiliza Descartes para llegar a las ecuaciones algebraicas a través del problema planteado desde lo geométrico, identificando algunos segmentos determinados para detallar los demás con base en éstos. Identifica un origen y a partir de él determina las longitudes relativas; toma $AB = x \quad BC = y$ como ejes de referencia. Luego extiende cada una de las rectas dadas hasta que se corten con la prolongación de BC : a partir de los datos dados para el problema, se determinan los triángulos $ARB, \quad DCR, \quad ESB, \quad CSF, \quad BGT, \quad TCH$ que son conocidos, por lo que establece las razones:

1) $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{v}$
2) $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$
3) $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$
4) $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$
5) $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$
6) $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$

Toma $x = AB$ en 1) y se tiene que $BR = \frac{bx}{z}$;
Sea $y = BC$ entonces como $CR = BC + BR$ se tiene que $CR = y + \frac{bx}{z}$
De 2) se tiene que $CD = \frac{yc}{z} + \frac{bcx}{z^2}$

Tomando $EA = k$ y se tiene que $EB = k + x$
De 3) se tiene que $BS = \frac{dk+dx}{z}$ y $CS = BS + BC = \frac{dk+dx}{z} + y = \frac{dk+dx+zy}{z}$
Con el resultado anterior y de 4) se tiene que $CS = \frac{e}{z}(\frac{dk+dx+zy}{z})$
$CF = \frac{ez}{y} + \frac{dex}{z^2} + \frac{dek}{z^2}$

Ahora, hace $AG = l$ y se tiene que $BG = l - x$
De 5) se tiene que $BT = \frac{fl-fx}{z}$ y como $CT = CB + BT = y + \frac{fl-fx}{z} = \frac{zy+fl-fx}{z}$

De 6) y con el resultado anterior se tiene que $CH = \frac{g}{z}\left(\frac{zy+fl-fx}{z}\right) = \frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$
De los resultados anteriores, se tiene que el problema $CD \cdot CF = k(CS \cdot CH)$ que corresponde a la ecuación cuadrática general:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

Luego de los cálculo, Descartes explica el *procedimiento* que utilizó para dar solución al *problema*: "...de este modo podéis ver que cualquiera que sea el número de líneas dadas en posición, cuantas líneas sean trazadas desde el punto C formando ángulos dados, siguiendo el enunciado del problema, estará compuesto por tres términos: uno estará compuesto por una cantidad desconocida y multiplicada o dividida por una cantidad conocida, el otro estará compuesto por una cantidad conocida x también multiplicada por alguna otra conocida; el tercero, por una cantidad conocida ...Así mismo podéis ver que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades de x, y que se encuentran en el producto pueden tener solamente las dimensiones como líneas haya, a cuya explicación sirven las que han sido multiplicadas. De suerte que nunca tendrán más de dos dimensiones, cuando han resultado de la multiplicación de tres líneas y así al infinito" (Descartes, 1996, p. 407).

Cuando Descartes establece los *conceptos* de cantidades conocidas y desconocidas, hace referencia a números positivos y negativos respectivamente; la advertencia la hace probablemente porque aún no había una aceptación de las cantidades negativas. Se señala también que el problema depende de las líneas que se multipliquen, así que aunque Descartes no lo explícita, en el caso de tres o cuatro rectas el problema corresponde a una ecuación polinómica de segundo grado en las variables x, y (Chavarría, 2014, p. 73).

En la solución del problema, entre los objetos matemáticos que conforman la configuración epistémica relacionada con el problema sobresalen los *procedimientos* geométricos y entre los *conceptos* se encuentra la aplicación de las razones y proporciones entre las longitudes de triángulos determinados por las rectas.

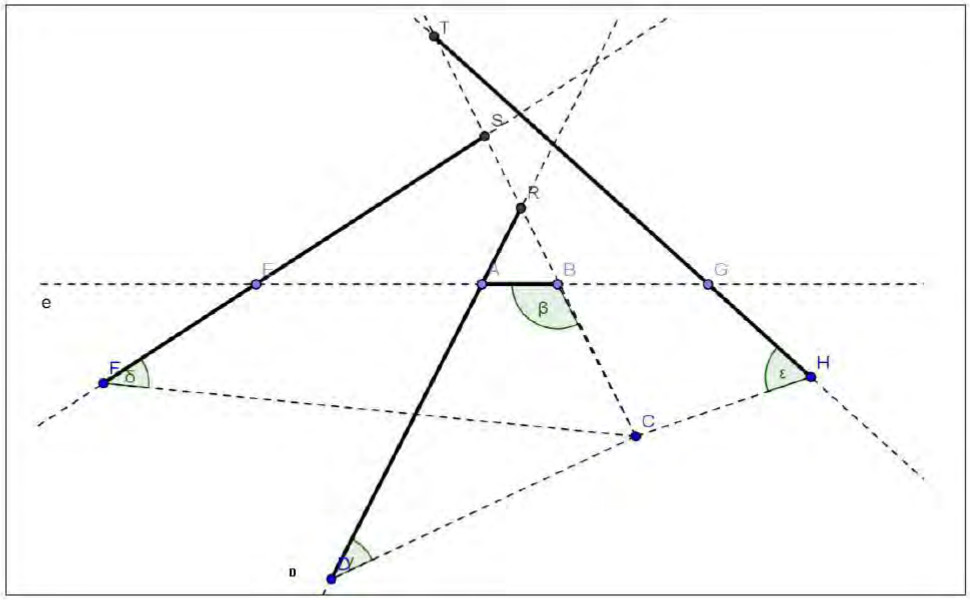


Figura 6.8: Caso particular para cuatro rectas y los ángulos dados (Chavarría, 2014, p. 70)

6.3.21. Problema 1.11: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Fermat)

Problema: pequeño teorema de Fermat: Si p es un número primo que no divide al entero a, entonces $a^{p-1} = 1 mod p$.

Demostración:

Fermat no da ninguna demostración del teorema.

Problema: ¿Cuando un número n es expresable como la suma de dos cuadrados? (Fermat, 1636).

Demostración:

Fermat no da ninguna demostración del teorema y es Euler el que da una primera demostración del teorema.

Fermat observó que habían tres tipos básicos de primos:
1) El número 2, era el único primo par.
2) Primos que son iguales a un múltiplo de 4 más 1 tales como 5,13,17,... éstos primos son todos impares.
3) Primos que son iguales a un múltiplo de 4 menos 1, tales como 3,7,11,... éstos primos también son impares.

Fermat demostró que un primo es una suma de dos cuadrados si pertenece a la categoría 1) o 2) y no es una suma de dos cuadrados si pertenece a la categoría 3). El resultado es que un número es una suma de dos cuadrados si y solo si todo divisor primo de la forma $4k-1$ aparece elevado a una potencia par.

En la Aritmética de Diofanto ya se preguntaba por cuáles enteros se podían representar como la suma de dos cuadrados. Fermat retomó esta pregunta y en una carta a Mersenne, con fecha de la navidad de 1640, le comenta que pudo probar que todos los primos de la forma $p = 4k+1$ se pueden expresar como la suma de dos cuadrados: dice que para demostrar esto usa su método de "descenso infinito" y Euler lo demuestra un siglo después en 1745.

6.3.22. Problema 1.12: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Euler)

Problema: Teorema de Fermat, Euler: Sea p un primo impar. Entonces p es suma de dos cuadrados si y solo si $p \equiv 1 (mod 4)$

Demostración:

Supongamos que $p = a^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Como p es impar, entonces uno de a o b es impar y el otro par. Sin perdida de generalidad, se puede suponer que $a = 2m+1$ y $b = 2n$. Entonces:
$p = a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 \equiv 1(mod4)$

Se supongamos ahora que $p \equiv 1(mod4)$. Antes de probar que $p = a^2 + b^2$, se considera el problema de escribir un múltiplo de p como suma de cuadrados. Para esto, como $p \equiv 1(mod4)$, entonces su símbolo de Legendre $(\frac{-1}{p}) = 1$ corresponde a -1 y es un residuo cuadrático módulo p, por lo que la congruencia $x^2 \equiv -1(modp)$ tiene una solución $x = A \leq p-1$, de tal forma que $A^2+1 = Mp$ para algún M. Se observa que tomando $B = 1$ entonces el múltiplo de Mp es suma de cuadrados: $Mp = A^2 + B^2$. Cuando $M = 1$ se acaba la prueba. Se supone que este no es el caso, o sea, que $M \geq 2$. Usando el método del *descenso infinito* de Fermat se muestra primero que existen otros enteros positivos a, b, m tales que $a^2 + b^2 = mp$ y además $m \leq M - p$. Si $m = 1$, y se termina la prueba. Si $m \geq 2$, se repite el procedimiento anterior y como el entero $m \geq 1$, por el principio del buen orden, el procedimiento anterior debe terminar.

Solo falta mostrar cómo producir los enteros a, b, m del primer paso del descenso infinito anterior. Para esto, se inicia observando que se tiene la identidad algebraica, que expresa un producto de una suma de cuadrados, como suma de cuadrados:
$(a^2+b^2)(A^2+B^2) = (aA+Bb)^2 + (bA-aB)^2$
la identidad se verifica simplemente realizando los productos indicados en ambos lados de la igualdad. Se regresa al primo $p \equiv 1(mod4)$, sabiendo que existen enteros A, M con $0 \leq A \leq p-1$, tales que $A^2+1 = Mp$ y haciendo $B = 1$ se escribe $A^2 + B^2 = Mp$. Entonces, como $A^2 \leq (p-1)^2$ se tiene que

$M = \frac{A^2+B^2}{p} \leq \frac{(p-1)^2+1^2}{p} = \frac{p(p-2)+2}{p} = p-2+\frac{2}{p} \leq p-1 < p.$

Se eligen ahora los enteros a, b en el sistema completo de residuos $-(\frac{1}{2})M \leq a, b \leq (\frac{1}{2})MmodM$, tales que
$a \equiv A(modM), \qquad b \equiv B(modM)$
Se tiene entonces que:
$a^2 + b^2 \equiv A^2 + B^2 = Mp = 0(modM)$,
y por lo tanto, $a^2 + b^2 = Mm$, para algún $m \geq 0$. Se muestra que
1) $M \mid bA - aB$
2) $M \mid aA + bB$
3) $1 \leq m \leq M$.
Ahora, dado cualquier entero positivo m, si este es suma de cuadrados $m = a^2+b^2$ y M^2 es el cuadrado de un entero, entonces $mM^2 = (aM)^2 + (bM)^2$ también es la suma de dos cuadrados, por lo que para un entero positivo arbitrario n si se factoriza como $q_1^{e_1}...q_r^{e_r}$ con $e_i \geq 1$, se pueden unir los factores con partes pares en los exponentes y escribir:

$n = p_1...p_kM^2$ con los $p_1,...,p_k$ primos distintos y para decidir si n es suma de cuadrados basta hacerlo para el factor $p_1...p_k$; con los p_i primos distintos.

Una consecuencia del teorema anterior y de la identidad algebraica es que si en la factorización anterior los primos p_i que aparecen son el primo 2 o primos $p_i \equiv 1(mod4)$ escribiendo $2 = 1^2 + 1^2$ y $p_i = a_i^2 + b_i^2$ el entero n se puede escribir como suma de dos cuadrados.

En la configuración epistémica correspondiente a la demostración del teorema, realizada por Euler, se observan como objetos matemáticos predominantes los *conceptos* de congruencias y números primos, el *método* del descenso infinito de Fermat, los residuos cuadráticos, el principio del buen orden y conceptos de divisibilidad. En la prueba sobresalen los objetos matemáticos de los *argumentos deductivos* para obtener la prueba del teorema. En la configuración se utilizan numerosos conceptos que ahora hacen parte de la rama de la matemática conocida como Teoría de números y de igual forma de la Matemática discreta.

Problema: Teorema de Euler-Fermat: Si** a **y** n **son primos relativos, entonces** n **divide al entero** $a^{\phi(n)} - 1$ **(Euler, 1736).

Demostración en notación moderna:

Sea $P = \{1, .., n-1\}$ el conjunto de los enteros menores que n y coprimos-primos relativos con n; y sea $Q = \{a, ..., (n-1)a\}$ el conjunto de los elementos de P multiplicados por a, luego de una reordenación, resulta que los elementos de P son congruentes con los elementos de Q módulo n. Sea u el elemento que resulta del producto de los elementos de P y v el producto de los elementos de Q, así se tiene que $v \cong umod(n)$; y como $v = ua^{\phi(n)}$ entonces, $ua^{\phi(n)} \cong umod(n)$ luego $a^{\phi(n)} \cong 1mod(n)$.

En 1760, Euler generaliza el Teorema de Euler-Fermat al introducir la función ϕ o indicador de n: $\phi(n)$ que corresponde al número de enteros $< n$ y primos con n; de tal forma que si n es primo $\phi(n) = n-1$. La notacion $\phi(n)$ fué introducida por Gauss. En el siglo XVIII, la teoría de números aparece como una serie de resultados desconectados: entre los trabajos más importantes, se tienen: *Anleitung zur Algebra-Guía de álgebra, edición alemana, 1770* de Euler. En 1736 en su artículo *Theorematum Quorundam ad Numeros Primos Spectantium Demostratio,* Euler demuestra el teorema menor de Fermat (pequeño teorema de Fermat) (Kleine, 1972); este teorema aparece en una carta de Fermat a su amigo Frénicle de Bessy con fecha del 18 de octubre de 1640: pero como era habitual en él, omite la prueba. Con la prueba del teorema de Euler, queda demostrado el teorema pequeño de Fermat ya que resulta corolario para el caso en que n sea un número primo ya que $\phi(p) = p-1$. Este teorema se menciona porque hace parte de los aportes importantes de Euler a la teoría de Grupos.

6.3.23. Problema 1.13: Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3

Joseph Louis Lagrange, fue un físico, matemático y astrónomo, italiano que hizo importantes contribuciones a la astronomía, la mecánica y las matemáticas en la línea de álgebra. En 1771, en su memoria *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* presentó un método que tenía su base en técnicas hasta el momento conocidas para solucionar ecuaciones algebraicas hasta el grado cuarto y por el método de radicales. Lagrange pensó que podía extender el método a la solución de ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, sin llegar a lograrlo. Como se presentó, las ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron resueltas por los matemáticos italianos en el siglo XVI así que en la primera parte de su artículo, se encuentran los diferentes métodos conocidos para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Lagrange buscaba los principios básicos de estos métodos para usarlos y encontrar soluciones semejantes por el método de radicales para las ecuaciones de grado mayor a cuatro (Ruffini y Abel a inicios del siglo XIX basándose en estas ideas demostraron que esto era imposible).

El método de Lagrange, consistía en sustituir una ecuación por otra de menor grado: encontró que se trataba siempre de la *existencia de funciones resolventes* de las raíces y que las funciones mismas eran raíces de ecuaciones de grados menores. En su artículo presenta varios ejemplos, entre ellos:

Problema: Determinar las resolventes, para la ecuación de grado tres

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Solución:

El trabajo de Lagrange para la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se inicia con la sustitución $y = x + \frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático y llegar a la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$. El teorema fundamental del álgebra, que ya era conocido, garantizaba la existencia de las raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación. Por tanto define la función:

$$r = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$$

Donde μ_1, μ_2, μ_3 pertenecen a los números complejos y luego de permutar las tres raíces obtiene las siguientes seis combinaciones:
$r_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$
$r_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_2$
$r_3 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$
$r_4 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$
$r_5 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$
$r_6 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$

Con las funciones $r_1, ..., r_6$ Lagrange construye la ecuación de sexto grado (Chavarría, 2014):
$(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)...(y - r_6) = 0$
Luego toma de manera conveniente $\mu_1 = 1, \mu_2 = \omega, \mu_3 = \omega^2$ donde ω es una raíz cúbica distinta de la unidad, es decir, $\omega^3 - 1 = 0$ y se tiene que $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$ luego ω podría ser $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ o $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
Y reemplazando, obtiene las funciones:

$$r_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$$
$$r_2 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2$$
$$r_3 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1$$
$$r_4 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1$$
$$r_5 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2$$
$$r_6 = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3$$

Haciendo cálculos encuentra una relación entre $r_1, ..., r_6$; estas relaciones son diferentes cada vez que se establezca un orden diferente para las permutaciones (Chavarría, 2014, p. 83):
$\omega r_1 = \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3$
$= x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = r_5$
$\omega^2 r_1 = \omega^2 x_1 + \omega^3 x_2 + \omega^4 x_3$
$= x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = r_3$
$\omega r_2 = \omega x_1 + \omega^2 x_3 + \omega^3 x_2$
$= x_2 + \omega x_1 + \omega^3 x_3 = r_6$
$\omega^2 r_2 = \omega^2 x_1 + \omega^3 x_3 + \omega^4 x_2$
$= x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1 = r_4$

Al conjunto de permutaciones de las raíces $\{r_1, ..., r_6\}$ se le conoce actualmente como el conjunto S_3 de permutaciones de tres elementos y corresponde al grupo simétrico de orden 3. A este conjunto lo llama Lagrange inicialmente, la *Resolvente de la ecuación de tercer grado* y basándose en esta idea, encuentra la resolvente para la ecuación de cuarto grado. Esto fortaleció la idea equivocada de que dicho conjunto debería existir para la ecuación de quinto grado.
Con estos desarrollos en la ecuación se tiene que:

$$\begin{gathered}
(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)(y-r_4)(y-r_5)(y-r_6)=0 \\
=(y-r_1)(y-r_2)(y-\omega^2 r_1)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_1)(y-\omega r_2) \\
=(y^2-(r_1+r_1\omega^2)y+\omega^2 r_1^2)(y-\omega r_1) \\
=y^3-(r_1+r_1\omega+r_1\omega^2)+(\omega^2 r_1^2+r_1^2\omega+r_1^2\omega^3)y-\omega^3 r_1 \\
=y^3-r_1^3
\end{gathered}$$

Ahora,
$(y-r_2)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_2)=(y^3-r_2^3)$

Luego,
$(y^3-r_1^3)(y^3-r_2^3)=(y^3)^2-(r_1^3+r_2^3)y^3+r_1^3 r_2^3$

Ahora toma $y^3 = t$ y obtiene una ecuación auxiliar de grado menor que la cúbica (Chavarría, 2014, p. 88):

$$t^2 - (r_1^3 + r_2^3)t + r_1^3 r_2^3 = 0 \tag{6.5}$$

A partir de las permutaciones se pueden encontrar los valores para x_1, x_2, x_3 tomando:

$r_1 + r_2 = 2x_1 + \omega(x_2 + x_3) + \omega^2(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (\omega + \omega^2)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (-1)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = -x_1 + 3x_1 - x_2 - x_3$
Así,
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + r_1 + r_2]$
$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$
$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2]$

Como las soluciones quedaban expresadas en términos de r_1, r_2 faltaba determinar $(r_1^3 + r_2^3)$ y $r_1^3 r_2^3$ para reemplazarlas en la ecuación de grado dos en la variable t:

Luego para,

$r_1^3 = r_1 r_1 r_1$
$= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$

Como $\omega^3 = 1$ se tiene que:

$r_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + \omega^2(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2 + 3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_2 +$
$3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1 + 3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 12x_1 x_2 x_3$
Sea hace $R = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2$ se tiene:
$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3R) + \omega^2(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Como $\omega + \omega^2 = -1$ se tiene que:

$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (-1)(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Para continuar con el calculo de $r_1^3 + r_2^3$ se utilizan las identidades de *Girard* que establecen la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación, que para el caso de la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$ corresponden a:
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ el término en x^2
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p$
$x_1 x_2 x_3 = -q$

Y tomando,
$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_2^2x_3+3x_3^2x_1+3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3$
$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+(3R)+6x_1x_2x_3$
Utilizando las tres identidades, se tiene que:
$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -(3R)-6x_1x_2x_3$
Así, $r_1^3+r_2^3 = 2(-(3R)-6x_1x_2x_3)+(-3R)+12x_1x_2x_3$
$r_1^3+r_2^3 = -9R$

Y se tiene que $R+3x_1x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
Por las relaciones de Girard, se tiene que $R = -3x_1x_2x_3$ y
$r_1^3+r_2^3 = 27x_1x_2x_3$
$r_1^3+r_2^3 = -27q$

Falta calcular $(r_1r_2)^3 = r_1^3r_2^3$
Entonces, $r_1r_2 = (x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2)$
$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+\omega(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+\omega^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
De igual forma, como $\omega+\omega^2=-1$ se tiene que:
$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
Ahora, $(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0$

Por las identidades de Girard se tiene que:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = -2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0$
Reemplazando en:
$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$= -2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$= -3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = -3p$
Así, $(r_1r_2)^3 = -27p^3$

Y reemplazando en la ecuación de segundo grado $t^2-(r_1^3+r_2^3)t+r_1^3r_2^3=0$ se tiene :
$t^2-(-27q)t-27p^3=0$
Como r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación cuadrática, aplicando el método de radicales se tiene que :
$t = r_1^3 = \frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$ y
$t = r_2^3 = \frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$
Finalmente en la solución:
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+r_1+r_2]$
Se escribe como:
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{r_1^3}+\sqrt[3]{r_2^3}]$
Y la solución es:
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}]$
Por las identidades de Girard, se tiene que $x_1+x_2+x_3=0$ entonces,
$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$

Con esta ecuación, Lagrange llega a la misma expresión que su antecesor Cardano, para la solución de la ecuación cúbica por medio de radicales, a través del proceso que hoy se le denomina *La resolvente de Lagrange* (Chavarría, 2014, p. 93).
De igual forma se procede con:

$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$

$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2]$

A partir de estos desarrollos, en la actualidad $r_1, \ldots, r_6$ forman el grupo simétrico S_3 de permutaciones con tres elementos al cual Lagrange denominó inicialmente como: "La resolvente de la ecuación de tercer grado" y con estas ideas pasó a hallar la resolvente para la ecuación de cuarto grado.

Problema: Determinar la resolvente de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Solución:

El método inicia, tomando la suma de las raíces como cero y eliminando en este caso el término en x^3 y en general se busca eliminar el término de grado $n-1$, hecho que antes de Cardano ya se tenía como método; así, se hace la sustitución:

$y = x + \frac{a_{n-1}}{n-1}$

Y se obtiene la ecuación:

$y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$

Con raíces y_1, y_2, y_4, y_4 donde se cumple la condición que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. La *resolvente de Lagrange* para esta ecuación, se determina con la construcción del conjunto $\{s_1, ..., s_{24}\}$ que consiste de las 24 permutaciones de las cuatro raíces en la combinación (Chavarría, 2014, p. 94):

$$s = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 + \alpha^3 y_4$$

Con α una raíz cuarta de la unidad diferente de uno, esto es, $\alpha^4 = 1$ y se toma $\alpha = -1$ para obtener que de las 24 combinaciones de s, pero solo se toman 6 valores distintos que son los que corresponden a:
$s_1 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4$
$s_2 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4$
$s_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4$
$s_4 = -y_1 - y_2 + y_3 + y_4$
$s_5 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4$
$s_6 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4$

De estas seis expresiones, existen tres con las cuales se pueden representar las otras (Chavarría, 2014) y con esto se escribe la ecuación:
$(x - s_1)^4 (x + s_1)^4 (x - s_2)^4 (x + s_2)^4 (x - s_3)^4 (x + s_2)^4 = 0$
Que se puede escribir como:
$(x^2 - s_1^2)(x^2 - s_2^2)(x^2 - s_3^2) = 0$

Realizando los cálculos pertinentes, se llega a que las soluciones de la ecuación de grado cuatro corresponden a:
$y_1 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + s_1 + s_2 + s_3]$
$y_2 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - s_1 + s_2 - s_3]$
$y_3 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + s_1 - s_2 - s_3]$
$y_4 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - s_1 - s_2 + s_3]$

Los conjuntos $r_1, ..., r_6$ y $s_1, ..., s_6$ corresponden a grupos de orden 6. Y las potencias de los r_i cumplen que:
$r_1^1 = r_1$
$r_1^2 = \omega r_1 = r_5$
$r_1^3 = \omega^2 r_1 = r_3$

De igual forma las potencias de r_2 generan un subgrupo cíclico de orden 3 pero diferente al anterior. Para las raíces que forman la resolvente de Lagrange de la ecuación de cuarto grado, se tiene:
$s_1^1 = s_1$
$s_1^2 = \alpha s_1 = (-1)s_1 = s_2$
$s_1^3 = \alpha^2 s_1 = s_1$

$s_3^1 = s_3$
$s_3^2 = \alpha s_3 = (-1)s_3 = s_4$
$s_3^3 = \alpha^2 s_3 = s_3$

$s_5^1 = s_5$
$s_5^2 = \alpha s_5 = (-1)s_5 = s_6$
$s_5^3 = \alpha^2 s_5 = s_5$

Las potencias de las s_i forman 3 subgrupos de orden dos. Al trabajar con este método en la ecuación de quinto grado, Lagrange se encuentra con la dificultad de que el número de elementos finales que forman la resolvente es de 24 y además que el conjunto no tiene las propiedades de las resolventes anteriores; por eso, al final de la demostración escribe:

De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado pudieran dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado (Lagrange, 1867-1869, p. 305).

Los anteriores razonamientos de Lagrange se ilustran en Teoría de Grupos con el nombre del teorema de Lagrange: "Sea G un grupo de orden finito n y sea H un subgrupo de G, el orden de H divide al orden de G" (Suárez, 1994, p. 102). En este momento Lagrange pone en duda sus procedimientos generales y se produce un cambio de perspectiva en cuanto a los métodos de solución de las ecuaciones de grado quinto o superior, ya que aparece en primer lugar la duda de que existan tales métodos o que no es posible su solución por el método o *procedimiento* por radicales.

Con éstos desarrollos de Lagrange se determina una configuración epistémica, donde el *problema* planteado y resuelto, permitió el surgimiento del conjunto S_3 de permutaciones de las raíces de la ecuación de grado tres (grupo simétrico de orden 3); de igual forma para la ecuación de grado cuatro, Lagrange determinó el conjunto S_4 de permutaciones con cuatro elementos y unos subconjuntos especiales como $\langle r_i \rangle$ para $i = 1,..,3$ cada uno de orden tres y tal que $\langle r_1 \rangle \bigcup \langle r_2 \rangle = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ en la misma dirección, aparecen los subconjuntos $\langle s_i \rangle$ que corresponden a subgrupos cíclicos de orden dos y tal que $\langle s_1 \rangle \bigcup \langle s_2 \rangle \bigcup \langle s_3 \rangle = \{s_1, ..., s_6\}$ subconjunto de orden seis. Ésta configuración epistémica es una de las más importante en el estudio del significado del objeto Grupo, ya que con éstos *procedimientos* surgieron el grupo simétrico de orden 3 y el grupo simétrico de orden 4, al estudiar las permutaciones de las raíces de las ecuaciones y de igual forma con el trabajo de las funciones especiales formadas con éstas raíces. Se deduce que el objeto matemático primario predominante en la configuración, corresponde a *procedimientos y argumentos* ya que con ellos determina las raíces de las ecuaciones de grado tres y cuatro. Entre los *conceptos* utilizados se encuentran las raíces de la unidad que permitieron determinar ciertas funciones de las raíces de la ecuación (resolventes) y llegar a la solución de las mismas.

6.3.24. Problema 1.14: El teorema de Lagrange

En el artículo de 1771 de Lagrange, aparece por primera vez, *El teorema de Lagrange,* en una forma limitada y difícil de reconocer; este artículo fue publicado en dos partes por la academia de Berlín en los años (1770-1771). En esta obra de 200 páginas no se mencionaban los grupos, sin embargo, fue una de las bases mas importantes para el desarrollo del álgebra moderna del siglo XIX. Los matemáticos que vinieron después, como Galois y Abel estudiaron esta obra para sus investigaciones. El tema de la obra se relacionaba con el problema de *buscar soluciones generales de las ecuaciones;* que era el problema del álgebra en esa época, en la búsqueda de una solución general para ecuaciones de grado mayor o igual que 5 por el método de radicales.

El *Teorema de Lagrange* en su forma primitiva se enunció en la siguiente forma:

Si $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una función de n variables y si bajo las $n!$ posibles permutaciones de las variables, aparecen t funciones distintas, entonces t es un divisor de $n!$

Según esto el teorema de Lagrange en su forma original equivale a decir que el índice del subgrupo H de S_n es un divisor del orden de S_n, donde H es e1 subgrupo de permutaciones que dejan fija a f. Así, el teorema que se llama teorema de Lagrange fue enunciado en forma restringida y en un *lenguaje* completamente diferente al que se conoce en la actualidad.

La idea de *grupo de permutaciones* la formulará mas adelante Galois, 50 años después; pero las semillas del concepto se encuentra en el trabajo de Lagrange. Sin embargo, sus construcciones o procedimientos en el proceso general para resolver una ecuación algebraica de cualquier grado en 1770 y 1771 fallaron con este método para las ecuaciones de orden superior a cuatro, porque involucraban la solución de una ecuación de orden superior; pero con las soluciones de las ecuaciones de grado menor a cinco, Lagrange creyó poder extender su método sin lograrlo.

En este apartado se determinaron las configuraciones epistémicas que se muestran a continuación en las tablas 6.19, 6.20 y 6.21.

Tabla 6.18: Configuración epistémica CE1

CE1. Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico	
CE1.14	El Teorema de Lagrange
CE1.13	Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3
CE1.8	Euler y la solución de la ecuación algebraica de grado 4
CE1.7	Harriot: el simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4
CE1.6	Viéte y la solución general de la ecuación algebraica de grado 3
CE1.5	Viéte y la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 2
CE1.4	Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de Cardano y Viète
CE1.3	Ferrari y la solución general de la ecuación bicuadrática
CE1.2	Método de radicales para la solución de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media
CE1.1	Cardano y la solución de un caso especial de la ecuación cúbica

Tabla 6.19: Configuración epistémica CE1.1.

CE1.1. La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4	
CE1.10	Descartes y el problema de Pappus
CE1.9	Descartes y el planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4

Tabla 6.20: Configuración epistémica CE1.2.

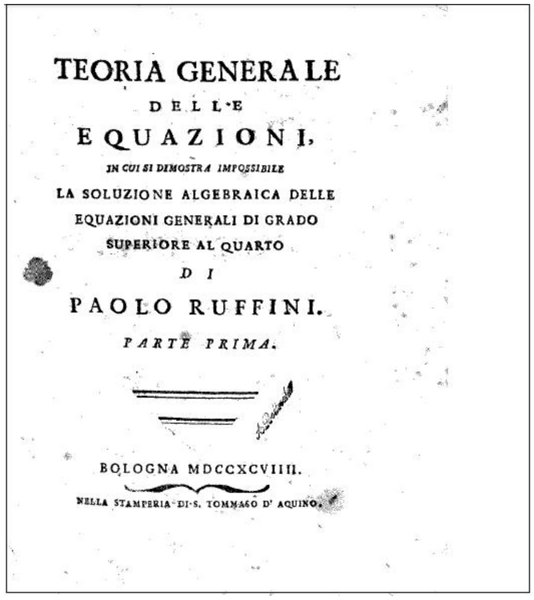
CE1.2. Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular	
CE1.12	Euler y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular
CE1.11	Fermat y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular

6.3.25. Problema 2.1: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5 (Paolo Ruffini)

Teorema 6.3. ***Problema:****Si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad.*

Solución: ver, figura 6.11.

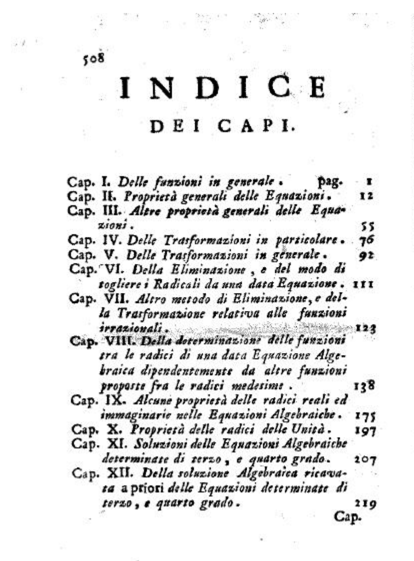
Paolo Ruffini, matemático italiano, continuó con los desarrollos de Lagrange y presentó la demostración sobre la irresolubilidad de la ecuación de grado quinto por el método de radicales, pero, la notación que utilizó para representar las permutaciones hicieron que



TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.
PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

Figura 6.9: Teoría Generale delle Equazioni



508

INDICE
DEI CAPI.

Cap.

Figura 6.10: Teoría Generale delle Equazioni - Tabla de contenido

8.3 Schema della dimostrazione del 1813

1

Cerchiamo di capire come Ruffini intende procedere discutendo un esempio particolare. Una formula risolutiva algebrica per l'equazione

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + u = 0 \tag{8.1}$$

consiste nel trovare una funzione $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ delle radici di (8.1) che ne dipenda in modo simmetrico, in modo da poter essere espressa in termini dei coefficienti di (8.1): $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(a, b, c, \cdots u)$ e grazie alla quale sia possibile esprimere *tutte* le radici di (8.1). L'ambiguità in una tale formula, già evidenziata da Vandermonde, risiede in questo: se

$$x_1 = F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

dove F^* indica una determinazione particolare della F, allora permutando in ambo i membri x_1 ed x_2, si deve anche avere

$$x_2 = F^*(x_2, x_1, \cdots, x_n).$$

Ad esempio questa situazione si presenta nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado che, detta $\alpha = \pm 1$ una radice quadrata dell'unità, si può scrivere come

$$x = \frac{-b + \alpha\sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

scelto $\alpha = +1$ e ricordando che $b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 x_2$ e che il radicando va considerato in senso aritmetico, si ottiene

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{2} = F^*(x_1, x_2).$$

Figura 6.11: Demostración del teorema de Ruffini de 1813 (dimat.unipv.it/ rosso/Ruffini-Abel)

192 *CAPITOLO 8. IL TEOREMA DI RUFFINI-ABEL* 2

D'altra parte, se si permutano tra loro x_1 ed x_2 ad ambo i membri, e si considera ancora il radicale in senso aritmetico, si ha

$$x_2 = F^*(x_2, x_1):$$

tutti gli argomenti di Ruffini vogliono dimostrare come una formula risolutiva di questo tipo sia contraddittoria quando $m > 4$.

La dimostrazione di Ruffini poggia su alcuni risultati preliminari, alcuni dei quali già presenti nella prima versione del 1799.

• Se

$$z^n + mz^{n-1} + nz^{n-2} + \cdots + v = 0 \tag{8.2}$$

è l'equazione trasformata di (8.1), allora le radici z_k di (8.2) saranno funzioni di quelle di (8.1):

$$z_k = f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{8.3}$$

• Per descrivere l'azione di una permutazione su un insieme di argomenti Ruffini, a partire dalla *Teoria Generale*, aveva proposto diversi esempi didatticamente efficaci. Così, ad esempio, se

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^1}{x_2} + \frac{3x_2x_3^2}{x_1} + ax_2$$

si ha anche

$$f(x_2, x_1, x_3) = \frac{x_2^2}{x_1} + \frac{3x_1x_3^2}{x_2} + ax_1.$$

• Se i coefficienti m, n, ..., v della (8.2) sono ciascuno funzione razionale dei coefficienti a, b,...., u della (8.1), allora permutando tra loro le $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nella (8.3) si otterrà sempre una radice di (8.2) ed il numero di valori distinti assunto da f è un sottomultiplo di $n!$.
• Se la funzione (8.3) è di forma tale che uno dei suoi valori è inalterato per effetto di una permutazione che coinvolge le radici che figurano in certe posizioni, iterando la permutazione, la (8.3) non cambia valore. Consideriamo la funzione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1 x_2^2} + \sqrt{x_2 x_3^2} + \sqrt{x_3 x_1^2} - x_4$$

che rimane inalterata sotto l'azione della permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \end{pmatrix}:$$

essa non cambierà valore anche sotto l'azione di

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

e di $\sigma^3 = \mathrm{id}$, dove id è l'identità. In altre parole

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_2, x_3, x_1, x_4) = f(x_3, x_1, x_2, x_4).$$

3

8.3. SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL 1813 193

4

Allo stesso modo, se si considera l'azione di σ sull'arrangiamento (x_4, x_2, x_3, x_1) si otterrà

$$f(x_4, x_2, x_3, x_1) = f(x_2, x_3, x_4, x_1) = f(x_3, x_4, x_2, x_1).$$

Come conseguenza, se applicando p volte su una certa funzione $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una certa permutazione σ, rispetto alla quale f è invariante, tale che $\sigma^p = \mathrm{id}$, allora la f assumerà tutti i suoi valori con molteplicità p.

Entriamo ora più in dettaglio nel ragionamento di Ruffini servendoci della presentazione di Maracchia [12]. Punto chiave della dimostrazione è l'esame di espressioni del tipo

$$y^p = \Pi := F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (8.4)$$

dove $\{x_1, \cdots, x_n\}$ sono le radici di (8.1). Denotiamo con $y_1 = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una soluzione di (8.4) che si potrà sempre esprimere come

$$y_1 = \alpha \sqrt[p]{\Pi}, \qquad \text{con} \qquad \alpha^p = 1.$$

Ruffini dimostra il seguente
Teorema I. Se Π è invariante sotto l'azione di qualche permutazione σ delle $\{x_1, \cdots, x_n\}$, allora operando con la stessa permutazione su f si ottiene un'altra radice di (8.4).
Dim. Consideriamo la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \cdots \end{pmatrix} \qquad (8.5)$$

e supponiamo che lasci invariata Π. Ciò significa che

$$\Pi = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots) = F(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, \cdots) = F(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \cdots)$$
$$F(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, \cdots) = F(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots)$$

ed operando con σ su f si otterranno i valori

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots) \\ y_2 &= f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, \cdots) \\ y_3 &= f(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, \cdots) \\ y_4 &= f(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, \cdots) \\ y_5 &= f(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots). \end{aligned}$$

Siccome y_1 risolve (8.4), allora

$$[f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots)]^p = F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots) = \Pi$$

e questa uguaglianza deve conservarsi anche operando con σ su ambo i membri. Così facendo però il membro di destra non varia per ipotesi mentre a sinistra y_1 viene mutata in uno degli altri valori $y_2, \cdots, y_5$ che dunque sono anch'esse radici di (8.4).

194 *CAPITOLO 8. IL TEOREMA DI RUFFINI-ABEL* **5**

In particolare, dovrà esistere un'altra radice p-esima dell'unità γ tale che

$$y_2 = \gamma \sqrt[p]{\Pi}$$

oltre ad avere $y_1 = \alpha \sqrt[p]{\Pi}$. Dunque

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

ma siccome $\alpha^p = \gamma^p = 1$, anche $\beta := \frac{\gamma}{\alpha}$ è una radice p-esima dell'unità e possiamo così concludere che

$$y_2 = \beta y_1, \qquad \text{con} \qquad \beta^p = 1.$$

Se ora agiamo ripetutamente con σ su ambo i membri di questa uguaglianza otteniamo

$$y_2 = \beta y_1, \quad y_3 = \beta y_2, \quad y_4 = \beta y_3, \quad y_5 = \beta y_4, \quad y_1 = \beta y_5$$

cioè

$$y_1 = \beta y_5 = \beta^2 y_4 = \beta^3 y_3 = \beta^4 y_2 = \beta^5 y_1$$

che impone che β sia una radice quinta dell'unità:

$$\beta^5 = 1. \tag{8.6}$$

ésta fuera ignorada por los matemáticos de la época. Ruffini presentó la demostración en dos publicaciones: la primera en el artículo sobre *Teoría generale della equazion* y en *La reflessione intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali* (1799). El *método* de Ruffini establecía que no existía una resolvente para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. Sin embargo, la afirmación no tuvo las justificaciones suficientes para la época y no pudo lograr la aceptación de los matemáticos; además, Ruffini utilizó una afirmación que en su momento no tenía la justificación suficiente pero que luego llegó a convertirse en el teorema que se conoce como el teorema de Abel-Ruffini (Muñoz, 2011, p. 6).

Paolo Ruffini (1765-1822), fue el primero en acertar con la estrategia utilizada para demostrar que las ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto eran irresolubles por el método de radicales: problema que permaneció abierto desde el siglo XVI y que fue completamente resuelto por el francés Evariste Galois (1811-1832). Lamentablemente el trabajo de Ruffini no fue del todo aceptado por los matemáticos, debido a la todavía "en pañales" teoría de las permutaciones de Lagrange o quizás por la negación a la aceptación de la imposibilidad de resolver algunas ecuaciones mediante radicales (Sánchez, 2011, p. 2). En la configuración epistémica relacionada con la demostración del teorema (ver, figura 6.11: 1,2,3 y 4) sobresalen como objetos matemáticos primario los *procedimientos* que utiliza Ruffini para demostrar la imposibilidad de solucionar las ecuaciones de grado mayor que cuatro por el método de radicales. Entre los *conceptos* importantes sobresalen las permutaciones y las operaciones con permutaciones, los ciclos y las funciones de las raíces de las ecuaciones, especialmente las raíces de la unidad, además de los otros métodos presentados para solucionar las ecuaciones algebraicas.

6.3.26. Problema 2.2: Generalización del Teorema de Rufinni (Agustín Louis Cauchy)

Uno de los primeros trabajos de Cauchy fue generalizar el teorema de Ruffini:

Si mediante las permutaciones de sus n - variables un polinomio toma más de dos valores, entonces él toma al menos p valores.

En el teorema p es el mayor primo en la factorización de n; así, en el lenguaje de la teoría de Grupos, no hay subgrupos del grupo simétrico de $n-$ permutaciones con un índice i tal que $2 < i < p$ (según algunos autores, aquí Cauchy crea la noción de Grupo de permutaciones al estudiar las permutaciones de las raíces). Berrtrand reemplazó p por el mismo n para $n > 4$, aunque para probarlo tuvo que utilizar un teorema de la teoría de números (postulado de Bertrand) probado más tarde por P.L. Chebyschev y posteriormente Cauchy prueba el resultado de Bertrand sin esta suposición.

El *método* que utiliza Cauchy da origen al *cálculo de sustituciones, grupos de permutaciones* su método comprendía una fundamentación de las matemáticas, especialmente del Análisis y se le considera como el fundador del rigor en matemáticas; la base de sus trabajos fueron *conceptos* de teoría de grupos, tales como el orden de un elemento, la noción de subgrupo y la de conjugación.

En la misma dirección, el siguiente teorema de Cauchy fue fundamental para la teoría de grupos finitos:

Para cualquier primo p que divida al orden hay un elemento de orden p.

Este teorema fue notablemente mejorado por Sylow de la siguiente forma: "Si G es un grupo finito abeliano y p es un primo divisor del orden del grupo, existe al menos un elemento de orden p. Cauchy estudió ciertos *conceptos* en varios de sus artículos publicados en 1815 y 1844 entre ellos, las permutaciones de conjuntos finitos arbitrarios además, introduce la *notación* que se utiliza actualmente; define el producto de permutaciones, permutaciones cíclicas, transposiciones, conjunto de permutaciones generadas por productos de ciertas permutaciones dadas y en particular prueba que, los 3 ciclos generan todas las permutaciones pares. A Cauchy se le debe la notación y muchos resultados actuales; sus contemporáneos usaron sus resultados sobre permutaciones para realizar sus aportes en la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero fue Galois quién utilizó el término *Grupo* asociado a una ecuación y que resultó en la terminología actual como el Grupo de Permutaciones.

6.3.27. Problema 2.3: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación algebraica general de grado 5 (Niels Henrik Abel)

Abel, fue un matemático Noruego, que proporciona la demostración correcta y aceptada por los matemáticos de la época, sobre la imposibilidad de resolver por el método de radicales, cualquier ecuación de quinto grado.

Abel escribe sobre la demostración de Ruffini:

> El primero y si no estoy equivocado, el único que antes que yo ha intentado demostrar la imposibilidad de la solución algebraica de una ecuación en general, ha sido el geómetra Ruffini. Pero su demostración es tan complicada que es muy difícil afirmar lo acertado de su razonamiento. Me parece que no son siempre satisfactorios. (Henrik, 1881, p. 218).

El trabajo en el que resuelve por radicales la ecuación de quinto grado, lo presentó a su mentor Michael Holmboe (1795-1850) otro matemático noruego, pero ninguno de los matemáticos noruegos pudieron probar la veracidad del trabajo. Así, Holmboe lo envía a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca, donde lo revisa el matemático danés Carl Ferdinand Degen (1766-1825) quien sugiere presentar ejemplos numéricos; en este ejercicio Abel encuentra un error en su razonamiento lo que hace detener su trabajo en esta línea y se dedica entonces al estudio de las integrales elípticas que también eran su tema de trabajo.

Desde Lagrange, después de presentar un intento fallido en la solución por radicales de la ecuación de quinto grado el problema se plantea en otra dirección: en la búsqueda de un método desde la perspectiva geométrica y analítica y es desde este punto de vista que Abel logra demostrar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado y de grados superiores. En su artículo *Mémoire sur les equations algébriques, oul'on demontres l'impossibilité de la resolution de l'equation générales du cinquiéne degré (1824)* donde reconoce la importancia de su hallazgo al afirmar (Chavarría, 2014):

> Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora, por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de las ecuaciones algebraicas (Abel, 1824, p. 3).

En 1826 Abel presenta una nueva versión de la memoria; más clara y se publica en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik - Revista de matemáticas puras y aplicadas* fundado por August Leopold Crelle (1780-1855): matemático alemán, reconocido en el campo de las matemáticas por sus publicaciones en matemáticas aplicadas y escolares. Crelle se convirtió en amigo y benefactor de Abel. Pero Abel quería dar a conocer su trabajo a matemáticos prestigiosos, por este motivo se desplazó a Berlín para entrevistarse con Gauss a quién había enviado su memoria pero Gauss la ignoró por completo afirmando: He aquí otra de esas moustruosidades.

Abel, llegó a París donde presentó su memoria a la Academia de Ciencias de Francia para su publicación en la revista de la academia: el documento para ser evaluado fue revisado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Adrien Marie Legendre (1752-1857). Legendre le dejó la responsabilidad a Cauchy afirmando que era poco legible y Cauchy no se interesó por el trabajo al punto que fue extraviado. Abel regresó a Europa donde falleció debido a una tuberculosis pulmonar (Chavarría, 2014).

Legendre, después de la muerte de Abel afirmó:

¿Qué descubrimiento es ese de Abel? ... ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas? (Muñoz, 2011, p. 17).

Luego de la muerte de Abel, Cauchy y Legrendre intentaron publicar la memoria en la revista de la académia, pero ya se había publicado en el Journal de Crelle. En 1830 le concedieron el gran premio de matemáticas y esta demostración funda las bases del Álgebra abstracta.

Problema: Teorema sobre la imposibilidad de resolubles por radicales las ecuaciones de grado $n > 4$ ***(Abel)***

El teorema de Abel-Ruffini postula que no se pueden resolver por radicales las ecuaciones polinómicas generales de grado igual o superior a cinco. La demostración la realiza en 1824 y utiliza el método de reducción al absurdo.

El supuesto inicial del teorema, se conoce hoy como el "Teorema de Ruffini-Abel". Para la demostración, Abel inicia suponiendo que para la incognita x debe haber una expresión de la forma:

$$x = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

Esta es la solución por radicales, como en los casos anteriores. Luego asume que $R^{\frac{1}{m}}$ es imposible de expresar como una función racional y usa un primer truco algebraico para eliminar p_1 y dejar el término $R^{\frac{1}{m}}$ con coeficiente 1; esta expresión se sustituye en la ecuación inicial para obtener una expresión en términos de potencias iguales de R nuevamente, pero con coeficiente nuevos:

$$0 = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \quad (6.13).$$

Ahora, hace la sustitución:

$$z^m = R \tag{6.6}$$

Argumenta que entre la ecuación (6.13) y (6.14) existen soluciones comunes y construye una ecuación polinómica con estas soluciones comunes como raíces, lo que lo lleva a probar que los q_i son todos ceros y que por tanto las expresiones de la forma:

$R^{\frac{1}{m}}, \quad \alpha R^{\frac{2}{m}}, \quad \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \quad ..., \alpha^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ satisfacen la ecuación inicial.

Ahora, como α es solución del polinomio:
$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + ... + \alpha + 1 = 0$ las posibles soluciones $x_1, x_2, ..., x_m$ deben ser distintas y por tanto m no puede ser mayor que 5. Retoma seguidamente un resultado de Cauchy que limita las posibilidades a: $m = 2$ o $m = 5$ y prueba inicialmente que el caso $m = 5$ lo lleva a un imposible y por tanto deja como única la opción $m = 2$.

Pasa a expresar los términos p, $R^{\frac{1}{m}}$, $p_2 R^{\frac{2}{m}}$, ..., $p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ como funciones racionales de $\{x_1, x_2, ..., x_5\}$ y toma la expresión:

$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}[x_1 + \alpha^{m-1} x_2 + ... + \alpha x]$

Donde señala que R es una función de $x_1, ..., x_5$ para llegar nuevamente a una expresión imposible con el mismo argumento anterior, por lo que concluye que es imposible resolver por radicales la ecuación general de quinto grado.

Abel tenía claro, que las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco no se podían resolverse por radicales ya que al multiplicar la ecuación de grado quinto por x obtenía una ecuación de grado seis con una solución conocida $x = 0$ y las restantes imposibles de hallar por radicales (ver detalles, Chevarría, 2014, p. 104).

En la configuración epistémica CE2, determinada por la situación-problema que se relaciona con la demostración del Teorema sobre la imposibilidad de resolver la ecuación algebraica de grado $n > 4$ por radicales dada por Abel, sobresalen los *procedimientos* que utiliza para determinar las raíces de las ecuaciones algebraicas. Abel hace uso de sustituciones apropiadas donde utiliza el *concepto* de función racional de las raíces, raíces de la unidad, permutaciones de las raíces de la ecuación, multiplicidad de una ráiz, valores de la función de las raíces. Además, utiliza *métodos* de solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual le permiten llegar a una contradicción en lo cual se basaba el método de demostración.

A continuación se presenta en la tabla 6.22, la configuración epistémica definida a partir de estas tres configuraciones epistémicas que se determinan en la edad moderna y en el perído dos según las etapas propuestas en el estudio de Piaget & García (2008).

Tabla 6.21: Configuración epistémica CE2

CE2. Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar las ecuaciones de grado $n > 4$ por el método de radicales	
CE2.3	Abel y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de grado $n > 4$
CE2.2	Cauchy y el conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas
CE2.1	Ruffini y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5

6.3.28. Problema 3.1: Problemas en aritmética modular (Carl Friedrich Gauss)

Gauss inició sus investigaciones en *teoría de números* durante su estancia en el Collegium Carolinum en 1795, pero inicia la elaboración de sus *Disquisitiones arithmeticae,* a lo largo de su estancia en la Universidad de Göttingen entre 1795 y 1798. Se sabe, gracias a su diario científico en el que ya en 1796 aparecen dos de sus resultados más brillantes: la descomposición de todo número entero en tres triangulares y la construcción del hepta-decágono regular. Ambos recogidos en las Disquisitiones. A finales de 1798 Gauss entrega el manuscrito a un editor de Leipzig, pero dificultades económicas retrasan la publicación hasta el verano de 1801. Con las Disquisitiones, Gauss da una nueva orientación a la *Teoría de Números,* dejando de ser ésta una acumulación de resultados anecdóticos aislados para convertirse en una rama de las matemáticas tan importante como el análisis o la geometría (Pérez, s.f.).

En el prefacio de las Disquisitiones, Gauss explica el contenido de la obra, advirtiendo que tratará *conceptos* sobre los números enteros, excluyendo a menudo los fraccionarios y siempre a los irracionales, los sordos como se les conocía hasta entonces. Su discurso trataba de *conceptos,* no de los temas de numerar y calcular, a los que se dedica en la Aritmética elemental sino de los aspectos propios de los números enteros de los cuales se ocupa la Aritmética Superior. En el texto afirmaba que en esa época desconocían muchos de los resultados contemporáneos: “desconocía todas las que habían sido elaboradas por los más modernos en este campo y estaba privado de todos los recursos mediante los cuales habría podido ayudarme un poco en estas cuestiones” (Pérez, s.f.).

Las *Disquisitiones* se encuentran organizadas en siete secciones: 1) Números congruentes en general; 2) Congruencias de primer grado; 3) Residuos de potencias; 4) Congruencias de segundo grado; 5) Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado; 6) Aplicaciones de las nociones anteriores; 7) Ecuaciones de las secciones de un círculo.

Un gran descubrimiento, una conquista revolucionaria de notación aritmética: *las congruencias:*

Dados dos números enteros a, b si su diferencia $a - b$ o $b - a$ es exactamente divisible por el número m, decimos que a, b son congruentes respecto al módulo m y simbolizamos esto escribiendo $a \equiv b(modm)$. La ventaja de esta notación es que recuerda la forma en que se escriben las ecuaciones algebraicas: además, trata los *conceptos* de divisibilidad aritmética con una breve notación y permite "sumar, restar, multiplicar congruencias", con tal de que el módulo sea el mismo en todas, para obtener otras congruencias y esto le permite estudiar ecuaciones con congruencias: $ax + b \equiv c(modm)$.

Como introducción a las dos primeras secciones, Gauss aplica estos métodos a problemas históricos como el de: dado un número A determinar la cantidad de números primos con A y menores que él. Se trata de la célebre función $\phi(A)$ introducida por Euler. Dando una fórmula general para su cálculo: Si $A = a^m b^n c^p \ldots$ siendo $a, b, c, \ldots$ primos $\phi(A) = A\frac{a-1}{a}\frac{b-1}{b}\frac{c-1}{c}$ y termina con la demostración del teorema fundamental de las congruencias polinómicas:

Una congruencia de grado m, $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Mx + N \equiv 0(modp)$ cuyo módulo p es primo que no divide a A, no puede resolverse de más de m maneras diferentes o no puede tener más de m raíces no congruentes con relación a p.

En la sección 3 y 4 aborda los *conceptos* de residuos cuadráticos y de potencias superiores. Dados r, m números enteros, donde r no es divisible por m, si existe un número x tal que $x^2 \equiv r(módm)$, decimos que r es un residuo cuadrático de m, en caso contrario decimos que r es un no-residuo cuadrático de m (Pérez, s.f.).

Problema: Pequeño Teorema de Fermat (Art. 49 y 50): Si p ***es un número primo que no divide a*** a, $a^{p-1} - 1$ ***es siempre divisible por*** p.

Problema: Teorema de Wilson (Art. 49 y 50): El producto de todos los números menores que un número primo dado, aumentado en una unidad es siempre divisible por dicho número.

Problema: Ley de reciprocidad cuadrática

Demostración:

En la sección (4) Gauss proporciona la primera demostración de la *Ley de reciprocidad cuadrática*, a la que denomina Theorema aureum (Art. 131) y siguientes:

Si p es primo de la forma $4n+1$, $+p$ será un residuo o un no-residuo de todo primo que tomado positivamente sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma $4n+3$, $-p$ tiene la misma propiedad. Esto es, existe una reciprocidad entre el par de congruencias $x^2 \equiv q(modp)$, $\quad x^2 \equiv p(modq)$ en la que tanto p como q son primos; ambas congruencias son posibles o ambas son imposibles, a no ser que tanto p como q dejen residuo 3 cuando se dividen por cuatro, en cuyo caso una de las congruencias es posible y la otra no. Gauss contaba con esta demostración desde 1796, a los 19 años. Euler y Legendre lo habían intentado sin éxito como comenta el propio Gauss en el art. 151. solo por esta demostración Gauss ya debería ser considerado como uno de los matemáticos más potentes de la época (Pérez, s.f.).

En las secciones 6 y 7 de sus Disquisiciones, trata en forma amplia los *conceptos* relacionados con las formas cuadráticas y de sus aplicaciones: Un número entero M puede representarse mediante la expresión $ax^2+2bxy+cy^2 = M$ donde a, b, c, x, y son números enteros. A la expresión $F = ax^2+2bxy+cy^2$ Euler la denominó forma cuadrática (Pérez, s.f.).

6.3.29. Problema 3.2: Solución de ecuaciones ciclotómicas (Carl Friedrich Gauss)

El problema de la solución de las ecuaciones de grado quinto por el método de radicales después de los hallazgos de Abel, se planteó en términos de la pregunta ¿cuándo una ecuación es resoluble por medio de radicales? En la época de Gauss se tenía que algunas familias particulares de ecuaciones de grado mayor a cuatro eran resolubles por radicales; así, el interés de los matemáticos se enfocó hacia la caracterización de manera general de las ecuaciones de grado quinto y mayores que eran resolubles por radicales; este problema fue resuelto finalmente, por Galois como se presenta más adelante. En 1801 Gauss retoma el planteamiento de Vandernomde (1735-1796) de su obra *Mémoire sur le Résolution des Equations- 1770* en la que afirmaba que:*todas las ecuaciones, a las que actualmente se les llama ciclotómicas* $x^p - 1 = 0$ *donde p es un número primo, son resolubles por el método de radicales*. Esta afirmación no pudo ser demostrada en general; Vandermonde logró probarla para $p \leq 11$ y logra probar el planteamiento; Gauss empleó la técnica basada en reducir el grado de la ecuación, que fue el método empleado por Lagrange.

Problema: Hallar las raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$ ***con*** n ***un número primo impar***

La ecuación se llama ciclotómica y salvo para $x = 1$, todas las raíces son imaginarias. La ecuación también se denomina *ecuación para la división del circulo* y esto se debe a que las raíces pueden escribirse como:

$x_k = cos(\frac{k2\pi\theta}{n}) + sen(\frac{k2\pi\theta}{n})$ para $k = 1, 2, ..., n$.

Gauss encontró que todas las raíces eran de la forma $r, r^2, r^3, ..., r^{n-1}$ o $r^e, r^{2e}, r^{3e}, ..., r^{(n-1)e}$ para cualquier entero positivo o negativo e. Los métodos que desarrolló se relacionan con los "grupos". Una consecuencia geométrica de su trabajo fue la demostración de que se puede inscribir un polígono regular de 17 lados en un circulo usando regla y compás. Esto como consecuencia, de que las raíces complejas al dibujarlas geométricamente corresponden a los vértices del polígono regular de n lados sobre el circulo unitario.

Demostración:

Designando la circunferencia del circulo o cuatro ángulos rectos por P y suponiendo que m, n son enteros y n un producto de los factores relativamente primos $a, b, c, etc.$, el ángulo $A = \frac{mP}{n}$ puede ser reducido por los métodos de su artículo (310) a la forma $A = (\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + etc.)P$ y las funciones trigonométricas correspondientes a él pueden ser encontradas por métodos conocidos a partir de las partes $\frac{\alpha P}{a}, \frac{\beta P}{b}, etc.$ De esta forma, ya que se pueden tomar $a, b, c, etc.$ como numeros primos o potencias de números primos, es suficiente considerar la división del circulo en partes cuyo número es un primo o una potencia de un primo y se obtendrá inmediatamente un polígono de n lados a partir de los polígonos de $a, b, c, etc.$ lados. Sin embargo, restringiremos nuestra discusión al caso en que el circulo es dividido en un número primo (impar) de partes, especialmente por la siguiente razón: Es claro que las funciones circulares correspondientes al ángulo $\frac{mP}{p^2}$ son deducidas de las funciones pertenecientes a $\frac{mP}{p}$ mediante la solución de una ecuación de grado p y de este, por una ecuación del mismo grado se pueden derivar las funciones correspondientes a $\frac{mP}{p^3}$ etc.

De esta forma, si ya se tiene un polígono de p lados, para determinar un polígono de $p\lambda$ lados necesariamente se requerirá la solución de $\lambda - 1$ ecuaciones de grado p. Aún cuando la siguiente teoría puede ser extendida también a este caso, no podremos evitar tantas ecuaciones de grado p y no existe manera de reducir su grado si p es primo. Así, en general, se mostrará abajo que un polígono de 17 lados puede ser construido geométricamente; pero para obtener un polígono de 289 lados no hay manera de eludir el resolver una ecuación de grado 17 (Zúñiga, 1995).

Problema: Ecuaciones para funciones trigonométricas de arcos que son una parte o partes de la circunferencia completa; reducción de las funciones trigonométricas a las raíces de la ecuación $x^n-1=0$ ***(337).***

Es bien conocido que las funciones trigonométricas de todos los ángulos $\frac{kP}{n}$ donde la k denota en general todos los números $0,1,2,\ldots n-1$, son expresadas por las raíces de ecuaciones de grado n. Los senos son las raíces de la ecuación (I):

$$x^n-\tfrac{1}{4}nx^{n-2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{n(n-3)x^{n-4}}{1\cdot 2}-\tfrac{1}{64}\tfrac{n(n-4)(n-5)x^{n-6}}{1\cdot 2\cdot 3}+etc.\pm\tfrac{1}{2^{n-1}}nx=0$$

Los cosenos son las raíces de la ecuación (II):

$$x^n-\tfrac{1}{4}nx^{n-2}+\tfrac{1}{16}\tfrac{n(n-3)x^{n-4}}{1\cdot 2}-\tfrac{1}{64}\tfrac{n(n-4)(n-5)x^{n-6}}{1\cdot 2\cdot 3}+etc.\pm\tfrac{1}{2^{n-1}}nx-\tfrac{1}{2^{n-1}}=0$$

Y las tangentes son las raíces de la ecuación (III):

$$x^n-\tfrac{1}{1\cdot 2}n(n-1)x^{n-2}+\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-etc.\pm nx=0$$

Estas ecuaciones (que son todas verdaderas para cualquier valor impar de n, y la ecuación II es cierta también para cualquier valor par), poniendo $n=2m+1$, pueden ser fácilmente reducidas a grado m. Para I y III esto justamente requiere dividir a la izquierda por x y sustituir x^2 por y. De todas formas la ecuación II incluye la raíz $x=1=cos0$ y todas las otras son iguales en pares ($cos\frac{P}{n}=cos\frac{(n-1)P}{n}, cos\frac{2P}{n}=cos\frac{(n-2)P}{n}, etc.$); así el lado izquierdo es divisible por $x-1$ y el cociente sería un cuadrado. Si extraemos la raíz cuadrada, la ecuación II se reduce a la siguiente ecuación:

$$x^m+\tfrac{1}{2}x^{m-1}-+\tfrac{1}{4}(m-1)x^{m-2}-+\tfrac{1}{8}(m-2)x^{m-3}+\tfrac{1}{16}\tfrac{(m-2)(m-3)x^{m-4}}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{32}\tfrac{(m-3)(m-4)}{1\cdot 2}x^{m-5}-etc.=0$$

Sus raíces serán los cosenos de los ángulos $\frac{P}{n},\frac{2P}{n},\frac{3P}{n},\ldots\frac{mP}{n}$. Hasta ahora no se ha hecho ninguna reducción más allá de estas ecuaciones para el caso en que n es un número primo. No obstante, ninguna de estas ecuaciones es tan tratable y tan conveniente para nuestros propósitos como $x^n-1=0$. Sus raíces están íntimamente relacionadas con las raíces de las anteriores. Esto es, escribiendo por brevedad i para la cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$, las raíces de la ecuación $x^n-1=0$ serán
$cos(\frac{kP}{n})+sen(\frac{kP}{n})=r$

Donde para k se debe tomar todos los números $0,1,2,\ldots n-1$. De esta forma, ya que $\frac{1}{r}=cos\frac{kP}{n}-isen\frac{kP}{n}$, las raíces de la ecuación I serán $\frac{1}{2i}(r-\frac{1}{r})$ o $i\frac{1-r^2}{2r}$

Las raíces de la ecuación II, $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})=\frac{1+r^2}{2r}$; finalmente las raíces de la ecuación III, $\frac{i(1-r^2)}{1+r^2}$.

6.3.30. Problema 3.3: Teorema Fundamental del Álgebra (Carl Friedrich Gauss)

Aunque no se había demostrado *El Teorema fundamental del álgebra;* (1798) ya se tenían suficientes ejemplos que una ecuación de grado n tiene n raíces. El Teorema fundamental del álgebra establece que toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Chavarría, p. 79). Descartes da una primera versión de este teorema y presenta ejemplos; sin embargo es Carl Friedrich Gauss quién presenta la primera demostración acabada de este teorema (ver, Salazar, 2009, p. 137-139).

La configuración epistémica, se relaciona entonces con la demostración dada por Gauss del Teorema Fundamental del Álgebra: su primera demostración formal fue presentada en su tesis doctoral: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primero o segundo grado (1799). Para su demostración, recurrió a *métodos* geométricos y la demostración resultó tan clara que fue aceptada por la comunidad matemática. Esta demostración representa una interacción entre los *procedimientos* geométrico y los algebraicos, junto con la *representación* gráfica de los números complejos que se habían descubierto en 1797 por Wessel (1745-1818). Gauss fue el primero en observar que en todas las demostraciones anteriores se suponía la existencia de las raíces y se deducían propiedades de ellas. Él mismo no afirmó tener la demostración, sino que una demostración rigurosa debía ir en esos términos. En el trabajo, Gauss hace una crítica a los intentos anteriores de D'Alembert, Euler y Lagrange y aborda el teorema desde una perspectiva diferente: Gauss no calcula las raíces de un polinomio real sino que demuestra la existencia de éstas por medio de un método muy original (Dávila, 2003, p.50). Entre los *conceptos* que utiliza para su demostración se encuentran: factor cuadrático irreducible, propiedades de los números complejos y de identidades trigonométricas relacionadas con ellos, coordenadas polares, intersección de curvas algebraicas, cantidades infinitamente largas, funciones continuas, números complejos y rama de la curva.

La tesis de Gauss del Teorema Fundamental del Álgebra fue importante ya que ella da inicio a un *método* de demostración: "las pruebas de existencia": por primera vez se utilizaban los números complejos y el plano complejo y además demostró que todo polinomio no constante tiene por lo menos una raíz; prueba también que no existe una fórmula por radicales que permita solucionar el polinomio general de grado $n \geq$, y con esto los matemáticos se ven obligados a buscar otros métodos para hallar las raíces de los polinomios. En 1849, 50 años después de su primer intento, Gauss realiza la primera demostración del enunciado general de que una ecuación de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas. La demostración era similar a la primera y en ella se deduce el resultado para coeficientes complejos a partir del resultado sobre polinomios reales. Se resalta la insistencia de Gauss de no suponer la existencia de las raíces cuando se tratara de demostrar su existencia. Él mismo creía, como todos en su época, que había una jerarquía de cantidades imaginarias de las cuales los números complejos eran solo los más simples.

En general la demostración de Gauss se basó en los siguientes *argumentos:* si se tiene el polinomio real $P(z)$ que tiene una raíz compleja de la forma $a+bi$ entonces $P(a+bi)=0$ y además, esta función algebraica se puede representar como $P(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$. La gran originalidad de Gauss fue la de hacer corresponder cada raíz compleja $a+bi$ del polinomio con un punto (a,b) del plano cartesiano. Así, el punto (a,b) debía ser la intersección de las curvas $u=0$ y $v=0$ por lo que era necesario probar que estas dos curvas se cortaban. Gauss utilizó un argumento cualitativo para esta prueba y su razonamiento se basó en las gráficas de las curvas por lo que no fue completamente riguroso: sin embargo, su argumento fue convincente y la prueba que un polinomio real de grado n se factoriza como producto de factores lineales de primero y segundo grado (Davila, 2003,p.82).

6.3.31. Problema 3.4: Ecuaciones solubles por radicales: el grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial (Évariste Galois)

Galois fue un matemático francés, que siendo adolescente determinó la condición necesaria y suficiente para que un polinomio fuera soluble por radicales. Dio solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de *Grupo de Permutaciones.* La idea genial de la teoría de Galois es que se pueden representar ciertos conjunto asociados a la solución de ecuaciones algebraicas mediante grupos de simetrías. El 4 de julio de 1843, Liouville se dirige a la Academia de Ciencias de París con estas palabras:

Espero interesar a la Academia anunciando que entre los papeles de Evariste Galois he encontrado una solución tan precisa como profunda de este bello problema: ¿cuándo es una ecuación soluble por radicales?

Teorema 6.4. *Si $p(x)=0$ es soluble por radicales, entonces el Grupo de Galois del polinomio es soluble.*

La idea de la prueba del Teorema de Galois consiste en suponer que si G es un grupo soluble, tenemos una cadena $G=G_0,G_1,...,G_m$ de forma que G_i es normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tiene orden primo. Asociada a la cadena hay una cadena de subconjuntos de los números complejos $F_0\subset F_1...\subset F_m$ tales que F_i es el conjunto de números complejos que quedan fijos bajo la acción de G_i (esto es $g(z)=z$ para todo elemento de G_i). El conjunto F_0 contiene a los coeficientes de $p(x)$, mientras que todas las raíces de $p(x)=0$ están en F_m. El hecho que G_{i-1}/G_i tenga orden primo implica que los elementos de F_i se puedan construir por radicales a partir de los coeficientes del polinomio $p(x)$ (De la Peña, 2011).

Problema: Probar que el polinomio $x^5-6x+3=0$ no es soluble por radicales.

Solución:

1) La ecuación $x^5-6x+3=0$ tiene tres soluciones reales y dos complejas. La observación se sigue del hecho que el polinomio toma valores negativos en -2 y en 1, valores positivos en -1 y 2 y sabiendo que tiene un solo máximo local en $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$ y un solo mínimo local $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$.

2) El polinomio $x^5-6x+3=0$ no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grado menor que cinco:
Supongamos que este no fuera el caso y se tuviera $p(x)=q(x)r(x)$ con $q(x),r(x)$ de grado menor que cinco. Como el grado de $q(x)$ más el grado de $r(x)$ es 5, entonces se puede suponer que $q(x)$ tiene grado 1 o 2, mientras que $r(x)$ tiene grado 4 o 3. Si $q(x)$ tiene grado 1, entonces $q(x)=nx+m$ y $r(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ con m,n,a_4,a_3,a_2,a_1,a_0 números enteros. Así que $na_4=1$ lo que implica que $n=1$ o $n=-1$ y además $\frac{m}{n}=-m$ es una solución de $p(x)=0$. Pero por el punto 1) se sabe que que $p(x)=0$ no tiene soluciones enteras.
Se pasa a suponer ahora que que $q(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ y $r(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ con coeficientes enteros. Entonces, igualando los coeficientes de los polinomios $p(x)=q(x)r(x)$ se tiene que:

$a_0b_0=3$
$a_0b_1+a_1b_0=-6$
$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0$
$a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0=0$
$a_2b_2+a_3b_1=0$
$a_3b_2=1$

De la primera ecuación se concluye que uno y solo uno de a_0 o b_0 es divisible entre 3. De la segunda ecuación se obtiene que b_1 es también divisible por 3 y finalmente, de la tercera ecuación se tiene que b_2 es divisible por 3. Esto contradice la última ecuación.

3) Un polinomio de grado 5 que satisface las condiciones 1) y 2) tiene como grupo de Galois S_5. El grupo de Galois G es un grupo de permutaciones de las cinco raíces complejas del polinomio $p(x)$ por el Teorema Fundamental de la Aritmética, luego G es un subgrupo de S_5. Un polinomio (con la propiedad 2) tiene siempre un elemento de orden 5 en el grupo de Galois, esto es, hay una permutación $g\in G$ tal que $g^5=1$ pero $g^i\neq 1$ para $1\leq i\leq 4$. Por otra parte, como hay dos raíces no reales de $p(x)$ estás tienen la forma $s+ti,\quad s-ti$ lo que produce un elemento de orden 2 en G: en efecto, la transformación de plano complejo g que consiste en enviar cualquier número complejo $x_1=s+ti$ en su conjugado complejo $x_2=s-ti$ tiene la propiedad: o bien x_1,x_2 son reales y ambas raíces quedan fijas, o bien envía la raíz x_1 en la segunda x_2 (esto sucede en caso que x_1,x_2 no sean reales). Esta transformación satisface también que $g^2(z)=z$ para todo número complejo z. Se puede así suponer que a G le pertenecen la transposición $(1,2)$ y la rotación $(5,4,3,2,1)$. Estos elementos generan a S_5.

4) El grupo S_5 no es soluble. Esto es, no hay una cadena de subgrupos $S_5=G_0,G_1,...,G_m$ de forma que cada G_i sea normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tenga orden primo: en efecto, esto es así porque S_5 tiene como subgrupo normal a A_5 que no tiene subgrupos normales.

5) El teorema de Galois indica que: si $p(x)=0$ es soluble por radicales, entonces el grupo de Galois del polinomio es soluble. Entonces como S_5 no es soluble se sigue que el polinomio $p(x)=x^5-6x+3=0$ no es soluble por radicales (De la Peña, 2011).

Problema: Hallar el grupo de Galois de la ecuación $x^2+bx+c=0$

Solución:

Se generaliza el grupo de Galois para un polinomio de grado 2.
1) Sean r_1, r_2 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b, c vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^2+bx+c=0=(x-r_1)(x-r_2)=x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2$

Se tiene que:
$c=r_1r_2$
$b=-(r_1+r_2)$
Y $b^2-4c=(r_1+r_2)^2-4r_1r_2=(r_1-r_2)^2$ función simétrica
$\sqrt{b^2-4c}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2}=\sqrt{(r_1-r_2)^2}=\pm(r_1-r_2)$ función no simétrica

2) Se define el conjunto $K_0=\{$conjunto de todas las expresiones que se pueden obtener a partir de b, c haciendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones $\}$
Y $K_1=K_0(\sqrt{b^2-4c})$ con $b, c \in K_0, \quad r_1, r_2 \in K_1$ de forma que el paso de K_0 a K_1 representa resolver la ecuación. Como las funciones de K_0 son invariantes al permutar sus dos variables r_1, r_2 diremos que su grupo de simetrías es S_2, mientras que las funciones de K_1 no son en general simétricas de ningún modo y por tanto se le asigna el grupo trivial de simetrías $\{id\}$.

Así, se puede representar en el siguiente esquema:

$$\left(\begin{array}{ccc} K_0 & \surd & K_1=K_0(\sqrt{b^2-4c}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_2=G_0 & \triangleright & G_1=\{id\} \end{array}\right)$$

3) Como el índice de G_1 respecto a G_2 es 2 se tiene que G_1 es normal respecto a G_2.

Entonces, si el polinomio tiene una sola raíz, el grupo de Galois del polinomio es el trivial, esto es, contiene solo la permutación identidad. Si el polinomio tiene dos raíces racionales el grupo de Galois es el trivial y finalmente si las dos raíces son irracionales entonces el grupo de Galois contiene dos permutaciones y es isomorfo al grupo de los enteros módulo 2.

Problema: El grupo de Galois de la ecuación $x^3+bx^2+cx+d=0$

1) Sean r_1, r_2, r_3 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b, c, d vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^3 + bx^2 + cx + d = 0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - r_1 r_2 r_3$

Se tiene que:
$d = -r_1 r_2 r_3$
$b = -(r_1 + r_2 + r_3)$
$c = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$
2) Se toma:

a) $D = (9bc - 2b^3 - 27d)^3 + 4(3c - b^2)^3$
b) $E = \frac{(9bc - 2b^3 - 27d) + \sqrt{D}}{2}$
c) $t = \sqrt[3]{E}$
d) La fórmula para resolver la ecuación:

$\frac{-b}{3} + \frac{t}{3} + \frac{b^2 - 3c}{3t}$

2) Se tiene que $D = -27(r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2$
$E = (r_1 + \varsigma r_2 + \varsigma^2 r_3)^3$
$\varsigma = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (raíz cúbica de la unidad)

3) Se observa la perdida de simetrías por medio de radicales: D es una función simétrica pero $\sqrt{D}$ no, aunque perduran algunas simetrías, así $\sqrt{D}$ es invariante al cambiar $(r_1, r_2, r_3) \longrightarrow (r_2, r_3, r_1)$. También E goza de las mismas simetrías que $\sqrt{D}$ pero al extraer las raíces cúbicas se pierden todas ellas.

4) Se tiene el siguiente esquema para la ecuación cúbica:

$$\left(\begin{array}{ccccc} K_0 & \sqrt{\ } & K_1 = K_0(\sqrt{D}) & \sqrt[3]{\ } & K_2 = K_1(\sqrt[3]{E}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_3 = G_0 & \triangleright & G_1 = A_3 & \triangleright & G_2 = \{id\} \end{array} \right)$$

5) La normalidad de A_3 se justifica ya que el índice respecto a S_3 es 2, también es evidente que $\{id\}$ es un subgrupo normal de A_3.

Entonces el grupo de Galois del polinomio corresponde a un subgrupo del grupo S_n según la naturaleza de las raíces.

Problema: El grupo de Galois de la ecuación $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

Solución:
Al aplicar el método descrito para las ecuaciones de grado 2,3 y 4 se verifica que no existe una cadena de subgrupos desde S_5 a $\{id\}$ donde cada uno sea subgrupo normal del anterior. Así no se puede escribir la expresión:
$S_5 \triangleright A_5 \triangleright ... \triangleright \{id\}$
Porque A_5 no tiene subgrupos normales propios (ningún A_n para $n \geq 5$). La cadena se corta y falta hacer los radicales $\sqrt[5]{}, \sqrt[3]{}, ...$ por tanto, no existe una fórmula para resolver la ecuación de quinto grado usando solo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y radicales (Teorema de Abel). Lo mismo se aplica a la ecuación general de grado $n > 5$; pero hay casos particulares de ecuaciones que sí se pueden resolver por radicales (ciclotómicas) (Póveda, s.f.).

A continuación, se presentan en la tabla 6.23 y 6.24 las configuración epistémicas CE3, C3.1, relacionadas con los problemas presentados en este apartado 3 que corresponde a la última etapa de evolución psicogenética del objeto Grupo, según Piaget & García (2008) .

Tabla 6.22: Configuración epistémica CE3

CE3. Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales	
CE3.4	Grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial: ecuaciones solubles por radicales
CE3.3	Gauss y la demostración del Teorema Fundamental del Álgebra
CE3.2	Gauss y la solución de ecuaciones ciclotómicas

Tabla 6.23: Configuración epistémica CE3.1

CE3.1 Problemas en aritmética modular	
CE3.1	Gauss y problemas en aritmética modular

6.3.32. Problema 4.1: Propiedades generales de los grupos continuos de transformaciones (Sophus Lie)

Lie fue un matemático noruego, que creó gran parte de *La teoría de la simetría continua* y la aplicó al estudio de la geometría y de las ecuaciones diferenciales parciales; los grupos de Lie son importantes en el análisis matemático, la física y la geometría porque sirven para describir la simetría de las estructuras analíticas; fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales y se relacionan con temas de geometría diferencial: como Lie escribe a Mayer en 1874: "Mis primeros trabajos estaban, por decirlo así, preparados por adelantado para servir de fundamento a la nueva teoría de los grupos de transformaciones (Campos, 2007)". Lie propone considerar un nuevo elemento generador a la manera de Plücker: considerar no solo un punto sobre ella, sino un punto y la tangente en ese punto a la curva, es lo que llama un elemento lineal, ahora elemento de contacto de primer orden. Las transformaciones apropiadas son entonces aquellas que aplican curva sobre curva pero que no solamente hacen corresponder puntos sino elementos de contacto de primer orden; en cada punto la imagen del elemento de contacto en primer orden es la imagen del elemento de contacto en el punto de partida. Son las transformaciones de contacto (Campos, 2007).

La idea anterior, la generaliza a n dimensiones y esto le permite a Lie refinar la noción de variedad integral de un sistema diferencial hasta constituirla en la esencia de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, según Demidov citado en Campos (2007). Tal desarrollo fue el fruto de un denotado estudio por parte de Lie de las concepciones al respecto de Euler, Lagrange, Monge, Pfaff, Hamilton, Plücker y Jacobi. Las generalizaciones logradas por Lie mediante su concepción de los elementos de contacto le permitieron ligar las nociones de incidencia de elementos de contacto, formas de Pfaff, transformaciones de contacto, invariación de una ecuación diferencial mediante una transformación.

El gran mérito de Lie al dar solución de sistemas diferenciales, dependía finalmente de los grupos continuos finitos de transformaciones. Van der Waerden citado en Campos (2007) explicó que lo de continuo tenía que ver con la diferenciabilidad (como se tenía en 1870) y lo de finito con el número de parámetros: si hay infinitos parámetros, o mejor, una función arbitraria, se dice que el grupo es infinito: desde Hermann Weyl en 1934, se le dice grupo de Lie.

La condición de invariación conduce a un sistema diferencial cuya solución es la que provee los parámetros. Al nacimiento de los grupos de transformaciones dedican Lie y Engel grandes esfuerzos, materializados en tres gruesos volúmenes publicados entre 1888 y 1893: el primero, trataba de propiedades generales de los grupos de transformaciones; el segundo, trataba de transformaciones de contacto y el tercero, consta de seis partes, las cuatro primeras relacionadas con los grupos continuos finitos. La primera, trata de los de la recta y el plano. La segunda, de los del espacio tridimensional. La tercera, del grupo proyectivo del espacio tridimensional. La quinta parte estudia el problema de los fundamentos de la geometría. La sexta da consideraciones generales acerca de grupos continuos finitos: en particular, figuran allí tres célebres teoremas, llamados fundamentales, junto con sus recíprocos, que constituyeron la base de toda la teoría y han sido profundamente estudiados, desde el punto de vista local inicialmente y luego desde el punto de vista global (Campos, 2007).

6.3.33. Problema 4.2: La clasificación de las Geometrías (Felix Klein)

Klein, fue un matemático alemán, que demostró que las geometrías métricas, euclidianas y no euclidianas constituían casos particulares de la geometría proyectiva. En 1872 presentó una notable clasificación de la Geometría: *El programa Erlangen,* pone fin a la escisión entre geometría pura y geometría analítica. En esta clasificación el concepto de *Grupo,* desempeñó un papel fundamental, ya que el objeto de cada geometría se convierte en el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

Lie, Klein, Poincaré, Hilbert y Cartan demarcaron toda una época en la historia de la geometría, donde parte de su obra puede ser estudiada desde un mismo punto de vista: **“la construcción de la geometría sobre la noción de grupo”** (Campos, 2007). Klein vivió en la época de la consolidación Weierstrassiana del análisis y en la de la consolidación de las geometrías no euclidianas, a las cuales él mismo hizo una contribución esencial; él demostró que si la geometría proyectiva es consistente, también lo serán las geometrías esférica, euclidiana e hiperbólica. Klein estaba más cerca de la concepción estructural de Hilbert o Bourbaki: construye las geometrías elíptica e hiperbólica a partir de la euclidiana. Pero demostró igualmente cómo construir la euclidiana a partir de la elíptica. El segundo estudio fundamental de Klein sobre la geometría fue el que se conoce como programa Erlangen: *Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas:* así, Klein escribe

(Campos, 2007, p. 88):

“Siguiendo la analogía con las transformaciones del espacio, se habla de transformaciones de la variedad; estas también forman grupo”. Para decir algo de lo abstracto, la variedad parte de lo concreto, el espacio. Hay transformaciones del espacio que no alteran las propiedades geométricas de las figuras. Llámese grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativamente a las transformaciones del grupo principal.

Esta fue la idea central del Programa Erlangen, que en términos actuales equivale a: una geometría determina un grupo. Recíprocamente, un grupo determina una geometría. Por lo tanto, una geometría es una tripla (V,G,I), en la que V es un conjunto no vacío, el de los elementos de base de la geometría; G es un grupo de transformaciones; I son las propiedades de los elementos de V, invariantes respecto de G. Por ejemplo, si V es el plano euclidiano bidimensional, G puede ser el grupo de similitudes, es decir, de las transformaciones que no alteran los ángulos, pero sí las distancias; entre las propiedades I se encontrarán los teoremas de semejanza de triángulos. Un subgrupo, es el de las isometrías, las cuales conservan las distancias, a demás de los ángulos. Entre las propiedades I se encontrarán los teoremas clásicos de congruencia de triángulos. La geometría de la congruencia resulta subordinada a la de la semejanza (Campos, 2007, p. 88).

Problema:como generalización de la geometría de [Euclides], Klein pone la cuestión general: dados una variedad y un grupo de transformaciones de esta variedad, determinar las propiedades de sus elementos que no son alteradas por las transformaciones del grupo.

La geometría proyectiva no nació sino cuando se volvió costumbre considerar como enteramente idénticas a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección, y enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto de las modificaciones causadas por la proyección; esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones el *grupo de las transformaciones proyectivas. El grupo de las semejanzas* es subgrupo del proyectivo; así, la geometría de la semejanza resulta subordinada a la proyectiva. La subordinante es más general. Se llega a la idea de las geometrías equivalentes. Dos geometrías aparentemente disímiles pueden resultar equivalentes si es posible exhibir una correspondencia inyectiva entre los elementos de cada geometría. Los grupos serán isomorfos (Campos, 2007). En 1872, Klein en el Programa Erlangen, hizo una sistematización y jerarquización de las geometrías, mediante grupos y subgrupos, concibiendo como objeto de cada una el estudio de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones y considerando cada geometría como subgeometría de otra. Así, clasificar geometrías es, clasificar grupos de transformaciones. En esta dirección, la Topología es la geometría de los homeomorfismos o aplicaciones bicontinuas, que constituyen un grupo de transformaciones que conservan la conexión (deformar sin cortar); en la geometría proyectiva, las transformaciones son proyectivas o proyectividades que constituyen un grupo que conserva la alineación; el grupo de transformaciones afines o afinidades conserva el paralelismo y caracteriza la geometría afín.

Dentro de ésta se encuentra incluida, la geometría de la semejanza. Así, la geometría euclídea es, la geometría de las congruencias, que consiste en el estudio de propiedades de las figuras, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones rígidas, generado por las traslaciones y rotaciones en el plano. Esto es equivalente al axioma no postulado de Euclides, de que las figuras no varían en sus propiedades cuando se las somete a movimientos en el plano. Por tanto, la geometría euclídea, desde el punto de vista de Klein, es solo un caso especial de la geometría afín, y ésta a su vez un caso especial de una geometría aún más general, la geometría proyectiva (Gómez, García, Pina & Navarro, 2003).

6.3.34. Problema 4.3: La clasificación de los grupos finitos simples

En 1983 se logró terminar la clasificación de los grupos finitos simple, estableciéndose que existían cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 6.1).

Problema: Clasificar los grupos finitos simples.

Solución:
Todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:
Un grupo alternado de grado al menos 5.
Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito.
Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$
Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo. John Conway consideró al

grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos.

Los ordenes y nombres de los grupos corresponden a:
Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el "baby monster group" de orden superior a 4Ö1033 y el "monstruo" de orden superior a 8Ö1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1, J3, J4, O'N, Ru, Ly$ se les llama "grupos parias"; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm) (ver, figura 6.1).

6.3.35. Problema 4.4: La clasificación de los grupos cristalográficos

Se tiene que un grupo G de movimientos en el plano se denomina *grupo cristalográfico*, si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos. Así, por ejemplo, se tiene que es imposible llenar todo el plano con pentágonos regulares, sin cortarse unos con otros o dejar espacios libres. Esta limitación se llama *restricción cristalográfica* y proviene del hecho que los grupos de cristalografía no pueden tener simetrías rotatorias de orden 5; pero sí es posible tener grupos cristalográficos con rotaciones de orden 6 (Rivero, 1999).

En la misma dirección, se define un *grupo discontinuo,* como aquel grupo G de movimientos en el plano donde se cumple que para cada punto P del plano existe un entorno, disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad.

Problema 1: ¿Qué grupos discontinuos de traslaciones existen en el plano?

Todo grupo de traslaciones discontinuo G en el plano corresponde a uno de los siguientes:
1) G consiste solo de la identidad. $G = \langle I \rangle$
2) G está generado por una traslación. $G = \langle T_a \rangle$
3) G está generado por dos traslaciones. $G = \langle T_a, T_b \rangle$

Problema 2: ¿Cuáles son los generadores de un grupo cristalográfico?

Si G es un grupo cristalográfico de movimientos directos, entonces G está generado por traslaciones y una única rotación de orden n=1,2,3,4,6

Demostración: Sabemos que G contiene una traslación T_a con norma mínima. 1
Si G contiene una rotación σ, con centro en O y de orden $n > 2$, entonces los puntos $T_a(O), \sigma \circ T_a(O), \sigma^2 \circ T_a(O), \ldots, \sigma^{n-1} \circ T_a(O)$, determinan un polígono regular de n lados con centro en O e inscrito en un círculo de radio $||a||$.

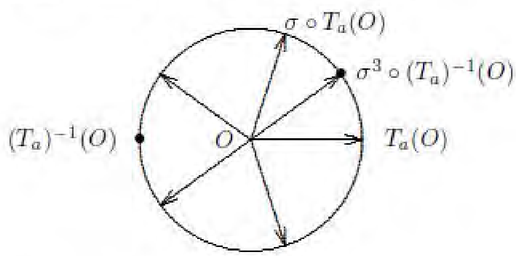
Si $n > 6$, entonces la longitud del lado del polígono es menor que el radio del círculo y por lo tanto $d(T_a(O), \sigma \circ T_a(O))$ es menor que $||a||$.

Por otro lado, se puede probar que el movimiento $\sigma \circ T_a \circ \sigma^{-1}$ es una traslación. Por lo tanto $S = s \circ T_a \circ \sigma^{-1} \circ (T_a)^{-1}$ es también una traslación, de norma :

$$||S|| = d(T_a(O), S(T_a(O)) = d(T_a(O), \sigma \circ T_a(O)) < ||a||.$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $n \leq 6$.

Si $n = 5$, los puntos $T_a(O)$ y $\sigma^3 \circ (T_a)^{-1}(O)$ están sobre los vértices adyacentes de un polígono regular de 10 lados (ver la figura)



Luego se tiene

$$d(T_a(O), \sigma^3 \circ (T_a)^{-1}(O)) < ||a||.$$

Figura 6.12: Clasificación de los grupos cristalográficos (Rivero, 1999)

2

La aplicación $T = (\sigma^3 \circ (T_a)^{-}1 \circ \sigma^{-3}) \circ (T_a)^{-1}$ es una traslación del grupo G, cuya norma es igual a

$$\begin{aligned} ||T|| &= d(O, T(O)) = d(T_a(O), \sigma^3 \circ (T_a)^{-1} \circ \sigma^{-3}(O)) \\ &= d(T_a(O), \sigma^3 \circ (T_a)^{-1}(O)) < ||a||. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $n = 5$ es imposible.

Problema 3: ¿Cuántos grupos cristalográficos planos existen?

Existen 17 grupos cristalográficos no isomorfos. Estos se clasifican de acuerdo al grupo de rotaciones:

1) Grupos sin rotación: W_1, W_1^1, W_1^2, W_1^3

2) Grupos con rotación de orden 2: W_2, W_2^1, W_2^2, W_2^3, W_2^4

3) Grupos con rotación de orden 3: W_3, W_3^1, W_3^2

4) Grupos con rotación de orden 4: W_4, W_4^1, W_4^2

5) Grupos con rotación de orden 6: W_6, W_6^1

La *notación,* W_i^j indica para el subíndice i el tipo de rotación que contiene el grupo, así el 1 indica una rotación de orden 1 (la identidad); el 2 una rotación de orden 2 o giro de 180 grados; el 3, una rotación de orden 3 o giro de 120 grados y así sucesivamente. El subíndice j se usa para diferenciar los posibles movimientos inversos, dentro de una familia con el mismo orden del grupo de rotaciones (Rivero, 1999).

6.3.36. Problema 4.5: La clasificación de los grupos puntuales

Una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto (ver, sección 6.2.11.2). La existencia de uno o varios elementos de simetría obliga o impide la existencia de otros en la molécula. Así, solo son posibles algunos conjuntos de elementos de simetría.

Problema: ¿Cuál es el grupo puntual de una molécula?

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
C_3	$E, 2C_3$	3	C_3
$C_3, 3C_2$	$E, 2C_3, 3C_2$	6	D_3
$C_3, 3\sigma_v$	$E, 2C_3, 3\sigma_v$	6	C_{3v}
$C_3, 3\sigma_h$	$E, 2C_3, 3\sigma_h, 2S_3$	6	C_{3h}
$C_3, 3C_2, \sigma_h$ $S_3^*, 3\sigma_v^*$	$E, 2C_3, 3C_2, 3\sigma_h$ $2S_3, 3\sigma_v$	12	D_{3h}
$C_3, 3C_2, i$ $S_6^*, 3\sigma_d^*$	$E, 2C_3, 3C_2, i$ $2S_6, 3\sigma_d$	12	D_{3d}

La $(*)$ significa que los elementos se encuentran implicados por los anteriores. Cada uno de los conjuntos de elementos de simetría forma un grupo puntual de simetría y los elementos de simetría que posee la molécula determinarán el grupo puntual al cual pertenece.

6.3.37. Problema 4.6: Grupos en Física

Por simetría de un sistema físico se entiende que las ecuaciones de movimiento permanecen invariables respecto a un cierto conjunto de transformaciones: si una ecuación es invariante respecto a las transformaciones A, B, entonces es también invariante respecto a la transformación C que resulta de la aplicación sucesiva de A y B. La transformación C se denomina producto de las transformaciones y así la operación de multiplicación es una operación interna en el conjunto de transformaciones de simetría de un sistema físico. Un conjunto de transformaciones con estas propiedades se denomina un *Grupo de transformaciones de simetría del sistema físico dado* (Pietrásheñ & Trífonov, 2000).

Problema: ¿ Qué grupos utiliza la Física?

Algunos de los grupos que utiliza la física corresponden a:

1) Grupo de desplazamientos (traslaciones) en el espacio tridimensional: sus elementos son las transformaciones de traslación del origen de coordenadas en un vector arbitrario a, es decir, $r' = r + a$; este es un grupo continuo triparamétrico (el vector a tiene tres componentes).

2) Grupo de rotaciones $O^+(3)$: sus elementos son las transformaciones de rotación del espacio tridimensional o las matrices ortogonales correspondientes con determinante igual a la unidad. Este grupo es continuo y triparamétrico (los 9 elementos de una matriz ortogonal están relacionados entre sí mediante condiciones.) Tres parámetros independientes pueden ser escogidos, por ejemplo, $\{\varphi, \theta, \psi\}$. Los ángulos polares $\{\varphi, \theta\}$ determinan la posición del

eje de rotación que pasa por el origen de las coordenadas. El ángulo $\{\psi\}$ describe la rotación respecto a este eje. La invariancia respecto al grupo $O^{+}(3)$ pone de manifiesto la propiedad de isotropía del espacio tridimensional (esto es, las tres direcciones son equivalentes, no existe una directiva privilegiada). Si al grupo de rotaciones se le añada la operación de inversión dada por $x = -x, y = -y, z = -z$ se obtiene el grupo ortogonal $O(3)$.

3) Los grupos de simetría de las moléculas (grupos puntuales) están compuestos por ciertas transformaciones ortogonales del espacio tridimensional. Por ejemplo, el grupo de simetría de una molécula con forma de tetraedro regular (como la molécula CH4) consta de 24 elementos: rotaciones y reflexiones que transforman uno en otro los vértices del tetraedro.

4) Los grupos de simetría de los cristales (o grupos espaciales) que están compuestos por un número finito de transformaciones ortogonales, de desplazamientos (traslaciones) discretos y de los productos de estas transformaciones. Tal simetría es invariante solo a un cristal infinito o bien a un modelo de cristal con las denominadas condiciones de contorno cíclicas.

5) Grupos de permutaciones de n objetos, por ejemplo, de las coordenadas de n partículas idénticas. Es un grupo de orden $n!$.

6) El grupo de Lorentz L^{+}, formado por las transformaciones que describen el paso de un sistema de referencia a otro que se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme respecto al primero. Este grupo contiene al grupo de rotaciones $O^{+}(3)$ y depende de 6 parámetros: los 3 ángulos que determinan la orientación relativa de los ejes coordenados espaciales y las tres componentes de la velocidad del movimiento relativo. El requisito de la invariancia de las ecuaciones de movimiento respecto al grupo de Lorentz es una consecuencia de los postulados de la teoría de la relatividad.

Los grupos anteriores no agotan, todos los ejemplos de los grupos que tienen aplicaciones en la Física y se puede decir, que la importancia de la Teoría de Grupos, son sus *métodos*, que proporcionan la posibilidad de *clasificar* los estados de un sistema físico a partir de sus propiedades de simetría, sin resolver las propias ecuaciones de movimiento (Pietrásheñ & Trífonov, 2000).

A continuación, se presenta en la tabla 6.25, 6.26, 6.27 y 6.28 las configuraciones epistémicas CE4.4, CE4.3, CE4.2 y CE4.1, relacionadas con los problemas presentados en el apartado 4 y que corresponde a a la definición abstracta de grupo y luego a algunas de las aplicaciones del objeto Grupo en contextos extramatemáticos.

Tabla 6.24: Configuración epistémica CE4.4

CE4.4 Los grupos en los contextos extramatemáticos	
CE4.6	Grupos en física
CE4.5	Clasificación de los grupos puntuales
CE4.4	Clasificación de los grupos cristalográficos

Tabla 6.25: Configuración epistémica CE4.3

CE4.3 Clasificación de los grupos finitos simples

Tabla 6.26: Configuración epistémica CE4.2

CE4.2 Clasificación de las geometrías

Tabla 6.27: Configuración epistémica CE4.1

CE4.1 Los grupos continuos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales

6.3.38. Problema 5: Primera definición abstracta de Grupo (Cayley)

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de Grupo, ya que representaban una visión más amplia del concepto, donde se daban ejemplos de grupos infinitos y extienden el campo de aplicación de la noción grupo, la cual estuvo presente en desarrollos de Teoría de Números, Geometría, Ecuaciones diferenciales parciales y Teoría de Funciones.

Problema: ¿Qué es un grupo?

Arthur Cayley dio el paso definitivo para la definición abstracta de Grupo en su artículo, "Sobre la Teoría de Grupos que dependen de la ecuación cúbica $\theta^n = 1$", en la cual se encuentra la primera definición abstracta de grupo que corresponde a:

"Un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, \dots\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de ellos consigo mismo, pertenecen al conjunto; se dice ser un grupo"

Como parte de la definición Cayley establece que el producto de estos símbolos, no tiene porque ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presenta varios ejemplos en su artículo como:
1) Los cuaterniones con la suma
2) Las matrices invertibles con la multiplicación
3) Grupos de permutaciones con la operación compuesta

También, Cayley muestra que cualquier Grupo abstracto, es isomorfo a un grupo de permutaciones: este resultado se conoce como el *Teorema de Cayley;* introduce además, la tabla de multiplicación para un grupo y afirma que: "un grupo abstracto, queda determinado por ésta". En 1878, escribe 4 artículos sobre el tema, uno de ellos llamado "The theory of groups."

Esta definición no llamó la atención de la comunidad matemática y se tuvo que esperar muchos años para que el concepto abstracto de Grupo, iniciara a permear a los matemáticos del siglo XX. En la tabla 6.29 se presenta la configuración epistémica, correspondiente a ésta práctica matemática.

Tabla 6.28: Configuración epistémica CE5

CE5 Definición abstracta de Grupo	
CE5.1	Cayley y la primera definición abstracta de Grupo

6.4. Significado global del objeto Grupo

El estudio histórico, epistemológico y fenomenológico de la evolución del objeto Grupo se orientó a la reconstrucción del significado global del objeto matemático, donde se identificaron doce sistemas de prácticas las cuales llevan asociadas, cada una, una configuración epistémica que constituyen un significado parcial del objeto de investigación: las configuraciones asociadas a los sistemas de prácticas se han denominado: **CE0.** Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); **CE1.** Relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); **CE1.1.** La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); **CE1.2.** Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular (edad moderna); **CE2.** Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ (edad moderna, siglo XVII-XVIII); **CE3.** Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales y la Teoría de Galois (edad contemporánea, siglo XVIII-); **CE3.1.** Problemas en aritmética modular; **CE4.1** Los grupos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales; **CE4.2.** La clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas; **CE4.3.** Clasificación de los grupos finitos simples; **CE4.4.** Los grupos en los contextos extramatemáticos (CE4.4, CE4.5, CE4.6) y en el nivel superior se encuentra la configuración **CE5.** Definición abstracta de Grupo.

En esta dirección, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático, se entiende el significado de un concepto desde una perspectiva pragmatista, es decir, en términos de los sistemas de prácticas en las que dicho objeto interviene (significado sistémico): estos sistemas de prácticas están ligados a situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir los distintos significados cuando se abordan problemas diferentes (Pino-Fan, 2013, p. 129). Estas doce configuraciones epistémicas fueron descritas en la sección anterior y a pesar de que se consideran como distintas, algunas guardan similitudes, de tal forma que se pueden relacionan como se ilustra en la figura 6.14: según ésta figura, se consideraron cronológicamente según las etapas de evolución del objeto Grupo definidas por Piaget & García (2008); estos sistemas de prácticas/significados parciales, se pueden ver como "primarios" ya que, las configuraciones activadas en éstos sistemas (CE0, CE1, CE1.1, CE1.2, CE2, CE3, CE3.1, CE4.1, CE4.2, CE4.3, CE4.4 y CE5), tienen un carácter extensivo, es decir, se resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares.

En un primer nivel, según la tabla 6.14, se encuentran las configuraciones epistémicas CE0.1,...,CE0.12 las cuales se generalizan por la configuración CE0, relacionada con los métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media. De igual forma, las configuraciones CE1.1,...,CE1.4 corresponden a situaciones-problemáticas que quedan generalizadas en la configuración CE1, que corresponde a la relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico. En la misma dirección, las configuraciones CE2.1, CE2.2 y CE2.3, se generalizan con la configuración CE2, que corresponde a la búsqueda de los métodos generales para solucionar las ecuaciones algebraicas y el problema de la imposibilidad de solucionar por el método de radicales la ecuación de grado cinco. En la tercera etapa de evolución del objeto grupo se encuentran las configuraciones CE3.2, CE3.3 y CE3.4 que se pueden generalizar con la configuración CE3, que corresponde a la clasificación de las ecuaciones algebraicas que son solubles por radicales y la Teoría de Galois y en el mismo nivel de la CE3 se encuentra la configuración CE3.1, que se relaciona con los problemas en aritmética modular de Gauss. En la cuarta etapa de evolución del objeto matemático se encuentran las configuraciones CE4.4, CE4.5 Y CE4.6 que se generalizan, con la configuración CE4.4 que corresponde a la aplicación de los grupos en contextos extra-matemáticos como, los grupos cristalográficos, los grupos puntuales de las moléculas y los grupos en Física; en el mismo nivel se encuentran: la configuración CE4.3 que corresponde a la clasificación de los grupos finitos simples, la CE4.2, que corresponde a la clasificación de las geometrías y la CE4.1, que corresponde a los grupos finitos de transformaciones y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales y finalmente, en el nivel cinco se ubica la CE5, que corresponde a la definición abstracta o axiomática del objeto Grupo, que corresponde al significado de referencia dado al objeto Grupo y que es el significado que utilizan los libros de texto analizados y de igual forma, es el significado que pretenden los programas para los estudiantes de formación matemática.

En la figura 6.14, se presentan las relaciones existentes entre las diversas configuraciones epistémicas determinadas a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico.

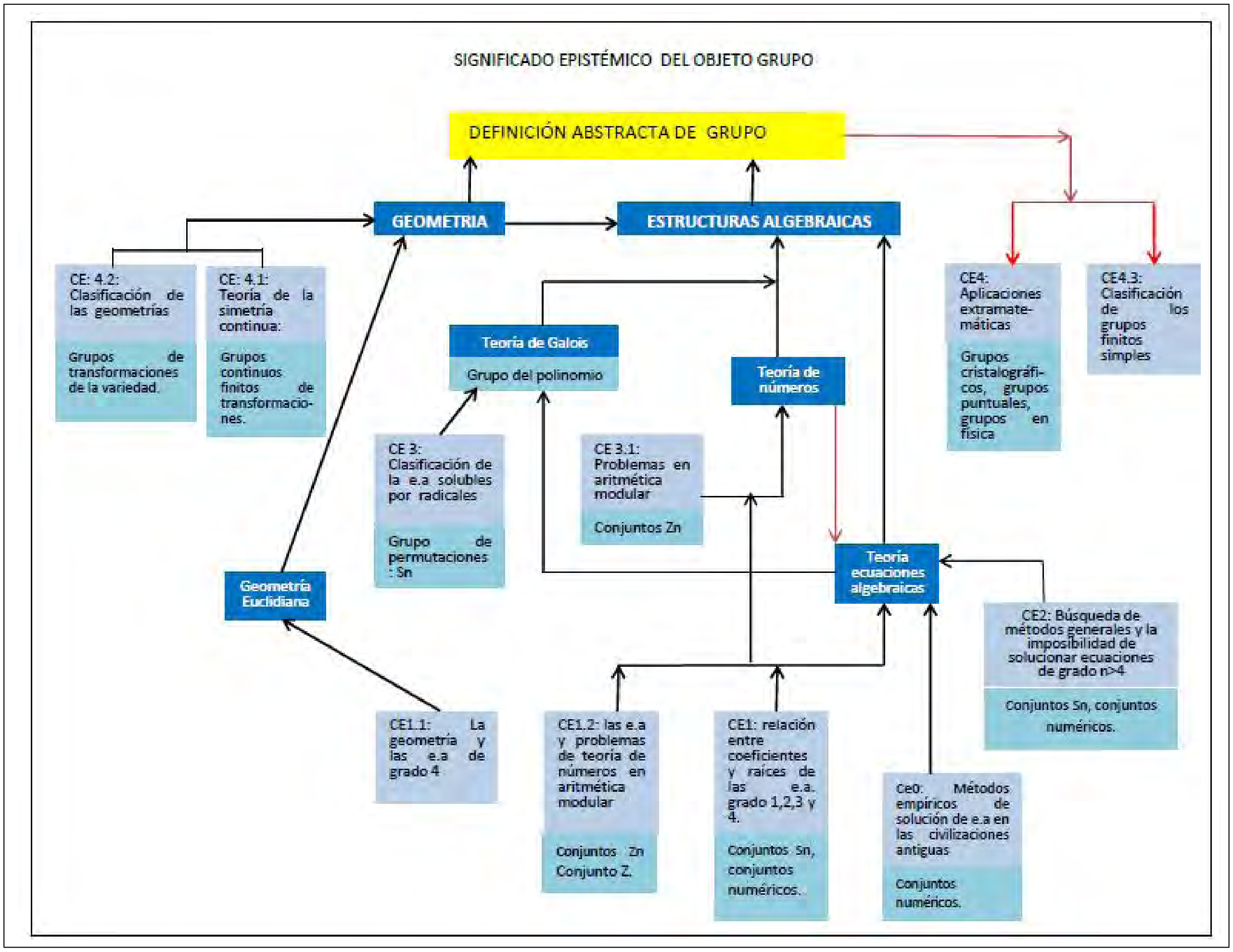


Figura 6.13: Significado epistémico global del objeto Grupo

6.5. Implicaciones del desarrollo histórico del objeto Grupo en la enseñanza

Piaget & Garcia (2008), plantean una diferenciación en cuanto a la psicogénesis de la Teoría de Grupos en tres períodos de desarrollo: un primer período: *el intra-operacional* caracterizada por la solución de ecuaciones algebraicas en una forma empírica: cada ecuación se solucionaba con un método particular; luego se pasó a un período *inter-operacional* caracterizado por una búsqueda de métodos más generales para la solución de estas ecuaciones algebraicas, con métodos basados en la transformación de las ecuaciones en otras de menor grado que fueran resolubles y finalmente a partir de Galois, se da inicio al período *trans-operacional* y al desarrollo de la Teoría de Grupos, cerrando el estudio de las ecuaciones algebraicas y su solución por el método de radicales y se inicia con el problema del análisis de las estructuras algebraicas, donde, la primera estructura algebraica corresponde al objeto Grupo.

En el primer período se ubican los trabajos de Viète y Ruffini; en el segundo período los trabajos de Lagrange, Gauss, Ruffini y Cauchy y con los trabajos de Galois se inició el tercer período denominado por Piaget & García (2008) el período trans-operacional. Estos períodos de evolución son retomados en la teoría APOS, para determinar al igual que en las etapas de la evolución del conocimiento científico, los períodos de evolución del conocimiento en los estudiantes, respecto a los diferentes objetos matemáticos. En esta dirección, es importante analizar en primer lugar los aportes de las investigaciones realizadas en la teoría APOS (ver, capítulo 4) en cuanto a las etapas o períodos por los cuales los estudiantes transitan para llegar a la comprensión del objeto matemático. De igual forma, se evidencia que es conveniente iniciar el estudio de Teoría de Grupos con una introducción a los grupos de simetría de las figuras o de polígonos regulares, como se hace en los textos de Gallian (2006) y Herstein (1999) con los grupos $\mathbb{Z}_n$ y los grupos numéricos; así, el estudiante inicia con la comprensión de las propiedades que se cumplen en éstos conjuntos y de esta forma, con el planteamiento de varias situaciones-problemas adecuadas, se podría llegar al trabajo con el objeto Grupo en su significado abstracto.

La evolución del objeto Grupo, se inicia en un periodo cero, pre-algebraico, con los aportes de las civilizaciones antiguas en la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2. En ésta etapa cero, no se establece ninguna relación con el objeto Grupo; luego en la edad media, se continua con el estudio de métodos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 (trabajos de Fibonacci, Del Ferro, Tartaglia) y se inicia con el análisis de las propiedades que cumplen las raíces de las ecuaciones y los coeficientes de las mismas (renacimiento); aquí en este periodo se inicia el estudio de los *Conjuntos de permutaciones* de las raíces de las ecuaciones (Cardano, Harriot, Descartes, Ferrari, Viéte, Fermat, Lagrange) y la solución a algunos problemas en aritmética modular (trabajos de

Euler) donde se introducen los *conjuntos* $\mathbb{Z}_n$ además de iniciar con la introducción de una notación algebraica más adecuada para las ecuaciones (Viéte). De igual forma, en ésta etapa uno se da inicio al problema de la demostración del *Teorema Fundamental del Álgebra,* que establece que una ecuación algebraica de grado n debe tener n raíces o soluciones (en los números Complejos).

En un segundo periodo, se pasa a la búsqueda de métodos generales para dar solución a las ecuaciones algebraicas ya que se tenían métodos particulares para cada ecuación según su grado (Ruffini, Abel); se trabajan los conjuntos de permutaciones de las raíces de la ecuación pero, sin llegar a la concepción de la estructura de grupo como tal. En este período, Abel da la demostración de la imposibilidad de resolver por el método general de radicales, la ecuaciones de grado quinto. Pero, algunas familias de ecuaciones de grado quinto se pueden resolver por radicales, entonces surge el problema de encontrar condiciones para que una ecuación de grado quinto sea soluble por radicales. La solución al problema la da Galois con el estudio del grupo del polinomio asociado a la ecuación algebraica. Galois establece en su teorema que: El polinomio $f(x)$ es soluble por radicales si y solo si su grupo de Galois es soluble; así, si el grupo de Galois del polinomio no es soluble se tiene que el polinomio y por tanto la ecuación algebraica no es soluble por el método de radicales. Galois introduce nociones muy importantes para la Teoría de Grupos que los matemáticos de su época no comprendieron. Pasaron muchos años (entre 13 o 14) para que el matemático Liouville, comprendiera el alcance de las definiciones y teoremas dados por Galois y los presentará a la comunidad matemática. Galois introdujo los *Grupos de permutaciones de las raíces de la ecuación algebraica, a los cuales denomino el Grupo del polinomio.*

Finalmente, Caley establece la primera definición abstracta al objeto Grupo: “Un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, ...\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de ellos consigo mismo, pertenecen al conjunto; se dice ser un grupo”

Como parte de la definición Cayley establece que el producto de estos símbolos, no tiene porque ser conmutativo, pero sí asociativo. En la definición formal, falta considerar la propiedad de la existencia de un elemento identidad y de los inversos para cada elemento del grupo, por tanto, esta primera definición todavía es incompleta. Cayley presentó varios ejemplos como: el grupo de los cuaterniones con la operación suma, el grupo de las matrices invertibles con la multiplicación y el grupo de permutaciones con la operación compuesta (Dávila, 2003b, p.75).

Con la presentación de la evolución del objeto grupo, se hace evidente en primer lugar la complejidad del objeto matemático y de igual forma, la enseñanza del objeto Grupo, lo cual indica que se deben presentar situaciones-problemas de la matemática y fuera de la matemática, de modo que el estudiante logre el trabajo con conjuntos abstractos y pueda iniciar el estudio de los teoremas formales y de las aplicaciones propias de la Teoría de Grupos.

En este resumen de la evolución del objeto grupo (ver, capítulo 6) se indican los problemas relacionados con los Grupos Simétricos - Grupos de permutaciones, los grupos $\mathbb{Z}_n$, problemas geométricos (Descartes, Gauss), problemas en la clasificación de las Geometrías, problemas con las ecuaciones diferenciales parciales, problemas con los grupos cristalográficos, problemas con los grupos puntuales, problemas con grupos aplicados a la física; a partir de los cuales se podría iniciar el estudio formal del objeto Grupo. También es claro, que la evolución del objeto matemático, se dio en diferentes etapas y en el transcurso de muchos siglos; ya que, solo en el siglo XX se logra llegar al significado del objeto Grupo como un conjunto donde se define una operación que cumple los axiomas o propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto.

En esta dirección, algunos autores como Rivero (1999. p.15) establecen que, la geometría de los movimientos debería ocupar un lugar importante en el currículum de las Licenciaturas en Matemáticas (Matemáticas), ya que además de incentivar el interés por aspectos geométricos de la Matemática, es un punto de convergencia de varias ramas como la geometría euclidiana , el álgebra lineal y la teoría de grupos. Además, argumenta que, es deseable que los estudiantes de Educación Matemática (Licenciados) orientados a la docencia a nivel de bachillerato, tomen, durante la carrera, un curso de este tipo. El autor hace referencia al estudio de los grupos cristalográficos, los grupos puntuales y los grupos en Física.

CAPÍTULO 7

El objeto Grupo en los programas y libros de Texto

7.1. Introducción

En este capítulo se presenta el análisis a los programas de Teoría de Grupos, específicamente, se analizan las unidades que se relacionan con el objeto Grupo, para determinar cuáles son los significados pretendidos por cada uno de los programas. De igual forma, se realiza el análisis a cuatro textos de teoría de Grupos, en las unidades relacionadas con el objeto para determinar el significado pretendido por cada uno de ellos. Así, el presente capítulo tiene el objetivo de presentar el tratamiento otorgado al objeto de investigación en el currículo y en libros de texto universitarios.

La información de este capítulo, junto con los significados identificados del objeto de investigación a partir de las prácticas matemáticas, en el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, permiten establecer el significado de referencia institucional del objeto Grupo y compararlo con el significado Global, del objeto. El estudio de los significados se convierte en un insumo para efectuar en el siguiente capítulo, el diseño, validación e implementación del instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático potenciado en los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto matemático.

7.2. La Teoría de Grupos en el currículo nacional

La Teoría de Grupos, es una asignatura de los planes universitarios, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y para los Matemáticos. En esta dirección, con la presente investigación se buscaba relacionar el conocimiento del contenido (según Shulman, 1986, 1987) de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo y el conocimiento didáctico - matemático, que se ha potenciado o desarrollado en relación al objeto matemático. Para esto, en el capítulo 3, se presentó parte de la normatividad de los programas de formación matemática en las Universidades Colombianas, las cuales vinculan a éstos estudiantes como docentes universitarios para los programas de formación matemática; en especial, los estudiantes pueden ingresar como docentes de los programas de Licenciatura en Matemáticas y de Matemáticas así, en este contexto se justifica la importancia de la presente investigación.

En la resolución 5443 del 30 de Junio de 2010, del Ministerio de Educación Nacional se definen las características específicas de los programas de formación profesional en Educación, en el marco de las condiciones de calidad y se dictan otras disposiciones. El artículo 2, define el perfil del educador (ver, capítulo 3) y establece que:
El programa debe fortalecer las competencias básicas del educador para:

• Conocer y utilizar procesos y conceptos fundamentales de las matemáticas que le permitan interpretar y representar situaciones *cotidianas y especializadas* de manera gráfica, simbólica, numérica y verbal y solucionar problemas en diversos contextos.

• Indagar y analizar de manera crítica y reflexiva las interacciones físicas, sociales y culturales que se desarrollen en contexto. Aplicar con responsabilidad social y ambiental, el conocimiento científico y tecnológico en soluciones innovadoras que posibiliten cambios y transformaciones ante los problemas identificados en contexto.

• Aprender de manera autónoma, por iniciativa personal y utilizar los conocimientos y prácticas propios de su disciplina. Fortalecer sus competencias a través de su ejercicio profesional, la autoevaluación permanente y el intercambio con otros.

La resolución, establece además, que el programa debe desarrollar las competencias profesionales que le permitan al educador:

• Desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje fundamentadas en la articulación de conocimientos, conceptos y procedimientos de los saberes de la disciplina, de la didáctica, la historia, la epistemología y la pedagogía, para el caso de los licenciados, en relación con la Matemática.

En cuanto al currículo, el artículo 5 establece:

"La institución de educación superior demostrará a través de un currículo fundamentado, articulado, dinámico y flexible su pertinencia frente a las demandas del contexto, la coherencia entre los aspectos que lo componen y las estrategias pedagógicas y didácticas que le permitan lograr el "perfil que se propuso en relación con el desarrollo de las competencias de sus estudiantes".

Los egresados de los programas de Licenciatura según la resolución, se desempeñan como profesionales en Educación básica y media (secundaria) y el Ministerio de Educación Nacional define los estándares relacionados con la Matemática para cada grado de educación básica y media; sin embargo, en las universidades Colombianas, se vinculan los egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas, como docentes universitarios. La resolución define el perfil de los egresados y plantea un conocimiento de los objetos matemáticos en cuanto a las distintas representaciones y establece que deben aprender de manera "autónoma" para utilizar los conocimientos y prácticas propias de su disciplina, además de fortalecer sus competencias a través de su ejercicio profesional. Estas competencias le deben permitir desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje fundamentadas en la articulación de conocimientos, conceptos y procedimientos de los saberes de la disciplina, de la didáctica, la historia, la epistemología y la pedagogía.

En este punto, las exigencias para los egresados de los programas de Licenciatura en Matemáticas, se podrían relacionar con la búsqueda de una potenciación o desarrollo de conocimientos didácticos y matemáticos necesarios para la enseñanza y en esta dirección, es pertinente analizar los conocimientos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y específicamente aquellos relacionados con la dimensión epistémica, es decir, con los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional para la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior. Respecto al currículo, la resolución también direcciona la responsabilidad a la institución de Educación Superior, para lograr el perfil que se propone, en relación con el desarrollo de las competencias que el mismo programa establezca: estas competencias, se analizan en la siguiente sección en el apartado de análisis del programa de Teoría de Grupos en los programas de formación matemática.

En la misma dirección, la resolución 2769 del 2003 del Ministerio de Educación Nacional, define las características específicas de calidad para los programas de pregrado en Ciencias Exactas y Naturales en el cual se ubica el programa de Matemáticas. En su artículo 2 relacionado con los aspectos curriculares plantea que:

• El programa deberá guardar coherencia con la fundamentación teórica, práctica y metodológica de la biología, la física, la geología, la matemática, o de la química como disciplinas y profesiones y con los principios y propósitos que orientan la formación desde una perspectiva integral, considerando, entre otros aspectos, las competencias y saberes que se espera posean.

Todo programa en Ciencias Exactas y Naturales propenderá por:

• La apropiación, por parte del estudiante, de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la epistemología y en las prácticas científicas propias de su campo; desarrollar competencias de comunicación de los conocimientos y resultados de la investigación y aportar a la solución de problemas, tanto en el campo específico como en contextos interdisciplinarios.

• Los programas académicos en ciencias exactas y naturales se organizarán teniendo en cuenta las siguientes *áreas de formación,* sin perjuicio de la autonomía universitaria:

Área de fundamentación en ciencias exactas y naturales:

• Reflexión sobre la historia, la naturaleza y las formas de producción del conocimiento propias de las ciencias.
• Abordaje de problemas disciplinarios e interdisciplinarios que permitan entender las lógicas, los conceptos y los métodos que subyacen a la formulación de las teorías científicas y la reflexión sobre ellas.
• Formación para interpretar y comunicar la literatura científica.
• Los contenidos generales y las actividades académicas que en el campo de las ciencias exactas y naturales son comunes para todas las disciplinas:
Biología
Química
Física
Matemáticas
Diseño experimental

Área de fundamentación en ciencias sociales y humanidades: La cual comprende aquellos saberes y prácticas que complementan la formación integral del biólogo, físico, geólogo, matemático o químico en valores éticos, antropológicos, sociales y ambientales.

Área disciplinaria: busca la apropiación y el manejo de conceptos, teorías, métodos y herramientas de cada una de las disciplinas. Los componentes mínimos de formación son:

Para el programa de formación académica en Matemáticas, se exige la formación teórica y práctica en: Cálculo: diferencial, integral y vectorial; Álgebra lineal; **Álgebra abstracta: teorías de grupos,** teoría de anillos y teoría de cuerpos; Ecuaciones diferenciales; Geometría: euclidiana, diferencial; Análisis numérico; Análisis matemático; Topología; Probabilidad y Estadística; Teoría de Números; Métodos Numéricos y Variable compleja.

Se deduce de la normatividad, que a partir de la resolución 2769, el Ministerio de Educación Nacional ubica la Teoría de Grupos dentro del área disciplinaria para los Matemáticos, fundamentada en la apropiación por parte del estudiante, de los contenidos y métodos de la disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la “epistemología” y en las prácticas científicas propias de su campo. En esta dirección, se realizó en el capítulo anterior (6), el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo para identificar los significados que fue adquiriendo el objeto Grupo a lo largo de su desarrollo histórico; a partir de este estudio y del estudio de los significados pretendidos por los programas de Teoría de Grupos, se determinaran los significados pretendidos por la Institución (la universidad y los textos), para poder finalmente, diseñar el instrumento para evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos en relación con el objeto Grupo.

7.3. La Teoría de Grupos en los programas de formación matemática

En esta sección se describen los contenidos de los programas de Teoría de Grupos para los estudiantes de formación matemática en la Universidad Colombiana donde se realiza el estudio. Luego del análisis a las resoluciones nacionales que orientan los programas de formación matemática (Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas): Resolución 2769 de 2003; Resolución 5443 de 2010, relacionadas con el objeto de investigación: se pasa en esta sección a determinar los significados que se pretende adquieran los estudiantes y de igual forma, los conocimientos que deberían tener para la labor de la enseñanza universitaria en la búsqueda de una enseñanza con idoneidad y con la pretensión de una búsqueda de criterios que permitan una mejora en la calidad de los programas de formación matemática, en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto Grupo.

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Tabla 7.1: Programa de Teoría de Grupos - Licenciatura en Matemáticas

PRESENTACIÓN:
PROGRAMA ACADÉMICO: LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SEMESTRE: QUINTO
ASIGNATURA: TEORÍA DE GRUPOS
CÓDIGO: 8107869
NÚMERO DE CRÉDITOS: TRES (3)

JUSTIFICACIÓN

Se justifica el estudio de Teoría de Grupos, al decir que los conjuntos son para la matemática como los grupos para el álgebra. En la formación del futuro Licenciado, este curso es el segundo contacto del estudiante con las Estructuras Algebraicas, después de estudiar los espacios vectoriales. El concepto de Estructura introducida por Bourbaki se vislumbra plenamente en este curso, es decir, para construir esta teoría es suficiente contar con un conjunto de objetos, una operación entre ellos (o una función) y establecer ciertos axiomas. Estos axiomas son propiedades básicas que satisfacen los objetos del conjunto y a partir de los axiomas se deducen otras propiedades. Construir Estructuras Algebraicas de Grupo y determinar las relaciones que pueden existir entre éstos, es parte fundamental de este curso y para esto, los estudiantes deben abstraer para comprender dichas construcciones. Este curso le da al estudiante otro punto de vista de las Matemáticas, en el sentido que lo involucra con conceptos que se salen de la intuición.

COMPETENCIAS

El estudiante debe estar en capacidad de:

COMPETENCIAS INTERPRETATIVA.

-Usar los conceptos de la teoría de grupos para interpretar su significado en otras ramas de la matemática y en otras áreas del conocimiento.

-Interpretar textos de contenido matemático.

COMPETENCIAS ARGUMENTATIVAS.
-Explicar la solidez de una solución y de la importancia de los resultados del Álgebra que permiten hallarla.

COMPETENCIAS PROPOSITIVAS.
-Proponer diferentes procedimientos en la solución de problemas.
-Formular, modelar y resolver problemas.

COMPETENCIAS PROFESIONALES.
-Adquirir la suficiente destreza para ampliar los detalles en demostraciones de resultados de la teoría de grupos y poderlos comunicar efectivamente.

METODOLOGÍA

La Metodología de este curso está basada en la idea de "compromiso" que debe existir tanto de parte de los estudiantes como del tutor o profesor, y consiste en:

Una exploración previa, (ya sea con lecturas individuales o de grupos pequeños antes de la clase, o de lecturas de un texto en clase con las respectivas conjeturas y análisis) y una discusión y análisis de conceptos y temas nuevos en plenaria con la orientación del profesor.
Desarrollo de Trabajos en grupo tanto en la clase como fuera de ella.
Instar al estudiante a realizar trabajos en forma espontánea y a cuestionarse constantemente sobre su quehacer en la asignatura.
Análisis y solución de situaciones problemáticas extraídas de otras ramas de la matemática, sobre todo al iniciar un concepto general.
Las actividades didácticas se marcan en procesos heurísticos para la solución de problemas.

INVESTIGACIÓN

Aplicación de la teoría de Grupos a otras áreas del conocimiento (Física, Química, Biología, entre otras).

EVALUACIÓN

EVALUACIÓN COLECTIVA
Evaluación de sustentación de trabajos en grupo, dentro de la clase y fuera de ella.
Se trata de hacer, en lo posible, evaluación permanente, teniendo en cuenta la importancia

del trabajo personal y en equipo para lograr la cooperación y resaltar la dedicación y el interés individual. La evaluación tiene como estrategia el logro de las competencias. Para cada uno de los tipos de competencias se propondrán problemas y se indicaran las fortalezas que el alumno adquiere en cada una de ellas, a saber: en el conocer, obrar y comunicar.

En las competencias de tipo formativo, se busca evaluar que el estudiante tenga conocimiento de la teoría y de la información básica, identifique y comprenda conceptos y principios modulares y los planteamientos de teorías y los principales desarrollos de las disciplinas.
En las competencias interpretativas, se evaluará la capacidad de comprender el contenido y significado de las fuentes, su alcance según los criterios de interpretación y comprensión fáctica, base para identificar acertadamente el problema.
En las competencias profesionales, se valorará la capacidad para ordenar, clasificar y subordinar los elementos conceptuales del conocimiento matemático. En la aplicación práctica se examinará la capacidad para adecuar los razonamientos a casos o problemas concretos y solucionar problemas específicos, así como su comunicación efectiva.

CONTENIDOS TEMÁTICOS MÍNIMOS

PRIMERA UNIDAD: Grupos y Subgrupos
a) Leyes de Composición. Definición y Ejemplos.
b) Grupos. Conceptos, Propiedades básicas y Ejemplos.
c) Grupo de las clases residuales. Teorema de Lagrange.
d) Subgrupos. Subgrupos Cíclicos y Generación de Subgrupos.

SEGUNDA UNIDAD: Grupos Cíclicos
a) Definición de Grupo Cíclico
b) Orden y periodo de un grupo Cíclico
c) Propiedades

TERCERA UNIDAD: Subgrupos Normales y Homomorfismos
a) Subgrupo Normal
b) Grupo Cociente
c) Homomorfismos de Grupos.

CUARTA UNIDAD: Homomorfismo e Isomorfismo
a) Teorema Fundamental
b) Teorema de Factorización
c) Teorema de correspondencia
d) Teorema de Isomorfismo. Teorema de Cayley.
e) Automorfismos

QUINTA UNIDAD: Grupos de Permutaciones
a) Ciclos
b) Grupo Alternante
c) Sistemas de generadores
(d) Grupo Dihédrico

SEXTA UNIDAD: Grupos Libres
a) Grupos libres. Productos libres. Generadores y relaciones.
b) Grupos abelianos libres. Grupos abelianos finitamente generados.
c) El teorema de Krull-Schmidt.

SÉPTIMA UNIDAD: Grupos Finitos
a) Acción de un grupo sobre un conjunto.
b) Los teoremas de Sylow.
c) Clasificación de Grupos finitos.
d) Aplicaciones.

La asignatura de Teoría de Grupos se cursa en el quinto semestre (10 semestres) y pertenece al área disciplinar y de profundización; antes de cursar la asignatura, el estudiante de Licenciatura ha tomado los cursos de: Fundamentos de Matemáticas, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística Descriptiva, Geometría Euclídea, Teoría de Conjuntos, Álgebra Lineal, Cálculo Integral, Sistemas Numéricos, Teoría de Probabilidad, Cálculo Multivariable, Distribución de Probabilidad, Física I, Topología Métrica, Física II e Inferencia Estadística. Según los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los Licenciados, se observa en la unidad 1 que el "significado institucional o de referencia" pretendido para el objeto matemático, corresponde a la configuración de Grupo como Grupo Abstracto, que se relaciona con un conjunto donde se define una operación binaria, que puede cumple los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Otro significado que se pretende y se infiere de la unidad 5, corresponde a la configuración de Grupo como "Conjunto de Permutaciones" al desarrollar en la unidad, el estudio de los grupos alternantes como subgrupos de los grupos de permutaciones S_n : en especial, se presentan los grupos Diédricos D_n que se estudian como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones en un conjunto finito de elementos.

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

Tabla 7.2: Programa de Teoría de Grupos - Matemáticas

PRESENTACIÓN: **PROGRAMA ACADÉMICO:** MATEMÁTICAS **SEMESTRE:** CUARTO **ASIGNATURA:** TEORÍA DE GRUPOS **CÓDIGO:** 8108774 **NÚMERO DE CRÉDITOS:** CUATRO (4)

En cuanto a la Justificación de la asignatura de Teoría de Grupos, las competencias, la Metodología, la Investigación y la Evaluación, tienen las mismas especificaciones que para los Licenciados. La asignatura es orientada por un profesor de la Escuela de Matemáticas de la línea de Álgebra y los cambios se pueden presentar en los textos guía y en la metodología del curso. Por esta razón, en la siguiente sección se hace el análisis al significado del objeto Grupo pretendido por cuatro (4) libros de texto: dos clásicos y dos contemporáneos escritos por doctores en la línea de Álgebra y de universidades Colombianas. Además, los programas difieren en el número de créditos para la asignatura: el "crédito académico" es la unidad que mide el tiempo estimado de actividad académica del estudiante en función de las competencias profesionales y académicas que se espera que el programa desarrolle.

Del programa de Teoría de Grupos para los Matemáticos, se establece que los significados pretendidos para el objeto Grupo según los contenidos mínimos, corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, al retomar la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional, para el programa de Matemáticas, se ubica la Teoría de Grupos en el área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la "epistemología" y en las prácticas científicas propias de su campo": queda en evidencia la epistemología, como rama de la filosofía interesada en el conocimiento científico, que plantea cuestiones fundamentales a las cuales el Matemático deberá dar respuesta: entre otras preguntas se plantean: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿Empírico? ¿Racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico?, (¿Capacidad de predecir sucesos?, ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?, (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad?, ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos? Estas cuestiones se hacen en términos generales o se pueden hacer más específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como para el caso del objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado del conocimiento? y finalmente ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska, A. & Lerman, S. 1996, p. 829). Así, queda en evidencia, que el estudiante de Matemáticas debe tener un conocimiento del objeto Grupo en los contextos de su uso.

En esta dirección, en la siguiente sección se presenta el estudio de los significados pretendidos por los libros de texto para la asignatura de Teoría de Grupos.

7.4. La Teoría de Grupos en los libros de texto

En la sección anterior se estudiaron los programas de la asignatura Teoría de Grupos, para los estudiantes de formación matemática, programas de Educación Superior. En general, las orientaciones curriculares proponen los mismos temas para Licenciados y Matemáticos. En el caso de los estudiantes de Licenciatura, la asignatura inicia en algunos casos, con el desarrollo de la unidad cero de preliminares, que no aparece dentro de la programación y allí, se abordan algunos temas de Teoría de Números como tópicos necesarios para los desarrollos posteriores de la asignatura de Teoría de Grupos. Para el caso de los Matemáticos, se inicia directamente con la unidad de "Grupos y subgrupos" comenzando con el estudio de las Leyes de Composición; Definición de grupo y ejemplos; se continua con algunos conceptos, propiedades básicas y ejemplos de grupos. El programa de Matemáticos, sigue con el tópico de "Grupo de clases residuales" y el Teorema de Lagrange, para finalmente, concluir la unidad, con el estudio de los subgrupos de un grupo: en especial, se estudian los subgrupos cíclicos y la generación de Subgrupos.

Respecto a los significados que ha tomado el objeto Grupo en su desarrollo histórico, el programa inicia directamente con la definición de Grupo, en el contexto de Grupo abstracto, es decir, desde el estudio del objeto según su significado global que para el caso concuerda con el significado de referencia del objeto. Se continua, con el estudio de los

Grupos de Permutaciones que corresponden realmente, al primer significado o al germen para el desarrollo del objeto según su evolución histórica.

Respecto a los programas de Teoría de Grupos, se concluye que el estudio del objeto Grupo no se aborda desde su evolución histórica: en la asignatura, se estudian los grupos S_n con sus propiedades pero como un ejemplo particular, en el contexto general de Grupo Abstracto; de igual forma, no se estudia el tema de los polinomios simétricos, ni la relación que tienen los grupos de permutaciones con la solución por el método de radicales para las ecuaciones de grado 2, 3, 4 y 5. De igual forma, no se aborda el Grupo de Galois, que fue precisamente la idea de Galois, para llegar a consolidar el concepto de grupo como Grupo de Permutaciones. Por su parte, los grupos $\mathbb{Z}_n$ se presentan, como ejemplos particulares de Grupos en su contexto de Grupo Abstracto y en ninguna parte del programa se trabaja la solubilidad de las ecuaciones algebraicas que precisamente, corresponde al origen histórico del objeto matemático.

En esta dirección, se realiza un análisis semiótico de los libros de texto y los significados pretendidos por ellos: se analizaron 4 libros de textos, al tener presente que el libro representa un recurso potente para el profesor al momento de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Remillard, 2000 citado en Vásquez, 2014). Por esta razón, se pretende dar respuesta a algunos de los siguientes interrogantes, relacionados con los libros de texto: ¿Cuáles son los objetos matemáticos vinculados con el objeto Grupo?, ¿Cómo se introduce su estudio?, ¿Se tiene en cuenta su desarrollo histórico: específicamente, se aborda el estudio desde los distintos significados dados hasta llegar a la construcción del objeto? Para esto, se analizan los textos, en las unidades relacionadas con el objeto Grupo: estos textos, son los recursos de mayor uso para el proceso de instrucción en los programas de formación matemática (ver, tabla 7.3).

Tabla 7.3: Libros de texto de Teoría de Grupos

Título	Autor	Editorial	Edición
Contemporary Abstract Algebra	Joseph A. Gallian	Houghton Mifflin Company	2a ed. 2006
Abstract Algebra	I.N. Herstein	John Wiley & Sons, INC.	3a ed. 1999
Cuadernos de Álgebra No. 1 Grupos	Oswaldo Lezana	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2012
Teoría de Grupos	José F. Caicedo C.	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2004

Se presenta a continuación, el análisis de los objetos matemáticos presentes en cada uno de los libros de texto: se presentan en primer lugar, los contenidos relacionados con el objeto Grupo y luego se realiza el estudio de los objetos matemáticos primarios, presentes en las unidades relacionadas con el objeto y sus significados. Para el estudio se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos (Godino, 2002) (ver, Capítulo 4). En primer lugar, se presentan en la tabla 7.4 los contenidos del texto 1, de Gallian (2006) que se relacionan con el objeto grupo y luego se presenta el análisis semiótico de los objetos matemáticos presentes en las unidades relacionadas con dicho objeto.

Tabla 7.4: Libro 1: Contemporary Abstract Algebra

Título	Unidad	Lecciones	Página
Contemporary Abstract Algebra	PART 1. Integers and Equivalence Relations	**Chapter 0**. Preliminaries	3-26
		Properties of Integers **Modular Arithmetic** Mathematical Induction Equivalence Relations Functions (Mappings) Exercises Computer execises	3 8 14 17 20 23 26
	PART 2. Groups	**Chapter 1. Introduction to Groups**	29-41
		Symmetries of a Square **The Dihedral Groups** **Exercises** **Biography of Niels Abel**	31 34 37 41
		Chapter 2. Groups **Definition and Examples of Groups** **Elementary Properties of Groups** **Historical Note** **Exercises** **Computer exercises**	42-57 42 50 52 53 57
		Chapter 3. Finite Groups; Subgroups Terminology and Notation Subgroup Test Examples of Subgroups Exercises Computer exercises	59-71 59 61 63 67 71

Título	Unidad	Lecciones	Página
Contemporary Abstract Algebra		**Chapter 4**. Cyclic Groups	73-90
		Properties of cyclic Groups Classification of Subgroups of Cyclic Groups Exercises Computer exercises Biography of J. J. Sylvester Supplementary Exercises for Chapter 1-4	73 78 82 86 88 90
		Chapter 5. Permutation Groups	94-119
		Definition and Notation Cycle Notation Properties of Permutations A Check-Digit Scheme Based on D_5 Exercises Computer execises Biography of Agustin Cauchy	94 97 99 109 112 116 119
		Chapter 6. Isomorphisms	120-136
		Chapter 7. Cosets and Lagrange is Theorem	137-152
		Chapter 8. External Direct Products	153-172
		Chapter 9. Normal Subgroups and Factor Groups	174-197
		Chapter 10. Group Homomorphisms	199-216
		Chapter 11. Fundamental Theorem of Finite Abelian Groups	217-230

En la tablas 7.5 y 7.6 se presentan las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en la Parte 2 del texto de Gallian (2006) que corresponde a uno de los textos de mayor uso en los programas de Licenciatura en Matemática; el estudio se realiza en los capítulos 1-2 que son los que se relacionan con el estudio de los significados institucionales (texto) del objeto Grupo; para esto, se hace uso de la técnica analítica del análisis semiótico, propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (ver, capítulo 4).

Tabla 7.5: Texto Contemporary Abstract Algebra: entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 1

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Conjunto de Simetrías del cuadrado	Rotaciones, Reflexiones, identidad, inverso	
Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
Se considera la rotación de 90 grados y la de 450 como igual.	$R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'$	Si $A, B \in D_4$ entonces también AB.
	Rotación de 0 grados, de 90 grados	R_{90} y R_{270} son inversos cada uno del otro y H es su propio inverso.
Se puede pensar que la región cuadrada es transparente (un vidrio), con las esquinas marcadas: en un lado con color azul, negro, rosa y verde. Esto hace fácil distinguir entre movimientos que tienen diferentes efectos.		Si $A \in D_4$ entonces $AR_0 = R_0A$ y así combinando cada elemento. Un elemento R_0 con esta propiedad se llama una identidad y cada grupo debe tener una.
	H reflexión a través del eje horizontal, V reflexión a través del eje vertical, D reflexión por la diagonal principal, D' reflexión por la otra diagonal.	Vemos que para cada elemento $A \in D_4$ existe exactamente un elemento $B \in D_4$ tal que $AB = BA = R_0$. En este caso B se dice que es el inverso de A y viceversa.
	Tabla de operaciones para estos 8 elementos (p. 33)	$HD \neq DH$ pero $R_{90}R_{180} = R_{180}R_{90}$
		Si se tiene que $AB = BA$ para todo A, B se dice que el grupo es conmutativo o abeliano de otro modo, se dice que el grupo no es abeliano.
		D_4 es un grupo.

		Argumentos
		Se quiere describir las posibles relaciones entre la posición inicial del cuadrado y su posición final, en términos de los movimientos.
		La clausura es un requerimiento para que un sistema matemático sea un grupo.
		En un grupo AB puede o no puede ser el mismo que BA.
		Se ha ilustrado que D_4 posee tres o cuatro condiciones que definen un grupo: clausura, existencia de una identidad y existencia de inversos.
		La condición restante requerida para un grupo es la asociatividad; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo a, b, c del conjunto: se debería chequear las $8^3 = 512$ posibilidades para la elección de a, b, c en la práctica, esto rara vez se hace.
		Los 8 movimientos son funciones y la operación de composición de funciones es asociativa, así, no debemos revisar las ecuaciones.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Los grupos Dihedrales: el grupo D_n es el “grupo dihedral” de orden $2n$.	Grupo de simetrías, polígono regular, orden del grupo	El grupo dihedral de orden $2n$ es a menudo llamado el “grupo de simetrías del n-ágono regular ”.
	Arte, naturaleza, Químicos, Mineralogistas, cálculos orbitales, niveles de energía, átomos, moléculas, vibración molecular, molécula piramidal	
		El término simetría, es de la palabra griega symetros, que significa de igual medida.
		El grupo de simetrías de una figura plana, es el conjunto de todas las simetrías de la figura. Simetrías en tres dimensiones se definen de manera análoga.
	Rotación, traslación	Una rotación de un plano alrededor de un punto en el plano es una simetría del plano.
		Una traslación de un plano o del espacio tridimensional es una simetría.
		Una reflexión a través de una línea L es que la función que deja a todos los puntos de L fijos y toma cualquier punto q que no está en L, hasta el punto q' de modo que L es la mediatriz del segmento que une q y q'.
		Una reflexión a través de un plano en tres dimensiones se define de manera análoga.
		La restricción de una rotación de 180 grados, alrededor de una línea L en tres dimensiones a un plano que contiene L es una reflexión, a través de L en el plano.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		En los grupos dihedricos, los movimientos que describimos como voltear sobre ejes de simetría en tres dimensiones (por ejemplo H, V, D, D') son reflexiones a través de lineas en dos dimensiones.
	Grupos cíclicos	Algunos objetos y figuras tienen simetría rotacional pero no simetría de reflexión. Un grupo de simetría, consiste de las simetrías de rotación $0_o, 360^o/n, 2(360^o)/n, ..., (n-1)360^o/n$: si no hay otras simetrías, el grupo se llama un grupo de rotación cíclica de orden n y se denota por $\langle R_{360/n}\rangle$.
El grupo de simetría de una molécula piramidal tal como el amoníaco (NH_3) tiene como grupo de simetría a D_3.		
Mineralogístas, determinan la estructura interna de los cristales por el estudio 2-dimensional de las radiografías de la composición atómica de los cristales.		
Es matemáticamente imposible para un cristal poseer un patrón de simetría D_n con $n = 5$ o $n > 6$		
En los ejercicios del capítulo (p. 37) se presentan 23 situaciones-problemas, entre ellas:		
Con pinturas y palabras describe cada simetría de D_3		
Escriba una tabla Cayley completa de D_3		
¿Es D_3 un grupo abeliano?		
Describa con pinturas y palabras los elementos de D_5		
Para $n \geq 3$ describa los elementos de D_n		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	D_n	
		Argumentos
		El análisis realizado para un cuadrado, puede similarmente darse para un triángulo o un pentágono regular o ciertamente, cada $n-$ágono regular ($n \geq 3$).
		Los grupos dihedrales aparecen con frecuencia en el arte y en la naturaleza. Los logos corporativos son recursos ricos de grupos dihedrales de simetrías; los químicos clasifican moléculas de acuerdo a su simetría: más aún, consideraciones simétricas se aplican en cálculos orbitales, en la determinación de los niveles de energía de átomos y moléculas, y en el estudio de las vibraciones moleculares.

Tabla 7.6: Texto Contemporary Abstract Algebra: entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 2

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Dado un conjunto y una operación binaria, determinar si el conjunto define un Grupo	Conjunto, Operación binaria, Grupo, Función, par ordenado	Sea G un conjunto. Una operación binaria en G es una función que asigna a cada par ordenado de elementos de G un elemento de G.
	Conjuntos finitos, fórmula	Clausura
	Matrices con entradas en $\mathbb{Z}_n$	La operación binaria de adición módulo n y multiplicación módulo n en el conjunto $\{0,1,2,...,n-1\}$, que se denota por $\mathbb{Z}_n$ juega un papel extremadamente importante en álgebra abstracta.
	Identidad, el inverso, propiedad asociativa	**Sea G un conjunto no vacío, junto con una operación binaria (usualmente llamada multiplicación) que asigna a cada par ordenado (a,b) de elementos de G un elemento en G denotado por ab. Nosotros decimos que G es un grupo bajo esta operación si se satisfacen las siguientes propiedades:** 1. Asociativa. La operación es asociativa; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo $a,b,c \in G$. 2. Identidad. Existe un elemento e (llamado identidad) en G tal que $ae = ea = a$ para todo $a \in G$. 3. Inversos. Para cada elemento $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ (llamado un inverso de a) tal que $ab = ba = e$.
	Grupo Abeliano	Un grupo es no Abeliano si existe algún par de elementos a,b tal que $ab \neq ba$.

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto $\{1, -1, i, -i\}$ de números complejos es un grupo bajo la multiplicación de complejos. Nótese que -1 es su propio inverso, mientras que el inverso de i es $-i$ y viceversa.	Inverso, números complejos, multiplicación de complejos	
El conjunto $\mathbb{Q}^+$ de racionales positivos es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. El inverso de cada a es $\frac{1}{a}$	Racionales positivos, multiplicación ordinaria.	
El conjunto S de números irracionales positivos junto con el 1 bajo la multiplicación satisface las tres propiedades dadas en la definición de grupo pero no es grupo, ya que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, así, S no es cerrado bajo la multiplicación.	Números irracionales positivos, propiedades de la definición de grupo.	
El conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas en los reales es un grupo bajo la adición componente a componente	Matrices con entradas reales	Un arreglo rectangular de la forma: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se llama una matriz 2×2.
El conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$ para $n \geq 1$ es un grupo bajo la adición módulo n. Para cada $j > 0$ en $\mathbb{Z}_n$ el inverso de j es $n - j$.	Adición módulo n	El grupo $\mathbb{Z}_n$ usualmente se denomina "el grupo de los enteros módulo n".
El conjunto $\mathbb{R}^*$ de números reales distintos del cero es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. La identidad es 1. El inverso de a es $\frac{1}{a}$.	Números reales distintos de cero	
El conjunto de matrices con entradas reales y determinante no cero es un grupo no abeliano bajo la multiplicación de matrices		
$U(n)$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n	$U(n)$, primos relativos	Se define $U(n)$ como el conjunto de enteros positivos menores que n y primos relativos con n
Para todo $n \geq 1$, el conjunto de raíces complejas de la unidad es grupo bajo la multiplicación	Raíces complejas de la unidad	

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ es grupo bajo la adición componente a componente		
$T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es grupo bajo la composición de funciones. Los elementos de G se llaman traslaciones	Composición de funciones, traslaciones	Para un punto fijo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se define $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $(x, y) \longrightarrow (x + a, y + b)$.
El conjunto de matrices 2×2 con determinante 1, con entradas en $\mathbb{Q}$ (racionales), $\mathbb{R}$ (reales), $\mathbb{C}$ (complejos), o $\mathbb{Z}_p$ (p-primo) no son grupos Abelianos bajo la multiplicación de matrices	p-primo, Grupo lineal especial $SL(2, F)$	
El conjunto de matrices 2×2 con determinante $\neq 0$, con entradas en $\mathbb{Q}$ (racionales), $\mathbb{R}$ (reales), $\mathbb{C}$ (complejos), o $\mathbb{Z}_p$ (p-primo) es un grupo no Abeliano bajo la multiplicación de matrices		
El conjunto de todas las simetrías de un modelo ornamental infinito, en el que las puntas de las flechas están espaciadas uniformemente; una unidad de separación a lo largo de una línea es un grupo abeliano bajo la composición		
En los ejercicios del capítulo 2 (p. 53) se presentan 37 situaciones-problemas relacionados con las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser grupo; además, continua proponiendo 4 ejercicios para desarrollar computacionalmente.		
Se concluye el capítulo con una nota histórica, sobre la no conmutatividad de la multiplicación de matrices		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
Asegúrese de verificar la clausura para probar que un conjunto es un grupo.	Note que si a es el inverso de b,entonces b es el inverso de a	Si el grupo tiene la propiedad que $ab = ba$ para cada par de elementos a, b decimos que el grupo es Abeliano.
La mejor manera de captar la carne de un teorema es ver lo que dice en casos específicos	$-a$ el inverso de a	El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo.
Para desarrollar un mejor entendimiento de los siguientes ejemplos, el lector debe suministrar los detalles que faltan.	$detA$, $U(n)$, $\mathbb{Z}_p$	El conjunto $\{0, 1, ..., n-1\}$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n si y solo si n es primo.
		En un grupo G, existe solo un elemento identidad
		En un grupo G, las leyes de cancelación a derecha y a izquierda se tienen; esto es, $ba = ca$ implica $b = c$ y $ab = ac$ implica $b = c$.
		Para cada elemento a en un grupo G, existe un único elemento b en G tal que $ab = ba = e$.
		El conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ no es grupo bajo la multiplicación módulo 4

		Argumentos
		En otras palabras, entonces, un grupo es un conjunto con una operación asociativa tal que existe una identidad, cada elemento tiene un inverso y cada par de elementos puede ser combinado sin salirse del conjunto.
		Ahora que tenemos la definición formal de un grupo, nuestro primer trabajo es construir un buen número de ejemplos. Esos ejemplos serán usados a través del texto, para ilustrar los teoremas.
		El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo: como el número 1 es la identidad, la propiedad 3 falla, por ejemplo, no existe un entero b tal que $5b = 1$.
		Los números reales, las matrices 2×2 con entradas reales, y los enteros módulo n son todos grupos bajo la adición apropiada. ¿Y con la multiplicación? en cada caso, la existencia de algunos elementos que no tienen inverso hacen que el conjunto con la multiplicación usual no sea grupo.
		En su libro clásico " Lehrbuch der Algebra" publicado en 1899, Heinrich Weber, da un tratamiento extensivo de los grupos $U(n)$ y los describe como unos de los más importantes ejemplos de los grupos Abelianos finitos.
		El conjunto de los enteros bajo la sustracción, no es grupo ya que, la operación no es asociativa.

Como conclusión al análisis del texto de Gallian (2006) y dando respuesta a las preguntas planteadas para este análisis de textos, se observa que en la parte 1 del texto, Capítulo 0 o Preliminares, se presenta la lección denominada: *Aritmética modular* a partir de la cual, se introducen los conjuntos $(\mathbb{Z}_n)$ con la operación binaria de adición módulo n. Es decir, se introduce en primer lugar, el objeto Grupo como un conjunto especial, donde se ha definido una operación que cumple ciertas propiedades algebraicas. En esta lección se observa que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde al contexto de uso en *Aritmética Modular.*

En el capítulo 1, la parte 2 se titula: *Introducción a los Grupos* y en él se define el objeto matemático, como un conjunto de movimientos denominados "simetrías del cuadrado" y posteriormente, se pasa al estudio de los grupos denominados: *Grupos dihedrales;* en este capítulo se trabaja el objeto Grupo en su *significado como Conjunto de Permutaciones.* Se continúa con el capítulo 2, denominado: Grupos: en este capítulo, se trabaja el objeto Grupo en su significado *global*, esto es, el significado de Grupo, como *Grupo Abstracto*: un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna que cumple las propiedades o axiomas de: asociativa, existencia de un elemento identidad en el conjunto y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Continuando con el análisis, el capítulo 3 se denomina: Grupos finitos y Subgrupos. En este capítulo se presentan unos test para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo. Se infiere de lo anterior, que el texto de igual forma introduce el objeto Grupo desde el estudio de los "Grupos de simetrías de los polígonos regulares" es decir, desde su significado como conjunto de permutaciones, que corresponde históricamente a uno de los primeros significados dados al objeto Grupo.

El capítulo 4 del texto de Gallian (2006), denominado: *Grupos cíclicos* presenta ciertas propiedades que tienen los grupos y el capítulo 5, denominado: *Grupos de permutaciones,* inicia con la definición del grupo de permutaciones, para continuar con las notaciones que se le pueden dar a una permutación y se trabajan algunas aplicaciones de estos grupos. Los grupos de permutaciones se trabajan como ejemplos particulares del objeto matemático: aquí, se estudian los grupos de simetrías D_n de los polígonos regulares. Finalmente, el texto sigue con el estudio de casos particulares de Grupos y de las relaciones que se definen entre ellos denominadas Homomorfismos e isomorfismos.

La tabla 7.5. inicia con el capítulo 1 y se observa que de los seis objetos matemáticos presentes para el análisis del mismo, sobresalen las *propiedades* que se relacionan con el conjunto de simetrías del cuadrado, D_4, especialmente, la propiedad que tiene $(D_4, \circ)$ con la operación de composición de funciones de ser grupo. De igual forma, sobresalen los *argumentos* relacionados con el grupo D_4 como por ejemplo, que en general, los elementos no cumplen la propiedad $AB = BA$. En este capítulo, se continua con el análisis de la *situación: D_n* es el grupo dihedral de orden n, y se observa que entre los objetos matemáticos, sobresalen los *conceptos* relacionados con el conjunto D_n como: la definición de rotación, traslación y reflexión; también, se hace una introducción a la propiedad del grupo de ser cíclico y se continua con el estudio del conjunto de rotaciones del grupo D_4. En este capítulo se presentan algunas *situaciones* extra-matemáticas que se relacionan con los grupos D_4 como: El grupo de simetrías de una molécula piramidal y el que determina la estructura interna de un cristal.

Finalmente, como conclusión al tratamiento del objeto Grupo en el texto de Gallian (2006), se observa que al final del capítulo, se presentan suficientes *situaciones-problemáticas* intra-matemáticas y extra-matemáticas, para contextualizar, reforzar y aplicar las propiedades, notaciones, conceptos, técnicas y argumentos en la búsqueda de una mejor comprensión del objeto Grupo.

En el capítulo 2, de la segunda parte y según la tabla 7.6 se observa que entre los objetos matemáticos presentes, sobresalen los *conceptos,* tales como: el de operación binaria, la adición módulo n y la definición abstracta del objeto Grupo. De igual forma, sobresalen las *situaciones-problemas* relacionadas con los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, complejos, irracionales); las matrices de tamaño 2×2 con entradas reales; las operaciones aritméticas módulo n que definen los conjuntos $\mathbb{Z}_n$; el conjunto de raíces de la unidad para $n = 4$; el conjunto de enteros primos relativos con n y menores que n denominado el conjunto $U(n)$; las matrices con determinante distinto de cero; de igual forma, matrices con determinante 1. Y se finaliza el capítulo con la situación extra-matemática del conjunto infinito de simetrías de un modelo ornamental. De igual forma, al terminar el capítulo se proponen un gran número de *situaciones-problemáticas* para contextualizar los contenidos matemáticos del capítulo.

En la misma dirección del análisis de textos, se presenta a continuación, la tabla 7.7 con los contenidos del texto 2 de Herstein (1999), relacionados con el objeto grupo y el correspondiente análisis semiótico de los objetos matemáticos presentes en las unidades relacionadas con el objeto de estudio.

Tabla 7.7: Libro 2: Abstract Algebra

Título	Unidad	Lecciones	Página
Abstract Algebra	1	Things Familiar and Less Familiar	1-32
		1. A Few Preliminary Remarks 2. Set Theory 3. Mappings 4. $A(S)$ (The set of 1-1 Mappings of S onto Itself) 5. The Integers 6. Mathematical Induction 7. Complex Numbers	1 3 8 16 21 29 32
	2	**Groups**	40-101
		1. Definition and Examples of Groups **2. Some Simples Remarks** 3. Subgroups 4. Lagrange's Theorem 5. Homomorphisms and Normal Sugroups 6. Factor Groups 7. The Homomorphism Theorems 8. Cauchy's Theorem 9. Direct Products 10. Finite Abelian Groups (Optional) 11. Conjugacy and Sylow's Theorem (Optional)	40 48 51 56 66 77 84 88 92 96 101
	3	**The Symmetric Group**	108-119
		1. Preliminaries 2. Cycle Definition 3. Odd and Even Permutations	108 111 119

A continuación, en la tabla 7.8 se presentan las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en el capítulo 2 del texto de Herstein (1999), que corresponde a uno de los textos de mayor uso en el programa de Matemáticas; el estudio se realiza en el capítulo 2, lecciones 1-2, en las cuales se pueden determinar los significados institucionales (texto) del objeto Grupo: se hace nuevamente uso de la técnica del análisis semiótico, propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (ver, capítulo 4).

UNIDAD 1: Definitions and examples of Groups

Tabla 7.8: Texto Abstract Algebra: entidades matemáticas (unidades elementales)

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto **A(S)** de todas las funciones $1-1$ del conjunto S en si mismo cumple cuatro propiedades algebraicas	$A(S)$, estructura algebraica	$A(S)$ es el conjunto de todas las funciones $1-1$ del conjunto S en el mismo.
		Si $f,g \in A(S)$ entonces las combinamos para formar la función fg definida por $(fg)(s) = f(g(s))$ para cada $s \in S$. Llamamos a fg el producto de f por g.
		Al producto fg se le agregan ciertas reglas de las muchas posibles: en particular, se han seleccionado cuatro reglas que gobiernan el comportamiento de $A(S)$ relacionadas con este producto: 1. Clausura, es decir, si $f,g \in A(S)$ entonces, $fg \in A(S)$. Decimos que $A(S)$ es cerrado bajo este producto. 2. Asociatividad, esto es, dados $f,g,h \in A(S)$, entonces $f(gh) = (fg)h$ 3. Existencia de un elemento unidad, a saber, existe un elemento particular $i \in A(S)$ (la función identidad) tal que $fi = if = f$ para todo $f \in A(S)$ 4. Existencia de inversos, esto es, dado $f \in A(S)$ existe un elemento denotado por $f^{-1} \in A(S)$ tal que $ff^{-1} = f^{-1}f = i$

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		Un conjunto G es un grupo, si en G se ha definido una operación $*$ tal que: (a) $a, b \in G$ implica que $ab \in G$ (describimos esto diciendo que G es cerrado bajo $*$). (b) Dados $a, b, c \in G$, entonces $a*(b*c) = (a*b)*c$ (esto se describe diciendo que se cumple la ley asociativa en G. (c) Existe un elemento especial $e \in G$ tal que $a*e = e*a = a$ para todo $a \in G$ (e se llama el elemento identidad o unidad de G). (d) Para cada $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ tal que $a*b = b*a = e$ (escribimos este elemento b como a^{-1} y lo llamamos el inverso de a en G). Los cuatro postulados anteriores (llamados los axiomas de grupo), fueron, después de todo, el modelo que mantiene $A(S)$.
$A(S)$ es un grupo relativo a la operación de composición de funciones		La operación $*$ es a menudo llamada producto en G

Lección 1: Examples of Groups

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros y $*$ la operación adición $+$ en $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	
El conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números con la operación $*$ en $\mathbb{Q}$ como la adición ordinaria de números racionales es un grupo.		
El conjunto $\mathbb{Q}^{'}$ de racionales no cero es un grupo bajo la multiplicación ordinaria de números racionales		
El conjunto $\mathbb{R}^{+}$ de números reales positivos es un grupo con la multiplicación $*$ en $\mathbb{R}^{+}$ del producto ordinario de números reales		
Sea E_n el conjunto $\theta_n^i, i = 0,1,2,...,n-1$ donde θ_n es el número complejo $\theta_n = cos(2\pi/n)+isin(2\pi/n)$. Sea $\theta_n^k * \theta_n^j = \theta_n^{k+j}$ el producto ordinario de potencias de θ_n como número complejo. Por el teorema de Moivre decimos que $\theta_n^n = 1$. E_n es grupo bajo $*$.	E_n,θ_n, Teorema de Moivre, producto ordinario de potencias de complejos	
	Orden del grupo, grupo finito	Un grupo G es un grupo finito si tiene un número finito de elementos. El número de elementos en G se llama el orden de G y se denota por $\|G\|$.
	Grupo Abeliano	Un grupo se dice Abeliano si $a*b = b*a$ para todo $a,b \in G$.
		Un grupo que no es abeliano se llama noabeliano.
$A(S)$ proporciona una familia infinita de grupos no Abelianos		
$T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un grupo no Abeliano	$T_{a,b}(r) = (ar+b)$	Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_{a,b}(r) = (ar+b)$ para cada número real r, donde a,b son números reales y $a \neq 0$.
H es un grupo no abeliano, bajo la operación $*$ definida en G	$T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	Sea $H \subset G$ donde G es el grupo $T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y H se define como $H = \{T_{a,b} \in G\|a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R}\}$.

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Sea $K \subset H \subset G$ donde H, G se definen como antes, $K = \{T_{1,b} \in G \| b \in \mathbb{R}\}$ K es grupo bajo la operación $*$ definida en G y K es Abeliano	$K = \{T_{1,b} \in G \| b \in \mathbb{R}\}$	
Sea S el plano, esto es, $S = \{(x, y) \| x, y \in \mathbb{R}\}$ y considere $f, g \in A(S)$ definida por $f(x, y) = (-x, y)$ y $g(x, y) = (-y, x)$; f es la reflexión a través del eje y y g es la rotación de 90 grados en sentido contrario a las manecillas del reloj a través del origen. Definimos $G = \{f^i g^j \| i = 0,1; j = 0,1,2,3\}$ y sea $*$ en G el producto de elementos de $A(S)$. G es un grupo no abeliano de orden 8.	$G = \{f^i g^j \| i = 0,1; j = 0,1,2,3\}$	$G = \{f^i g^j \| i = 0,1; j = 0,1,2,3\}$ se denomina el grupo dihedral de orden 8
Sea S el plano, esto es, $S = \{(x, y) \| x, y \in \mathbb{R}\}$ y considere $f, g \in A(S), f(x, y) = (-x, y)$. Sea $n > 2$ y sea h la rotación del plano a través del origen, un ángulo de $2\pi/n$ en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se define $G = \{f^k h^j \| k = 0,1; j = 0,1,2,...,n-1\}$ se define el producto $*$ en G como el producto usual de funciones.G es un grupo no abeliano de orden $2n$.	$G = \{f^k h^j \| k = 0,1; j = 0,1,2,...,n-1\}$	Se define $G = \{f^k h^j \| k = 0,1; j = 0,1,2,...,n-1\}$ y se define el producto $*$ en G como el producto usual de funciones.
Sea $G = \{f \in A(S) \| f(s) \neq s$ para un número finito de $s \in S\}$ donde se supone que S es un conjunto infinito. G es un grupo bajo el producto $*$ en $A(S)$	$G = \{f \in A(S) \| f(s) \neq s\}$	Sea $G = \{f \in A(S) \| f(s) \neq s$ para un número finito de $s \in S\}$ donde se supone que S es un conjunto infinito
Sea G el conjunto de todas las funciones T_θ donde T_θ es la rotación de un circulo dado, a través de su centro, un ángulo θ en sentido contrario a las manecillas del reloj. En G se define $*$ por la composición de funciones. G es un grupo abeliano.	T_θ	Sea G el conjunto de todas las funciones T_θ donde T_θ es la rotación de un circulo dado, a través de su centro, un ángulo θ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Lección 2: Nonexamples

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Contraejemplos		
Sea G el conjunto de todos los enteros y sea $*$ el producto ordinario de enteros en G. G no es grupo		
Sea G el conjunto de los todos los números reales no negativos, para $a, b \in G, a * b = a^2 b$. G no es grupo		
Sea G el conjunto de todos los enteros positivos, bajo $*$ donde $a * b = ab$ el producto ordinario de enteros. G no es grupo		
Se concluye la unidad con el planteamiento de problemas: 20 problemas fáciles; del 21-27 problemas de un nivel medio y del 28-31 problemas duros		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$A(S)$ E_n, θ_n^i $T_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $K \subset H \subset G$ $f(x, y) = (-x, y), \quad g(x, y) = (-y, x)$ T_θ	Se verifica que el producto $fg \in A(S)$
		Argumentos
		Sea $A(S)$ el conjunto no vacío de todas las funciones $1-1$ de S en sí mismo. La posibilidad de combinar dos elementos de $A(S)$ para obtener otro elemento de $A(S)$ dota al conjunto de una estructura algebraica.
		Históricamente, al sujeto le tomó algún tiempo reconocer que las cuatro propiedades (clausura, asociatividad, existencia de identidad, existencia de inversos) jugaban un papel clave.
		Tenemos la ventaja de la retrospectiva histórica, y con esta retrospectiva elegimos no solo estudiar $A(S)$ sino también, las directrices principales para abstraer a un contexto mucho más amplio.
		Nosotros reiteramos: un grupo no es más, no es menos, que un conjunto no vacío con una operación $*$ que satisface los cuatro axiomas de grupo.

		Argumentos
		El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros y $*$ la operación adición $+$ en $\mathbb{Z}$: que $\mathbb{Z}$ es cerrado y asociativo bajo $*$ son propiedades básicas de los enteros. ¿Quién sirve de elemento unidad e de $\mathbb{Z}$ bajo $*$? Claramente, como $a = a * e = a + e$ se tiene que $e = 0$ y 0 es la identidad requerida bajo la adición. Como, $e = 0 = a * a^{-1} = 0 = a + a^{-1}$ entonces, a^{-1} en este caso es $-a$ y claramente, $a * (-a) = a + (-a) = 0$.
		Por las propiedades familiares de los números racionales, vemos que $\mathbb{Q}'$ forma un grupo relativo a $*$.
		Es fácil chequear que $\mathbb{R}^{+}$ es un grupo bajo $\star$.
		E_n es un grupo finito y $\|E_n\| = n$
		Que $a * b = b * a$ en general no es cierto en un grupo. Justamente en el caso de $A(S)$ donde S tiene tres o más elementos; se pueden encontrar $f, g \in A(S)$ tal que $fg \neq gf$.
		La palabra Abeliano, viene del nombre del gran matemático Noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), uno de los más grandes científicos Noruegos que se han producido.

Unidad 2: Some simple Remarks

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		Como la operación $*$ denota el producto en G ahora escribimos el producto $a*b$ simplemente como ab para $a,b \in G$.
Problemas relacionados con las propiedades de los grupos (1-6 p. 50)		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$a*b = ab$ $a^{-1} \in G$	Si G es un grupo, entonces: (a) El elemento identidad es único (b) Cada $a \in G$ tiene un único inverso $a^{-1} \in G$ (c) Si $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$ (d) Para $a,b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
		En cualquier grupo G y $a,b,c \in G$ se tiene: (a) Si $ab = ac$ entonces $b = c$ (b) Si $ba = ca$ entonces $b = c$
		Argumentos
		En esta sección se muestran ciertas propiedades formales las cuales se siguen de los axiomas de grupo. En efecto, muchos de esos resultados ya han ocurrido como problemas al final de la sección precedente.

		Argumentos
		El conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros y $*$ la operación adición $+$ en $\mathbb{Z}$: que $\mathbb{Z}$ es cerrado y asociativo bajo $*$ son propiedades básicas de los enteros. ¿Quién sirve de elemento unidad e de $\mathbb{Z}$ bajo $*$? Claramente, como $a = a * e = a + e$ se tiene que $e = 0$ y 0 es la identidad requerida bajo la adición. Como, $e = 0 = a * a^{-1} = 0 = a + a^{-1}$ entonces, a^{-1} en este caso es $-a$ y claramente, $a * (-a) = a + (-a) = 0$.
		Por las propiedades familiares de los números racionales, vemos que $\mathbb{Q}'$ forma un grupo relativo a $*$.
		Es fácil chequear que $\mathbb{R}^+$ es un grupo bajo $\star$.
		E_n es un grupo finito y $\|E_n\| = n$
		Que $a * b = b * a$ en general no es cierto en un grupo. Justamente en el caso de $A(S)$ donde S tiene tres o más elementos; se pueden encontrar $f, g \in A(S)$ tal que $fg \neq gf$.
		La palabra Abeliano, viene del nombre del gran matemático Noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), uno de los más grandes científicos Noruegos que se han producido.

Como conclusión del análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de Herstein (1999) y para dar respuesta a las preguntas planteadas para el análisis de textos, se observa que en el capítulo 1, se presentan las lecciones bajo el título de: Cosas familiares y menos familiares, a partir de las cuales se presentan *situaciones-problemas* orientadas a verificar propiedades de la operación definida en el conjunto dado. Se continúa, con la lección denominada: *Teoría de Conjuntos,* donde se presentan y definen las operaciones entre conjuntos y algunas de las propiedades de estas operaciones y al final de la lección, se proponen *situaciones-problemáticas* relacionadas con los conjuntos; estas situaciones, se presentan como problemas fáciles, problemas de nivel medio y problemas duros. El capítulo sigue con la lección: *Mapeos-funciones*; donde se definen funciones entre conjuntos, se define función 1-1, sobreyectiva y función biyectiva y se presentan propiedades relacionadas con las funciones donde se proponen *situaciones-problemáticas* para contextualizar la lección.

En la siguiente lección se presenta: el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en el mismo, donde el conjunto S consta de un número finito de elementos. En la introducción de la lección, se *argumenta*, que el conjunto $A(S)$ tiene el nombre del "Grupo de simetrías de grado n" cuando el conjunto S tiene n elementos y a menudo se denota por S_n : a los elementos del conjunto o del grupo se les denomina *permutaciones* del conjunto S. Se argumenta que, estamos interesados en la estructura del grupo S_n : en la lección se dan las propiedades que cumplen las funciones con la operación compuesta, entre ellas se verifica la clausura, la asociatividad, la existencia del elemento identidad y la existencia del elemento inverso, para cada función. Se puede establecer, que se introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A(S)$ con S un conjunto finito, que para el caso se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías de grado n.

Se continúa con la *lección: Los enteros,* donde se dan propiedades como: el principio del buen orden, el algoritmo de Euclides, la definición de divisibilidad y algunas de sus propiedades; definición de máximo común divisor y sus propiedades; definición de números primos relativos y algunas propiedades; número primo y propiedades. De igual forma, al final de cada lección se presentan *situaciones problemáticas* que permiten contextualizar los objetos matemáticos presentes en la lección. La siguiente lección se denomina *Inducción Matemática* y en ella se presenta la proposición del principio de inducción matemática; se dan algunos ejemplos de la aplicación del principio y se termina la lección con el planteamiento de situaciones problemáticas. El capítulo finaliza, con el estudio de los números complejos, donde se define la operación + de números complejos y se dan propiedades; finalmente, se presenta la proposición de la desigualdad triangular para finalizar la lección con situaciones-problemáticas.

El capítulo 2, del texto de Herstein (1999) se titula: *Grupos* e inicia con la *argumentación,* que el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en sí mismo cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad, existencia de inverso; continúa, con el concepto o definición del objeto matemático, como *Grupo Abstracto;* es decir, como un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna; operación que cumple las propiedades o axiomas de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento unidad en el conjunto y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Se sigue, con el análisis, del capítulo 3, que se denomina: Grupos finitos; Subgrupos. En este capítulo se presentan tests para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo.

En la tabla 7.8. se observa que de los seis objetos matemáticos presentes en la unidad 1 del Capítulo 2, titulada: *Definiciones y ejemplos de Grupos*, sobresalen los *conceptos o definiciones* relacionados con el conjunto $A(S)$, especialmente, las propiedades que hacen que el conjunto, con la operación de composición de funciones sea un grupo en su *significado Global.* Estas funciones 1-1 en un conjunto finito definen un *grupo de permutaciones,* como se *argumenta* en el capítulo inicial. Se identifica el significado de grupo en este segundo capítulo, como *Conjunto de permutaciones,* con la *situación - problemática* planteada: el conjunto $A(S)$ cumple cuatro propiedades algebraicas. La unidad 1, inicia con la lección 1: *Ejemplos de Grupos,* donde sobresalen como objetos matemáticos las *situaciones-problemáticas* tales como: el conjunto de los enteros con la operación adición que cumplen los cuatro axiomas de grupo; el conjunto de los racionales con la adición de números racionales es grupo; el conjunto de los racionales no cero con la operación multiplicación ordinaria de racionales forma un grupo con relación a ese producto; los reales positivos con el producto ordinario de números reales es grupo; el conjunto $E(n)$ de números complejos de la forma θ_n^i donde $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ y $\theta_n = cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n})$, denominado el conjunto de raíces de la unidad, es grupo bajo la multiplicación ordinaria de potencias de θ_n como número complejo; el conjunto de funciones de los reales en los reales $T_{a,b}$ con la operación compuesta es grupo; el plano *S* donde se define un conjunto especial con la operación compuesta de funciones.

La lección 2, del capítulo 2, se titula: *No ejemplos* y en ella sobresale el objeto matemático de las *situaciones - problemáticas* donde se presentan conjuntos, con operaciones que no determinan una estructura de grupo, tales como: el conjunto de los números enteros y el producto; el conjunto de los números reales y el producto $a * b = a^2 b$ y se finaliza la lección, con la situación problemática del conjunto de los enteros positivos con el producto usual de enteros $a * b = ab$ que no define un grupo, ya que, no se cumple la propiedad de los inversos. De igual forma, en esta lección sobresalen los *argumentos* entre ellos: "que históricamente, al sujeto le tomó algún tiempo reconocer que las cuatro propiedades algebraicas jugaban un papel clave en la matemática" y de igual forma, se termina la lección con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas.

El texto de Herstein (1999) continúa con la Unidad 2, denominada: *Algunas propiedades simples;* en esta unidad sobresalen las *propiedades* que se deducen de los axiomas de grupo y los argumentos relacionados con los conjuntos numéricos y algunas de las operaciones usuales que se definen en ellos; se termina la unidad de igual forma, con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas propias de la matemática. La unidad 3 se denomina: *Subgrupos* y no se analiza, ya que, en ella se presentan propiedades de los subconjuntos de los conjuntos mencionados, que en algunos casos también son grupos pero, no es pertinente para el estudio de los significados del objeto matemático.

Continuando con el análisis de textos, se presenta en la tabla 7.9 los contenidos correspondientes al texto 3 de Lezama (2012) relacionados con el objeto grupo y se sigue con el análisis semiótico de los objetos presentes en las unidades relacionadas con dicho objeto.

Tabla 7.9: Libro 3: Cuaderno de Álgebra No. 1 Grupos

Título	Unidad	Lecciones	Página
Cuaderno de Álgebra No. 1 Grupos	1	**Grupos y subgrupos**	1-17
		1. Operaciones binarias y estructuras algebraicas elementales **2. Grupos** 3. Subgrupos 4. Generación de subgrupos 5. Teorema de Lagrange 6. Ejercicios	1 5 9 12 15 17
	2	Grupos Cíclicos	24-31
		1. Definición 2. Orden y periodo de un elemento 3. Ejemplos 4. Propiedades 5. Generadores 6. Ejercicios	24 26 28 29 30 31
	3	Subgrupos normales y homomorfismos	34-40
		1. Subgrupos normales 2. Grupo cociente 3. Homomorfismos de grupos 4. Ejercicios	34 35 38 40
	4	Teoremas de estructura 1. Teorema fundamental de homomorfismo 2. Teorema de factorización 3. Teorema de correspondencia 4. Teorema de isomorfismo 5. Ejercicios	42-52 42 44 46 47 52

Título	Unidad	Lecciones	Página
Cuaderno de Álgebra No. 1 Grupos	5	Automorfismos	53-58
		1. Automorfismos interiores 2. Teorema de Cayley 3. Ejercicios	53 54 58
	6	Grupos de Permutaciones	61-74
		1. Ciclos 2. El grupo alternante A_n 3. Sistemas de generadores 4. El grupo diédrico $D_n, n \geq 3$ 5. Subgrupos normales del grupo diédrico $D_n, n \geq 3$ 6. Ejercicios	61 65 67 70 73 74
	7	Productos y sumas directas	75-83
		1. Definición 2. Producto cartesiano: caso infinito 3. Suma directa externa 4. Suma directa interna 4. Ejercicios	75 77 78 80 83
	8	G-Conjuntos	87-96
		1. Acción de grupos sobre conjuntos 2. Órbitas y subgrupos estacionarios 3. Grupos transitivos 4. Ejercicios	87 89 93 96
	9	Teoremas de Sylow	97-110
	10	Grupos Abelianos finitos	112-119
	11	**Grupos solubles**	121-133

A continuación, se presenta en la tabla 7.10 las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en el texto de Lezama (2012), que corresponde a uno de los textos de uso en el programa de Matemáticas especialmente; el estudio se realiza en el capítulo 1, lecciones 1-2, en las cuales se estudian los significados institucionales (del texto) dados al objeto Grupo, haciendo nuevamente uso de la técnica del análisis semiótico propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (ver, capítulo 4).

Unidad 1: Grupos y subgrupos
Lección 1:Operaciones binarias y estructuras algebraicas

Tabla 7.10: Texto 3: Cuadernos de Álgebra No. 1 Grupos: entidades matemáticas (unidades elementales)

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Definir el concepto de operación entre elementos de un conjunto	Operaciones binarias, estructuras algebraicas elementales	Sea G un conjunto no vacío. Una operación binaria interna (ley de composición interna) en G es una función $\triangle : G \times G \longrightarrow G$ del producto cartesiano de G con G en G.
Definición precisa de las propiedades más comunes de las que gozan las operaciones binarias.		A cada par ordenado (x, y) de elementos de G se le asigna un único elemento de G. La imagen del par (x, y) mediante la función $\triangle$ se denota por $x \triangle y$. Se dice también que $x \triangle y$ es el resultado de operar x con y (en ese orden)
La adición de números naturales es una ley de composición interna		
$\triangle : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una operación binaria interna		En $\mathbb{N}$ podemos definir $\triangle : \mathbb{N}\times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $(a, b) \longrightarrow min(a, b)$
La intersección de conjuntos define una operación binaria interna en $P(X)$	$\cap : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$	Sea X un conjunto no vacío y sea $P(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X.
		En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ definimos la función: $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $a * b \longrightarrow (a \triangle b) + 2$
$\triangledown : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ no define en $\mathbb{Z}$ una operación binaria interna		$\triangledown : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $a \triangledown b = (ab) \div 2$

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
	Propiedad asociativa, operación binaria	Sea $*$ una operación binaria sobre un conjunto G. Se dice que la operación $*$ tiene la propiedad asociativa, o que $*$ es una operación asociativa, si para cualesquiera elementos a, b, c de G se cumple la igualdad $a * (b * c) = (a * b) * c$
		Un **semigrupo** es un conjunto G dotado de una operación binaria interna asociativa $*$ y se denota por $(G, *)$. Se dice también que sobre G se tiene **una estructura de semigrupo**
$(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo		
$(Aplc(X), \circ)$ es un semigrupo	Conjunto de las aplicaciones de X en X	Sea X un conjunto no vacío cualquiera y sea $Aplc(X)$ el conjunto de las aplicaciones (funciones) de X en sí mismo.
	Operación $*$ conmutativa, operación binaria	Sea $*$ una operación binaria definida sobre un conjunto G. Se dice que la operación $*$ es conmutativa si para cualquiera elementos a, b de G se tiene: $a * b = b * a$
	Elemento identidad	Sea G un conjunto en el cual se ha definido una operación binaria $*$. Se dice que el elemento e de G es una identidad de G con respecto a la operación $*$ si para cualquier elemento de G se tiene que: $e * a = a * e = a$

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
En el semigrupo $(\mathbb{Z},+)$ donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros y $+$ es la adición habitual, 0 es la identidad		
		Un conjunto G con una operación binaria $*$ solo puede tener un elemento identidad respecto de $*$
		Un **monoide** es un semigrupo que posee elemento identidad.
	Elemento inverso	Sea G un conjunto dotado de una operación binaria interna $*$ la cual posee un elemento identidad e, se dice que $u \in G$ es invertible si existe $u' \in G$ tal que $u' * u = u * u' = e$. El elemento u' se denomina el inverso de u respecto de la operación $*$

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$\triangle : G \longrightarrow G$ $x \triangle y$ $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\triangle : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\cap : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$ $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ $a * b \longrightarrow (a \triangle b) + 2$	
	$a^1 := a$	Sea G un conjunto donde se ha definido una operación binaria asociativa $*$. Para $a \in G$, sea: $a^1 := a, a^n := a^{n-1} * a, n \geq 2$. Entonces, para caulesquiera naturales m, n se tienen las identidades: $a^n * a^m = a^{n+m}$ $(a^n)^m = a^{nm}$
	$(\mathbb{N}, +), Aplc(X)$	
		Sea $(G, *)$ un semigrupo conmutativo, es decir, la operación $*$ es asociativa y conmutativa. Entonces, para cualquier $a, b \in G$ y cualquier natural n se tiene que: $(a * b)^n = a^n * b^n$.
		Sea G un monoide. (i) Si $u \in G$ es invertible entonces su inverso u' es único (ii) Sean x', u' los inversos de x, u respectivamente. Entonces $x * u$ es invertible y además $(x * u)' = u' * x'$, $(x')' = x$
		Argumentos
		La teoría de grupos estudia ciertos objetos matemáticos llamados grupos, así como las relaciones entre ellos, los homomorfismos. Podríamos justificar el estudio de la teoría de los grupos diciendo que los conjuntos son para la matemática como los grupos son para el álgebra. Existen conjuntos con operaciones binarias internas donde se destacan elementos especiales.

Lección 2: Grupos

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Determinar cuando un conjunto $(G,*)$ es un grupo	Estructura de grupo, grupo	Sea G un conjunto no vacío y $*$ una operación binaria definida en G. Se dice que G **es un grupo,** respecto a $*$, o también que $*$ da a G una estructura de grupo, si $*$ cumple las siguientes propiedades: (i) $\star$ es asociativa (ii) En G existe un elemento identidad e respecto de $*$ (iii) Cada elemento de G es invertible.
		Denotaremos un grupo por $(G,*)$, pero cuando no haya ambigüedad sobre la operación $*$ escribiremos simplemente G. Un grupo $(G,*)$ es conmutativo, también denominado abeliano, si la operación $*$ es conmutativa.
$(\mathbb{Z},+,0),(\mathbb{Q},+,0),(\mathbb{R},+,0)$, $(\mathbb{C},+,0)$ son grupos	$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ denotan los conjuntos de números enteros, racionales, reales y complejos respectivamente	

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
En $(\mathbb{Z}, ., 1)$ solo hay dos elementos invertibles: 1 y -1 En $(\mathbb{Q}, ., 1)$ el cero no es invertible En $(\mathbb{R}, ., 1)$ el cero no es invertible En $(\mathbb{C}, ., 1)$ el cero no es invertible		
Sea $(G, ., 1)$ un monoide con identidad 1. Entonces, el conjunto de elementos de G que son invertibles no es vacío y, respecto de la misma operación, constituye un grupo.		El grupo de elementos invertibles de $(G, ., 1)$ se denota por G^*
$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}, (\mathbb{Q}^*, ., 1)$ $(\mathbb{R}^*, ., 1), (\mathbb{C}^*, ., 1)$ son grupos conmutativos		$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash 0$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash 0$ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash 0$
Sea G un conjunto no vacío cualquiera y sea $*$ definida por $a * b = a$ entonces $(G, *)$ no es grupo en el caso que G tenga al menos tres elementos distintos a, b, c.		
$S(X)$ es el grupo de todas las funciones biyectivas definidas de X en X	Funciones biyectivas	El grupo de elementos invertibles del semigrupo $Aplc(X)$, denotado por $S(X)$, está constituido por funciones $f : X \longrightarrow X$ tales que existe $g : X \longrightarrow X$ para la cual $f \circ g = i_X = g \circ f$. En otras palabras $f \in S(X)$ si, y solo si, f es una función biyectiva
		Sea X un conjunto finito de $n \geq 1$ elementos, $S(X)$ se denota por S_n.

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
$Aplc(X,G)$ es un grupo		Sea X un conjunto no vacío y sea $(G,.)$ un grupo con elemento identidad 1. Sea $Aplc(X,G)$ el conjunto de funciones de X en G. Se define en este conjunto la siguiente operación: $fg : X \longrightarrow G$ $x \longrightarrow (fg)(x) = f(x)g(x)$ donde f, g son elementos de $Aplc(X,G)$ y $x \in X$.
$Aplc(\mathbb{N},\mathbb{R})$ es grupo		El conjunto de $Aplc(\mathbb{N},\mathbb{R})$ es el grupo de sucesiones reales
$(M_{n\times m}(\mathbb{R}),+)$ es un grupo conmutativo	Grupo conmutativo, matrices	Sea $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices rectangulares de n filas y m columnas con la operación habitual de adición definida sobre las entradas de las matrices.
$(\mathbb{R}[x],+)$ es un grupo mediante la reducción de términos semejantes	Polinomios del álgebra elemental	Sean los polinomios del álgebra elemental $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ con coeficientes reales (n no es fijo) y se denota por $\mathbb{R}[x]$.
Al finalizar la Lección 5 que corresponde al Teorema de Lagrange, se proponen 22 problemas, relacionados con las cinco lecciones correspondientes (p. 17).		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$(\mathbb{Z},+,0),(\mathbb{Q},+,0),(\mathbb{R},+,0)$ $(\mathbb{C},+,0)$ $\mathbb{Z}^*,\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*$	
	$a^{-1}\in G$	Sea $(G,.,1)$ un grupo, entonces: (i) El elemento identidad 1 es único (ii) Cada elemento $x\in G$ tiene un único inverso, el cual se denota x^{-1} (iii) Se cumple la ley cancelativa, es decir, para cualquier $x,y,z\in G$ se tiene: $xz=yz \Longleftrightarrow x=y$ $zx=zy \Longleftrightarrow x=y$ (iv) Sean a,b elementos cualesquiera de G, entonces las ecuaciones lineales $ax=b, za=b$ tienen solución única en G.
		Sea $(G,*)$ un semigrupo. Entonces, G es un grupo si, y solo si, $*$ tiene las siguientes propiedades: (i) Existe un elemento identidad a la izquierda $e\in G$ tal que $e*x=e$ (ii) Para cada $x\in G$ existe $x'\in G$ tal que $x'*x=e$
	$S(X)$ se denota por S_n. para el caso finito de $n\geq 1$	
	$(\mathbb{R}[x],+)$	
		Argumentos

Como conclusión al análisis de los objetos matemáticos presentes en el texto de Lezama (2012) y para dar respuesta a las preguntas planteadas para el análisis, se tiene que:

el Capítulo 1 se titula: *Grupos y subgrupos* e inicia con el *concepto* de operación binaria interna (ley de composición interna) en un conjunto G donde se presentan 4 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función $\triangle$ en los naturales (ver, tabla 7.10), la función de intersección en el conjunto de partes de un conjunto y la función $*$ en el conjunto de los números naturales, para finalizar con la función $\triangledown$ en el conjunto de los números enteros. Se continúa con el *concepto* de propiedad asociativa de una operación $*$ en un conjunto G y se dan *propiedades* de la potenciación para un elemento $a \in G$; se sigue, con el *concepto* de semigrupo (que corresponde a una estructura algebraica) y se presentan las *situaciones problemáticas*: el conjunto de los naturales con la operación adición; el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones (funciones) del conjunto X en sí mismo, con el conjunto X no vacío y la operación compuesta; se sigue con el *concepto* de propiedad conmutativa y se presenta una proposición relacionada con esta propiedad. Se sigue, con el *concepto* de elemento identidad y se presenta la *situación problemática:* del conjunto de los enteros con la adición que constituyen un semigrupo; se pasa a dar la *proposición* de la unicidad del elemento identidad y se define una nueva estructura algebraica: "El Monoide" (semigrupo con elemento identidad) y la propiedad de ser invertible; se finaliza el capítulo, con la *proposición* de la unicidad del elemento inverso.

De lo anterior, se infiere que el texto de Lezama (2012), introduce el objeto Grupo, a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en un conjunto; esto es, inicia con el estudio de la estructura de semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y al poseer la operación $*$ más propiedades, la *estructura* se va haciendo más rica (Lezama, 2012) y las posibilidades de operar en G se hacen mayores); así, si además, en el semigrupo existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se presenta el *concepto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. También se observa que se introduce el objeto grupo a partir del conjunto de $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo, de donde se establece que se introduce el significado de grupo, como *Grupo de Permutaciones* (funciones biyectivas).

La lección 2 del capítulo se denomina: *Grupos* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo, grupo Abeliano y además, las *situaciones-problemáticas*: el conjunto de los enteros con la adición y con el 0 forman un grupo; de igual forma, el conjunto de los racionales, los reales y los complejos con la adición. En estos conjuntos numéricos se plantea nuevamente la *situación-problemática* para el caso de la operación multiplicación usual en cada conjunto y se pasa a dar contraejemplos de conjuntos y operaciones que no definen estructura de grupo. Se continúa con el planteamiento de la *situación problemática* de los elementos invertibles del monoide $(G,\cdot,1)$ que determinan precisamente el "grupo de elementos invertibles", dando las *notaciones* de estos nuevos grupos en los conjuntos numéricos. Sigue la lección, con la *definición* que establece que en el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones del conjunto X en sí mismo, existen inversos solo en el caso que las funciones sean biyectivas. Al conjunto de funciones biyectivas se les da el nombre de “Permutaciones”; se sigue con la *situación problemática* del conjunto de funciones de los naturales en los reales, que recibe el nombre del conjunto de “sucesiones reales” y definen de igual forma, una estructura de Grupo con la operación de composición de funciones. Finalmente, se introducen dos *situaciones problemáticas* de especial interés en matemáticas y familiares para los estudiantes que cursaron Álgebra Lineal: el conjunto de las matrices con la adición de matrices y el conjunto de polinomios con entradas reales y con la operación de adición: conjuntos que también tienen la estructura de Grupo. De igual forma, en el capítulo se presentan las *propiedades* de la unicidad del elemento identidad y del elemento inverso. Al final del capítulo se presentan situaciones-problemáticas (22) para contextualizar los objetos matemáticos presentados en el capítulo 1.

Se presenta en la tabla 7.11 los contenidos correspondientes al último texto (4) de Caicedo (2004), que se relacionan con el objeto grupo y el análisis semiótico de los objetos presentes en las unidades relacionadas con dicho objeto.

Tabla 7.11: Libro 4: Teoría de grupos

Título	Unidad	Lecciones	Página
Teoría de grupos	1	**Grupos**	1-15
		1. Ley de composición interna	1
		2. Definición de grupos	3
		3. **Primeros teoremas**	7
		4. **Orden de un grupo finito y tablas de grupos finitos**	10
		Problemas	15
	2	subgrupos	18-52
		1. Definición de subgrupo	18
		2. Grupos y subgrupos cíclicos	23
		3. Generación de subgrupos	26
		4. Sobre el orden de un elemento de un grupo	32
		4.1 Divisibilidad	34
		5. Una manera de contar subgrupos normales	44
		Problemas	52
	3	Relaciones entre grupos	57-85
		1. Homeomorfismos	57
		2. Grupos de Permutaciones	70
		2.1. Primer teorema de representación de grupos. El Teorema de Cayley	70
		2.2. Aplicaciones	73
		2.3. Grupos de permutaciones sobre un conjunto finito	74
		2.4. Propiedades	79
		Problemas	85

Título	Unidad	Lecciones	Página
Teoría de grupos	4	TEOREMAS DE SYLOW	89-124
		1. La ecuación de clases	89
		2. Segundo y tercer teorema de Sylow	97
		3. Algunas aplicaciones de los tres teoremas de Sylow	103
		4. Productos directos	106
		4.1. Aplicaciones	110
		5. Generadores y grupos abelianos finitamente generados o de generación finita	110
		5.1. Aplicaciones	118
		6. Otras aplicaciones de los teoremas de Sylow	121
		Problemas	124
Teoría de grupos	5	TEMAS ESPECIALES	127-162
		1. Series subnormales	127
		1.1. Aplicaciones	134
		2. **Grupos solubles**	138
		3. Grupos libres	145
		3.1. Definición de grupo libre	151
		3.2. Grupos abelianos libres	155
		Problemas	162

Se presentan a continuación, en la tabla 7.12 las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en el texto 4 de Caicedo, que corresponde a un texto de consulta y uso por los estudiantes del programa de Matemáticas y de Licenciatura en Matemática: el estudio se realiza en el capítulo 1, lecciones 1-3, en las cuales se estudian los significados institucionales (texto) dados al objeto Grupo y se hace uso de igual forma, de la técnica del análisis semiótico (ver, capítulo 4).

Unidad 1: Grupos
Lección 1: Ley de composición interna

Tabla 7.12: Texto 4: Teoría de grupos: entidades matemáticas (unidades elementales)

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Definir el concepto de ley de composición interna	Ley de composición interna, operación binaria	Dado un conjunto E, se llamará ley de composición interna (u operación binaria) en E a toda función $f : E \times G \longrightarrow E$ $(a,b) \longrightarrow f(a,b) = c$ donde $c \in E$. El elemento $f(a,b)$ de E, se llama el compuesto de a con b.
	Es usual escribir $f(a,b) = a + b, a \circ b, ab, a \cdot b$	Adoptaremos la notación $f(a,b) = ab$ en la teoría general, dejando las otras para casos específicos.
En $\mathbb{N}$ con la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $(a,b) \longrightarrow f(a,b) = a \cdot b$ donde $\cdot$ designa el producto usual de números positivos, es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$.	$f(a,b) = a \cdot b = ab$	

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$f(a,b) = a+b, a\circ b, ab, a\cdot b$	
	$(\mathbb{Z},+)$	El conjunto $(\mathbb{Z},+)$ de los enteros con la adición tiene las siguientes propiedades: (a) Dados $a,b\in\mathbb{Z}$, $a+b\in\mathbb{Z}$. (b) El entero 0 es tal que $a+0=0+a=a$, para todo $a\in\mathbb{Z}$. Dado el entero a existe el entero $b=-a$ tal que $a+b=0=b+a$. Para a,b,c enteros, $a+(b+c)=(a+b)+c$.
		En los reales positivos $\mathbb{R}_{>0}=\{x\in\mathbb{R}, x\geq 0\}$, el producto tiene las siguientes propiedades: (a) Si a,b son reales positivos, ab es real positivo. (b) El real 1 es tal que $a\cdot 1=1\cdot a=a$, para todo real positivo a. (c) Dado a real positivo existe $b=a^{-1}$ real positivo tal que $b\cdot a=a\cdot b=1$. (d) Para a,b,c reales positivos, $a(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	$B(S) = \{f : S \times S \longrightarrow S\}$, $f \circ g$	Sea S un conjunto no vacío y sea $B(S) = \{f : S \times S \longrightarrow S\}$ el conjunto de todas las funciones biyectivas de S en S. Entonces una operación binaria en $B(S)$ está dada por: $\phi : B(S) \times B(S) \longrightarrow B(S)$ $(f, g) \longrightarrow \phi(f, g) = f \circ g$ El conjunto $B(S)$ y la operación ϕ así definidos tienen las siguientes propiedades: (a) Para $f, g \in B(S)$, $f \circ g = h \in B(S)$. (b) Para $f, g, h \in B(S)$, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. (c) La función $e : S \longrightarrow S, e(x) = x, (x \in S)$, la idéntica de S, es tal que $e \circ f = f = f \circ e = f$ para todo $f \in B(S)$. (d) Para $f \in B(S)$, existe $g = f^{-1}$ (la inversa de f) tal que $f \circ g = g \circ f = e$.
		Argumentos
		No se encuentran.

Lección 2: Definición de Grupo

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Determinar cuando un conjunto $(G,*)$ es un grupo	Estructura de grupo, grupo	Sea G un conjunto con una ley de composición interna $f : G \times G \longrightarrow G$ $(a,b) \longrightarrow f(a,b) = a \cdot b$. Diremos que el par (G,f) o simplemente $(G,\cdot)$, es grupo si: G1) Dados a,b,c en G, $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ G2) Existe e en G tal que $a\cdot e = e\cdot a = a$ para todo a en G. G3) Dado a en G, existe b en G tal que $a\cdot b = b\cdot a = e$. Si además (G,f) cumple G4) Dados $a,b \in G$, $a\cdot b = b\cdot a$ (Conmutatividad), decimos que (G,f) es un grupo abeliano.
$(B(S),\circ)$ es un grupo		$B(S) = \{f : S \longrightarrow S \mid f$ es biyectiva $\}$, donde $\circ$ es la composición de funciones.
$(P(S),\triangledown)$ es un grupo	$(P(S),\triangledown)$	$P(S) = \{X \mid X \subset S\}$, el conjunto de las partes de S. En $P(S)$, definimos la operación diferencia simétrica $\triangledown$ como sigue: $\triangledown : P(S)\times P(S) \longrightarrow P(S)$ $(A,B) \longrightarrow A \triangledown B = (A-B)\cup(B-A)$.

Lección 3: Primeros teoremas

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ es un grupo	$(\mathbb{R}^*,\cdot)$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$ y $\cdot$ es el producto usual de números reales.
$(\mathbb{C}^*,\cdot)$ es un grupo	$(\mathbb{C}^*,\cdot)$	$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}-\{0\}$ y $\cdot$ es el producto usual de complejos.
$(\mathbb{Z},+)$ es un grupo.	$(\mathbb{Z},+)$	$\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros y $+$ es la adición usual.
$(G,*)$ es grupo	$(G,*)$	$G=(-1,1)=\{x\in\mathbb{R}, -1<x<1\}$, y definimos en G la operación $*$ como sigue: $*: G\times G \longrightarrow G$ $(a,b) \longrightarrow a*b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b*a$ En donde las operaciones que aparecen entre $a*b$ y $b*a$ son las usuales en $\mathbb{R}$.
$(G,\cdot)$ es grupo		$G=\{-1,1\}$ y $\cdot$ la operación dada por las relaciones $1\cdot 1=1, (-1)(-1)=1, (-1)\cdot 1=-1, 1\cdot(-1)=-1$.
$(G,\cdot)$ es grupo		$G=\{-1,1,i,-i\}$ y $\cdot$ es el producto usual de los números complejos $(i^2=-1)$.
	Funciones	Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones dadas por $f(x)=ax+b, a\neq 0, g(x)=cx+d, c\neq 0$, las ecuaciones de dos rectas que no sean paralelas a ninguno de los ejes coordenados. Cada recta queda determinada por el par (a,b) de números reales donde a es la pendiente $a\neq 0$ y b es el intercepto con el eje Y.
$(G,\circ)$ es grupo		Sea $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a\neq 0\}$ con la operación: $(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

Lección 3: Primeros teoremas

Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
No se presentan		

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
	a^{-1} $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$	**Teorema 1.1**. Si $(G, \cdot)$ es un grupo, entonces: 1) En G, solo hay un elemento neutro. 2) Todo elemento $a \in G$ tiene un único inverso. 3) Para todo $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$. 4) Para todos $a, b, c \in G, ab = ac$ implica $b = c$ y $ba = ca$ implica bc (Leyes cancelativas)
		Teorema 1.2. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Si $a, b, c, d \in G$ entonces: $(ab) \cdot (cd) = a \cdot [(b \cdot c) \cdot d]$.
	$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$	**Teorema 1.3**. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Si $a, b \in G$, entonces: $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
		Teorema 1.4. En un grupo $(G, \cdot)$ existe un único elemento tal que $x \cdot x = x$. Además, $x = e$.
	$ax = b, ya = b$	**Teorema 1.5**. Si $(G, \cdot)$ es un grupo y $a, b \in G$, entonces las ecuaciones $ax = b, ya = b$ poseen soluciones únicas en G.
		Teorema 1.6. Sea $(G, \cdot)$ un conjunto con una operación binaria asociativa, es decir, una operación que satisface $a(bc) = (ab)c$ para $a, b, c \in G$. Entonces $(G, \cdot)$ es grupo, si y solo si: Existe $e_i \in G$, tal que $e_i x = x$ para todo $x \in G$. (Existencia de elemento neutro a la izquierda). Para cada $a \in G$, existe $b_i \in G$ tal que $b_i a = e_i$ (Existencia de inversos a la izquierda).

Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
		Teorema 1.7. Sea $(G,\cdot)$ un conjunto con una operación binaria asociativa, es decir, una operación que satisface $a(bc)=(ab)c$ para $a,b,c\in G$. Entonces $(G,\cdot)$ es grupo, si y solo si: Existe $e_d\in G$, tal que $xe_d=x$ para todo $x\in G$. (Existencia de elemento neutro a derecha). Para cada $a\in G$, existe $b_d\in G$ tal que $ab_d=e_d$ (Existencia de inversos a la derecha).
	$ax=b, ya=b$	**Teorema 1.8.** Sea $(G,\cdot)$ un conjunto no vacío provisto de una operación binaria asociativa. Entonces $(G,\cdot)$ es grupo, si y solo si dados $a,b\in G$, las ecuaciones $ax=b, ya=b$ admiten siempre soluciones en G.
		Argumentos
		Es importante observar que en el Teorema 1.6. (análogamente 1.7.) la existencia de elemento neutro y de inverso debe ser del mismo lado. Si esto no es así, G no es necesariamente un grupo bajo la operación considerada, como se ilustra en el siguiente ejemplo: Sea G un conjunto con dos elementos y consideremos en G la operación: $\cdot : G\times G\longrightarrow G$ $(a,b)\longrightarrow a\cdot b=a$

Como conclusión al análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de Caicedo (2004) y para dar respuesta a las preguntas planteadas para el análisis, se tiene el capítulo 1 titulado: *Grupos* donde se inicia con el *concepto* de "ley de composición interna" (operación binaria) en el conjunto E; a continuación, se presentan 5 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función producto en los naturales (ver, tabla 7.12), la función suma en los números enteros y la función producto en el conjunto de los números reales positivos, además, en cada una de estas situaciones planteadas, se identifica el elemento identidad en el conjunto con la operación definida en él, el elemento inverso y la propiedad asociativa sin enunciar cada propiedad formalmente. De igual forma, se introduce el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas del conjunto S en sí mismo, con el conjunto S no vacío y la operación compuesta para los elementos del conjunto y se *argumentan* las propiedades de clausura, asociatividad, elemento identidad y existencia de inversos sin enunciarlas formalmente.

De lo anterior, se infiere, que el texto de Caicedo (2004), introduce el objeto Grupo a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en los conjuntos numéricos: especialmente, se estudia el conjunto de los enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto, verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo. Aquí, se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se puede establecer que se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones. En esta lección 1 predominan las *proposiciones* que cumplen los conjuntos mencionados anteriormente.

La lección 2 del capítulo se denomina: *Definición de Grupo* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo y grupo Abeliano. De igual forma, se presentan 8 *situaciones-problemáticas*: el conjunto de funciones biyectivas con la operación compuesta es un grupo; el conjunto partes de un conjunto con la operación de diferencia simétrica entre conjuntos es un grupo; el conjunto de los números reales sin el cero, con la operación de producto usual de números reales es un grupo; de igual forma, los números complejos sin el cero con el producto usual de complejos es un grupo; el conjunto de los números enteros con la adición usual de enteros es un grupo: el intervalo abierto de números reales $G = (-1,1)$ con la operación $*$ (ver, tabla 7.12 lección 2) es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1\}$ con la operación $\cdot$ (ver, tabla 7.12) es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1,i,-1\}$ de números complejos con el producto usual de números complejos es un grupo; esta *situación-problemática* la identifica con el conjunto de raíces cuartas de la unidad y con la operación del producto de estas raíces que de igual forma determinan un grupo. En la siguiente *situación-problemática* define el conjunto de rectas que no son paralelas, con pendiente diferente de cero y con la operación compuesta de funciones y establece que ellas determinan un grupo, de igual forma, para esta situación define que cada recta se puede ver como la pareja (a, b) donde a es la pendiente distinta de cero y b es el corte con el eje y y define un producto entre parejas que determinan un grupo. Se sigue con la lección 3 denominada: *Primeros teoremas,* donde se presentan propiedades como: la unicidad del elemento neutro, la unicidad del inverso de un elemento, el cumplimiento de las leyes cancelativas a izquierda y a derecha y en general, propiedades que se cumplen en un grupo. De igual forma, en el texto, al final del capítulo presenta 13 problemas para contextualizar los objetos matemáticos dados en cada una de las lecciones. El capítulo 2 del texto se relaciona con los subgrupos del Grupo y no se toma como unidad de análisis en la determinación de los significados pretendidos por el texto para el objeto Grupo.

7.5. Conclusiones del capítulo

Como conclusión del análisis realizado a los cuatro libros de texto, se observa que el texto de Gallian (2006), introduce el objeto Grupo primero, como un conjunto especial, donde se ha definido una operación que cumple ciertas *propiedades* algebraicas. En la lección de análisis se observa que uno de los significados dados al objeto matemático, corresponde a su *significado en Aritmética Modular.* En la siguiente lección, se introduce el objeto grupo a partir del estudio de los “Grupos de Simetrías de los polígonos regulares - D_n,” es decir, desde su significado como *Conjunto de Permutaciones,* que corresponde históricamente a uno de los primeros significados dados al objeto Grupo. Por su parte, el texto de Herstein (1999), introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A(S)$ con S un conjunto finito, que para el caso se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías de grado n al igual que el texto anterior. El tercer texto de Lezama (2012), introduce este objeto matemático, a partir del estudio de las *propiedades* que cumple una operación definida en un conjunto; esto es, inicia con el estudio de la estructura de semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y en la medida que la operación $*$ posee más propiedades, la *estructura* se va haciendo más rica (Lezama, 2012) y las posibilidades de operar en G son mayores); así, si en el semigrupo además existe el elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, inicia con el *concepto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto.*

Se observa que en Lezama (2012) también se introduce el objeto grupo a partir del conjunto de $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* de estructura de semigrupo y a partir de este conjunto, se introduce el significado de grupo, como *Grupo de Permutaciones* al trabajar con el conjunto de las funciones biyectivas y la operación compuesta de funciones. Finalmente, en el último texto, de Caicedo (2004), se introduce el objeto Grupo al igual que en el texto de Lezama (2012), a partir de la determinación de *propiedades* que tiene la operación definida en un conjunto, para este caso de los conjuntos numéricos y las operaciones usuales que se definen en ellos: especialmente, se estudia el conjunto de los números enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto, verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo. Aquí, se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se puede establecer que se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones.

Así, en general se observa que los cuatro textos introducen el objeto grupo desde el estudio de los *Grupos de Permutaciones*, esto corresponde al conjunto formado por funciones biyectivas de un conjunto en él mismo y de ahí, la importancia del estudio de éstos grupos, especialmente, los grupos S_n de permutaciones, de orden n y los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares. Además, se observa que el significado pretendido por los textos para el objeto matemático, corresponde al *significado de Grupo Abstracto*: esto es, “un conjunto, con una operación binaria interna definida tiene estructura de grupo o es un grupo” si la operación binaria cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad que es único y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto que también es único y además, pertenece al conjunto.

Se ha presentado el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo, el cual permitió determinar los significados que fue tomando el objeto hasta llegar a consolidar un significado global del objeto, como Grupo Abstracto. Se sigue con el análisis de los significados pretendidos por los programas de Teoría de Grupos y de igual forma, con el análisis de los cuatro libros de texto de mayor uso en la asignatura; para continuar en el próximo capítulo con la tercera fase de la investigación, donde se pasa a describir el proceso seguido para el diseño e implementación del instrumento *CDM-Grupo* el cuál se sometió a la aplicación de la prueba piloto para obtener a una primera aproximación, de los conocimientos didácticos-matemáticos que poseen los estudiantes en relación con objeto Grupo: esta fase corresponde al análisis de los *significados personales* del objeto grupo.

CAPÍTULO 8

Diseño del instrumento para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

8.1. Introducción

En la investigación se relaciona el conocimiento de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo con los conocimientos didácticos-matemáticos que se han potenciado y en algunos casos desarrollado en su proceso de formación universitaria para la enseñanza universitaria del objeto matemático. En esta dirección, se describe en la sección, el desarrollo de la fase de diseñó del instrumento que permite evidenciar el nivel de preparación de los estudiantes de formación matemática, para la enseñanza universitaria y en relación con el objeto Grupo al analizar las categorías del conocimiento común del contenido en relación con el objeto matemático y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación y desarrollo del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático. A partir del análisis del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los estudiantes (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013; Vásquez, 2014), se posibilita la determinación de criterios y orientaciones para mejorar su formación, como es el caso de la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto de estudio.

En esta dirección, se describe el proceso para la construcción del instrumento que permite evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática. En primer lugar, se establecen los objetivos del instrumento *CDM - Grupo;* luego, el proceso de diseño del instrumento: se presenta el análisis de la versión piloto que se aplicó al grupo de estudiantes de formación matemática junto con el juicio de expertos (9) en didáctica del Álgebra y específicamente, en Teoría de Grupos. También, se realiza el análisis a las tareas seleccionadas para la prueba piloto, junto con los análisis cualitativo y cuantitativo de la prueba para llegar finalmente a la versión definitiva del instrumento *CDM - Grupo* cuya aplicación es motivo de análisis del siguiente capítulo.

8.2. Objetivo del instrumento, *CDM - Grupo*

Las investigaciones que se relacionan con los conocimientos del profesor de matemáticas, parten del hecho que este posee un conocimiento del contenido matemático que les permite, desempeñar la labor de la enseñanza: esto como un primer requisito, ya que se necesitan de muchos otros conocimientos complejos que se potencien en el estudiante de formación matemática para la labor de la docencia universitaria. El conocimiento del contenido sobre un objeto matemático, según el modelo del CDM (Godino, 2009) se encuentra integrado por las categorías del: Conocimiento Común del Contenido, en el sentido de Shulman (ver, capítulo 2 y 4) y Conocimiento Ampliado del Contenido, que para este estudio se toman como base para la potenciación o desarrollo del Conocimiento Especializado, necesario para la labor de la enseñanza. En el estudio se pretende analizar como se ha potenciado el conocimiento común, el ampliado y el conocimiento especializado del contenido. Además, se tiene presente que la población de estudio se encuentra integrada por estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) y no por profesores en ejercicio de su profesión. Así, desde este punto de vista, se hacen relevantes las investigaciones que permitan evidenciar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes, para la labor de la enseñanza universitaria en tópicos de matemática y específicamente, los relacionados con el objeto Grupo en la línea de formación de docentes.

En esta dirección, se diseñó el instrumento *CDM - Grupo* con el objetivo de "explorar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática": faceta que forma parte de uno de los componentes del CDM en el modelo propuesto por Godino (2009) analizado en el marco teórico (ver, capítulo 4). Así, el instrumento se orienta a evaluar algunos aspectos de la faceta epistémica del CDM que incluyen en congruencia con el modelo de Ball y Colaboradores (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) los tres tipos de conocimientos: Conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido. Al respecto, la dimensión epistémica del conocimiento CDM no solo se refiere al conocimiento del contenido matemático que deben poseer los profesores, se relaciona además, con todos aquellos conocimientos que son necesarios para la enseñanza y que el profesor adquiere y aprende en la institución educativa, producto de la instrucción y no de la práctica: en esta dirección se plantea el presente estudio (Vásquez, 2014).

Con la aplicación del instrumento, se busca obtener datos sobre el CDM de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo; estos datos corresponden a evidencias sobre el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado que poseen los estudiantes desde la aplicación del modelo del Conocimiento Didáctico y Matemático de Godino y Colaboradores (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino & Font 2013; Vásquez, 2014) presentado en el capítulo 2 y 4. Así, se busca con el diseño e implementación del instrumento, caracterizar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática en ciertos aspectos parciales; esto debido a la complejidad inmersa en los estudios sobre los componentes del CDM y a la misma complejidad del objeto de estudio (ver, capítulo 4).

Por tanto, se describe en el capítulo el proceso de diseño e implementación del cuestionario en su primera versión (piloto) de cuyo análisis se obtiene la versión definitiva, motivo de análisis del siguiente capítulo.

8.3. Construcción del instrumento *CDM - Grupo*

Para cumplir con los objetivos 5, 6, 7 y 8 planteados en el desarrollo del estudio que dan respuesta a la pregunta: ¿Cómo diseñar un instrumento que permita evaluar el conocimiento común y el conocimiento ampliado como bases del conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo? Se plantearon los siguientes seis (6) pasos para el proceso de diseño y construcción del cuestionario *CDM-Grupo*: 1) estudio de las investigaciones relacionadas con el objeto Grupo (ver, antecedentes, capítulo 2); 2) estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo (ver, capítulo 6); 3) análisis de libros de texto y programas de estudio (ver, capítulo 7); 4) construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO* (capítulo actual; 8); 5) análisis de la aplicación de la versión piloto del instrumento y del juicio de expertos y finalmente, 6) implementación y análisis de la versión final del cuestionario (ver, capítulo 9).

El primer paso corresponde a la revisión de las investigaciones sobre el objeto Grupo (ver, capítulo 2). En la segunda fase, se determinaron los distintos significados del objeto matemático a través de su evolución histórica (ver, capítulo 6); en un tercer paso, se realizó el análisis de los diferentes significados del objeto de investigación que pretenden: por un lado, los libros de texto y por otro los programas de estudio (ver, capítulo 7): ya con esta información se definen los criterios para abordar la fase cuatro, sobre la construcción e implementación de la versión piloto del instrumento y en el paso cinco se realiza la aplicación y análisis de la prueba piloto; se finaliza con la versión definitiva del cuestionario que se analiza en el siguiente capítulo.

8.3.1. Criterios para la selección de tareas

Para el diseño del instrumento que tiene como objetivo: evaluar las categorías del conocimiento CDM de los estudiantes de formación matemática, necesarias para la labor de la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior; se tomó como referencia el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de Godino y colaboradores (2009) y la metodología que el modelo propone. Dicha metodología incluye dos fases: en primer lugar, la selección de una tarea matemática que lleve al estudiante a poner en juego por medio de la solución de la situación (prácticas matemáticas), los aspectos más relevantes en relación al conocimiento que se pretende evaluar; en segundo lugar, la formulación de ítems y subítems de evaluación o propuesta de actividades que contemplen los distintos tipos de conocimientos del contenido matemático y didáctico, que se desean evaluar (Vásquez, 2014).

La fase cuatro para el diseño del instrumento *CDM-Grupo* contempló como un primer paso, la creación de un banco de problemas recopilados de las investigaciones que sirvieron como antecedentes para el estudio (ver, capítulo 2) y el análisis a los cuatro libros de texto (ver, capítulo 7). Del banco de problemas (200 preguntas) se seleccionaron las tareas que cumplieran, según el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) presentado en el capítulo 4, con tres aspectos definidos para el estudio de la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática:

1) Globalidad del significado del objeto Grupo: este criterio hace referencia a que las tareas proporcionen información sobre el significado personal respecto del significado global del objeto Grupo, determinado a partir del estudio histórico del desarrollo del objeto de investigación, hasta la consolidación del significado abstracto del objeto Grupo. Según este criterio, se eligieron las tareas que proporcionaran información respecto al significado del objeto Grupo en los contextos de: *Conjuntos de Permutaciones, Conjuntos $\mathbb{Z}_n$ en Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices y en general, en el contexto de Grupo abstracto*. Así, se tiene que el significado global del objeto Grupo, se relaciona con el contexto de "Grupo Abstracto" y corresponde a: El conjunto G con la operación $*$ se denomina un grupo si:

*El conjunto G con la operación $*$ cumple las propiedades: **G1.** Asociatividad de la operación*

$*$; ***G2.*** *Existencia en el conjunto de un elemento identidad e tal que para todo elemento del conjunto se cumple que* $g * e = e * g = g$ *y* ***G3.*** *Existencia en el conjunto de un elemento denominado inverso* $\tilde{a}$ *para cada elemento a del conjunto, tal que* $a * \tilde{a} = a * \tilde{a} = e$.

2) Contenido curricular: criterio que hace referencia a que las tareas se relacionen con los contenidos principales propuestos en los programas de formación matemática para el objeto Grupo.

3) Tipo de conocimiento del contenido a evaluar: criterio, que hace referencia a que las tareas deben poner en juego ciertos tipos de conocimientos del contenido matemático: un conocimiento común del contenido; un conocimiento ampliado del contenido y tareas que requieran de un conocimiento especializado necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario.

Se presentan en las tablas 8.1, 8.2 y 8.3 los criterios definidos para la selección de las tareas del banco de tareas.

Tabla 8.1: Criterio 1: Significados del objeto Grupo

Criterio1: Significados del objeto Grupo
a) Conjunto de Permutaciones. b) Conjuntos $\mathbb{Z}_n$ en Aritmética Modular. c) En Teoría de Ecuaciones Algebraicas: conjuntos de permutaciones que dejen a una función invariante. d) En Teoría de Galois: conjunto de permutaciones asociadas a un polinomio: Grupo de Galois del polinomio. e) En Teoría de Matrices: conjuntos de matrices que cumplen ciertas propiedades algebraicas. f) **Grupo Abstracto: un conjunto, con una operación binaria interna, que cumple los axiomas de grupo.** (Significado que se adicionó finalmente).

Tabla 8.2: Criterio 2: Contenido curricular

Criterio 2: Contenido curricular de los programas de formación matemática
a) Operación Binaria b) Estructuras algebraicas c) Grupo d) Subgrupo e) Orden del grupo, orden del elemento f) Propiedades de los grupos

Tabla 8.3: Criterio 3: Conocimiento Didáctico-Matemático

Criterio3: Conocimiento didáctico-matemático: faceta epistémica
a) Conocimiento común del contenido: que permite resolver la tarea matemática, propia de la Teoría de Grupos. b) Conocimiento ampliado: que permite generalizar las tareas del conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo. c) Conocimiento especializado: este conocimiento es el necesario para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos y corresponde al uso de representaciones, uso de diferentes significados del objeto matemático; aplicación de diferentes procedimientos para resolver un problema; las diversas argumentaciones válidas para un procedimiento; la identificación de los conocimientos puestos en juego para la solución de una tarea matemática (se tiene en cuenta que el estudio se realiza con estudiantes y no con profesores en ejercicio, por esto, se analiza si, este conocimiento se ha podido potenciar a partir del conocimiento común y del ampliado).

Para la construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO* se seleccionaron 11 tareas; estas tareas se seleccionaron con el objetivo de evaluar la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo. Así, para la construcción del instrumento se consideran los tres criterios descritos para la selección de las tareas: con el primer criterio, se consideró que las tareas debían proporcionar información sobre el grado de ajuste respecto al significado global del objeto matemático, para compararlo con los posibles significados personales de los estudiantes de formación matemática; para esto, se incluyeron ítems que activaran los distintos significados del objeto Grupo correspondientes a: conjunto de raíces de una ecuación polinomial-Teoría de ecuaciones algebraicas, conjunto de permutaciones, grupo de Galois de un polinomio, problemas en aritmética modular con los conjuntos $\mathbb{Z}_n$, Teoría de matrices: conjuntos especiales de matrices; todos ellos hacen referencia a la definición abstracta de Grupo, pero se toman en los diferentes contextos de uso del objeto matemático.

Con el segundo criterio, se pretende que los ítems seleccionados se relacionen con los principales contenidos curriculares para el objeto matemático: así, luego de la revisión en el capítulo anterior de los programas para los estudiantes de formación matemática (ver, capítulo 7) se establecieron los siguientes contenidos programáticos relacionados con el objeto Grupo: operación binaria, estructuras algebraicas (semigrupo, monoide y grupo), grupo-ejemplos y contraejemplos, subgrupo, orden del grupo y propiedades de los grupos.

Con el tercer criterio, se tenía el propósito de *categorizar* las tareas según los componentes de la dimensión epistémica, en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) para la enseñanza del objeto grupo y trabajando en el enfoque EOS como marco teórico para el estudio: se consideró la inclusión de tres tipos de tareas con este criterio: (1) tareas que pusieran en juego un conocimiento común (resolver una tarea sobre el objeto grupo); (2) tareas que requirieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo) y finalmente, (3) tareas que requirieran de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.) (ver, capítulo 4).

Con estos criterios se seleccionaron las tareas del banco de tareas (200 preguntas) y se eligieron las que cumplieran con los tres criterios, pero luego de hacer los análisis correspondiente y teniendo en cuenta la complejidad que tiene el planteamiento o selección de tareas que cumplieran con los tres criterios simultáneamente, se estableció que las tareas se seleccionaban de tal forma que, dentro del instrumento *CDM-Grupo,* se complementaran y que permitieran al mismo tiempo, llegar a evaluar los criterios propuestos. En esta dirección, se seleccionaron 11 tareas luego de un análisis minucioso a las preguntas respecto a los criterios propuestos y buscando que permitieran evaluar las distintas categorías del conocimiento didáctico-matemático en relación con el objeto Grupo y la faceta epistémica del CDM. En esta dirección, el instrumento se elaboró con el objetivo de explorar ciertos aspectos parciales o iniciales de las categorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático, por medio del planteamiento de situaciones-problemáticas de enseñanza relacionadas con el objeto matemático, para analizar así las prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes ligadas a sus configuraciones cognitivas.

Así, a partir de las diversas situaciones problemáticas que componen el cuestionario, se plantearon distintos tipos de preguntas (subítems) direccionados a evaluar las categorías del conocimiento didáctico-matemático sobre el objeto Grupo. De esta forma, las preguntas del cuestionario dieron respuesta a preguntas como: *¿Existe el elemento identidad en el conjunto, cuál es el inverso de un elemento, se cumple la propiedad de clausura; la asociativa...?* hecho que permitió evaluar en "cierta medida" un nivel de conocimiento común del contenido relacionado con el objeto Grupo: para medir el conocimiento ampliado, se plantearon preguntas como: ¿A qué otro grupo conocido resulta isomorfo el subgrupo anterior?; defina una operación similar en el conjunto dado; ¿En qué grupo se está trabajando?; determine un conjunto que deje *invariante* el 2 (no se define la propiedad de invariante) y finalmente, se diseñaron o seleccionaron preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas se usan para dar solución al problema?, ¿Qué conceptos de la Teoría de Grupos utilizó para solucionar el ejercicio ...? preguntas que permitieron evaluar el conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo.

Otro aspecto importante en la selección de las tareas, correspondió al marco teórico del estudio: el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, dentro del cual se define el modelo del Conocimiento didáctico-matemático que permite explorar y caracterizar el *conocimiento didáctico-matemático* que el estudiante de formación matemática pone en juego en la labor de la enseñanza del objeto Grupo en el ámbito universitario: este enfoque EOS, proporciona las herramientas para el análisis de las tareas propuestas. De igual forma, se tiene presente el objetivo de la investigación centrada en la evaluación del conocimiento didáctico-matemático que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor de la enseñanza del objeto Grupo, en la dimensión epistémica del CDM y en este sentido, se consideró necesario precisar nuevamente, que se entiende por "conocimiento": este término se utiliza en la investigación como un constructo epistémico-cognitivo-afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209), en el que la "comprensión" se refiere a las relaciones que se establecen entre los distintos elementos que influyen en el proceso de implementación; ya sea de una configuración epistémica o cognitiva idónea. La "competencia" por su parte, se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. Mientras que la disposición o capacidad, se relacionan con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica (Pino-Fan, 2013, p. 143-144)(ver, capítulo 4).

8.3.2. Selección de tareas para la versión piloto del cuestionario

Considerando los criterios mencionados, se seleccionan las siguientes once (11) tareas (ver, anexo A.2):

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
b) $*$ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

TAREA 2. Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$
a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique
b) La operación es asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique
d) En $(\mathbb{R}, \cdot)$ cómo se puede definir una operación en forma similar a la propuesta y que significado tendría según otras asignaturas del programa.

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(\mathbb{Z}_5, +_5)$
a) El cociente corresponde a ? Justifique
b) El residuo corresponde a? Justifique
c) En qué grupo se está trabajando? Justifique
d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además, se define en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \oplus 17 = 99$. ¿Qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique
b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique
c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$? Justifique
d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

TAREA 5. Sea el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique
c) Es $\mathbb{Z}_3$ subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación del conjunto.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique
b) A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.
b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique
c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

TAREA 8. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:
a) Deja invariante el número 2.
b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique
c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique
d) Cómo se define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ una función invariante? Justifique
b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante ? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$ De un polinomio simétrico ? Justifique
d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2 ? Justifique

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.
a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique
c) Es conmutativo el grupo? Justifique
d) A qué otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

Una vez definidos los criterios y seleccionadas las tareas para la prueba piloto, se realizan los análisis, según los criterios y el aporte de los expertos en la línea de Álgebra Abstracta: (9) expertos que realizaron el análisis a cada una de las tareas, según los tres criterios presentados y que proporcionaron información importante en cuanto al diseño, concisión y claridad de cada uno de los ítems y subítems del instrumento en esta versión piloto importante para llegar al diseño final del instrumento (ver, anexo A.4.) A continuación, se presenta el análisis de los expertos a las tareas del cuestionario.

8.3.3. Revisión del instrumento mediante juicio de expertos

Luego del diseño del instrumento, este es sometido a un proceso de validación en dos aspectos: “validez del contenido” que se garantiza: primero, a partir de la selección de los contenidos relacionados con el estudio del objeto Grupo (programas de pregrado universitario) y con la selección de los diferentes referentes curriculares involucrados (programas de estudio, libros de texto e investigaciones didácticas) y segundo, con la “contrastación de la validez de los ítems” es decir, si ellos realmente miden lo que se pretende medir; para esto se realizaron dos procedimientos: el juicio de los expertos y el análisis de los ítems a partir de la aplicación del instrumento (análisis cualitativo y cuantitativo).

8.3.3.1 Las tareas del cuestionario: análisis del contenido

Se presenta en este apartado el análisis a las tareas que constituyeron la prueba piloto según la opinión de los (9) expertos; este juicio de expertos, se contrastó en algunos casos con la experiencia del investigador en tópicos de Teoría de Grupos. El análisis de las tareas seleccionadas bajo los criterios establecidos, resultó ser un proceso muy complejo, tanto para los expertos en Álgebra como para el investigador debido a la poca experiencia en la utilización de las herramientas proporcionadas por el enfoque EOS y debido a la complejidad que conlleva la construcción de instrumentos para evaluar las categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático para la enseñanza del objeto Grupo y además la complejidad del objeto matemático. En especial, se encontró gran dificultad con la asignación de las tareas a un posible significado del objeto; ya que, para los expertos era claro que todas las tareas correspondían al contexto de Grupo en su significado global, es decir, como Grupo abstracto, definido por unos axiomas o propiedades de grupo y de igual forma para los expertos es claro el Teorema de Cayley, en teoría de grupos, que afirma que: "todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones" es decir, que todo grupo se puede ver como un grupo de Permutaciones. Por esta razón, se transcriben las respuestas de los expertos y se realiza un análisis minucioso de las mismas.

Los criterios establecidos se dieron a conocer a los expertos (ver, anexo A.1.): (1) Criterio, respecto a que la tarea se encuentra ubicada en uno de los significados establecidos para el objeto matemático; (2) Criterio: que la tarea corresponde a un contenido curricular y (3) Criterio, respecto a que la tarea permita evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, esto es, que la tarea permitiera evidenciar alguna de las categorías definidas en el modelo del conocimiento didáctico-matemático, correspondientes a la dimensión epistémica de este conocimiento (CDM). Finalmente, se pasa a describir cada una de las tareas con su propósito según los subítems que la componen: se establece del juicio de expertos, que en general resultó más sencillo dar respuesta a los criterios 2 y 3 que relacionaban los subítems de la tarea con un determinado conocimiento del contenido según el modelo del Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del objeto grupo y el criterio 2 respecto a que la tarea y así los subítems se relacionaran con un contenido curricular. En la aplicación del criterio 1, que correspondía a ubicar la tarea en un significado del objeto Grupo o en uno de sus contexto de uso, resultó ser un proceso complejo y para algunos subítems, los investigadores no respondieron nada en cuanto al criterio.

Se presentan a continuación, las 11 tareas seleccionadas para la prueba piloto junto a un análisis cualitativo, según los aportes de los expertos en Álgebra Abstracta(9) y del investigador. Las tareas se tomaron de las investigaciones que sirvieron como antecedentes al estudio, pero se modificaron en algunos subítems; ya que, estas investigaciones no pretendía analizar los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes para la enseñanza del objeto Grupo.

Análisis del ítem 1

La tarea 1, se seleccionó de la investigación sobre el "Sentido de la estructura para el álgebra universitaria" (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria (ver, capítulo 2).

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
b) $*$ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Solución a la tarea 1

(1a) ¿Existe el elemento identidad? Justifique.
$a * e = a$
$a + e - 4 = a$
$e = 4$

(1b) ¿$*$ define una operación asociativa? Justifique.
Si.
$(a * b) * c = (a + b - 4) * c = a + b - 4 + c - 4$
$= a + b + c - 8$
$a * (b * c) = a * (b + c - 4) = a + b + c - 4 - 4$
$= a + b + c - 8$

(1c)¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique.
Si. $(3)^{-1} = 5$.
$3 * b = 4$
$3 + b - 4 = 4$
$b = 5$

(1d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...-1,0,1,2,3,...}

$*$	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión sobre el significado de grupo (posible) de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: Significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	2	2	2	2
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

Con la tarea 1 se espera evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada que corresponde a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas del objeto Grupo: propiedad asociativa, de existencia de identidad y de inversos aditivos; además, la comprensión respecto al significado del objeto matemático que se puede ubicar en la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2 (ver, Anexo A.1.) según el juicio de expertos (9) a los subítems ((a),(b),(c) y (d)) de la tarea 1. Sin embargo, en el cuestionario dado a los expertos, no se había definido el significado de Grupo como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems y subítems correspondieran a este significado global; luego de un análisis minucioso, se consideró conveniente, relacionar la tarea con este significado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en una escala de niveles de relevancia de (1-5) donde 1 corresponde a nada relevante y **NA** significa que el subítem no corresponde al significado establecido.

Criterio2: Contenido Curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	2	2	4	5
Estructuras algebraicas (semigrupo, monoide, grupo)	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	2	2	2	2

En cuanto al contenido curricular, la tarea 1 se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en promedio, al preguntar por las propiedades de la operación incluyendo parte de la tabla de operaciones en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); con el tema de *estructuras algebraicas* y un nivel de relevancia de 5; ya que, se pretende el análisis del conjunto $\mathbb{Z}$ con una operación definida en el conjunto; con esta tarea se buscaba que el estudiante realizará un análisis de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto de los enteros y que según estas propiedades, analizará la estructura algebraica del conjunto en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto con la operación definida alcanzaba la estructura de grupo; se debía verificar las propiedades que se preguntan, en los subítems ((a),(b) y (c)) y finalmente, se puede ubicar la tarea en el tema de *propiedad de Grupo* ya que, se analizan precisamente las propiedades que definen la estructura algebraica de grupo, en los subítmes ((a),(b) y (c)) con un nivel de relevancia de 2.

Criterio3: Categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	3	3	3	3

Respecto a las categorías en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el análisis del investigador, la tarea 1 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tenían como propósito evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de las propiedades que cumple la nueva operación definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros; propiedades que definen si el conjunto con la operación alcanza la estructura de Grupo, en su significado global. El conocimiento ampliado se relaciona con la determinación de la existencia del elemento identidad y del elemento inverso y el conocimiento especializado se relaciona, con la identificación de las propiedades que cumple un grupo conocido con una operación definida que no es la suma tradicional.

Análisis del ítem 2

La tarea 2, es una pregunta que se organizó según los problemas propuestos en la investigación sobre el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria (ver, capítulo 2). En esta pregunta, el sentido de la estructura se relaciona con la comprensión del estudiante de la propiedad asociativa en el conjunto de los números reales, cuando se define una nueva operación.

TAREA 2. Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$
a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique
b) La operación es asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique
d) En $(\mathbb{R}, \cdot)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

Solución a la tarea 2

(a) ¿La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique Sí, porque como $a \bullet b = 3a + 4b \in \mathbb{R}$ ya que $a, b \in \mathbb{R}$
(b) ¿La operación es asociativa? Justifique No, porque: $(a \bullet b) \bullet c = (3a+4b) \bullet c = 3(3a+4b)+4c$ $= 9a+12b+4c$ $a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (3b+4c) = 3a+4(3b+4c)$ $= 3a+12b+16c$

(c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique No, porque: Si $a \bullet b = a$ entonces, $3a+4b = a$ $b = \frac{-1a}{2}$ Es decir, no existe el elemento identidad ya que este debe ser único para todos los elementos. Por tanto, no puede existir el elemento inverso de ningún número en el conjunto dado.
(d) ¿En $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta y qué significado tendría según otras asignaturas del programa?
Ejemplo: $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (3x_1 y_1, 4x_2 y_2)$ Podrían definirse muchas operaciones en el conjunto $\mathbb{R}^2$. Con esta pregunta se busca que el estudiante relacione el subítem con conceptos de álgebra lineal o con otra asignatura del programa.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	2	2	2	2
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 2, al igual que la anterior, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas que cumple el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, con una operación definida diferente a la usual (suma): propiedad de clausura, asociativa, existencia de identidad y de inversos aditivos en los subítems ((a),(b) y (c)); además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2 según el juicio de los expertos (9); sin embargo, en el cuestionario de expertos, no se definió el significado de Grupo, como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems tomaran ese significado global del objeto. Se decide, luego de un análisis minucioso, relacionar esta tarea con el significado mencionado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b) y (c)); es decir, la tarea tiene un mayor nivel de complejidad respecto de la tarea anterior.

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	5	5	5	5
Estructuras algebraicas	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad de Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 2, se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 5 en promedio para los subítems ((a),(b) y (c)); al tema de *estructuras algebraicas,* con un nivel de relevancia de 5 en los subítems ((a),(b) y (c)); ya que, en el tema se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto dado; finalmente, se relaciona con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación definida alcanza la estructura de grupo se deben verificar las propiedades de los subítems(a),(b) y (c).

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	4
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	2	2	2	2

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico - matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio de los expertos (9) y del investigador: la tarea 2, permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia en promedio de 4 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2 respecto a la comprobación de la propiedad de clausura, asociativa y a la existencia de un elemento inverso en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 relacionada con la definición de una operación similar, pero en otro conjunto dado en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con la verificación de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ y de evidenciar un conocimiento especializado para definir una operación en el conjunto $\mathbb{R}^2$, esto es, una operación con elementos que son parejas.

Análisis del ítem 3

La tarea 3, es una pregunta que se seleccionó también, de la investigación sobre el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria (ver, capítulo 2). En la investigación, la pregunta se relacionaba con el sentido de la estructura al aplicar los conocimientos de identidad e inverso en el conjunto $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ cuando se dividen dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(\mathbb{Z}_5,+_5)$
a) El cociente corresponde a ? Justifique
b) El residuo corresponde a? Justifique
c) En que grupo se esta trabajando? Justifique
d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Solución a la tarea 3

(a) ¿El cociente corresponde a? Justifique
$q = 4x^2 + x + 4$
La justificación corresponde a realizar la división en forma tabular.

(b) ¿El residuo corresponde a? Justifique
$r = x^2 + 2x + 2$
La justificación se toma del punto anterior.

(c) ¿En qué grupo se esta trabajando? Justifique
En el grupo de los polinomios $\mathbb{Z}_5[x]$

(d) ¿Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?
Posibles respuestas:
Operaciones en el grupo $(\mathbb{Z}_5,+_5)$ para los coeficientes.
Elemento identidad e inverso en el conjunto $(\mathbb{Z}_5,+_5)$
Operaciones con exponentes.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	5	5	5	5
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	5	5	5	5

Con la tarea 3, se espera evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática en cuanto a las operaciones en el conjunto $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ y en el conjunto $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ y se relaciona con la configuración de: *Problemas en aritmética modular*; con un nivel de relevancia de 5, según el juicio de expertos (9) y del investigador para los subítems ((a),(b) y (c)); la tarea además, busca evidenciar la comprensión del estudiante respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al identificar el grupo donde se realiza la práctica matemática; el nivel de relevancia asignado es de 5 y con ésta tarea, se busca también aumentar el nivel de complejidad al relacionar dos grupos distintos: $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ y el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ en el subítem (c).

Criterio2: contenido Curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	3	3	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad de Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 3 se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a) y (b)); en el tema de *estructuras algebraicas,* con un nivel de relevancia de 4 en promedio al analizar las propiedades que cumplen las operaciones definidas en los conjuntos dados, para los subítems ((a),(b),(c)y(d)) y al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5; ya que, se trabaja con dos grupos distintos, en los subítems ((a),(b) y (c)) y corresponde a *propiedades de Grupo*; ya que, al realizar las operaciones requeridas se verifican las propiedades de identidad e inverso: propiedades que definen al objeto matemático Grupo, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 5.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se busca evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 3, permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b)); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems ((c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética módulo 5, en el conjunto $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ de los polinomios con coeficientes en el grupo $(\mathbb{Z}_5, +_5)$; un conocimiento ampliado respecto al conjunto de polinomios y un conocimiento especializado, que permite reconocer el grupo de trabajo y las propiedades que se utilizan para solucionar la situación planteada.

Análisis del ítem 4

La tarea 4, corresponde a una pregunta que se seleccionó de una investigación de Stehlínkova (2004) de un proyecto matemático en aritmética, en el cual se iniciaba con la definición del conjunto de los $z - números$ y luego, se proponían operaciones en él, se establecen proposiciones y teoremas que se cumplen en el conjunto, para finalmente, concluir que la descomposición en el conjunto de los enteros, creada por la función de reducción es idéntica a la descomposición creada por la factorización $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ además, se establecen los isomorfismos correspondientes.

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16; r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique
b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

Solución a la tarea 4

(a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$ ¿qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique x=82, porque $x \bigoplus 17 = r(x+17) = r(82+17) = r(99) = 99$
(b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2, \bigoplus)$? Justifique Sea $a \bigoplus e = a$ r(a+e)=r(a) entonces $e = 0$, pero 0 no pertenece al conjunto A_2 Entonces e=99
(c) ¿A qué grupo es isomorfo $(A_2, \bigoplus)$? Justifique $(A_2, \bigoplus) \cong (\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ Para la justificación es suficiente con definir la función biyectiva, que establece el isomorfismo. $f : a \longrightarrow amod99$
(d) ¿Cuáles $z-$ números son divisibles por 3? Justifique Los que pertenecen a la clase del 3={3,6,9,12,...,99}=3M Porque, $r(3m) = 3r(m)$

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	3	3	3	3
Teoría de las ecuaciones algebraicas	5	5	5	5
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

La tarea 4, busca evidenciar el conocimiento matemático, necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en aritmética modular; para el caso de las operaciones en el conjunto $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ y se puede ubicar en la configuración de *problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)), según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea además, pretende evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *solución de ecuaciones algebraicas,* al solucionar la ecuación planteada en el conjunto $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ que en la tarea, se presenta en una forma distinta sin una definición rigurosa de la operación establecida en el subítem (a); el nivel de relevancia asignado corresponde a 5; además, la tarea explora el significado del objeto en la configuración de *Grupo abstracto,* al trabajar con las propiedades que cumple un conjunto para definir la estructura de grupo; el nivel de relevancia asignado es de 4 en los subítems ((a),(b) y (c)): en esta tarea, se aumenta el nivel de complejidad al presentar un grupo no conocido pero isomorfo a uno conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$; para esto, el estudiante debe tener una comprensión de las operaciones en aritmética modular con los conjuntos $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 4, se puede ubicar en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(A_2, \oplus)$ con una operación definida; en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* en el subítem (c)) con un nivel de relevancia de 5, ya que, en la tarea se pregunta por una de las propiedades que definen al grupo y por un grupo isomorfo al grupo dado; corresponde, también, al tema de *propiedades de Grupo* ya que se pregunta por la propiedad de identidad que es una de las propiedades que determinan si un conjunto con la operación definida alcanza la estructura de Grupo y además, se pregunta por un grupo isomorfo al dado, junto con la propiedad de divisibilidad en el grupo en los subítems (a),(b) y (c); el nivel de relevancia asignado es de 5.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	5	5	5	5

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar y según el criterio de los expertos (9) y del investigador, esta tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en los subítems (b) y (c); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (a),(b),(c)y(d) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común, en relación con la identificación del elemento identidad en el conjunto $(A_2, \oplus)$ y a la identificación de un grupo isomorfo a este; se busca evidenciar el conocimiento ampliado y especializado que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con las operaciones en aritmética modular, presentadas en una forma distinta; el conocimiento ampliado respecto a establecer un isomorfismo con otro grupo conocido y un conocimiento especializado al identificar las propiedades que se aplican en la solución de una ecuación y al definir en el conjunto $(A_2, \oplus)$ la propiedad de divisibilidad por 3.

Análisis del ítem 5

La tarea 5, se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) y tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos), que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

TAREA 5. Sea el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique
c) Es $\mathbb{Z}_3$ subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

Solución a la tarea 5

(a) ¿Dé un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
H={0,2,4}
(i) Si $a, b \in H$ entonces $a + b \in H$: 0+2=2+0=2;
2+4=4+2=0; 4+4=2; 2+2=4
(ii) Si $a \in H$ entonces $-a \in H$:
-0=0;
-2=4;
-4=2

(b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique
T={0,1,3} por ejemplo, donde no se cumple la clausura, ni la propiedad de inversos.

(c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique
No, porque son grupos no isomorfos.

(d) Elabore la tabla de operación del conjunto.

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	5	5	5	5
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 5, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática en aritmética modular y corresponde a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 5 (ver, Anexo A.1) en el subítems (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea busca también, evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 al preguntar por los subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ en los subítems (a),(b),(c) y (d); así, la tarea busca evidenciar la comprensión respecto a los criterios que se establecen para que un subconjunto sea un subgrupo.

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contra-ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	5	5	5	5
Orden del grupo	2	2	2	2
Propiedad de Grupo	NA	NA	NA	NA

En cuanto al contenido curricular, la tarea 5 se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por las propiedades que cumple la operación definida en un subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ para que sea un subgrupo y finalmente, en el tema de *Subgrupo* por las razones anteriores en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia asignado es de 5.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	3	3	3	3

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 5 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (b) y (c) con un nivel de relevancia de 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 3 en los subítems (b) y (c). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética modulo 6; el conocimiento ampliado respecto a la identificación de subgrupos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ y un conocimiento especializado al identificar las clases de equivalencia en cada uno de los grupos dados y al describir un subconjunto que no es subgrupo y dar la justificación correcta.

Análisis del ítem 6

La tarea 5, también se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) donde se tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos) que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero. a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique d) ¿El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

Solución a la tarea 6

(a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique $H_1 = \{R_0, R_{120}, R_{240}\}$ $H_2 = \langle R_i \rangle$ para $i = 0, 120, 240$ $H_3 = \langle d_i \rangle$ para d_i= reflexión por el vértice 1,2 o 3 En este punto, el estudiante puede construir muchos ejemplos de subgrupos.
(b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique Por ejemplo $H_1 \cong \mathbb{Z}_3$ Para H_2 y H_3 los puede hacer isomorfos a subgrupos del grupo S_3 de permutaciones con tres elementos, o analizar los isomorfismos con el grupo $\mathbb{Z}_n$ según el caso. $H_3 \cong \mathbb{Z}_2$ son subgrupos de orden 2.
(c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique No. Porque, el orden del subgrupo debe dividir al orden del grupo y 4 no divide a 6.
(d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique No, no existe ningún elemento de orden 6. Se puede también hacer los generados y llegar al mismo resultado.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 6, busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en el grupo de simetrías de los polígonos regulares; específicamente, en el grupo de simetrías del triángulo equilátero $(D_3, \circ)$ que es isomorfo a un subgrupo del grupo $(S_3, \circ)$ y por tanto, se puede ubicar en la configuración de: *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 5 (ver, Anexo A.1.) en los subítems (a),(b),(c) y (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea además, busca evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al preguntar por grupos isomorfos a subgrupos del grupo D_3 en los subítems (b) y (c) y con un nivel de relevancia de 3.

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	2	2	2	2
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	5	5	5	5
Orden del grupo	3	3	3	3
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 6 se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 2 en los subítems (a),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a), b),(c) y (d); ya que, se indaga por los subgrupos del conjunto D_3; al tema de *Grupo* al preguntar por los grupos a los cuales son isomorfos los subgrupos del conjunto, en los subítems (a),(b) y (c), con un nivel de relevancia de 4 y específicamente, corresponde al tema de *Subgrupo* en los subítems (a),(b) y (c) con un nivel de relevancia de 5 y corresponde al tema de: *orden del Grupo* al preguntar si existe un subgrupo de orden 4 que sea isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ en el grupo D_3 (pregunta (c)) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo* al preguntar si el grupo D_3 es un grupo cíclico en el subítem (d) con un nivel de relevancia de 5.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos (9) la tarea 6 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((b),(c) y (d))con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (b),(c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la determinación de los elementos que forman un grupo de simetrías para determinar de allí un subgrupo. Para este caso, se trabaja con el grupo de simetrías del triángulo equilátero y se pretende identificar algunos subgrupos de este grupo; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de grupos isomorfos a un subgrupo dado y a la propiedad de ser grupo cíclico y un conocimiento especializado al preguntar por un grupo isomorfo al dado; la existencia de un subgrupo con 4 elementos en el grupo D_3 y la propiedad de ser grupo cíclico.

Análisis del ítem 7

La tarea 7, se construyó con base en una pregunta tomada de la investigación de Hazzan (1999) sobre el grupo cociente. Para ésta tarea se cambio el grupo. La investigación tenía como objetivo estudiar los niveles de abstracción en el Álgebra Abstracta.

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.
b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique
c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

Solución a la tarea 7

(a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique
$H = \langle a \rangle = \{a, e\}$
$G/H = \{Ha, Hb\}$
$G = \{e, a, b, c\}$ $Ha = \{a, e\} = H = He$
$Hb = \{c, b\} = Hc$

(c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H? Justifique
H debe ser un subgrupo normal para obtener el grupo cociente; esto es
$Hg = gH$ para todo elemento del conjunto.

(d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique
$bH = b\{a, e\} = \{ba, be\} = \{c, b\}$

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 7, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión del estudiante de formación matemática en cuanto a la estructura de grupo cociente con la identificación de clases laterales y de operaciones en estas clases; la tarea corresponde a la configuración de: *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 (ver, anexo A.1.) en los subítems (a),(b),(c) y (d).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	4	4	4	4
Orden del grupo	3	3	3	3
Propiedad del Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 7, se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas,* con un nivel de relevancia de 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por el grupo cociente y sus elementos que corresponden a clases laterales; la condición del subgrupo en el grupo cociente (la normalidad del subgrupo); al tema *Grupo;* ya que, se busca la construcción de otro grupo en el subítem (b) y el nivel de relevancia es de 5; al tema de *subgrupo* con la pregunta de la condición que cumple el subgrupo para realizar un grupo cociente, en el subítem (c) con un nivel de relevancia de 4; al tema *orden del grupo* al realizar la tabla de operaciones en este grupo V-4 de Klein (a) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la condición del subgrupo para formar el nuevo grupo denominado el grupo cociente, en el subítem (c) y el nivel de relevancia es de 4.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos (9) y del investigador, la tarea 7 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la elaboración de la tabla de operación de los elementos del grupo; un conocimiento ampliado respecto a la construcción de un nuevo grupo denominado “grupo cociente”, la descripción de la condición necesaria para la construcción del grupo cociente y la construcción de clases laterales y un conocimiento especializado con la construcción del grupo cociente y la identificación de la condición que cumple el subgrupo (ser subgrupo normal) para llegar al grupo cociente y de igual forma, con la construcción de clases laterales.

Análisis del ítem 8

La tarea 8, se seleccionó de un conjunto de pruebas elaboradas en el departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Colombia (2014) para una prueba de *eficiencias 1*, de los estudiantes de matemáticas con conceptos relacionados con Teoría de Grupos. La pregunta se modificó ya que la prueba no pretendía medir los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes de matemática.

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Solución a la tarea 8

(a) El grupo es Abeliano. Falso, porque: Si el grupo es abeliano $f(xy) = a(xy)a^2 = (ax)(ay)a = xya^3$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6$
(b) $a = e$ y el grupo es abeliano: Verdadero, porque: $f(xy) = axya^2 = xy$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xy$ Si el grupo no es abeliano también se cumple.
(c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano. Verdadero, porque: $f(xy) = a(xy)a^2 = axya = (ax)(ay) = f(x)f(y)$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = (axa)(aya) = axaya = axay = f(x)f(y)$
(d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano Verdadero, porque: $f(xy) = axya^2 = xy$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6 = xy$

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	5	5	5	5

La tarea 8, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las propiedades que se preservan en el grupo bajo homomorfismos, en los subítems (a),(b),(c) y (d) y corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 5 (ver, anexo A.1).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	3	3	3	3
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	NA	NA	NA	NA
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	2	2	2	2
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 8 se ubica en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(c) y (d); ya que, se debe analizar la propiedad de ser grupo conmutativo; al tema de *orden del grupo* pero, específicamente, con el orden de los elementos del grupo, en los subítems (c) y (d) y con un nivel de relevancia de 2; al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la identidad y el orden de los elementos, con un nivel de relevancia de 5 y también, en esta tarea se pregunta por la propiedad del grupo de ser abeliano, en los subítems (a),(c) y (d).

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se busca evidenciar con la tarea 8, según el juicio de los expertos (9) y del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación a la preservación de propiedades del grupo por homomorfismos; un conocimiento ampliado respecto a las propiedades que se preservan por homomorfismo y a la identificación del homomorfismo como tal y finalmente, un conocimiento especializado con la verificación del homomorfismo y las propiedades que se preservan por éstos homomorfismos.

Análisis del ítem 9

La tarea 9, se seleccionó del curso de Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para el estudio de las categorías del conocimiento didáctico matemático.

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:
a) Deja invariante el número 2.
b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique
c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique
d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

Solución a la tarea 9

(a) Deja invariante el número 2. $H = \{(1),(13),(14),(134),(43),(143)\}$
(b) El subconjunto anterior es un subgrupo. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique Sí, porque: $(13)(13) = (1)$ (clausura) y además: $(1)^{-1} = (1)$ $(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2. $(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2. $(134)^{-1} = (143)$ elemento de orden 3 $(143)^{-1} = (134)$ elemento de orden 3 No. No es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.
(c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique $H = \{(1),(13)\}$ $\{(13)(13) = (1)\}$ (clausura) y además: $(1)^{-1} = (1)$ $(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2. $(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2. Se puede decir que es un subgrupo de orden 2, cíclico y que por tanto, isomorfo a $\mathbb{Z}_2$
(d) ¿Cómo define en este ejercicio la propiedad de ser invariante? Exprésela mediante una fórmula y Justifique. Ejemplo: La normalidad: $Hg = gH$ para todo g elemento del grupo. Con esta pregunta se quería llegar a que si se cumple que: $\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(n)})$ para toda permutación $\alpha \in S_n$ entonces f es un invariante del grupo finito S_n. Para este grupo, los polinomios simétricos corresponden a los elementos invariantes.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 9, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del grupo de permutaciones con cuatro elementos y a la propiedad de ser un invariante de un grupo finito; por tanto, se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) con un nivel de relevancia de 5; ya que, en toda la tarea se pregunta por las propiedades que se definen en este conjunto; también, corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 (ver, anexo A.1.) al definir propiedades de los subgrupos del grupo S_4 en los subítems (a),(b) y (c).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	3	3	3	3
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	4	4	4	4
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 9 se ubica en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b) y (c); ya que, se debe analizar la propiedad de ser subgrupo, es decir, las propiedades de grupo; al tema *grupo, ejemplos y contraejemplos* ya que la tarea se relaciona con las propiedades de un grupo específico: el grupo S_4 de permutaciones de cuatro elementos y el nivel de relevancia asignado es de 4, en el subítem (b); al tema de *subgrupo*; ya que, se pregunta si un subconjunto define un subgrupo y con un nivel de relevancia de 4 en el subítem (b); finalmente se ubica en el tema de *propiedad del grupo;* ya que, se define una propiedad y se pregunta si con esa propiedad el conjunto es un subgrupo, en el subítem (b) y el nivel de relevancia asignado es de 4.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	2	2	2	2

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos (9) y del investigador, la tarea 9 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de la propiedad que permite determinar algunos de los subgrupos del grupo S_4: una tarea común en Teoría de Grupos que se relaciona con determinar los subgrupos del grupo; ésta tarea permite evidenciar un conocimiento ampliado respecto a la determinación de propiedades en el subconjunto que lo lleven a ser un subgrupo y con la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito. Finalmente, la tarea permite evidenciar un conocimiento especializado, al pretender que el estudiante en forma intuitiva construya la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito.

Análisis del ítem 10

La tarea 10, complementa la tarea 9 y se seleccionó del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos; aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para medir las categorías del conocimiento didáctico matemático y el contexto de significado de la Teoría de Galois.

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique
b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante ? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$
De un polinomio simétrico ? Justifique
d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2 ? Justifique

Solución a la tarea 10

(a) ¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique
No. Porque, existe $\alpha = (13) \in S_4$ tal que:
$\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$
$= f(x_3, x_2, x_1, x_4) = x_3x_2 + x_1x_4 \neq x_1x_2 + x_3x_4 = f$

(b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante. Justifique
$\alpha = (1) \in S_n$ la identidad deja a todo polinomio igual.
Esta pregunta según los expertos, estaría mal formulada por la definición de ser invariante que afirma que:
f es un invariante del grupo S_n si $\alpha f = f$ para toda $\alpha \in S_n$.
Pero en el contexto histórico, para la solución de ecuaciones algebraicas por radicales se habla de “las permutaciones” que dejan invariante a una función en las raíces de la ecuación y es en este sentido que se formula la pregunta.

(c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico. Justifique Ejemplo, una posible solución sería: Sea $f = x_1 + x_2$ y el grupo $S_2 = \{(1),(12)\}$ ya que: $f(x_1,x_2) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)})$ $= f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = f$ para $\alpha = (1)$ la identidad y $= f(x_1,x_2) = x_2 + x_1 = f$ para $\alpha = (12)$. En S_4 se tiene como respuesta al conjunto: $H = \{(1),(12),(34),(12)(34),(13)(24),$ $(14)(23),(1423),(1324)\}$
(d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique $b = -x_1 - x_2$ $c = x_1 x_2$ Justificación: Sea $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ $= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ luego, $b = -(x_1 + x_2)$ $c = x_1 x_2$

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	4	4	4	4
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	4	4	4	4
Teoría de Galois	2	2	2	2
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

Con la tarea 10, se pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de los invariantes de un grupo finito, relacionados con los polinomios simétricos; para este caso, el grupo finito corresponde al grupo S_4 de permutaciones de 4 elementos; por tanto, esta tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (c); la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación algebraica y las raíces o soluciones de la misma y la relación con el grupo S_4, es decir, la relación de las soluciones de una ecuación de grado cuatro y el grupo S_4; por tanto, corresponde a la configuración de *Teoría de ecuaciones algebraicas* con un nivel de relevancia de 4 (ver, Anexo A.1.); además, los invariantes del grupo S_4 fueron fundamentales para determinar las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado cuatro mediante el método de radicales, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Finalmente, la tarea corresponde a la comprensión del estudiante de la estructura de Grupo en su significado de referencia o global y se ubica por tanto, en la configuración de *Grupo Abstracto;* ya que, la tarea permite relacionar el grupo S_4 con las soluciones de la ecuación de grado cuatro, en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia es de 4. Esta tarea tiene en general un nivel alto de complejidad y los expertos proponen varios arreglos para lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes de formación matemática; hecho que se analiza en la evaluación de la prueba piloto. La tarea se relaciona con la configuración *Grupo de Galois del polinomio-Teoría de Galois* al relacionar los coeficientes de la ecuación de grado dos con sus raíces, en el subítem (d).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	NA	NA	NA	NA
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	NA	NA	NA	NA
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 10 se ubica en el tema de *propiedad del grupo* con un nivel de relevancia de 5. Se busca indagar por los invariantes de un grupo finito, en este caso del grupo S_4 y la relación con las ecuaciones algebraicas, en los subítems (a),(b),(c) y (d). En general, los subítems no fueron claros para los expertos y por tal motivo, la pregunta se reorganizó en la versión final del cuestionario; ya que, ella se relaciona con uno de los problemas que dieron origen al objeto Grupo. Se tiene presente además, que dentro del contenido curricular de los programas de formación matemática, no aparece el tema de polinomios simétricos, ni la determinación de los invariantes de un grupo finito, según el análisis de los programas de estudio presentados en el capítulo anterior; además, en la asignatura de Teoría de Grupos, difícilmente se puede trabajar la Teoría de Galois, solo se trabaja el objeto Grupo en el contexto de las permutaciones y en su significado abstracto.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	5	5	5	5
Conocimiento especializado del contenido	5	5	5	5

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM), la tarea 10 buscan evidenciar, según el juicio de los expertos (9) y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 5 y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 5, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la identificación de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación de grado dos y las soluciones o raíces de la misma; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un polinomio como función invariante y a la identificación de la relación existente entre los coeficientes de la ecuación y sus soluciones o raíces y un conocimiento especializado al pretender que el estudiante de formación matemática llegue a definir la propiedad de invariante de un grupo finito, para el caso del grupo S_4.

Análisis del ítem 11

La tarea 11, se toma del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) del capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta no fue clara para los expertos y se modificó según los aportes dados; además, se adaptó para mediar las categorías del conocimiento didáctico matemático.

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.
a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique
c) Es conmutativo el grupo? Justifique
d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

Solución a la tarea 11

(a)Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique
$H = \{\alpha 1 = (1), \alpha 2 = (12)(34), \alpha 3 = (13)(24), \alpha 4 = (14)(23)\}$
Por tabla se verifica la propiedad de clausura, identidad e inverso
y la propiedad asociativa se hereda del grupo de funciones.

$\circ$	$\alpha\,1$	$\alpha\,2$	$\alpha\,3$	$\alpha\,4$
$\alpha\,1$	$\alpha\,1$	$\alpha\,2$	$\alpha\,3$	$\alpha\,4$
$\alpha\,2$	$\alpha\,2$	$\alpha\,1$	$\alpha\,4$	$\alpha\,3$
$\alpha\,3$	$\alpha\,3$	$\alpha\,4$	$\alpha\,1$	$\alpha\,2$
$\alpha\,4$	$\alpha\,4$	$\alpha\,3$	$\alpha\,2$	$\alpha\,1$

(b)¿Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique
$|\alpha 1| = 1$ el orden de la identidad en cualquier grupo es 1.
$|\alpha 2| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.
$|\alpha 3| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.
$|\alpha 4| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.

(c) ¿Es conmutativo el grupo? Justifique
Si, por la simetría de la tabla, o se prueba que $\alpha i \alpha j = \alpha j \alpha i$ para $i = 1,2,3,4$.

d) ¿A qué otro grupo puede ser isomorfo? Justifique
Al grupo $k-4$ de Klein.
Se puede comparar con la tabla presentada en la tarea 7 subítem 1a)
Por el orden de los elementos el grupo regular no puede ser isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$.
Se puede establecer una función biyectiva entre los dos conjuntos, pero se buscan justificaciones cortas, que muestren la comprensión del estudiante.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos, donde **NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica**.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

La tarea 11, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del subgrupo de rotaciones del cuadrado y las propiedades del grupo D_4 que en esta tarea se toma isomorfo a un subgrupo del grupo S_4 de permutaciones con 4 elementos; por tanto, la tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4; la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la estructura de Grupo: grupo conmutativo, subgrupo e isomorfismos con subgrupos del grupo S_4 y se ubica en la configuración de *Grupo Abstracto* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	3	3	3	3
Orden del grupo	4	4	4	4
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 11 se ubica en el tema de *operación binaria* en los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 3; en el tema de *estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(c) y (d). La tarea también pretende indagar por la propiedad conmutativa para un subgrupo del grupo D_4 visto como subgrupo isomorfo a un subgrupo del grupo S_4. También, corresponde al tema de *grupo* con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (a),(c) y (d) al preguntar por el grupo regular de cuatro símbolos, el orden de los elementos de ese grupo regular, la propiedad conmutativa en el grupo regular y por un grupo isomorfo al grupo regular; además, la tarea corresponde de igual forma, al tema de *subgrupo* con un nivel de relevancia de 3, en los subítems (a),(c) y (d); ya que, el grupo regular en mención es un subgrupo del grupo D_4 y por tanto, todas las preguntas se relacionan con el subgrupo: los subgrupos son en si mismos grupos. Finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo*con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (b),(c) y (d); ya que, indaga por el orden de los elementos del grupo regular.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	4	4	4	4
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) la tarea 11 busca evidenciar, según el juicio de los expertos (9) y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 4 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la determinación de un grupo según una propiedad definida; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un grupo a partir de una propiedad, la determinación del orden de los elementos en el grupo, la verificación de la propiedad conmutativa y la determinación de un grupo isomorfo al grupo regular y finalmente, un conocimiento especializado al pretender que el estudiante construya un grupo a partir de una propiedad establecida; encuentre el orden de los elementos de ese grupo; verifique la propiedad conmutativa en el grupo y finalmente, encuentre un grupo que sea isomorfo al grupo regular de rotaciones del cuadrado.

A continuación, se presenta en la tabla 8.4 los 11 ítems y sus subítems clasificados según los diversos “significados” dados al objeto Grupo y seleccionados según el primer criterio para la construcción del cuestionario piloto y su aplicación. Como se mencionó el significado del objeto grupo como *Grupo abstracto* contiene todos los ítems y subítems del cuestionario, como se puede evidenciar en la tabla 8.4; ya que, los significados parciales del objeto grupo subyacen al significado de referencia del objeto matemático. En esta misma dirección, se presenta la tabla 8.5 con los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio dos: este criterio corresponde a la *pertenencia de la tarea a alguno de los contenidos curriculares* establecidos para el estudio del objeto Grupo luego del análisis de los programas de los estudiantes de formación matemática (ver, capítulo 7). Y en la tabla 8.6 se presentan de igual forma, los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio tres para la selección de preguntas del cuestionario; este criterio corresponde a *las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del estudiante de formación matemática* que se pretenden evaluar con las tareas. Finalmente, en la tabla 8.7 se presentan cada una de las tareas y los criterios que ella permitirá evaluar.

Tabla 8.4: Significados del objeto Grupo

Significados del objeto Grupo	**Ítem**	**Subítem**	**Nivel de relevancia**
Permutación	6	a) b) c) d)	5
	9	a) b) c)	5
	10	a) b) c)	4
	11	a) b) c) d)	4
Aritmética modular	3	a) b) c)	5
	4	a) b) c) d)	3
	5	d)	5
Teoría de ecuaciones algebraicas	4	a)	5
	10	a) b) c) d)	4
Teoría de Galois	10	a)	2
Teoría de Matrices			
Grupo Abstracto	1	a) b) c) d)	3
	2	a) b) c)	4
	3	c)	5
	4	a) b) c)	4
	5	a) b) c)	3
	6	a) b) c) d)	3
	7	a) b) c) d)	3
	8	a) b) c) d)	5
	9	a) b) c)	3
	10	a) b) c)	4
	11	a) b) c) d)	4

Tabla 8.5: Contenidos curriculares para el estudio del objeto Grupo

Contenidos curriculares para el objeto Grupo	**Ítem**	**Subítem**	**Nivel de relevancia**
Operación binaria	1	a) b) c) d)	3
	2	a) b) c)	5
	3	a) b)	3
	4	a) b) c) d)	3
	5	a) b) c) d)	4
	6	a) c) d)	2
	7	a) b) d)	4
	11	a) b) c) d)	3
Estructuras algebraicas	1	a) b) c) d)	5
	2	a) b) c)	5
	5	a) c) d)	4
	6	a) b) c) d)	4
	7	a) b) c) d)	5
	8	a) c) d)	3
	9	a) c) d)	3
	11	a) b) c) d)	4
Grupo, ejemplos y contra-ejemplos	1	a) b) c)	4
	2	a) b) c)	4
	3	a) b)	5
	4	c)	5
	6	a) b) c)	4
	7	b)	5
	8	a) b) d)	4
	9	b)	4
	11	a) c) d)	5
Subgrupo	5	a) b) c)	5
	6	a) b) c)	5
	7	c)	4
	9	b)	4
	11	a) c) d)	3
Orden del grupo	6	c)	3
	7	a)	3
	8	c) d)	2
Propiedad del grupo	1	a) b) c)	4
	3	a) b) c) d)	5
	4	a) b) c)	5
	6	d)	5
	7	c)	4
	8	a) c) d)	5
	9	b)	4
	10	a) b) c) d)	5
	11	b) c) d)	5

Tabla 8.6: Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático

Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático	**Item**	**Subitem**	**Nivel de relevancia**
Conocimiento común del contenido	1	a) b) c) d)	5
	2	a) b) c) d)	4
	3	a) b)	5
	4	a) b) c) d)	3
	5	a) b) c) d)	5
	6	a)	5
	7	a)	5
	8	a) b) c) d)	5
	9	a)	3
	10	d)	3
	11	a)	4
Conocimiento Ampliado del contenido	1	a) b) c) d)	2
	2	a) b) c) d)	2
	3	a) b) c) d)	4
	4	a) b) c) d)	4
	5	a) b) c)	2
	6	b) c) d)	5
	7	b) c) d)	5
	8	a) b) c) d)	3
	9	b) c) d)	3
	10	a) b) c) d)	5
	11	a) b) c) d)	3
Conocimiento especializado del contenido	1	a) b) c) d)	3
	2	d)	2
	3	c) d)	4
	4	a) b) c) d)	5
	5	b) c)	3
	6	b) c) d	4
	7	c) d)	4
	8	a) b) c) d)	4
	9	d)	2
	10	a) b) c) d)	5
	11	a) b) c) d)	4

Tabla 8.7: Tareas del cuestionario piloto *CDM-GRUPO*

Tarea	**Significados**	**Subítems**	**Contenido**	**Subítems**	**Categoría del CDM**	**Subítems**
1	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
			Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
2	Grupo abstracto	a) b) c)	Operación binaria	a) b) c)	Conocimiento común	a) b) c) d)
			Estructuras algebraicas	a) b) c)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	d)
3	Aritmética modular	a) b) c)	Operación binaria	b)	Conocimiento común	b)
	Grupo abstracto	c)	Grupo, ejemplos, contraejemplos	b)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Propiedad del grupo	a) b) c) d)	Conocimiento especializado	c) d)
4	Aritmética modular	a) b) c)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
	Teoría de ecuaciones algebraicas	a)	Grupo, ejemplos, contraejemplos	c)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Propiedad del Grupo	a) b) c)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
5	Aritmética modular	d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c)
			Subgrupo	a) b) c)	Conocimiento especializado	b) c) d)
6	Permutación	a) b) c) d)	Operación binaria	a) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b c) d)	Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	b) c) d)
			Subgrupo	a) b) c)		
			Orden del grupo	c)		
			Prop. del grupo	d)		

Tarea	Significados	Subítems	Contenido	Subítems	Categoría del CDM	Subítems
7	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) d)	Conocimiento común	a)
			Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	b)	Conocimiento especializado	d)
			Orden del grupo	a)		
			Propiedad del grupo	c)		
8	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Orden del grupo	c) d)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
			Propiedad del grupo	a) c) d)		
9	Permutación	a) b) c)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Subgrupo	b)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Propiedad del Grupo	b)	Conocimiento especializado	d)
			Grupo, ejemplos y contraejemplos	b)		
10	Permutación	a) b) c)	Propiedad del grupo	a) b) c) d)	Conocimiento común	d)
	Teoría de ecuaciones algebraicas	a) b) c) d)			Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
	Teoría de Galois	a) b) c) d)			Conocimiento especializado	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)				
11	Permutación	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos y contraejemplos	a) c) d)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
			Subgrupo	a) c) d)		
			Propiedad del grupo	b) c) d)		

El documento para la prueba piloto se imprimió y organizó en carpetas que fueron entregadas a 11 expertos en Álgebra Abstracta; pero, se obtuvo respuesta de 9 expertos. Los expertos son docentes universitarios, magísteres y otros doctores en matemática en la línea de Álgebra: profesores de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (7); de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1) y de la Universidad del Norte (1). Estos docentes se seleccionaron por su conocimiento experto en el tema de Teoría de Grupos y por su desempeño como docentes de los programas de formación matemática y específicamente, de la asignatura de Teoría de Grupos (Millman & Green, 1989); se les solicitó emitir un juicio según las indicaciones presentadas en el cuestionario, donde se preguntaba por el grado de relevancia de cada subítem respecto a los tres criterios definidos para la selección de tareas (ver, anexo A.1.)

Se presenta a continuación, parte del documento dado en forma impresa a los expertos (uno de estos formatos se envió por correo y las respuestas se escanearon para su análisis)(ver, Anexo A.1.)

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Matemáticas y Estadística

Cuestionario CDM-Grupo

Nombre:

Universidad donde labora: ______________________________
Último título académico: ______________________________

Estimado doctor, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar, para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestra tesis doctoral titulada: *El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario: Objeto Grupo*. Esta evaluación mediante juicio de expertos, sustenta la fiabilidad y validez del instrumento que se está construyendo para evaluar el conocimiento didáctico - matemático del estudiante de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) sobre el objeto Grupo, para la labor de enseñanza en el ámbito universitario.

Como criterios de evaluación en la selección de las tareas del cuestionario, se han tenido en cuenta, los siguientes:

- Tareas que proporcionan información sobre el grado de ajuste del **significado personal** de los estudiantes de formación matemática, respecto del significado global del objeto Grupo. Para esto, se incluyen ítems que activan los diferentes sentidos del objeto Grupo: *Permutaciones, Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices e invariantes en Geometría;* según su evolución histórica, hasta llegar a la consolidación del concepto que se tiene en la actualidad.

- Aquellas tareas que ponen en juego:
  El conocimiento común del contenido (resolver la tarea matemática propia de la Teoría de Grupos. Es el conocimiento que tendrían por ejemplo los físicos, químicos o cualquier estudiante que curse Teoría de Grupos); tareas que requieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo) y aquellas que requieren del conocimiento especializado, que se define como aquel que es necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario (como: usar diferentes representaciones, distintos significados del objeto matemático, resolver un problema mediante diferentes procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego para la resolución de una tarea matemática).

- Tareas que se relacionen con los siguientes contenidos:
  Operaciones binarias, Estructuras algebraicas elementales, Grupos, ejemplos y contraejemplos, Grupo de elementos invertibles de un semigrupo, Subgrupos, Orden de un grupo, orden de un elemento, Propiedades de los Grupos (ser Abeliano, cíclico, ser un grupo de permutaciones, isomorfismos, homomorfismos, etc.)

En este sentido, solicitamos su colaboración para evaluar cada una de las tareas que componen el instrumento denominado *Cuestionario CDM - Grupo,* respecto a los criterios anteriores. Nos interesa saber su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- El grado de relevancia con el que el ítem evalúa alguno de los diferentes significados del objeto grupo (teniendo en cuenta el origen de este objeto: desde la Teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la Geometría).

- El grado de relevancia con el que evalúa los diferentes tipos de conocimientos del estudiante de formación matemática, para la labor de profesor universitario de Teoría de Grupos.

- El tipo y grado de relevancia con el que se evalúa el CDM (conocimiento didáctico-matemático).
- La ausencia de algún contenido importante.
- La redacción y comprensión de los enunciados.
- Sugerencias.

Para este análisis se han incluido tablas que evalúan el grado de relevancia de los tres criterios mencionados, siendo:
NR=Nivel de Relevancia
Nada relevante = 1
Totalmente relevante = 5
NA= No aplica
Por favor, para cada uno de los ítems de la tarea, marque el nivel que corresponda según su criterio; si un ítem no aplica marque NA.

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$ a)¿ Existe el elemento identidad? Justifique b) ¿ $*$ define una operación asociativa? Justifique c) ¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						

En la misma dirección del análisis al juicio de los expertos, se presenta en la figura 8.1 el grado de relevancia asignado a cada una de las tareas del cuestionario, según el criterio 1, que corresponde a la pertenencia de la tarea en un contexto de significado del objeto

Grupo: estos contextos corresponden a: P=Permutación; AM=Aritmética modular; TEA=Teoría de ecuaciones algebraicas; TG=Teoría de Galois; TM=Teoría de Matrices; GA=Grupo abstracto.

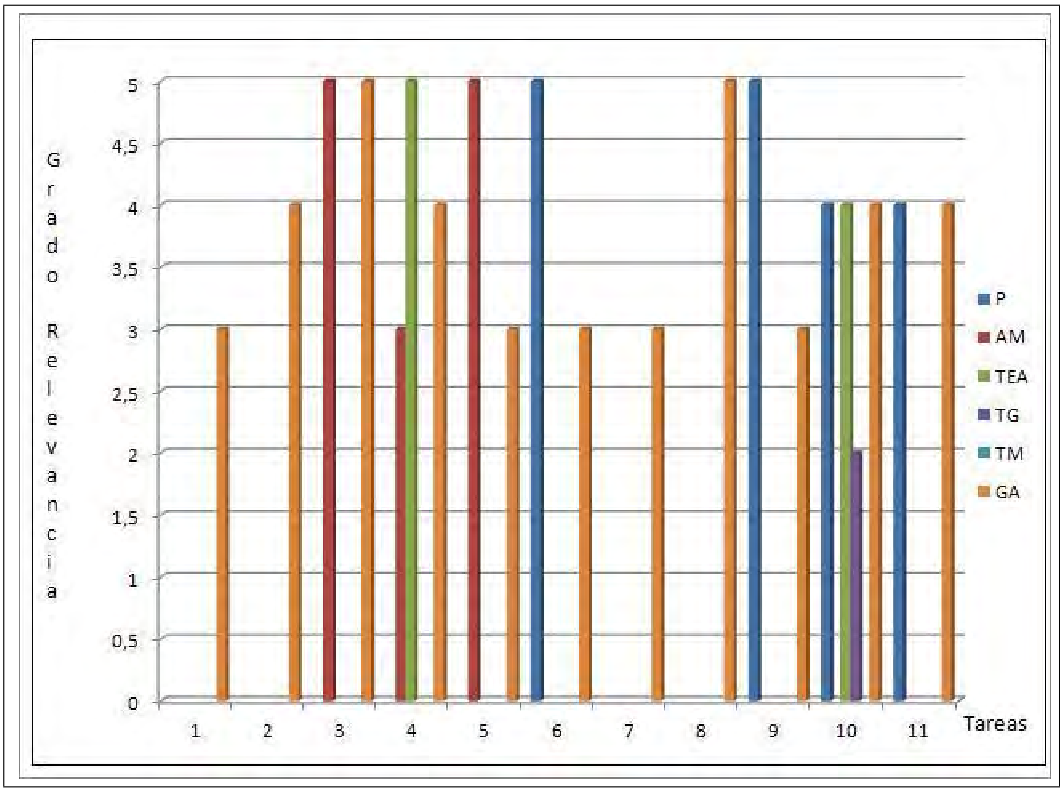


Figura 8.1: Tareas según el significados del objeto Grupo y su grado de relevancia

Para la selección de tareas, con el criterio 1, se pretende que estas se ubiquen en un contexto de significado y según el grado de relevancia asignado por los expertos se concluye que, en el contexto de *Conjunto de Permutaciones* se encuentran las preguntas 6 y 9 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 10 y 11 con un nivel de relevancia de 4; en el contexto de *Aritmética Modular* se encuentran las preguntas 3 y 5 con un nivel de relevancia de 3; respecto al significado de Grupo en el contexto de *Teoría de Ecuaciones algebraicas* se encuentra la pregunta 4 con un nivel de relevancia de 5 en el subítem (a) y la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 4 en todos los subítems. Al contexto de la *Teoría de Galois* corresponde la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 2 en el subítem (a) y finalmente, en el contexto de Grupo como *Grupo abstracto* se encuentran las preguntas 3 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2,4,10 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 1,5,6,7,9 con un nivel de relevancia de 3 (ver, tabla 8.1).

De los criterios dados por expertos (9) se concluye en primer lugar, que se debe incluir una pregunta que corresponda al contexto de la *Teoría de Galois y Teoría de Matrices.* Por tanto, se analiza la figura 8.1 y se determina que las tareas que pueden eliminarse según los criterios de los expertos podrían ser: la tarea 7 que tiene un nivel de relevancia de 2 y corresponde a la categoría de grupo como *Grupo abstracto,* donde quedan incluidas todas las preguntas del cuestionario (11 preguntas) y la tarea 1 que corresponde al significado de Grupo abstracto, con un nivel de relevancia de 3 y en este contexto se encuentran todas las tareas del cuestionario.

De la prueba piloto aplicada a los estudiantes de formación matemática y luego de una revisión y un análisis al desarrollo de las tareas; junto con el análisis de los comentarios de los estudiantes; tales como: "el tiempo de 2 horas no alcanza para resolver las tareas propuestas", se concluye, que se deben eliminar o sintetizar algunas de las tareas y además, se deben incluir las tareas que hacen falta: se resalta que algunas preguntas se relacionan con la Teoría de Galois, solo que la relación no fue dada en forma explícita.

En la figura 8.2 se presenta las tareas respecto al criterio 2 de selección, que buscaba que las tareas se relacionaran con un contenido curricular. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 8.5) se concluye que en el tema de Operación binaria (OB), se encuentra la pregunta 2 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 5 y 7 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Estructuras algebraicas (EA), las preguntas 1,2 y 7 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 5,6 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 8 y 9 con un nivel de relevancia de 3. En el tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos (GEC), se encuentran las tareas 3,4,7 y 11 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 1,2,6,8 y 9 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Subgrupo (S), las preguntas 5 y 6 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 7 y 9 con un nivel de relevancia de 4 y la pregunta 11 con un nivel de relevancia de 3; en el tema: Orden del grupo (OG), se encuentran las tareas 6 y 7 con un nivel de relevancia de 3 y la pregunta 8 con un nivel de relevancia de 2; en el tema: Propiedades del grupo (PG), se encuentran las preguntas 3,4,6,8,10 y 11 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 1,7 y 9 con un nivel de relevancia de 4.

Del juicio de expertos y según el grado de relevancia asignado respecto al criterio 2, se concluye que se puede eliminar la pregunta 7 que se relaciona con el tema de *Operación binaria* con un nivel de relevancia de 4, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Subgrupo* donde se encuentran otras 9 tareas (ver, figura 8.2) y un nivel de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedad de Grupo* con un nivel de relevancia de 4. De igual forma, la pregunta 8 se encuentra en el tema de *Estructuras algebraicas* donde aparecen 8 tareas con un grado de relevancia de 3, en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4, en el tema de *Orden del grupo* con un nivel de relevancia de 2. Se realiza en la misma dirección el análisis a la tarea 1 y se encuentra

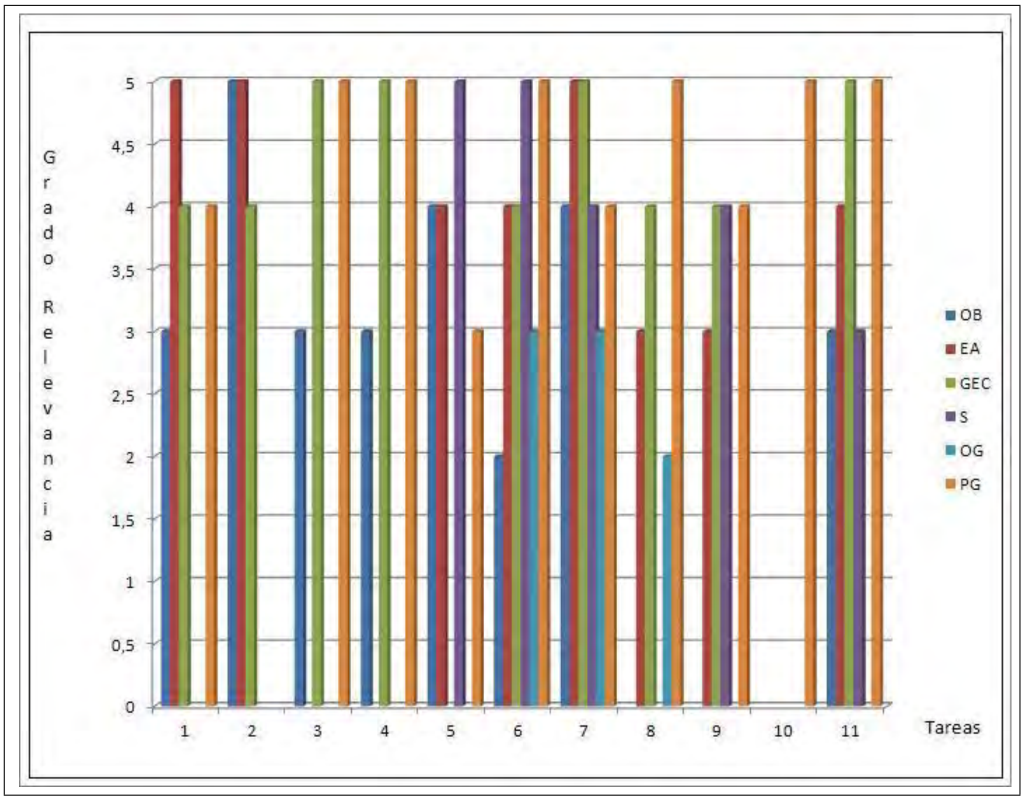


Figura 8.2: Tareas según el contenido curricular para el objeto Grupo y grado de relevancia : OB=Operación binaria; EA=Estructuras algebraicas; GEC=Grupo, ejemplos y contraejemplos; S=Subgrupo; OG=Orden del grupo; PG=Propiedades del grupo.

que se relaciona con el tema *Operación binaria* con un grado de relevancia de 3, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un grado de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* donde se encuentran 9 tareas con un grado de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedades de Grupo* donde se encuentran 9 tareas con un nivel de relevancia de 4.

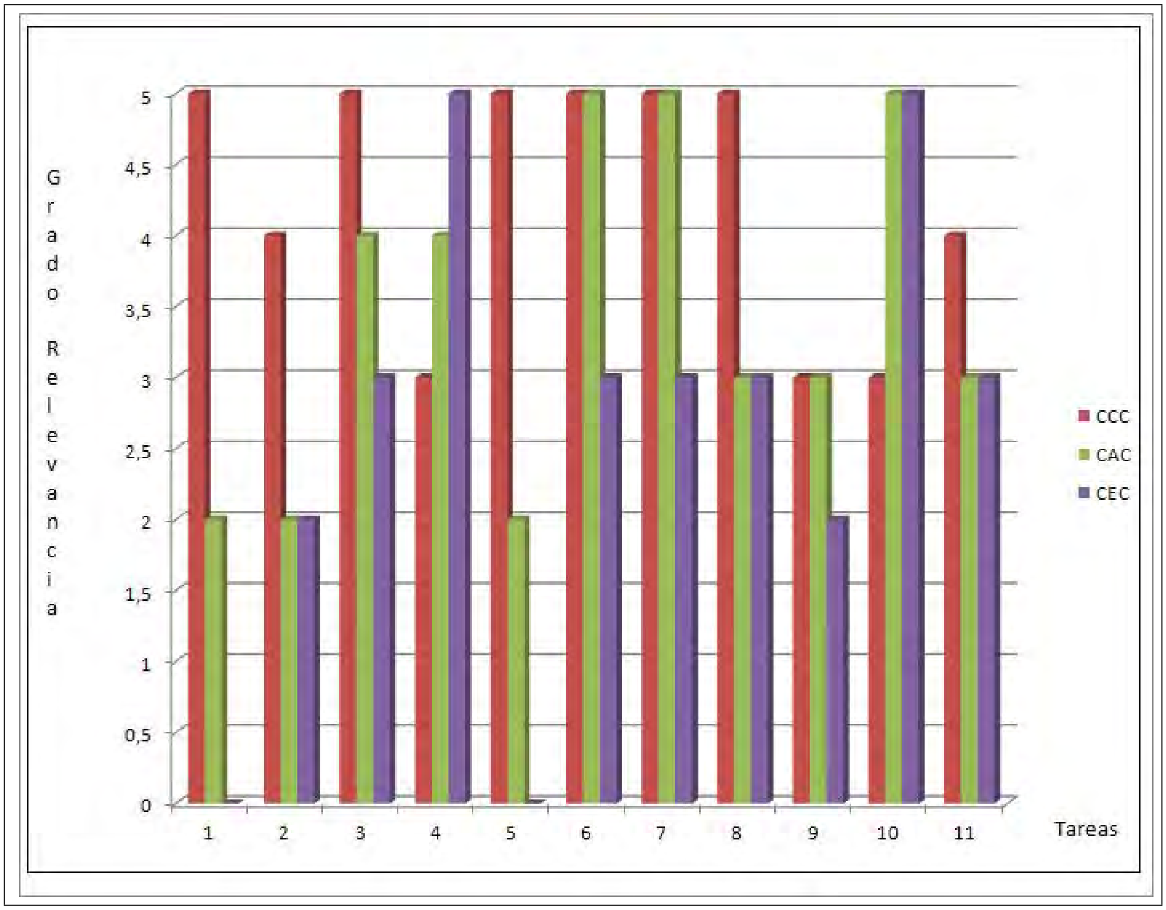


Figura 8.3: Tareas de la subcategoría del CDM y grado de relevancia: CCC=Conocimiento común del contenido; CAC= Conocimiento ampliado del contenido; CEC=Conocimiento especializado del contenido.

En la figura 8.3 se presenta las tareas respecto al criterio de selección 3, que busca que las tareas permitan evaluar una subcategoría del *Conocimiento didáctico-matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto grupo* referente a la faceta epistémica de este CDM. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 8.6) se concluye que en la subcategoría del *Conocimiento común del contenido (CCC)* se encuentran las preguntas 1,3,5,6,7 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 4,9 y 10 con un nivel de relevancia de 3; en la subcategoría de *Conocimiento ampliado del contenido (CAC)* se encuentran las preguntas 6,7 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 3 y 4 con un nivel de relevancia de 4; las preguntas 8,9 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las preguntas 1,2 y 3 con un nivel de relevancia de 2. En la subcategoría de *Conocimiento especializado del contenido (CEC)* se encuentran las tareas 4 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 3,6,7,8 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las tareas 2 y 9 con un nivel de relevancia de 2.

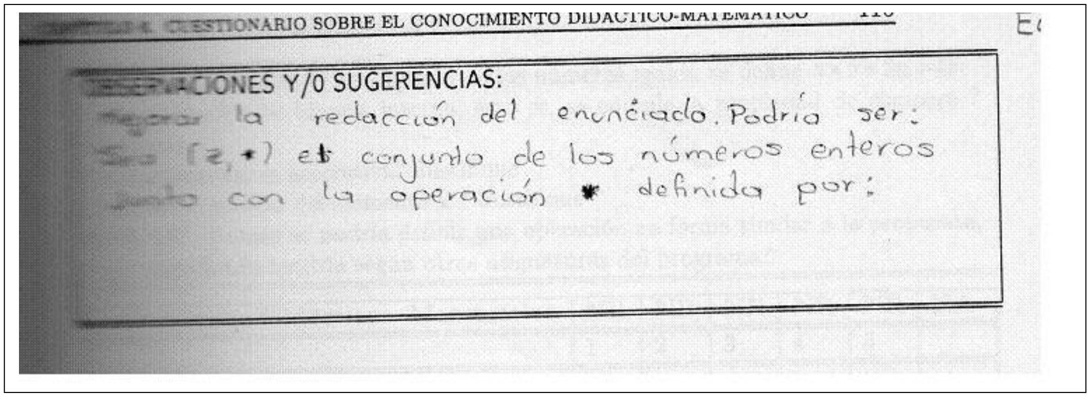
Del juicio de expertos y del grado de relevancia asignado por ellos respecto al criterio 3, se concluye que se puede eliminar la pregunta 2 que permite evaluar en ciertos aspectos, el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 2; de igual forma, la tarea 8 que permite evaluar el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 3. Se analiza la tarea 7 como posible tarea a ser eliminada y se concluye que ella permite medir el CCC con un nivel de relevancia de 5 pero que en esta categoría se encuentran 6 tareas; de igual forma, permite medir el CAC con un nivel de relevancia de 5 y se encuentran entre 3 tareas y finalmente, permite medir el CEC con un nivel de relevancia de 3 en una categoría que cuenta con 5 tareas (ver, figura 8.3).

En la misma dirección, se analiza la pregunta 1, bajo el criterio 3 según el criterio de los expertos y se encuentra que respecto al CCC el nivel de relevancia es 5, pero respecto al CAC el nivel de relevancia es de 2.

De igual forma, se analizaron las sugerencias de los expertos, que en muchos casos se relacionaban con la *formulación* de las preguntas y en la búsqueda de mayor claridad y comprensión por parte de los estudiantes: estas sugerencias se analizaron minuciosamente, ya que en algunos casos, para el experto no era clara la pregunta dentro del contexto histórico. Por ejemplo, respecto a la Teoría de Galois, no es habitual que se trabaje en los cursos de Teoría de Grupos así corresponda a un significado del objeto Grupo; por tanto, algunos de los ejercicios con el grupo S_n que se relacionan con el grupo de Galois del polinomio, no era claro para los expertos. Finalmente, se incluye la tarea 8 que corresponde al significado de Grupo en el contexto de la *Teoría de Matrices* en el cual hacían falta algunas preguntas.

Se presentan algunas de las sugerencias más relevantes de los expertos: cada una de estas fueron motivo de un análisis minucioso para determinar la validez y concreción de las mismas y su aplicabilidad respecto a los criterios definidos para su análisis (ver, anexo A.4.)

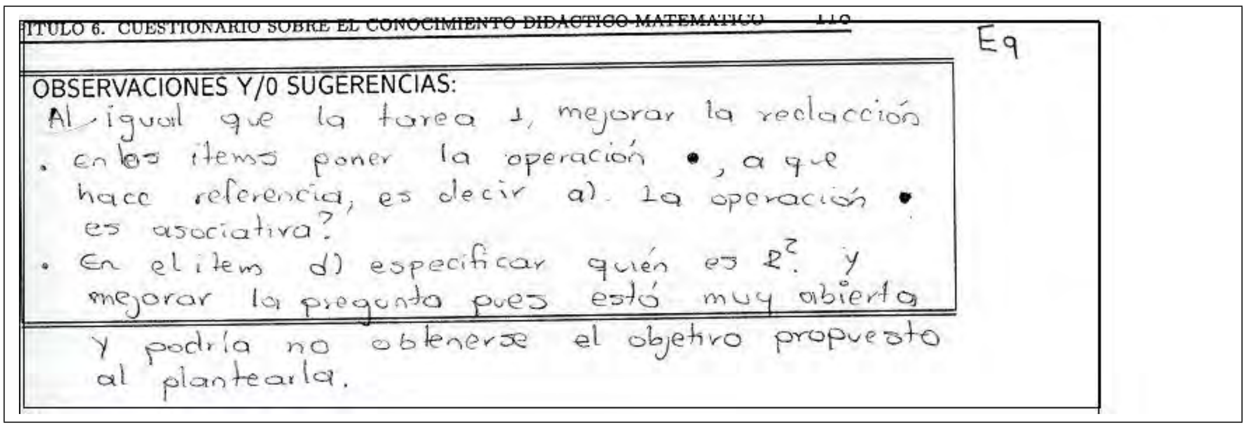
En esta dirección, luego de realizar los análisis y de cruzar la información respecto a los análisis presentados para la eliminación o cambio de tareas, se concluye que se cambia la pregunta 1; ya que la pregunta 2 en cuanto a los significados tiene un grado de relevancia alto de 4 y en cuanto al contexto de Grupo como grupo abstracto; además, corresponde al tema de operación binaria, con un grado de relevancia de 5; al tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos con un nivel de relevancia de 5 y al tema de subgrupo con un nivel de



CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Mejorar la redacción del enunciado. Podría ser: Sea $(\mathbb{Z}, *)$ el conjunto de los números enteros junto con la operación $*$ definida por:

Figura 8.4: Sugerencia de expertos a la tarea 1

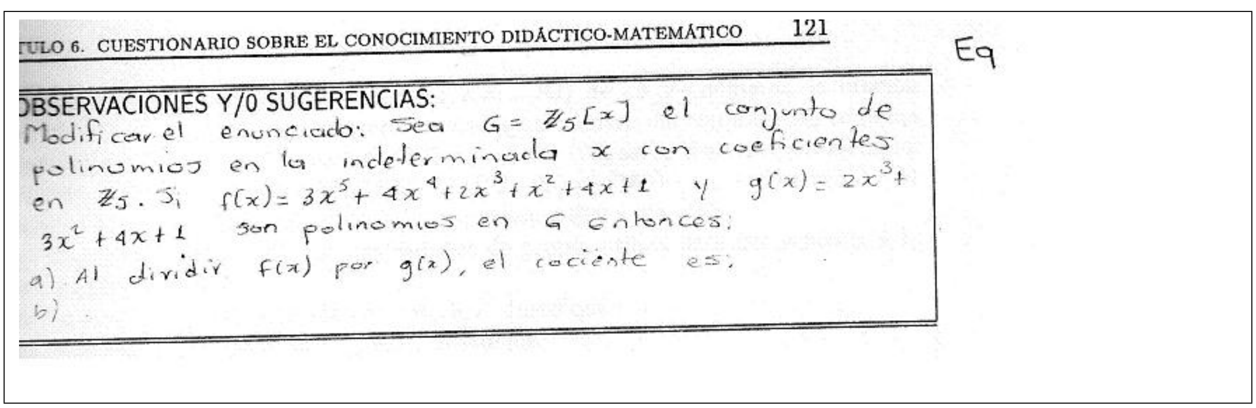


ITULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

Eq

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Al igual que la tarea 1, mejorar la redacción
- en los ítems poner la operación $*$, a que hace referencia, es decir a). La operación $*$ es asociativa?
- En el ítem d) especificar quién es $\mathbb{Z}^2$. y mejorar la pregunta pues está muy abierta y podría no obtenerse el objetivo propuesto al plantearla.

Figura 8.5: Sugerencia de expertos a la tarea 2

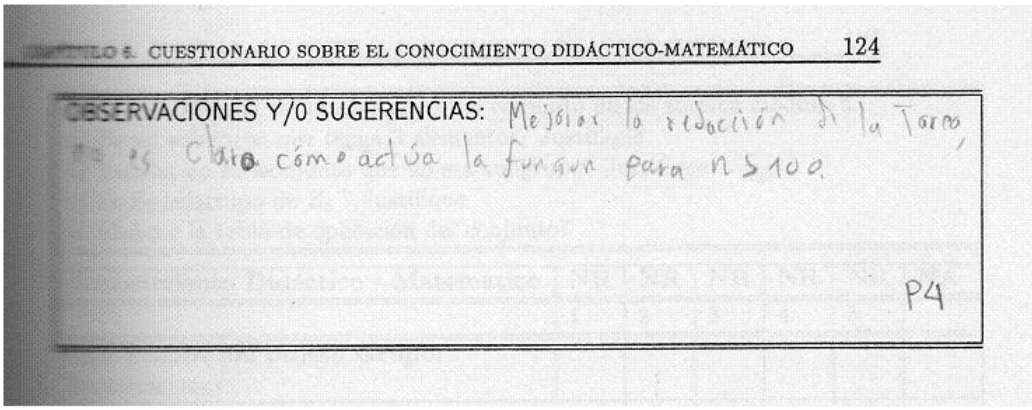


TULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 121

Eq

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Modificar el enunciado: Sea $G = \mathbb{Z}_5[x]$ el conjunto de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Si $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ y $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ son polinomios en G entonces:
a) Al dividir $f(x)$ por $g(x)$, el cociente es:
b)

Figura 8.6: Sugerencia de expertos a la tarea 3

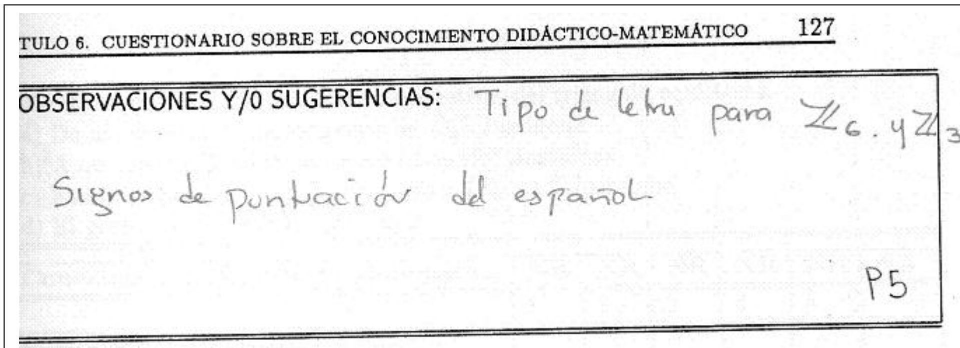


LO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 124

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Mejorar la redacción de la Tarea, no es claro cómo actúa la función para $n > 100$.

P4

Figura 8.7: Sugerencia de expertos a la tarea 4



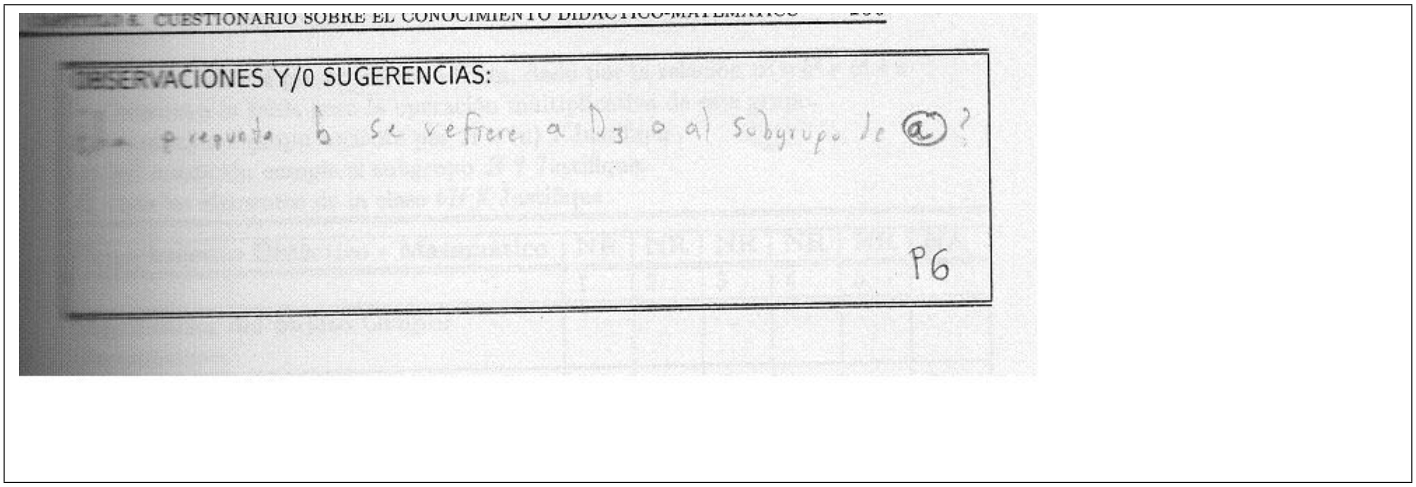
TULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 127

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Tipo de letra para $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_3$

Signos de puntuación del español

P5

Figura 8.8: Sugerencia de expertos a la tarea 5

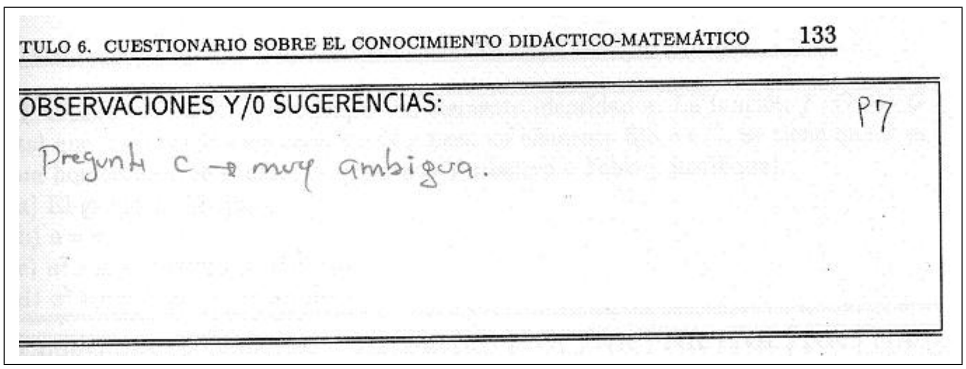

CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

pregunta b se refiere a D_3 o al subgrupo de a ?

P6

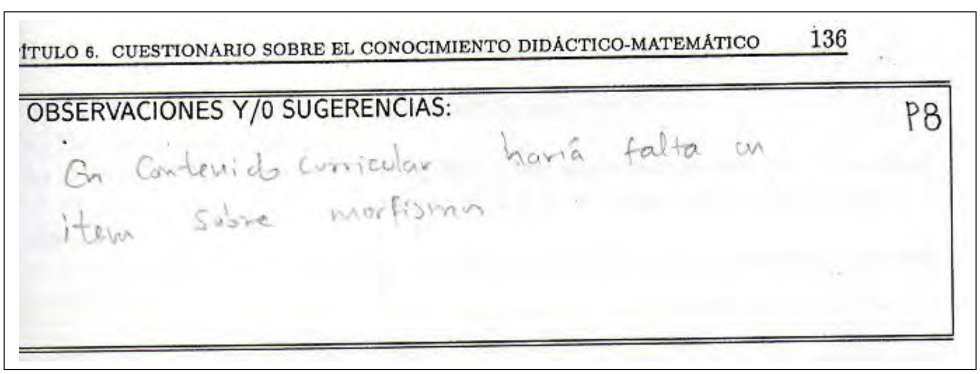
Figura 8.9: Sugerencia de expertos a la tarea 6


TULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 133

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P7

Pregunta c → muy ambigua.

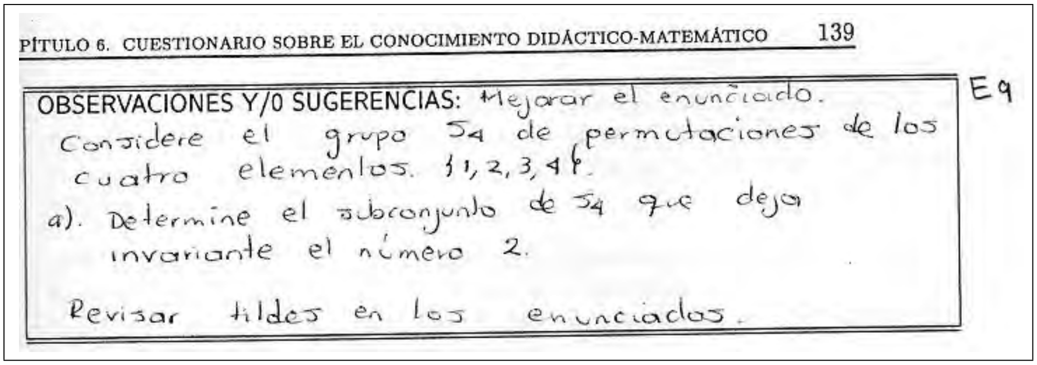
Figura 8.10: Sugerencia de expertos a la tarea 7


ÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 136

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P8

En Contenido curricular haría falta un item sobre morfismos

Figura 8.11: Sugerencia de expertos a la tarea 8



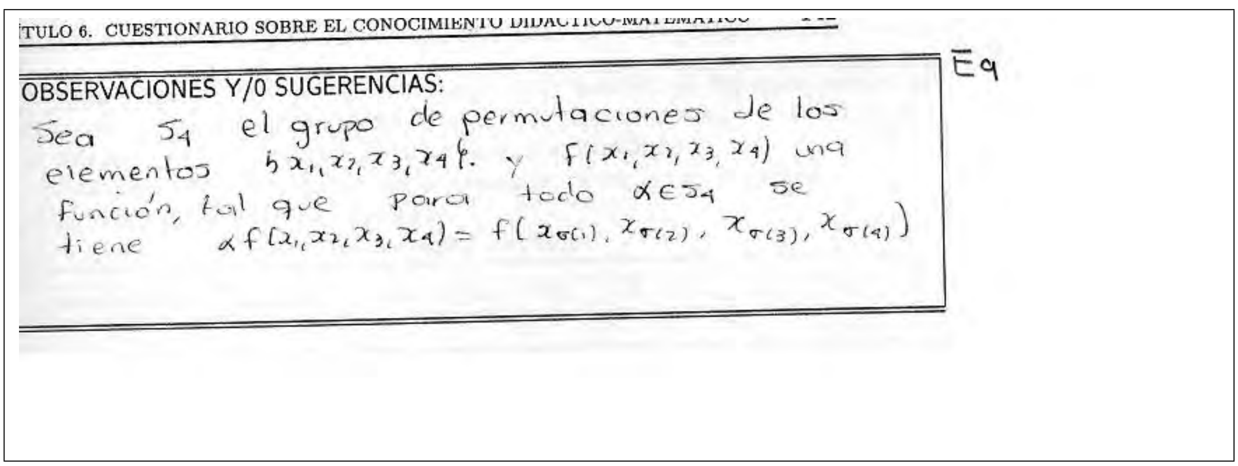
PÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 139

E9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Mejorar el enunciado.
Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1, 2, 3, 4\}$.
a). Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2.

Revisar tildes en los enunciados.

Figura 8.12: Sugerencia de expertos a la tarea 9

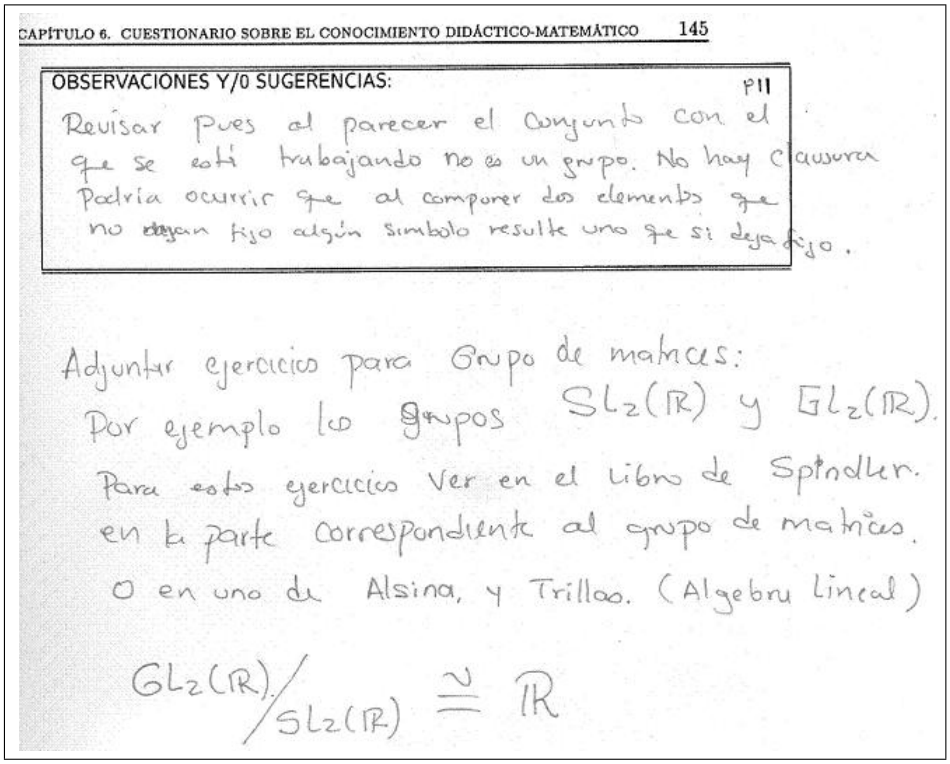


ÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO

E9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Sea S_4 el grupo de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. y $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función, tal que para todo $\alpha \in S_4$ se tiene $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$

Figura 8.13: Sugerencia de expertos a la tarea 10



CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 145

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P11

Revisar pues al parecer el conjunto con el que se está trabajando no es un grupo. No hay clausura. Podría ocurrir que al componer dos elementos que no dejan fijo algún símbolo resulte uno que sí deja fijo.

Adjuntar ejercicio para Grupo de matrices:
Por ejemplo los grupos $SL_2(\mathbb{R})$ y $GL_2(\mathbb{R})$.
Para estos ejercicios Ver en el Libro de Spindler.
en la parte correspondiente al grupo de matrices.
O en uno de Alsina, y Trillas. (Algebra Lineal)

$$GL_2(\mathbb{R}) / SL_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

Figura 8.14: Sugerencia de expertos a la tarea 11

relevancia de 4. La tarea 7 es la única tarea donde se trabaja el grupo cociente y la tarea 8 es la tarea que realmente correspondería al concepto de grupo como Grupo Abstracto; por tanto, se determina que la pregunta que se elimina o se cambia es la pregunta 1.

8.4. Prueba piloto del instrumento *CDM-Grupo*

El cuestionario piloto se aplicó a una muestra de 17 estudiantes de formación matemática: 11 de Licenciatura en Matemáticas y 6 de Matemáticas en la asignatura de Teoría de Anillos; estudiantes que ya han aprobado la asignatura Teoría de Grupos y continúan con esta otra asignatura. A estos estudiantes, se les solicitó responder el cuestionario con el objetivo de evaluar algunos de los conocimientos relacionados con Teoría de Grupos. La población se presenta en la tabla 8.8, de acuerdo al programa al cual pertenecen. El objetivo de la aplicación de la prueba piloto es valorar, por medio de un análisis cualitativo y cuantitativo, ciertos aspectos, tales como: adecuación del tiempo estimado (2 horas), claridad, comprensión de los enunciados e índice de dificultad de los subítems que componen cada ítem, además de incrementar y sustentar la validez y factibilidad del cuestionario definitivo (Cohen, Manion & Morrison, 2011).

Al iniciar la aplicación de la prueba piloto, se dieron y se leyeron las instrucciones claras y precisas sobre cómo responder el cuestionario y sobre cuál era el objetivo de dicha aplicación. Además, se les solicitó a los estudiantes que indicaran posibles dificultades en relación a la comprensión y redacción de los ítems. Por lo anterior, durante la aplicación del cuestionario, algunos de los estudiantes informaron que el tiempo de 2 horas era insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario: atendiendo a esta inquietud se valoran y analizan las primeras 7 preguntas y se hacen pequeñas modificaciones al cuestionario piloto.

Se presentan en el siguiente apartado, los resultados que se obtuvieron con la aplicación de la prueba piloto del cuestionario *CDM-Grupo* en los dos grupos de estudiantes de formación matemática: Licenciados en Matemáticas (G1) y Matemáticos (G2).

8.4.1. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de Licenciados en Matemáticas

La prueba piloto fue aplicada en el curso de Teoría de anillos, en la segunda semana de Junio del 2015. En esta asignatura se espera reforzar algunos de los conceptos de Teoría de Grupos al estudiar los anillos como estructuras matemáticas, en las cuales se definen dos operaciones para el conjunto dado $(A,+,.)$ de modo que el conjunto con la primera operación $(A,+)$ es un grupo abeliano y con la segunda operación un semigrupo (clausura y asociatividad de la operación). Atendiendo a las sugerencias de los expertos en Álgebra, se consideró que al final de esta asignatura era apropiado aplicar la prueba piloto; se esperaba que como en la asignatura de anillos se profundizan los conceptos y definiciones del objeto grupo, los estudiantes tuvieran estos conocimientos presentes (ver, anexo A.3.) para la solución de las tareas planteadas. La prueba tuvo una duración de dos horas y fue aplicada por el profesor de la asignatura de Teoría de Anillos.

Los resultados individuales en la prueba piloto se presentan en las tablas 8.9 a 8.14 para el grupo de Licenciados en Matemáticas y las tablas 8.15 a 8.19 para los estudiantes de Matemáticas. Para la valoración de la prueba se tuvo presente que como la mayoría de los estudiantes solo contestaron hasta la pregunta 7 -por cuestiones de tiempo- la nota definitiva entonces, para este análisis se tomó sobre 70 puntos, al analizar las 7 primeras preguntas; se hizo la equivalencia de 70 a 50 y en cada caso se presenta la respectiva conversión para asignar una valoración definitiva a la prueba que tome valores entre 0 y 50 puntos que es lo habitual en este contexto universitario: además, como cada tarea constaba de cuatro subítems, a cada uno se le asignó una valoración de 2.5 puntos para la suma total y luego se aplicó la conversión respectiva.

La prueba piloto, se aplicó a muestras pequeñas, ya que los cursos contaban de ese número de estudiantes: 11 Licenciados en Matemáticas (L) y 6 Matemáticos (M) y para su análisis primero, se presentan los datos en forma detallada y luego, se agrupan para obtener información. Para el análisis cuantitativo se considera la variable "grado de corrección de las respuestas del ítem" (ver, capítulo 5) donde se asignan los valores de 0 si la respuesta es incorrecta; 2.5 si la respuesta es correcta y entre 0 y 2.5 si la respuesta se encuentra parcialmente correcta. Los criterios de corrección para la consideración de una respuesta incorrecta, parcialmente incorrecta o correcta se encuentran en la solución dada para cada una de las tareas. En consecuencia, de acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas al ítem, el puntaje máximo y mínimo a obtener en el cuestionario correspondía a 50 y 0 puntos respectivamente.

Para determinar el índice de dificultad de la tarea (ítem), se divide el número de personas que contestan correctamente el ítem, entre el total de personas. La escala de clasificación para la dificultad de los ítems se tomó de la literatura especializada (Muñiz, 1994) y según los índices de dificultad, establecidos en la literatura se recomendaban los siguientes porcentajes:

5 por ciento de ítems fáciles.
20 por ciento para ítems medianamente fáciles.
50 por ciento, para ítems de dificultad media.

20 por ciento, para ítems medianamente difíciles.
5 por ciento, para ítems difíciles.

Según la escala anterior se establecen los siguientes intervalos de clasificación que se pueden traducir en porcentajes o en forma decimal, para el índices de dificultad del ítem:

dificultad de 0: ítem de alto grado de dificultad (valor extremo).
$\leq 0{,}05$ ítem difícil.
$(0{,}05 - 0{,}25]$ ítem medianamente difícil.
$(0{,}25 - 0{,}75]$ ítem de dificultad media.
$(0{,}75 - 0{,}95]$ ítem medianamente fácil.
$> 0{,}95$ ítem fácil.
1 ítem de un grado máximo de facilidad.

De igual forma, se establecen los siguientes niveles de dominio del conocimiento, según la escala del índice de dificultad de la pregunta:

Dificultad $\leq 0{,}25$: bajo nivel de dominio.
Dificultad entre $(0{,}25, 0{,}75)$: nivel de dominio medio.
Dificultad $\geq 0{,}75$: alto nivel de dominio.

Se consideró necesario incluir en el instrumento ítems de todos los grados de dificultad; para obtener, un nivel de dificultad balanceado y en especial, se consideró pertinente que el nivel de dificultad del ítem correspondiera a un nivel de dominio medio, como se establece en la literatura especializada.

Tabla 8.8: Prueba piloto

Programas de formación matemática	Número de Estudiantes
Licenciatura en Matemáticas	11
Matemáticas	6

A continuación, se presentan los resultados de la prueba piloto y su análisis para los Licenciados en Matemáticas.

Tabla 8.9: Resultados de la prueba piloto - Licenciados en Matemáticas

Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM–Grupo																					
L1																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	0	a	2	a	0	a	0	a	2.5	a	1.5	a	0	a	2.0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.0	b	1.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.0	c	2.0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	2	d	0	d	2.5	d	2.0	d	0	d	0	d	0
	10		10		0		2		2		0		9		7		0		2		0
N	=	**42**																		=	**30**
L2																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		2.5		5		0		0		0		0		0		0
N	=	**10**																		=	**0.7**
L3																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		5		5		2.5		2.5		0		2.5		0		0		0		0
N	=	**27.5**																		=	**20**
L4																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		0		7.5		0		0		0		0		0		0
N	=	**10**																		=	**0.7**
L5																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	5		5		0		2.5		2.5		0		0		0		0		0		0
N	=	**15**																		=	**11**

Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM−Grupo																					
L6																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	¡
	10		5		2.5		2.5		2.5		0		2.5		5		0		0		0
N	=	**30**																		=	**21**
L7																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	5		10		5		2.5		0		0		5			0	0		0		0
N	=	**27.5**																		=	**20**
L8																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
N	=	**2.5**																		=	**0.2**
L9																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	7.5		5		0		2.5		5		5		2.5		0		0		0		0
N	=	**27.5**																		=	**20**
L10																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		7.5		3		0		2.5		0		0		0		0		0		0
N	=	**15.5**																		=	**11**

Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM−Grupo																					
L11																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	7.5		5		7.5		5		0		2.5		0		0		0		0		0
N	=	**27.5**																		=	**20**

Tabla 8.10: Resultados en la prueba piloto de los Licenciados en Matemáticas

Estudiante	Valoración
LM1	30
LM2	0.7
LM3	20
LM4	0.7
LM5	11
LM6	21
LM7	20
LM8	0.2
LM9	20
LM10	11
LM11	20

Tabla 8.11: Distribución de frecuencias de la puntuación total en el grupo de Licenciados en Matemáticas

Intervalos de puntuación	**Frecuencia absoluta**	**Porcentaje**
0-5	1	9.1
5-10	2	18.2
10-15	2	18.2
15-20	0	0
20-25	5	45.4
25-30	1	9.1
30-35	0	0
35-40	0	0
40-45	0	0
45-50	0	0

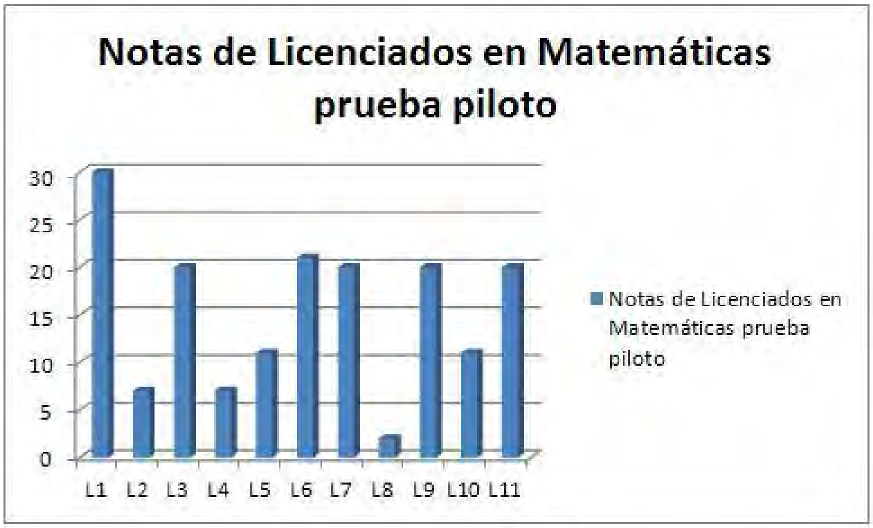


Figura 8.15: Resultados de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Según la tabla 8.11 de frecuencias, se observa que el 45.5 por ciento *de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas* obtiene una puntuación menor a 20 puntos (sobre 50) en la prueba piloto, lo que puede mostrar *cierto grado de dificultad* (ver, figura 8.15) para los estudiantes. Se presenta en la tabla 8.12 y 8.13 algunos estadísticos que permiten hacer inferencias sobre las valoraciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

Tabla 8.12: Distribución de frecuencias de la puntuación total de los Licenciados en Matemáticas

	Estadístico
Mínimo	2
Máximo	30
Rango	28
Media	15.36
Mediana	20
Desviación estándar	8.29

De la tabla 8.12 se observa que ninguno de los estudiantes obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 15.36 puntos, es decir, que el porcentaje de logro corresponde a un 9 por ciento, lo que evidenciaría que el instrumento presenta cierto grado de dificultad para los estudiantes. En la tabla 8.13 se presenta los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 8.16 se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en la prueba piloto.

Tabla 8.13: Puntuación total en la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

	Valores	**Ancho**
Mínimo	2	2
Quartil1	9	7
Quartil2-Mediana	20	11
Quartil3	20	0
Máximo	30	10

Se presenta a continuación, en la figura 8.16 el diagrama de caja realizado partir de la tabla 8.13 con el fin de complementar el análisis de la prueba piloto aplicada a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

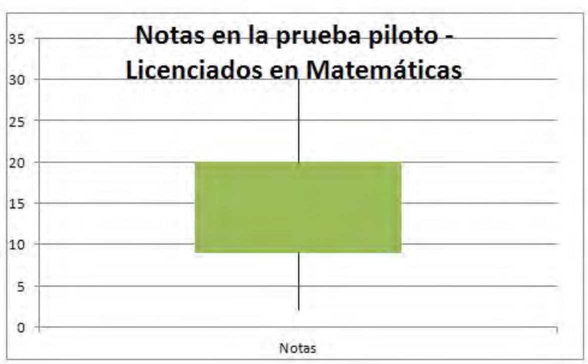


Figura 8.16: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

En la figura 8.16 y en la tabla 8.13 se observa que la mediana corresponde a la nota de 20 puntos y que el 50 por ciento de las notas, se encuentran en el intervalo (9,20); el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 11 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

8.4.1.1 Análisis de la fiabilidad del cuestionario - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Con el cuestionario piloto y utilizando las respuestas dadas por los estudiantes de Licenciatura en Matemática a los siete ítems que lo conforman, se realiza un análisis según las respuestas, ya que, ellas son observables y medibles. Así, con base en los conocimientos puestos en juego en las soluciones a las situaciones problemáticas planteadas, fue posible inferir algunos aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre el objeto de investigación que no se pueden observar en forma directa pero sí se analizan de las prácticas de los estudiantes y según la construcción de los subítems para cada categoría del CDM. Por tal razón, es necesario que el cuestionario sea un instrumento fiable que permita realizar inferencias útiles sobre lo que se busca medir. Por lo anterior, se analiza la fiabilidad, entendida como la estabilidad en las puntuaciones que el cuestionario proporciona si este fuera administrado en repetidas ocasiones al mismo grupo de estudiantes (Vásquez, 2014). Para esto se utiliza el "coeficiente alfa de Cronbach" ya que, el representa una forma de acercarse a la fiabilidad. Más que la estabilidad de las medidas, el coeficiente alfa de Cronbach refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test y por tanto, es un indicador de la consistencia interna del test (Muñiz, 1994).

El Coeficiente Alfa de Cronbach, requiere de una sola administración del instrumento de medición; por tanto, se aplica a la prueba piloto: el coeficiente produce valores que oscilan entre O y 1: se trata de un índice de consistencia interna, que sirve para comprobar si el instrumento que se está evaluando recopila información defectuosa y por tanto, puede llevar a conclusiones equivocadas o si por el contrario se tiene un instrumento fiable que hace mediciones estables y consistentes. El alfa, mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parezcan. Cuanto más se acerque al valor de uno (1) mejor es la fiabilidad y la ventaja radica en que simplemente se aplica a la medición y se calcula directamente.

El valor obtenido en el cuestionario para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas es aproximadamente $\alpha = 0{,}6$. Este valor sugiere una correlación no tan fuerte; sin embargo, si se interpreta como un índice de fiabilidad el valor no es excesivamente elevado, pero si se puede considerar como suficiente para el caso; ya que el cuestionario no es homogéneo en tanto que incluye gran variedad de aspectos y contenidos a evaluar. En este aspecto, se puede eliminar ítems en sentido de mala discriminación lo que aumenta el valor del $\alpha = 0{,}6$.

8.4.1.2 Análisis del índice de dificultad del cuestionario

El índice de dificultad, valora precisamente la dificultad que conlleva la resolución de la situación problemática planteada y se define como la razón entre el "número de aciertos/número de respuestas" (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad toma valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de *máxima facilidad*, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

Para el cálculo del índice de dificultad se clasificaron las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideran; así se puede analizar qué situaciones problemáticas resultan más "fáciles" o más "difíciles" para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Se toma el índice de dificultad respecto a las 7 primeras preguntas, ya que, en los dos grupos según, los informes de los profesores que aplicaron la prueba; solo se alcanzó a trabajar en estas preguntas. Se presenta en la tabla 8.14 el índice de dificultad de la pregunta y el índice promedio de dificultad del ítem para los Licenciados en Matemáticas.

Tabla 8.14: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

Índice de dificultad del cuestionario para los Licenciados en Matemáticas								
	R-Correctas		**R-Incorrectas**		**R-Parcial-mente-C**			
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	55	5	45	0	0	0.55	55
b)	6	55	5	45	0	0	0.55	55
c)	4	36	7	64	0	0	0.36	36
d)	10	90	1	10	0	0	0.90	90
	Media	**0.59**						
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	8	73	3	27	0	0	0.73	73
b)	8	73	3	27	0	0	0.73	73
c)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
d)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
	Media	**0.50**						
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	5	45	6	55	0	0	0.45	45
b)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
c)	0	0	11	100	0	0	0	0
d)	1	10	9	80	1	10	0.18	18
	Media	**0.22**						

Índice de dificultad del cuestionario para los Licenciados en Matemáticas								
	R-Correctas		**R-Incorrectas**		**R-Parcial-mente-C**			
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	54	4	36	1	10	0.64	64
b)	0	0	11	100	0	0	0	0
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
	Media	**0.21**						
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
b)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
c)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
d)	6	54	4	36	1	10	0.64	64
	Media	**0.30**						
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	0	0	11	100	0	0	0	0
b)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
	Media	**0.10**						
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	4	36	7	64	0	0	0.36	36
b)	1	9	9	82	0	0	0.18	18
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	2	18	8	82	0	0	0.18	18
	Media	**0.18**						
	Media General	**0.30**						

En la figura 8.15, se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto según su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. De los 7 ítems explorados, 3 (43 por ciento) presentan una dificultad media con valores entre 0.41 - 0.60; en este punto según la literatura consultada (Muñiz, 1994), se esperaría que el 50 por ciento de los ítems de un cuestionario presenten un índice de dificultad media; mientras que 4 ítems, (57 por ciento) se clasificaron con un índice de dificultad medianamente difícil y según la literatura se esperaría que fueran el 20 por ciento de los ítems. De otra parte, no se encuentran ítems medianamente fáciles, ni ítems fáciles según la escala de clasificación tomada para los índices de dificultad y tampoco hay ítems difíciles. Pero como se tienen dos grupos de estudiantes de formación matemática, estos resultados se comparan. Las escalas para la clasificación de los índices de dificultad pueden variar según los resultados que espera el investigador que valida el cuestionario. En este caso se podrían omitir la pregunta 3, 4 o 6 para reducir el índice de dificultad del instrumento (preguntas difíciles).

En la tabla 8.14 y en la figura 8.17 y 8.18 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general presenta un nivel de dificultad que

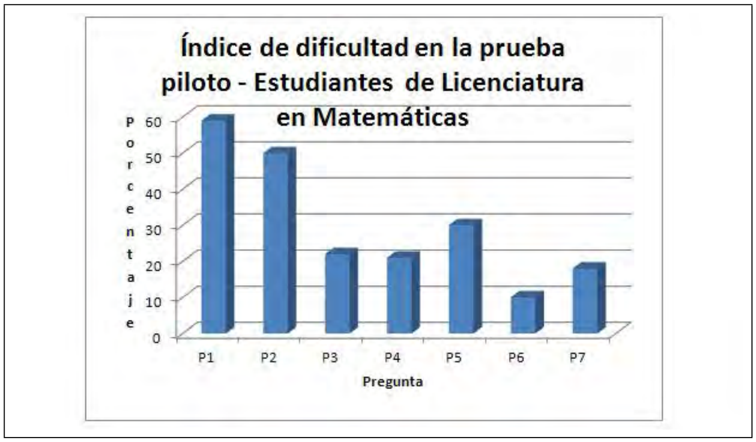


Figura 8.17: Dificultad de los ítems en la prueba piloto - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

oscila entre el *10 por ciento y el 59 por ciento*; esto corresponde a preguntas medianamente difíciles, es decir, con una dificultad media; cuando los valores se acercan al 0, significa un mayor índice de dificultad, igualmente, cuando se acercan a 1, indican mayor grado de facilidad. Se observa que, en general el cuestionario presenta una dificultad media tendiente a medianamente difícil con un porcentaje del 30 por ciento, por lo que se concluye que en cierta forma no debería representar mayores dificultades para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, ya que, este es el índice que se espera para un instrumento de evaluación (ver, anexos A.4.) lo que evidencia realmente que el instrumente presenta dificultad para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

A continuación, se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

Pregunta 1

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 8.14. donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas se observa que el 55 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(\mathbb{Z}, *)$; donde $a * b := a + b - 4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes es *muy fácil* elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (90 por ciento) pero para los Licenciados en matemáticas es "medianamente difícil" identificar el inverso del elemento 3 con la operación definida en los enteros (0.36); según el rango considerado, este porcentaje se sitúa en un *nivel de dificultad media (0.31-0.4)*. Se ha decidido cambiar la

Dificultades - Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes, no determinan cuál es el elemento identidad en los enteros con la operación $*$ donde $a*b=a+b-4$ (el 45 por ciento); de igual forma, no comprenden cómo determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido la nueva operación (7 estudiantes (64) por ciento) y no comprenden la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de la operación en un subconjunto de los enteros (el 10 por ciento de los licenciados).
Para el primer subítem de la pregunta 2 del cuestionario piloto, los estudiantes no determinan si la operación $\bullet$ en los reales, tal que $a\bullet b=3a+4b$, cumple la propiedad de clausura (el 27 por ciento) y en el siguiente subítem, no comprenden que no se cumple la propiedad asociativa para esta operación (3 estudiantes (27) por ciento). De igual forma, los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de los elementos inversos en este conjunto de los números reales con la operación definida (el 73 por ciento).
En la pregunta 3 del cuestionario piloto, los estudiantes no realizan la división de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y por tanto, no determinan en forma correcta el cociente (el 55 por ciento); de igual forma, no determinan el residuo de la división (el 73 por ciento); no identifican el grupo donde se trabaja la división de polinomios (el 100 por ciento) y no identifican las propiedades que se utilizan para dar solución a la tarea 3, es decir, para realizar la división de polinomios (el 80 por ciento).

Figura 8.18: Preguntas e índice de dificultad de la prueba piloto - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe incluir un ítem relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, se infiere que el 45 por ciento de los estudiantes no pueden determinar cuál es el elemento identidad en los enteros con la operación $*$; 7 estudiantes (64) por ciento no comprenden como determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 10 por ciento de los licenciados no comprende la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

En relación con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (59 por ciento en promedio) que los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio,* respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en lo relacionado con los contenidos curriculares: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.*

Se presenta el análisis a la respuesta del Licenciado en Matemática (L1) en la pregunta (figura 8.19).

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas, tiene todas las respuestas correctas en la pregunta 1 (ver, tabla 8.9), lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10; pero el índice de dificultad de la pregunta 1 en el grupo de Licenciados es del 59 por ciento, lo que evidencia un grado de *dificultad media* en la comprensión de la pregunta (100 por ciento) por parte del grupo.

Pregunta 2

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 8.14 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 73 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la nueva operación $a \bullet b := 3a + 4b$; de igual forma, los estudiantes verifican la propiedad asociativa; pero, para los estudiantes es "difícil" identificar el inverso del elemento 2, con ésta operación (0.27 de respuestas correctas) por lo que no pueden comprobar la no existencia del elemento identidad y por tanto, que no hay inversos para los elementos. *La pregunta en general, presenta un nivel de dificultad media del (50 por ciento).* En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción como concretar el subítem 2d); ya que, son deseables las preguntas de índice de dificultad media (el 50 por ciento de las preguntas deberían tener un nivel de dificultad media).

Tarea 1:

a) No pide que demuestre que es grupo, por tanto, solamente voy a buscar el elemento identidad a través de la definición: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! \odot \in \mathbb{Z} / a*\odot = \odot * a = a$. Donde $\odot$ es la identidad. $a*\odot = a+\odot-4 = a \rightarrow \odot = 4$

Es decir, que la identidad es el elemento 4.

b) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$: $a*(b*c) = (a*b)*c$.

$a*(b*c) \stackrel{?}{=} (a*b)*c$.

$a*(b+c-4) = a+b+c-4-4$ y como los enteros con la suma cumple la asociativa y la conmutativa se tiene que

$= (a+b)+(c-4)-4 = a+b-4+c-4 = (a*b)+c-4$
$= (a*b)*c$

Por tanto si cumple la asociativa.

c) De igual forma, como no me pide que pruebe si es grupo, voy a asumir la existencia de inversos y aplicar la definición:

Sea $3 \in \mathbb{Z}$, $\exists!\, a \in \mathbb{Z} /\ 3*a = a*3 = 4$.

$a*3 = a+3-4 = 4 \longrightarrow a = 5$ El inverso de 3 es 5

d)

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

Figura 8.19: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante L1

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas: para el primer subítem, el 27 por ciento de los estudiantes no determinan si la operación $\bullet$ en los reales cumple la propiedad de clausura y para el siguiente subítem, 3 estudiantes (27) por ciento no comprenden la propiedad asociativa de ésta operación. De igual forma, el 73 por ciento de los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de los elementos inversos en este conjunto de los números reales.

En relación al conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, se observa que el índice de dificultad de la pregunta es del 50 (por ciento) por lo que los estudiantes de Licenciatura pueden resolver la tarea, identificar la no existencia del elemento identidad con un nivel de dificultad media; así, los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio* respecto al conocimiento común del contenido, al conocimiento ampliado del contenido y respecto al conocimiento especializado (2d); como la pregunta presenta un índice de dificultad media (27 por ciento) se observa en general, que los estudiantes tienen, un nivel de dominio medio, respecto a este conocimiento especializado y por tanto medianamente generalizan la propiedad al conjunto $\mathbb{R}^2$ lo que equivale a decir, que para los licenciados la tarea presenta una dificultad media; que es lo que se espera de las tareas propuestas.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 2:

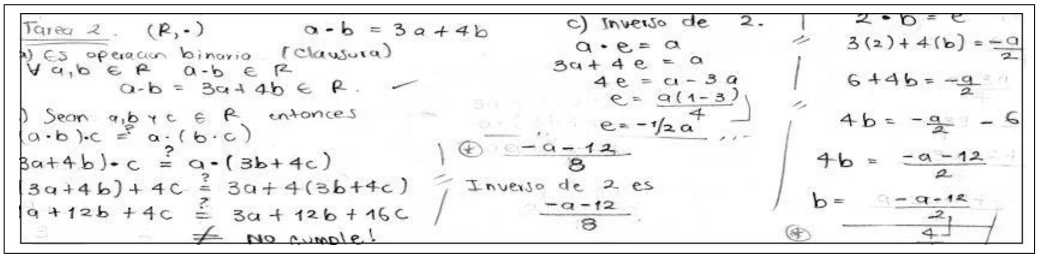


Figura 8.20: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante L11

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas las respuestas 2a) y 2b) (ver, figura 8.9) es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida y la propiedad asociativa para la operación dada en los reales; pero no puede identificar que el elemento identidad no existe y por tanto, que los elementos inversos no existen y no puede definir una operación similar en el conjunto $\mathbb{R}^2$, por tanto, la valoración de la pregunta es 5 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Pero, como el índice de dificultad de la pregunta corresponde al 50 por ciento, se evidencia que en general, la pregunta presenta una dificultad media para los estudiantes de Licenciatura (índice de dificultad en el intervalo (0.25, 0.75).

Pregunta 3

En la pregunta 3 y según la tabla 8.14 de frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 45 por ciento de los estudiantes pudieron resolver correctamente la situación problemática planteada al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y determinar su cociente y el (0.27) por ciento de los estudiantes pueden determinar el residuo de esta división de polinomios. Para los Licenciados en general es "difícil" identificar el grupo $\mathbb{Z}_5[x]$ donde se trabajan los polinomios; ya que, ningún Licenciado lo pudo identificar y el 10 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que se aplican para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente difícil (22 por ciento),* para los Licenciados. Con base en lo anterior, se conserva la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente las preguntas de dificultad media.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas, se tiene que el 55 por ciento de los estudiantes no realizó la división de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y por tanto, no determinaron en forma correcta el cociente; el 73 por ciento no determina el residuo de la división; el 100 por ciento de los estudiantes no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y el 80 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

Respecto, al conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dificultad media del 36 por ciento ((a) y (b)) esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad que corresponde al 22 (por ciento) que los estudiantes de Licenciatura no resuelven la tarea y no generalizan las operaciones del conjunto $\mathbb{Z}_5$ siendo *medianamente difícil* para ellos el trabajo en este grupo; esto es, los estudiantes tienen un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad corresponde al 18 por ciento, por lo que resulta medianamente difícil para los estudiantes reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $\mathbb{Z}_5$ y generalizarlas al conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$, esto corresponde a un *nivel de dominio bajo* del conocimiento especializado (índice de dificultad ≤ 0,25).

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 3:

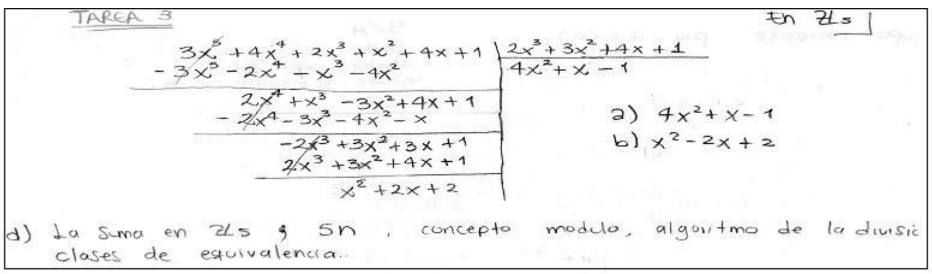


Figura 8.21: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante L11

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta las respuestas 3a) 3b) y 3d) (ver, tabla 8.9), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5; pero no puede identificar el grupo de trabajo, es decir, el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$; pero identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta. La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio en toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 50 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media para los otros estudiantes de Licenciatura, que es la dificultad que se espera de un ítem (índice de dificultad entre (0.25,0.75)).

Pregunta 4

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 8.14 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 54 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en el conjunto definido que es nuevo para los estudiantes, este es el conjunto $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números; ningún estudiante identifica el elemento identidad en el conjunto; el 10 por ciento (1 estudiante) identifica el isomorfismo del conjunto con el grupo $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ y el 10 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 21* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta es "medianamente difícil" para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems en su mayoría de dificultad media.

Respecto a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 36 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 100 por ciento de los estudiantes (11) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 90 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y no identifica la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

En relación con el conocimiento común del contenido de los estudiantes, se presenta un bajo nivel de dominio (del 21 por ciento); es decir, es medianamente difícil para los estudiantes, realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto al conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes, se observa nuevamente que el índice de dificultad es del 22 (por ciento) y por tanto, los estudiantes de Licenciatura no relacionan el nuevo conjunto con el conjunto conocido $\mathbb{Z}_{99}$, esto corresponde a un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado, como el índice de dificultad es del 21 por ciento, resulta medianamente difícil para los estudiantes generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2, \bigoplus)$ y así, según la clasificación establecida, los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado (nivel de dificultad $\leq 0{,}25$.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L9) a la pregunta 4 fue la siguiente:

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2, \bigoplus)$; identifica el conjunto de los números que son divisibles por 3, pero su justificación no es clara y no identifica el elemento identidad en el nuevo conjunto; de igual forma, no identifica un conjunto isomorfo al grupo dado. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50 y al analizar el índice

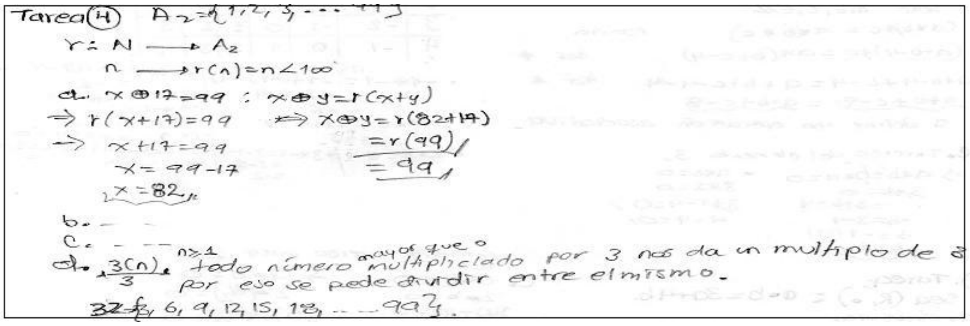


Figura 8.22: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante L9

de dificultad de la pregunta que corresponde al 21 por ciento, se evidencia que la pregunta es *medianamente difícil* para los estudiantes de Licenciatura.

Pregunta 5

En relación con ésta pregunta y según la tabla 8.14 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 18 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada al dar un subgrupo de 3 elementos en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; de igual forma, el 18 por ciento de los estudiantes determina un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 18 por ciento de los estudiantes, es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$. *La pregunta presenta un nivel de dificultad media del 30* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente con un nivel de dificultad media.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta: el 82 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$, de igual forma, no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente si $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; pero, solo el 36 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes, se observa que tienen un nivel de dominio medio con un nivel de dificultad media del 30 por ciento en la pregunta en cuanto a la realización de tareas comunes en este grupo; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad de la pregunta es del 18 por ciento: se observa que para los estudiantes no es clara la propiedad de ser subgrupo para aplicarla en un caso específico, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto resultando la pregunta medianamente difícil para los estudiantes de Licenciatura; esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad que presenta la pregunta es del 41 por ciento: se evidencia que existe una dificultad media en cuanto al trabajo en el grupo $\mathbb{Z}_6$ y esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento especializado.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L4) a la pregunta 5:

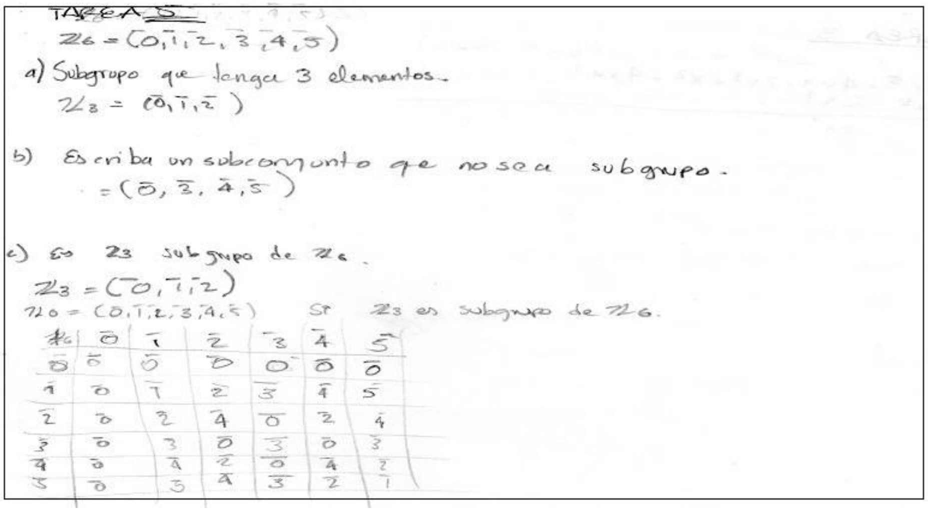


Figura 8.23: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante L4

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; escribe un subconjunto que no es subgrupo e identifica claramente que $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; pero diferente a los otros estudiantes, no elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 7 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 30 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media, esto indicaría que la pregunta no presenta mayores dificultades para los estudiantes de licenciatura o que los estudiantes tienen un dominio medio en cuanto a la comprensión de la propiedad de ser subgrupo y en cuanto al trabajo con los grupos $\mathbb{Z}_n$.

Preguntа 6

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 8.14 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 10 por ciento de los estudiantes (1) identifica que el grupo D_3 es isomorfo al grupo S_3: la pregunta en este caso, resultó ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 10 por ciento de los estudiantes (1) identifica que el grupo D_3 y en general, los grupos D_n de simetrías de polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 10* por ciento por lo que se puede decir, que los estudiantes no logran reconocer los conceptos y/o propiedades relacionadas con el grupo D_3; esto es, la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 100 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3, \circ)$; de igual forma, el 90 por ciento no pueden determinar un subconjunto isomorfo al subgrupo que se pide y el 90 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3, \circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Para el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, no es claro que en general los grupos $(D_n, \circ)$ no cumplen la propiedad de ser grupo cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)): como el nivel de dificultad corresponde al 0, esto significa que los estudiantes no logran reconocer los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ siendo la pregunta muy "difícil" para los estudiantes: esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento común del contenido. En cuanto al conocimiento ampliado, como el índice de dificultad es del 13 por ciento, esto indica que para los estudiantes no es claro cuales son los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ esto corresponde a una pregunta, medianamente difícil para el estudiante con un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado; no es claro, el teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular ni la propiedad de ser un grupo cíclico y en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 13 por ciento se evidencia que los estudiantes no tienen un conocimiento claro del grupo $(D_3, \circ)$ y por tanto, de sus propiedades, lo que corresponde a bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 6:

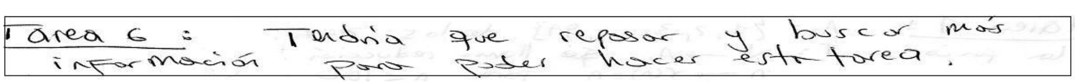

Tarea 6: Tendría que repasar y buscar más información para poder hacer esta tarea.

Figura 8.24: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante L1

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas es el único que da una respuesta, en la cual afirma que tiene que repasar el estudio de este grupo particular $(D_3, \circ)$. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 30 puntos sobre 50, siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 10 por ciento, se evidencia que los estudiantes no reconocen conceptos y/o propiedades del grupo $(D_3, \circ)$; este índice de dificultad indica que la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes, pero se tiene presente que se relaciona con el conocimiento de un grupo particular; lo que indica un bajo nivel de dominio respecto al conocimiento de los grupos $(D_n, \circ)$.

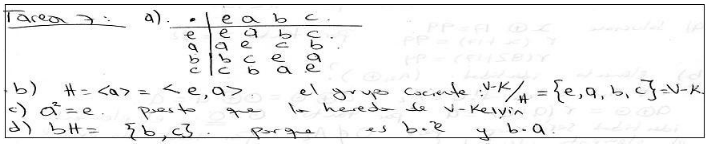
Pregunta 7

En relación con la pregunta 7 y según la tabla 8.14 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 36 por ciento de los estudiantes (4) construye la tabla de operación del grupo V_4 o el grupo $k-4$ de Klein; el 9 por ciento, realiza el grupo cociente determinando el subgrupo $H = \langle a \rangle$; el 10 por ciento reconoce la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 18 por ciento de los estudiantes determina los elementos de la clase bH. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 18* por ciento por lo que se puede decir, que resulta medianamente difícil para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 64 por ciento de los estudiantes no reconocen la tabla de operación del grupo V_4; de igual forma, el 82 por ciento no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$; el 90 por ciento no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal, para determinar el grupo cociente y el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura no reconocen una clase lateral izquierda.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)), la pregunta presenta un nivel de dificultad del 36 por ciento, es decir, que existe una difícil media para los estudiantes, esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad del 16 por ciento, se evidencia que el estudiante no construye el grupo cociente; de igual forma, en cuanto al conocimiento especializado, no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y de igual forma, no construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico, esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.
La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 7.

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas reconoce el grupo V_4 de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda bH; da una propiedad del grupo, pero no es la propiedad del subgrupo para construir el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 30 puntos sobre 50 siendo la


Tarea 7: a).

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $H = \langle a \rangle = \langle e, a \rangle$. el grupo cociente: $V\text{-}K/_H = \{e, a, b, c\} = V\text{-}K$.
c) $a^2 = e$. puesto que la hereda de V-Kelvin
d) $bH = \{b, c\}$. porque es $b \cdot e$ y $b \cdot a$.

Figura 8.25: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante L1

mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 18 por ciento, se evidencia que los estudiantes de licenciatura no reconocen el concepto de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta en general es elevado: del 18 por ciento, es decir, la pregunta resulta medianamente difícil para los Licenciados, lo que corresponde a un nivel de dominio bajo en cuanto al conocimiento del grupo V_4 de Klein.

Finalmente, como conclusión al análisis del índice de dificultad en la prueba piloto para el grupo de estudiantes de licenciatura, se observa que en general, el cuestionario presenta una *dificultad media* (0.30) para los estudiantes, como se muestra en la tabla 8.14 siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 1c), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c) y 7d). Del índice de dificultad de las preguntas del cuestionario piloto para los estudiantes de Licenciatura en matemáticas, se concluye que la pregunta 6 es la que presenta mayor índice de dificultad: del 10 por ciento, la pregunta 4 y 7 tienen un índice de dificultad del 21 por ciento, la pregunta 3 un índice de dificultad del 23 por ciento y la pregunta 5 un índice de dificultad del 30 por ciento y las preguntas 1 y 2 un índice de 59 y 50 por ciento respectivamente. De las 7 preguntas analizadas solo la pregunta 6 resulta medianamente *difícil* y en general, ninguna pregunta presenta un *grado máximo de facilidad*. Se tiene en cuenta que se desearía para un instrumento un índice de dificultad media y que los índices de dificultad no se encuentren en los extremos de la escala; así, se de la figura 8.17 se evidencia que las preguntas P1 y P2 presentan un índice de dificultad media (25-75 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y las otras cinco preguntas resultaron ser medianamente difíciles para los Licenciados (≤ 25 por ciento).

La pregunta con mayor índice de dificultad para los Licenciados en Matemáticas es la pregunta 6.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) ¿De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique
b) ¿A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

A continuación, se presenta el análisis cuantitativo de la prueba piloto para el segundo grupo de estudiantes de formación matemática.

8.4.2. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de Matemáticos

En primer lugar, se presentan en la tabla 8.15, las puntuaciones en la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas; luego, se agrupan los datos para inferir conclusiones respecto a ellos y finalmente, se analiza en la tabla 8.20, el índice de dificultad de la prueba para este segundo grupo de estudiantes.

Tabla 8.15: Resultados de la prueba piloto - Matemáticos

Resultados de la prueba piloto - Matemáticos																					
M1																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	1.0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		7.5		7.5		2.5		8.5		0		10		5		0		0		0
N	=	**51**																		=	**36**
M2																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	2.0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		0		10		10		4.5		0		0		0		0
N	=	**54.5**																		=	**39**
M3																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.5	d	0	d	2.0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0
	7.5		10		7.5		6.5		10		0		10		10		0		0		0
N	=	**61.5**																		=	**44**

Resultados de la prueba piloto - Matemáticos																					
M4																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		10		2.5		10		10		0		2.5		0		0
N	=	**65**																		=	**46**
M5																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		5		10		0		10		0		0		0		0
N	=	**55**																		=	**39**
M6																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.0	c	2.5	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0
	7.0		9.5		5		2.5		10		0		10		7.5		0		0		0
N	=	**51.5**																		=	**37**

Tabla 8.16: Resultados de Matemáticos

Estudiante	Valoración
M1	36
M2	39
M3	44
M4	46
M5	39
M6	37

Tabla 8.17: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

Intervalos de puntuación	**Frecuencia absoluta**	**Porcentaje**
0-5	0	0
5-10	0	0
10-15	0	0
15-20	0	0
20-25	0	0
25-30	0	0
30-35	0	0
35-40	4	66
40-45	1	17
45-50	1	17

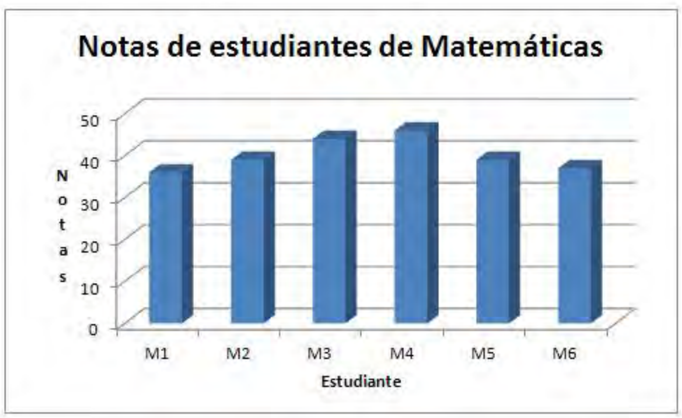


Figura 8.26: Resultados de la prueba piloto a los Matemáticos

Según la tabla 8.16 y 8.17 de frecuencias se observa que el 66 por ciento *de los estudiantes de Matemáticas* obtiene una puntuación menor a 40 puntos en la prueba piloto, lo que podría mostrar *cierto grado de facilidad* del instrumento para estos estudiantes (ver, figura 8.26). Se presenta en la tabla 8.18 y en la tabla 8.19 algunos estadísticos que permiten emitir juicios sobre las valoraciones de los estudiantes de Matemáticas.

Tabla 8.18: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

	Estadístico
Mínimo	36
Máximo	46
Rango	10
Media	40
Mediana	39
Desviación estándar	4

De la tabla 8.18 y figura 8.26 se observa que ninguno de los estudiantes obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 40 puntos sobre 50, es decir, que el porcentaje de logro corresponde al 100 por ciento, lo que evidencia que el instrumento resultaría "fácil" para estos estudiantes. En la tabla 8.19 se presenta los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 8.27 se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas en la prueba piloto según los cuartiles correspondientes.

Tabla 8.19: Puntuación total en la prueba piloto de los Matemáticos

	Valores	**Ancho**
Mínimo	36	36
Quartil1	38	2
Quartil2-Mediana	39	2
Quartil3	43	4
Máximo	46	3

Se presenta a continuación, el diagrama de caja a partir de la tabla 8.19 para complementar el análisis a la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas.

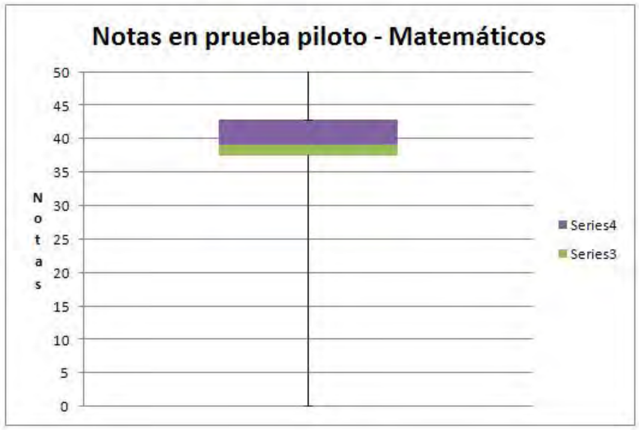


Figura 8.27: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los Matemáticos

En la figura 8.27 y en la tabla 8.18 se observa que la mediana corresponde a una puntuación de 39 puntos y que el 50 por ciento de las notas se encuentran en el intervalo (38,43) y el 50 por ciento de los estudiantes obtuvieron una nota menor a 39 y el 75 por ciento obtienen una nota menor a 43; el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 5.25 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

8.4.2.1 Análisis de la fiabilidad del cuestionario piloto - Matemáticos

La fiabilidad del cuestionario, se entiende como la estabilidad en las puntuaciones del cuestionario: como si este se administrara en repetidas ocasiones al mismo grupo de estudiantes (Vásquez, 2014). Para esto, se utiliza el coeficiente alfa de Cronbach, al igual que para el grupo de licenciados; ya que, este constituye una forma de acercarse a la fiabilidad. Más que la estabilidad de las medidas, el coeficiente alfa de Cronbach refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test, por tanto, es un indicador de la consistencia interna del test (Muñiz, 1994).

El alfa mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parecen. Cuanto más se acerque al valor uno (1) mejor es la fiabilidad. El valor obtenido en el grupo de estudiantes de Matemáticas es de α= 0.54, al calcular el índice de las tres primeras preguntas que se correlacionan. En el caso de las siete preguntas, el coeficiente α = 0.88 que denota un alto grado de consistencia interna del examen para las 7 preguntas. La confiabilidad aumenta al eliminar las preguntas en el sentido de mala discriminación.

8.4.2.2 Índice de Dificultad del cuestionario piloto de los estudiantes de Matemáticas

El índice de dificultad, valora la dificultad que conlleva la resolución de la situación problemática planteada y se define como la razón entre "número de aciertos/número de respuestas" (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad toma valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un *alto grado de dificultad,* mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de *máxima facilidad*, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

Para el cálculo del índice de dificultad se clasifican las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideran; así, se pueden analizar qué situaciones problemáticas resultaron más fáciles o más difíciles para este grupo de estudiantes de Matemáticas. Se toma el índice de dificultad para 7 preguntas, ya que, en los dos grupos y según los informes de los docentes que aplicaron la prueba los estudiantes, solo alcanzaron a trabajar estas siete preguntas.

A continuación, se presenta en la tabla 8.20 el índice de dificultad por pregunta y el índice promedio de dificultad del instrumento piloto.

Tabla 8.20: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Matemáticos

Índice de dificultad del cuestionario para los Matemáticos								
	R-Correctas		**R-Incorrectas**		**R-Parcial-mente-C**			
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
d)	4	67	2	33	0	0	0.67	67
	Media	**0.88**						
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	6	100	0	0	0	0	1	100
d)	4	66	1	17	1	17	0.85	83
	Media	**0.96**						
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	4	67	2	33	0	0	0.67	67
d)	4	67	1	17	1	17	0.83	83
	Media	**0.88**						
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
b)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
c)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
d)	1	17	5	83	0	0	0.17	17
	Media	**0.42**						
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
c)	4	66	1	17	1	17	0.83	83
d)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
	Media	**0.87**						
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
b)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
c)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
d)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
	Media	**0.33**						

Índice de dificultad del cuestionario piloto para los Matemáticos								
	R-Correctas		**R-Incorrectas**		**R-Parcialmente-C**			
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	5	83	0	0	1	17	1	100
b)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
c)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
d)	6	100	0	0	0	0	1	100
	Media	**0.92**						
	Media General	**0.75**						

En la figura 8.28 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto de acuerdo a su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Matemáticas. De los 7 ítems explorados, 2 (29 por ciento) se clasifican como preguntas de dificultad media con valores de 0.33 a 0.42; 4 se clasifica como medianamente fáciles (57 por ciento) y 1 se clasifica como fácil (14 por ciento) con un índice de 0.96; no hay ítems medianamente difíciles, ni ítems difíciles, para los estudiantes de Matemáticas; tampoco hay índices con valores extremos. Se espera de un cuestionario que el 50 por ciento de las preguntas presenten una dificultad media; el 20 por ciento sean medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 8.20 y en la figura 8.28 y 8.29 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general, presenta un nivel de dificultad que oscila entre el 33 por ciento y el 96 por ciento, con un promedio del 75 por ciento, por lo que se concluye que el instrumento representa una dificultad media tendiente a medianamente fácil, para los estudiantes de Matemáticas según la escala establecida: en los anexos (A.5.) se presentan las respuestas de los estudiantes de Matemáticas a las tareas propuestas. Se toma una sola escala de clasificación para el índice de dificultad del instrumento en los dos grupos de estudiantes de formación matemática, con el objetivo de realizar un análisis de los dos grupos.

A continuación, se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Matemáticas.

Pregunta 1

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 8.20 se observa que el 100 por ciento de los

Dificultades - Estudiantes de Matemáticas - Prueba piloto
En lo que se refiere a los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta 1, los estudiantes de matemáticas no pueden determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros, donde se ha definido una nueva operación $a * b = a + b - 4$ (el 17 por ciento) y los estudiantes no comprenden la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones del conjunto de los enteros con esta operación (33 por ciento).
En las respuestas de la pregunta 2, pocos estudiantes de Matemáticas no logran definir una operación similar a la operación en $(\mathbb{R}, \bullet)$ tal que $a \bullet b = 3a + 4b$ en el conjunto $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ es decir, una operación donde no exista elemento identidad (17 por ciento).
En la pregunta 3, los estudiantes de Matemáticas no identifican el grupo donde se trabaja la división de polinomios $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ (33 por ciento) y pocos estudiantes no identifican las propiedades que se deben utilizar para solucionar la tarea, esto es, la división de polinomios (17 por ciento).
En la pregunta 4 del cuestionario piloto, pocos estudiantes no pueden solucionar la ecuación en el nuevo conjunto $(A_2, \bigoplus)$ con $A_2 = \{1, 2, ..., 99\}$ con la operación reducción definida (17 por ciento); no identifican el elemento identidad en el conjunto (67 por ciento) y de igual forma, los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y finalmente, no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto (83 por ciento).

Figura 8.28: Dificultad de los ítems en la prueba piloto: Estudiantes de Matemáticas

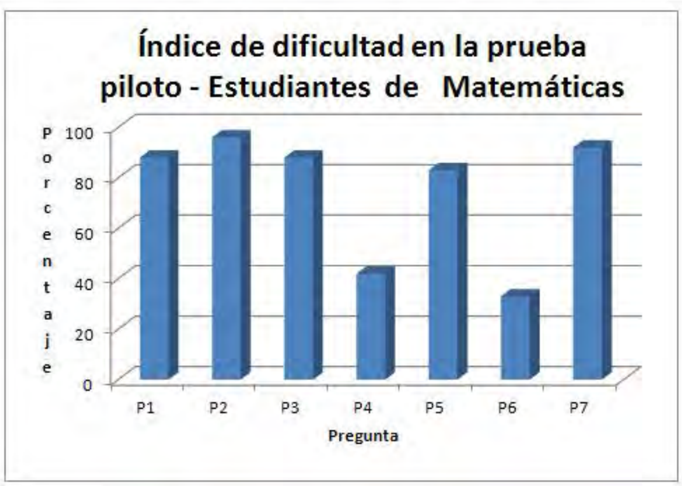


Figura 8.29: Preguntas e índice de dificultad - Estudiantes de Matemáticas

estudiantes de Matemáticas, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(\mathbb{Z},*)$ donde $a*b := a+b-4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes tiene una dificultad media el elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (67 por ciento) y es "medianamente fácil" identificar el inverso del elemento 3, con esta operación definida en los enteros (83); el nivel de dificultad del ítem corresponde al 83 por ciento que según el rango considerado, así, la pregunta presenta un *nivel medianamente fácil* para éstos estudiantes. Se ha decidido cambiar la pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe eliminar un ítem para incluir otro relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes de matemáticas no pueden determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 33 por ciento de los estudiantes no comprende la operación $*$; ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

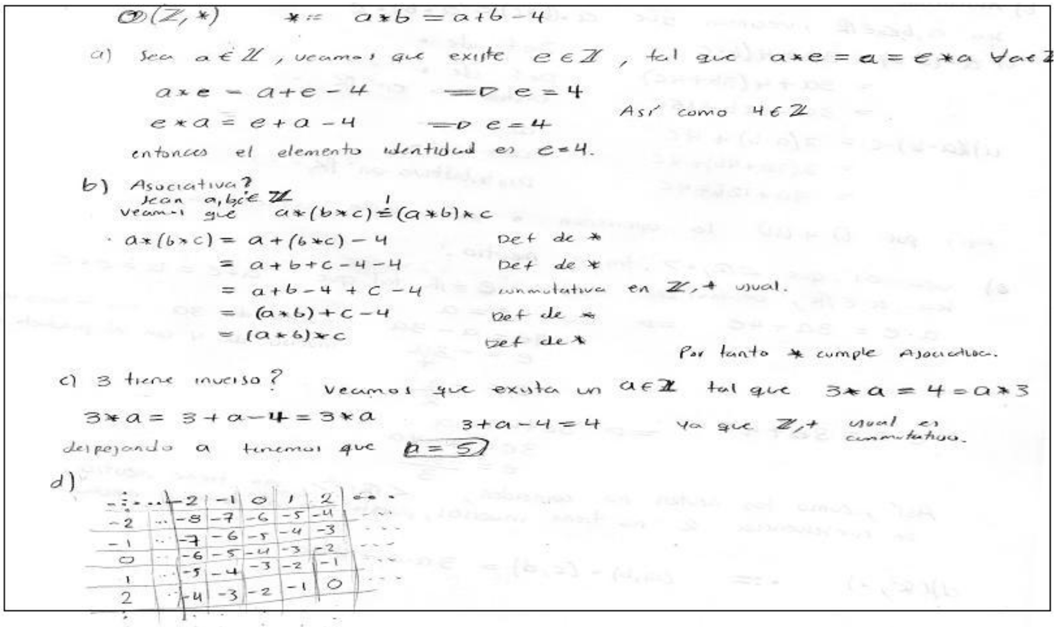
En lo que se refiere al conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (88 por ciento) que ella es medianamente fácil y los estudiantes de matemáticas tienen un alto dominio de conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en cuanto a los contenidos curriculares de: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.* Específicamente, en lo que respecta al grupo $(\mathbb{Z},*)$.

Se presenta la respuesta del Matemático (M1) a la pregunta 1:

El estudiante de Matemáticas en la pregunta 1, tiene todas las respuestas correctas (ver, tabla 8.15) lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10 y como el índice de dificultad de la pregunta en el grupo de Matemáticos es del 88 por ciento, se evidencia un nivel *medianamente fácil* respecto a la comprensión de toda la pregunta (100 por ciento) por los estudiantes.

Pregunta 2

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 8.20 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con una nueva operación $a \bullet b := 3a+4b$; de igual forma, los estudiantes pueden comprobar que se cumple la propiedad asociativa e identifican el inverso del elemento 2 con esta operación (100 por ciento



① $(\mathbb{Z},*)$ $*: a*b = a+b-4$

a) Sea $a\in\mathbb{Z}$, veamos que existe $e\in\mathbb{Z}$, tal que $a*e = a = e*a$ $\forall a\in\mathbb{Z}$

$a*e = a+e-4 \Longrightarrow e=4$

$e*a = e+a-4 \Longrightarrow e=4$ Así como $4\in\mathbb{Z}$

entonces el elemento identidad es $e=4$.

b) Asociativa?

Sean $a,b,c\in\mathbb{Z}$

veamos que $a*(b*c)\overset{?}{=}(a*b)*c$

$a*(b*c) = a+(b*c)-4$ Def de $*$

$= a+b+c-4-4$ Def de $*$

$= a+b-4+c-4$ conmutativa en $\mathbb{Z},+$ usual.

$= (a*b)+c-4$ Def de $*$

$= (a*b)*c$ Def de $*$

Por tanto $*$ cumple Asociativa.

c) 3 tiene inverso? Veamos que exista un $a\in\mathbb{Z}$ tal que $3*a = 4 = a*3$

$3*a = 3+a-4 = 3*a$ $3+a-4=4$ ya que $\mathbb{Z},+$ usual es conmutativa.

despejando a tenemos que $\boxed{a=5}$

d)

...	-2	-1	0	1	2	...
-2	-8	-7	-6	-5	-4	...
-1	-7	-6	-5	-4	-3	...
0	-6	-5	-4	-3	-2	...
1	-5	-4	-3	-2	-1	...
2	-4	-3	-2	-1	0	...

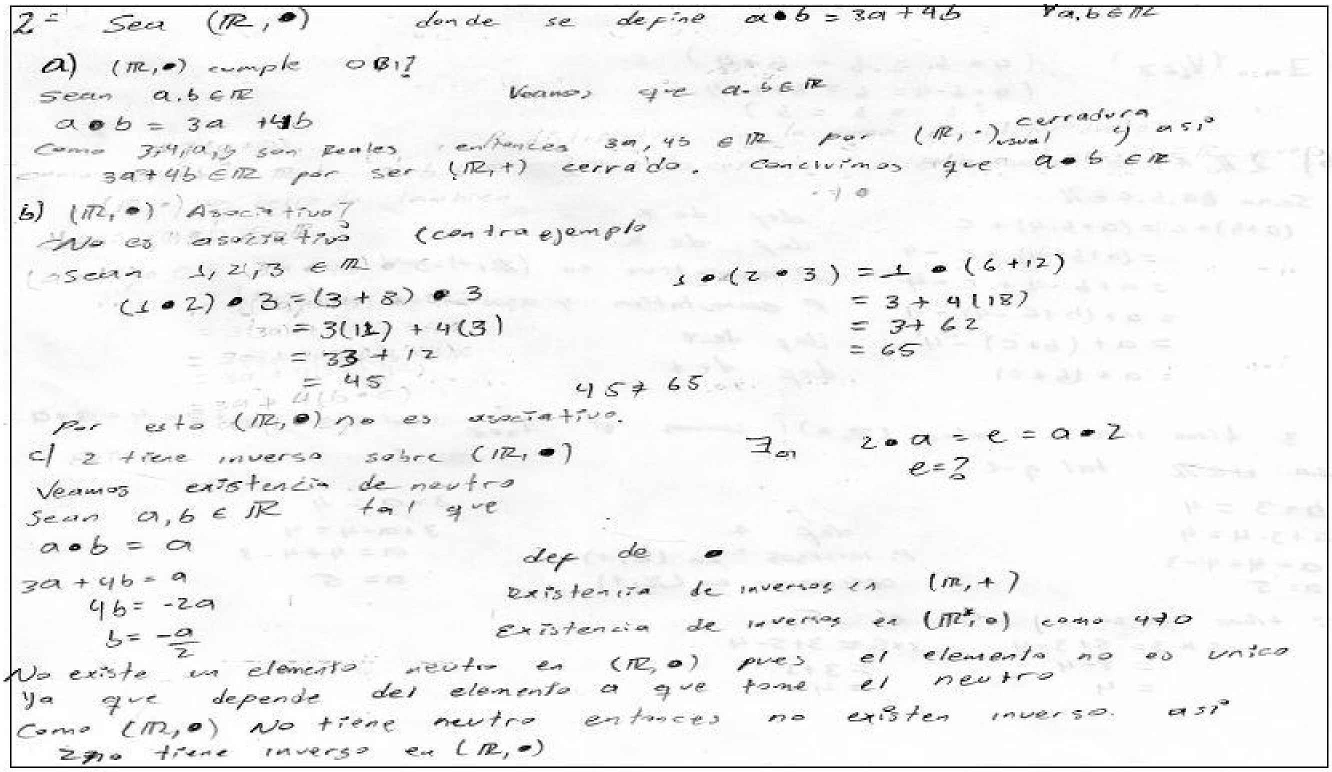
Figura 8.30: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante M1

de respuestas correctas) por lo que comprueban la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de inversos para los elementos. *La pregunta presenta un nivel de mediana facilidad (96 por ciento).* En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción y concretar el subítem 2d).

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas para el primer subítem, solo el 17 por ciento de los estudiantes de Matemáticas no logran definir una operación similar en el conjunto $(\mathbb{R}^2,\bullet)$, es decir, una operación donde no existe el elemento identidad.

La respuesta del Matemático (M2) a la pregunta 2 corresponde a (ver, figura 8.31):

Este estudiante de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas todas las respuestas (ver, tabla 8.15), es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida; que la propiedad asociativa no se cumple para la operación definida en los reales; que el elemento identidad no existe y por tanto, los elementos inversos no existen y define una operación similar en el conjunto $\mathbb{R}^2$, por tanto, la valoración de la pregunta es de 10 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 36 puntos sobre 50. Pero, del índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 96 por


2= Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde se define $a \bullet b = 3a + 4b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

a) $(\mathbb{R}, \bullet)$ cumple OBI?
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Veamos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$
$a \bullet b = 3a + 4b$
Como $3, 4, a, b$ son Reales entonces $3a, 4b \in \mathbb{R}$ por $(\mathbb{R}, \cdot)$ cerradura usual y así $3a + 4b \in \mathbb{R}$ por ser $(\mathbb{R}, +)$ cerrado. Concluimos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}, \bullet)$ Asociativo?
No es asociativo (contra ejemplo)
sean $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$
$(1 \bullet 2) \bullet 3 = (3 + 8) \bullet 3$
$= 3(11) + 4(3)$
$= 33 + 12$
$= 45$

$1 \bullet (2 \bullet 3) = 1 \bullet (6 + 12)$
$= 3 + 4(18)$
$= 3 + 62$
$= 65$

$45 \neq 65$

Por esto $(\mathbb{R}, \bullet)$ no es asociativo.

c) 2 tiene inversa sobre $(\mathbb{R}, \bullet)$ $\exists a$ $2 \bullet a = e = a \bullet 2$
$e = ?$
Veamos existencia de neutro
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que
$a \bullet b = a$ def de $\bullet$
$3a + 4b = a$ existencia de inversos en $(\mathbb{R}, +)$
$4b = -2a$ existencia de inversos en $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ como $4 \neq 0$
$b = -\frac{a}{2}$
No existe un elemento neutro en $(\mathbb{R}, \bullet)$ pues el elemento no es unico ya que depende del elemento a que tome el neutro
Como $(\mathbb{R}, \bullet)$ No tiene neutro entonces no existen inverso. así 2 no tiene inverso en $(\mathbb{R}, \bullet)$

Figura 8.31: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante M2 ciento, evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de Matemáticas.

Pregunta 3

En relación con la pregunta 3 y según la tabla 8.20 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes pudo resolver correctamente la situación problemática planteada, al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y determinar el cociente y el residuo de esta división de polinomios. Para los Matemáticos tiene una "dificultad media" (67) identificar el grupo $\mathbb{Z}_5[x]$ donde se trabajan los polinomios y el 67 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que aplica para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente fácil (88 por ciento),* para los Matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 33 por ciento, de los estudiantes, no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y solo el 17 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

En relación con el conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dominio alto correspondiente al 100 por ciento ((a) y (b)) y para el conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad del 88 (por ciento) que los estudiantes de matemáticas, resuelven la tarea y generalizan las operaciones del conjunto $\mathbb{Z}_5$, siendo "fácil" para ellos trabajar en este grupo; esto corresponde, a un alto nivel de dominio de este conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad media del 67 por ciento, indica que no presenta problema para los estudiantes de matemáticas reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $\mathbb{Z}_5$ y generalizarlas al conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$; presentando en general, un nivel de dominio medio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Matemático (M3) a la pregunta 3 se presenta en la figura 8.32.

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta todas las preguntas (ver, tabla 8.15), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5, pero no identifica el grupo de trabajo, es decir, el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ esto es, identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta.

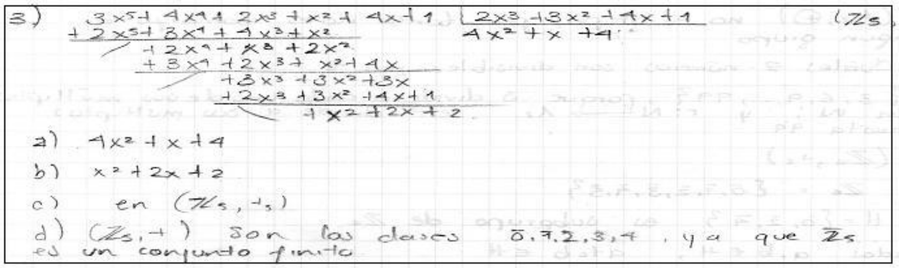


Figura 8.32: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante M3

La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 88 por ciento, se evidencia que la pregunta no presenta dificultad para los otros estudiantes de matemáticas, siendo medianamente fácil.

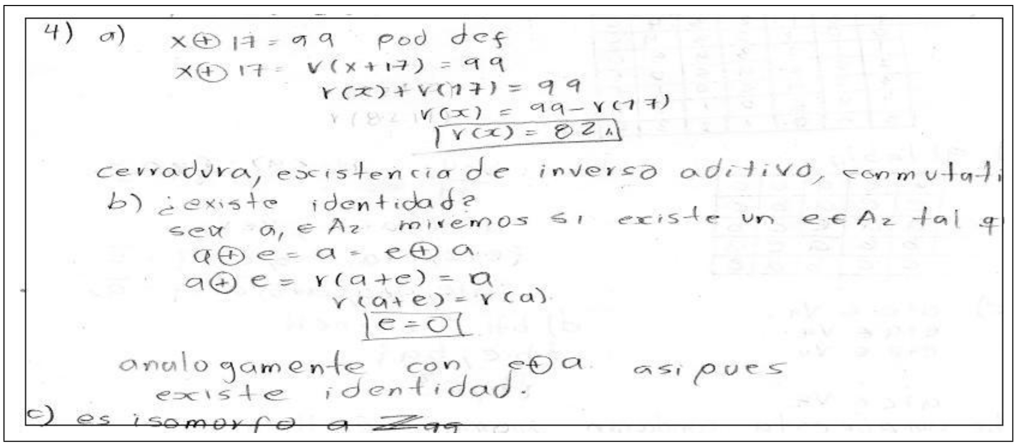
Pregunta 4

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 8.20 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en un conjunto nuevo para los estudiantes; este es el conjunto $(A_2, \oplus)$ de los $z-$ números; el 33 por ciento puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 3 por ciento relaciona el conjunto con el conjunto $\mathbb{Z}_{99}, +_{99}$ y el 17 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad es del 42* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta presenta una "dificultad media" para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes (4) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y el 83 por ciento (5) no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

El conocimiento común del contenido de los estudiantes, presentan un nivel de dominio medio (42 por ciento), es decir, que no presenta mayor dificultad para los matemáticos realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa nuevamente del índice de dificultad del 43 (por ciento) que para los estudiantes no presenta mayores dificultades relacionar el nuevo conjunto con el conjunto conocido de $\mathbb{Z}_{99}$, es decir, hay un nivel de dominio medio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 42 por ciento, se evidencia que los estudiantes tienen un nivel de dominio medio para generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2, \oplus)$.

La respuesta del matemático (M5) a la pregunta 4 corresponde a:



4) a) $x \oplus 17 = 99$ pod def

$x \oplus 17 = r(x+17) = 99$

$r(x) + r(17) = 99$

$r(x) = 99 - r(17)$

$\boxed{r(x) = 82}$

cerradura, existencia de inverso aditivo, conmutati

b) ¿existe identidad?

sea $a, \in A_2$ miremos si existe un $e \in A_2$ tal q

$a \oplus e = a = e \oplus a$

$a \oplus e = r(a+e) = a$

$r(a+e) = r(a)$

$\boxed{e = 0}$

analogamente con $e \oplus a$ asi pues existe identidad.

c) es isomorfo a $\mathbb{Z}_{99}$

Figura 8.33: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante M5

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2, \oplus)$; e identifica que el grupo $(A_2, \oplus)$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_{99}$; pero, no identifica el elemento identidad . La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 39 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 42 por ciento, se evidencia una dificultad media en general para los estudiantes de Matemáticas.

Pregunta 5

Según la tabla 8.20 de frecuencias y porcentajes a las respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver la situación problemática planteada en la pregunta al dar un subgrupo de 3 elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; de igual forma, el 83 por ciento de los estudiantes puede determinar un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 66 por ciento de los estudiantes es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; el 83 por ciento de los estudiantes elabora la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 87* por ciento por lo que se puede establecer, que la pregunta no presenta dificultad para los matemáticos (medianamente fácil). Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación con los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, para el 17 por ciento de los estudiantes no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$; de igual forma, solo el 17 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes, este presenta un alto nivel de dominio (87 por ciento), es decir, que la pregunta resultó medianamente fácil para los matemáticos en cuanto a la realización de tareas comunes con el grupo dado; en cuanto al conocimiento ampliado del contenido del índice de dificultad del 83 por ciento se evidencia que los estudiantes de matemática comprenden la propiedad de ser subgrupo y la aplican a casos específicos, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto; es decir, presentan un nivel de dominio alto del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado del índice de dificultad media de la pregunta del 75 por ciento; los estudiantes presentan un nivel de dominio medio, por lo que resulta claro para los estudiantes, identificar los subgrupos y elaborar la tabla de operaciones de los grupos $\mathbb{Z}_n$.

La respuesta del estudiante de matemáticas (M6) a la pregunta 5 se presenta en la figura 8.34.

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$, escribe un subconjunto que no es subgrupo; identifica claramente que $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ y elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 37 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 83 por ciento, se evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de matemáticas.

Pregunta 6

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 8.20 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 33 por ciento de los estudiantes (2 estudiantes,) identifican el grupo D_3 como isomorfo al grupo S_3: la pregunta en este caso, fue ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 33 por ciento de los estudiantes identifican que el grupo D_3 y en general, los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. El nivel de dificultad de la

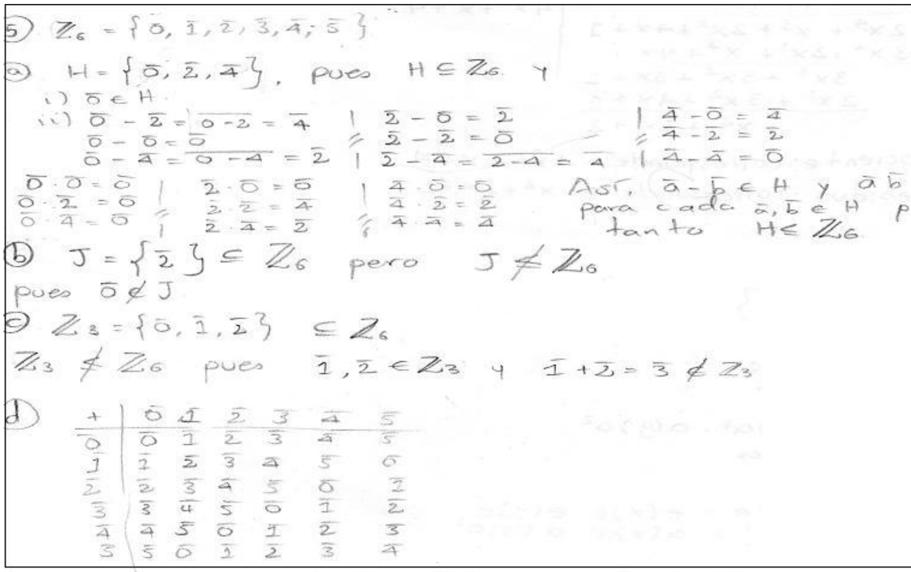


Figura 8.34: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante M6

pregunta fue del 33 por ciento, por lo que se puede decir, que los estudiantes tienen una dificultad media para reconocer los conceptos y propiedades relacionadas con el grupo D_3. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

Respecto a los errores y dificultades se concluye que el 67 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3, \circ)$; de igual forma, no determinan un subconjunto isomorfo al subgrupo de orden 3 que se pide y el 67 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange por el cual se establece que el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3, \circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Finalmente, para el 67 por ciento de los estudiantes de matemáticas, no es claro que en general, los grupos $(D_n, \circ)$ no cumplen la propiedad de ser cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a), este presenta un nivel de dificultad media del 33 por ciento, es decir, que en general, la pregunta no debería representar mayores dificultades para los matemáticos, esto corresponde a reconocer los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$. Se observa entonces, un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado el índice de dificultad del 33 por ciento, indica que el estudiante posee un nivel de dominio medio sobre los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$; de igual forma, del teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular y de la propiedad de ser un grupo cíclico; en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 33 por ciento, se observa que los estudiantes de matemáticas tienen un nivel de dominio medio del grupo $(D_3, \circ)$ y de sus propiedades.

La respuesta de estudiante de matemática (M4) a la pregunta 6 corresponde a:


TAREA 6: $(D_3, \circ)$
a) $A = \{P_0, M_3\} \leq D_3$?
$P_0 \circ P_0 = P_0$, $P_0 \circ M_3 = M_3$, $M_3 \circ P_0 = M_3$, $M_3 \circ M_3 = P_0$
Dado que D_3 es un grupo finito, basta comprobar que A cumple la cerradura, para que sea subgrupo.
Por tanto $A \leq D_3$
b) No puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}_8$ ni a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pues no es abeliano.
c) Para que un subgrupo de D_3 sea isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ debe tener orden pero D_3 no tiene subgrupos de este orden.
d) No, ya que:
$|P_0| = 1$, $|P_1| = 3$, $|P_2| = 3$, $|M_1| = 2$, $|M_2| = 2$, $|M_3| = 2$
y para que un grupo A sea cíclico debe existir $a \in A$ tal que $|a| = |A|$ en este caso no se tiene.
TAREA 7: b) $H = \langle a \rangle$ c) $\langle a \rangle$ es un s... normal de V...
$V_4 / \langle a \rangle = \{ b * \langle a \rangle : b \in V_4 \} = \{ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \}$

Figura 8.35: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante M4

El estudiante de matemáticas da respuesta correcta a la pregunta en todos sus subítems; esto es, da un subgrupo del grupo D_3 de simetrías del triángulo rectángulo; establece que este grupo no es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_8$ que no es la pregunta que se formula y reconoce el teorema de Lagrange al afirmar que el grupo D_3 no puede tener un subgrupo isomorfo de orden 4; finalmente, identifica que el grupo no es cíclico hallando los subgrupos cíclicos. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 46 puntos sobre 50 siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 33 por ciento, se evidencia que para los estudiantes de matemáticas, la tarea presenta una dificultad media; pero en general, un índice de dificultad media es lo que se desea para las preguntas que conforman un cuestionario e indica que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los estudiantes; en este caso, el reconocer los conceptos y propiedades del grupo $(D_3, \circ)$.

Pregunta 7

En relación con la pregunta 7 y según la tabla 8.20 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes (5) construyen la tabla de operación del grupo V_4 o el grupo $k-4$ de Klein; realizan el grupo cociente determinando el subgrupo $H = \langle a \rangle$; reconocen la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 100 por ciento de los estudiantes, lista los elementos de la clase bH. El nivel de dificultad de la pregunta es del 92 por ciento, por lo que se puede decir, que resulta *medianamente fácil* para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

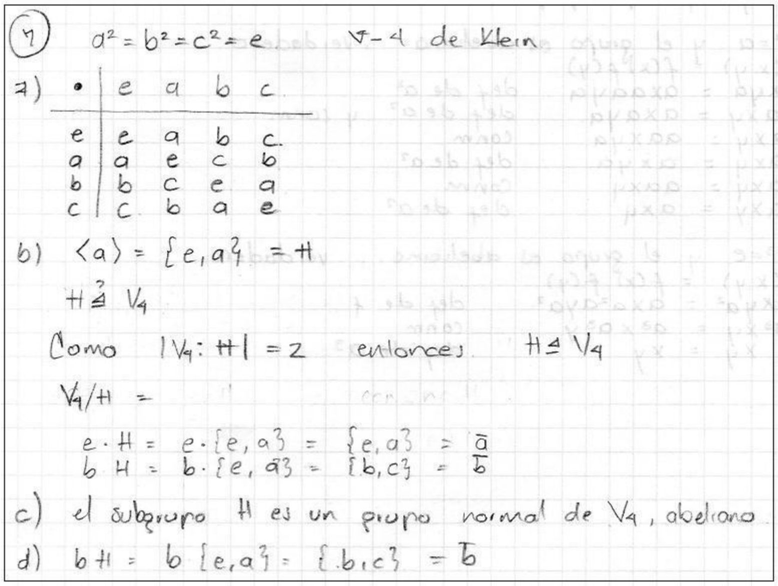
En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ y no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para determinar el grupo cociente.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a); la pregunta presenta un nivel de dificultad del 83 por ciento, es decir, que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes, esto corresponde a un alto nivel de dominio. En cuanto al conocimiento ampliado, el índice de dificultad del 88 por ciento aproximado, indica un nivel de dominio alto en cuanto a que el estudiante construye el grupo cociente; de igual forma, tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y en la misma dirección, construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico; así, los matemáticos tienen un alto nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a los conceptos mencionados en la pregunta.

La respuesta de estudiante de matemática (M3) a la pregunta 7 corresponde a (ver, figura 8.36).

Este estudiante de matemáticas reconoce el grupo V_4 de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda bH; da la propiedad del subgrupo de ser normal para construir el grupo cociente; construye el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 92 por ciento; se evidencia que los estudiantes de matemáticas reconocen los conceptos de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta evidencia que en general es medianamente fácil para los matemáticos trabajar con grupos cocientes.

Como conclusión del análisis al índice de dificultad de la prueba piloto aplicada al grupo de estudiantes de Matemáticas, se observa que en general, el cuestionario presenta una dificultad media (0.75) para los Matemáticos, como se muestra en la tabla 8.20 siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 4d) con un nivel de dificultad del 17 por ciento y los subítems 4b) 4c) 6a) 6b) 6c) 6d) con un índice de dificultad del 33 por ciento presentando estas



(7) $a^2 = b^2 = c^2 = e$ V-4 de Klein

a)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $\langle a \rangle = \{e, a\} = H$

$H \overset{?}{\trianglelefteq} V_4$

Como $|V_4 : H| = 2$ entonces $H \trianglelefteq V_4$

$V_4/H =$

$e \cdot H = e \cdot \{e, a\} = \{e, a\} = \bar{a}$

$b\,H = b \cdot \{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

c) el subgrupo H es un grupo normal de V_4, abeliano

d) $bH = b\{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

Figura 8.36: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante M3

preguntas una dificultad media. Del índice de dificultad de las preguntas, para los estudiantes de Matemáticas, se concluye al igual que para los licenciados, que la pregunta 6 es la que presenta el mayor índice de dificultad, en este caso del 33 por ciento; la pregunta 4, un índice de dificultad del 42 por ciento; la pregunta 5,3,1,7 resultaron medianamente fáciles para los matemáticos y la pregunta 2 con un índice del 96 por ciento resultó fácil. De las 7 preguntas analizadas la pregunta 6 resulta con una dificultad media que es lo que se espera de las preguntas de un cuestionario (que el 50 por ciento de las preguntas del cuestionario presenten una dificultad media) y en general, ninguna pregunta presenta un *grado de máxima facilidad.*

8.4.3. Análisis cualitativo de la prueba piloto

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes de formación matemática, se observaron algunos aspectos importantes para el proceso de construcción del instrumento: el tiempo de aplicación de la prueba piloto fue insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario, por tal motivo en primer lugar, se cambia la pregunta 1 (medianamente fácil) por otra pregunta relacionada con el significado del objeto grupo en el contexto de "Teoría de Matrices" y las preguntas se reorganizan para llegar a un análisis de las preguntas 8,9 y 10 que quedaron faltando.

Se reorganiza el cuestionario piloto para su versión final con el objetivo de analizar las preguntas 8, 9, 10 y 11 y poder concluir si realmente el tiempo de 2 horas no es suficiente o por el contrario las preguntas presentan un índice de dificultad alto para los estudiantes. En esta dirección, las últimas preguntas se ubican en primer lugar en el cuestionario final y adicionalmente se revisan las preguntas, teniendo presente los aportes de los expertos, en lo que se relaciona con aspectos técnicos que permitan la comprensión y claridad de las preguntas.

El análisis cualitativo en el marco del enfoque EOS, incluye el análisis de la variable cualitativa de "configuraciones cognitivas activadas" por los estudiantes de formación matemática (grupos G1 y G2) al desarrollar las prácticas matemáticas propuestas: se considera pertinente realizar este análisis de las respuestas de los estudiantes en la versión final del cuestionario.

Se presentan a continuación, las tareas de la versión piloto y las tareas definitivas, luego de los análisis cuantitativos y cualitativos presentados en cada uno de los grupos de trabajo y además, teniendo presente el análisis cualitativo a la prueba según el juicio de expertos en Álgebra Abstracta.

Tarea antigua

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique
b) A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique
b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

Tarea antigua

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) ¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ una función invariante? Justifique
b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante. Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$ De un polinomio simétrico. Justifique
d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique

Tarea reformulada

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.

a) ¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ una función invariante? Justifique
b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico. Justifique
d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b, c en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique

Tarea antigua

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:
a) Deja invariante el número 2.
b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique
c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique
d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 3. Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.
a) Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique
b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique
c) El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique
d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

Tarea antigua

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.
a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique
c) Es conmutativo el grupo? Justifique
d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 4. El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.
a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique
c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique
d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

Tarea antigua

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(\mathbb{Z}_5,+_5)$
a) El cociente corresponde a ? Justifique
b) El residuo corresponde a? Justifique
c) En que grupo se esta trabajando? Justifique
d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Tarea reformulada

TAREA 5. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(\mathbb{Z}_5,+_5)$.
a) ¿El cociente corresponde a? Justifique
b) ¿El residuo corresponde a? Justifique
c) ¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique
d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

Tarea antigua

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16; r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique
b) Existe el elemento identidad en $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
c) A que grupo es isomorfo $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 6. Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.
Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.
b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
c) ¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
d) ¿Qué $z-$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\bigoplus)$? Justifique

Tarea antigua

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Tarea reformulada

TAREA 7. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Tarea antigua

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
b) $*$ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Tarea que se cambia por

TAREA 8. Sea $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Y B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de G. Justifique
b) ¿G es grupo abeliano? Justifique
c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique
d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

Análisis al ítem

La tarea se seleccionó del texto "An Introduction to the Theory of Groups" (Rotman, 1995) en el capítulo 2, correspondiente a la lección: Cyclic Groups y permite explorar el objeto grupo, en el contexto de Conjunto de Matrices: atendiendo a la sugerencia de los expertos, se incluyó un ítem relacionado con el significado de Grupo de Matrices.

Solución a la tarea

a) Determine los elementos de G. Justifique

Dada la matriz $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $A^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I$

$A^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$= -A$

$A^4 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$ (identidad)

$B^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I = A^2$

$B^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= -B$

$B^4 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$

$AB =$ $$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$ $BA =$ $$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$ $= -AB$ $A^2B =$ $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $=-B = BA^2$ Luego, $G = \{A, B, A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I, B^3 = -B, AB, BA = -AB = A^3B\}$ es de orden 8
b) ¿G es grupo abeliano? Justifique. No, porque $AB \neq BA$ como se muestra en 1a)
c) Determine el subgrupo de orden 2. Justifique: $H = \{I, A^2\}$ se tiene que $A^2A^2 = A^4 = I$
d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique   La operación en el grupo lineal $GL(2,\mathbb{C})$ es el producto usual de matrices e induce el mismo producto en G.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas (investigador).

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	4	4	4	4
Grupo Abstracto	4	4	4	4

Para el caso se tiene que: NA-No aplica; N.R.-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica.

Con la tarea, busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática del producto usual de matrices para determinar los elementos del grupo, con el subítem (a); el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en general para las matrices, con el subítem (b); el orden de un elemento para determinar el subgrupo de orden 2, en el subítem (c) y la identificación de la operación binaria de producto usual de matrices en el grupo lineal de Matrices, constituido por matrices con determinante distinto de cero y la comprensión del estudiante respecto a que el subgrupo toma la operación del Grupo. Además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Teoría de Matrices - Grupos de Matrices* con un nivel de relevancia de 4 según el juicio del investigador y de igual forma, el significado de Grupo en el contexto de Grupo abstracto.

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	1	1	4	4
Grupo, ejemplos y contra-ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	4	2	4	4
Orden del grupo	1	1	4	1
Propiedad de Grupo	1	4	1	1

En cuanto al contenido curricular, la tarea corresponde al tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en promedio, en los subítems (a),(b),(c) y (d); al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(b); ya que, en los subítems se analizan la propiedad que tiene G de ser subgrupo; al tema de *Grupo, ejemplos y contra-ejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, en los subítems (a), (c) y (d), se pregunta por la operación en el grupo $GL(2,\mathbb{C})$; al tema de orden del grupo y orden del elemento ya que en el subítem (a) se preguntan los elementos del grupo y en el subítem (c) se pregunta por el subgrupo de orden 2, finalmente al tema propiedades del grupo, al preguntar en el subítem (b) si el grupo es Abeliano.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**N.R.(1-5) a)**	**N.R.(1-5) b)**	**N.R.(1-5) c)**	**N.R.(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	1	1
Conocimiento ampliado del contenido	1	1	5	1
Conocimiento especializado del contenido	1	1	1	5

Respecto a las categorías del modelo del Conocimiento Didáctico -Matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 según el subítem (a) al determinar los elementos del grupo e identificar el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en el grupo; un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 5 respecto a la determinación del subgrupo de orden 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 respecto al subítem (d) al identificar la operación en el grupo $GL(2,\mathbb{C})$ y la operación que se induce en el subgrupo G.

Tarea antigua

TAREA 2. Sea $(\mathbb{R},\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$ a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique b) La operación es asociativa? Justifique c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique d) En $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

Tarea reformulada

TAREA 9. Sea $(\mathbb{R},\bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$ a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique d) En el conjunto $\mathbb{R}^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

Tarea antigua

TAREA 5. Sea el conjunto $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6. a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique c) Es $\mathbb{Z}_3$ subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

Tarea reformulada

TAREA 10. Sea el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ de los enteros módulo 6. a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique b) Escriba un subconjunto de $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(\mathbb{Z}_6,+_6)$

Tarea antigua

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.
b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique
c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 11. Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.
b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique
c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

Finalmente, luego de realizar los análisis a las preguntas y respuestas del cuestionario piloto y tomando en consideración la información obtenida de la revisión del instrumento mediante el juicio de expertos y la aplicación piloto del cuestionario, se obtiene la versión definitiva del cuestionario que permitió evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo.

8.5. Versión final del instrumento *CDM-Grupo*

En esta sección se presenta en la tabla 8.8 la distribución de las tareas del cuestionario final, luego de los análisis minuciosos respecto al juicio de los expertos (ver, anexo A.4.); el criterio del investigador y la revisión de los resultados de la prueba piloto. Las tareas se reorganizaron tratando de ubicar en primer lugar, aquellas que no se alcanzaron a analizar según los estudiantes por tiempo y luego de analizar los subítems en busca de claridad y tratando de simplificar las tareas del cuestionario para adecuarlas al tiempo de 2 horas (ver, anexo A.6.) Se esperaba que la reorganización de las preguntas proporcionara información para complementar el estudio realizado con la aplicación de la prueba piloto.

Tabla 8.21: Organización de tareas del cuestionario *CDM-Grupo*

TAREA NUEVA	TAREA ANTIGUA
1	6
2	10
3	9
4	11
5	3
6	4
7	8
8	1* (se cambia)
9	2
10	5
11	7

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique
b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.

a) ¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique
b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique
d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b, c en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique

TAREA 3. Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1, 2, 3, 4\}$.
a) Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique
b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique
c) El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique
d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

TAREA 4. El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.
a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique
c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique
d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

TAREA 5. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(\mathbb{Z}_5, +_5)$.
a) ¿El cociente corresponde a? Justifique
b) ¿El residuo corresponde a? Justifique
c) ¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique
d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

TAREA 6. Dado el conjunto $A_2 := \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.
Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$ y diga qué propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.
b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
c) ¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
d) ¿Qué $z-$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2, \bigoplus)$? Justifique

TAREA 7. Sea $(G, \cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 8. Sea $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Y B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de G. Justifique
b) ¿G es grupo abeliano? Justifique
c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique
d) ¿Cuál es la operación en $GL(2, \mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

TAREA 9. Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$
a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique
b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique
c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique
d) En el conjunto $\mathbb{R}^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

TAREA 10. Sea el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.
a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique
b) Escriba un subconjunto de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no sea subgrupo. Justifique
c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

TAREA 11. Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.
b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique
c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

8.6. Conclusiones del capítulo

Los análisis presentados este capítulo, permitieron realizar el proceso de validación de contenido del cuestionario que permitirá evaluar aspectos parciales del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo. En esta dirección, se desarrolló en el presente capítulo, la fase de diseño del instrumento y el proceso de validación en dos aspectos: la validez del contenido, que se garantiza, primero a partir de la selección de los contenidos relacionados con el estudio del objeto Grupo en el currículo universitario de los estudiantes de formación matemática; en los distintos referentes curriculares involucrados (programas de los estudiantes de formación matemática: Licenciados en Matemáticas y Matemáticos y textos de Teoría de Grupos) y la contrastación de la validez de los ítems, es decir, si éstos miden lo que se pretende medir; para lo cual se consideraron dos procedimientos: el juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de la aplicación piloto del instrumento y específicamente, a partir del grado de dificultad de los ítems y subítems. Continuando con los análisis, se presenta, un comparativo del índice de dificultad del cuestionario piloto de los dos grupos de estudiantes: Licenciados en Matemáticas y los Matemáticos:

Índice de dificultad del cuestionario piloto				
Pregunta	**Licenciados**	**Porcentaje**	**Matemáticos**	**Porcentaje**
P1	0.59	59	0.88	88
P2	0.50	50	0.96	89
P3	0.22	22	0.88	88
P4	0.21	21	0.42	42
P5	0.30	30	0.83	83
P6	0.10	10	0.33	33
P7	0.18	18	0.92	92
	Media	**30**	**Media**	**75**

Respecto al nivel de dificultad de los ítems, se observó que la pregunta 1 presenta un *nivel de dificultad media* para los Licenciados, mientras que para los Matemáticos resultó *medianamente fácil*, así, los matemáticos se ubican en el siguiente nivel, según la clasificación del grado de dificultad de las preguntas tendiente al nivel de máxima facilidad; de igual forma, la pregunta 2. La pregunta 3 resultó *medianamente difícil* para los Licenciados y para los Matemáticos resulta *medianamente fácil*, es decir, se ubica en el otro extremo de la escala del nivel de dificultad. La pregunta 4, resulta *medianamente difícil* para los licenciados y presenta una *dificultad media* para los Matemáticos; otra vez, el nivel de los Matemáticos se encuentra en el siguiente nivel de clasificación tendiente a preguntas fáciles, que corresponde a una dificultad del 100 por ciento, es decir, el extremo de pregunta “fácil”; la pregunta 5 presenta una *dificultad media* para los Licenciados en Matemáticas, mientras que para los Matemáticos resulta *Medianamente fácil*; otra vez, se corre al siguiente nivel de dificultad en la escala de clasificación del nivel de dificultad: la pregunta 6, resultó *medianamente difícil* para los Licenciados, mientras que para los Matemáticos presentó una *dificultad media*; de nuevo el nivel se corre una posición tendiente al extremo de máxima facilidad; finalmente, la pregunta 7 resultó *medianamente difícil* para los Licenciados y fácil para los Matemáticos; en esta pregunta el nivel de dificultad avanzó dos niveles en los matemáticos, tendiente al valor de máxima facilidad o sea del 100 por ciento para el índice de dificultad. En general, para los Licenciados en Matemáticas y para los Matemáticos, el cuestionario presentó *una dificultad media,* que es lo deseable de un cuestionario de evaluación.

Se presenta a continuación en la tabla 8.22 algunas de las dificultades de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, respecto al objeto Grupo, según las prácticas desarrolladas en la prueba piloto y de igual forma, en la tabla 8.23 las dificultades detectadas de los estudiantes de Matemáticas con las prácticas matemáticas del cuestionario piloto.

Tabla 8.22: Dificultades de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Dificultades - Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes, no determinan cuál es el elemento identidad en los enteros con la operación $*$ donde $a * b = a + b - 4$ (el 45 por ciento); de igual forma, no comprenden cómo determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido la nueva operación (7 estudiantes (64) por ciento) y no comprenden la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de la operación en un subconjunto de los enteros (el 10 por ciento de los licenciados).
Para el primer subítem de la pregunta 2 del cuestionario piloto, los estudiantes no determinan si la operación $\bullet$ en los reales, tal que $a \bullet b = 3a + 4b$, cumple la propiedad de clausura (el 27 por ciento) y en el siguiente subítem, no comprenden que no se cumple la propiedad asociativa para esta operación (3 estudiantes (27) por ciento). De igual forma, los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de los elementos inversos en este conjunto de los números reales con la operación definida (el 73 por ciento).
En la pregunta 3 del cuestionario piloto, los estudiantes no realizan la división de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y por tanto, no determinan en forma correcta el cociente (el 55 por ciento); de igual forma, no determinan el residuo de la división (el 73 por ciento); no identifican el grupo donde se trabaja la división de polinomios (el 100 por ciento) y no identifican las propiedades que se utilizan para dar solución a la tarea 3, es decir, para realizar la división de polinomios (el 80 por ciento).
En la pregunta 4 del cuestionario piloto, los estudiantes no solucionan la ecuación $x \oplus 17 = 99$ en el nuevo conjunto $(A_2, \oplus)$ con $A_2 = \{1, 2, ..., 99\}$ y la operación de reducción definida en el conjunto (el 36 por ciento); los estudiantes (11) no pueden identificar el elemento identidad en el conjunto (el 100 por ciento); no encuentran el grupo isomorfo $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ al dado y no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto (el 100 por ciento).
En la pregunta 5, los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (el 82 por ciento); de igual forma, no determinan un subconjunto que no cumpla con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente si $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$: pero, pocos estudiantes tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (36 por ciento).
En la pregunta 6, los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3, \circ)$ (100 por ciento); de igual forma, no pueden determinar un subconjunto isomorfo al subgrupo que se pide (90 por ciento) y no tienen claro el Teorema de Lagrange por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3, \circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4 (el 90 por ciento) y finalmente, para los estudiantes de Licenciatura, no es claro que en general, los grupos $(D_n, \circ)$ no cumplen la propiedad de ser cíclicos (82 por ciento).
En la pregunta 7, los estudiantes no reconoce la tabla de operación para el grupo V_4 o $k - 4$ de Klein (64 por ciento); de igual forma, no pueden construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ (82 por ciento); no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para determinar el grupo cociente (90 por ciento) y no reconocen una clase lateral izquierda (82 por ciento).

Tabla 8.23: Dificultades de los estudiantes de Matemáticas

Dificultades - Estudiantes de Matemáticas - Prueba piloto
En lo que se refiere a los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta 1, los estudiantes de matemáticas no pueden determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros, donde se ha definido una nueva operación $a*b=a+b-4$ (el 17 por ciento) y los estudiantes no comprenden la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones del conjunto de los enteros con esta operación (33 por ciento).
En las respuestas de la pregunta 2, pocos estudiantes de Matemáticas no logran definir una operación similar a la operación en $(\mathbb{R},\bullet)$ tal que $a\bullet b=3a+4b$ en el conjunto $(\mathbb{R}^2,\bullet)$ es decir, una operación donde no exista elemento identidad (17 por ciento).
En la pregunta 3, los estudiantes de Matemáticas no identifican el grupo donde se trabaja la división de polinomios $(\mathbb{Z}_5[x],+_5)$ (33 por ciento) y pocos estudiantes no identifican las propiedades que se deben utilizar para solucionar la tarea, esto es, la división de polinomios (17 por ciento).
En la pregunta 4 del cuestionario piloto, pocos estudiantes no pueden solucionar la ecuación en el nuevo conjunto $(A_2,\bigoplus)$ con $A_2=\{1,2,...,99\}$ con la operación reducción definida (17 por ciento); no identifican el elemento identidad en el conjunto (67 por ciento) y de igual forma, los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y finalmente, no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto (83 por ciento).
En la pregunta 5, los estudiantes no determinan un subconjunto que no cumpla con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ (17 por ciento); de igual forma, pocos estudiantes de Matemáticas tienen dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ (17 por ciento).
En la pregunta 6, los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3,\circ)$ (67 por ciento); de igual forma, no determinan un subconjunto isomorfo al subgrupo de orden 3 que se pide y no tienen claro el Teorema de Lagrange, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3,\circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4 (67 por ciento) y finalmente, para los estudiantes de Matemáticas, no es claro que en general, los grupos $(D_n,\circ)$ no cumplen la propiedad de ser cíclicos (67 por ciento).
En la pregunta 7, pocos estudiantes de Matemáticas no pueden construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H=\langle a\rangle$ en el grupo V_4 o $k-4$ de Klein (17 por ciento) y no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal, para determinar el grupo cociente.

Se presenta en la tabla 8.24 una primera aproximación a la evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo, según las practicas desarrolladas por ellos en la prueba piloto; lo cual constituye el objetivo principal de la investigación.

Tabla 8.24: Conocimientos didácticos-matemáticos de los estudiantes de formación matemática: una primera aproximación.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
PREGUNTA UNO	
Conocimiento común del contenido Conocimiento ampliado del contenido Conocimiento especializado del contenido	
Según el índice de dificultad de la pregunta, (59 por ciento), los estudiantes de Licenciatura tienen un **nivel de dominio medio**, respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* en el conjunto de los números enteros $(\mathbb{Z}, *)$ donde $a * b = a + b - 4$ y un **nivel de dominio medio** respecto al conocimiento de los contenidos: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.*	Se observa del índice de dificultad de la pregunta (88 por ciento) que ella es medianamente fácil y los estudiantes de Matemáticas tienen un **alto nivel de dominio** de conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en cuanto a los contenidos: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.* Específicamente, en lo que respecta al grupo $(\mathbb{Z}, *)$.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
PREGUNTA DOS	
Conocimiento común del contenido: Conocimiento ampliado del contenido	
Según el índice dificultad de la pregunta (50 por ciento), se observa que los estudiantes de Licenciatura pueden resolver la tarea, identificar la no existencia del elemento identidad con una dificultad media; así, los estudiantes tienen un **nivel de dominio medio,** respecto a las propiedades en el conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$.	Se observar del índice de dificultad de la pregunta (96 por ciento) que los Matemáticos, pueden resolver la tarea, identificar la no existencia del elemento identidad con una mediana facilidad; esto corresponde a un **alto nivel de dominio** del conocimiento común y del conocimiento ampliado del contenido respecto al conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$.
Conocimiento especializado (2d)	
Se observa un **nivel de dominio medio** respecto a este conocimiento para la enseñanza, ya que la pregunta presenta un índice de dificultad media (27 por ciento). En general, se observa un nivel de dominio que tiende a un *bajo nivel de dominio* (<25 por ciento) respecto al conocimiento especializado y por tanto medianamente o difícilmente generalizan las propiedades que cumple los elementos de $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$ al conjunto $\mathbb{R}^2$.	Esta pregunta tiene un índice de dificultad media (66 por ciento) por lo que en general para los estudiantes no presenta problema el generalizar la propiedad del conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$ al conjunto $\mathbb{R}^2$; se observa por tanto, un **nivel de dominio medio** respecto a esta generalización de propiedades.
PREGUNTA TRES	
Conocimiento común del contenido ((a) y (b))	
El nivel de dificultad media de la pregunta tres (36 por ciento), indica un **nivel de dominio medio** respecto a efectuar una división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ e identificar el cociente y el residuo.	En lo que se refiere al conocimiento común del contenido, presentan un **nivel de dominio alto** del 100 por ciento.
Conocimiento ampliado del contenido	
Se observa del índice de dificultad (22 por ciento), que los estudiantes de Licenciatura no resuelven la tarea y no generalizan las operaciones del conjunto $\mathbb{Z}_5$, siendo medianamente difícil para ellos el trabajo en este grupo; así, los estudiantes presentan un **bajo nivel de dominio** del conocimiento ampliado.	Se observa del índice de dificultad (88 por ciento) que los estudiantes de Matemáticas resuelven la tarea y generalizan las operaciones del conjunto $\mathbb{Z}_5$, siendo "fácil" para ellos trabajar en este grupo; así, tienen un **alto nivel de dominio** del conocimiento ampliado del contenido.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
Conocimiento especializado ((c) y (d))	
Del índice de dificultad de la pregunta (18 por ciento), resulta que para los estudiantes es medianamente difícil reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $\mathbb{Z}_5$ y generalizarlas al conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$; esto corresponde a un **bajo nivel de dominio** del conocimiento especializado (índice de dificultad $\leq 0{,}25$).	El índice de dificultad media de la pregunta (67 por ciento), indica que la tarea no presenta problema para los estudiantes de Matemáticas, esto es, reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $\mathbb{Z}_5$ y generalizarlas al conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$; presentando en general, un **nivel de dominio medio** del conocimiento especializado del contenido.
PREGUNTA CUATRO	
Conocimiento común del contenido	
Se presenta un **bajo nivel de dominio** (del 21 por ciento), es decir, es medianamente difícil para los Licenciados realizar las tareas en el conjunto $(A_2, \oplus)$ de los z−números que corresponden al conjunto $\{1, 2, ..., 99\}$, donde $\oplus$ corresponde a la suma módulo 99; de igual forma, solucionar ecuaciones en el conjunto dado e identificar el elemento inverso.	En lo que se refiere al conocimiento común del contenido de los estudiantes, se presenta un **nivel de dominio medio** (42 por ciento), es decir, que no representa mayor dificultad para los matemáticos, realizar las tareas en el conjunto dado, solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso.
Conocimiento ampliado del contenido	
Se observa nuevamente del índice de dificultad (22 por ciento) que los estudiantes no relacionan el nuevo conjunto con el conjunto conocido $\mathbb{Z}_{99}$; esto corresponde a un **bajo nivel de dominio** del conocimiento ampliado del contenido.	En cuanto al conocimiento ampliado del contenido, se observa nuevamente del índice de dificultad (43 por ciento) que para los estudiantes no presenta mayor dificultad relacionar el nuevo conjunto con el conjunto conocido de $\mathbb{Z}_{99}$; es decir, tienen un **nivel de dominio medio** del conocimiento ampliado.
Conocimiento especializado	
Como el índice de dificultad es del 21 por ciento, resulta medianamente difícil para los estudiantes generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2, \oplus)$ y así, los estudiantes presentan un **bajo nivel de dominio** del conocimiento especializado (nivel de dificultad $\leq 0{,}25$.	En cuanto al conocimiento especializado; del índice de dificultad (42 por ciento), se evidencia que los estudiantes tienen un **nivel de dominio medio** que les permite generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2, \oplus)$.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
PREGUNTA CINCO	
Conocimiento común del contenido	
La pregunta presenta un nivel de dificultad media (30 por ciento), es decir, los estudiantes tienen un **dominio medio** que les permite la realización de tareas comunes en el grupo $\mathbb{Z}_6$ con la adición módulo 6.	En lo que se refiere al conocimiento común del contenido de los estudiantes,se presenta un **alto nivel de domino** (87 por ciento), es decir, que la pregunta resulta medianamente fácil para los Matemáticos, en cuanto a la realización de tareas comunes en este grupo $\mathbb{Z}_6$.
Conocimiento ampliado	
Del índice de dificultad de la pregunta (18 por ciento), se observa que para los estudiantes no es clara la propiedad de ser subgrupo, para aplicarla a un caso específico como es el grupo $\mathbb{Z}_6$ con la adición módulo 6; de igual forma, la propiedad de ser subconjunto, siendo la pregunta medianamente difícil para los estudiantes de Licenciatura; esto corresponde a un **bajo nivel de dominio** del conocimiento ampliado respecto al grupo $\mathbb{Z}_6$ y la adición módulo 6.	En cuanto al conocimiento ampliado del índice de dificultad (83 por ciento), se evidencia que los estudiantes de Matemáticas comprenden la propiedad de ser subgrupo y la aplican a casos específicos, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto; es decir, presentan un **alto nivel de dominio** del conocimiento ampliado.
Conocimiento especializado	
Del índice de dificultad (41 por ciento), se evidencia que existe una dificultad media en cuanto al trabajo con el grupo $\mathbb{Z}_6$ y por tanto, presentan un **nivel de dominio medio** respecto al conocimiento especializado.	En cuanto al conocimiento especializado del índice de dificultad media (75 por ciento), se observa un **nivel de dominio medio**, por lo que resulta claro que los estudiantes identifican los subgrupos de un grupo y elaboran la tabla de operaciones para los grupos $\mathbb{Z}_n$.
PREGUNTA SEIS	
Conocimiento común del contenido ((a))	
Según el nivel de dificultad de la pregunta que corresponde (0 por ciento), los estudiantes no logran reconocer los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, siendo la pregunta "difícil" para ellos: es decir, presentan un **bajo nivel de dominio** del conocimiento común del contenido.	En lo que se refiere al conocimiento común del contenido de los estudiantes, la pregunta presenta una dificultad media (33 por ciento), es decir, que en general, la pregunta no debería representar mayores dificultades para los matemáticos; esto se relaciona con reconocer los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ y por tanto, presentan un nivel de **dominio medio** del conocimiento común del contenido.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
Conocimiento ampliado	
El índice de dificultad de la pregunta (13 por ciento), indica que para los estudiantes no es claro cuáles son los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$; esto corresponde a una pregunta medianamente difícil para los estudiantes y por tanto, presentan un **bajo nivel de dominio** del conocimiento ampliado; además no tienen claro, el teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular, ni la propiedad del grupo de ser cíclico.	En cuanto al conocimiento ampliado, el índice de dificultad (33 por ciento) indica que los estudiantes poseen un **nivel de dominio medio** respecto a los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$, del teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular y de la propiedad de ser un grupo cíclico.
Conocimiento especializado	
El índice de dificultad de la pregunta (13 por ciento), evidencia que los estudiantes no tienen un conocimiento claro del grupo $(D_3, \circ)$ y por tanto, de sus propiedades; lo que corresponde a un **bajo nivel de dominio** del conocimiento especializado del contenido.	En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad (33 por ciento), se observa que los estudiantes de Matemáticas tienen un **nivel de dominio medio** del grupo $(D_3, \circ)$ y de sus propiedades.
PREGUNTA SIETE	
Conocimiento común del contenido ((a))	
Como la pregunta presenta un nivel de dificultad media para los estudiantes (36 por ciento), esto corresponde a un **nivel de dominio medio** del conocimiento común del contenido; es decir, el estudiante no reconoce la tabla de operación para el grupo $V-4$ o $K-4$ de Klein.	En lo que se refiere al conocimiento común del contenido por los estudiantes, la pregunta presenta un nivel de dificultad del 83 por ciento, es decir, la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes; esto corresponde a un **alto nivel de dominio** para reconocer la tabla de operación del grupo $V-4$ o $K-4$ de Klein.
Conocimiento ampliado	
Del índice de dificultad de la pregunta (16 por ciento), se evidencia que los estudiantes no pueden construir el grupo cociente con el grupo $V-4$ o $K-4$ de Klein y $H = \langle a \rangle$, presentando un **nivel de dominio bajo** del conocimiento ampliado del contenido.	En cuanto al conocimiento ampliado, el índice de dificultad (88 por ciento aproximado), indica que los estudiantes tienen un **nivel de dominio alto** que les permite construir el grupo cociente.

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas	Estudiantes de Matemáticas
Conocimiento especializado	
De igual forma, los estudiantes de Licenciatura no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares trabajando con el grupo $V-4$ o $K-4$ de Klein; además, no pueden construir la clase lateral izquierda determinada por el subgrupo del grupo específico; esto corresponde a un **bajo nivel de dominio** del conocimiento especializado del contenido.	Los estudiantes de Matemáticas, tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y pueden construir la clase lateral izquierda determinada por el subgrupo del grupo dado; así, los Matemáticos tienen un **alto nivel de dominio** del conocimiento especializado, respecto al trabajo con el grupo $V-4$ o $K-4$ de Klein.

Como conclusión a la aplicación de la prueba piloto, se observó que en general, el grupo de estudiantes de Matemáticas presentó un nivel de conocimiento de los contenidos un nivel arriba en la escala de valoración, respecto del grupo de Licenciatura en Matemáticas. Los estudiantes de Licenciatura presentaron un nivel de dominio medio del Conocimiento Común del Contenido y los Matemáticos un alto nivel de dominio. Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido, los Licenciados presentaron un bajo nivel de dominio y los Matemáticos en general un alto nivel de dominio. Finalmente, respecto al Conocimiento Especializado del Contenido, los Licenciados presentaron en general un bajo nivel de dominio y los Matemáticos un nivel de dominio medio del conocimiento. Así, se establece que los estudiantes de Matemáticas tienen mejores niveles de dominio o de desempeño del Conocimiento didáctico- matemático en relación con el objeto Grupo. Se hace una “comparación” entre los dos grupos de estudiantes al tener como precedente que respecto a la docencia universitaria, los estudiantes de formación matemática ingresan como profesores de Teoría de Grupos, independiente de si son Licenciados o Matemáticos. De igual forma, los estudiantes de formación matemática hacen estudios de maestría y doctorado en Matemáticas, lo que evidenciaría que poseen el mismo Conocimiento del Contenido Matemático, que los posibilita a realizar estos estudios.

CAPÍTULO 9

Evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

9.1. Introducción

En el capítulo anterior, se diseñó y validó el cuestionario *CDM-Grupo*. Con este cuestionario, se pretenden evaluar ciertos aspectos parciales del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo: conocimiento que se ha potenciado y en algunos casos desarrollado en el proceso de formación universitaria. Estos conocimientos se relacionan con la dimensión epistémica del CDM, ya que, este conocimiento se encuentra integrado por varias dimensiones: epistémica, cognitiva, afectiva, Mediacional, Interaccional y Ecológica (Godino, 2009).

En este capítulo se analizan los resultados de la aplicación del cuestionario final *CDM-Grupo* cuyo proceso de construcción se presentó en el capítulo anterior. Así, a partir de las respuestas dadas por 36 estudiantes de formación matemática a las situaciones problemáticas planteadas en el cuestionario: 16 estudiantes de Licenciatura, grupo G1; 16 estudiantes de Licenciatura del grupo G2 y 4 de Matemáticas. Se realiza en este capítulo el análisis a los conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego en la resolución de éstas situaciones problemáticas. Para el análisis de los resultados, se divide el capítulo en tres secciones: en la primera parte, se realiza una presentación; en la segunda, se describen algunos de los aspectos relacionados con la metodología y los sujetos participantes, los materiales y procedimientos empleados para la aplicación del cuestionario y finalmente, en la tercera sección, se realiza el análisis de tipo cuantitativo-cualitativo (mixto) de los resultados de la aplicación del cuestionario, junto con el análisis de la puntuación total y del índice de dificultad de los ítems. Se finaliza con un análisis detallado, desde una perspectiva mixta (cualitativo-cuantitativo) de algunos de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se pretenden evaluar con los ítems y subítems que componen el cuestionario.

9.2. Método

La presente investigación es de tipo exploratorio-descriptivo, con un enfoque metodológico de tipo mixto (Hart, Smith, Swars & Smith, 2009; Johnson & Onwuegbuzie, 2004) al considerar el análisis de variables cuantitativas por medio de la variable "grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas" y cualitativas por medio del análisis de las configuraciones puestas en juego por los estudiantes de formación matemática al desarrollar las situaciones problemáticas planteadas, que permitieron evaluar y caracterizar ciertos aspectos del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes, según el modelo del CDM en el enfoque EOS (Godino, 2009).

9.3. Población

El cuestionario se aplicó a 36 estudiantes de formación matemática de una universidad Colombiana, que cursaban la asignatura de Teoría de Anillos (Licenciatura y Matemáticas) al finalizar el segundo semestre académico del 2015. Para los estudiantes de licenciatura se tomaron dos grupos el G1 con 16 estudiantes y el grupo G2 con 16 estudiantes (estos grupos corresponden a dos programas distintos el primero de jornada nocturna y el segundo de jornada diurna) y el grupo G3 de Matemáticas que en el semestre solo 6 estudiantes se encontraban cursando la asignatura, pero en este caso, solo 4 estudiantes presentaron la prueba, ya que 2 estudiantes no asistieron el día de la aplicación del cuestionario. Los estudiantes han cursado la asignatura de Teoría de Grupos y se espera que profundicen sus conocimientos en la asignatura de Teoría de Anillos que involucra el grupo conmutativo y un semigrupo bajo la operación definida en el conjunto dado.

Los datos se obtienen mediante la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo* cuyo proceso de diseño y construcción se describió en el capítulo anterior (8): el primer paso, fue la aplicación del cuestionario inicial que aportó una primera aproximación al estudio del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes y de sus dificultades; de igual forma, se trabajó el cuestionario a expertos y finalmente, atendiendo a las recomendaciones de los expertos y se realizaron los ajustes pertinentes al cuestionario piloto, de donde se obtuvo el cuestionario final.

Algunas de las diferencias entre las versiones se encuentran en el cambio del orden en que se presentaron los ítems; ya que, según las argumentaciones de los estudiantes, el tiempo para la prueba piloto era insuficiente y por tanto, trabajaron solo las primeras 7 preguntas. También se tuvo presente el juicio de los expertos en la búsqueda de claridad y concisión de los ítems y subítems. Así, en la versión final, los últimos ítems que no se analizaron (8,9,10,11) y que se deseaban analizar para complementar los resultados de la primera aplicación, se colocaron en primer lugar para la última versión; se buscaba además identificar la causa de no responder las preguntas mencionadas, ya que podían ser diversas como la extensión del cuestionario, cansancio de los estudiantes o la complejidad de los ítems.

9.4. Material y procedimientos

La toma de datos para el cuestionario final estuvo a cargo de dos profesores de la Escuela de Matemáticas y Estadística, los cuales dirigen los cursos de Teoría de Anillos. Dentro del cuestionario se describe el objetivo de la prueba que corresponde a analizar diferentes aspectos en cada programa en la búsqueda de mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático. En el cuestionario se especificaba que este no tiene ningún efecto sobre la nota de la asignatura y que las respuestas son confidenciales y con el único propósito de utilizarlas en la investigación sobre el objeto Grupo y el conocimiento de los estudiantes. Se entregaron los pliegos del cuestionario *CDM-Grupo* a cada estudiante y se explicó nuevamente que el tiempo era de 2 horas. También, en el pliego se solicitaba explicar y argumentar en forma clara y ordenada cada una de las respuestas, además de escribir las dificultades que se les pudieran presentar respecto al contenido matemático con los subítems: en esta ocasión los estudiantes no manifestaron que el tiempo fuera insuficiente para la prueba.

9.5. Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática para la enseñanza del objeto Grupo

En esta sección se presenta un análisis mixto de tipo cuantitativo-cualitativo, de los resultados de los 36 estudiantes de formación matemática. Para esta presentación se organiza el apartado en dos secciones: la primera, donde se realiza el estudio cuantitativo de los resultados y la segunda, que corresponde al análisis mixto. Para estos análisis, se codifica la variable cuantitativa "grado de corrección de las respuestas" donde se asignan las puntuaciones de "25," si la respuesta es correcta; entre "0-25," si la respuesta es parcialmente correcta y "0," si la respuesta es incorrecta. La variable cualitativa que corresponde a la "configuración epistémica" activada en el estudiante al desarrollar la práctica matemática, permitió analizar el tipo de conocimiento puesto en juego por el estudiante al desarrollar la situación-problemática planteada: esta variable se analizó de acuerdo a los objetos matemáticos primarios puestos en juego por el estudiante al desarrollar las prácticas matemáticas: se categorizaron las respuestas de los estudiantes y a partir de éstas categorías se llegó al análisis de los conocimientos de los estudiantes sobre el contenido matemático y la determinación de dificultades evidenciadas en las respuestas de los subítems que dieron lugar a respuestas parcialmente incorrectas o incorrectas.

Se presenta a continuación, el análisis de la puntuación total del cuestionario *CDM-Grupo* y luego, el análisis al índice de dificultad de los ítems y subítems del cuestionario para finalizar con el análisis de las categorías del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática.

9.5.1. Análisis de la puntuación total del cuestionario *CDM-Grupo*

En la tabla 9.1 se presentan las valoraciones de los tres grupos de estudiantes de formación matemática: el grupo G1 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); el grupo G2 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) y el grupo G3 de Matemáticas. Las 11 preguntas corresponden a un total de 1100 puntos; luego, se divide la puntuación por 20 para obtener 55 puntos que correspondería a la máxima puntuación de la prueba (en el contexto universitario Colombiano, las puntuaciones de las pruebas toman valores entre 0 y 50 puntos por lo tanto, se hace la conversión respectiva).

Tabla 9.1: Puntuación para el cuestionario *CDM-Grupo*

G1	**puntaje**	**Total(55)**	**G2**	**Puntaje**	**Total(55)**	**G3**	**Puntaje**	**Total(55)**
LM11	80	4	LM21	335	17	M1	220	11
LM12	60	3	LM22	260	13	M2	370	19
LM13	175	9	LM23	310	16	M3	305	15
LM14	105	5	LM24	275	14	M4	210	11
LM15	125	6	LM25	70	4			
LM16	35	2	LM26	95	5			
LM17	175	9	LM27	75	4			
LM18	90	5	LM28	45	2			
LM19	120	6	LM29	45	2			
LM110	90	5	LM210	170	9			
LM111	105	5	LM211	145	7			
LM112	50	3	LM212	140	7			
LM113	55	2	LM213	185	9			
LM114	145	7	LM214	235	12			
LM115	165	8	LM215	255	13			
LM116	125	6	LM216	195	10			

En la tabla 9.2, se presenta el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno) grupo G1, en el cuestionario

CDM-Grupo sobre el conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo. A partir de esta tabla, se observó que los puntajes totales oscilaron entre 2 y 9 puntos, de lo cual se deduce que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. Se observa además, que la puntuación media es de 5.4 puntos (menos del 10 % del puntaje máximo), lo cual es un puntaje demasiado bajo si las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos.

Tabla 9.2: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G1 de Licenciatura

G1-Licenciatura	**Estadístico**
Media	5.4
Mediana	5
Moda	5
Desv. Típica	2.13
Varianza	4.234
Asimetría	0.293
Curtosis	-0.636
Mínimo	2
Máximo	9
Rango	7
Recuento	16
Percentiles:	
25	3.750
50	5
75	6.25

Los estadísticos descriptivos de la tabla 9.2 y figura 9.1 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es de 5 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher de 0.293 pone de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.

En el diagrama de caja de la figura 9.2 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G1, obtienen una puntuación mayor a 3.8 puntos de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento obtienen una puntuación de 5 puntos y más del 75 por ciento obtienen una puntuación de 6.3 puntos. De otro lado, como la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, las puntuaciones se encuentran más

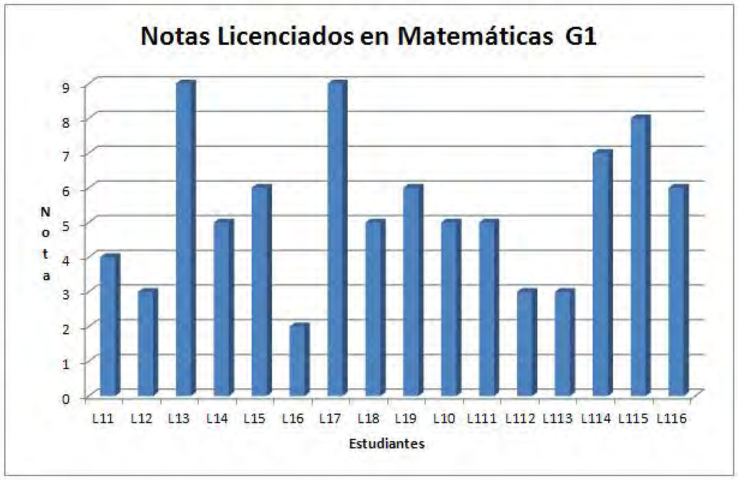


Figura 9.1: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

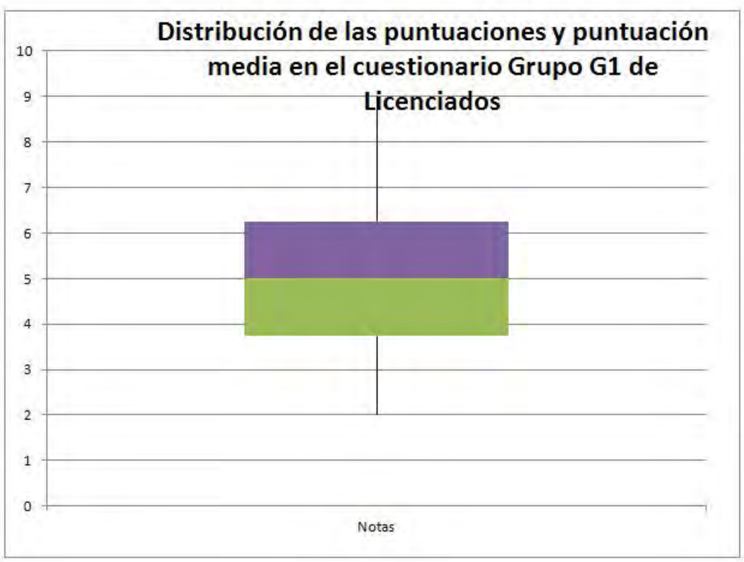


Figura 9.2: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

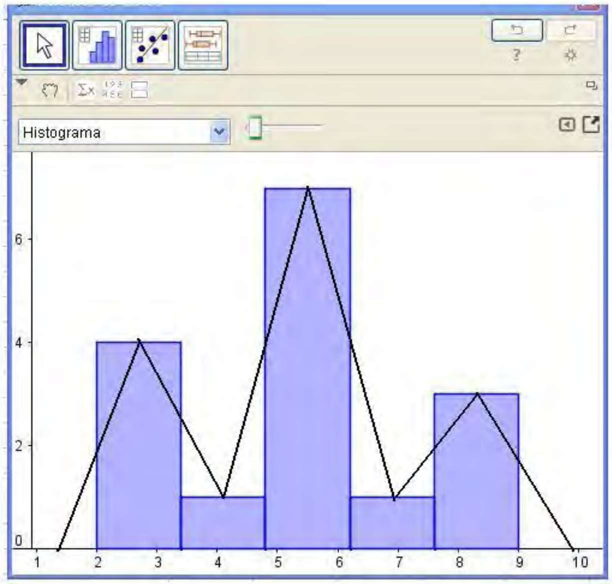


Figura 9.3: Histograma de las puntuaciones totales del grupo G1 de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

concentradas en el 25 por ciento de los datos: estos se encuentran en el intervalo (V_{min}, Q_1), es decir, entre $(2{,}0, 3{,}8)$.

Del histograma de la figura 9.3 se observa que la mayor acumulación o tendencia de los datos, se encuentra en la tercera clase: así, 7 estudiantes de Licenciatura (44 por ciento) obtienen puntuaciones entre 5 y 6.5 puntos (una puntuación muy baja, ya que no alcanza el 12 % de la puntuación total) y en la primera clase, donde el 25 por ciento de los estudiantes obtienen una valoración entre 2 y 3.5 puntos de un total de 55 puntos.

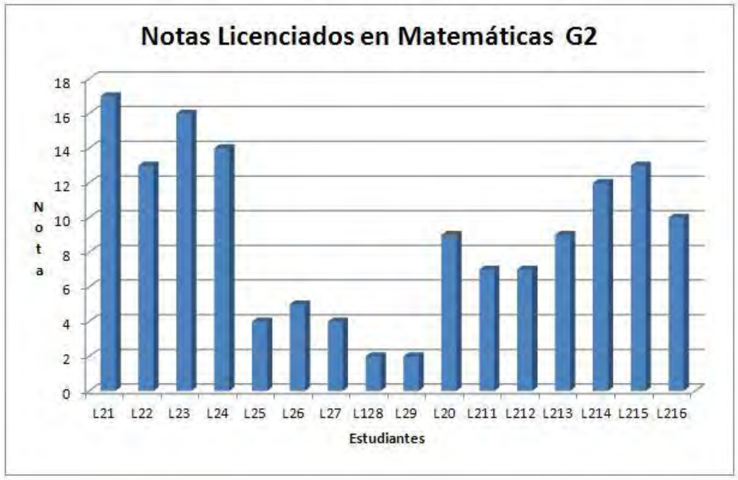


Figura 9.4: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciatura

En la misma dirección, se presenta en la tabla 9.3 y en la figura 9.4 el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) del grupo G2 al cuestionario *CDM-Grupo,* sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilan entre 2 y 17 puntos, de lo cual se deduce al igual que en el caso del grupo anterior G1, que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto un estudiante de Licenciatura obtuvo la mayor nota que corresponde a 30 puntos de 50. Se observa además, que la puntuación media es de 9 puntos lo cual es demasiado bajo; ya que, las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además, en la puntuación se consideran preguntas correctas y parcialmente correctas.

Tabla 9.3: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G2 de Licenciatura

G2-Licenciatura	**Estadístico**
Media	9
Mediana	9
Moda	13
Desv. Típica	4.844
Varianza	22
Asimetría	0.0804
Curtosis	-1.1656
Mínimo	2
Máximo	17
Rango	15
Recuento	16
Percentiles	
25	4.750
50	9
75	13

Los estadísticos descriptivos de la tabla 9.3 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 13 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher que es de 0.0804, deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales a la derecha de la media, es decir, que los puntajes totales se distribuyen unilateralmente.

Del diagrama de caja de la figura 9.5 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G2, obtienen una puntuación mayor a 5 puntos aproximadamente, de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 9 puntos y más del 75 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 13 puntos del total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 24 % de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior también, es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min}, Q_1), esto es, entre $(2{,}0, 4{,}75)$.

Del histograma de la figura 9.6 la mayor acumulación o tendencia de los datos, se encuentra en la primera clase; 4 estudiantes de Licenciatura, es decir, el 25 por ciento de los estudiantes obtuvieron puntuaciones entre 2 y 3.5 puntos (una puntuación demasiado baja) y en las otras cuatro clase el 19 por ciento de los estudiantes obtienen una valoración entre 3.5 y 5; entre 5 y 6.5 puntos; entre 6.5 y 8 puntos y entre 8 y 9.5 puntos respectivamente.

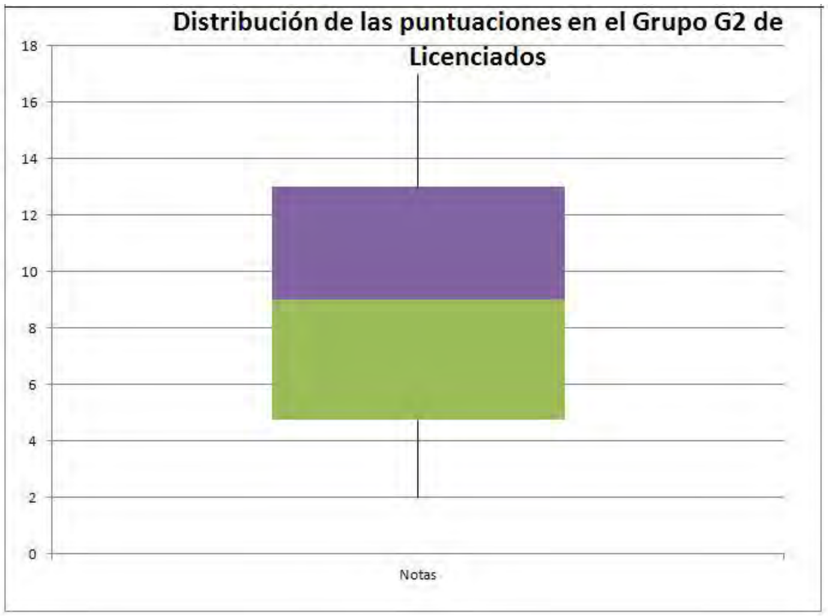


Figura 9.5: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciados

En la tabla 9.4 y en la figura 9.7 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas (programa diurno) grupo G3, al cuestionario *CDM-Grupo* sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilaron entre 11 y 19 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 34 % del puntaje total), de lo cual se deduce, al igual que en el caso del grupo G1 y G2 de Licenciatura, que ningún estudiante respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto los estudiantes de Matemáticas obtuvieron las notas de 36, 37, 39, 39, 44 y 46 (alcanzando el 92 % del puntaje total de la prueba). Se observó además, que la puntuación media fue de 14 puntos, la cual es demasiado baja (no alcanza el 26 % del total de la prueba) al considerar que las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además que para la puntuación total se consideraron preguntas correctas y parcialmente correctas.

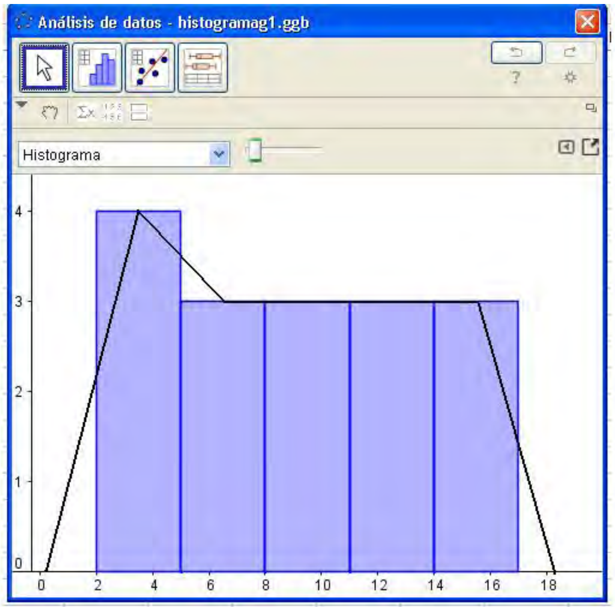


Figura 9.6: Histograma de las puntuaciones totales del grupo G2 de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

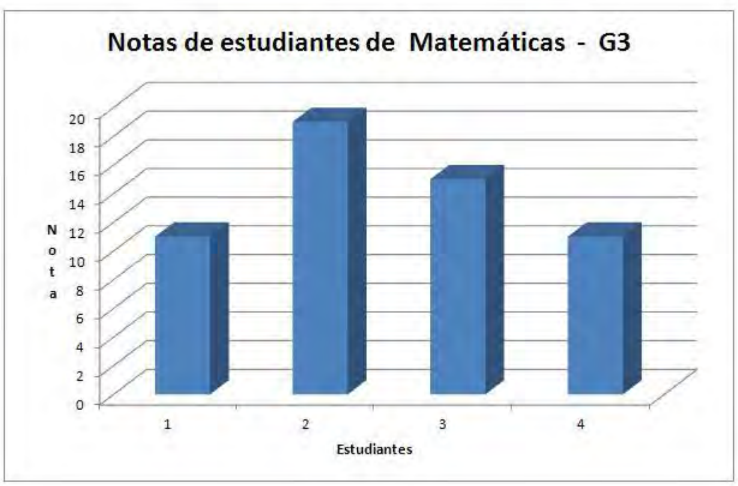


Figura 9.7: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos

Tabla 9.4: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G3 de Matemáticos

G3-Matemáticos	**Estadístico**
Media	14
Mediana	13
Moda	11
Desv. Típica	3.830
Varianza	11
Asimetría	0.8545
Curtosis	-1.289
Mínimo	11
Máximo	19
Rango	8
Recuento	4
Percentiles	
25	11
50	13
75	16

Los estadísticos descriptivos de la tabla 9.4 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 11 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher de 0.8545, deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.

Del diagrama de caja de la figura 9.8 se observa que más del 25 por ciento de los Matemáticos del grupo G3, obtuvieron una puntuación mayor a 11 puntos de un total de 55 puntos (puntuación demasiado baja ya que no alcanza el 20% de la puntuación total; más del 50 por ciento de los Matemáticos obtienen una puntuación de 13 puntos y más del 75 por ciento obtiene una puntuación mayor a 16 puntos de un total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 29% de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min}, Q_1) esto es, entre $(11, 19)$.

Del histograma de la figura 9.9 la mayor acumulación o tendencia de los datos se ubican en la primera clase; 2 estudiantes de Matemáticas, es decir, el 50 por ciento de los estudiantes obtuvieron puntuaciones entre 11 y 13.7 puntos lo cual también es baja y en las siguientes dos clases, el 25 por ciento de los estudiantes presenta una valoración entre 13.7 y 16.4 y entre 16.4 y 19.1, la cual también es demasiado baja, no alcanza al 35% de la puntuación posible puntuación de un total de 55 puntos.

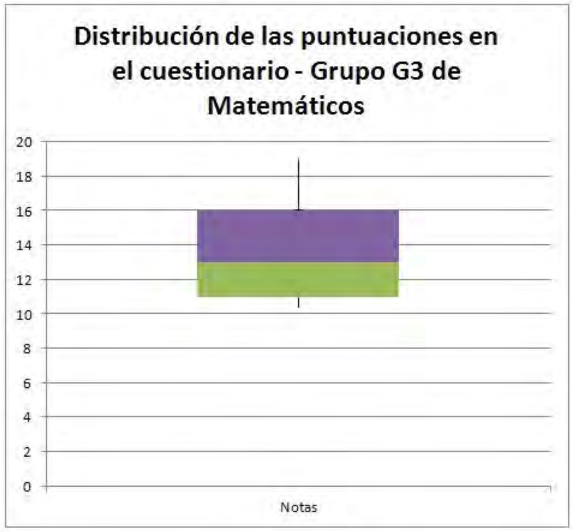


Figura 9.8: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos

9.5.2. Análisis del índice de dificultad a las preguntas del cuestionario

Se presenta el estudio del índice de dificultad de las 11 preguntas que componen el cuestionario *CDM-Grupo*. Este índice, corresponde a la proporción entre el "número de estudiantes que aciertan el ítem sobre el número de estudiantes que resuelven el ítem" (Muñiz, 1994). El índice, toma valores entre 0 y 1; el valor extremo de 0 indica que el subítem tiene un máximo grado de dificultad y el índice 1 indica el grado de máxima facilidad; los índices de dificultad media, son los que mejor discrimina una prueba. Para este análisis, se consideraron el total de respuestas correctas y parcialmente correctas sobre el total de respuestas con el fin de analizar las situaciones-problemáticas que resultaran más fáciles o más difíciles en cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática.

Primero, se presenta en la tabla 9.5 las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1 (programa nocturno).

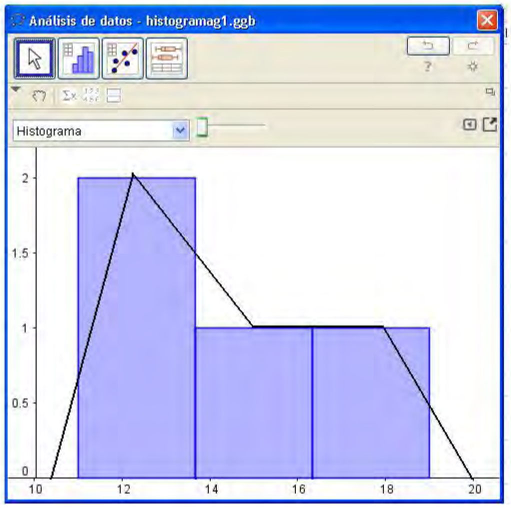


Figura 9.9: Histograma de las puntuaciones totales para el grupo G3 de Matemáticos

Tabla 9.5: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G1 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
b)	3	18.75	4	25	9	56.25
c)	4	25	9	56.25	3	18.75
d)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	5	31.25	10	62.5
b)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
c)	0	0	0	0	16	100
d)	4	25	0	0	12	75
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G1 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	1	6.25	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	2	12.5	2	12.5	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	0	0	11	68.75
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	9	56.25	0	0	7	43.75
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

A continuación, se resume el índice de dificultad de cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* para el grupo G1 de Licenciatura en Matemáticas.

Tabla 9.6: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

P1.	Ítem	Índice de dificultad%	P7.	Ítem	Índice de dificultad%
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	43.75		b)	0
	c)	81.25		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	**45.31**		**media**	**1.56**
P2.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P8.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**3.125**
P3.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P9.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	37.5		b)	25
	c)	0		c)	0
	d)	25		d)	0
	media	**25**		**media**	**7.81**
P4.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P10.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	12.5		a)	31.25
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	6.25
	d)	6.25		d)	56.25
	media	**4.68**		**media**	**34.37**
P5.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P11.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	43.75
	b)	0		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**10.93**
P6.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**			
	a)	6.25			
	b)	0			
	c)	0			
	d)	0			
	media	**1.56**			

Se tiene al igual que para la prueba piloto, la escala para el análisis del índice de dificultad de las preguntas:

Índice de dificultad de 0: ítem de alto-máximo grado de dificultad
Índice de dificultad $\leq 0{,}05$: ítem difícil
$(0{,}05 - 0{,}25)$: ítem medianamente difícil
$(0{,}25 - 0{,}75]$**: ítem de dificultad media**
$(0{,}75 - 0{,}95]$: ítem medianamente fácil
$> 0{,}95$: ítem fácil
1 : ítem de un grado máximo de facilidad.

En la figura 9.10 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo a su índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1. De los 11 ítems explorados, 2 (P2,P5), que corresponden al 18 por ciento, son preguntas que presentan un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); 4 preguntas (P4,P6,P7,P8), que representan el 36 por ciento aproximado de los ítems, son difíciles; las 3 preguntas (P3,P9,P11), son medianamente difíciles (27.3 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas (P1 y P10), tienen una **dificultad media** para los estudiantes de Licenciatura. En este caso no hay ítems medianamente fáciles, ni fáciles, para los estudiantes; tampoco hay preguntas con índices de un grado máximo de facilidad. Se esperaría en general de un cuestionario de evaluación, que el 50 por ciento de las preguntas presentaran una dificultad media; el 20 por ciento fueran medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 9.7 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2 (programa diurno) en el cuestionario.

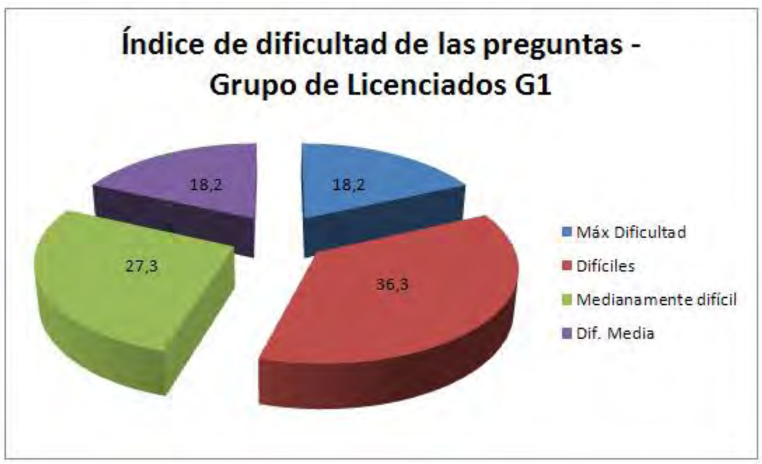


Figura 9.10: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G1

Tabla 9.7: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G2 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	14	87.5	0	0	2	12.5
b)	8	50	0	0	8	50
c)	9	56.25	6	37.5	1	6.25
d)	7	43,75	1	6.25	8	50
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	4	25	12	75
b)	0	0	4	25	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	1	6.25	0	0	15	93.75
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	2	12.5	0	0	14	87.5

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G2 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	1	6.25	2	12.5	13	81.25
c)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	4	25	7	43.75
b)	8	50	2	12.5	6	37.5
c)	0	0	3	18.75	13	81.25
d)	0	0	2	12.5	14	87.5
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	0	0	0	0	16	100
d)	7	43.75	1	6.25	8	50
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	1	6.25	0	0	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

A continuación, se resume el índice de dificultad para cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G2 de Licenciatura en Matemáticas.

En la figura 9.11 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4,P5,P8), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron difíciles para los estudiantes de Licenciatura (programa diurno); 5 preguntas (P2,P3,P6,P11), fueron medianamente difíciles

Tabla 9.8: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2

P1.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P7.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	87.5		a)	12.5
	b)	50		b)	18.75
	c)	93.75		c)	18.75
	d)	50		d)	18.75
	media	70.31		**media**	17.18
P2.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P8.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	0
	c)	18.75		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	9.37		**media**	1.56
P3.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P9.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	25		a)	56.25
	b)	25		b)	62.5
	c)	0		c)	18.75
	d)	6.25		d)	12.5
	media	14.06		**media**	37.5
P4.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P10.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	6.25		a)	18.75
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	50
	media	1.56		**media**	37.5
P5.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P11.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	6.25		a)	43.75
	b)	0		b)	6.25
	c)	6.25		c)	0
	d)	6.25		d)	6.25
	media	4.68		**media**	14.06
P6.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**			
	a)	18.75			
	b)	0			
	c)	18.75			
	d)	12.5			
	media	12.5			

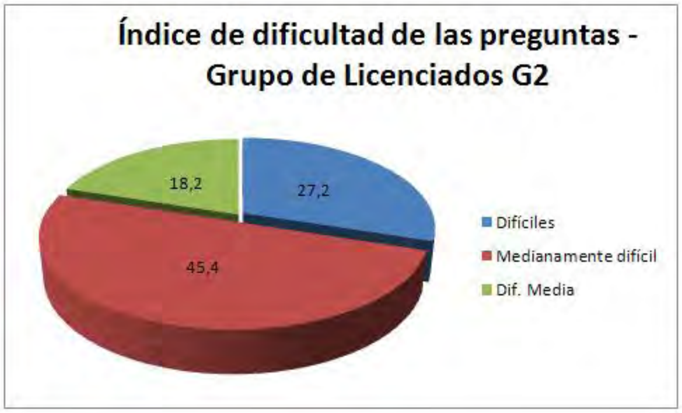


Figura 9.11: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G2

(45 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas, que corresponden al 18 por ciento (P9 y P10), presentaron una **dificultad media**. No hay ítems con un grado máximo de dificultad, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles; de igual forma, no hay preguntas con índices de un de grado máxima facilidad.

En la tabla 9.9 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3 (programa diurno) en el cuestionario.

Tabla 9.9: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G3 de Matemáticos						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	4	100	0	0	0	0
b)	4	100	0	0	0	0
c)	4	100	0	0	0	0
d)	4	100	0	0	0	0
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	1	25	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	4	100	0	0
b)	2	50	2	50	0	0
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	4	100	0	0
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G3 de Matemáticos						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	75	0	0	1	25
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	25	0	0	3	75
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	1	25	0	0	3	75
d)	0	0	0	0	4	100
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	2	50	0	0	2	50
c)	0	0	1	25	3	75
d)	2	50	0	0	2	50
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100

A continuación, se resume el índice de dificultad para las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 9.10: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3

P1.	Ítem	Índice de dificultad%	P7.	Ítem	Índice de dificultad%
	a)	25		a)	6.25
	b)	25		b)	6.25
	c)	25		c)	0
	d)	25		d)	6.25
	media	**25**		**media**	**4.68**
P2.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P8.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	0
	b)	6.25		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**1.56**		**media**	**0**
P3.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P9.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	25		a)	12.5
	b)	25		b)	6.25
	c)	0		c)	6.25
	d)	25		d)	0
	media	**12.5**		**media**	**6.25**
P4.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P10.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	12.5
	c)	0		c)	6.25
	d)	0		d)	12.5
	media	**0**		**media**	**10.93**
P5.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**	**P11.**	**Ítem**	**Índice de dificultad%**
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**4.68**
P6.	**Ítem**	**Índice de dificultad%**			
	a)	18.75			
	b)	6.25			
	c)	0			
	d)	6.25			
	media	**7.81**			

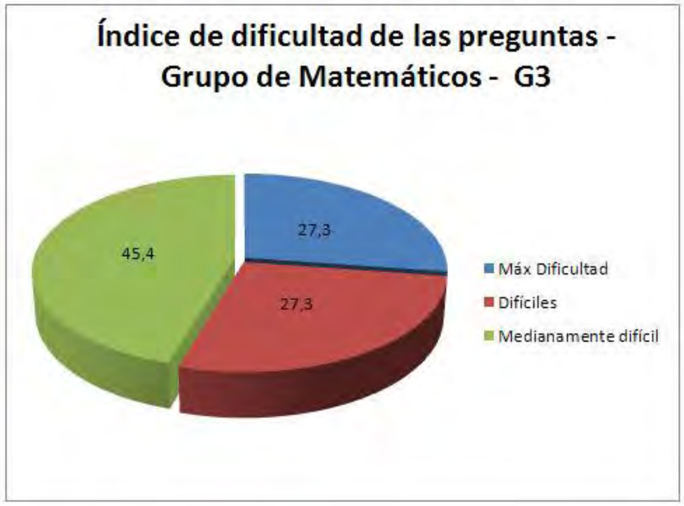


Figura 9.12: Dificultad de los ítems: estudiantes de Matemáticas - G3

En la figura 9.12 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4,P5,P8), presentaron un grado máximo de dificultad para los estudiantes de Matemáticas (27 por ciento aproximado); 3 preguntas (P2,P7,P11), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron difíciles para los Matemáticos; 5 preguntas (P1,P3,P6,P9,P10), fueron medianamente difíciles (45 por ciento). No hay ítems con dificultad media, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles y de igual forma, no se presentaron índices con un grado de máxima facilidad.

Se presenta en la tabla 9.11, el índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo* para los tres grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (G1 y G2) y el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 9.11: Índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo*

Índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo*						
Pregunta	**Licenciatura-G1**	**Porcentaje**	**Licenciatura-G2**	**Porcentaje**	**Matemáticas-G3**	**Porcentaje**
P1	0.4531	45.31	0.7036	70.36	0.25	25
P2	0	0	0.0937	9.37	0.0156	1.56
P3	0.25	25	0.14	14	0.125	12.5
P4	0.0468	4.68	0.0156	1.56	0	0
P5	0	0	0.0468	4.68	0	0
P6	0.0156	1.56	0.125	12.5	0.0781	7.81
P7	0.0156	1.56	0.1718	17.18	0.0468	4.68
P8	0.03125	3.125	0.0156	1.56	0	0
P9	0.0781	7.81	0.375	37.5	0.0625	6.25
P10	0.3437	34.37	0.375	37.5	0.1093	10.93
P11	0.1093	10.93	0.1406	14.06	0.0468	4.68
	Media	**16.21**	**Media**	**20.02**	**Media**	**6.67**

En la tabla 9.11 se observa que para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1, la mayoría de los ítems (el 55 por ciento aproximado) presentaron una **dificultad alta** del 0 por ciento: el grado de dificultad se relaciona con el bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido sobre el objeto Grupo. En general el índice de dificultad del cuestionario final corresponde en promedio al 14 % resultando medianamente difícil para todos los estudiantes. Los ítems y subítems de mayor dificultad para los estudiantes de Licenciatura del grupo G1, fueron:

Subítem 2a):
Que según la tabla 9.12 permite la valoración del conocimiento ampliado del contenido y del conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando así, de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es invariante en el grupo dado. Ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones con cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando así, en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar las permutaciones que dejan invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$

es el grupo dado. Ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura dar un polinomio simétrico, esto es, un polinomio que deje invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ para toda permutación del grupo S_4; ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura establecer la relación que cumplen los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c$ y sus raíces, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 3c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura establecer las permutaciones que dejan invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de rotaciones como un subgrupo regular, según la definición, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición y por tanto, no comprobaron que este subgrupo es conmutativo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5a):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura efectuar la división de polinomios y determinar el cociente, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común y ampliado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura efectuar la división entre polinomios y determinar el residuo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y el especializado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el grupo al cual pertenecen los coeficientes, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y el especializado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar las propiedades y conceptos de Teoría de Grupos, que se utilizaban para efectuar la división entre polinomios y determinar el cociente y el residuo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 6b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números, donde $A_2 = \{1, ..., 99\}$ con la operación de reducción dada, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el elemento identidad del grupo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 6c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números, donde $A_2 = \{1, ..., 99\}$ con la operación de reducción dada, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que este grupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 6d):

Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números, donde $A_2 = \{1, ..., 99\}$ con la operación de reducción dada, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que $z-$ números, son divisibles por 3, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 7b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al concepto de homomorfismos entre grupos, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ en un grupo abeliano no define un homomorfismo, ya que, ningún estudiante probó la falsedad de la pregunta.

Subítem 7c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al concepto de homomorfismos entre grupos, resultando de un grado de dificultad máximo para los estudiantes de Licenciatura determinar que $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ y $a^2 = a$ con el grupo abeliano, no define un homomorfismo en el grupo, ya que, ningún estudiante determinó la falsedad de la pregunta.

Subítem 7d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al concepto de homomorfismos entre grupos, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ y $a = e$ la identidad, no define un homomorfismo en el grupo, ya que, ningún estudiante determinó la falsedad de la pregunta.

Subítem 8c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado contenido, respecto al grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde,

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Subítem 8d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar la operación en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$ y la operación inducida por el grupo dado.

Subítem 9c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común y ampliado del contenido respecto al conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si existe el inverso del elemento 2 en el conjunto de los reales con la operación definida, ya que, no identificaron la no existencia del elemento identidad.

Subítem 9d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura inferir una operación en el conjunto $(\mathbb{R}, \bullet)$ tal que no exista el elemento identidad.

Subítem 11b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $V - 4$ de Klein o $k - 4$ dada la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura construir el grupo cociente por el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

Subítem 11c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $V - 4$ de Klein o $k - 4$ dada la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura describir que el subgrupo H debe cumplir la condición de normalidad para hallar el grupo cociente del grupo por el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

Subítem 11d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y especializado del contenido

respecto al grupo $V-4$ de Klein o $k-4$ dada la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura listar los elementos de la clase bH.

Para el grupo de Licenciatura G1, se observa finalmente de la tabla 9.11 que el *ítem que presentó menor dificultad* (81 por ciento, aproximado) fue el ítem 1c) que se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo dado.

En la misma dirección, se observa en la tabla 9.11, que para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2, los ítems que presentaron una dificultad alta: del 0 por ciento (el 30 por ciento aproximado) y que se relacionan con un bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido respecto al objeto Grupo; corresponden a:

Subítem 2a):
Que según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando así, en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando así, de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar las permutaciones que dejan invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es el grupo dado, ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 3c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura establecer las permutaciones que dejan invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura

determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición y por tanto comprobar que este subgrupo es conmutativo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y el especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición y por tanto, determinar que este subgrupo es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ de los enteros módulo cuatro.

Subítem 5b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común y ampliado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura efectuar la división entre polinomios y determinar el residuo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 6b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números, donde $A_2 = \{1, ..., 99\}$ con la operación de reducción dada, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el elemento identidad del grupo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 8b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común del contenido, respecto al grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que el grupo no es abeliano.

Subítem 8c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado contenido respecto al grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Subítem 8d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar la operación en el grupo $GL(2,\mathbb{C})$ y la operación inducida para el grupo dado.

Subítem 10c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo seis, resultando de un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que el grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es un subgrupo del grupo de los enteros módulo seis.

Subítem 11c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $V-4$ de Klein o $k-4$ dado la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura describir que el subgrupo H debe cumplir la condición de normalidad para determinar el grupo cociente del grupo por el subgrupo $H = \langle a\rangle$.

Para el grupo de Licenciatura G2, finalmente, se observa de la tabla 9.11 que el ítem que presenta menor dificultad (94 por ciento, aproximado) al igual que para el grupo de Licenciatura G1, es el ítem 1c) que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado.

Continuando con el análisis, en la tabla 9.11 se observa también, que para los estudiantes de Matemáticas del grupo G3, los ítems (el 48 por ciento aproximado) que presentan un nivel de dificultad alto para este caso, del 0 por ciento y que se relacionan con un nivel de dominio bajo del Conocimiento del Contenido del objeto Grupo corresponden a:

Subítem 2a):
Que según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando así, en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de estos estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando en máximo grado de dificultad para los Matemáticos dar un polinomio simétrico esto es, un polinomio que deje invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ para toda permutación del grupo S_4, ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Subítem 2d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos establecer la relación que cumplen los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c$ y sus raíces, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 3c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos establecer las permutaciones que dejan invariante la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y el especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición y por tanto comprobar que este subgrupo es conmutativo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 4d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar el subgrupo de rotaciones como subgrupo regular del grupo dado según la definición y por tanto, determinar que este subgrupo es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ de los enteros módulo cuatro.

Subítem 5a):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos efectuar la división de polinomios y determinar el cociente, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común y ampliado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos efectuar la división entre polinomios y determinar el residuo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar el grupo al cual pertenecen los coeficientes, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 5d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar las propiedades y conceptos de Teoría de Grupos, que se utilizan para efectuar la división entre polinomios y determinar el cociente y el residuo, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 6c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al grupo $(A_2, \bigoplus)$ de los $z-$ números, donde $A_2 = \{1, ..., 99\}$ con la operación de reducción dada, resultando en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar que este grupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta la pregunta.

Subítem 7c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto del concepto de homomorfismos entre grupos, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar que $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ y $a^2 = a$, con el grupo abeliano, no define un homomorfismo en el grupo, ya que, ningún estudiante determino la falsedad de la pregunta.

Subítem 8a):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común del contenido, respecto al grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde, $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar los elementos del grupo dado.

Subítem 8b):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común del contenido, respecto al grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde, $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar que el grupo no es abeliano.

Subítem 8c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado contenido respecto al grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde, $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Subítem 8d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde, $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar la operación en el grupo $GL(2,\mathbb{C})$ y la operación inducida para el grupo dado.

Subítem 9d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido respecto al conjunto $(\mathbb{R},\bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura inferir una operación en el conjunto $(\mathbb{R},\bullet)$ tal que no exista el elemento identidad.

Subítem 11c):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido respecto al grupo $V-4$ de Klein o $k-4$ dada la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos describir que el subgrupo H debe cumplir la condición de normalidad para determinar el grupo cociente del grupo por el subgrupo $H = \langle a\rangle$.

Subítem 11d):
Según la tabla 9.12 se relaciona con el conocimiento ampliado y especializado del contenido respecto del grupo $V-4$ de Klein o $k-4$ dado por la relación $a^2 = e = b^2 = c^2$, resultando de máximo grado de dificultad para los Matemáticos listar los elementos de la clase bH.

Para el grupo de estudiantes de Matemáticas G3, finalmente, se observa en la tabla 9.11 que los subítems que presentaron menor dificultad (25 por ciento, aproximado) corresponden a:

Subítem 1a) que corresponde al conocimiento común del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con la determinación de un subgrupo del grupo de simetrías; *subítem 1b)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con determinar un grupo isomorfo al subgrupo del grupo de simetrías dado en el subítem anterior; *subítem 1c)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_4$ de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado; *subítem 1d)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3, \circ)$, de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con justificar porque el grupo de simetrías no es un grupo cíclico.

Subítem 3a) que corresponde al conocimiento común del contenido del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con cuatro elementos y se relaciona determinar el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2; *subítem 3b)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido sobre el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con cuatro elementos y se relaciona determinar el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2 y el 4; *subítem 3c)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido sobre el grupo $(S_4, \circ)$, de permutaciones con cuatro elementos y se relaciona con la determinación del subconjunto de S_4 que deja invariante a la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$.

Como conclusión, se presenta en la tabla 9.12 los *subítems de mayor dificultad* para los dos grupos de Licenciatura:

Tabla 9.12: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1 y G2 de Licenciatura

Licenciatura - G1 y G2	**Categoría del CDM**
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
2b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
6b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

En la misma dirección, se presentan en la tabla 9.13 los *subítems de mayor grado de dificultad* para los tres grupos de estudiantes.

Tabla 9.13: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	**Categoría del CDM**
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

Finalmente, se presenta en la tabla 9.14 el *subítem de menor grado de dificultad* respecto a los tres grupos de estudiantes.

Tabla 9.14: Subítems de menor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	**Categoría del CDM**
1c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado

Se observa de las tablas 9.6, 9.8 y 9.10 que el cuestionario presentó un nivel de dificultad alta, respecto a las preguntas o ítems del cuestionario: en el grupo G1 de Licenciatura tomó valores entre el 1.56 y el 45 por ciento aproximado resultando *medianamente difícil* (dificultad del 16 por ciento) para este grupo de estudiantes; en el grupo G2 tomó valores entre el 10.56 y 70.31 por ciento, con una dificultad del 20 por ciento aproximada, esto es, el cuestionario también resultó *medianamente difícil* para este grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Finalmente, en el grupo G3 de Matemáticas, tomó valores entre el 0 y el 25 por ciento, siendo también, *medianamente difícil* para los estudiantes.

En conclusión, según la tabla 9.11, el cuestionario presentó en promedio un nivel de dificultad del 14 por ciento, luego de la reorganización de las preguntas, resultando medianamente difícil, para los estudiantes de formación matemática; pero, según el diseño de cuestionarios, las preguntas se podrían seleccionar de tal forma que se ajusten a un nivel de dificultad medio, que es lo que se desea en los cuestionario de evaluación; pero, el objetivo de la prueba no se relaciona con la determinación de un nivel de dificultad determinado del instrumento (importante para una prueba homogénea); al contrario, el objetivo de la investigación involucra otros aspectos, como la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático y el análisis a las categorías del CDM en su faceta epistémica (relaciona con los conocimientos acerca del contenido matemático para el objeto de investigación); por tanto, es importante el análisis del índice de dificultad de los instrumentos cuando corresponde a un tema homogéneo, que para el caso no se cumple, ya que con el instrumento se pretenden evaluar diversos aspectos y de pronto si se ajusta el índice de dificultad a un determinado nivel, no se pueden identificar las dificultades reales de los estudiantes con el objeto de investigación.

9.5.3. Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática y dificultades

En los apartados anteriores se analizaron cuantitativamente los resultados del cuestionario *CDM - Grupo* según la variable "grado de corrección de las respuestas" de esta forma, se estudiaron los aspectos: distribución de las puntuaciones totales y el índice de dificultad de los subítems sin profundizar en los aspectos relacionados con los tipos de conocimientos del contenido relacionados con el objeto Grupo y la identificación de dificultades y errores que se presentan en las respuestas de éstos estudiantes de formación matemática.

En esta dirección, como el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto grupo, no es un conocimiento observable en forma directa, se puede inferir de las prácticas que realizan al dar respuesta a cada una de las preguntas que componen el cuestionario *CDM-Grupo,* las cuales son observables, pero, se debe tener presente que la recopilación de datos sea completa y fiable (Godino, 1996; Vásquez, 2014).

Con esta hipótesis, se pasa al análisis de las respuestas de los estudiantes según las tres categorías del conocimiento sobre el contenido matemático que conforman el modelo CDM (Godino, 2009, Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Vásquez, 2014); en la búsqueda del logro al objetivo general de la presente investigación que corresponde a: *Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado que sean la base del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo.*

Se presenta en la sección, el análisis mixto que involucra aspectos relacionados con las componentes a evaluar del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes en relación con el objeto Grupo: esto corresponde a los aspectos relacionados con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado. El análisis se realizó a partir de un enfoque cuantitativo y cualitativo para cada una de las 11 tareas que componen el cuestionario final *CDM-Grupo*. Para el análisis cuantitativo de las respuestas de los estudiantes de formación matemática se considera de igual forma la variable cuantitativa "grado de corrección" la cual tomó los valores de: 25 si la respuesta era correcta, entre (0,25) si la respuesta era parcialmente correcta y 0 si la respuesta era incorrecta o no se responde el subítem (ver, anexo A.6.)

Para el análisis cualitativo, se analizaron las respuestas de los estudiantes agrupando aquellas que son similares, para llegar a una categorización por medio de un proceso inductivo característico del análisis cualitativo de datos (Buendía, Colás & Hernández, 1998; Vásquez, 2014). Luego de establecer las principales categorías de las respuestas, se realizó el análisis de los conocimientos puestos en juego en las respuestas, así como de las dificultades que dieron lugar a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. A partir de este análisis, se obtiene una información descriptiva para cada una de las respuestas, lo que permite describir algunos de los errores y dificultades en las argumentaciones presentes y así en el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto grupo.

Tabla 9.15: Cuestionario *CDM-GRUPO* y categorías del CDM

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 1.	Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.	
	(a)	Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3 Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 2.	Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.	
	(a)	¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b, c en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**
	TAREA 3.	Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.	
	(a)	Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique	Conocimiento común
	(b)	El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**
	TAREA 4.	El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.	
	(a)	Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	¿El subgrupo es conmutativo? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado (a)? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 5.	Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto $(\mathbb{Z}_5,+_5)$.	
	(a)	¿El cociente corresponde a? Justifique	Conocimiento ampliado
	(b)	¿El residuo corresponde a? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(c)	¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 6.	Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,\ldots,99\}$ de los $z-$ números y la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n)=n$ para $n<100$ y para $n>100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214)=r(2+14)=r(16)=16$; $r(5298)=r(52+98)=r(150)=r(1+50)=r(51)=51$. Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x\bigoplus y=r(x+y)$.	
	(a)	Solucione $x\bigoplus 17=99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\bigoplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\bigoplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué $z-$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\bigoplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 7.	Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f: G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).	
	(a)	El grupo es Abeliano.	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(b)	$a = e$	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	$a^2 = a$ y el grupo es abeliano.	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	$a^3 = e$ y el grupo es abeliano	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 8.	Sea $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $B= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	
	(a)	Determine los elementos de G. Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿G es grupo abeliano? Justifique	Conocimiento común
	(c)	Determine el subgrupo de orden 2. Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique	Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 9.	Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$	
	(a)	¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(b)	¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(c)	¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(d)	¿En el conjunto $\mathbb{R}^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 10.	Sea el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.	
	(a)	Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(b)	Escriba un subconjunto de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no sea subgrupo. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	Elabore la tabla de operación para el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$	Conocimiento común
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 11.	Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.	
	(a)	Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.	Conocimiento común
	(b)	Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	Liste los elementos de la clase bH. Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Las clasificación de los ítems y subítems del cuestionario final *CDM-Grupo* se toma del análisis al criterio 3, en la fase de diseño del cuestionario, según la opinión de los expertos. Este criterio hace refrencia a que los subítems correspondan a una de las tres categorías del CDM, por tanto cada ítem puede corresponder a la categoría del CCC, CAC Y CEC. El Conocimiento Común del Contenido es necesario para el desarrollo del Conocimiento Ampliado del Contenido y estos dos se consideran en la investigación, como conocimientos básicos para la potenciación o desarrollo del Conocimiento Especializado del Contenido.

9.5.3.1. Análisis del Conocimiento Común del Contenido

Según Godino (2009) y Vásquez (2014) el conocimiento común del contenido se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza y que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias del nivel educativo, en este caso del nivel universitario y en relación con el objeto Grupo. Para analizar el conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática se diseñaron los subítem (ver, tabla 9.15); **1a), 2d), 3a), 4a), 5b), 6a), 6b), 6c), 6d,7a), 7b), 7c), 7d), 8a), 8b), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 10d) y 11a)** que representan el 55 por ciento de los subítems del cuestionario (44 en total).

Según Godino, Batanero & Font (2007) este conocimiento no es observable, pero se puede utilizar el conjunto de prácticas realizadas por los estudiantes, al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se le plantean y obtener así, algunos indicadores empíricos, que permiten evaluar el conocimiento común del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se presentan en la figura 9.13 y según la tabla 9.15 los subítems que permitieron evaluar la categoría del conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática.

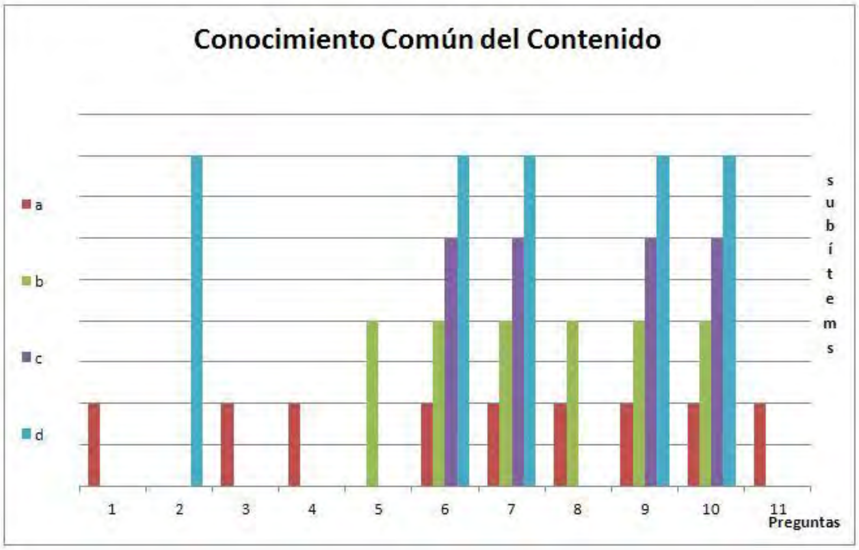


Figura 9.13: Subítems del Conocimiento Común del Contenido

En esta dirección, se presenta el análisis a los subítems que permitieron evaluar el Conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009) de los estudiantes de Formación Matemática, en la categoría del *Conocimiento Común del Contenido -CCC* y en relación con el objeto matemático Grupo, según la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*.

Análisis del subítem 1a)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos del grupo; para lo cual se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido), por qué el subconjunto dado es subgrupo.

Tabla 9.16: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 1a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 93.75 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, solo el 31.25 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observó de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes dieron respuesta al subítem, el 88 por ciento aproximado, lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	5	31.25		14	87.5		4	100
Parcialmente Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Incorrectas	10	62.5		2	12.2		0	0

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes de formación matemática y según la tabla 9.5 se muestra en la tabla 9.17 la clasificación de las respuestas que permitieron inferir algunos de los aspectos relacionados con la comprensión del estudiante, de los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero.

Tabla 9.17: Tipos de respuestas al subítem 1a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: El subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ corresponde a: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	5 estudiantes que representan el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes del grupo G1 representan el 25 por ciento del grupo y el 11.1 por ciento de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento en el grupo G3 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, probando la propiedad de clausura, asociatividad, existencia del elemento identidad y de los inversos.
Respuesta 2: El subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ corresponde a $\{A, B, C\}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante del grupo G1 que corresponden al 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento de los estudiantes del grupo y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, probando la propiedad de clausura.
Respuesta 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1 estudiante, que representa el 6.25 por ciento en el grupo G1 y el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica, probando la propiedad de clausura con los elementos del subconjunto.
Respuesta 4: $\langle \rho_0 \rangle = \{\rho_0\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	5 estudiantes del grupo G2 que representan el 31 por ciento y el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, argumentando que los generadores del grupo son subgrupos del grupo; un subgrupo es el generado por la identidad.

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 5: El centralizador para de la permutación identidad $C(R_0)$.	2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento en el grupo y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, argumentando que R_0 conmuta con todos los elementos de D_3; que R_0 es el centralizador de D_3 .
Respuesta 6: $\{R_0, R_1, R_2\}$ las rotaciones respecto al eje de simetría	2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con la propiedad de clausura para los elementos en el segundo caso; el primer estudiante no justifica.

A continuación, se presenta en la figura 9.14 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM15 del grupo G1.

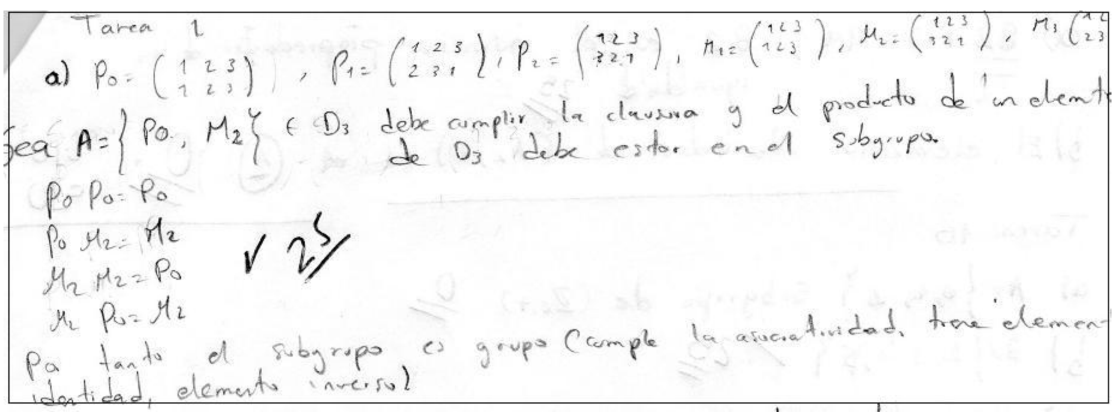


Figura 9.14: Respuesta al subítem 1a -CCC- estudiante LM15

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante de Licenciatura en Matemáticas LM15, se evidencia la comprensión del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero al presentar sus elementos y en cuanto a los subgrupos del grupo, al probar que el conjunto $\{\rho, \mu\}$ forma subgrupo. De la tabla 9.17 de respuestas y del grado de corrección de las preguntas, se observa que en general los estudiantes tiene una comprensión de los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$.

Análisis del subítem 2d)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Tabla 9.18: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 2d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 18.75 por ciento de los estudiantes (3) dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante (4) lo hizo en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas que permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de la relación existente entre las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.19.

Tabla 9.19: Tipos de respuestas subítem 2d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $c = (x^2a+b)^2 \pm b^2+4a$	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 2: $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\frac{-bx\pm\sqrt{(-bx)^2-4x^2c}}{2x^2}$ $\frac{(-bx_2)\pm\sqrt{(bx_1)^2-4x_1^2c}}{2x_1^2}$	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.

Respuesta 3: $(x+x_1)(x+x_2)=0$ donde $x_1x_2=c$ $x_1+x_2=b$ $x_1=-x$ $x_2=-x$ $(-x)(-x)=c$ $x^2=c$ $-x+-x=b$ $-2x=b$	3 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 19 por ciento del grupo y al 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento.
Respuesta 4 : No se entiende el enunciado; no entendí	3 estudiantes del grupo G1 que corresponden al 19 por ciento aproximado del grupo y al 8 por ciento del grupo de estudiantes de formación matemática.

En la figura 9.15 se presenta la respuesta de un estudiante de Licenciatura del grupo G2.

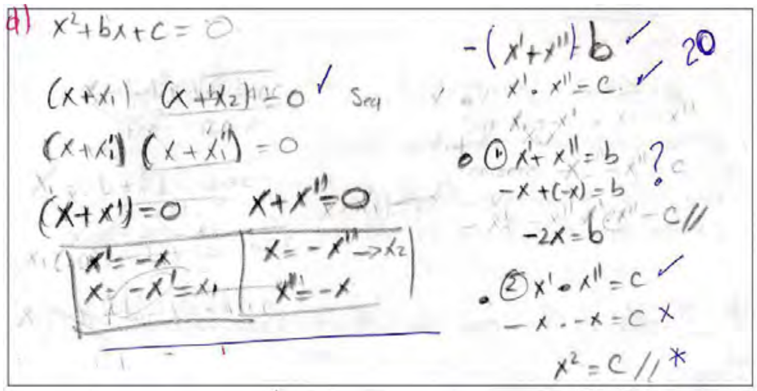


Figura 9.15: Respuesta al subítem 2d -CCC- estudiante LM32

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido, del estudiante LM32, se evidencia de la notación y las representaciones de las raíces de la ecuación, la comprensión del estudiante de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y de sus coeficientes, aunque la misma notación presenta dificultades al estudiante, al llamar por un lado x_1 una raíz y por otra parte la llama x' igual sucede con la segunda raíz. En cuanto a las dificultades de los estudiantes se observa de la tabla 9.18 y 9.19 que solo el 8% de los estudiantes de formación matemática comprenden la relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y sus raíces.

Análisis del subítem 3a)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo S_4 de permutaciones con 4 elementos que dejan invariante el número 2 y dar una justificación.

Tabla 9.20: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 3a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 37.5 (5 estudiantes) por ciento que dieron respuesta solo el 6.25(1) respondió en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 25 por ciento de los estudiantes (4) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) lo hizo en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	5	31.25		4	25		4	100
Incorrectas	10	62.5		12	75		0	0

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación de las respuestas, que se muestra en la tabla 9.21 y que permiten indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática del subconjunto del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos que dejan invariante el número 2 dando una justificación.

Tabla 9.21: Tipos de respuestas al subítem 3a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto	2 estudiantes del grupo G1 que corresponden al 12.5 por ciento en el grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
Respuesta 2: $(134), (143), (1), (14)$	2 estudiantes del grupo G1 que corresponde al 12.5 por ciento en el grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.

	Justifican dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 3: (134)	5 estudiantes que corresponden al 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado y 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 25 por ciento del grupo.
	Justifican dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 4 : $h_1 = (134)$ $h_2 = (143)$ $H = \{h_1, h_2\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 5 : $h_1 = (1)$ $h_2 = (13)$ $H = \{h_1, h_2\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifican dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 6 : $h_1 = (1)$ $h_2 = (143)$ $H = \{h_1, h_2\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifican dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 7 : $h_1 = (134)$ $h_2 = (143)$ $h_3 = (1)$ $H = \{h_1, h_2, h_3\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 8 : (14)	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y al 3 por ciento aproximado de todo el grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 9 : $(34),(143),(134)$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y al 3 por ciento aproximado de todo el grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 10 : $(1),(243),(234)$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y al 3 por ciento aproximado de todo el grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando los elementos.
Respuesta 11 : $(1),(13),(143),(14)$	2 estudiantes del grupo G1 de Licenciatura que representan el 13 por ciento aproximado de todo el grupo y el 6 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifican dando los elementos.

Se presenta en la figura 9.16 la respuesta del estudiante de Licenciatura del grupo G1.

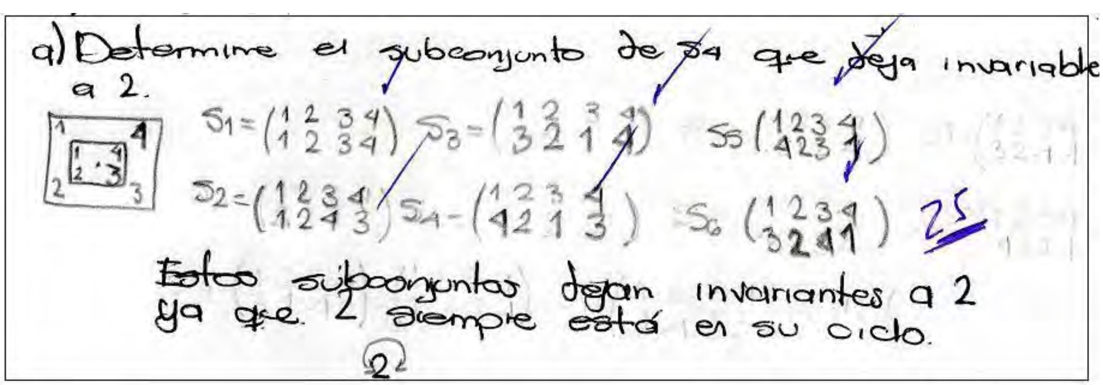


Figura 9.16: Respuesta al subítem 3a -CCC- estudiante LM12

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM12 se evidencia de la notación, la comprensión del grupo $(S_4,\circ)$ de permutaciones con 4 elementos y dentro del grupo el subconjunto que deja invariante el número 2, aunque la argumentación no es completamente válida porque el 2 puede estar en el ciclo sin ser invariante. En cuanto a las dificultades de los estudiantes de formación matemática, de la tabla 9.20 y 9.21 se observa que solo el 3 % de los estudiantes tienen una comprensión de la propiedad del subconjunto que deja invariante el número 2, en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos.

Análisis del subítem 4a)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y dar una justificación.

Tabla 9.22: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 4a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 12.55 (2 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 6.25 por ciento de los estudiantes (1) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	2	12.5		1	6.25		0	0
Incorrectas	14	87.5		15	93.75		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas que permiten indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.23.

Tabla 9.23: Tipos de respuestas al subítem 4a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: El tema no se abordo en el curso; no se entiende a que se refiere con $n-$ símbolos	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado y 2 estudiantes de Matemáticas que representan el 50 por ciento del grupo G3.
Respuesta 2: $\{(1234),(143),(1)\}$	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 3: Uno que tenga las mismas propiedades que A_4	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con la respuesta.
Respuesta 4 : $\{(1),(1234),(13)(24),(1432),(12)(34),(1243),(1342),(1324),(14)(23),(1423)\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.

Se presenta en la figura 9.17, la respuesta del estudiante M3 de Matemáticas al subítem 4a).

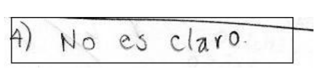


Figura 9.17: Respuesta al subítem 4a -CCC- estudiante M3

Respecto al Conocimiento Común del Contenido, se evidencia que el estudiante no tienen una comprensión acerca del "subgrupo regular (que mueve todos los números y se agrega la identidad para tener el subgrupo)" del grupo $(S_4,\circ)$ de permutaciones con 4 elementos, y en general solo un estudiante evidencia en la notación que comprende el concepto de subgrupo regular al presentar algunos de los elementos del subgrupo. En cuanto a las dificultades de los estudiantes de formación matemática, de la tabla 9.22 y 9.23 se observa que en general ningún estudiante tiene una comprensión del "subgrupo regular (que mueve todos los números y se agrega la identidad para tener el subgrupo)" del grupo $(S_4, \circ)$.

Análisis del subítem 5b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y la determinación del residuo de la división.

Tabla 9.24: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 5b)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondió en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas, presentes en las respuestas que permiten indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática en relación con la división del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ y la determinación del residuo de la división, se llegó a la clasificación que se muestran en la tabla 9.25.

Tabla 9.25: Tipos de respuestas al subítem 5b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $\frac{-13}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{4}x+1$	2 estudiantes del grupo G1 que corresponde al 12.5 por ciento del grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 2: $\frac{-3}{7}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{17}{4}x+1$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G1 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 3 : $\frac{-1}{2}x^4-4x^3$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 4: $\frac{-31}{7}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{17}{4}x+1$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G1 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 5: $3x^5+4x^4-2x^2$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 6: $3x^5+4x^4-3x^2$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 7: $x^5+3x^4+x^3-7x^2+2x$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)
Respuesta 8: $\frac{13}{4}x^3+\frac{39}{8}x^2+\frac{52}{8}x+\frac{13}{8}$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 9: $\frac{43}{8}x^2 + \frac{121}{4}x + \frac{21}{8}$	3 estudiantes que corresponden al 19 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G2 y al 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el residuo (ver anexo A.6.)

Se presenta en la figura 9.18, la respuesta del estudiante LM14 de Matemáticas al subítem 5b).

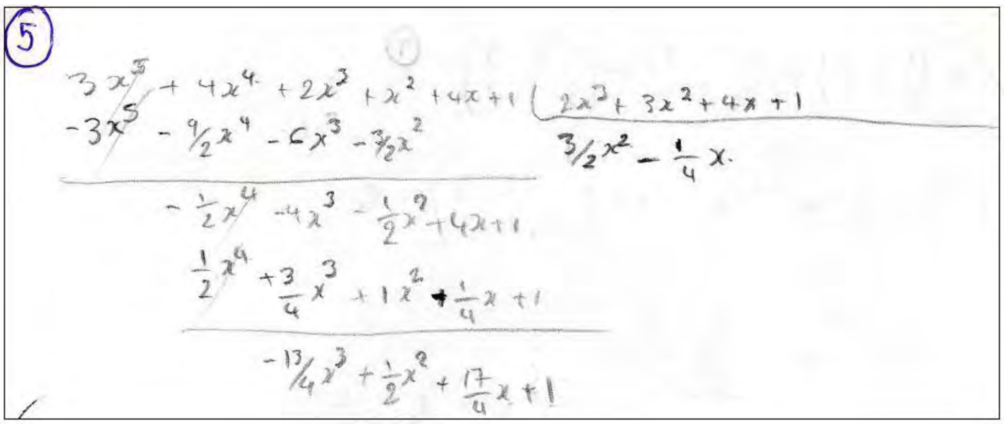


Figura 9.18: Respuesta al subítem 5b -CCC- estudiante LM14

Respecto al Conocimiento Común del Contenido, se evidencia en la notación, la no comprensión del estudiante de la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, específicamente del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ por el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ para determinar el residuo de la división, ya que el estudiante opera los números como si pertenecieran al grupo $(\mathbb{Q}, +)$. En cuanto a las dificultades de los estudiantes de formación matemática, ningún estudiante de formación matemática comprende la operación de división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, específicamente del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ por el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ para determinar el residuo.

Análisis del subítem 6

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 6a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales: para el caso, la solución a la ecuación $x \oplus 17 = 99$ y las propiedades que utilizan para dar solución a la ecuación.

Tabla 9.26: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 6a

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 3 respondieron en forma incorrecta (18.75).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	1	6.25		3	18.75		3	75
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas que permiten indagar sobre la comprensión de los estudiantes de la solución de ecuaciones lineales en el grupo $(A_2, \oplus)$ y de las propiedades que utilizan para dar solución a la ecuación, se llegó a la siguiente clasificación de las respuestas que se muestran en la tabla 9.27.

Tabla 9.27: Tipos de respuestas al subítem 6a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $x = 82$	6 estudiantes del grupo que representan el 17 por ciento aproximado de estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 25 por ciento y 2 estudiantes de Matemáticas que representan el 50 por ciento en el grupo G3.
	Justifican con el procedimiento (ver anexo A.6.)
Respuesta 2: $x = -17$	2 estudiantes que corresponden al 12.5 por ciento de los estudiantes del Grupo G2 y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento (ver, anexo A.6.)

Se presenta en la figura 9.19 la respuesta del estudiante de licenciatura LM17 al subítem 6a).

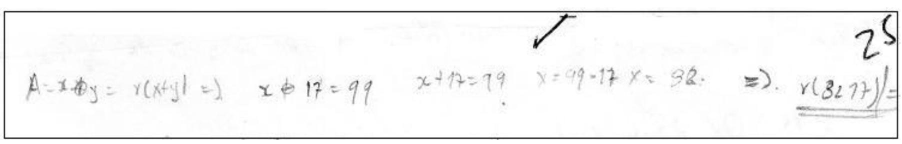


Figura 9.19: Respuesta al subítem 6a -CCC- estudiante LM17

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM17, se evidencia en la notación la comprensión del estudiante del conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 donde $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente la función r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2. Específicamente, se evidencia la comprensión del conjunto dado para buscar la solución de "ecuaciones lineales" en este caso, la solución de la ecuación $x \oplus 17 = 99$ y de las propiedades que debe poner en juego para dar solución a la ecuación. En cuanto a las dificultades de los estudiantes de formación matemática, de la tabla 9.27 se evidencia que solo el 18 % de los estudiantes tiene una comprensión del ítem. Se aclara que los ítems del cuestionario se eligieron según el criterio 1 para la selección de las tareas, teniendo presente que la tarea correspondiera a alguno de los significados del objeto Grupo identificados en el estudio histórico, epistemologico y fenomenológico.

Análisis del subítem 6b)

Con el subítem, se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2, que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la existencia del elemento identidad en $(A_2, \oplus)$ y su justificación.

Tabla 9.28: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 6b

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes respondieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) respondieron en forma incorrecta (18.75 por ciento).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se presenta la siguiente clasificación de las respuestas en la tabla 9.29 que permiten indagar sobre la comprensión de los estudiantes de la existencia del elemento identidad en el grupo $(A_2, \bigoplus)$.

Tabla 9.29: Tipos de respuestas al subítem 6b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: 1	1 estudiante que representa el 6.25 del grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica argumentando que $r(1) = 1$.
Respuesta 2: El conjunto A_2 con la operación definida no posee elemento identidad	5 estudiantes que corresponden al 14 por ciento de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del Grupo G3 que representan el 75 por ciento y 2 estudiantes del grupo G2 que representan el 13 por ciento aproximado.
	Justifican argumentando que 0 no pertenece al conjunto A_2.
Respuesta 3: El conjunto A_2 tiene identidad y es 99	1 estudiante de Matemáticas que corresponde al 6 % de los estudiantes de formación matemática y al 25 % de los estudiantes del grupo G3.
Justifica argumentando que $x \oplus 99 = r(x \oplus 99)$	

Se presenta en la figura 9.20 la respuesta del estudiante de matemáticas M1 al subítem 6b).

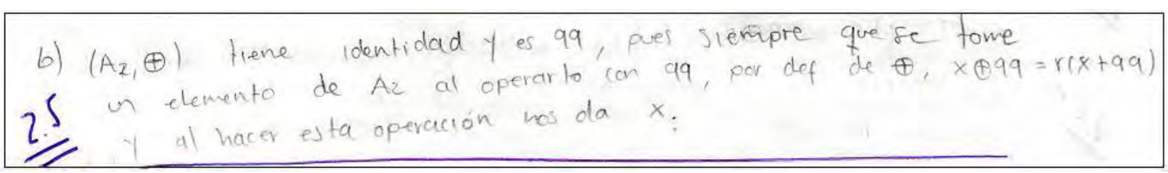

b) $(A_2, \oplus)$ tiene identidad y es 99, pues siempre que se tome un elemento de A_2 al operarlo con 99, por def de $\oplus$, $x \oplus 99 = r(x+99)$ y al hacer esta operación nos da x.
2.5

Figura 9.20: Respuesta al subítem 6b -CCC- estudiante M1

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia con la argumentación, la comprensión que tiene el estudiante del conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2, que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 donde $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En el subítem se evidencia la comprensión del estudiante de la existencia del elemento identidad en el conjunto $(A_2, \oplus)$. Respecto a las dificultades de los estudiantes de la tabla 9,28 y 9.29 se evidencia que solo el 3 % de los estudiantes (1) identifica el elemento identidad en el conjunto $e = 99$. Además se puede inferir que los estudiantes creen que el elemento identidad tiene que ser el 0 o el número 1 que en algunos casos se utilizan para generalizar el elemento identidad.

Análisis del subítem 6c)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes del grupo conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$, al cual es isomorfo el grupo $(A_2, \oplus)$.

Tabla 9.30: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 6c)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.31.

Tabla 9.31: Tipos de respuestas al subítem 6c)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: A_2 es isomorfo a $\mathbb{Z}_{99}$	3 estudiantes que representan el 19 por ciento del grupo G2 y el 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	No Justifican.
Respuesta 2: No es isomorfo a ningún grupo	1 estudiante que corresponde al 25 por ciento de los estudiantes del grupo de Matemáticos y al 3 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica argumentando que A_2 no posee elemento identidad.

A continuación, se presenta en la figura 9.21 la respuesta del estudiante de Licenciatura LM31 al subítem 6c).

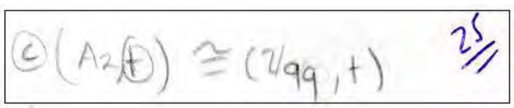


Figura 9.21: Respuesta al subítem 6c -CCC- estudiante LM31

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM31, se evidencia con la notación, la comprensión del conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 donde $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. Específicamente se evidencia la comprensión del estudiante del isomorfismo existente entre el grupo dado y el grupo conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$. De igual forma con las respuestas de los estudiantes se quiere evidenciar las dificultades con la propiedad de isomorfismo entre grupos ya que es claro que solo el 8% de los estudiantes de formación matemática, reconocen la propiedad.

Análisis del subítem 6d)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre los z- números que son divisibles por 3 en el conjunto.

Tabla 9.32: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 6d

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 12.5 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.33

Tabla 9.33: Tipos de respuestas al subítem 6d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Los múltiplos de 3	3 estudiantes que representan el 18 por ciento del grupo G2 y el 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican argumentando que son 66 los múltiplos de 3.

A continuación, se presenta en la figura 9.22 la respuesta del licenciado LM17 al subítem 6d).

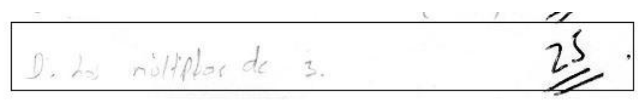


Figura 9.22: Respuesta al subítem 6d -CCC- estudiante LM17

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia con la argumentación presentada, la comprensión del conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 donde $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. Específicamente, se evidencia la comprensión del estudiante de la propiedad de divisibilidad por 3 en el conjunto de los z- números. Respecto a las dificultades se evidencia de la tabla 9.32 y 9.33 que solo el 8% de los estudiantes de formación matemática comprenden la propiedad de divisibilidad por 3 en el conjunto dado.

Análisis del ítem 7

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de Formación Matemática de las propiedades que puede cumplir el homomorfismo $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se solicita responder en cada subítem según la propiedad dada, si es verdadero o falso que f define un homomorfismo y justificar en cada caso.

Análisis del subítem 7a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de definir un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ si el grupo es Abeliano.

Tabla 9.34: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 7a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas- G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 respondieron en forma parcialmente correcta (12.5).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

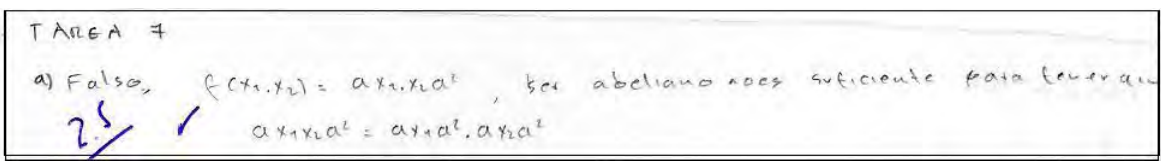
Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	1	6.25		2	12.5		0	0
Incorrectas	15	93.75		14	87.5		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.35.

Tabla 9.35: Tipos de respuestas al subítem 7a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Verdadero	7 estudiantes que representan el 19 por ciento de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo G1 y corresponden al 12.5 por ciento y 5 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 31 por ciento.
	No Justifican.
Respuesta 2: Falso	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G2 y corresponde al 6.25 por ciento y 1 estudiante del grupo G3 que corresponde al 25 por ciento.
	Justifican con el procedimiento (ver anexo A.6.)

A continuación, se presenta en la figura 9.23 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M2 al subítem 7a).


TAREA 7

a) Falso, $f(x_1.x_2) = a x_1.x_2 a^2$, ser abeliano no es suficiente para tener a...

2.5 ✓ $a x_1 x_2 a^2 = a x_1 a^2 . a x_2 a^2$

Figura 9.23: Respuesta al subítem 7a -CCC- estudiante M2

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia en la argumentación, la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ para el grupo es Abeliano y $f(x) = axa^2$ con a un elemento fijo. El estudiante comprende mediante la prueba que bajo las condiciones dadas no se define un homomorfismo en el grupo y además que no es suficiente la condición de que el grupo sea abeliano. Respecto a las dificultades de los estudiantes de fomación matemática, de las tablas 9.34 y 9.35 se observa que solo el 3 % de los estudiantes comprende la propiedades para que una función defina un homomorfismo.

Análisis del subítem 7b)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática al identificar un homomorfismo del grupo $(G,\cdot)$ en sí mismo, donde el elemento e es la identidad del grupo y $f(x) = axa^2$ si el elemento fijo es $a = e$.

Tabla 9.36: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 7b

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 1 (6.25 por ciento) respondió en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.37.

Tabla 9.37: Tipos de respuestas al subítem 7b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Verdadero	4 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del grupo G2 que representan el 19 por ciento y 1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento.
	Justifican con el procedimiento (ver, anexo A.6.)
Respuesta 2: Falso	4 estudiantes que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo G1 que corresponden al 12.5 por ciento y 2 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 12.5 por ciento.
	Justifican con el procedimiento (ver, anexo A.6.)

A continuación, se presenta en la figura 9.24 la respuesta del estudiante de Matemáticas, LM29 al subítem 7b).

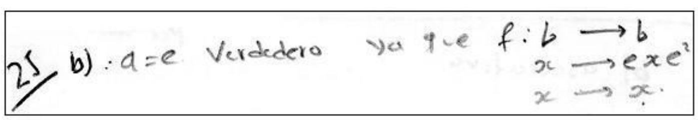

25 b) : a=e Verdadero ya que f : G ⟶ G
x ⟶ exe²
x ⟶ x.

Figura 9.24: Respuesta al subítem 7b -CCC- estudiante LM29

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM29, se evidencia con la argumentación, la comprensión de la propiedad de homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, para $f : G \longrightarrow G$ tal que $f(x) = axa^2$ con a un elemento fijo y la condición adicional que $a = e$. Respecto a las dificultades de los estudiantes de formación matemática, de las tablas 9.36 y 9.37 se observa que solo el 6% de los estudiantes comprende que la función dada en el grupo con la condición adicional hacen que f defina un homomorfismo en el grupo.

Análisis del subítem 7c)
Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ y el grupo es abeliano.

Tabla 9.38: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 7c

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.39.

Tabla 9.39: Tipos de respuestas al subítem 7c)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Verdadero	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 19 por ciento en el grupo G2.
	Justifican con el procedimiento (ver, anexo A.6.)
Respuesta 2: Falso	6 estudiantes que representan el 17 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo G1 y corresponden al 13 por ciento aproximado; 3 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 19 por ciento aproximado y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento.
	Justifican con el procedimiento (ver, anexo A.6.)

A continuación, se presenta en la figura 9.25 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM4 al subítem 7c).

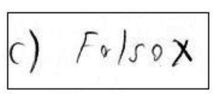


Figura 9.25: Respuesta al subítem 7c -CCC- estudiante LM4

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia, la no comprensión de la propiedad de homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f: G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ y el grupo es abeliano. Respecto a las dificultades de los estudiantes de la tabla 9.38 y 9.39 se evidencia que solo el 6 % de los estudiantes tiene una comprensión de la propiedad de homomorfismo bajo las condiciones dadas.

Análisis del subítem 7d)
Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a^3 = e$ y el grupo es abeliano.

Tabla 9.40: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 7d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.41.

Tabla 9.41: Tipos de respuestas al subítem 7d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Verdadero	4 estudiantes que representan el 11 por ciento de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del grupo G2 y corresponden al 19 por ciento y 1 estudiante del grupo G3 que corresponde al 25 por ciento.
	Justifican con el procedimiento (ver, anexo A.6.)
Respuesta 2: Falso	4 estudiantes que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo G1 que representan el 12.5 por ciento y de igual forma, 2 estudiantes del grupo G2.
	No Justifican (ver, anexo A.6.)

A continuación, se presenta en la figura 9.26 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM29 al subítem 7d).

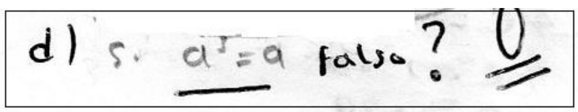


Figura 9.26: Respuesta al subítem 7d -CCC- estudiante LM29

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM29, se evidencia la no comprensión del estudiante de la propiedad de definir un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a^3 = e$ y el grupo es abeliano. Respecto a las dificultades en las tablas 9.40 y 9.41 se observa que solo el 3 % de los estudiantes tienen una comprensión de la propiedad de homomorfismo.

Análisis del subítem 8

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análisis del subítem 8a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$ para determinar en forma explícita los elementos del grupo G.

Tabla 9.42: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 8a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 1 estudiante respondió en forma parcialmente correcta (6.25).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, 100 por ciento (1 estudiante) respondió en forma incorrecta la pregunta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	15	93.75		15	93.75		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.43.

Tabla 9.43: Tipos de respuestas al subítem 8a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica con el procedimiento (ver, anexo A.6.)
Respuesta 2: $G=\{DA+CB \mid D,C\in M_2(\mathbb{C})\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 25 por ciento del grupo G3.
	No Justifican (ver, anexo A.6.)

A continuación, se presenta en la figura 9.27 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM29 al subítem 8a).

En relación al Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM29, se evidencia en la notación la comprensión del estudiante, del grupo $G=\langle A,B\rangle \le GL(2,\mathbb{C})$ al determinar algunos de los elementos del grupo G dado. En cuanto a las dificultades, en las tablas 9.42 y 9.43 se observa que solo el 3% de los estudiantes tienen la comprensión del grupo $G=\langle A,B\rangle \le GL(2,\mathbb{C})$.

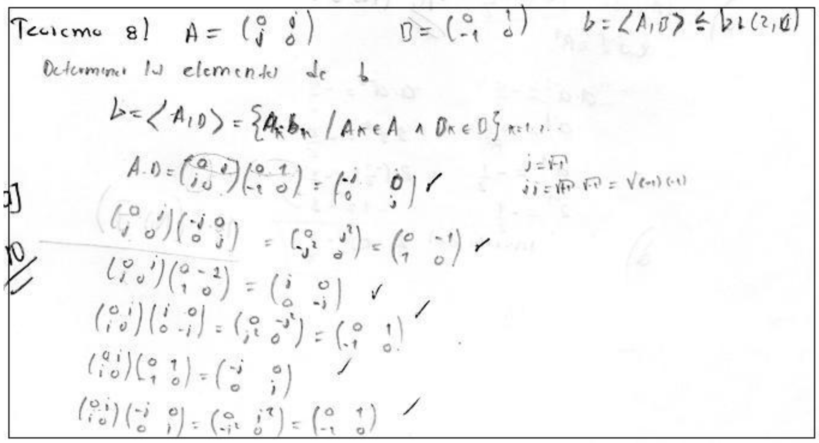


Figura 9.27: Respuesta al subítem 8a -CCC- estudiante LM29

Análisis del subítem 8b)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ para determinar si el grupo G dado es grupo abeliano.

Tabla 9.44: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 8b)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes solo 1 (6.25 por ciento) dio respuesta a la pregunta, en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		16	100		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.45.

Tabla 9.45: Tipos de respuestas al subítem 8b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: No.	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante que representa el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2 y 1 estudiante de matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3.
	Justifica: las matrices no son conmutativas, esto en el primer caso.

A continuación, se presenta en la figura 9.28 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM5 al subítem 8b).

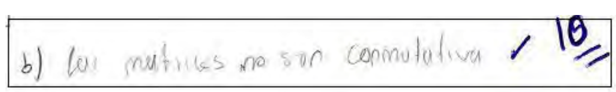


Figura 9.28: Respuesta al subítem 8b -CCC- estudiante LM5

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia en la argumentación la no comprensión de la propiedad conmutativa en el $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$ ya que se generaliza que como las matrices no conmutan el grupo no puede ser conmutativo o abeliano. En cuanto a las dificultades de los estudiantes solo el 3% de ellos responde en forma parcial la pregunta.

Análisis del subítem 9

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Análisis del subítem 9a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de clausura.

Tabla 9.46: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 9a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta y 2(12.5) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron pocas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 5 (31.25) respondieron en forma correcta y 4 el (25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		5	31.25		2	50
Parcialmente Correctas	2	12.5		4	25		0	0
Incorrectas	15	93.75		7	43.75		2	50

Luego de analizar las prácticas matemáticas, se llegó a la clasificación de la tabla 9.47.

Tabla 9.47: Tipos de respuestas al subítem 9a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Si se cumple la propiedad clausurativa	9 estudiantes que representan el **25** por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes que representan el 13 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1; 6 estudiantes del grupo G2 que representan el 38 por ciento aproximado y 1 estudiante de matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3.
	Justifican: porque $a, b \in \mathbb{R}$ $3a+4b+0=3a+4b$ (2 estudiantes)
	$a=1, b=1$ entonces $3(1)+4(1)=7 \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	$a=0, b=1$ entonces $3(0)+4(1)=0+4=4 \in \mathbb{R}$ y $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{4}$ entonces $3\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}=\frac{9}{2} \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	$a \bullet b = 3a+4b$ $=3(2)+4(3)=18 \in \mathbb{R}$ La clausura se cumple ya que, se trabaja con $\mathbb{R}$ (2est)
Respuesta 2: No responden nada, solo justifican	8 estudiantes que representan el 22 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1; 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 11 por ciento aproximado y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3.
	Justifican: Sea $x \in \mathbb{Z}$ $x(a \bullet b) = x(3a+4b)$ (2 est.)
	$a \bullet b = 3a+4b$ (4 est.)
	$a \bullet b = 3a+4b$ Sean $p, h \in \mathbb{R}$ $p \bullet h = 3p+4h \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \bullet b = 3a+4b$ como $a, b \in \mathbb{R}$ así, $3a+4b$ es real (1 est.)

A continuación, se presenta en la figura 9.29 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM20 al subítem 9a).

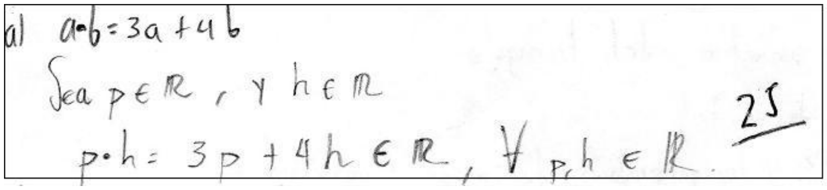


Figura 9.29: Respuesta al subítem 9a -CCC- estudiante LM20

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM20, se evidencia en la notación y con la argumentación la comprensión de la propiedad de clausura en el conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, el 22 % de los estudiantes tienen la comprensión de la propiedad clausurativa en el conjunto dado.

Análisis del subítem 9b)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de asociativa.

Tabla 9.48: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 9b)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 2 (12.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 2 en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 8 (50 por ciento) respondieron en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	2	12.5		8	50		1	25
Parcialmente Correctas	2	12.5		2	12.5		0	0
Incorrectas	12	75		6	37.5		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.49.

Tabla 9.49: Tipos de respuestas al subítem 9b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: No cumple la propiedad asociativa	13 estudiantes que representan el **36** por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes que representan el 25 por ciento de los estudiantes del grupo G1; 8 estudiantes del grupo G2 que representan el 50 por ciento y 1 estudiante de matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3.
	Justifican:$(a\bullet b)\bullet c = a\bullet(b\bullet c)$ $(3a+4b)c \neq a(3b+4c)$ $3(3a+4b)+4c \neq 3a+4(3b+4c)$ $9a+12b+4c \neq 3a+12b+16c$ (12 est.)
	La clausura no ; no es asociativo (2est)
	$(3a+4b)c = a(bc)$ $(3a+4b)c = a(3b+4c)$ $3ac+4bc \neq 3ab+4ac$ (1 est.)
Respuesta 2: No responden nada, solo justifican	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante que representa el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1 y de igual forma, 1 estudiante del grupo G2.
	Justifican: $(a\bullet b)\bullet y = a\bullet(b\bullet c)$ $(3a+4b)c = a(3c+4b$
	$9a+12b+4c = 3a+12b+16c$ (2 est.)

A continuación, se presenta en la figura 9.30 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM11 al subítem 9b).

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM11, se evidencia en la argumentación y con la notación la comprensión de la propiedad asociativa en el conjunto

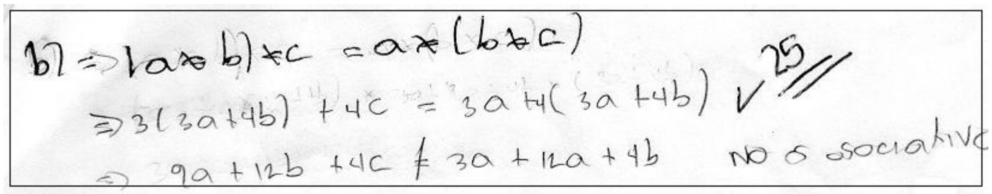


Figura 9.30: Respuesta al subítem 9b -CCC- estudiante LM11

de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ al establecer precisamente que la operación no cumple dicha propiedad. En cuanto a las dificultades de los estudiantes con la pregunta, el 30 % comprende la no asociativa de la operación dada (pregunta con una dificultad media, que es lo esperado para las preguntas de un cuestionario de evaluación).

Análisis del subítem 9c)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar la existencia del inverso del elemento 2 en los reales con la operación definida.

Tabla 9.50: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 9c

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento)lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.51.

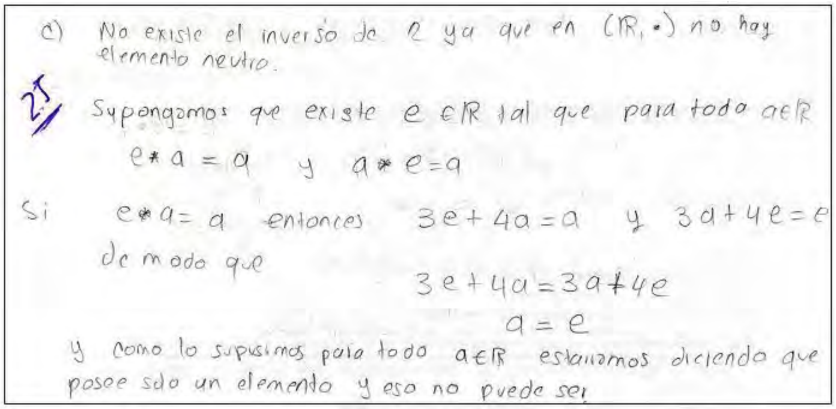
Tabla 9.51: Tipos de respuestas al subítem 9c)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: El elemento inverso del 2 existe	6 estudiantes que representan el 17 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes que representan el 13 por ciento de los estudiantes del grupo G1 y 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 11 por ciento.
	Justifican: $a^* a = e$ e=identidad en $\mathbb{R}$ $a^* 2 = 0$ $3a^* = -8$ $a^* = \frac{-8}{3}$ (1 est.)
	$\frac{1}{2}$ es el inverso de 2 (1 est.)
	$\frac{-1}{2}$ es el inverso de 2 (1 est.)
	$(3a+4b)x = 3a+4b$ despejo x y ahí, está la identidad (1 est.)
	$x = \frac{-1}{2}(3a+4b)$ elemento identidad $y = \frac{-1}{8}(3a+4b) - 6$ el inverso de 2 (1 est.)
	$y = \frac{-1}{8}(3a+4b) - \frac{3}{2}$ el inverso de 2 (1 est.)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 2: 2 no tiene inverso	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes que representan el 13 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1 y 1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo.
	Justifican: $2(3a+4b)=0$ $3(2)+4(3a+4b)=0$ $6+12a+16b=0$ Por tanto, 2 no tiene inverso (1 est.)
	$2a^{*}=0$ $2(3a+4b)=0$ $8+12a+16b=0$ $12a+16b=-8$ 2 no tiene inverso (1 est.)
	Supongamos que existe $e\in\mathbb{R}$ tal que para todo $a\in\mathbb{R}$ $ea=a=ae$ $ea=a$ entonces $3a+4e=a$ y $3a+4e=a$ de modo que $3e+4a=3a+4e$ $a=e$ y como lo supusimos para todo $a\in\mathbb{R}$ estaríamos diciendo que $\mathbb{R}$ posee solo un elemento y eso no puede ser (1 est.)

A continuación, se presenta en la figura 9.31 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M4 al subítem 9c).

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante M4, se evidencia con la argumentación y en la notación la comprensión de la existencia del elemento inverso del número 2 en el conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con la operación $a\bullet b=3a+4b$ para $a,b\in\mathbb{R}$ al determinar que no existe el inverso del número ya que no existe la identidad en el conjunto dado con la operación definida. En cuanto a las dificultades se observa de las tablas 9.50 y 9.51 que solo el 3 % de los estudiantes tiene la comprensión de la existencia del elemento inverso en el conjunto dado y con la operación definida.



c) No existe el inverso de e ya que en $(\mathbb{R}, \bullet)$ no hay elemento neutro.

2.5

Supongamos que existe $e \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$

$e * a = a$ y $a * e = a$

Si $e * a = a$ entonces $3e + 4a = a$ y $3a + 4e = e$

de modo que

$3e + 4a = 3a + 4e$

$a = e$

y como lo supusimos para todo $a \in \mathbb{R}$ estaríamos diciendo que posee solo un elemento y eso no puede ser

Figura 9.31: Respuesta al subítem 9c -CCC- estudiante M4

Análisis del subítem 9d)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ y generalizarla al conjunto $\mathbb{R}_2$ de modo que, para la nueva operación no exista el elemento identidad.

Tabla 9.52: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 9d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo el 12.5 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) dieron respuesta en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.53.

Tabla 9.53: Tipos de respuestas al subítem 9d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $(2,4) \in \mathbb{R}^2$ porque no tiene al 1	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	No Justifica
Respuesta 2: No entendí si la pregunta es una afirmación	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 25 por ciento de los estudiantes del grupo G3.

A continuación, se presenta en la figura 9.32 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM4 al subítem 9d).

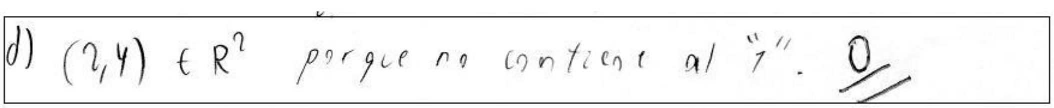


Figura 9.32: Respuesta al subítem 9d -CCC- estudiante LM4

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante, se evidencia que no comprende como generalizar al conjunto $\mathbb{R}_2$ una operación donde no exista el elemento identidad, dado el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$

donde no existe el elemento identidad y no cumple la propiedad asociativa. En cuanto a las dificultades, en general ningún estudiante comprendió la pregunta (pregunta que se puede clasificar como difícil).

Análisis del subítem 10
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 10a)
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar el subgrupo de 3 elementos en el grupo.

Tabla 9.54: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 10a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, solo (5) el 31.25 por ciento respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 3 (18.75) respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	5	31.25		3	18.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	11	68.75		13	81.25		2	50

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.55.

Tabla 9.55: Tipos de respuestas al subítem 10a)

<table>
<tr><th>Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática</th><th>Porcentajes</th></tr>
<tr><td>Respuesta 1:
El subgrupo con 3 elementos $\{1,5\}$</td><td>2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 13 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.</td></tr>
<tr><td></td><td>No Justifican</td></tr>
<tr><td>Respuesta 2:
$\{0,1,2\}$</td><td>9 estudiantes que representan el 25 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes que representan el 25 por ciento de los estudiantes del grupo G1; 5 estudiantes del grupo de Licenciatura G2 que representan el 31 por ciento aproximado.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Justifican:
Con la tabla de operación:
<table><tr><td>+</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> (2 est.)</td></tr>
<tr><td>Es subgrupo ya que, tiene tres elementos y posee un elemento neutro.</td></tr>
<tr><td>Respuesta 3:
$\{0,1,3\}$</td><td>1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.</td></tr>
<tr><td></td><td>No Justifica</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática</th><th>Porcentajes</th></tr>
<tr><td>Respuesta 4:
$\langle 2\rangle = \{0, 2, 4\} = \langle 4\rangle$</td><td>7 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del Grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo; 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 25 por ciento y 2 estudiantes de matemáticas del grupo G3 que representan el 50 por ciento del grupo.</td></tr>
<tr><td></td><td>Justifican:
$\langle 2\rangle = \{0, 2, 4\}$ hallando el generado por 2 y el generado por 4
(4 est.)</td></tr>
<tr><td></td><td>El orden de $\mathbb{Z}_6$ es 6 y el orden del generado por 2 es 3 (1 est.)</td></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>+</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td></tr></table> (2 est.)</td></tr>
</table>

A continuación, se presenta en la figura 9.32 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M3 al subítem 10a).

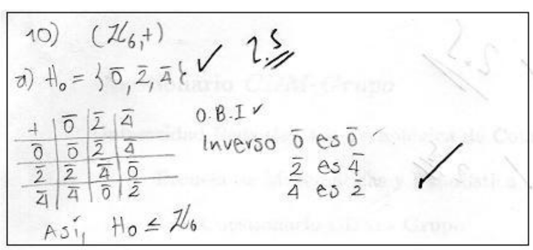


Figura 9.33: Respuesta al subítem 10a -CCC- estudiante M3

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante M3, se evidencia en la notación y con la argumentación que el estudiante comprende la noción de subgrupo de orden 3 del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, el 28 % de los estudiantes conoce el subgrupo de orden 3 en el grupo de los enteros módulo 6 (pregunta de una dificultad media, que es lo deseado para los cuestionarios de evaluación).

Análisis del subítem 10b)
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, al determinar un subconjunto que no sea subgrupo.

Tabla 9.56: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 10b)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	6	37.5		6	37.5		2	50
Parcialmente Correctas	1	6.25		1	6.25		0	0
Incorrectas	9	56.25		9	56.25		2	50

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.57.

Tabla 9.57: Tipos de respuestas al subítem 10b)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $\{1, 2, 3\}$	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo de Licenciatura G1 que representan el 13 por ciento aproximado; 1 estudiante del grupo G2 que representa el 6 por ciento aproximado.
	Justifican: No tiene elemento inverso (2 est.)
Respuesta 2: $\{0, 1, 3, 5\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	Justifican: Un subconjunto que no sea subgrupo, es aquel que su cardinalidad sea diferente de $1, 2, 3, 4$ y que no sea generado por $1, 2, 3, 6$
Respuesta 3: $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado y de igual forma, 1 estudiante del grupo de Licenciatura G2 y 1 estudiante de matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo.
	No justifican:
Respuesta 4: $\{0, 2\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	Justifica: No existe un generador en este subconjunto que genere a $\mathbb{Z}_6$

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 5: $\{2,3,4,5\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	No Justifica
Respuesta 6: $\{0,1,2,3,4\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	No Justifica
Respuesta 7: $\{0,1,2\}$ No es subgrupo	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	No Justifica
Respuesta 8: $\{1,2,3,4\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica: No posee elemento neutro
Respuesta 9: $\mathbb{Z}_4 \subseteq \mathbb{Z}_6$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica: No es subgrupo porque no cumple el Teorema de Lagrange que el orden divide al orden del grupo
Respuesta 10: $S = \{0,1,2,4\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 25 por ciento de los estudiantes del grupo de Matemáticos.
	Justifica: No es subgrupo $1+2=3$ no pertenece a S

A continuación, se presenta en la figura 9.34 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM7 al subítem 10b).

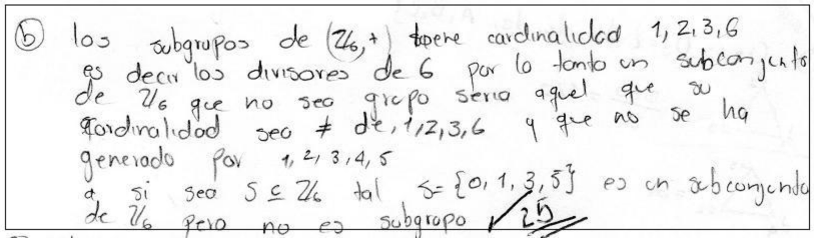

(b) los subgrupos de $(\mathbb{Z}_6,+)$ tiene cardinalidad 1, 2, 3, 6 es decir los divisores de 6 por lo tanto un subconjunto de $\mathbb{Z}_6$ que no sea grupo sería aquel que su cardinalidad sea $\neq$ de, 1, 2, 3, 6 y que no se ha generado por 1, 2, 3, 4, 5
a si sea $S \subseteq \mathbb{Z}_6$ tal $S=\{0,1,3,5\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}_6$ pero no es subgrupo ✓ 2.5

Figura 9.34: Respuesta al subítem 10b -CCC- estudiante LM7

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM7, se evidencia con la notación y en la argumentación la comprensión del Teorema de Lagrange para aplicarlo en la determinación de un subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, que no es subgrupo. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, el 39 % tiene una comprensión de la propiedad de ser subgrupo (pregunta de una dificultad media que es lo deseado).

Análisis del subítem 10c)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar que el grupo $\mathbb{Z}_3$ no es un subgrupo del grupo Z_6.

Tabla 9.58: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 10c

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, 1 (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta, solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		1	25
Incorrectas	15	93.75		16	100		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes, se llegó a la clasificación que se presenta en la tabla 9.59.

Tabla 9.59: Tipos de respuestas al subítem 10c)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: $\mathbb{Z}_3$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$	16 estudiantes que representan el **42 por ciento** aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 6 estudiantes del grupo de Licenciatura G1 que representan el 38 por ciento aproximado; 9 estudiantes del grupo G2 que representan el 6 por ciento aproximado y 1 matemático que representa el 25 por ciento del grupo.
	Justifican: Es subgrupo porque tiene un mismo orden (1 est.)
	Es subgrupo porque tiene un mismo orden y además, los elementos de (1 est.) $\mathbb{Z}_3$ están en $\mathbb{Z}_6$ (2 est.)
	Es subgrupo porque 3 divide a 6; satisface el Teorema de Lagrange (6 est.)
	Por a) (1 est.)
	Puedo sacar ese generador en $\mathbb{Z}_6$ (1 est.)
	El neutro pertenece a $\mathbb{Z}_6$ (1 est.)
Respuesta 2: No	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 Licenciado del grupo G1 que representan el 6 por ciento aproximado y 1 Matemático que representa el 25 por ciento del grupo.
	Justifican: No cumple la cerradura bajo $\mathbb{Z}_6$ (1 est.)
	No, ya que el conjunto $\{0,1,2\}$ no es generado por algún elemento de $\mathbb{Z}_6$ (1 est.)

A continuación, se presenta en la figura 9.35 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM3 al subítem 10c).

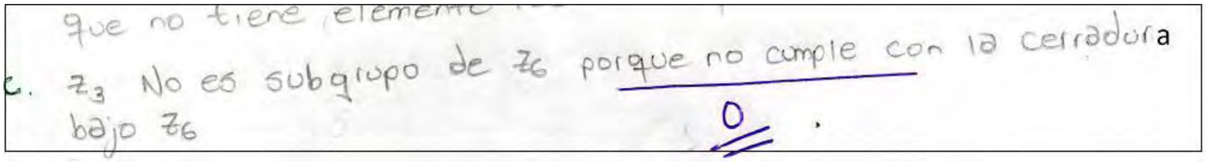


Figura 9.35: Respuesta al subítem 10c -CCC- estudiante LM3

En relación con el Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM3, se evidencia en la argumentación la no comprensión de la propiedad de ser subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ ya que justifica con la clausura la propiedad de ser subgrupo, pero en general $\mathbb{Z}_3$ no es un subgrupo del grupo Z_6 ya que son conjuntos de clases de equivalencia distintos. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, de las tablas 9.58 y 9.59 se observa que solo el 3 % comprenden que el grupo $\mathbb{Z}_3$ no es subgrupo del grupo Z_6.

Análisis del subítem 10d)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y la tabla de operación de los elementos del grupo.

Tabla 9.60: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 10d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, 9 (56.25 por ciento) respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 43.75 por ciento (7 estudiantes) respondieron en forma correcta y 1 estudiante en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta, 2 (50 por ciento) lo hicieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	9	56.25		7	43.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	7	43.75		8	50		2	50

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.61.

Tabla 9.61: Tipos de respuestas al subítem 10d)

<table>
<tr><th>Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática</th><th>Porcentajes</th></tr>
<tr><td>Respuesta 1:
<table><tr><td>+</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td><td>19 estudiantes que representan el 53 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 9 estudiantes del grupo G1 que representa el 6 por ciento y 7 estudiantes del grupo de Licenciatura G2 que representan el 44 por ciento del grupo y 2 matemáticos que representan el 50 por ciento del grupo.</td></tr>
<tr><td></td><td>Justifican.
Con la tabla.</td></tr>
</table>

A continuación, se presenta en la figura 9.36 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M2 al subítem 10d).

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante M2, se evidencia la comprensión de la operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. En cuanto a las dificultades de los estudiantes con el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ se observa de las tablas 9.60 y 9.61 que el 50 % de los estudiantes comprenden la tabla de operaciones de los elementos del grupo (pregunta de una dificultad media que es lo deseado).

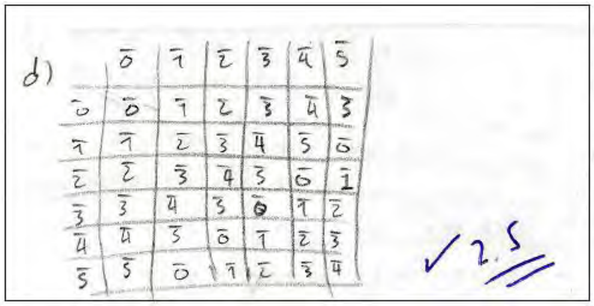


Figura 9.36: Respuesta al subítem 10d -CCC- estudiante M2

Análisis del subítem 11a)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir la tabla de operación para los elementos del grupo.

Tabla 9.62: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 11a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 7 (43.75 por ciento) lo hicieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 7 (43.75 por ciento) lo hicieron en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta 2 (50 por ciento) lo hicieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	7	43.75		7	43.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	9	56.25		9	56.25		2	50

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.63.

Tabla 9.63: Tipos de respuestas al subítem 11a)

<table>
<tr><td>Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática</td><td>Porcentajes</td></tr>
<tr><td>Respuesta 1:
<table><tr><td>·</td><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>e</td><td>e</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>a</td><td>a</td><td>e</td><td>c</td><td>b</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td><td>c</td><td>e</td><td>a</td></tr><tr><td>c</td><td>c</td><td>b</td><td>a</td><td>e</td></tr></table></td><td>16 estudiantes que representan el 44 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 7 estudiantes del grupo G1 que representan el 17 por ciento aproximado y de igual forma, 7 estudiantes del grupo de Licenciatura G2 y 2 estudiantes de matemática que representan el 50 por ciento del grupo.</td></tr>
<tr><td></td><td>Justifican.
Con la tabla.</td></tr>
</table>

A continuación se presenta en la figura 9.37 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M2 al subítem 11a).

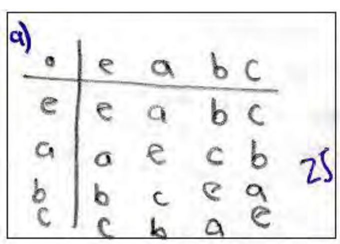


Figura 9.37: Respuesta al subítem 11a -CCC- estudiante LM18

Respecto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante LM18, se evidencia en la notación la comprensión que tiene del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir la tabla de operación para los elementos del grupo. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, se observa en las tablas 9.62 y 9.63 que el 44 % de los estudiantes comprenden la relación entre los elementos del grupo $k-4$ de Klein para realizar la representación en tabla (se evidencia un conocimiento especializado al realizar diferentes representaciones del grupo; además, la pregunta presenta una dificultad media para los estudiantes).

9.5.3.2. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Común del Contenido

A partir del análisis efectuado en la sección anterior, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan grandes debilidades, en relación con el conocimiento común del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente, según la escala establecida para los niveles de dominio del conocimiento cuando se analizan las prácticas de los estudiantes de formación matemática; estos niveles de dominio se toman en relación con el índice de dificultad de cada una de las preguntas: en esta dirección, el CCC de los estudiantes resultó en algunos casos muy deficiente, en la mayoría de los subítems que permiten evaluar este conocimiento sobre el objeto Grupo, a excepción de los siguientes subítems, lo cual se considera como un conocimiento común básico del contenido (se observa nuevamente que las últimas preguntas que se reorganizaron de la prueba piloto resultaron nuevamente con niveles de dificultad media que es lo que se espera en los cuestionarios de evaluación):

Subítem 1a) que corresponde a un nivel básico (medianamente fácil o pregunta fácil según la escala de clasificación para medir el índice de dificultad de la pregunta) para determinar un subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, aunque para el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 31 por ciento aproximado.

Subítem 10b) que corresponde a un nivel básico al relacionarse de igual forma, con los subconjuntos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, que no cumplan con la propiedad de ser subgrupo.

Subítem 10d) que corresponde a un nivel básico al solicitar la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$. Los otros subítems que miden este tipo de conocimiento presentan un muy bajo porcentaje de respuestas correctas como se evidencia en el análisis de los subítems del apartado anterior.

En la figura 9.38 y 9.39 se muestran los porcentajes de las respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática, de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que evalúan el conocimiento común del contenido: se observa que para este tipo de conocimiento predominan en los tres grupos las *respuestas incorrectas,* ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponde al 73 % en promedio aproximado: para el subítem 10b) el 42 % aproximado y para el subítem 10d) el 50 %, pero en general, considerando los tres grupos y según los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, las *respuestas correctas no superaron el 15 por ciento.*

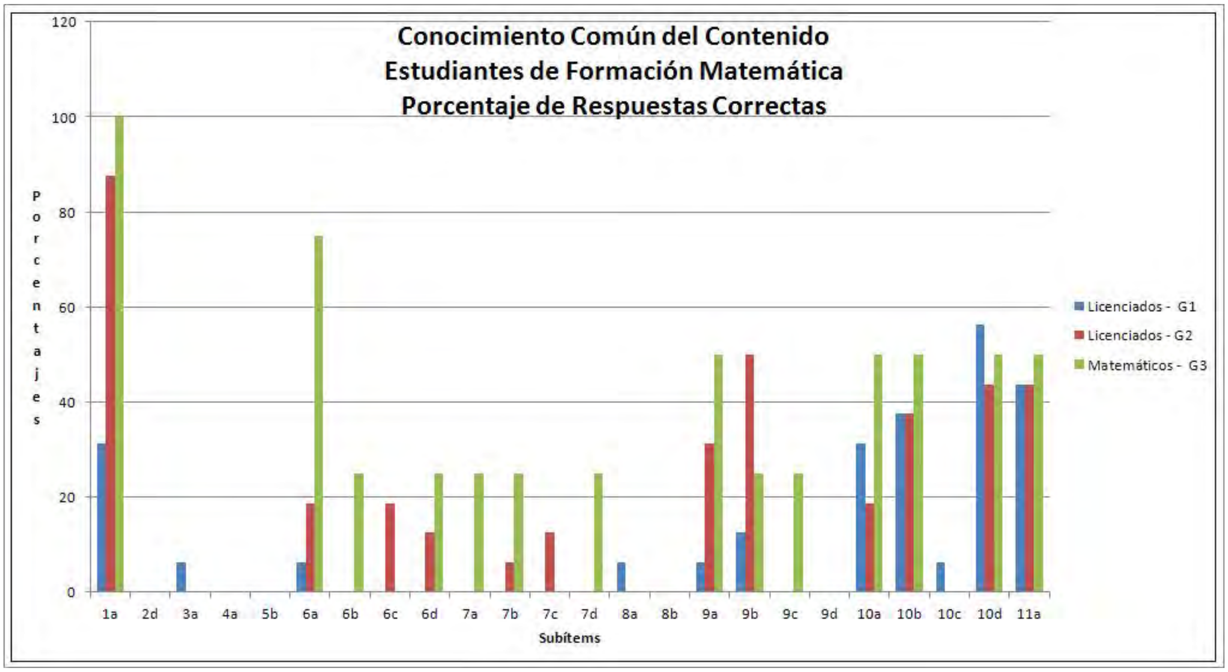


Figura 9.38: Conocimiento Común del Contenido - respuestas correctas

En la figura 9.39 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento común del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas parcialmente correctas, en promedio es muy poco y corresponde al 5.5 por ciento.

Según la figura 9.38 y 9.39 en el grupo de Licenciatura - G1, las *preguntas correctas* no superaron el 11 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de matemáticas, este porcentaje de respuestas correctas no superó el 26 por ciento: en la figura 9.38 se muestran los porcentajes de las respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems, que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido; se observa que para este tipo de conocimiento predomina en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que, el promedio general de los subítems que permiten evaluar el conocimiento común del contenido, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 18 por ciento.

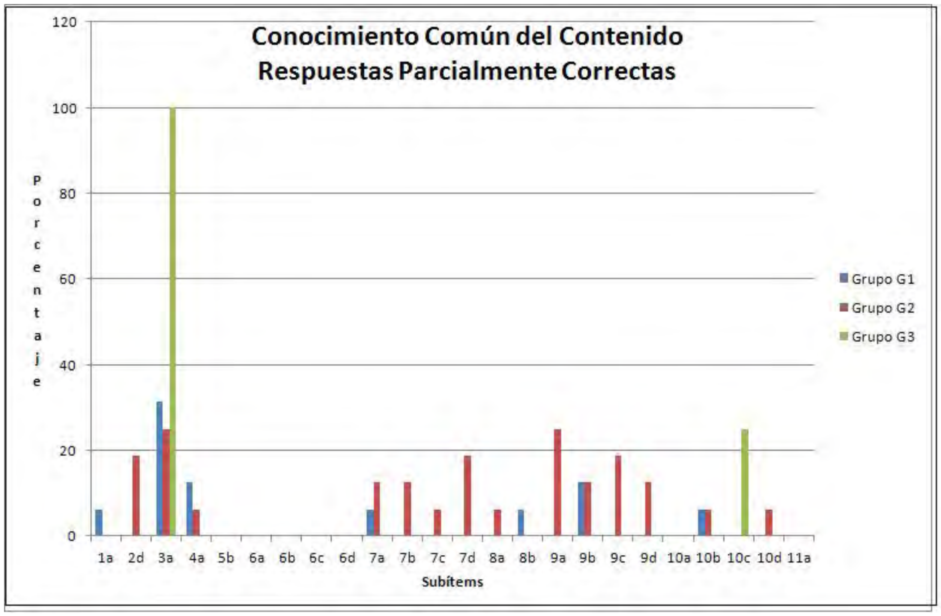


Figura 9.39: Conocimiento Común del Contenido - respuestas parcialmente correctas

En esta dirección, el porcentaje de las preguntas parcialmente correctas (ver, figura 9.39) es muy bajo (5.5 % en promedio): en el grupo de Licenciatura G1, el aporte es de 3.4 % en respuestas parcialmente correctas; en el grupo de Licenciatura G2 de un 7.8 % y en el grupo de Matemáticos G3 el porcentaje corresponde a 5.5 % en promedio: por tanto, el aporte no proporciona mayor información en la valoración de la categoría del Conocimiento Común del contenido, ya que, en general, este no superó el 23 por ciento (corresponde al 22 por ciento). En este sentido, se deben diseñar estrategía que permitan potenciar el CCC en los estudiantes de formación matemática, en especial se deben introducir en los cursos de Teoría de Grupos todos los significados del objeto Grupo, determinados a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico para introducir la metodología propuesta por la fenomenología (Freudenthal) en busca de un sentido para el objeto matemático.

9.5.3.3. Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido

Este tipo de conocimiento al igual que el Conocimiento Común del Contenido, se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que no se direccionan necesariamente a la enseñanza. El Conocimiento Ampliado del Contenido-CAC se refiere a los conocimientos matemáticos más avanzados en el currículo que el profesor debe poseer en relación con un determinado tema: para el caso, corresponde a conocimientos sobre el objeto Grupo. Por tanto, se espera que el profesor universitario de Teoría de Grupos, adquiera en su preparación universitaria, una comprensión de las propiedades de los grupos, para aplicarlas luego a cualquier conjunto dado, en el cual se define una operación binaria interna y con la finalidad de orientar a sus estudiantes en la realización de las diferentes situaciones problemáticas que se proponen en los libros de texto de la asignatura de Teoría de Grupos (ver, capítulo 7, sección 7.4).

Para analizar el Conocimiento Ampliado del Contenido que poseen los estudiantes de formación matemática, se analizaron los subítems que permitieron evaluar algunos de los aspectos de este conocimiento didáctico-matemático, sobre el objeto de investigación. Según la tabla 9.15 y el cuestionario final, se tienen las siguientes consignas respecto al conocimiento para la enseñanza del objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática (ver, figura 9.20): **1b), 1c), 1d), 2a), 2b), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8c), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 11b), 11c) y 11d)** que constituyen el 84 por ciento de los subítems del cuestionario *CDM-Grupo* (de 44 subítems).

Según Godino, Batanero & Font (2007) este conocimiento, al igual que el conocimiento común del contenido, no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas realizadas por los estudiantes al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se le plantean y obtener así algunos indicadores empíricos, que permitan evaluar el conocimiento ampliado del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se analizaron las respuestas dadas a los subítems, que se relacionan con la categoría de conocimiento ampliado del contenido.

Se presenta en la figura 9.40 y según la tabla 9.15 los subítems que permitieron evaluar la categoría del Conocimiento Ampliado del Contenido, de los estudiantes de formación matemática del cuestionario *CDM-Grupo*.

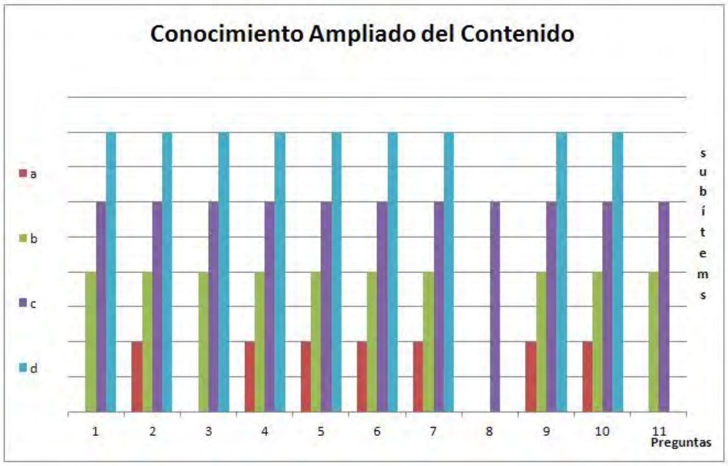


Figura 9.40: Subítems del Conocimiento Ampliado del Contenido

Análisis del subítem 1b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero; específicamente, se solicita en este subítem, dar un ejemplo de un grupo que sea isomorfo al subgrupo del subítem anterior (1a).

Tabla 9.64: Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, solo el 18.75 por ciento (3) lo hicieron en forma correcta y el 25 por ciento (4) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (8) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	3	18.75		8	50		4	100
Parcialmente Correctas	4	25		0	0		0	0
Incorrectas	9	56.25		8	50		0	0

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas y según la tabla 9.5, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.65; las respuestas permitieron inferir aspectos relacionados con la comprensión del estudiante de los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero: específicamente, de los subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo D_3 (para el análisis del subítem se analiza el 1a) del CCC ya que, se relacionan).

Tabla 9.65: Tipos de respuestas al subítem 1b)

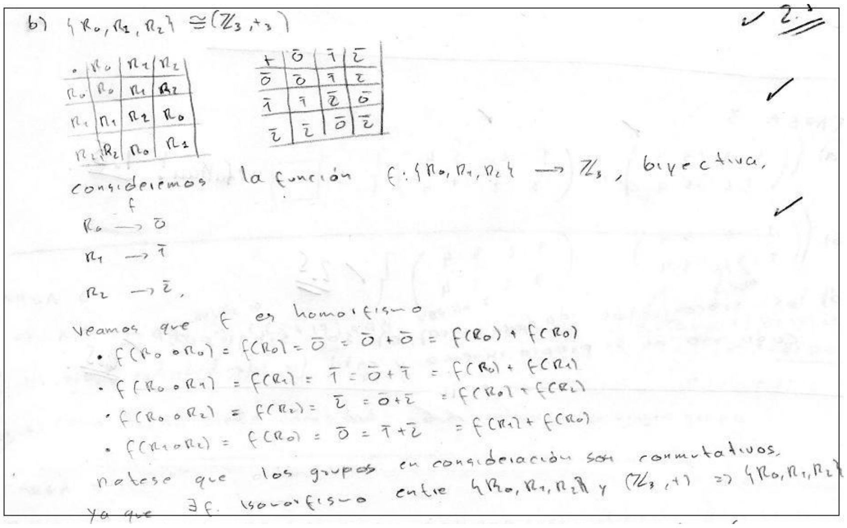
Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: S_6	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 13 por ciento aproximado, del grupo de estudiantes de Licenciatura G1.
	Justifican: Porque tiene 6 elementos (2 est.)
Respuesta 2: $\{(1),(13)\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento del grupo G1.
	Justifican: $\{(1),(13)\}$ (este es el subgrupo dado) tiene el mismo número de elementos, se puede tener la inyectividad y la sobreyectividad, además, cumple las propiedades de homomorfismo (1 est.) (argumenta, que el grupo dado es isomorfo a él mismo).
Respuesta 3: Para cuando $\alpha \neq 1$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y el 3 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica: Porque cambia la función

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 4: Es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$	8 estudiantes que representan el 22 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes de Licenciatura del grupo G1 que representan el 13 por ciento aproximado; 3 estudiantes de Licenciatura del grupo G2 que representan el 19 por ciento aproximado y 3 estudiantes de Matemáticas que representan el 75 por ciento de los estudiantes.
	Justifican: Porque $H = \{(1), (123), (132)\}$ tiene tres elementos; porque H tiene la misma cardinalidad (3 est.) Porque $H = \{(1), (123), (132)\}$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ y prueban el isomorfismo (4 est.)
Respuesta 5: Para cuando $\alpha \neq 1$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y el 3 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica: Porque cambia la función
Respuesta 6: El $\langle d_1 \rangle$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y el 3 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican: Porque $H = \{(1), (123), (132)\}$ tiene tres elementos; porque H tiene la misma cardinalidad (3 est.) Porque $H = \{(1), (123), (132)\}$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ y prueban el isomorfismo (4 est.)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 7: $D_3 \cong S_3$	7 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes del grupo G1 que representan el 25 por ciento y 3 estudiantes del grupo de licenciatura G2 que representan el 19 por ciento del grupo.
	Justifican: Porque se comportan de manera similar (6 est.). Porque tienen las mismas características (1 est.)
Respuesta 8: A $(\mathbb{Z}_2, +_2)$	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y 1 estudiantes de Matemáticas que representan el 25 por ciento de los estudiantes.
	Justifican: Porque existe la biyectividad (1 est.) Porque si $H = \{(1), (23)\}$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ claramente la función $f : H \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $(1) \longrightarrow 0$ y $(23) \longrightarrow 1$, claramente la función es inyectiva, pues a cada elemento de H le asigna un único elemento de $\mathbb{Z}_2$ y es sobre pues $f^{-1}(0) = (1)$ y $f^{-1}(1) = (23)$ (1 est.)
Respuesta 9: (13)	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	No justifica.

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 10: A un grupo que tenga la misma estructura	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1.
	No justifica.
Respuesta 11: Los subgrupos anteriores pueden ser isomorfos a un subgrupo de Permutaciones	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	No justifica.
Respuesta 12: D_3 es isomorfo a D_3	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica: $f : D_3 \longrightarrow D_3$ $A \longrightarrow A$
Respuesta 13: S_3 es isomorfo a $C(R_0)$	5 estudiantes que representan el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 31 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifican: El grupo de permutaciones es isomorfo a cualquier grupo (5 est.).
Respuesta 14: $H = \{R_0, R_1, R_2\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica: $G/H = \{R_0, R_1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Se presenta en la figura 9.41 la respuesta del estudiante de Matemáticas, M2 al subítem 1b).



b) $\{R_0, R_1, R_2\} \cong (\mathbb{Z}_3, +_3)$ ✓ 2.

$\circ$	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	R_0
R_2	R_2	R_0	R_1

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

consideremos la función $f : \{R_0, R_1, R_2\} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, biyectiva,

$R_0 \xrightarrow{f} \bar{0}$

$R_1 \longrightarrow \bar{1}$

$R_2 \longrightarrow \bar{2}$,

veamos que f es homorfismo

- $f(R_0 \circ R_0) = f(R_0) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = f(R_0) + f(R_0)$
- $f(R_0 \circ R_1) = f(R_1) = \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = f(R_0) + f(R_1)$
- $f(R_0 \circ R_2) = f(R_2) = \bar{2} = \bar{0} + \bar{2} = f(R_0) + f(R_2)$
- $f(R_1 \circ R_2) = f(R_0) = \bar{0} = \bar{1} + \bar{2} = f(R_1) + f(R_0)$

notese que los grupos en consideración son conmutativos,

ya que $\exists f$. isomorfismo entre $\{R_0, R_1, R_2\}$ y $(\mathbb{Z}_3, +) \Rightarrow \{R_0, R_1, R_2\}$

Figura 9.41: Respuesta al subítem 1b -CAC- estudiante M2

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante M2, se evidencia de la notación y la argumentación la comprensión de los subgrupos isomorfos, para el caso subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero. En cuanto a las dificultades de los estudiantes de las tablas 9.64 y 9.65 se observa que el 53 % de los estudiantes tienen esta comprensión, resultando la pregunta de una dificultad media que es lo que se espera de un cuestionario de evaluación.

Análisis del subítem 1c)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y la no existencia de un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, donde el estudiante debe aplicar el Teorema de Lagrange para dar respuesta al subítem, según el orden de los subgrupos del grupo de simetrías del triángulo equilátero.

Tabla 9.66: Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, el 25 por ciento (4) lo hicieron en forma correcta y el 56.25 por ciento (9) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 56.25 por ciento (9) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta y el 37.5 en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

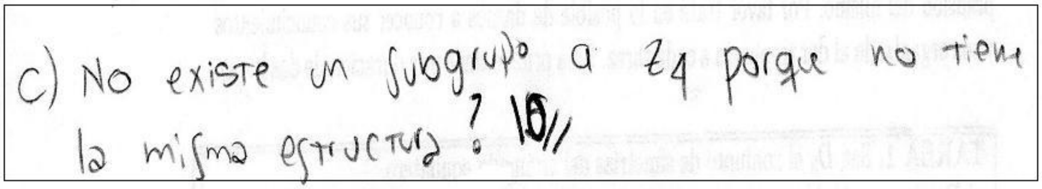
Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	4	25		9	56.25		4	100
Parcialmente Correctas	9	56.25		6	37.5		0	0
Incorrectas	3	18.75		1	6.25		0	0

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación de la tabla 9.67.

Tabla 9.67: Tipos de respuestas al subítem 1c)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: No existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $\mathbb{Z}_4$	26 estudiantes que representan el **72 por ciento** aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 9 estudiantes del grupo G1 que representa **el 31 por ciento** y 13 estudiantes del grupo de Licenciatura G2 que representan el **81 por ciento** del grupo y los 4 Matemáticos que representan el **100 por ciento**.
	Justifican: No tienen la misma estructura; no se puede tener la biyectividad; no tienen la misma cardinalidad; no se comportan iguales (6 est.)
	El orden de $\mathbb{Z}_4$ no divide a 6 (3 est.); el grupo $\mathbb{Z}_4$ es de orden 4 y de los subgrupos de D_3 ninguno es de orden 4 (3 est.): por el Teorema de Lagrange el orden del subgrupo divide el orden del grupo (2 est.).
	$\mathbb{Z}_4$ no se comporta igual a las rotaciones y las reflexiones (1 est.)
Respuesta 2: D_3 no es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$,	4 estudiantes que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 25 por ciento del grupo G1.
	Justifican: No tienen la misma estructura (1 est.)
Conocimiento Ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 3: $D_1 =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\cong S_3 =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1 estudiante del grupo G2 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y el 3 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	No justifica.

A continuación, se presenta en la figura 9.42 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM6 al subítem 1c).



c) No existe un subgrupo a Z_4 porque no tiene la misma estructura ? 10//

Figura 9.42: Respuesta al subítem 1c - CAC - estudiante LM6

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM6, se evidencia en los argumentos la comprensión del Teorema de Lagrange por el cual el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. En cuanto a las dificultades de los estudiantes se observa de las tablas 9.66 y 9.67 que el 47 % de los estudiantes comprenden el Teorema de Lagrange y el concepto de orden del grupo.

Análisis del subítem 1d)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y la propiedad que no cumple el grupo, de ser cíclico.

Tabla 9.68: Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 12.5 por ciento (2) de los estudiantes lo hicieron en forma correcta y el 6.25 por ciento (1) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 43.75 por ciento (7) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta y el 6.25 (1) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	2	12.5		7	43.75		4	100
Parcialmente Correctas	1	6.25		1	6.25		0	0
Incorrectas	13	81.25		8	50		0	0

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llega a la clasificación de la tabla 9.69.

Tabla 9.69: Tipos de respuestas al subítem 1d)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Sí, D_3 es cíclico	20 estudiantes que representan el **56 por ciento** aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 14 estudiantes del grupo G1 que representan **el 88 por ciento aproximado** y 6 estudiantes del grupo de Licenciatura G2 que representan el **38 por ciento** aproximado del grupo.
	Justifican: Existe por lo menos un elemento que genere a todo D_3; $G = \langle a \rangle$;$G = \langle R_0 \rangle$ (9 est.)
	No existe una permutación diferente a la identidad que nos genere todo el conjunto de simetrías del triángulo equilátero (6 est.)
	Sus permutaciones son cíclicas (3 est.)
	Existe una correspondencia biyectiva entre dos subconjuntos (1 est.)
Respuesta 2: D_3 no es cíclico	14 estudiantes que representan el 39 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes del grupo G1 que representan el 13 por ciento aproximado; 8 estudiantes del grupo G2 que representan el **50 por ciento** y los 4 estudiantes de Matemáticas que representan el **100 por ciento** del grupo.
	Justifican: No existe una permutación que genere todas las rotaciones como las reflexiones (2 est.)
	No existe un elemento que genere a D_3 (9 est.)
	No hay un subgrupo que genere el grupo (1 est.)
	Si tomamos $f_1 * R_1 = f_3$ y $R_1 * f_1 = f_2$ no es conmutativo (2 est.)

A continuación, se presenta en la figura 9.43 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM15 al subítem 1d).

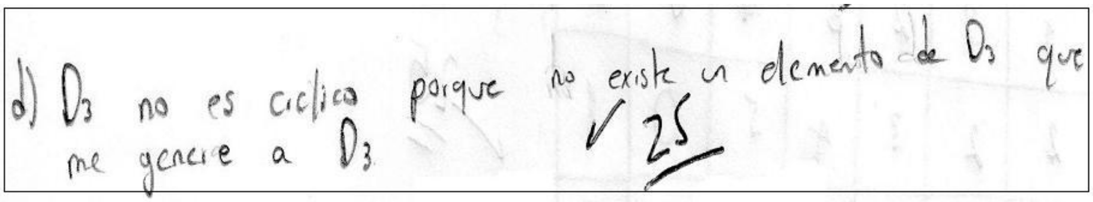

d) D_3 no es cíclico porque no existe un elemento de D_3 que me genere a D_3 ✓ 25

Figura 9.43: Respuesta al subítem 1d -CAC- estudiante LM15

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM15, se evidencia con los argumentos la comprensión de la propiedad de los grupos de ser cíclico al analizarla en el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, para el cual dicha la propiedad no se cumple. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, el 36% de los estudiantes comprenden esta propiedad, resultando la pregunta medianamente díficil que es lo que se espera de los cuestionarios de evaluación.

Análisis del subítem 2

Con este ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo S_4 de permutaciones de los elementos x_1, x_2, x_3, x_4 y una función de las permutaciones de los elementos del grupo $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que, si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se define f como un invariante del grupo S_4.

Análisis del subítem 2a)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática al determinar si la función particular $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ es una función invariante del grupo de permutaciones con cuatro elementos S_4.

Tabla 9.70: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 12.5 por ciento de los estudiantes (2) dieron respuesta en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante (4) lo hizo en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		4	100

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.71; las respuestas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes, en relación con los invariantes del grupo S_4.

Tabla 9.71: Tipos de respuestas subítem 2a)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto; no recuerdo el tema de invariantes	2 estudiantes que corresponden al 6 por ciento aproximado, del grupo de estudiantes de formación matemática y el 13 por ciento de los estudiantes del grupo G1.
	No Justifica.
Respuesta 2: No es invariante	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 19 por ciento del grupo.
	Justifican: $x_1x_2 + x_3x_4$ no está en S_4 (2 est.)
Respuesta 3: No se entiende el enunciado; no entendí	4 estudiantes del grupo G3 que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 100 por ciento del grupo.
	No Justifican.

En la figura 9.44 se presenta la respuesta de un estudiante de Licenciatura LM31 del grupo G2.

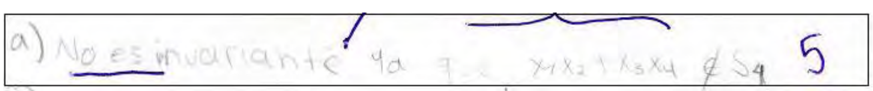


Figura 9.44: Respuesta al subítem 2a -CAC- estudiante LM31

En cuanto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM31, se evidencia de los argumentos, que el estudiante no comprende la propiedad de los elementos del grupo S_4 de ser invariante para determinar si la función dada $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es un invariante del grupo. Esta propiedad es muy importante, porque es la idea que lleva al surgimiento del significado abstracto del objeto grupo. En cuanto a las dificultades de los estudiantes se observa en las tablas 9.70 y 9.71 que ningún estudiante comprendió la propiedad de ser un invariante del grupo S_4.

Análisis del subítem 2b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(S_4, \circ)$ y los elementos

$\alpha \in S_4$ que dejan la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ invariante.

Tabla 9.72: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio la respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo 1 estudiante (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		1	25
Incorrectas	16	100		16	100		3	75

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.73; éstas respuestas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes, en la relación con los elementos del grupo S_4 que dejan invariante a la función $f = x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Tabla 9.73: Tipos de respuestas subítem 2b)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $\alpha \neq 1$	4 estudiantes que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del grupo G2 que representan el 19 por ciento aproximado y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo.
	No Justifican.
Respuesta 2: Para cuando $\alpha \neq 1$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento de los estudiantes del grupo G2.
	Justifica: Porque cambia la función (1 est.)

En la figura 9.45 se presenta la respuesta de un estudiante de licenciatura LM32 del grupo G2.

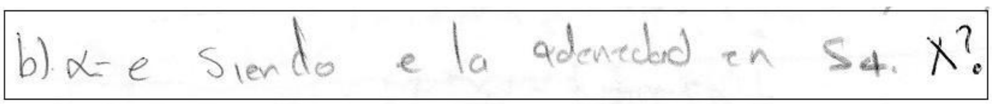


Figura 9.45: Respuesta al subítem 2b -CAC- estudiante LM32

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM32, se evidencia con la argumentación la no comprensión de la propiedad ser un invariante del grupo $(S_4, \circ)$ esto corresponde a probar, si todos los elementos $\alpha \in S_4$ dejan la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ igual. La pregunta se realiza para analizar que $\alpha \in S_4$ dejan la función igual. La respuesta parcialmente válida sería $\alpha = (1) = (2)$ o en notación de permutación, la permutación identidad, que para este caso no se representa por $\alpha = e$
. En cuanto a las dificultades de los estudiantes, ningún estudiante comprende la propiedad de ser un invariante de un grupo, ya que el tema no se aborda en los cursos de Teoría de Grupos y corresponde al origen del objeto Grupo.

Análisis del subítem 2c)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(S_4, \circ)$ y los

polinomios f simétricos. En el ejercicio se pide definir un polinomio simétrico.

Tabla 9.74: Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta ni en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 18.75 por ciento (3) de los estudiantes dieron la respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.75.

Tabla 9.75: Tipos de respuestas subítem 2c)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento del grupo de Licenciado G1.
	No Justifica.
Respuesta 2: No recuerdo el tema de invariantes	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 13 por ciento del grupo de Licenciado G1.
	No Justifica.
Respuesta 3: $D = x_1^2 + bx_2 + c = 0$ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\frac{-bx\pm\sqrt{(-bx)^2-4x^2c}}{2x^2}$ $\frac{-bx_2\pm\sqrt{(-bx_2)^2-4x_1^2c}}{2x_1^2}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento del grupo de Licenciado G1.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 4: Si $\alpha = 1$ $\alpha f = f = 1f = f$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento del grupo de Licenciado G2.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 5: La función $f = x^2 + 2x + x$ y la permutación $\alpha f = f$ $\alpha = (1)$ entonces $1(x^2 + 2x + x) = x^2 + 2x + x$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado del grupo de Licenciado G2.
	Justifica con el procedimiento.

Conocimiento ampliado del contenido de los Estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 6: La función $f = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ $\alpha 0 = 0$ $0 = 0$ $\alpha f = f$ $0 = 0$	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 19 por ciento aproximado del grupo de Licenciado G2.
	Justifica: f es simétrica.
Respuesta 7: No entendí; no se entiende el enunciado	4 estudiantes que representan el 11 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el **100 por ciento** del grupo G3.
	Justifica: f es simétrica.

En la figura 9.46 se presenta la respuesta de un estudiante de Licenciatura, LM17 del grupo G2.

Figura 9.46: Respuesta al subítem 2c -CAC- estudiante LM17

En cuanto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM17, se evidencia en la argumentación, la comprensión de la propiedad de ser un invariante, que tienen algunas funciones polinómicas para el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con cuatro elementos. Se quieren introducir como conocimiento Ampliado, los polinomios f simétricos que son los que cumplen la propiedad. El tema no se aborda en los cursos de Teoría de Grupos y solo el 8 % de los estudiantes llega a dar alguna definición de polinomio simétrico.

Análisis del subítem 2d)

Con este subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Tabla 9.76: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 18.75 por ciento de los estudiantes (3) dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante (4) lo hizo en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

En relación al Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, ningún estudiante comprende la relación que existe entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes y solo el 8 % analiza la propiedad en forma parcial. El tema no se aborda en el curso de Teoría de Grupos, y seguramente tampoco en el curso de Álgebra Lineal; pero se introduce como conocimiento Ampliado para que el estudiante analice la relación teniendo presente el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico.

Análisis del subítem 3b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos que dejan invariante el número 2 y al número 4 dando una justificación.

Tabla 9.77: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 31.25 por ciento (5) estudiantes dieron respuesta en forma correcta y 1 estudiante (6.25 %) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento de los estudiantes (2) lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) dio respuesta en forma correcta y el 50 % (2) lo hicieron en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	5	31.25		0	0		2	50
Parcialmente Correctas	1	6.25		4	25		2	50
Incorrectas	10	62.5		12	75		0	0

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.78.

Tabla 9.78: Tipos de respuestas al subítem 3b)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los Estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto	2 estudiantes que corresponden al 6 por ciento de los estudiantes de formación matemática y el 13 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1.
	No justifican.
Respuesta 2: (13)	6 estudiantes que corresponden al 17 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado; 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 25 por ciento del grupo y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo.
	Justifican: Es un subgrupo donde el 2 y el 4 permanecen fijos (1 est.). $(13) \in S_4$ (2 est.).
Respuesta 3: $\{(134),(1)\}$	8 estudiantes que representan el 22 por ciento del grupo de estudiantes de formación matemática: 6 estudiantes del grupo G1 que representan el 38 por ciento y 2 estudiantes de Matemáticas que representan el 50 por ciento de los estudiantes.
	Justifican: Estos dos subgrupos son los que dejan invariantes al 2 y al 4 (1 est.).
Respuesta 4: $h_1 = (1)$ $h_2 = (13)$ $H = \{h_1, h_2\}$	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifican dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 5: $\{A = (1), B = (243), C = (234)\}$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento del grupo y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
Respuesta 6: $(34), (143), (134)$	**Justifica:** El orden de A es 3; el orden de B es 3 y el orden de C es 3. 1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y al 3 por ciento aproximado de todo el grupo de estudiantes de formación matemática.

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
	Justifica dando algunos de los elementos del subgrupo que se pide.
Respuesta 7: $(1), (243), (234)$	1 estudiante del grupo G1 que representa el 6 por ciento aproximado del grupo y al 3 por ciento aproximado de todo el grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica dando los elementos.
Respuesta 8: $(1), (13), (143), (14)$	2 estudiantes del grupo G1 de Licenciatura que representan el 13 por ciento aproximado de todo el grupo y el 6 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifican dando los elementos.

Se presenta en la figura 9.47 la respuesta del estudiante de Licenciatura del grupo G1.

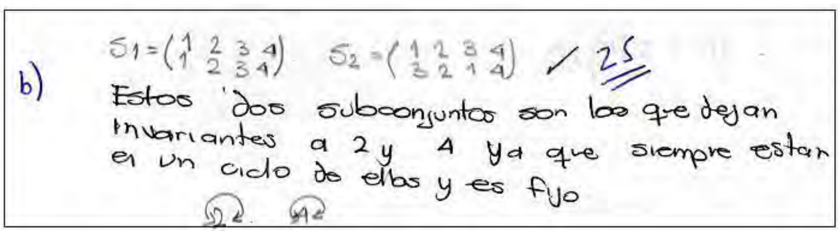


Figura 9.47: Respuesta al subítem 3b -CAC- estudiante LM12

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM12, se evidencia con la notación y en la argumentación la comprensión de la propiedad de dejar invariantes algunos elementos del mismo grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones. Esta pregunta se comprende un poco más ya que el 19% de los estudiantes de formación matemática la comprenden y otro 19% en forma parcial, para constituirse en una pregunta de dificultad media que es lo que se espera en los cuestionarios de evaluación.

Análisis del subítem 3c)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del subconjunto del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones, que deja invariante a la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$.

Tabla 9.79: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 31.25 por ciento (5) estudiantes dieron respuesta en forma correcta y 1 estudiante (6.25 %) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento de los estudiantes (2) lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) dieron respuesta en forma correcta y el 50 % (2) lo hicieron en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la siguiente clasificación de las respuestas que se muestra en la tabla 9.80.

Tabla 9.80: Tipos de respuestas al subítem 3c)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto	2 estudiantes del grupo G1 que corresponden al 12.5 por ciento en el grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el argumento.
Respuesta 2: El subgrupo es conmutativo ya que, las permutaciones son conmutativas	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1.
	Justifica Con el argumento.

Se presenta en la figura 9.48 la respuesta del estudiante de Licenciatura del grupo G1.

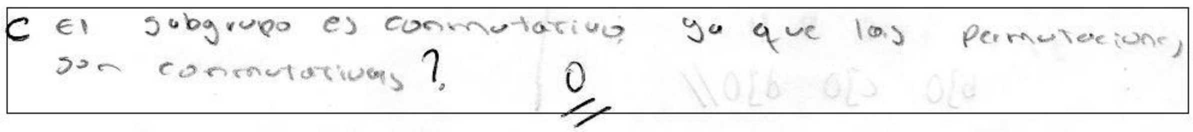

C El subgrupo es conmutativo ya que las permutaciones son conmutativas ? 0

Figura 9.48: Respuesta al subítem 3c -CAC- estudiante LM14

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM14, se evidencia con la notación y la argumentación la no comprensión de la propiedad de "ser invariante" al trabajar con la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ y con elementos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones. Según las tablas 9.79 y 9.80 la pregunta presenta grandes dificultades ya que ningún estudiante de formación matemática logra comprender la pregunta y la relacionan con la propiedad conmutativa que no interviene. En este sentido, no se puede quitar una pregunta para lograr un cuestionario con un un índice de dificultad media, ya que es importante analizar que el tema de Invariantes, no se aborda en los cursos y los estudiantes de formación matemática no logran comprenderla en prácticas matemáticas como la propuesta.

Análisis del subítem 3d)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y la verificación de la propiedad de ser subgrupos para los subconjuntos de los subítems a), b) y c).

Tabla 9.81: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (4) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 6.225 por ciento de los estudiantes (1) dio respuesta en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) dieron respuesta en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	4	25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		4	100
Incorrectas	12	75		15	93.75		0	0

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.82.

Tabla 9.82: Tipos de respuestas al subítem 3d)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: Tema no visto	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6 por ciento aproximado, en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el argumento.
Respuesta 2: Sí	6 estudiantes que corresponden al 17 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes del grupo G1 que representan el 19 por ciento aproximado; 1 estudiante del grupo G2 que representa el 6 por ciento aproximado y 2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento.
	Justifican: Es subgrupo porque se cumplen las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de elemento identidad, cada elemento tiene su inverso y es subgrupo porque cumple: clausura, asociatividad, identidad y cada elemento tiene su inverso (4 est.). Si es subgrupo uniendo la identidad: $\{h_1=(134), h_2=(143), h_0=(1)\}$ (2 est.).

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 3: No	3 estudiantes que representan el 8 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática y el 19 por ciento aproximado del grupo G2.
	Justifican: No son subgrupos porque no cumplen las condiciones.
Respuesta 4: Para el numeral a) no es subgrupo; en el numeral b) si es subgrupo	1 estudiante del grupo G3 que representa el 25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica: $(143)(143) = (134)$ no pertenece al conjunto del numeral a. El numeral b) es subgrupo: $(13)(13) = (1)$ si es subgrupo.

Se presenta en la figura 9.49 la respuesta del estudiante de Matemáticas M4.

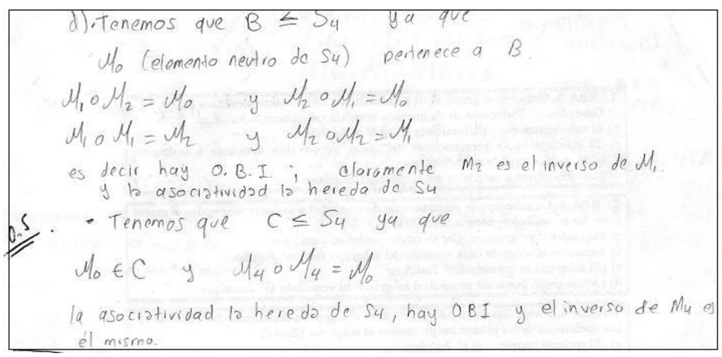

d) Tenemos que $B \leq S_4$ ya que
M_0 (elemento neutro de S_4) pertenece a B
$M_1 \circ M_2 = M_0$ y $M_2 \circ M_1 = M_0$
$M_1 \circ M_1 = M_2$ y $M_2 \circ M_2 = M_1$
es decir hay O.B.I ; claramente M_2 es el inverso de M_1
y la asociatividad la hereda de S_4
0.5 • Tenemos que $C \leq S_4$ ya que
$M_0 \in C$ y $M_4 \circ M_4 = M_0$
la asociatividad la hereda de S_4, hay OBI y el inverso de M_4 es
él mismo.

Figura 9.49: Respuesta al subítem 3d -CAC- estudiante M4

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante M4, se evidencia en la argumentación y con la notación que el estudiante no comprende la propiedad de dejar invariante a un elemento; por tanto no halla el subconjunot del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos que cumple la propiedad y no puede probar que es subgrupo. De igual forma sucede con la mayoría de los estudiantes de formación matemática ya que solo el 11 % comprenden la pregunta, resultando así díficil para los estudiantes de formación matemática y en esta dirección "los estudiantes tendrían un bajo nivel de dominio de la pregunta".

Análisis del subítem 4

Con este ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares del grupo de permutaciones $(S_n, \circ)$ donde el subgrupo regular de $n-$ símbolos, es el subgrupo que mueve los $n-$ símbolos incluyendo la permutación identidad.

Análisis del subítem 4a)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento *común y el conocimiento ampliado del contenido* y el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones de 4 elementos (ver, p. 465).

Tabla 9.83: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 12.55 (2 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 6.25 por ciento de los estudiantes (1) que dio respuesta al subítem, lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	2	12.5		1	6.25		0	0
Incorrectas	14	87.5		15	93.75		4	100

En relación al Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática se observa en la tabla 9.86 que ningún estudiante de formación matemática comprendió la propiedad de ser un subgrupo regular de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones de 4 elementos (ver, p. 465), en general los subgrupos regulares no se trabajan explícitamente en los cursos de Teoría de grupos, por esto la pregunta se toma como conocimiento Ampliado del Contenido. La pregunta resulta difícil para los estudiantes según la escala establecida en el diseño de instrumentos y por lo tanto se estable que el estudiante tiene un bajo dominio de conocimiento o de comprensión de los subgrupos regulares de un grupo.

Análisis del subítem 4b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y la identificación del subgrupo como el subgrupo isomorfo al subgrupo de las rotaciones del grupo $(D_4, \circ)$ de simetrías del cuadrado.

Tabla 9.84: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática, no realizaron ninguna práctica en este subítem.

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de la tabla 9.86 que los estudantes no comprenden la propiedad de ser un subgrupo regular de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ para poder identificar otro subgrupo al cual podría ser isomorfo dicho subgrupo. En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes de formación matemática y de igual forma se afirma que los estudiantes, en este sentido tienen un bajo nivel de dominio de los subgrupos regulares de un grupo.

Análisis del subítem 4c)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y la propiedad del subgrupo de ser conmutativo.

Tabla 9.85: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática, no realizaron ninguna práctica para dar solución al subítem.

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de la tabla 9.87 que ningún estudiante comprende la propiedad de ser un subgrupo regular de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y por tanto no pueden determinar si dicho subgrupo cumple la propiedad del subgrupo de ser conmutativo. En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes y por tanto se establece que los estudiantes de formanción matemática tienen un bajo nivel de dominio de la propiedad de ser subgrupo regular.

Análisis del subítem 4d)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con

la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos, en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y la identificación del grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ al cual es isomorfo el subgrupo regular del enunciado (a).

Tabla 9.86: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta y solo 1 estudiante (25 %) lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		16	100		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes de formación matemática, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.87; éstas prácticas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes del subgrupo regular de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y específicamente, en este subítem se pregunta por un grupo que es isomorfo al subgrupo regular de $(S_4, \circ)$.

Tabla 9.87: Tipos de respuestas al subítem 4d)

Conocimiento ampliado del contenido de los Estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo	**Porcentajes**
Respuesta 1: El tema no se abordo en el curso	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado del grupo G1.
Respuesta 2: Uno que tenga las mismas propiedades que A_4 por ejemplo	1 estudiante que representan el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado del grupo G2.
Respuesta 3: No se entiende a que se refiere con $n-$símbolo; no es claro	2 estudiantes que corresponden al 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el **50 por ciento** de los estudiantes del grupo G3.

A continuación, se presenta en la figura 9.50, la respuesta del estudiante de licenciatura LM17.

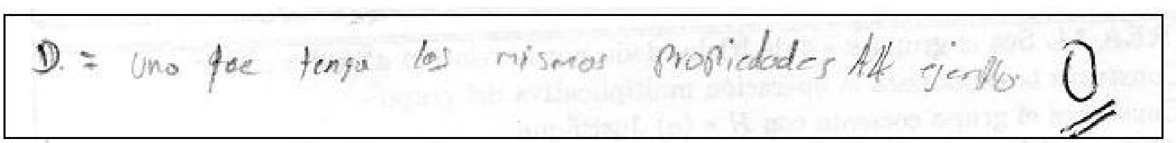


Figura 9.50: Respuesta al subítem 4d -CAC- estudiante LM17

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM17, se evidencia de la argumentación que el estudiante no comprende la propiedad de ser un subgrupo regular. En general se observa en las tablas 9.86 y 9.87 que los estudiantes de formación matemática no comprenden que la propiedad de ser subgrupo regular de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y por tanto no logran identificar que dicho subgrupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, resultando la pregunta difícil para los estudiantes de formación matemática y por tanto se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio de la propiedad de ser subgrupo regular.

Análisis del subítem 5

Con este ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ de polinomios con coeficientes en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 5a)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del cociente.

Tabla 9.88: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.89; éstas prácticas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática en relación con la división del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ para determinar el cociente de la división.

Tabla 9.89: Tipos de respuestas al subítem 5a)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$	2 estudiantes del grupo G1 que representan el 12.5 por ciento del grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento para hallar el cociente (ver anexo A.6.)
Respuesta 2: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$	3 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G1 y el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente (ver anexo A.6.)
Respuesta 3 : 1	1 estudiante del grupo G2 que representa el 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento (ver anexo A.6.)
Respuesta 4: $1 + x$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente (ver anexo A.6.)

A continuación se presenta en la figura 9.51, la respuesta del estudiante de Licenciatura LM29.

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM29, se evidencia que el estudiante no comprende la operación de división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ para determinar el cociente. En general se establece de las tablas 9.88 y 9.89 que los estudiantes de formación matemática no comprenden la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ ya que operan en el grupo $(\mathbb{Q}, +)$. En esta dirección se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ resultando la pregunta difícil para ellos.

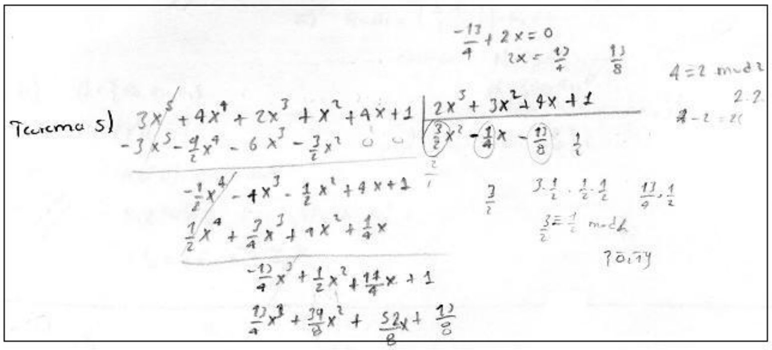


Figura 9.51: Respuesta al subítem 5a -CAC- estudiante LM29

Análisis del subítem 5b)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento *común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del residuo (ver, p. 506).

Tabla 9.90: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Respecto al Conocimiento Común del Contenido y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de la tabla 9.90 que los estudiantes no comprenden la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ donde se solicita dividir el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y determinar el residuo. En general para los estudiantes de formación matemática resulta difícil dividir polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ y por tanto se establece que ellos tienen un bajo nivel de dominio respecto a la división de polinomios en el grupo dado.

Análisis del subítem 5c)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y la identificación del grupo en el cual se trabaja la división de los coeficientes.

Tabla 9.91: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ninguno de los estudiantes dio respuesta en forma correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 1(6.25 %) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la siguiente clasificación, que se presenta en la tabla 9.92; éstas prácticas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática en relación con la división del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$

para identificar el grupo donde se trabaja la división de los coeficientes.

Tabla 9.92: Tipos de respuestas al subítem 5c)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: El grupo cociente	3 estudiantes del grupo G2 que representan el 19 por ciento aproximado, del grupo y el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	No Justifican.

A continuación, se presenta en la figura 9.52, la respuesta del estudiante de Licenciatura LM30.

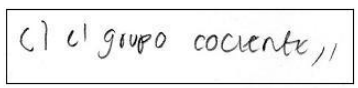


Figura 9.52: Respuesta al subítem 5c -CAC- estudiante LM30

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM30, se evidencia del argumento dado la no comprensión de la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, específicamente del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ para identificar el grupo en el cual se dividen los coeficientes. En general, los estudiantes de formación matemática no comprenden en que grupo se dividen los coeficientes de los polinomios al dividir polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, resultando la pregunta difícil para ellos y por tanto presentan un bajo nivel de dominio de la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 5d)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y las propiedades o conceptos de Teoría de grupos, que se aplican para realizar dicha división entre los polinomios dados.

Tabla 9.93: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 1 (6.25%) lo hizo en forma correcta y ningún estudiante en forma parcialmente incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		4	100

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.93 que solo el 3 % de los estudiantes comprenden la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ específicamente del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y por tanto no identifica las propiedades o conceptos de Teoría de grupos, que deben aplicar para realizar la división. La pregunta resulta difícil para los estudiantes y por tanto presentan un bajo nivel de dominio del Conocimiento Ampliado respecto a la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$. En general los estudiantes de formación matemática no identifican, las propiedades o conceptos de Teoría de Grupos que utilizan para realizar la división de los polinomios en el grupo dado.

Análisis del subítem 6

Con el ítem se busca evaluar el *conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto $A_2 = 1, 2, 3, ..., 99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 6a)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales: para el caso, la solución a la ecuación $x \bigoplus 17 = 99$ y las propiedades que utilizan para dar solución a la ecuación (ver, p. 470).

Tabla 9.94: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 3 respondieron en forma incorrecta (18.75).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	1	6.25		3	18.75		3	75
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

Respecto al Conocimiento Común y Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.96 se observa que solo el 19% de los estudiantes comprenden la relación de reducción dada en el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2; por tanto solo el 19% de los estudiantes comprenden como solucionar la ecuación $x \bigoplus 17 = 99$ en el conjunto dado y de igual forma, argumentar que propiedades utilizan para dar solución a la ecuación.

Análisis del subítem 6b)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = 1, 2, 3, ..., 99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la existencia del elemento identidad en $(A_2, \oplus)$ y su justificación (ver, p. 473).

Tabla 9.95: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes respondieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) respondieron en forma incorrecta (18.75).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

En cuanto al Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.95 que solo el 3% de los estudiantes comprenden la relación de reducción definida en el conjunto $A_2 = 1, 2, 3, ..., 99$ de los $z-$ números donde r reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2; para determinar si el elemento identidad en el conjunto $(A_2, \oplus)$. En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes de formación matemática y en este sentido se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado respecto a la relación de reducción en el conjunto dado.

Análisis del subítem 6c)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes del grupo conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$, al cual es isomorfo el grupo $(A_2, \oplus)$ (ver, p. 474).

Tabla 9.96: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemáticas, se observa en la tabla 9.96 que los estudiantes no comprenden la relación de reducción definida en el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y por tanto no llegan a comprender que el conjunto es isomorfo al grupo conocido

$(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$. En general la pregunta resultó difícil para los estudiantes y en este sentido se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio respecto a la comprensión de la relación de reducción en el conjunto dado.

Análisis del subítem 6d)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre los z- números que son divisibles por 3 en el conjunto (ver, p. 476).

Tabla 9.97: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 12.5 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		3	75

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.97 que solo en 8% de los estudiantes comprende la relación de reducción definida en $A_2 = 1,2,3,...,99$ de clases de equivalencia y por tanto pueden identificar que clase de equivalencia es divisible por 3.

En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes y en este sentido se establece que tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado, respecto a la comprensión de la relación de reducción definida en un conjunto dado.

Análisis del subítem 7

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se solicita contestar si f es Verdadero o Falso y justificar cada una de las preguntas de los subítems relacionadas con la propiedad de f de definir un homomorfismo al adicionar algunas propiedades.

Análisis del subítem 7a)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de definifir un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si el grupo es abeliano (ver, p. 478).

Tabla 9.98: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma parcialmente correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 respondieron en forma parcialmente correcta (12.5).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiantes) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	1	6.25		2	12.5		0	0
Incorrectas	15	93.75		14	87.5		3	75

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.98 que en general los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo definida en el grupo $(G,\cdot)$ con identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y con el elemento $a \in G$ fijo si adicionalmente el grupo es abeliano y por tanto resulta difícil para los estudiantes identificar que la función no define un homomorfismo. En esta dirección, resulta difícil para los estudiantes comprobar que la función define un homomorfismo ya que solo el 3 % de los estudiantes comprenden la propiedad.

Análisis del subítem 7b)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ (ver, p. 480).

Tabla 9.99: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 1 (6.25 por ciento) respondió en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Respecto al Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, según la tabla 9.99 se observa que los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo definida en el grupo $(G,\cdot)$ con identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si adicionalmente se tiene que $a = e$. En general resulta difícil para los estudiantes comprobar que la función define un homomorfismo ya que solo el 6 % logran la comprensión de la propiedad.

Análisis del subítem 7c)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ y el grupo es abeliano (ver, p. 482).

Tabla 9.100: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento)lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, de la tabla 9.100 se observa que los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo definida en el grupo $(G,\cdot)$ identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ para un elemento fijo $a \in G$ si adicionalmente $a = e$ y el grupo es abeliano. En general resulta difícil para los estudiantes probar que la función define un homomorfismo y en este sentido los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado respecto a comprobación de la propiedad de homomorfismos entre grupos dados.

Análisis del subítem 7d)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a^3 = e$ y el grupo es abeliano (ver, p. 484).

Tabla 9.101: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Respecto al Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.101 que solo el 3 % de los estudiantes prueban la propiedad de homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a^3 = e$ y el grupo es abeliano. Por tanto, resulta difícil para los estudiantes probar que la función dada en el grupo define un homomorfismo ya solo el 3 % de los estudiantes comprenden la propiedad.

Análisis del subítem 8

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análisis del subítem 8c)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ para determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Tabla 9.102: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática no realizaron ninguna práctica matemática en este subítem y respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes, se observa en la tabla 9.102 que ningún estudiante determina los elementos del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ y por tanto no identificarn el subgrupo de orden 2 del grupo dado. En general resulta difícil para los estudiantes determinar los elementos del grupo, cuando se representa por sus generadores y en este sentido se establece un bajo nivel de dominio de la propiedad de hallar los elementos del grupo dado por sus generadores.

Análisis del subítem 9

Con el ítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Análisis del subítem 9a)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de clausura (ver, p, 491).

Tabla 9.103: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta y 2(12.5) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron pocas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 5 (31.25) respondieron en forma correcta y 4 el (25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	1	6.25		5	31.25		2	50
Parcialmente Correctas	2	12.5		4	25		0	0
Incorrectas	15	93.75		7	43.75		2	50

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática de la tabla 9.103 se observa que solo el 22 % de los estudiantes comprenden la propiedad de clausura en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. En general la pregunta resulta medianamente difícil para los estudiantes y en este sentido se establece que los estudiantes tienen un bajo dominio del Conocimiento Ampliado de la propiedad de clausura de la operación definida en el conjunto de los números reales.

Análisis del subítem 9b)
Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de asociativa (ver, p. 494).

Tabla 9.104: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 2 (12.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 2 en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 8 (50 por ciento) respondieron en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	2	12.5		8	50		1	25
Parcialmente Correctas	2	12.5		2	12.5		0	0
Incorrectas	12	75		6	37.5		3	75

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.104 que el 31 % de los estudiantes comprenden que la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ definida en el grupo de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ cumple la propiedad de asociativa. En esta dirección, la pregunta resulta de una dificultad media que es lo deseado para las preguntas de un cuestionario de evaluación y en este sentido los estudiantes presentan un dominio medio de la propiedad asociativa de la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Análisis del subítem 9c)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar la existe del inverso del elemento 2 en los reales con la operación definida (ver, p. 498).

Tabla 9.105: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento)lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.105 que solo el 3% de los estudiantes comprenden que la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ no posee elemento identidad y por tanto no existe del inverso del elemento 2 en los reales con la operación definida. En general resulta difícil para los estudiantes probar la existencia del elemento identidad y por tanto del elemento inverso para el 2, según la operación definida en el conjunto de los reales, en este sentido se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado respecto a la comprobación de la existencia del elemento identidad en el conjunto de los reales con la operación definidad $a \bullet b$.

Análisis del subítem 9d)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ y generalizarla al conjunto $\mathbb{R}_2$ de modo que, para la nueva operación no exista el elemento identidad (ver, p. 501).

Tabla 9.106: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo el 12.5 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) dieron respuesta en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		4	100

En relación con el Conocimiento común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, de la tabla 9.106 se observa que ningún estudiante comprende como definir una operación en el conjunto $\mathbb{R}_2$ de tal forma que no exista el elemento identidad a apartir del ejemplo de la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes y en este sentido se establece un nivel de dominio bajo del Conocimiento Ampliado respecto a la propiedad de la existencia de identidad en un conjunto con una operación definida.

Análisis del subítem 10
Con el ítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 10a)
Con el ítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar el subgrupo de 3 elementos en el grupo (ver, p. 502).

Tabla 9.107: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, solo (5) el 31.25 por ciento respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 3 (18.75) respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	5	31.25		3	18.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	11	68.75		13	81.25		2	50

Respecto al Conocimiento Común y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.107 que el 31% de los estudiantes comprenden cual es el subgrupo de orden 3 del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. En este sentido, resulta la pregunta con una dificultad media que es lo que se desea para un cuestionario de evaluación y de igual forma los estudiantes presentan un nivel de dominio medio del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y de su subgrupo de orden 3.

Análisis del subítem 10b)

Con el ítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado,* del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, al determinar un subconjunto que no sea subgrupo (ver, p. 506).

Tabla 9.108: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, sse observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	6	37.5		6	37.5		2	50
Parcialmente Correctas	1	6.25		1	6.25		0	0
Incorrectas	9	56.25		9	56.25		2	50

En relación con el Conocimiento Común y el Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.108 que el 39% de los estudiantes comprenden cuando un subconjunto no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. Según la clasificación por el índice de dificultad de la pregunta, resulta de dificultad media que es lo que se espera de las preguntas de un cuestionario de evaluación, en este sentido se establece que los estudiantes tienen un nivel de dominio del conocimiento Ampliado respecto a los subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no cumplen con la propiedad de ser subgrupo.

Análisis del subítem 10c)

Con el ítem se busca evaluar *el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar que el grupo $\mathbb{Z}_3$ no es un subgrupo del grupo Z_6 (ver, p. 510).

Tabla 9.109: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 1 (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		1	25
Incorrectas	15	93.75		16	100		3	75

Respecto al Conocimiento Común y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, según la tabla 9.109 se observa que el 3 % de los estudiantes comprenden que el grupo $\mathbb{Z}_3$ de los entero módulo 3, no es un subgrupo del grupo Z_6. En general la pregunta resulta difícil para los estudiantes y en este sentido se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio respecto a la estructura diferente de los grupos $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_6$.

Análisis del subítem 10d)

Con el ítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y la tabla de operación de los elementos del grupo (ver, p. 513).

Tabla 9.110: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 9 (56.25 por ciento) respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 43.75 por ciento (7 estudiantes) respondieron en forma correcta y 1 estudiante en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta 2 (50 por ciento) lo hicieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	9	56.25		7	43.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	7	43.75		8	50		2	50

Respecto al Conocimiento Común y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.110 que el 50 % de los estudiantes representan el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 por la tabla de operación de los elementos del grupo. La pregunta resulta de una dificultad media para los estudiantes que es lo que se espera de los cuestionarios de evaluación y en este sentido se tiene un nivel de dominio medio del conocimiento Ampliado del Contenido respecto a las diferentes representaciones del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 11b)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir el grupo cociente por el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

Tabla 9.111: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta solo 1 estudiante (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta y ningún estudiante respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		3	75

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.112.

Tabla 9.112: Tipos de respuestas al subítem 11b)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $H = \langle a \rangle = \{ab, ac, aa\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	Justifican: Presentan el subconjunto H.
Respuesta 2: $H = \langle a \rangle = \{ae, bc, abc, aa\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	Justifican: Presentan el subconjunto H.
Respuesta 3: $H = \langle a \rangle = \{a, e, c, b\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	Justifican: Presentan el subconjunto H.
Respuesta 4: $H = \langle a \rangle = \{e, a\}$ $V_4/H = \{\bar{e}, \bar{b}\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G2.
	Justifican: Presentan el subconjunto H.

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 5: $H = \langle a \rangle = \{a, e\}$ $eH = \{e, a\} = H$ $aH = \{e, a\} = H$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 25 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G3.
	Justifican: Presentan el subconjunto H.

A continuación, se presenta en la figura 9.53 la respuesta del estudiante de licenciatura, LM20 al subítem 11b).

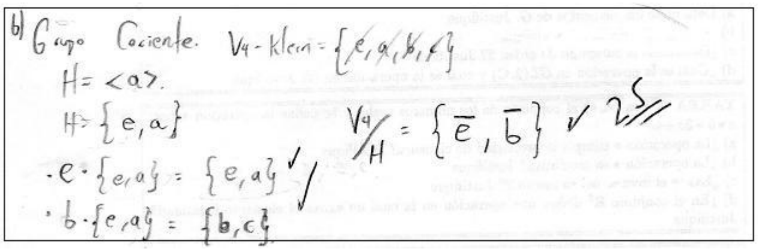


Figura 9.53: Respuesta al subítem 11b -CAC- estudiante LM20

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM20, se evidencia en la notación la comprensión del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al representar el grupo por sus elementos y construir el grupo cociente por el subgrupo $H = \langle a \rangle$. En general la pregunta resultó difícil para los estudiantes de formación matemática ya que solo el 6 % de los estudiantes tienen una comprensión clara del $k-4$ grupo de Klein y comprenden la estructura del grupo cociente determinada por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ en esta dirección, se considera que los estudiantes presentan un nivel bajo de dominio del conocimiento ampliado respecto al grupo de Klein.

Análisis del subítem 11c)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y determinar la condición de normalidad que debe cumplir el subgrupo H para construir un grupo cociente.

Tabla 9.113: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 9.114.

Tabla 9.114: Tipos de respuestas al subítem 11c)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $xH = Hx$ para todo $x \in K$ $xHx^{-1} = H$ para todo $x \in K$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	No Justifica.
Respuesta 2: $aH = Ha$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G2.
	No Justifica.

A continuación, se presenta en la figura 9.54 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM7 al subítem 11c).

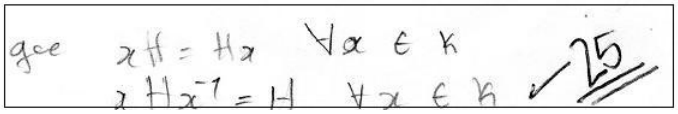


Figura 9.54: Respuesta al subítem 11c -CAC- estudiante LM7

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM7, se evidencia de la notación la comprensión de la propiedad de normalidad en general, pero no la prueba para el caso del subgrupo H del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$, esta condición es necesaria para llegar a la estructura de grupo cociente. En general, ningún estudiante prueba en forma completa que el subgrupo H es un subgrupo normal, en este sentido se establece que la pregunta resulta difícil para los estudiantes y que presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado del contenido respecto a la propiedad de normalidad del subgrupo $H = \langle a \rangle$ del grupo $k-4$ de Klein.

Análisis del subítem 11d)

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y la construcción de la clase lateral bH.

Tabla 9.115: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo 1 estudiante (6.25 %) dio respuesta a la pregunta en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo 1 estudiante (6.25 %) dio respuesta a la pregunta en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		1	6.26		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		15	93.75		4	100

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la siguiente clasificación que se muestra en la tabla 9.116.

Tabla 9.116: Tipos de respuestas al subítem 11d)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	**Porcentajes**
Respuesta 1: $bH = \{c, a, e, b\}$ $bH = \{bac, bab, bac, baa\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	No Justifica.
Respuesta 2: $bH = \{ba, be, bc, bb\} = \{c, b, a, e\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	No Justifica.
Respuesta 3: $bH = \{b, c\} = \{c, b, a, e\}$	1 estudiante que representa el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática y el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo de Licenciatura G1.
	No Justifica.

A continuación, se presenta en la figura 9.55 la respuesta del estudiante de Licenciatura, LM20 al subítem 11d).

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM20, se evidencia en la notación la comprensión del estudiante de la estructura de la clase lateral bH en el

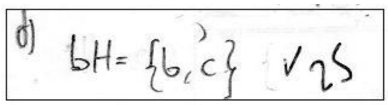


Figura 9.55: Respuesta al subítem 11d -CAC- estudiante LM20

grupo $k-4$ de Klein dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$. En general la pregunta resultó difícil para los estudiantes de formación matemática ya que solo el 6% de los estudiantes representa la clase bH para el subgrupo dado en el grupo de Klein, en este sentido se establece que los estudiantes de formación matemática tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento Ampliado respecto a la estructura de las clases laterales determinadas por el subgrupo H en el grupo de Klein.

9.5.3.4. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

A partir del análisis presentado en la sección anterior, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* con el conocimiento ampliado del contenido al igual que con el conocimiento común, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente respecto al nivel de dificultad determinado del cuestionario final, donde desarrollan situaciones problemáticas relacionadas con el Conocimiento Ampliado del Contenido: la mayoría de los subítems que permiten evaluar este conocimiento resultaron difíciles para los estudiantes (menos del 25% en el nivel de dificultad) a excepción de los siguientes subítems que se consideran como el conocimiento ampliado básico de los estudiantes de formación matemática:

Subítem 1b) que corresponde a un nivel medio del conocimiento, al determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y determinar un grupo al cual puede ser isomorfo. En el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 18.75 por ciento (3 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 50 por ciento (8 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general de 56.25 en el subítem (dificultad media que es lo que se espera de un ítem de evaluación).

Subítem 1c) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 37.5 por ciento (6 estudiantes) y en grupo de

Matemáticos al 0 por ciento para un promedio general de 42% (dificultad media del ítem relacionada con un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado).

Análisis del subítem 1d) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser cíclico. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 12.5 por ciento (2 estudiantes), en el grupo de estudiantes de licenciatura G2 al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 52 por ciento en el subítem (dificultad media, que es lo que se espera en un ítem de evaluación).

Análisis del subítem 10d) que corresponde a un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado de los estudiantes, al construir la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. En el grupo de los estudiantes de licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 50 por ciento (2) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 50 por ciento en el subítem (dificultad media del ítem).

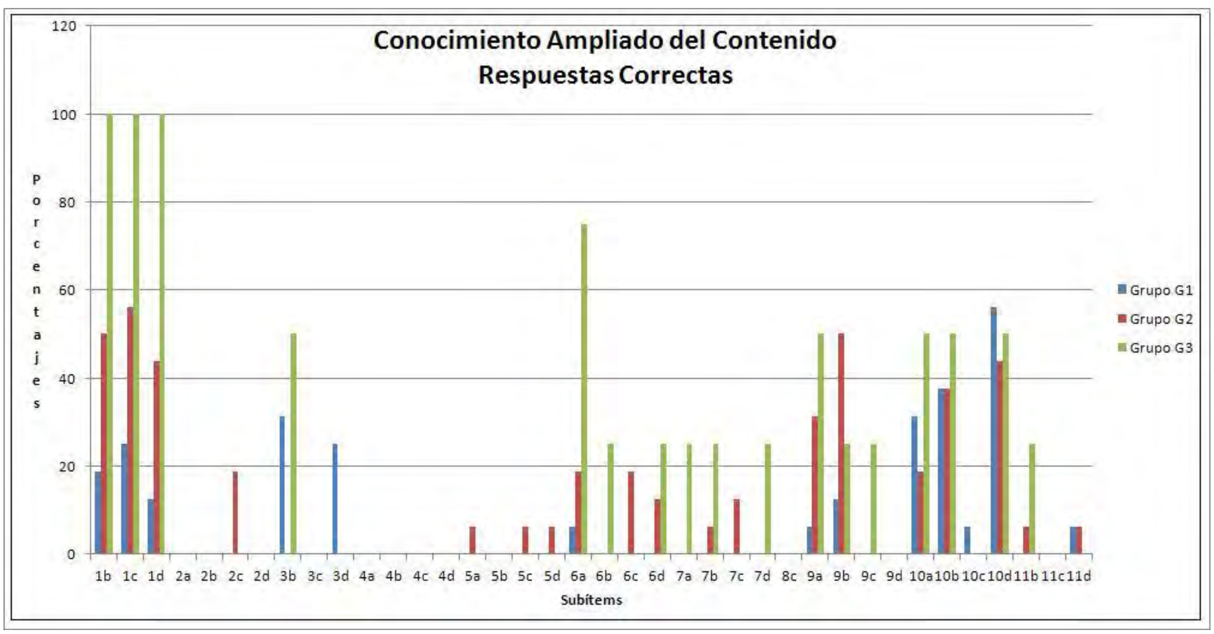


Figura 9.56: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas correctas

En la figura 9.25 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el Conocimiento Ampliado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas en promedio es muy bajo, ya que, corresponde al 8 por ciento aproximado, siendo representativo el subítem 1c) con el 46%; 10b) con el 42 por ciento y el 10d) con el 50 por ciento aproximado: en el grupo G1 el porcentaje de respuestas parcialmente correctas es del 7%; en el grupo G2 del 9 por ciento y de igual forma en el grupo de Matemáticos.

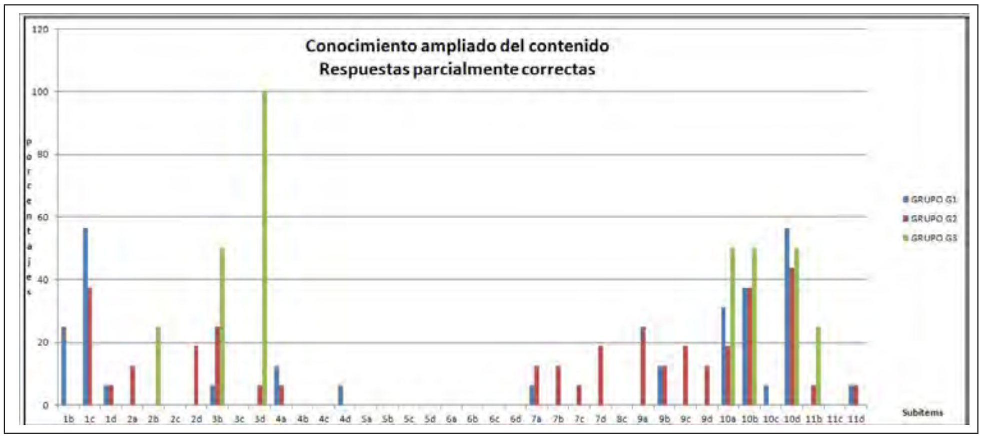


Figura 9.57: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

Como conclusión, se deduce de la figura 9.56 y 9.57 que en el grupo de Licenciatura - G1, las preguntas correctas no superaron el 7.2 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, este porcentaje no superó el 12 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje no superó el 22 por ciento: así, en general el porcentaje de respuestas correctas no superó el 14 por ciento aproximado. En la figura 9.56 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de Formación matemática de acuerdo a la variable *grado de corrección* de los subítems que permitieron evaluar la categoría del conocimiento ampliado del contenido. Se observa que para este conocimiento, predominan en los tres grupos, las respuestas incorrectas; con las excepciones del subítem 1c) donde el porcentaje corresponde al 46%; en el subítem 10b) el 42% aproximado y en el subítem 10d) el 50%, pero en promedio y considerando los tres grupos de estudiantes las respuestas correctas no superaron el 14 por ciento y las respuestas parcialmente correctas no superaron el 8 por ciento, así, la categoría del conocimiento ampliado del contenido, el porcentaje de respuestas "correctas y parcialmente correctas" no superó el 22 por ciento, al igual que en la categoría del conocimiento común del contenido.

9.5.3.5. Análisis del Conocimiento Especializado del Contenido

Este conocimiento según Pino-Fan, Godino & Font (2013), corresponde al conocimiento extra, que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas: se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el cual es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados y la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014).

Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos o propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron distintas situaciones problemáticas que daban respuesta a la pregunta ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas utiliza para dar solución al problema planteado?. De acuerdo con Godino (2009) para responder a este tipo de pregunta, los estudiantes (futuros profesores) tendrán que identificar los distintos conceptos o propiedades involucradas en la solución de la situación problemática planteada.

En esta dirección, para analizar el conocimiento especializado del contenido sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, se diseñaron subítems donde se pregunta por los conceptos o propiedades para solucionar una situación problemática y corresponden a los subítems: **1a), 1b), 1c), 1d), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8d), 9d), 10b), 10c), 10d)** (55 % de las preguntas del cuestionario).

Al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, este conocimiento no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para dar respuesta a las situaciones problemáticas planteadas y obtener de esta forma, algunos indicadores empíricos, que permiten evaluar el conocimiento especializado del contenido, al igual que el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido (Godino, Batanero & Font (2007); Vásquez, 2014).

En esta dirección, se finaliza con el análisis de las respuestas a los subítems, que se relacionan con la categoría de conocimiento especializado del contenido. Se presenta en la figura 9.58 y según la tabla 9.15 los subítems que permitieron evaluar la categoría del conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

Análisis del subítem 1a)
Con este subítem se buscaba evaluar el *conocimiento común y el conocimiento especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos

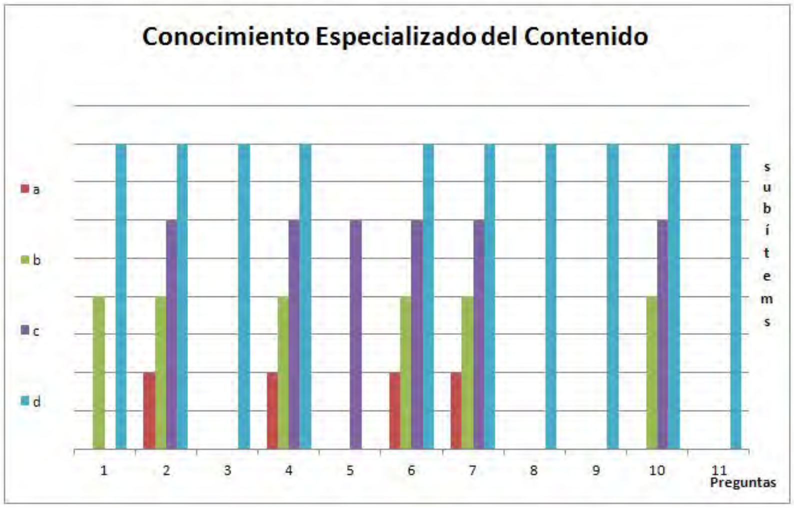


Figura 9.58: Subítems del Conocimiento Especializado del Contenido

del grupo; para lo cual se solicitaba a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido), porque el subconjunto dado era subgrupo.

Tabla 9.117: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 1a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 93.75 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, solo el 31.25 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes dieron respuesta al subítem, el 88 por ciento aproximado, lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	5	31.25		14	87.5		4	100
Parcialmente Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Incorrectas	10	62.5		2	12.2		0	0

Respecto al Conocimiento Común y el Conocimiento Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de la tabla 9.117 que la mayoría de los estudiantes (64 %) conocen los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero. En general la pregunta resulta de dificultad media y por tanto se asocia con un nivel medio de dominio del conocimiento Especializado de los estudiantes.

Análisis del subítem 1b)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero; específicamente, se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un grupo que fuera isomorfo al subgrupo dado en el subítem anterior (1a).

Tabla 9.118: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, solo el 18.75 por ciento (3) lo hicieron en forma correcta y el 25 por ciento (4) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (8) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	3	18.75		8	50		4	100
Parcialmente Correctas	4	25		0	0		0	0
Incorrectas	9	56.25		8	50		0	0

Respecto al Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de la tabla 9.118 que para los estudiante es de una dificultad media determinar un subgrupo que sea isomorfo al subgrupo de 3 elementos del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero. En este sentido se considera que los estudiantes tienen un nivel de dominio medio de los subgrupos del grupo $(D_3, \circ)$ que es lo que considera como un conocimiento Especializado básico.

Análisis del subítem 1c)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y la no existencia de un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ donde el estudiante debía aplicar el Teorema de Lagrange para dar respuesta al subítem, según el orden de los subgrupos del grupo de simetrías del triángulo equilátero.

Tabla 9.119: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, el 25 por ciento (4) lo hicieron en forma correcta y el 56.25 por ciento (9) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 56.25 por ciento (9) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta y el 37.5 en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	4	25		9	56.25		4	100
Parcialmente Correctas	9	56.25		6	37.5		0	0
Incorrectas	3	18.75		1	6.25		0	0

Respecto al Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido, se observa en la tabla 9.119 que el 47 % de los estudiantes comprenden el Teorema de Lagrange para aplicarlo y determinar que el grupo $(D_3,\circ)$ no tiene un subgrupo que sea isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4;+_4)$. En general para los estudiantes de formación matemática resulta medianamente fácil al considerar respuestas correctas y parcialmente correctas comprender el Teorema de Lagrange y aplicarlo al grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, por tanto se establece un nivel de dominio alto respecto a la conocimiento Especializado de los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$.

Análisis del subítem 1d)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y la propiedad que no cumple el grupo, de ser cíclico.

Tabla 9.120: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 12.5 por ciento (2) de los estudiantes lo hicieron en forma correcta y el 6.25 por ciento (1) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 43.75 por ciento (7) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta y el 6.25 (1) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	2	12.5		7	43.75		4	100
Parcialmente Correctas	1	6.25		1	6.25		0	0
Incorrectas	13	81.25		8	50		0	0

En relación con el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido, de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.120 que para los estudiantes tiene una dificultad media de la propiedad de los grupos (subgrupos) de ser cíclicos para aplicarla al grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero. En esta dirección, se establece que los estudiantes tienen un nivel de dominio medio del conocimiento especializado respecto a la propiedad de los grupos de ser cíclicos.

Análisis del subítem 3d)

Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y la verificación de la propiedad de ser subgrupos para los subconjuntos de los subítems a),b) y c).

Tabla 9.121: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (4) de los estudiantes dieron respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 6.225 por ciento de los estudiantes (1) dieron respuesta en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) dieron respuesta en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	4	25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		2	50
Incorrectas	12	75		15	93.75		0	0

En relación con el Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.121 que para los estudiantes resulta medianamente difícil determinar subgrupos específicos (relacionados con la propiedad de ser invariante) del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos. En esta dirección se establece un bajo nivel de dominio

Análisis del subítem 4

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento especializado, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares del grupo de permutaciones $(S_n, \circ)$ donde el subgrupo regular de $n-$ símbolos, es el subgrupo que mueve los $n-$ símbolos incluyendo la permutación identidad.

Análisis del subítem 4a)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común del contenido; el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones de 4 elementos.

Tabla 9.122: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 12.55 (2 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 6.25 por ciento de los estudiantes (1) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	2	12.5		1	6.25		0	0
Incorrectas	14	87.5		15	93.75		4	100

Respecto al Conocimiento Común del Contenido; el Conocimiento Ampliado del Contenido y el Conocimiento Especializado de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.122 se observa que la pregunta resultó difícil para los estudiantes, se evidencia que los estudiantes no comprenden los subgrupos regulares definidos, del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones de 4 elementos. En este sentido, presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado, respecto a los subgrupos regulares del grupo $(S_4, \circ)$.

Análisis del subítem 4b)

Con este subítem se buscaba evaluar el *conocimiento ampliado y especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y la identificación del subgrupo como el subgrupo isomorfo al subgrupo de las rotaciones del grupo $(D_4, \circ)$ de simetrías del cuadrado.

Tabla 9.123: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática no realizaron ninguna práctica matemática para la situación problemática planteada. Respecto al Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.123 se observa que los estudiantes no comprenden los subgrupos regulares definidos, para el caso del grupo $(S_4, \circ)$ y por tanto, no determinan que el subgrupo regular de 4 símbolos es isomorfo al subgrupo de rotaciones del grupo $(D_4, \circ)$ de simetrías del cuadrado. En general la pregunta resultó difícil para los estudiantes y en este sentido se establece que tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$.

Análisis del subítem 4c)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y la propiedad del subgrupo de ser conmutativo.

Tabla 9.124: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática no realizaron ninguna práctica matemática para la situación problemática planteada. Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido y el Conocimiento Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en las tablas 9.124 que los estudiantes no comprenden los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y por tanto no verifican que el subgrupo cumple la propiedad conmutativa. En este sentido, la pregunta resulta difícil para los estudiantes y se establece que tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a los subgrupos regulares del grupo $(S_4, \circ)$.

Análisis del subítem 4d)

Con este subítem se buscaba evaluar el *conocimiento ampliado del contenido y el conoci-*

miento especializado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos, en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y la identificación del grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ al cual es isomorfo el subgrupo regular del enunciado (a).

Tabla 9.125: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta y solo 1 estudiante (25%) lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) no respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		16	100		4	100

Respecto al Conocimiento Ampliado del Contenido y el Conocimiento Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tablas 9.125 se observa que los estundiantes no comprenden los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y por tanto no pueden comprender que el subgrupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$. En esta dirección, se establece que para los estudiantes es difícil comprender los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$ y por tanto se establece que tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4, \circ)$.

Análisis del subítem 5)

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento especializado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ de polinomios con coeficientes en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 5c)

Con este subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y la identificación del grupo en el cual se trabaja la división de los coeficientes.

Tabla 9.126: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ninguno de los estudiantes dio respuesta en forma correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 1(6.25 %) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		4	100

Respecto al Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en las tablas 9.126 que los estudiantes no comprenden en que grupo se trabaja la división de los coeficientes al dividir el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y establecer que la división se realiza en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$. En este sentido se establece que la pregunta resultó difícil para los estudiantes y que presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión del grupo al cual pertenecen los coeficientes de los polinomios al efectuar la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 5d)

Con este subítem se buscaba evaluar el *conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y las propiedades o conceptos de Teoría de grupos, que se aplican para realizar dicha división entre los polinomios dados.

Tabla 9.127: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 1 (6.25 %) lo hizo en forma correcta y ningún estudiante en forma parcialmente incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que el 100 por ciento (4 estudiantes) de los estudiantes respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		4	100

Los estudiantes de formación matemática no realizaron ninguna práctica matemática para la situación problemática planteada. En relación con el Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.127 se observa que los estudiantes no comprenden que propiedades se utilizan para realizar la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, específicamente, del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y por tanto se establece que presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de las propiedades que se utilizar para efectuar una división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 6

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común del contenido; el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 6a)
Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales: para el caso, la solución a la ecuación $x \bigoplus 17 = 99$ y las propiedades que utilizan para dar solución a la ecuación.

Tabla 9.128: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 3 respondieron en forma incorrecta (18.75).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		3	18.75		3	75
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.128 que los estudiantes no comprenden la relación de reducción definida en el grupo $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y por tanto no dan solución a la ecuación $x \oplus 17 = 99$ y no identifican que propiedades se utilizan para dar solución a la ecuación. En este sentido la pregunta es difícil para los estudiantes y se establece que presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la relación de reducción definida en el grupo $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números.

Análisis del subítem 6b)

Con el subítem se buscaba evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la existencia del elemento identidad en $(A_2, \oplus)$ y su justificación.

Tabla 9.129: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes respondieron en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) respondieron en forma incorrecta (18.75).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		13	81.25		1	25

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.129 se observa que los estudiantes no comprenden la relación de reducción definida en el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números donde la función de reducción r en A_2 reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2; por tanto no demuestran la existencia del elemento identidad. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece que presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la relación de reducción definida en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 6c)

Con el subítem se buscaba evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x + y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes del grupo conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$, al cual es isomorfo el grupo $(A_2, \oplus)$.

Tabla 9.130: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.130 que los estudiantes no comprenden la relación de reducción definida en el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y por tanto no comprenden que el grupo es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$, en este sentido la pregunta resulta difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la relación de reducción en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 6d)

Con el subítem se buscaba evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre los z-números que son divisibles por 3 en el conjunto.

Tabla 9.131: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo 2 (12.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.131 se observa que los estudiantes no comprenden la relación de reducción definida en el conjunto $A_2 = 1,2,3,...,99$ de los $z-$ números y por tanto no identifican la clase de equivalencia de los números divisibles por 3. En este sentido la pregunta resulta difícil para los estudiantes y se establece que los estudiantes presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la relación de reducción definida en el conjunto A_2.

Análisis del subítem 7

Con el ítem se buscaba evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se solicita contestar si f es Verdadero o Falso y justificar cada una de las preguntas de los subítems relacionadas con la propiedad de f de definir un homomorfismo al adicionar algunas propiedades.

Análisis del subítem 7a)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de definir un homomorfismo en el grupo $(G, \cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si el grupo es abeliano.

Tabla 9.132: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16 estudiantes) que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma parcialmente correcta	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 estudiantes respondieron en forma parcialmente correcta (12.5).	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	1	6.25		2	12.5		0	0
Incorrectas	15	93.75		14	87.5		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.132 que los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo definida en el grupo grupo $(G, \cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ con el grupo es abeliano. En este sentido la pregunta resulta difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprobación de que la función definida en el grupo no establece un homomorfismo.

Análisis del subítem 7b)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G, \cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$.

Tabla 9.133: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 1 (6.25 por ciento) respondió en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.133 que los estudiantes no comprenden que se cumple la propiedad de homomorfismo definida en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$. En este sentido, la pregunta resulta difícil para los estudiantes y establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprobación de la propiedad de homomorfismo definida en un conjunto dado y bajo ciertas condiciones establecida.

Análisis del subítem 7c)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ y el grupo es abeliano.

Tabla 9.134: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento)lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		4	100

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.134 se observa que que los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo definida en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a = e$ y el grupo es abeliano. En este sentido se establece que la pregunta resulta difícil para los estudiantes y que estos presentan un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la propiedad de homomorfismo definida en un conjunto y bajo ciertas condiciones dadas.

Análisis del subítem 7d)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de ser un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo

$a \in G$ si $a^3 = e$ y el grupo es abeliano.

Tabla 9.135: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento (3 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta solo 1 (25 por ciento) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática se observa en la tabla 9.135 que los estudiantes no comprenden la propiedad de homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$ si $a^3 = e$ con el grupo es abeliano. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la propiedad de homomorfismo definida en un conjunto dado.

Análisis del subítem 8

Con el ítem se buscaba evaluar el conocimiento especializado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

B=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análisis del subítem 8c)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ para determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Tabla 9.136: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Los estudiantes de formación matemática no realizaron ninguna práctica matemática para la situación problemática planteada. Respecto al Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.136 que los estudiantes no comprenden como determinar los elementos del grupo $G = \langle A, B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ representado por sus generadores y por tanto no determinan el subgrupo de orden 2. En este sentido, la pregunta resulta difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la determinación de los elementos de un grupo dado por sus generadores.

Análisis del subítem 9)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Análisis del subítem 9a)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de clausura.

Tabla 9.137: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16 estudiantes) que dieron respuesta a la pregunta, uno (1) el 6.25 por ciento respondió en forma correcta y 2 (12.5) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron pocas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem 5 (31.25) respondieron en forma correcta y 4 (25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento de los estudiantes (2) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	1	6.25		5	31.25		2	50
Parcialmente Correctas	2	12.5		4	25		0	0
Incorrectas	15	93.75		7	43.75		2	50

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.137 que para los estudiantes la propiedad de clausura en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ resultó de una dificultad media, según la escala establecida: en este sentido se establece un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado respecto a ala propiedad de clausura en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para

$a, b \in \mathbb{R}$ (nivel básico).

Análisis del subítem 9b)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de asociativa.

Tabla 9.138: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 2 (12.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 2 en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 8 (50 por ciento) respondieron en forma correcta y 2 (12.5 por ciento) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo el 25 por ciento (1 estudiante) respondió en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	2	12.5		8	50		1	25
Parcialmente Correctas	2	12.5		2	12.5		0	0
Incorrectas	12	75		6	37.5		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Conocimiento Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, en la tabla 9.138 se observa que para los estudiantes resultó de una dificultad media el determinar que la propiedad asociativa no se verifica, en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$. En este sentido se establece que los estudiantes presentan un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado respecto a la verificacion de la propiedad asociativa en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Análisis del subítem 9c)
Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar la existe del inverso del elemento 2 en los reales con la operación definida.

Tabla 9.139: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, 2 (12.5 por ciento)lo hicieron en forma correcta y 1 (6,25 por ciento) respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		0	0		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		3	18.75		0	0
Incorrectas	16	100		13	81.25		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.139 que los estudiantes no comprenden la propiedad de la no existencia del elemento identidad en el conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar que por tanto, no existe el inverso del elemento 2. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la existencia o no del elemento identidad en un conjunto dado, para establecer la existencia del elemento inverso.

Análisis del subítem 9d)

Con el subítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ y generalizarla al conjunto $\mathbb{R}_2$ de modo que, para la nueva operación no exista el elemento identidad.

Tabla 9.140: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta en forma incorrecta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron algunas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, solo el 12.5 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) dieron respuesta en forma incorrecta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		2	12.5		0	0
Incorrectas	16	100		14	87.5		4	100

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.140 que los estudiantes no comprenden la no existencia del elemento identidad en el conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ para la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ y por tanto no pueden generalizarla a una operación en el conjunto $\mathbb{R}_2$ de modo que, no exista el elemento identidad. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprobación de la existencia del elemento identidad en un conjunto dado con una operación definida en él.

Análisis del subítem 10
Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 10b)
Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, al determinar un subconjunto que no sea subgrupo.(ver, p. 506).)

Tabla 9.141: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correcta y 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	6	37.5		6	37.5		2	50
Parcialmente Correctas	1	6.25		1	6.25		0	0
Incorrectas	9	56.25		9	56.25		2	50

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.141 que para los estudiantes la propiedad de ser subconjunto y no ser subgrupo en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, resultó de una difícultad media, por tanto se establece un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado respecto a la propiedad de ser un subconjunto pero no subgrupo del grupo Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

Análisis del subítem 10c)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar que el grupo $\mathbb{Z}_3$ no es un subgrupo del grupo Z_6.

Tabla 9.142: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 1 (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		1	25
Incorrectas	15	93.75		16	100		3	75

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.142 que los estudiantes no comprenden que el grupo $\mathbb{Z}_3$ no es un subgrupo del grupo Z_6. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel del dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la estructura de los grupos $\mathbb{Z}_3$ y

$\mathbb{Z}_6$.

Análisis del subítem 10d)

Con el ítem se buscaba evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y la tabla de operación de los elementos del grupo.

Tabla 9.143: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 9 (56.25 por ciento) respondieron en forma correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, el 43.75 por ciento (7 estudiantes) respondieron en forma correcta y 1 estudiante en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron muchas dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 100 por ciento (4 estudiantes) que dieron respuesta 2 (50 por ciento) lo hicieron en forma correcta.

Grado de Corrección-G1	Frec.	%	Grado de Corrección-G2	Frec.	%	Grado de Corrección-G3	Frec.	%
Preguntas Correctas	9	56.25		7	43.75		2	50
Parcialmente Correctas	0	0		1	6.25		0	0
Incorrectas	7	43.75		8	50		2	50

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Conocimiento Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.143 que para los estudiantes resulta de una dificultad media comprender la representación del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 por la tabla de operación de los elementos del grupo. En este sentido se establece un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado respecto a las representaciones del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (conocimiento básico).

Análisis del subítem 11b)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir el grupo cociente por el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

Tabla 9.144: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta solo 1 estudiante (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta y ningún estudiante respondió en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		1	6.25		1	25
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		15	93.75		3	75

Respecto al Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática se observa en la tabla 9.144 que los estudiantes no comprenden la estructura del grupo cociente determinado en el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y el subgrupo $H = \langle a \rangle$. En este sentido, la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a la comprensión de la estructura del grupo cociente en el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

Análisis del subítem 11c)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y determinar la condición de normalidad que debe cumplir el subgrupo H para construir un grupo cociente.

Tabla 9.145: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	0	0		0	0		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	16	100		16	100		4	100

Respecto al Conocimiento Ampliado y Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.145 que los estudiantes no comprenden la propiedad de normalidad que debe cumplir el subgrupo para determinar el grupo cociente en el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$. En este sentido la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento Especializado respecto a la comprensión de la propiedad de normalidad del subgrupo para determinar el grupo cociente el grupo $k-4$ de Klein.

Análisis del subítem 11d)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y la construcción de la clase lateral bH.

Tabla 9.146: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 9.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo 1 estudiante (6.25 %) dio respuesta a la pregunta en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, solo 1 estudiante (6.25 %) dio respuesta a la pregunta en forma correcta y ninguno en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 9.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante dio respuesta a la pregunta en forma correcta ni parcialmente correcta.

Grado de Corrección-G1	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G2	**Frec.**	**%**	Grado de Corrección-G3	**Frec.**	**%**
Preguntas Correctas	1	6.25		1	6.26		0	0
Parcialmente Correctas	0	0		0	0		0	0
Incorrectas	15	93.75		15	93.75		4	100

Respecto al Conocimiento Ampliado y el Especializado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa en la tabla 9.146 que los estudiantes no comprenden la estructura de la clase lateral bH con el grupo $k-4$ de Klein. En este sentido la pregunta resultó difícil para los estudiantes y se establece un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a la estructura de las clases laterales determinadas en el grupo $k-4$ de Klein.

9.5.3.6. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Especializado del Contenido

A partir del análisis presentado en la sección anterior, se considera que en general, los tres grupos de estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* en relación con el conocimiento especializado del contenido al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente, en la mayoría de los subítems que permitieron evaluar esta categoría del conocimiento didáctico-matemático, a excepción de los siguientes subítems que se consideran como el conocimiento especializado básico de los estudiantes de formación matemática (ver, figura 9.28):

Subítem 1a) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado, al determinar un subgrupo de grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 31.25 por ciento (5 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 87.5 por ciento (14 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 73 por ciento del subítem (se establece como un conocimiento básico y corresponde a una pregunta de una dificulta media (25 %, 75 %) según la escala establecida para el índice de dificultad de la pregunta.

Subítem 1b) que representa un nivel de dominio medio del conocimiento Especializado, al determinar un subgrupo de grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y determinar un grupo al cual pueda ser isomorfo. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 18.75 por ciento (3 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 50 por ciento (8 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 56 por ciento aproximado, en el subítem, correspondiente a un nivel de dificultad media que es lo que se espera de un ítem de evaluación (conocimiento especializado básico).

Subítem 1c) que corresponde a un nivel medio del conocimiento especializado, al determinar que el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4;+_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 25 por ciento (4 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 56.25 por ciento (9 estudiantes) y en grupo de Matemáticos al 100 por ciento para un promedio general del 60 por ciento aproximado, correspondiendo a una pregunta con una dificultad media para los estudiantes (en esta dirección se establece como un conocimiento básico).

Análisis del subítem 1d) que corresponde a un nivel medio del conocimiento especializado, al determinar que el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser cíclio. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 12.5 por ciento (2 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 52 por ciento en el subítem, en este sentido se establece como un conocimiento especializado básico (dificultad media del ítem).

Análisis del subítem 10b) que corresponde a un nivel de dominio medio de conocimiento especializado, al determinar un subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$ de los enteros módulo 6 que no cumple la condición de ser subgrupo. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 37.5 por ciento (6 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 37.5 por ciento (6 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 50 por ciento (2) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 42 por ciento aproximado, correspondiendo a una pregunta con una difícultad media para los estudiantes (conocimiento especializado básico).

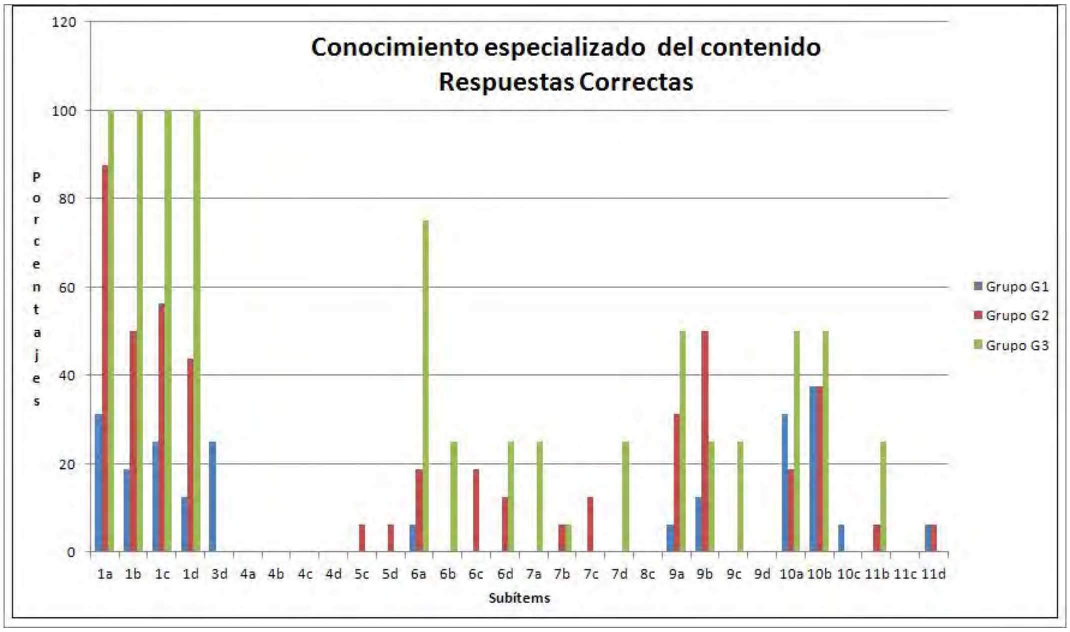


Figura 9.59: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas correctas

En la figura 9.29 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento especializado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas, en promedio es muy poco y corresponde al 5 por ciento aproximado en general, siendo representativo el subítem 1c) con un 31 % y el 3d) con un 35 por ciento aproximado, pero en promedio, con este aporte, la categoría del conocimiento especializado del contenido en los estudiantes de formación matemática no supera el 22 por ciento, aproximado.

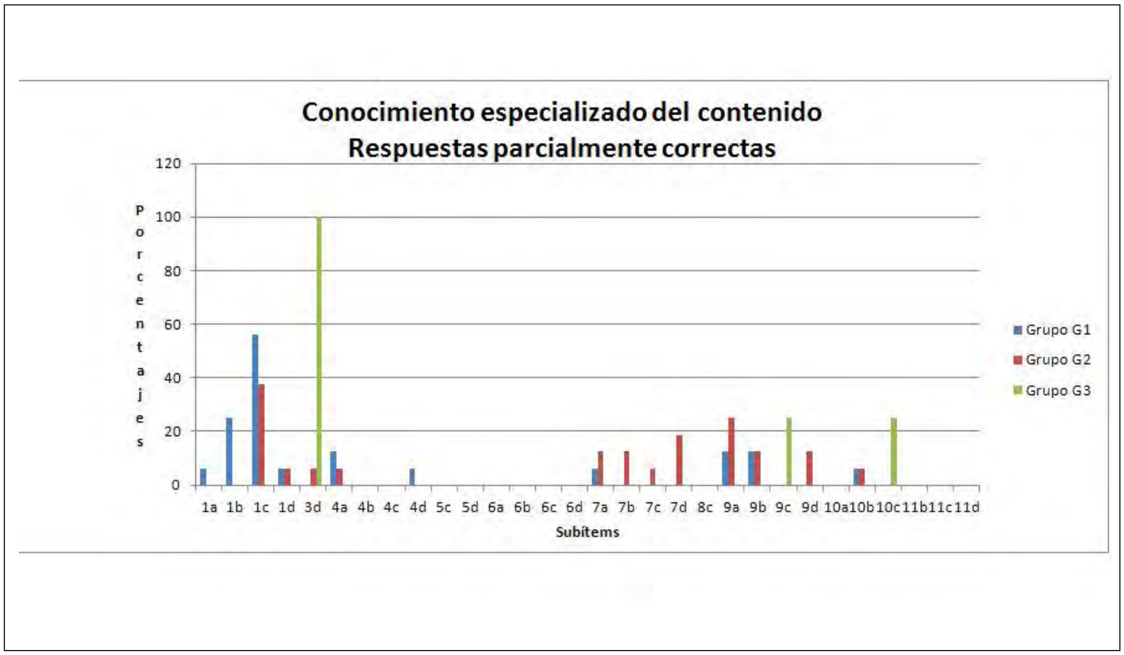


Figura 9.60: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

Como conclusión, se infiere de la figura 9.5 y 9.60 que en el grupo de Licenciatura- G1, las preguntas correctas no superaron el 7.29 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje de respuestas correctas no supera el 27 por ciento. En la figura 9.59 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido. Se observa que para este tipo de conocimiento, predominan en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponden al 73 % en promedio aproximado; para el subítem 1b) el 56 % aproximado; para el 1c) el 60 % aproximado y para el subítem 10b) el 42 %, pero el promedio general para los tres grupos de estudiantes y según los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido, las respuestas correctas no superaron el 17.01 por ciento (en esta dirección las preguntas resultaron difíciles según la escala establecida para el índice de dificulta de las preguntas) y en general las respuestas correctas y las parcialmente correctas no superaron el 22 por ciento aproximado al igual que para la categoría del conocimiento común del contenido y la del conocimiento ampliado del contenido.

9.6. Conclusiones del capítulo

Según el análisis realizado a las prácticas matemáticas efectuadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciatura y 1 grupo de Matemáticas) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan *grandes dificultades* en relación con el Conocimiento Común del Contenido en relación con las situaciones problemáticas planteadas en los subítems y según el promedio del porcentaje de respuestas correctas (índice de dificultad del subítem) en los tres grupos a excepción del conocimiento común de los siguientes subítems: conocimiento que se considera como conocimiento común básico.

Subítem 1a) para el cual, los estudiantes de licenciatura del grupo G1 presentan un *nivel de dominio medio* del 31 por ciento aproximado (25% - 75%); los estudiantes de licenciatura del grupo G2 un *nivel de dominio alto* del 88 por ciento ($\geq 75\%$) y los matemáticos del grupo G3 presentan un *nivel de dominio alto* del 100 por ciento. El promedio de los tres grupos corresponde al 73 por ciento y en general se establece que los estudiantes presentan un *nivel de dominio medio* respecto al conocimiento común del contenido que les permitió la realización de la práctica matemática mencionada: con este conocimiento común del contenido los estudiantes identifican un subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero (conocimiento común básico relacionado con un nivel de dificultad media de la pregunta: es lo que se espera en los cuestionarios de evaluación).

Subítem 10b) en el cual los estudiantes de formación matemática presentan un *nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido*: relacionado con un nivel de dificultad del subítem del 42 por ciento. Los estudiantes de licenciatura del grupo G1 y los del grupo G2 presentan un *nivel de dominio medio* del 38 por ciento y los de matemáticas de igual forma presentan un *nivel de dominio medio* del 50 por ciento. Con este conocimiento común del contenido los estudiantes identifican los subconjuntos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, que no cumplen con la propiedad de ser subgrupo (en este sentido se considera un conocimiento común del contenido de los estudiantes básico).

Subítem 10d) en el cual los estudiantes de formación matemática presentan un *nivel de dominio medio del conocimiento común* (50 por ciento según el nivel de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje del 56 por ciento; el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento. Con este conocimiento común del contenido, los estudiantes elaboran la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (conocimiento común básico).

Continuando, con el análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo, se considera que en general, los estudiantes presentaron al igual que con el Conocimiento Común del Contenido, *grandes dificultades* en relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido, a excepción del conocimiento de los siguientes subítems que se considera como un conocimiento ampliado básico.

Subítem 1b) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio del conocimiento ampliado* del 56 por ciento respecto al nivel de dificultad del subítem: el grupo G1 con un porcentaje del 18 por ciento; el grupo G2 con un porcentaje del 50 por ciento y los matemáticos con un *nivel de dominio alto* que corresponde a un porcentaje del 100 por ciento. Este conocimiento ampliado del contenido les permite a los estudiantes determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y un grupo al cual puede ser isomorfo el subgrupo (conocimiento ampliado básico).

Subítem 1c) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio del conocimiento ampliado* del 60 por ciento: en el grupo G1 el porcentaje es del 25 por ciento con un *nivel de dominio bajo*; el grupo G2 con un porcentaje del 56 por ciento y un *nivel de dominio medio* y los matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento con *un nivel de dominio alto*. Este conocimiento ampliado le permite a los estudiantes determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ de los enteros módulo 4 y aplicar el Teorema de Lagrange para justificar el hecho (conocimiento ampliado básico).

Análisis del subítem 1d) en el cual los estudiantes presentan un *nivel de dominio medio del conocimiento ampliado* que corresponde a un porcentaje de respuestas correctas del 52 por ciento (índice de dificultad del subítem): en el grupo G1 con un porcentaje del 13 por ciento y un *nivel de dominio bajo*; en el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y *un nivel de dominio medio* y los matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento y un *nivel de dominio alto* del CAC, que les permite determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de "ser un grupo cíclico" (conocimiento ampliado básico).

Análisis del subítem 10d) en el cual los estudiantes presentan un *nivel de dominio medio del CAC* correspondiente al porcentaje de respuestas correctas del 50 por ciento (índice de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje del 56 por ciento y un *nivel de dominio* *medio*; el grupo de licenciatura G2 también con un *nivel de dominio medio* del 44 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento y de igual forma, un *nivel de dominio medio* que le permite construir la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 (conocimiento ampliado básico).

En la misma dirección, analizando las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo, se considera que en general, los estudiantes presentan *grandes dificultades* en relación con el Conocimiento Especializado del Contenido, a excepción del conocimiento de los siguientes subítems, conocimiento que se considera como conocimiento especializado básico.

Subítem 1a) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio del conocimiento especializado* del 73 por ciento: el grupo G1 con un porcentaje del 31 por ciento; el grupo de licenciatura G2 con un porcentaje del 88 por ciento y un *nivel de dominio alto* al igual que los matemáticos, con un porcentaje del 100 por ciento. Este Conocimiento Especializado del Contenido, es el conocimiento necesario para la enseñanza y le permite al estudiante determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero.

Subítem 1b) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio del conocimiento especializado* del 56 por ciento: el grupo G1 con un porcentaje del 1 por ciento y un *nivel de dominio bajo* del CEC; el grupo G2 con un porcentaje del 50 por ciento y un *nivel de dominio medio* y el grupo de matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento de respuestas correctas y un *nivel de domino alto* del CEC. Este conocimiento le permite al estudiante determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y determinar el grupo al cual puede ser isomorfo.

Subítem 1c) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio del conocimiento especializado* con un porcentaje de respuestas correctas del 60 por ciento: el grupo G1 con un porcentaje del 25 por ciento y un *nivel bajo de dominio*; el grupo G2 con un porcentaje del 56 por ciento y un *nivel de dominio medio* y los matemáticos con un porcentaje de respuestas correctas del 100 por ciento y un *nivel de dominio alto* del CES que les permite determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange.

Análisis del subítem 1d) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel medio del conocimiento especializado del contenido*, con un porcentaje de respuestas correctas del 52 por ciento: el grupo G1 con un porcentaje de respuestas correctas del 13 por ciento y un *nivel de dominio bajo*; el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y un nivel de *dominio medio* y los matemáticos con un porcentaje de respuestas correctas del 100 por ciento y un *nivel de dominio alto* del CEC que les permite determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser grupo cíclico.

Análisis del subítem 10b) en el cual los estudiantes presentaron un nivel de *dominio medio del conocimiento especializado*, con un porcentaje de respuestas correctas del 42 por ciento: el grupo G1 y G2 de licenciatura con un porcentaje del 38 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento y de igual forma, un *nivel de dominio medio* del CEC que les permite identificar un subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 que no cumple la condición de ser subgrupo.

En la misma dirección, se observa que en la categoría del **Conocimiento Común del Contenido**, según las figuras 9.38 y 9.39 en el grupo de Licenciatura - G1 el porcentaje de *respuestas correctas* de los subítems que permitieron evaluar la categoría, no superó el 11 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, este porcentaje no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas el porcentaje, no superó el 26 por ciento correspondientes a un *nivel de dominio bajo del CCC* y en el caso de los matemáticos un *nivel de dominio medio del CCC* tendiente a bajo; de igual forma, de la figura 9.38 se observa que para este tipo de conocimiento predominaron en los tres grupos las respuestas incorrectas, ya que, para el promedio general de los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, el porcentaje de respuestas correctas no superó en general el 18 por ciento que corresponde a un *nivel de domino muy bajo del CCC*. De igual forma, el porcentaje de respuestas parcialmente correctas (ver, figura 9.16) fue muy bajo (5.5% en promedio): en el grupo de Licenciatura G1, el aporte fue del 3.4%; en el grupo de Licenciatura G2 de un 7.8% y en el grupo de Matemáticos G3 el porcentaje corresponde al 5.5% en promedio, por tanto, no proporciona un mayor incremento en la valoración de la categoría del conocimiento común del contenido y en general, el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas no superó el 23 por ciento, correspondiente a *un nivel de domino muy bajo* ($\leq 25\%$).

De igual forma, en la categoría del **Conocimiento Ampliado del Contenido**, se observó en las figuras 9.56 y 9.57 que en el grupo de Licenciatura - G1, las preguntas correctas no superaron el 7.2 por ciento aproximado correspondiente a un *nivel de dominio muy bajo del CAC*; de igual forma, en el segundo grupo de Licenciatura, cuyo porcentaje no superó el 12 por ciento aproximado y el grupo de estudiantes de matemáticas donde el porcentaje no superó el 22 por ciento correspondiente a un *nivel de dominio bajo del CAC*: así, en general el porcentaje de respuestas correctas en esta categoría no superó el 14 por ciento aproximado. Se observó también, que para este conocimiento, predominaron en los tres grupos, las respuestas incorrectas, así, en el conocimiento ampliado del contenido el porcentaje de respuestas "correctas y parcialmente correctas" no superó el 22 por ciento, al igual que en la categoría del conocimiento común del contenido correspondiente a un *nivel de dominio muy bajo del CAC.*

Finalmente, en la categoría del **Conocimiento especializado del Contenido,** se observó de la figura 9.59 y 9.60 que en el grupo de Licenciatura G1, las preguntas correctas no superaron el 7.29 por ciento aproximado, correspondientes a un *nivel de dominio muy bajo del CEC;* en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas, este porcentaje de respuestas correctas no superó el 27 por ciento (en este caso corresponde a *un nivel de dominio medio del CEC*). Se observó además, que para este tipo de conocimiento predominan en los tres grupos las respuestas incorrectas, así, en general, las respuestas correctas y las parcialmente correctas no superaron el 22 por ciento aproximado al igual que en la categoría del conocimiento común del contenido y la del conocimiento ampliado del contenido correspondiente; de igual forma, a un *nivel de dominio bajo del CEC*.

Según los resultados anteriores, los tres grupos de estudiantes de formación matemática, presentan *grandes dificultades* en relación con el conocimiento común del contenido; el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido, ya que, presentan un *conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente*, de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del conocimiento didáctico-matemático; hecho que se deduce de los análisis realizados en cada una de las categorías del CDM de los estudiantes de formación matemática relacionado con el objeto Grupo. En general, el grupo de estudiantes de licenciatura G1 presenta el *más bajo nivel de conocimiento didáctico-matemático* en relación con el objeto Grupo (programa de licenciatura nocturno), en ese orden continua el grupo de estudiantes de licenciatura G2 (programa diurno) y finalmente, el grupo de estudiantes de matemáticas.

CAPÍTULO 10

Análisis de resultados y conclusiones generales

10.1. Introducción

En la investigación se presenta el estudio del objeto Grupo y su relación con el CDM de los estudiantes de formación matemática; el estudio se cataloga como exploratorio-descriptivo acerca del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto grupo. Para esto, en primer lugar se realizó el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto matemático y se analizaron los programas de Teoría de Grupos y los textos que sirven de guía en esta dirección; con estos elementos teóricos se pasa a la fase de diseño, aplicación y validación del cuestionario *CDM-Grupo,* bajo el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Vásquez, 2014) el cual permitió analizar y evaluar ciertos aspectos del CDM: específicamente, se evalúa la dimensión epistémica del CDM, la cual se encuentra integrada por las categorías del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido.

En esta dirección, se presenta *un análisis a los resultados obtenidos,* tomando como referencia el marco teórico del EOS y se presentan los principales aportes de la investigación, los cuales permitieron dar respuesta a la pregunta planteada y a los objetivos definidos. Se describen los resultados de los estudios realizados para el logro de cada una de las fases de la investigación que finalmente, condujeron al logro del objetivo general del estudio, el cual buscaba evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo, para determinar si se ha generado o potenciado, un conocimiento común y un conocimiento ampliado del contenido como base del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza universitaria idónea del objeto Grupo.

Para el logro del objetivo general, se plantearon tres fases en la investigación: la primera, se relaciona con el "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo"; la segunda, con el "análisis de libros de textos de Teoría de Grupos y los programas de Teoría de grupos de los estudiantes de formación matemática" en esta fase se buscaba dar respuesta a la pregunta *¿Los significados del objeto Grupo pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global del objeto matemático?* y finalmente, la tercera fase relacionada del "diseño e implementación del instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo". En esta dirección, se describen a continuación los principales hallazgos en la búsqueda del logro del objetivo general y según las fases desarrolladas para la culminación de la investigación.

10.2. Resultados de la investigación

10.2.1. Primera fase de la investigación

En la *primera fase de investigación*, se realizaron las actividades conducentes al logro del objetivo específico (1) que daba respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo? y corresponde a la determinación de los significados parciales del objeto de investigación los cuales emergen precisamente del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico" (ver, figura 6.14).

Los significados identificados, según las etapas de evolución del objeto corresponden a: El primer nivel o nivel cero en la evolución del objeto Grupo se caracteriza por problemas relacionados con la solución de ecuaciones algebraicas que en algunos casos se relacionaban con problemas geométricos y prácticos de las civilizaciones antiguas; en este nivel se establece un *significado pre-algebraico* del objeto matemático (no hay una notación, ni las características de las actividades consideradas como algebraicas). Sigue un primer nivel en la evolución del significado del objeto grupo: este nivel se relaciona con el significado de Grupo como *conjunto de permutaciones* de las raíces de las ecuaciones algebraicas; se da inicio al estudio de los conjuntos $S_n, \mathbb{Z}_n$ de permutaciones de las raíces de las ecuaciones y el conjunto de los enteros módulo n respectivamente. En el segundo nivel de evolución del significado del objeto matemático, se continúa con la solución de las ecuaciones algebraicas pero, se inicia con la búsqueda de métodos más generales para su solución, ya que se tenían métodos particulares para cada ecuación algebraica. Se tiene el significado del objeto matemático como el conjunto de permutaciones y los conjuntos en aritmética modular $S_n, \mathbb{Z}_n$. En el tercer nivel de evolución del objeto, se identifica la problemática que corresponde a determinar qué ecuaciones de grado quinto solubles por radicales, aquí emerge el significado de Grupo como, el *grupo del polinomio o Grupo de Galois* asociado a la ecuación algebraica; en este período se continúa con el significado de Grupo relacionado con los conjuntos-grupos

$S_n, \mathbb{Z}_n, G(F, p)$, donde el conjunto $G(F, p)$ corresponde al grupo de Galois de la ecuación algebraica, el cual se encuentra formado por automorfismos definidos entre las raíces de las ecuaciones algebraicas; este grupo resulta ser isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones (Teorema de Cayley -1878), es decir a un subgrupo del grupo S_n a partir del cual se puede identificar si la ecuación algebraica asociada al polinomio es soluble por el método de radicales o no, analizando precisamente si el grupo de Galois $G(F, p)$, es soluble por radicales. Sigue el cuarto período de evolución donde se encuentran los significados de Grupo como: los grupos de matrices $GL(n,K), SL(n,K)$, grupos de Lie y grupos de Transformaciones (Klein) y surgen además otros grupos como aplicaciones concretas del significado abstracto del objeto Grupo: los grupos puntuales, grupos cristalográficos y algunos de los grupos utilizados en la Física; toda la emergencia de significados se resume en la figura 6.14.

A partir de la Teoría de Galois, se da inicio a la primera definición abstracta del objeto Grupo (Cayley), que corresponde al *significado epistémico global del objeto,* donde además, se introducen los significados de grupo como: Grupo de los cuaterniones, el grupo de las matrices invertibles y los Grupos de Permutaciones como ejemplos particulares de Grupos. A partir de este punto, se da inicio al establecimiento de la Teoría de Grupos, como una rama independiente de la matemática donde se solucionan problemas clásicos planteados como: la clasificación de los Grupos finitos simples, la clasificación de los grupos cristalográficos, la clasificación de los grupos puntuales y al estudio de algunos grupos aplicados en la Física. En la misma dirección, se complementa el estudio de los significados del objeto matemático, presentando el análisis semiótico a las diversas configuración epistémicas asociadas con las situaciones problemáticas que surgen en cada etapa de la evolución del objeto de investigación (ver, capítulo 6) y de igual forma se concretan los aportes de los matemáticos más representativos de cada período.

10.2.2. Segunda fase de la investigación

En la *segunda fase de la investigación,* se realizaron las actividades conducentes al logro de los objetivos específicos: (2) Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo; (3) Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura Teoría de grupos (4 libros) y (4) Caracterización del significado del objeto Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos para los estudiantes de formación matemática.

10.2.2.1. Reconstrucción del significado global del objeto Grupo

Para la reconstrucción del significado global del objeto grupo, se describieron los significados parciales que emergen de la caracterización (prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos que se activan en dichas prácticas) los cuales se determinaron a partir del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, el cual proporcionó la información sobre el proceso de evolución del objeto Grupo a lo largo de la historia; de igual forma se analizaron las problemáticas más relevantes asociadas a su surgimiento, las cuales dieron origen a las configuraciones epistémicas (ver, capítulo 6) identificadas. Con este estudio se evidencia en primer lugar, la complejidad del objeto matemático Grupo, el cual presenta serias dificultades a los estudiantes; tanto en el proceso de aprendizaje, como con el de enseñanza, según las evidencia presentadas en los antecedentes de la investigación (ver, capítulo 2).

Como conclusión del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, emerge el significado epistémico - global del objeto Grupo que corresponde a: **Un grupo** $(G,*)$ **es un conjunto** G, **cerrado bajo una operación** $*$ **donde se cumplen los siguientes axiomas:**

1) Para todo $a,b,c \in G$ *se tiene:* $(a*b)*c = a*(b*c)$. *Asociatividad de* $*$.
2) Existe un elemento $e \in G$ *tal que para todo* $x \in G$, $e*x = x*e = x$. *Elemento identidad e para* $*$.
3) Para cada $a \in G$*, existe un elemento* $a' \in G$ *tal que* $a*a' = a`*a = e$ *Inverso* a' *de* a.

10.2.2.2. Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los programas de estudio

Del análisis de los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los estudiantes de *Licenciatura*, se observa en la unidad (1) del programa curricular, que el *significado* "institucional - referencia" (corresponde al subsistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas que son considerados en la institución como adecuadas y características para resolver problemas pretendidos del objeto matemático), corresponde al significado de Grupo como *Grupo Abstracto,* el cual hace referencia al conjunto donde se define una operación binaria que cumple con los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Este significado corresponde al significado Global del objeto matemático.

Otro significado "institucional" que se pretende y que se infiere de la unidad (5), corresponde al significado de Grupo como *Conjunto de Permutaciones*. En esta unidad se establece el estudio de los grupos alternantes, los grupos de permutaciones S_n y se estudian los grupos Diédricos D_n como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones de elementos de un conjunto finito.

De igual forma, del programa de Teoría de Grupos de los estudiantes de *Matemáticas*, se evidencia que los significados pretendidos para el objeto matemático según los **contenidos mínimos** presentados corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional para los programas de ciencias naturales, ubica a la Teoría de Grupos dentro del área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la *epistemología* y en las prácticas científicas propias de su campo". En este sentido, la **epistemología,** como rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, plantea cuestiones fundamentales de las que se deduce que *el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura* debería dar respuesta a preguntas tales como: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿empírico? ¿racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico? (¿Capacidad de predecir sucesos? ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico? (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad? ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos?

La preguntas propuestas, se formulan en términos generales o específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como en el caso de la Teoría de Grupos y específicamente para el objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado de ese conocimiento? ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996, p. 829). Así, de los lineamientos dados por el Ministerio de Educación Nacional, se concluye, que el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura, deben tener un conocimiento del objeto Grupo en los diversos contextos de su uso, esto es, como *conjunto de Permutaciones, en aritmética modular, en Teoría de ecuaciones algebraicas, en Teoría de Matrices y en su significado Abstracto e incluso sobre el Grupo de Galois, Grupos de Klein, Grupos de Lie, Grupos cristalográficos, Grupos Puntuales y Grupos aplicados a la Física, entre otros.*

10.2.2.3. Significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto

El **significado del objeto grupo pretendido por los cuatro libros de textos analizados** para la asignatura Teoría de Grupos corresponden a:

El texto de Gallian (1990), introduce el objeto Grupo: primero, como un conjunto especial, donde se define una operación que cumple ciertas *propiedades* algebraicas; es decir, se introduce el objeto en su *significado Abstracto*. En la lección que se analizó también se observó que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde, al *significado en Aritmética Modular de los conjuntos* $\mathbb{Z}_n$. Y en la siguiente lección del texto, se introduce el objeto grupo a partir del estudio de los "Grupos de Simetrías de polígonos regulares - D_n" es decir desde su significado como *Conjunto de Permutaciones,* que corresponde históricamente al primer significado dado al objeto matemático.

Por su parte, el*texto* de Herstein (1986), introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A(S)$ con S un conjunto finito y que para el caso, se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías o de permutaciones de grado n, al igual que el texto anterior para finalmente, introducir el objeto en su significado Abstracto.

El *texto* de Lezama (2012), introduce el objeto matemático, a partir del estudio de las *propiedades* que cumple la operación definida en el conjunto; así, se inicia con el estudio de las estructuras algebraicas: pirmero como un semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y en la medida que la operación $*$ va adquiriendo más propiedades, dicha *estructura* se va haciendo más rica y las posibilidades de operar en el conjunto denominado G se hacen mayores (Lezama, 2012); así, si en el semigrupo además existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se introduce el *objeto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. Se observa que también se propone el estudio del objeto matemático a partir del conjunto de aplicaciones $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo y a partir de este conjunto se introduce el significado de grupo como *Grupo de Permutaciones* al trabajar con el conjunto de las funciones biyectivas y la operación compuesta en las funciones.

Finalmente, el *texto* de Caicedo (2003), introduce el objeto Grupo al igual que el texto de Lezama, a partir de la determinación de las *propiedades* que tiene la operación definida en el conjunto: para este caso los conjuntos numéricos con las operaciones usuales; especialmente, se estudia el conjunto de los números enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo. Aquí se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones al igual que el texto de Lezama.

Así, en general se observa que en los cuatro textos se introduce el objeto grupo desde el estudio de los *Grupos de Permutaciones*, definido por el conjunto de funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo y en este punto se establece la importancia del estudio de estos grupos S_n de orden n y de los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo. Además, se observó que el significado pretendido por los textos para el objeto Grupo, corresponde finalmente al *significado de Grupo Abstracto*.

Como conclusión al análisis de textos, se evidencia que no se introducen los significados de grupo como: Grupo de Galois, Grupo de Lie, Grupos de Klein, Grupos Cristalográficos, Grupos puntuales y algunos de los grupos aplicados en la Física, dejando estos tópicos en algunos casos como materias de profundización como para el caso de los Grupos de Galois, sin llegar a abordar los otros grupos.

10.2.3. Tercera fase de la investigación

La *tercera fase de la investigación* correspondió a las actividades orientadas al logro de los objetivos específicos: (5) Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática; (6) Diseño e implementación del cuestionario piloto para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo; (7) Implementación del cuestionario *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado: como bases de un conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática y finalmente, (8) Análisis de las categorías del CDM en su dimensión epistémica.

De la aplicación de la versión piloto (ver, anexo A.2.) y como resultado del logro de los objetivos (5) y (6) se concretó el instrumento en la versión final: el diseño e implementación del cuestionario piloto, correspondió a un *estudio empírico del CDM* de los estudiantes, que además de proporcionar la versión final del instrumento (ver, anexo A.5.) aportó otros resultado importantes como la descripción de algunas de las dificultades de los estudiantes de formación matemáticas con el objeto de investigación y una primera aproximación al análisis de uno “niveles de dominio” del CDM en su dimensión epistémica, resultado del análisis cuantitativo-cualitativo a las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes (ver, tabla 10.1).

10.2.3.1. Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Para el diseño del instrumento que permitió evaluar el *CDM* relacionado con el objeto Grupo, se inició con la construcción de la versión piloto del instrumento denominado *CDM - GRUPO,* para este diseño, se seleccionaron 11 tareas de un banco de preguntas (200) tomadas de las investigaciones que sirvieron como antecedentes al presente estudio. Las tareas se seleccionaron con el objetivo de evaluar la dimensión epistémica del CDM, de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo. El cuestionario se diseñó siguiendo el modelo para la evaluación del conocimiento didáctico-matemático propuesto en Godino (2009): este modelo propone pautas generales para *categorizar* y analizar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor; el CDM, se encuentra integrado por dimensiones o facetas, entre ellas la dimensión epistémica, motivo de análisis en la investigación (Godino, Batanero & Font, 2007)(ver, capítulo 4).

De esta forma, para la construcción del instrumento se consideraron tres criterios: el primer criterio, establecía que las tareas proporcionaran información sobre el grado de ajuste respecto al significado de referencia del objeto matemático para compararlo con los posibles **significados personales** de los estudiantes de formación matemática (los significados personales corresponden a los sistemas de prácticas personales de una persona para resolver un campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado); para esto se formularon y reformularon ítems, que activaran los distintos significados del objeto Grupo correspondientes a: *conjunto de raíces de una ecuación polinomial - Teoría de ecuaciones algebraicas, conjunto de permutaciones, grupo de Galois de un polinomio, problemas en aritmética modular con los conjuntos $\mathbb{Z}_n$, Teoría de matrices, Conjuntos de Permutaciones; conjuntos especiales de matrices; todos ellos hacen referencia a la definición abstracta de Grupo pero se toman en diferentes contextos de uso* estos significados se obtuvieron del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto de investigación.

El segundo criterio, pretendía que los ítems seleccionados se relacionaran con algunos de los principales contenidos curriculares relacionados con el objeto matemático; para lo cual se establecieron los siguientes contenidos programáticos para el objeto Grupo: *operación binaria, estructuras algebraicas (semigrupo, monoide y grupo), grupo-ejemplos y contraejemplos, subgrupo, orden del grupo y propiedades de los grupos,* resultado del estudio a programas y textos para la asignatura de Teoría de Grupos. Finalmente, el tercer criterio, tenía el propósito de *categorizar* las tareas según los componentes de la dimensión epistémica del conocimiento didáctico-matemático (CDM): se consideró la inclusión de tres tipos de tareas con este criterio: (1) tareas que pusieran en juego un conocimiento común (resolver una tarea sobre el objeto grupo); (2) tareas que requirieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo) y finalmente (3) tareas que requieran de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.) (ver, capítulo 4).

En esta dirección, se seleccionaron las 11 tareas luego de un análisis minucioso respecto a los criterios propuestos y buscando que permitieran evaluar las distintas categorías del conocimiento didáctico-matemático. Así, el instrumento se construyó con el objetivo de explorar algunos aspectos iniciales de las categorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático por medio del planteamiento de situaciones-problemáticas relacionadas con el objeto Grupo, que permitieran el análisis de las prácticas matemáticas operativas de los estudiantes.

Bajo estos planteamientos, se incluyeron en el instrumento subítems con preguntas que permitieron analizar ciertos aspectos de la dimensión epistémica del modelo CDM (ver, capítulo 4). De esta forma, el cuestionario da respuesta a preguntas como: *¿Existe el elemento identidad en el conjunto; cuál es el inverso de un elemento, se cumple la propiedad de clausura; la asociativa...?* hechos que permitieron "evaluar", el conocimiento común del contenido en relación con el objeto Grupo y los desarrollos de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, según la metodología propuesta por el EOS.

Para "evaluar" el conocimiento ampliado del contenido, se plantearon preguntas como: *¿A qué otro grupo conocido resulta isomorfo el subgrupo anterior?, defina una operación similar en un conjunto dado; en qué grupo se está trabajando; determine un conjunto que deje invariante el 2 (no se define la propiedad de invariante)* y finalmente, se diseñaron o seleccionaron preguntas como: *¿Qué conceptos o propiedades matemáticas se usan para dar solución al problema; Qué conceptos de Teoría de Grupos utiliza para solucionar el ejercicio ...?* preguntas que permitieron, evaluar el conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo según las prácticas de los estudiantes.

10.2.3.2. Juicio de expertos a la prueba piloto

Una de las actividades importante en el desarrollo de la tercera fase de investigación, correspondió al análisis de los resultados de la prueba piloto y al juicio de expertos el cual proporcionó una mejora al cuestionario final *CDM-Grupo*. En este punto, se analizó el cuestionario dado a los expertos (9) doctores y magísteres en la línea de Álgebra Abstracta, en cuanto a la ubicación y análisis de los tres criterios establecidos para la selección de tareas (ver, anexo A.1.): se revisaron cada una de las observaciones dadas por ellos (ver, anexo A.4.): estas observaciones se tomaron y como resultado del análisis a las observaciones de los expertos se rediseñó la versión final del cuestionario (ver, anexo A.5.) Finalmente, como punto importante a tener presente es la conclusión respecto al proceso de diseño del instrumento de evaluación, el cual es un proceso complejo que implica factores como: la validación de contenidos, la determinación del índice de confiabilidad y dificultad del instrumentos y en algunos casos pruebas para determinar si el cuestionario es homogéneo, es decir si las preguntas se relacionan entre sí. Este proceso de diseño de instrumentos de evaluación es un aporte valioso que se aplica en muchas de las tareas del oficio del profesor universitario.

10.2.3.3. Dificultades de los estudiantes de formación matemática

De la prueba piloto del cuestionario *CDM-Grupo* y según el *porcentaje de respuestas incorrectas y parcialmente correctas,* se detectaron las siguientes dificultades de los estudiantes de formación matemática.

Tabla 10.1: Dificultades de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Dificultades - Estudiantes de Licenciatrua en Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes no determinan cuál es el elemento identidad en el conjunto de los enteros con la operación donde $a*b=a+b-4$ (45 %); los licenciados *no comprenden cómo determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros, donde se definió la operación* $*$ *(64 %)* y además, no comprenden la operación $*$ ya que no elaboran parte de la tabla de operación para un subconjunto de los enteros (10 %).
Los estudiantes no determinan si la operación $\bullet$ en los reales, tal que $a\bullet b=3a+4b$, cumple la propiedad de clausura (27 %) y los estudiantes no comprenden que la operación no cumple la propiedad asociativa (27 %). *De igual forma, los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad en los reales con la operación definida y por tanto la no existencia de los elementos inversos (73 %).*
Los estudiantes no realizan la división de polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ y por tanto, no determinan en forma correcta el cociente (55 %); *no determinan el residuo de la división (73 %)*; de igual forma, *los estudiantes no identifica el grupo donde se trabaja la división de los coeficientes* (100 %) y *no identifican las propiedades que se utilizan para realizar la división* (80 %).
Los estudiantes no solucionan la ecuación $x\oplus 17=99$ en el conjunto $(A_2,\oplus)$ con $A_2=\{1,2,...,99\}$ con la operación de reducción definida en el conjunto (36 %) ; *no identifican el elemento identidad en el conjunto* (100 %) y *no determinan que el grupo* $(\mathbb{Z}_{99},+_{99})$ *es isomorfo al grupo dado* (90 %).

Dificultades - Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes *no reconocen los subgrupos de orden 3* del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (82%); de igual forma *no determinan un subconjunto que no cumpla con la propiedad de ser subgrupo* y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ y tienen dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (36%).

Tabla 10.2: Dificultades de los estudiantes de Matemáticas

Dificultades - Estudiantes de Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes *no reconocen el subgrupo de orden 3* del grupo $(D_3, \circ)$ (100%); de igual forma *no determinan un subgrupo isomorfo al subgrupo de orden 3* (90%) y *no tienen claro el Teorema de Lagrange*, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3, \circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4; además para el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, no es claro que en general los grupos $(D_n, \circ)$ no cumplen la propiedad de ser cíclicos.
Los estudiantes no reconoce la tabla de operación de los elementos del grupo V_4 o $k-4$ de Klein (64%); de igual forma, *no construyen el grupo cociente* determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ (82%); *no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal* para construir el grupo cociente (90%) y *no construyen una clase lateral izquierda* (82%).
Los estudiantes de matemáticas no determinan el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido la operación $*$ tal que $a * b = a + b - 4$ (17%) y no comprende la operación $*$ ya que no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros (33%).
Los estudiantes de matemáticas no definen una operación similar a la operación en $(\mathbb{R}, \bullet)$ tal que $a \bullet b = 3a + 4b$ en el conjunto $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ es decir, una operación donde no exista elemento identidad (17%).
Los estudiantes de matemáticas no identifican el grupo donde se trabaja la división de los cocientes para dividir dos polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ (33%) y no identifican las propiedades que se deben utilizar para realizar la división de polinomios (17%).
Los estudiantes no solucionan la ecuación en el conjunto $(A_2, \bigoplus)$ con $A_2 = \{1, 2, ..., 99\}$ con la operación de reducción definida (17%); no identifican el elemento identidad en el conjunto (67%) de igual forma, no encuentran un grupo isomorfo al dado y *no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el conjunto dado* (83%).
Los estudiantes no determinan un subconjunto que no es subgrupo (17%) y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de igual forma, tienen dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

Dificultades - Estudiantes de Matemáticas - Prueba piloto
Los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3, \circ)$ (67 %); de igual forma no determinan un subgrupo isomorfo al subgrupo de orden 3 que se pide y no tienen claro el Teorema de Lagrange, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3, \circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4 y para los estudiantes de matemáticas, no es claro que en general los grupos $(D_n, \circ)$ no cumplen la propiedad de ser cíclicos.
Los estudiantes de matemáticas no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ en el grupo V_4 o $k-4$ de Klein (17 %) y no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para determinar el grupo cociente.

La identificación de las dificultades de los estudiantes de formación matemática, puede servir como diagnóstico para establecer un plan de trabajo en la asignatura de Teoría de Grupos, ya que el estudio de los antecedentes de la investigación se contrastan con el presente estudio al determinar las dificultades que representan para los estudiantes los cursos de Teoría de Grupos.

10.2.3.4. Primera aproximación al estudio de la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática

Del análisis a la prueba piloto del instrumento, específicamente en el estudio del índice de dificultad del instrumento, se establece que en general el grupo de estudiantes Matemáticos posee un nivel de dominio del conocimiento de los contenidos mayor al de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Un punto importante en el análisis del CDM de los estudiantes, hace referencia a que estos estudiantes de formación matemática, desempeñan el mismo oficio de la labor docente en algunas de las universidades Colombianas y para el caso es importante anotar que los estudiantes pueden dirigir los cursos de Teoría de Grupos y en general asignaturas en la línea de Álgebra bajo las mismas condiciones y además, inician sus cursos de posgrados en Matemáticas bajo las mismas condiciones, lo cual evidencia una igualdad en el conocimiento del contenido matemático sobre el objeto Grupo.

10.2.3.5. Caracterización de la faceta epistémica del CDM

Se planteó como uno de los objetivos de la investigación, la caracterización de las categorías del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como conocimientos bases para potenciar el desarrollo de un conocimiento especializado del contenido necesario para la labor de la enseñanza del objeto matemático. Según Godino, (2009); Pino-Fan, (2013), Vásquez, (2014) **el conocimiento común del contenido** se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza; que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias del nivel educativo, en este caso del nivel universitario y en relación con el objeto Grupo. Como conclusión, se establece que el conocimiento común del contenido, se relaciona con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado de los estudiantes; este desarrollo del pensamiento matemático es uno de los objetivos que se buscan en la educación de los primeros grados hasta el nivel superior: en la educación universitaria, procesos como abstraer, generalizar, sintetizar, representar, definir, refutar, entre otros, toman gran relevancia. Así, algunas de las actividades implementadas en el cuestionario final para evaluar el conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto grupo pretendían este fin. Entre las actividades se tienen:

Subítem 1a)
Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos del grupo; para lo cual se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido), por qué el subconjunto dado es subgrupo.

Subítem 2d)
Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Subítem 3a)
Con el cual se busca "evaluar" el conocimiento común del contenido en relación con: la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos que dejan invariante el número 2 dando una justificación.

Subítem 4a)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos en el grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos y dar una justificación.

Subítem 5b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ por el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del residuo de la división.

Subítem 6a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes sobre la solución de ecuaciones lineales: para el caso, la solución a la ecuación $x \bigoplus 17 = 99$ y las propiedades que utilizan para dar solución a la ecuación.

Subítem 7a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de definir un homomorfismo en el grupo $(G,\cdot)$ con elemento identidad e, donde $f: G \longrightarrow G$ si el grupo es Abeliano.

Ítem 8

Con el ítem se pretende evaluar el conocimiento común del contenido en relación con: *la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo* $G = \langle A,B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde:

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Subítem 8a)

Con el subítem se pretende evaluar el conocimiento común del contenido en relación con: la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A,B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$ para determinar en forma explícita los elementos del grupo G.

Subítem 9a)

Con el subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R},\bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a,b \in \mathbb{R}$ para determinar si la operación definida cumple la propiedad de clausura.

Subítem 10a)
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar el subgrupo de 3 elementos en el grupo.

Subítem 11a)
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con: la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir la tabla de operación para los elementos del grupo.

De igual forma, en la categoría del **conocimiento ampliado del contenido;** que se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que *no se direccionan necesariamente a la enseñanza* y que también se relacionan con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado, teniendo presente que las prácticas desarrolladas por los estudiantes corresponden a prácticas algebraicas y este desarrollo del pensamiento es o debe ser uno de los objetivos pretendidos en la Educación Superior. Es claro, que este conocimiento se relaciona con conocimientos matemáticos más avanzados del currículo que se deben potenciar para establecer conexiones con otros temas, por tanto, se espera que se puedan potenciar en cierto grado o nivel, en la formación universitaria inicial. Algunas de las situaciones seleccionadas para evaluar este conocimiento ampliado corresponden a:

Subítem 1b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero; específicamente, se solicita en este subítem, dar un ejemplo de un grupo que sea isomorfo al subgrupo del subítem anterior (1a).

Subítem 1c)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y la no existencia de un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, donde el estudiante debe aplicar el Teorema de Lagrange para dar respuesta al subítem, según el orden de los subgrupos del grupo de simetrías del triángulo equilátero.

Subítem 2a)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática al determinar si la función particular $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es una función invariante del grupo de permutaciones con cuatro elementos S_4.

Subítem 2b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(S_4, \circ)$ y los elementos $\alpha \in S_4$ que dejan la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ invariante.

Subítem 2c)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(S_4, \circ)$ y los polinomios f simétricos. En el ejercicio se pide definir un polinomio simétrico.

Subítem 2d)
Con este subítem se busca evaluar el *conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido* y el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Subítem 3b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones con 4 elementos que dejan invariante el número 2 y al número 4 dando una justificación.

Subítem 3c)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del subconjunto del grupo $(S_4, \circ)$ de permutaciones, que deja invariante a la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Subítem 5a)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del cociente.

Subítem 5b)
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento *común del contenido y el conocimiento ampliado* del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del residuo.

Subítem 11d)
Con el ítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ y la construcción de la clase lateral bH.

Finalmente, la categoría del **conocimiento especializado del contenido** que según Pino-Fan, Godino & Font, (2013), se relaciona con el *conocimiento extra que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores* pero que tienen una preparación afín en matemáticas. Con este conocimiento especializado, el profesor tiene en cuenta tanto la diversidad de los significados, así como la diversidad de los objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014), es decir el profesor es conocedor del desarrollo de procesos del pensamiento matemático avanzado necesarios para la comprensión de los objetos matemáticos y lo que es más importante: para lograr esa comprensión por parte de los estudiantes, que seguramente serán futuros profesores. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos y propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron y reformularon distintas situaciones-problemáticas que buscaban dar respuesta a preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas usó para dar solución al problema planteado? que, de acuerdo con Godino (2009), los estudiantes para responder a este tipo de pregunta, tendrán que identificar los distintos conceptos o propiedades involucradas en la solución de la situación problemática planteada. En este sentido algunas de las preguntas que se formularon corresponden a:

Subítem 1a)
Con este subítem se buscaba evaluar el *conocimiento común y el conocimiento especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo al dar un ejemplo de un subgrupo del grupo.

Subítem 1b)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero al dar un ejemplo de un grupo que sea isomorfo al subgrupo dado en el subítem anterior (1a).

Subítem 1c)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero al justificar la no existencia de un subgrupo isomorfo al

grupo $(\mathbb{Z}_4;+_4)$ para lo cual, el estudiante debe aplicar el Teorema de Lagrange, según el cual, el orden de los subgrupos divide al orden del grupo.

Subítem 1d)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero al justificar que el grupo no cumple la propiedad de ser cíclico.

Subítem 3d)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subconjuntos del grupo $(S_4,\circ)$ de permutaciones con 4 elementos al verificar la propiedad de ser subgrupos para los subconjuntos de los subítems a),b) y c).

Subítem 4a)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento común del contenido; el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4,\circ)$ de permutaciones de 4 elementos.

Subítem 4b)
Con este subítem se busca evaluar el *conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4,\circ)$ y la identificación del subgrupo como el subgrupo isomorfo al subgrupo de las rotaciones del grupo $(D_4,\circ)$ de simetrías del cuadrado.

Subítem 4c)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos del grupo $(S_4,\circ)$ y la propiedad del subgrupo de ser conmutativo.

Subítem 4d)
Con este subítem se busca evaluar el *conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre los subgrupos regulares de cuatro símbolos, en el grupo $(S_4,\circ)$ de permutaciones con 4 elementos y la identificación del grupo $(\mathbb{Z}_4,+_4)$ al cual es isomorfo el subgrupo regular del enunciado (a).

Subítem 5c)
Con este subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ para identificar el grupo en el cual se trabaja la división de los coeficientes.

Subítem 5d)
Con este subítem se busca evaluar el *conocimiento ampliado y especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$, del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ para identificar las propiedades o conceptos de Teoría de grupos, que se aplican para realizar la división entre los polinomios dados.

Subítem 6a)
Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto $A_2 = \{1,2,3,\dots,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes de la solución de ecuaciones lineales: para el caso, la solución a la ecuación $x \oplus 17 = 99$ y las propiedades que se utilizan para dar solución a la ecuación.

Subítem 6b)
Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,\dots,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes de la existencia del elemento identidad en $(A_2, \oplus)$ y su justificación.

Subítem 6c)
Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1,2,3,\dots,99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman

las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes del grupo conocido $(\mathbb{Z}_{99}, +_9)$, al cual es isomorfo el grupo $(A_2, \oplus)$.

Subítem 6d)

Con el subítem se busca evaluar el *conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números y la función de reducción r en A_2 que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r con la operación $x \oplus y = r(x+y)$ en el conjunto A_2. En este subítem se estudia la comprensión de los estudiantes del conjunto de los z- números que son divisibles por 3 en el conjunto.

Subítem 7a)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la propiedad de la función de definir o no, un homomorfismo si $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ con un elemento fijo $a \in G$ del grupo $(G, \cdot)$ si adicionalmente el grupo es abeliano.

Ítem 8

Con el ítem se busca evaluar el conocimiento especializado del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde

$A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Subítem 8c)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$ al determinar el subgrupo de orden 2 del grupo dado.

Subítem 9a)

Con el subítem se busca evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática respecto al conjunto de los reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ con la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ al determinar si la operación definida cumple la propiedad de clausura.

Subítem 10b)
Con el ítem se busca evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 al determinar un subconjunto que no sea subgrupo.

Subítem 11b)
Con el ítem se busca evaluar *el conocimiento ampliado y el especializado del contenido* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a_2 = b_2 = c_2 = e_2 = e$ al construir el grupo cociente con el subgrupo $H = \langle a \rangle$.

A partir del análisis a las categorías de la faceta epistémica del CDM se determinaron una serie de indicadores para evaluar el CDM a través de prácticas matemáticas (algebraicas) propuestas para la activación de las configuraciones epistémicas de los estudiantes de formación matemática. Un problema en la Educación básica y media (secundaria) en el contexto Colombiano se relaciona con los concursos docentes realizados por el Ministerio de Educación Nacional, donde se vinculan a profesionales en diversas áreas según pruebas establecidas. Se plantea la hipótesis que estos profesionales han desarrollado un CCC y CAC que les permite acceder como docentes al Sistema Educativo Colombiano y que el mismo sistema considera ciertos conocimientos como básicos y necesarios para el desarrollo del CEC necesario para la enseñanza. De igual forma, en el ámbito universitario se puede plantear la misma hipótesis, ya que los estudiantes ingresan como docentes de las escuelas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y por tanto se espera que estos estudiantes tengan unos conocimientos básicos que les permitan ir adquiriendo la experiencia necesaria (CEC) para la labor de la enseñanza universitaria.

En esta dirección, es importante contar con instrumentos que permitan evaluar la dimensión epistémica del CDM para determinar el nivel que se ha potenciado en los estudiantes respecto al CCC y al CAC como conocimientos básicos para el desarrollo del CEC, necesario para la enseñanza.

10.2.3.6. Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática

Finalmente, en la tercera fase de investigación se implementó el cuestionario final, con el objetivo de evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionada con el objeto matemático Grupo. Luego del proceso complejo del diseño, implementación y análisis de resultados de la versión piloto y en la búsqueda del logro de este objetivo (7), se aplicó el cuestionario *CDM-Grupo* a 36 estudiantes de formación matemática, buscando analizar la potenciación de un conocimiento común y un conocimiento ampliado como bases de para el desarrollo del conocimiento especializado necesario para la labor de la enseñanza del objeto matemático. Según las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes y el índice de dificultad de las preguntas del cuestionario se presentan como conclusión los siguientes resultados:

1) Según el análisis a las prácticas matemáticas efectuadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciados y 1 grupo de Matemáticos) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes tienen *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Común del Contenido**, a excepción del conocimiento de prácticas matemáticas para solucionar las situaciones problemáticas planteadas en los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento común básico** de los estudiantes de formación matemática.

Subítem 1a) En el subítem, los licenciados del grupo G1 presentan un nivel de dominio medio (31 por ciento aproximado), respecto a las respuestas correctas dadas; los licenciados del grupo G2 un nivel de dominio alto del 88 por ciento ($\geq 75\,\%$) y los matemáticos del grupo G3 un nivel de dominio alto del 100 por ciento. El promedio de los tres grupos corresponde al 73 por ciento, por tanto se establece que los estudiantes presentan un **nivel de dominio medio** respecto al *conocimiento común del contenido* que les permite identificar un subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero.

Subítem 10b) En el subítem los estudiantes de formación matemática presentan un nivel de dominio medio del 42 por ciento: los licenciados del grupo G1 y los del grupo G2 presentan un nivel de dominio medio del 38 por ciento y los matemáticos de igual forma presentan un nivel de dominio medio del 50 por ciento. Con este conocimiento común del contenido los estudiantes identifican los subconjuntos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 que no cumplen con la propiedad de ser subgrupo.

Subítem 10d) en el cual los estudiantes de formación matemática presentan un nivel de dominio medio del 50 por ciento: el grupo G1 con un porcentaje del 56 por ciento; el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento. Con este conocimiento común del contenido, los estudiantes elaboran la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

En esta categoría del Conocimiento Común del Contenido se considera que en general los estudiantes presentan *debilidades* en los conocimientos del objeto Grupo, estas **debilidades o dificultades** se relacionan con un nivel de dominio bajo, según el índice de dificultad de la pregunta, en especial con los conocimientos relacionados con los subítems 2d), 4a), 5b), 8b) y 9b) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde al 0 por ciento, identificándose como índices de mayor grado de dificultad para los estudiantes. Se presenta el análisis al subítem 2d).

Subítem 2d):
Se relaciona con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de dificultad para los estudiantes establecer la relación que cumplen los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c$ y sus raíces.

2) Continuando, con el análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan al igual que con el Conocimiento Común del Contenido, dificultades (índice de dificulta alto de los conocimientos relacionados con el subítem) en relación con el **Conocimiento Ampliado del Contenido** respecto al objeto Grupo, a excepción del conocimiento Ampliado de los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento ampliado básico** de los estudiantes de formación matemática:

Subítem 1b) en el cual los estudiantes presentan un nivel de dominio medio (56 por ciento en el índice de dificultad): el grupo G1 con un porcentaje del 18 por ciento; el grupo G2 con un porcentaje del 50 por ciento y los matemáticos con un nivel de dominio alto que corresponde a un porcentaje del 100 por ciento. Este conocimiento ampliado del contenido les permite a los estudiantes determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y un grupo al cual puede ser isomorfo el subgrupo.

Subítem 1c) en el cual los estudiantes presentaron un nivel de dominio medio (60 por ciento, en el índice de dificultad del subítem): en el grupo G1 el porcentaje es del 25 por ciento con un nivel de dominio bajo; el grupo G2 con un porcentaje del 56 por ciento y un nivel de dominio medio y los matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento con un nivel de dominio alto. Este conocimiento ampliado le permite a los estudiantes, determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ de los enteros módulo 4, y aplicar el teorema de Lagrange para justificar el hecho.

Análisis del subítem 1d) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio* del Conocimiento Ampliado del Contenido, que corresponde a un porcentaje de respuestas correctas del 52 por ciento (índice de dificultad del subítem): en el grupo G1 con un porcentaje del 13 por ciento y un nivel de dominio bajo; en el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y un nivel de dominio medio y los matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento y un nivel de dominio alto del CAC que les permite determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de "ser un grupo cíclico".

Análisis del subítem 10d) en el cual los estudiantes presentaron un *nivel de dominio medio* del CAC correspondiente a porcentaje de respuestas correctas del 50 por ciento (índice de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje del 56 por ciento y un nivel de domino medio; el grupo de licenciados G2 también con un nivel de dominio medio del 44 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento y de igual forma un nivel de dominio medio que le permite a los estudiantes construir la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

En la categoría del Conocimiento Ampliado del Contenido se considera, que en general los estudiantes presentan *grandes debilidades* relacionadas con un *nivel de dominio muy bajo o deficiente* respecto al índice de dificultad del subítem según la escala establecida para el índice, donde 0 índica el mayor grado de dificultad y 1 el mayor grado de facilidad y el conocimiento básico se relaciona con un índice de dificultad entre el (25% y el 75%). En especial en los subítems 2a), 2b), 2d), 3c), 4a), 4b), 4c), 4d), 5b), 8c), 9d) y 11c) presentaron grandes dificultades, hecho que se evidencia del porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática.

Subítem 2a):
El subítem permite evaluar el conocimiento ampliado del contenido y del conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$ resultando de máximo grado de **dificultad** para los estudiantes determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es invariante en el grupo dado, esto significa que al aplicarle las permutaciones del grupo a las variables, la función permanezca igual.

3) De igual forma, del análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciatura y 1 grupo de Matemáticas) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Especializado del Contenido,** a excepción del **conocimiento especializado básico** de los subítems:

Subítem 1a) en el cual los estudiantes presentan un nivel de dominio medio del conocimiento especializado (73 por ciento en el índice de dificultad, acercándose a un grado de mediana facilidad): el grupo G1 con un porcentaje del 31 por ciento; el grupo de licenciados G2 con un porcentaje del 88 por ciento y un nivel de dominio alto al igual que los matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento. Este Conocimiento Especializado del Contenido, es el conocimiento necesario para la enseñanza y le permite al estudiante determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero.

Subítem 1b) en el cual los estudiantes presentan un nivel de dominio medio (56 por ciento, respecto al índice de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje del 1 por ciento y un nivel de dominio bajo del CEC; el grupo G2 con un porcentaje del 50 por ciento y un nivel de dominio medio y el grupo de matemáticos con un porcentaje del 100 por ciento de respuestas correctas y un nivel de domino alto del CEC. Este conocimiento le permite al estudiante determinar un subgrupo de grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y determinar el grupo al cual pueda ser isomorfo.

Subítem 1c) en el cual los estudiantes presentan un nivel de dominio medio (porcentaje de respuestas correctas del 60 por ciento, respecto al índice de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje del 25 por ciento y un nivel bajo de dominio; el grupo G2 con un porcentaje del 56 por ciento y un nivel de dominio medio y los matemáticos con un porcentaje de respuestas correctas del 100 por ciento y un *nivel de dominio alto* del CES que les permite, determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4; +_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange.

Análisis del subítem 1d) en el cual los estudiantes presentan un nivel medio del conocimiento especializado del contenido (porcentaje de respuestas correctas del 52 por ciento, respecto a al índice de dificultad del subítem): el grupo G1 con un porcentaje de respuestas correctas del 13 por ciento y un nivel de dominio bajo; el grupo G2 con un porcentaje del 44 por ciento y un nivel de dominio medio y los matemáticos con un porcentaje de respuestas correctas del 100 por ciento y un nivel de dominio alto del CEC que les permite determinar que el grupo $(D_3, \circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser grupo cíclico.

Análisis del subítem 10b) en el cual los estudiantes presentaron un nivel de dominio medio del conocimiento (porcentaje de respuestas correctas del 42 por ciento, respecto al índice de dificultad del subítem): el grupo G1 y G2 de licenciados con un porcentaje del 38 por ciento y los matemáticos con un porcentaje del 50 por ciento y de igual forma un nivel de dominio medio del CEC que les permite identificar un subconjunto del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 que no cumple la condición de ser subgrupo.

En esta categoría del Conocimiento Especializado del Contenido se considera que la mayoría de los estudiantes presentan **debilidades o dificultades** relacionadas con un nivel de dominio bajo o deficiente del subítem según el índice de dificultad: en especial de los subítems 4a), 4b), 4c), 4d), 8c), 9d), 11c), 11d) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática (mayor índice de dificultad del subítem).

Subítem 4a):
El subítem permitió evaluar el conocimiento común, ampliado y el especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4, \circ)$, resultando de máximo grado de **dificultad** para los estudiantes, determinar que el subgrupo de rotaciones era isomorfo al subgrupo regular del grupo $(S_4, \circ)$. Los estudiantes argumentaron que la definición de subgrupo regular de cuatro símbolos no era comprensible para ellos.

Finalmente, se establece que los tres grupos de estudiantes de formación matemática, presentaron dificultades en relación con el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido y por tanto del conocimiento especializado del contenido; ya que presentan un conocimiento bajo de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del conocimiento didáctico-matemático: hecho que se deduce de los análisis realizados a las categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionado con el objeto Grupo. En general el grupo de licenciatura G1 presenta el más bajo nivel de dominio del conocimiento didáctico-matemático (respecto al índice de dificultad de los subítems), en la dimensión epistémica de este conocimiento y en relación con el objeto Grupo (programa de licenciatura nocturno) en orden ascendente continúa el grupo de licenciatura G2 (programa diurno) y finalmente, se encuentra, el grupo de matemáticas: así, al igual que en la prueba piloto este grupo presenta el mayor nivel de desempeño del conocimiento, respecto al objeto Grupo según el índice de dificultad de los subítem diseñados para evaluar las categorías del CDM.

4) Se realizó, el análisis cuantitativo-cualitativo de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de formación matemática. Se presenta el análisis realizado al subítem 9a): con este subítem se pretende evaluar el **conocimiento común del contenido** en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del conjunto de los números reales $(\mathbb{R}, \bullet)$ y la operación $a \bullet b = 3a + 4b$ para $a, b \in \mathbb{R}$ para determinar que la operación cumple la propiedad de clausura.

Respuestas de los estudiantes de formación matemática al subítem 9a) - CCC	**Análisis**
Respuesta 1: Si se cumple la propiedad clausurativa	9 estudiantes que representan el **25** por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 2 estudiantes que representa el 13 por ciento aproximado de los estudiantes del grupo G1; 6 estudiantes del grupo G2 que representan el 38 por ciento aproximado y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3 (lo cual representa un nivel de dominio medio (tiende a bajo) del conocimiento común de los estudiantes respecto a la comprensión del subítem).
	Justifican: porque $a, b \in \mathbb{R}$ $3a + 4b + 0 = 3a + 4b$ (2 estudiantes)
	$a = 1, b = 1$ entonces $3(1) + 4(1) = 7 \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	$a = 0, b = 1$ entonces $3(0) + 4(1) = 0 + 4 = 4 \in \mathbb{R}$ y $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}$ entonces $3\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4} = \frac{9}{2} \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	$a \bullet b = 3a + 4b$ $= 3(2) + 4(3) = 18 \in \mathbb{R}$ La clausura se cumple ya que se trabaja con $\mathbb{R}$ (2est)
Respuesta 2: No responden nada, solo justifican	8 estudiantes que representan el 22 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática: 3 estudiantes que representa el 19 por ciento aproximado, de los estudiantes del grupo G1; 4 estudiantes del grupo G2 que representan el 11 por ciento aproximado y 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento del grupo G3 (conocimiento común bajo de los estudiantes).
	Justifican: Sea $x \in \mathbb{Z}$ $x(a \bullet b) = x(3a + 4b)$ (2 estudiantes)
	$a \bullet b = 3a + 4b$ (4 est.)
	$a \bullet b = 3a + 4b$ Sean $p, h \in \mathbb{R}$ $p \bullet h = 3p + 4h \in \mathbb{R}$ (1 est.)
	Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $a \bullet b = 3a + 4b$ como $a, b \in \mathbb{R}$ $3a, 4b \in \mathbb{R}$ así, la suma es real (1 est.)

10.3. Implicaciones del estudio

La presente investigación surgió como resultado del análisis efectuado a investigaciones realizadas en el tema del conocimiento didáctico-matemático de los profesores; las cuales al momento, eran pocas pero con valiosos aportes; algunas se encontraban orientadas al estudio de los objetos matemáticos probabilidad y derivada. Por tanto, se pretende que esta tesis doctoral sea un aporte al estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo, respecto a la construcción y al análisis de indicadores que permitan evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes en relación al objeto matemático Grupo.

Los resultados de la investigación, permitieron dar respuesta parcial a la pregunta: ¿Qué conocimiento didáctico-matemático se necesita para una enseñanza idónea del objeto Grupo? la cual dada su complejidad, se trabajo en la forma más concreta: ¿Qué conocimiento didáctico-matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática, para una enseñanza universitaria idónea del objeto Grupo? Según la pregunta y los análisis realizados para dar respuesta a la misma, se concluye que:

1) *Es necesario incorporar los distintos significados del objeto Grupo.* Del estudio histórico, epistemólogico y fenomenológico, se evidencia en primer lugar la complejidad asociada al objeto matemático Grupo de la educación universitaria. Por esta razón, se considera necesario introducir en los cursos de Teoría de Grupos, los diversos significados del objeto, en forma progresiva a lo largo del curso, iniciando con el significado del objeto como "Conjunto de Permutaciones" con la operación compuesta, para ir deduciendo propiedades de esta operación en el conjunto; específicamente se pueden trabajar los grupos de simetrías de los polígonos regulares D_n como lo propone el texto de Gallian (1990) y Herstein (1986), para que los estudiantes puedan trabajar con situaciones concretas, que les permitan realizar el proceso de abstracción para llegar finalmente, al significado de Grupo, como "Grupo Abstracto", esto es, como un conjunto, donde se define una operación, que cumple los axiomas de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto.

En esta dirección, el estudiante puede ir adquiriendo conocimientos y desarrollando procesos para construir las herramientas necesarias que le permitan incorporar los demás significados en los contextos de (Aritmética Modular - Conjuntos $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, Teoría de Ecuaciones Algebraicas - El conjunto de raíces de una ecuación algebraica, en Teoría de Galois - Conjunto de homomorfismos, Teoría de Matrices - Conjuntos especiales de Matrices y finalmente, como Grupo Abstracto; de esta forma el estudiante puede construir un conocimiento del objeto matemático. Para llevar a cabo este proceso, es necesario que el profesor posea un conocimiento didáctico-matemático adecuado, que le permita realizar el proceso de enseñanza de manera idónea. Se concluye así, del estudio del conocimiento de los estudiantes de formación matemática, que es conveniente que los estudiantes profundicen en cursos en la línea de Álgebra Abstracta, en la búsqueda del desarrollo de procesos que le permitan desempeñar la labor de la docencia universitaria en tópicos de Álgebra Abstracta.

2) *El objeto Grupo en los libros de texto universitario.* Es necesario que el estudiante tenga diversos textos de Teoría de Grupos donde se complementen los diversos significados del

objeto matemático, de modo que se puedan ir incorporando progresivamente cada uno de los significados, hasta llegar al significado de Grupo, como Grupo abstracto, para luego continuar con el estudio de cada uno de los axiomas que hacen que un conjunto dado, con una operación definida en él alcancen la estructura algebraica de Grupo; para lograr que el estudiante vaya desarrollando en especial el proceso de abstracción, necesario para continuar con el estudio de las otras propiedades del objeto matemático.

3) *El bajo nivel del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática.* A partir de la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*, el cual tenía el objetivo de evaluar el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo; se evidenció, que los estudiantes poseen un conocimiento didáctico-matemático con un nivel bajo. Esto se infiere de las prácticas realizadas por los estudiantes, al solucionar las situaciones-problemáticas planteadas que permitían evaluar las categorías de la faceta epistémica del CDM.

Al analizar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, se observó que respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes, este, resultó de un nivel bajo al igual que el conocimiento ampliado del contenido y por consiguiente del conocimiento especializado. El nivel de desempeño obtenido al desarrollar las prácticas matemáticas propuestas, que permitían evaluar el CDM, en el grupo de estudiantes fue bajo, según la escala establecida: 0-5% Nivel bajo;5-25% nivel medianamente bajo; 25-75% nivel de dominio medio: en este caso se considera el nivel de dominio básico; 75-95% nivel de dominio medianamente alto; 95-100% nivel de dominio alto y se espera de los estudiantes un conocimiento básico relacionado con un nivel de dominio medio de los conocimientos (como mínimo). Se establece así, que no es conveniente que los estudiantes de formación matemática, al terminar su formación inicial, orienten asignaturas en la línea de Álgebra Abstracta y se espera que en los cursos de Teoría de Grupos se profundice en el estudio de los procesos que llevan al desarrollo del pensamiento algebraico a través de la implementación de prácticas matemáticas.

En general quedan interrogantes abiertos en cada una de las asignaturas donde los estudiantes de formación matemática (pregrado) entran a dirigir en su futuro desempeño, respecto al estudio de la dimensión epistémica del CDM del profesor universitario y en relación con el CDM de cada asignatura.

10.4. Principales aportes del estudio

Dentro de los principales aportes del estudio, se encuentran los siguientes:

1) El estudio realizado en torno al objeto matemático Grupo, se abordó desde distintas perspectivas, donde se consideró en primer lugar, el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto del cual emergen los distintos significados del objeto de investigación, hecho que permite tener una compresión clara del objeto matemático. Además, el análisis a las investigaciones que sirvieron como antecedentes del estudio, permitieron analizar aspectos cognitivos, como la comprensión del objeto Grupo por los estudiantes, en ellas se evidenciaron algunas de las dificultades presentes en el aprendizaje del objeto Grupo, los cuales se contrastaron con las dificultades evidenciadas de las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática.

2) Otro de los aportes de la investigación, se encuentra en el estudio del tratamiento dado al objeto Grupo en los programas de formación matemática y en los libros de texto, los cuales proporcionaron información sobre el tratamiento dado al objeto matemático en los contextos internacionales; esto se evidencia con el uso de los textos de Gallian (1990) y Herstein (1986) que son libros clásicos de Teoría de Grupos para todos los currículos nacionales e internacionales de los estudiantes de formación matemática: en esta dirección la información obtenida del análisis a los libros de texto, puede utilizarse para el desarrollo de nuevas investigaciones relacionadas con el objeto Grupo y el CDM de los profesores universitarios.

3) El análisis realizado al objeto Grupo en los libros de texto de Teoría de Grupos desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática - EOS, constituye un aporte en cuanto a la identificación de los distintos objetos matemáticos y los significados presentes en los libros, así como de la importancia de su inferencia en las orientaciones curriculares. Esta información puede utilizarse para sugerir propuestas de mejoramiento de los libros de texto en el contexto Colombiano, en relación al tratamiento que debe darse al objeto Grupo en la Educación Superior.

4) Dentro de los principales aportes del presente estudio, se encuentra en primer lugar, la reconstrucción del significado epistémico del objeto Grupo, el cual se resume en la figura 6.14; luego la construcción del cuestionario que permite evaluar el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado relacionado con el objeto Grupo: categorías del CDM y finalmente, en la misma dirección la categorización de los conocimientos básicos, respecto al objeto Grupo. Algunos de los subítems se tomaron de investigaciones previas, pero se adaptaron según el objetivo de la pregunta para tratar de obtener resultados originales e información de interés en relación con el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, sobre el objeto Grupo. Sin embargo, el cuestionario *CDM-Grupo,* permite evaluar solo aspectos parciales o iniciales del conocimiento didáctico-matemático, dada la complejidad de este conocimiento didáctico-matemático: en el estudio se evaluó la dimensión epistémica del CDM, lo cual constituye, en cierta medida, una de las fortalezas del instrumento.

5) Finalmente, el estudio permite contar con resultados originales sobre el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo. La información presentada, puede utilizarse para diseñar programas de intervención o de formación continua que contribuyan con el mejoramiento de la enseñanza del objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática.

10.5. Limitaciones

Dentro de las limitaciones de la investigación se identificaron las siguientes:

1) La muestra a la cual se aplicó el instrumento, corresponde a 36 estudiantes de formación matemática: 16 del Grupo de licenciatura G1, 16 del grupo de licenciatura G2 y la más pequeña que corresponde a 4 estudiantes del programa de matemáticas; por esto, los resultados no son generalizables a los estudiantes de formación matemática de las instituciones de Educación Superior a nivel nacional e internacional. Específicamente se encontraron variaciones entre los resultados de la prueba piloto y el cuestionario final en los dos grupos donde se aplicó el cuestionario: del estudio piloto se concluye, que un instrumento puede tener un índice de dificultad media, que es lo que se desea al seleccionar las preguntas; es decir, se pueden ir eliminando las preguntas con índices de dificultad alto para obtener el índice deseado; este resultado no se aplicó, ya que, según los objetivos del presente estudio, es importante el estudio del proceso de diseño de los instrumentos que permiten evaluar la dimensión epistémica del CDM pero no se tomó el cuestionario con un índice de dificultad media, ya que estaba indagando precisamente por la comprensión de los estudiantes de las propiedades del objeto grupo; es decir, se buscó la construcción o reconstrucción de subítems-ítems que permitieran evaluar las categorías del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado y conocimiento especializado del contenido para llegar a la descripción o construcción de consignas que permitieran realizar la evaluación como lo propone Godino (2009) en su modelo del CDM y de igual forma, el objetivo que se tenía correspondía al análisis de la comprensión del conocimiento de los estudiantes respecto al objeto de investigación.

2) En la construcción del cuestionario, que permitió evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática, se consideró solo el estudio de la dimensión epistémica del CDM, teniendo presente que los estudiantes no son profesores y por tanto, algunas de las otras dimensiones del CDM (cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) no se pueden evaluar en este momento (Godino, 2009); pero se llegó al segundo nivel de análisis de la dimensión epistémica. Se analizó el nivel (1), que corresponde a la identificación de las prácticas matemática

de los estudiantes y el nivel (2) que corresponde a la identificación de los objetos y procesos matemáticos de las prácticas desarrolladas; faltando el análisis de los niveles 3, 4 y 5 (ver, capítulo 4). Lo anterior, dado que un estudio con profesores es el que permite la observación de las clases para analizar las interacciones que se dan, la revisión de planificaciones y el desarrollo de entrevistas en profundidad con los profesores participantes.

3) Finalmente, para el análisis de los libros de texto, solo se seleccionaron dos clásicos y dos contemporáneos del contexto Colombiano, pero se encuentra gran cantidad de libros clásicos y un número menor de libros en el contexto nacional, lo cual proporcionaría mayor información en nuevos aspectos como el que corresponde al nivel (3) para identificar los posibles conflictos semióticos de los estudiantes, tomando como referencia los libros de texto.

10.6. Perspectivas a futuro

Se evidencia de los antecedentes presentados para el estudio (ver, capítulo 2); que son escasas las investigaciones que relacionan el objeto Grupo y el CDM para la enseñanza del mismo, por lo que se pueden presentar algunas líneas de investigación en esta dirección, tales como:

1) Ampliar el estudia a una muestra mayor de estudiantes de formación matemática, incluso con estudiantes de otras instituciones de educación superior y comparar los resultados con los obtenidos en el presente estudio para determinar si los resultados o parte de ellos, se pueden generalizar como en el caso de las dificultades de los estudiantes que se pudieron contrastar en el estudio desarrollado.

2) Realizar el estudio con profesores universitarios para analizar todas las dimensiones del CDM, según propone Godino (2009) con el modelo del Conocimiento didáctico-matemático y hacer un comparativo en la dimensión epistémica con el resultado de la investigación con estudiantes en los aspectos que correspondan.

3) Diseñar un cuestionario *CDM-Grupo* tratando de abarcar los contenidos mínimos propuestos para el curso de Teoría de Grupos, para indagar con mayor profundidad en cada uno de los conocimientos evaluados y de igual forma obtener un instrumento confiable que permita ser aplicado en pruebas para el ingreso de docentes universitarios en la línea de Álgebra Abstracta, específicamente para la asignatura de Teoría de Grupos.

4) Realizar un análisis comparativo de libros de texto entre los textos clásicos y los del contexto Colombiano: para establecer, si existen o no diferencias en el tratamiento dado al objeto Grupo.

5) Diseñar un programa de intervención, a partir de los resultados obtenidos en cuanto a las dificultades y los niveles de dominio del conocimiento del objeto Grupo, que permitan mejorar y potenciar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto de investigación para luego analizar su efecto (Vásquez, 2014).

6) Plantear un estudio entre el desarrollo de algunos procesos del pensamiento matemático avanzado y las categorías del CDM de los estudiantes de formación matemática.

Se finaliza la tesis doctoral con el deseo, de haber realizado una primera aproximación al estudio del CDM de los estudiantes de formación matemática y en relación con el objeto Grupo; resultando como aporte, un primer estudio de las necesidades formativas de los estudiantes para la labor de la enseñanza universitaria y se espera que las investigaciones en este tema puedan contribuir con el desarrollo de la comprensión del objeto Grupo: información útil, tanto para los profesores que dirigen la asignatura como para los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos).

10.7. Contribuciones del estudio

Se presentan en esta última sección, algunas de los aportes que se realizaron en el campo de investigación en Educación Matemática, a partir de los cursos del doctorado, estudios, desarrollos y resultados obtenidos a lo largo de la investigación en la línea de formación de profesores y en el conocimiento del profesor.

Sepúlveda, D. O., (2011). *Estrategía didáctica para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.* Congreso de Investigación y Pedagogía II Nacional, I Internacional. Tunja, Boyacá.

Sepúlveda, D. O., (2012). *El pensamiento algebraico en la formación de maestros de matemáticas en Colombia.* VI Seminario Taller Internacional Vendimia. Villa de Leiva, Boyacá.

Sepúlveda, D. O., (2013). *La fenomenología de las estructuras matemáticas, de Hans Freudenthal. Aportes de la fenomenología a la didáctica de la Matemática.* Congreso de Investigación y Pedagogía III Nacional, II Internacional. Tunja, Boyacá.

Sepúlveda, D. O., (2014). *Conflictos semióticos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, con los conocimientos previos: GCD, divisibilidad e inducción matemática, necesarios para la comprensión del objeto matemático Grupo.* Trabajo de ascenso en el escalafón universitario. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja, Boyacá.

Sepúlveda, D. O., (2015). Estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario: un marco teórico de investigación. *Revista de Investigación Desarrollo e Innovación. RIDI*, 6(1), 29-43.

Anexos

APÉNDICE A

Anexos

A.1. Formato para el juicio de expertos

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Matemáticas y Estadística

Cuestionario CDM-Grupo

Nombre: ____

Universidad donde labora: ____
Último título académico: ____

Estimado doctor, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar, para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestra tesis doctoral titulada: *El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario: Objeto Grupo*. Esta evaluación mediante juicio de expertos, sustenta la fiabilidad y validez del instrumento que se está construyendo para evaluar el conocimiento didáctico - matemático del estudiante de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) sobre el objeto Grupo, para la labor de enseñanza en el ámbito universitario.

Como criterios de evaluación en la selección de las tareas del cuestionario, se han tenido en cuenta, los siguientes:

- Tareas que proporcionan información sobre el grado de ajuste del **significado personal** de los estudiantes de formación matemática, respecto del significado global del objeto Grupo. Para esto se incluyen ítems que activan los diferentes sentidos del objeto Grupo: *Permutaciones, Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices e invariantes en Geometría;* según su evolución histórica, hasta llegar a la consolidación del concepto que se tiene en la actualidad.

- Aquellas tareas que ponen en juego:
  El conocimiento común del contenido (resolver la tarea matemática propia de la Teoría de Grupos. Es el conocimiento que tendrían por ejemplo los físicos, químicos o cualquier estudiante que curse Teoría de Grupos); tareas que requieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos más avanzados del curriculo) y aquellas que requieren del conocimiento especializado, que se define como aquel que es necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario (como: usar diferentes representaciones, distintos significados del objeto matemático, resolver un problema mediante difierentes procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego para la resolución de una tarea matemática).

- Tareas que se relacionen con los siguientes contenidos:
  Operaciones binarias, Estructuras algebraicas elementales, Grupos, ejemplos y contraejemplos, Grupo de elementos invertibles de un semigrupo, Subgrupos, Orden de un grupo, orden de un elemento, Propiedades de los Grupos (ser Abeliano, cíclico, ser un grupo de permutaciones, isomorfismos, homomorfismos, etc.)

En este sentido solicitamos su colaboración, para evaluar cada una de las tareas que componen el instrumento denominado *Cuestionario CDM - Grupo,* respecto a los criterios anteriores. Nos interesa saber su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- El grado de relevancia con el que el item evalúa alguno de los diferentes significados del objeto grupo (teniendo en cuenta el origen de este objeto: desde la Teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la Geometría).

- El grado de relevancia con el que evalúa los diferentes tipos de conocimientos del estudiante de formación matemática, para la labor de profesor universitario de Teoría de Grupos.

- El tipo y grado de relevancia con el que evalúa el CDM (conocimiento didácticomatemático).

- La ausencia de algún contenido importante.

- La redacción y comprensión de los enunciados.
- Sugerencias.

Para este análisis se han incluido tablas que evalúan el grado de relevancia de los tres criterios mencionados, siendo:
NR=Nivel de Relevancia
Nada relevante = 1
Totalmente relevante = 5
NA= No aplica
Por favor, para cada uno de los items de la tarea, marque el nivel que corresponda según su criterio; si un item no aplica marque NA.

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
b) $*$ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 2. Sea $(\mathbb{R},\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a\bullet b = 3a+4b$ a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique b) La operación es asociativa? Justifique c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique d) En $(\mathbb{R},\cdot)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(\mathbb{Z},+_5)$ a) El cociente corresponde a ? Justifique b) El residuo corresponde a? Justifique c) En que grupo se esta trabajando? Justifique d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2{+}14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52{+}98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique
b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 5. Sea el conjunto $(\mathbb{Z}, +_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique
c) Es $\mathbb{Z}$ subgrupo de $\mathbb{Z}$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique
b) A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z},+)$? Justifique
d) El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	NR	NR	NR	NR	NR	NA
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2=b^2=c^2=e$. a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo. b) Construya el grupo cociente por $H=\langle a\rangle$? Justifique c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f:G\longrightarrow G$ tal que $x\longrightarrow axa^2$ para cada $x\in G$ y para un elemento fijo $a\in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a=e$
c) $a^2=a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3=e$ y el grupo es abeliano

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:
a) Deja invariante el número 2.
b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique
c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique
d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ una función invariante? Justifique
b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante ? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$ De un polinomio simétrico ? Justifique
d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2 ? Justifique

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cado uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos. a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique c) Es conmutativo el grupo? Justifique d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

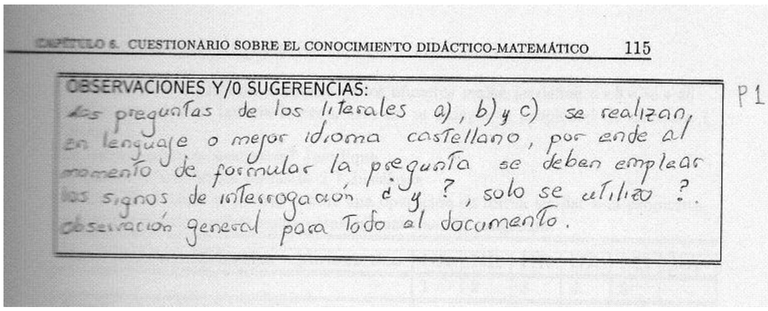
Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						
Aritmética Modular						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de ecuaciones algebraicas						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Galois						
a)						
b)						
c)						
d)						
Teoría de Matrices						
a)						
b)						
c)						
d)						

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Conocimiento:						
Conocimiento Común						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Especializado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Conocimiento Ampliado						
a)						
b)						
c)						
d)						
Contenido Curricular:						
Operación Binaria						
a)						
b)						
c)						
d)						
Estructuras Algebraicas Elementales						
a)						
b)						
c)						
d)						
Grupo - ejemplo - contraejemplos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Subgrupos						
a)						
b)						
c)						
d)						
Orden del grupo, elemento						
a)						
b)						
c)						
d)						
Propiedades de los grupos						
a)						
b)						
c)						
d)						

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

A.2. Observaciones de los expertos a la prueba piloto

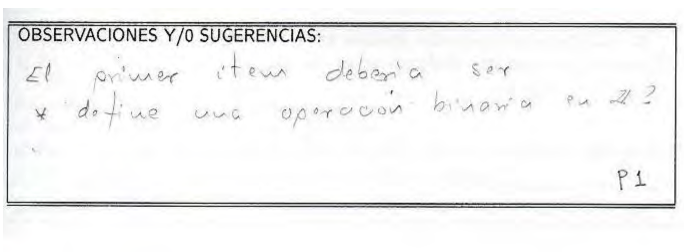
En este anexo se presentan las observaciones realizadas por los expertos a cada una de las tareas del cuestionario *CDM-Grupo* a la prueba piloto. En algunos casos los expertos no hicieron observaciones a las 11 tareas propuestas para el cuestionario piloto.



CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 115

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P1

Las preguntas de los literales a), b) y c) se realizan en lenguaje o mejor idioma castellano, por ende al momento de formular la pregunta se deben emplear los signos de interrogación ¿ y ?, solo se utilizó ?. Observación general para todo el documento.

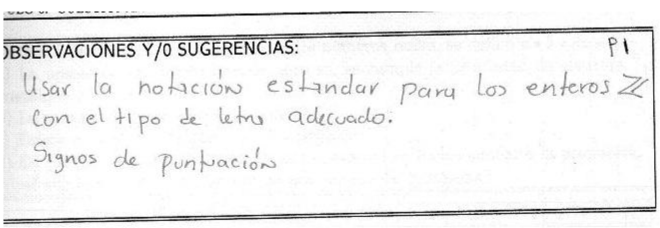


OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

El primer ítem debería ser

* define una operación binaria en $\mathbb{Z}$?

P1



BSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P1

Usar la notación estandar para los enteros $\mathbb{Z}$ con el tipo de letra adecuado.

Signos de puntuación

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

Usar el signo de apertura de interrogación. ¿ P1

E

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

Mejorar la redacción del enunciado. Podría ser:
Sea $(Z,*)$ el conjunto de los números enteros
junto con la operación $*$ definida por:

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Aclarar cuál es el elemento identidad, para así poder buscar el inverso del elemento z.

P2

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P2

Usar el tipo adecuado de letra para denotar los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$

E9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

Al igual que la tarea 1, mejorar la redacción

- En los ítems poner la operación $*$, a que hace referencia, es decir a) La operación $*$ es asociativa?
- En el ítem d) especificar quién es $\mathbb{R}^2$. y mejorar la pregunta pues está muy abierta y podría no obtenerse el objetivo propuesto al plantearla.

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Me parece que la respuesta a la pregunta c) está en el enunciado.

P3

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Porque la operación en el conjunto $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ sin tener en cuenta propiedades de $+_5$?

P3

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P3
Usar tipo de letra adecuado para $\mathbb{Z}_5$.
Preguntas c y d falta precisión!
Primero debería haberse definido, qué es la teoría de grupos

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Las preguntas c y d son ambiguas. Al trabajar con polinomios el trabajo no se hace en un grupo aunque el conjunto de coeficientes lo sea. Hay más de un grupo en juego.
No existe claridad acerca de donde comienza la teoría de grupos, esto depende del nivel de formación.

P3

Es conveniente reformular o cambiar las preguntas c y d.

E9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Modificar el enunciado: Sea $G = \mathbb{Z}_5[x]$ el conjunto de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Si $f(x) = 3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ y $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ son polinomios en G entonces:
a) Al dividir $f(x)$ por $g(x)$, el cociente es:
b)

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Mejorar la redacción de la Tarea, no es claro cómo actúa la función para $n \geq 100$.

P4

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Creo que la función r no se define en forma clara.

P4

CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 124

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

P4

✓ Procurar usar el tipo de letra adecuado para denotar el conjunto de los #s naturales: $\mathbb{N}$

✓ Definir bien la función r. Es demasiado ambigua la forma como está descrita.

✓ Pregunta d) ¿divisibilidad en el sentido de la operación ⊕? o en qué?

✓ No encuentro relevancia a la notación del conjunto A_z, ¿Para qué? - ¿Z-números? ¿para qué?

CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 124

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

P4

No define la función r para $n>100$, sólo da algunos ejemplos.

Si no se define esta función, se pueden dar varias interpretaciones a los ejemplos. Por ejemplo:

$r(57384) = r(5+73+84)$ ó $r(57384) = r(57+384)$.

Sugiero que esta pregunta sea reformulada o se adecúe la redacción para que sea clara.

En la pregunta (d), el término "divisible" ¿a qué hace referencia?

En la notación, ¿por qué usa las expresiones z-número y A_z?

LO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 124

E9

SERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

e parece muy confusa la pregunta. Además no
está bien definida la función r.
Sugiero cambiar esta pregunta.

TULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 127

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Tipo de letra para $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_3$

Signos de puntuación del español

P5

CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

La pregunta b se refiere a D_3 o al subgrupo de a?

P6

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

¿A qué condición nos referimos en c?

P7

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P7

Pregunta c → muy ambigua.

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P7

Cuando menciona condición en la pregunta c, ¿a qué tipo de condición se refiere?

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P8

En contenido curricular haría falta un item sobre morfismos

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

¿Se pueden establecer isomorfismos con S_3 y S_2 y, los subgrupos que se construyeron de a a d.

P9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:

La pregunta está mal planteada. Primero habría que definir qué es lo que se está entendiendo por ser invariante.

Pg

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Pg

La pregunta no es clara.
La noción de invariancia en teoría de grupos está bien definida y no coincide con lo que aparentemente pregunta.

En la pregunta (d), se presume que se conoce la noción de "invariancia" pero los ejercicios anteriores no están encaminados a definirla sino que se debe conocer de antemano.

¿Con invariación se refieren a que la permutación no cambia a 2 de lugar?

Tal como está planteado el taller no es viable, recomiendo que se reformule completamente para poder asignar un nivel de relevancia.

PÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 139

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Pg

En la 1ra lectura no me fue claro el ejercicio

PÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 139

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: Mejorar el enunciado.
Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1, 2, 3, 4\}$.
a). Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2.

Revisar tildes en los enunciados.

E9

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: No es claro de donde a dónde va la función f. Creo que no hay puntos de Teoría de Matrices en el Test.

P10

PÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 142

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
La notación usada en el ejercicio es Confusa.
No se entiende!
Preguntas c y d no se relacionan con el enunciado gral.
P10

TULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 142

P10

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Es conveniente diferenciar la función de la función evaluada en un punto. Si habla de función, llamarla f y no $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Sugiero que se asigne un nombre al conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y se aclare que la función f está definida en $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^4$, y además en donde cae. $(A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};\ f: A^4 \longrightarrow ?)$.

En la pregunta (a), ¿quienes son las operaciones suma y multiplicación? ¿son números los elementos de $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$?

¿Cuál es la relación de la pregunta (d) con el resto?

Mismo comentario final de la tarea 9, no es posible analizar la relevancia si la pregunta y las condiciones no son claras.

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P10

Precisar definición "α- invariante"

ÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: E9

Sea S_4 el grupo de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. y $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función, tal que para todo $\alpha \in S_4$ se tiene $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$

CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 145

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P11

Revisar pues al parecer el conjunto con el que se está trabajando no es un grupo. No hay clausura Podría ocurrir que al componer dos elementos que no ~~dejan~~ fijo algún símbolo resulte uno que si deja fijo.

Adjuntar ejercicios para Grupo de matrices:
Por ejemplo los grupos $SL_2(\mathbb{R})$ y $GL_2(\mathbb{R})$.
Para estos ejercicios Ver en el Libro de Spindler.
en la parte correspondiente al grupo de matrices.
O en uno de Alsina, y Trillas. (Algebra Lineal)

$$GL_2(\mathbb{R}) / SL_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

CAPÍTULO 6. CUESTIONARIO SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO 145

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS: P11

El conjunto formado por las permutaciones que mueven todos los símbolos y la identidad no es un grupo.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$$

deja fijo a b.

¡Se debe reformular la pregunta!

A.3. Cuestionario para la prueba piloto

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Matemáticas y Estadística

Cuestionario CDM - Grupo

Nombre: ______________________________
Semestre ______________________________
correo personal: ______________________________
Asignatura : ______________________________
Programa académico ______________________________

Estimado joven, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar, con el desarrollo de estas tareas, que corresponden a la comprensión que tiene sobre el objeto grupo y sus propiedades. Esta evaluación es confidencial; y proporciona información importante para el programa y para la asignatura de Teoría de Grupos. Agradecemos su ayuda y colaboración, al responder en forma clara cada una de las tareas que se proponen. De igual forma sus comentarios respecto a cada uno de los temas que se pretenden evaluar. Desde el punto de vista matemático puede indicar al final de cada tarea si tiene problemas con alguno de ellos.

Por favor trate al máximo de darnos a conocer sus conocimientos y sea organizado al dar respuesta a cada tarea. Esta prueba tiene una duración de dos horas.

TAREA 1. En el conjunto $(\mathbb{Z}, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
b) $*$ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

TAREA 2. Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$
a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique
b) La operación es asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique
d) En $(\mathbb{R}, \cdot)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(\mathbb{Z}, +_5)$
a) El cociente corresponde a ? Justifique
b) El residuo corresponde a? Justifique
c) En que grupo se esta trabajando? Justifique
d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1, 2, 3, ..., 99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathbb{N} \longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16; r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique
b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \bigoplus)$? Justifique
d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

TAREA 5. Sea el conjunto $(\mathbb{Z}, +_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique
c) Es $\mathbb{Z}$ subgrupo de $\mathbb{Z}$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique
b) A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$? Justifique
d) El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.
b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique
c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \longrightarrow G$ tal que $x \longrightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:
a) Deja invariante el número 2.
b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique
c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique
d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

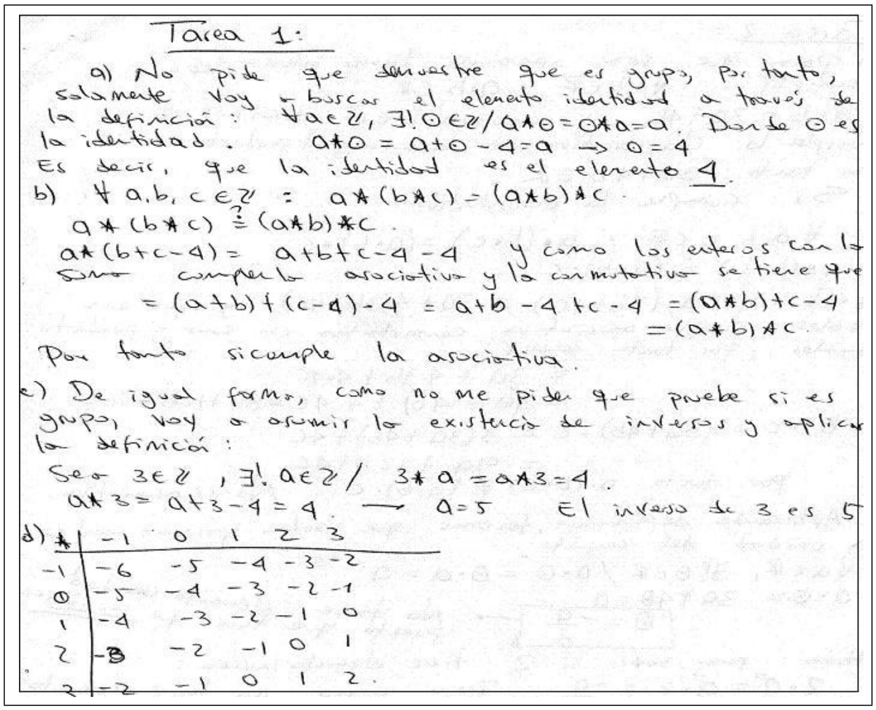
TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique
b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante ? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$ De un polinomio simétrico ? Justifique
d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2 ? Justifique

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cado uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.
a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique
c) Es conmutativo el grupo? Justifique
d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

A.4. Respuesta de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a la prueba piloto

Se presentan en esta sección las respuestas del grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemática a la prueba piloto (11 preguntas: p1L1: pregunta uno del licenciado 1; p1M1: pregunta uno del estudiante de matemáticas 1).



Tarea 1:

a) No pide que demuestre que es grupo, por tanto, solamente voy a buscar el elemento identidad a través de la definición: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! \odot \in \mathbb{Z} / a * \odot = \odot * a = a$. Donde $\odot$ es la identidad. $a * \odot = a + \odot - 4 = a \rightarrow \odot = 4$

Es decir, que la identidad es el elemento 4.

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: a*(b*c) = (a*b)*c$.

$a*(b*c) \stackrel{?}{=} (a*b)*c$.

$a*(b+c-4) = a+b+c-4-4$ y como los enteros con la suma cumplen la asociativa y la conmutativa se tiene que

$= (a+b)+(c-4)-4 = a+b-4+c-4 = (a*b)+c-4$
$= (a*b)*c$

Por tanto si cumple la asociativa.

c) De igual forma, como no me pide que pruebe si es grupo, voy a asumir la existencia de inversos y aplicar la definición:

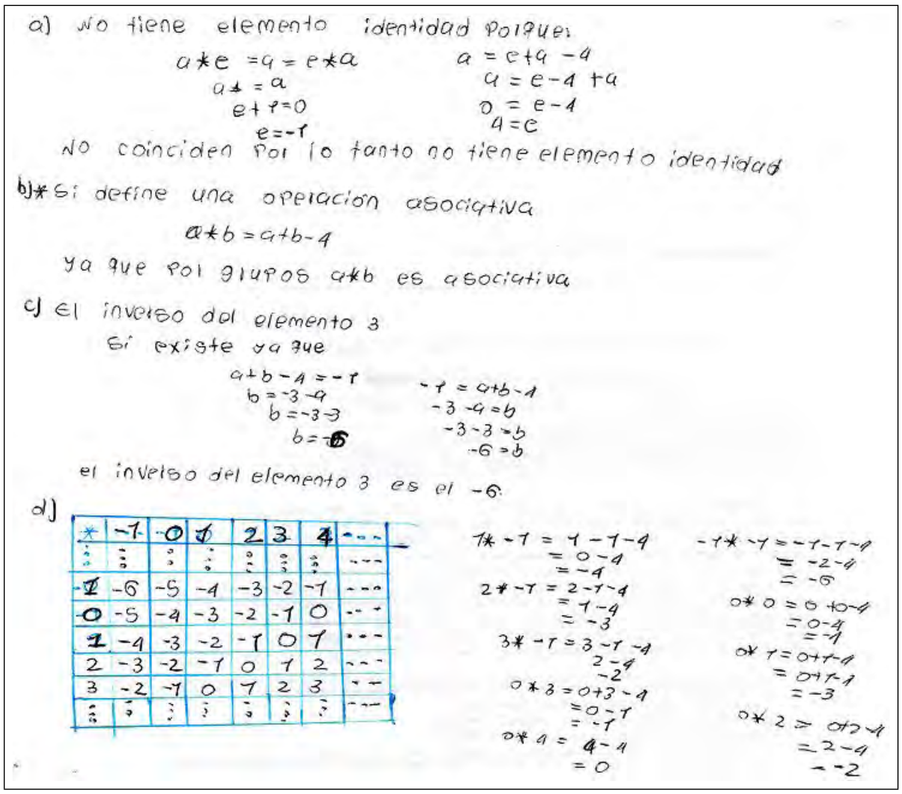
Sea $3 \in \mathbb{Z}$, $\exists! a \in \mathbb{Z} / 3*a = a*3 = 4$.

$a*3 = a+3-4 = 4 \longrightarrow a = 5$ El inverso de 3 es 5

d)

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

Figura A.1: p1L1



a) No tiene elemento identidad porque:

$a * e = a = e * a$

$a * = a$

$e + 1 = 0$

$e = -1$

$a = e + a - 4$

$a = e - 4 + a$

$0 = e - 4$

$4 = e$

No coinciden por lo tanto no tiene elemento identidad

b) * si define una operación asociativa

$a * b = a + b - 4$

ya que por grupos $a * b$ es asociativa

c) El inverso del elemento 3 si existe ya que

$a + b - 4 = -1$

$b = -3 - 4$

$b = -3 - 3$

$b = -6$

$-1 = a + b - 4$

$-3 - 4 = b$

$-3 - 3 = b$

$-6 = b$

el inverso del elemento 3 es el -6

d)

*	-1	0	1	2	3	4	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
-1	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...
0	-5	-4	-3	-2	-1	0	...
1	-4	-3	-2	-1	0	1	...
2	-3	-2	-1	0	1	2	...
3	-2	-1	0	1	2	3	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

$1 * -1 = 1 - 1 - 4 = 0 - 4 = -4$

$2 * -1 = 2 - 1 - 4 = 1 - 4 = -3$

$3 * -1 = 3 - 1 - 4$ $2 - 4$ -2

$0 * 3 = 0 + 3 - 4 = 0 - 1 = -1$

$0 * 4 = 4 - 4 = 0$

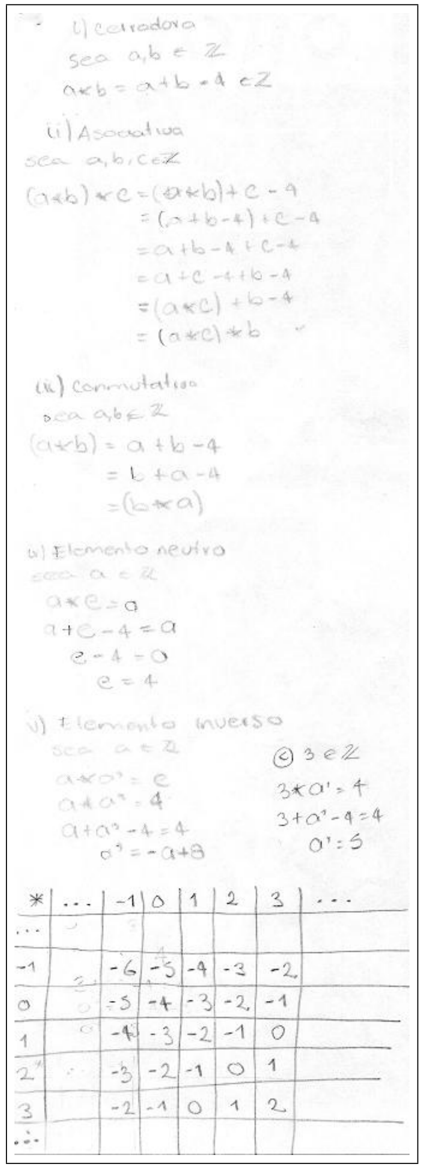
$-1 * -1 = -1 - 1 - 4 = -2 - 4 = -6$

$0 * 0 = 0 + 0 - 4 = 0 - 4 = -4$

$0 * 1 = 0 + 1 - 4 = 0 + 1 - 4 = -3$

$0 * 2 = 0 + 2 - 4 = 2 - 4 = -2$

Figura A.2: p1L2



i) cerradora

sea $a, b \in \mathbb{Z}$

$a * b = a + b - 4 \in \mathbb{Z}$

ii) Asociativa

sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
(a*b)*c &= (a*b) + c - 4 \\
&= (a + b - 4) + c - 4 \\
&= a + b - 4 + c - 4 \\
&= a + c - 4 + b - 4 \\
&= (a*c) + b - 4 \\
&= (a*c)*b
\end{aligned}
$$

iii) Conmutativa

sea $a, b \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
(a*b) &= a + b - 4 \\
&= b + a - 4 \\
&= (b*a)
\end{aligned}
$$

iv) Elemento neutro

sea $a \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
a * e &= a \\
a + e - 4 &= a \\
e - 4 &= 0 \\
e &= 4
\end{aligned}
$$

v) Elemento inverso

sea $a \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
a * a' &= e \\
a * a' &= 4 \\
a + a' - 4 &= 4 \\
a' &= -a + 8
\end{aligned}
$$

$3 \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
3 * a' &= 4 \\
3 + a' - 4 &= 4 \\
a' &= 5
\end{aligned}
$$

*	...	-1	0	1	2	3	...
...							
-1		-6	-5	-4	-3	-2	
0		-5	-4	-3	-2	-1	
1		-4	-3	-2	-1	0	
2		-3	-2	-1	0	1	
3		-2	-1	0	1	2	
⋮							

Figura A.3: p1L3

TAREA 1. Solución.

① a) El ejercicio no pide demostrar que es grupo, por consiguiente sólo hay que buscar el elemento identidad.

$a * a' = e \rightarrow$ Se debe probar la existencia de e.

$(a+b-4)+e = (a+b-4)$

$e = (a+b-4) - (a+b-4)$

$e = \cancel{a}+\cancel{b}-\cancel{4} - \cancel{a} - \cancel{b} + \cancel{4}$

$e = 0$

b) * es Asociativa?

$(a+b-4)+[(c+d-4)+(e+f-4)] \stackrel{?}{=} [(a+b-4)+(c+d-4)]+(e+f-4)$

$a+b-4+(c+d-4+e+f-4) \stackrel{?}{=} (a+b-4+c+d-4)+e+f-4$

$a+b-4+c+d-4+e+f-4 = a+b-4+c+d-4+e+f-4$

$a+b+c+d+e+f-12 = a+b+c+d+e+f-12$ ✓

Cumple Asociatividad

c) Existe el inverso del elemento 3?

$3+(a+b-4) = 0$

$(a+b-4) = 0-3$

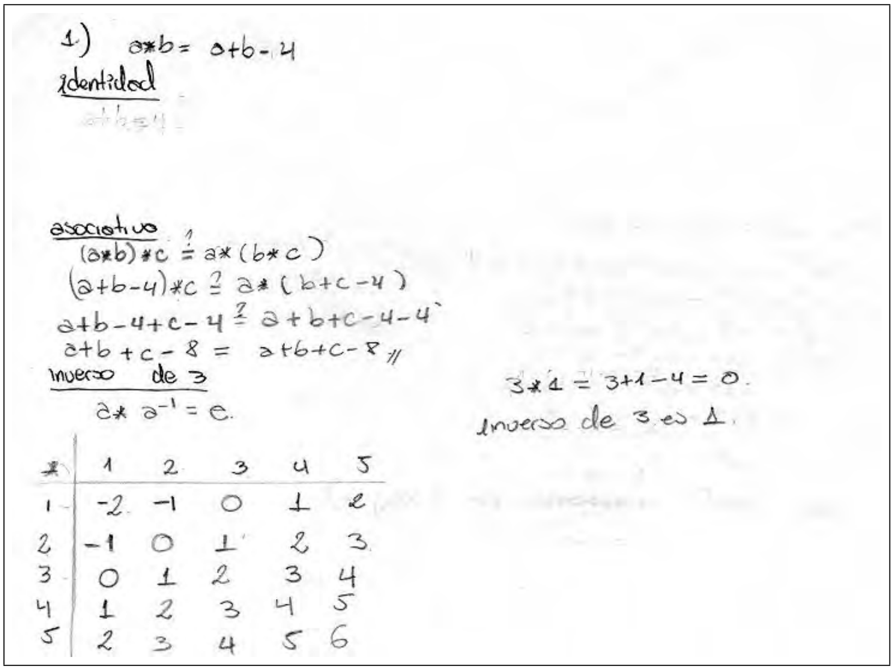
$a+b = -3+4$

$a+b = 1.$

d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\ldots,-1,0,1,2,3\ldots\}$

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

Figura A.4: p1L4



1.) $a*b = a+b-4$

identidad

asociativo

$(a*b)*c \stackrel{?}{=} a*(b*c)$

$(a+b-4)*c \stackrel{?}{=} a*(b+c-4)$

$a+b-4+c-4 \stackrel{?}{=} a+b+c-4-4$

$a+b+c-8 = a+b+c-8$ //

Inverso de 3

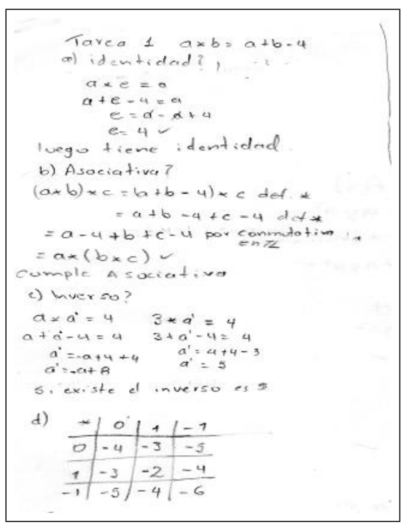
$a * a^{-1} = e.$

$3*1 \stackrel{?}{=} 3+1-4 = 0.$

Inverso de 3 es 1.

*	1	2	3	4	5
1	-2	-1	0	1	2
2	-1	0	1	2	3
3	0	1	2	3	4
4	1	2	3	4	5
5	2	3	4	5	6

Figura A.5: p1L5



Tarea 1 $a*b = a+b-4$

a) identidad?

$a*e = a$

$a+e-4 = a$

$e = a - a + 4$

$e = 4$ ✓

luego tiene identidad

b) Asociativa?

$(a*b)*c = (a+b-4)*c$ def. *

$= a+b-4+c-4$ def *

$= a-4+b+c-4$ por conmutativa en $\mathbb{Z}$

$= a*(b*c)$ ✓

Cumple Asociativa

c) Inverso?

$a*a' = 4$ $\quad$ $3*a' = 4$

$a+a'-4 = 4$ $\quad$ $3+a'-4 = 4$

$a' = -a+4+4$ $\quad$ $a' = 4+4-3$

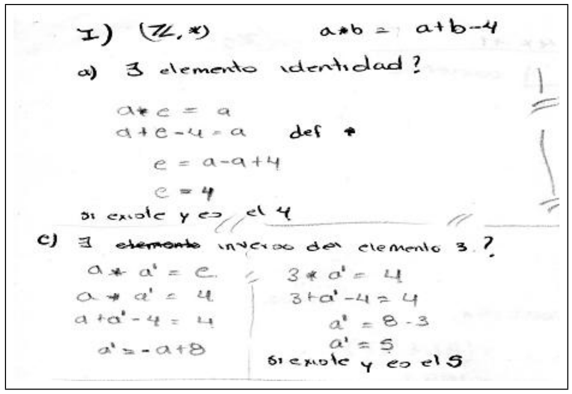
$a' = -a+8$ $\quad$ $a' = 5$

Si existe el inverso es 5

d)

*	0	1	-1
0	-4	-3	-5
1	-3	-2	-4
-1	-5	-4	-6

Figura A.6: p1L6



I) $(\mathbb{Z},*)$ $a*b = a+b-4$

a) ∃ elemento identidad?

$a*e = a$

$a+e-4 = a$ def $*$

$e = a-a+4$

$e = 4$

si existe y es el 4

c) ∃ ~~elemento~~ inverso del elemento 3?

$a*a' = e$ | $3*a' = 4$

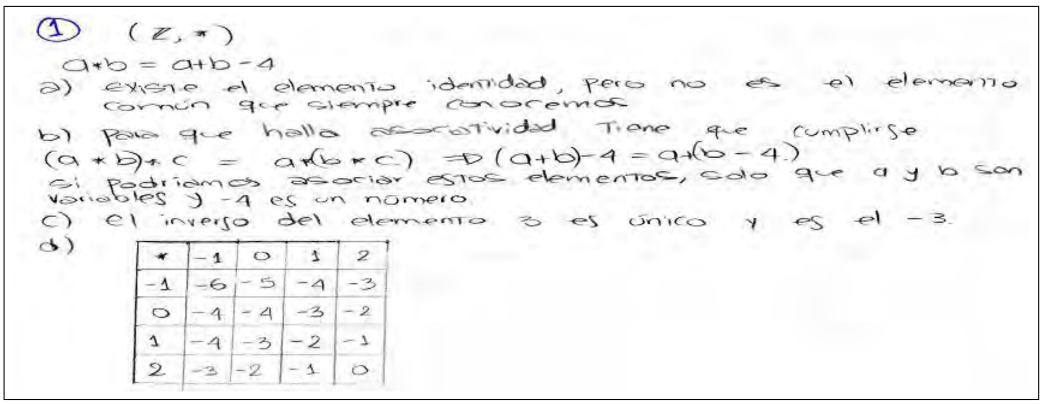
$a*a' = 4$ | $3+a'-4 = 4$

$a+a'-4 = 4$ | $a' = 8-3$

$a' = -a+8$ | $a' = 5$

si existe y es el 5

Figura A.7: p1L7



(1) $(\mathbb{Z},*)$

$a*b = a+b-4$

a) existe el elemento identidad, pero no es el elemento común que siempre conocemos

b) para que halla ~~asociatividad~~ Tiene que cumplirse

$(a*b)*c = a*(b*c) \Rightarrow (a+b)-4 = a+(b-4)$

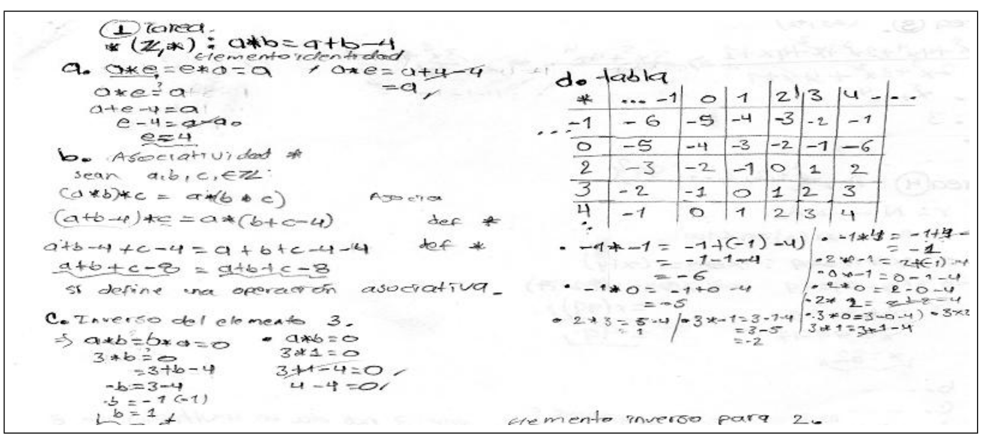
si podriamos asociar estos elementos, solo que a y b son variables y -4 es un nomero

c) el inverso del elemento 3 es único y es el -3.

d)

*	-1	0	1	2
-1	-6	-5	-4	-3
0	-4	-4	-3	-2
1	-4	-3	-2	-1
2	-3	-2	-1	0

Figura A.8: p1L8



(1) Tarea.

$(\mathbb{Z},*)$: $a*b = a+b-4$

elemento identidad

a. $a*e = e*a = a$ / $a*e = a+4-4 = a$

$a*e = a$

$a+e-4 = a$

$e-4 = a-a$

$e = 4$

b. Asociatividad $*$

sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$(a*b)*c = a*(b*c)$ Asocia

$(a+b-4)*c = a*(b+c-4)$ def $*$

$a+b-4+c-4 = a+b+c-4-4$ def $*$

$a+b+c-8 = a+b+c-8$

si define una operación asociativa

c. Inverso del elemento 3.

$\Rightarrow a*b = b*a = 0$ • $a*b = 0$

$3*b = 0$ $3*1 = 0$

$= 3+b-4$ $3+1-4 = 0$

$-b = 3-4$ $4-4 = 0$

$b = -1(-1)$

$b = 1$

d. tabla

*	... -1	0	1	2	3	4 ...
-1	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	-5	-4	-3	-2	-1	-6
2	-3	-2	-1	0	1	2
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-1	0	1	2	3	4

• $-1*-1 = -1+(-1)-4$
$= -1-1-4$
$= -6$

• $-1*0 = -1+0-4$
$= -5$

• $2*3 = 5-4$
$= 1$

• $3*-1 = 3-1-4$
$= 3-5$
$= -2$

• $-1*1 = -1+1-4$
$= -4$

• $2*-1 = 2+(-1)-4$

• $0*-1 = 0-1-4$

• $2*0 = 2-0-4$

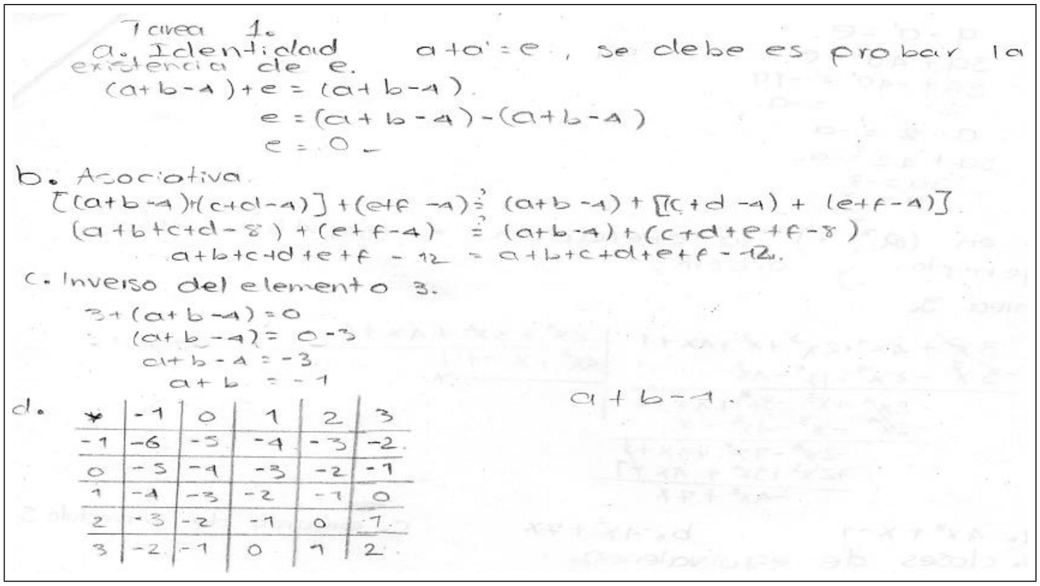
• $2*2 = 2+2-4$

• $3*0 = 3-0-4$

$3*1 = 3+1-4$

elemento inverso para 2.

Figura A.9: p1L9



Tarea 1.

a. Identidad $a+a'=e$, se debe esprobar la existencia de e.

$(a+b-4)+e=(a+b-4)$.

$e=(a+b-4)-(a+b-4)$

$e=0$

b. Asociativa

$[(a+b-4)+(c+d-4)]+(e+f-4) \stackrel{?}{=} (a+b-4)+[(c+d-4)+(e+f-4)]$

$(a+b+c+d-8)+(e+f-4) \stackrel{?}{=} (a+b-4)+(c+d+e+f-8)$

$a+b+c+d+e+f-12 = a+b+c+d+e+f-12$.

c. Inverso del elemento 3.

$3+(a+b-4)=0$

$(a+b-4)=0-3$

$a+b-4=-3$

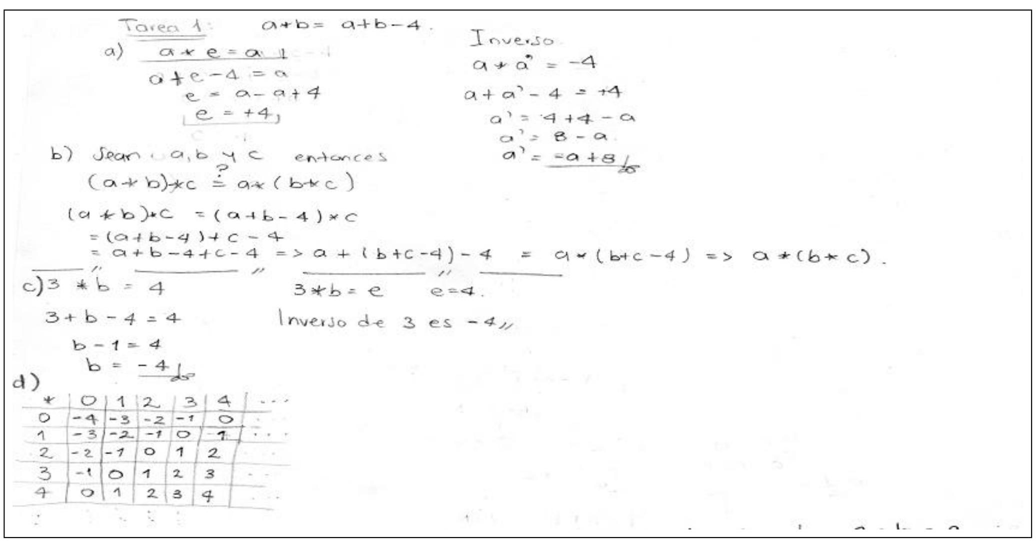
$a+b=-1$

d.

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

$a+b-1$.

Figura A.10: p1L10



Tarea 1: $a*b=a+b-4$.

a) $a*e=a$

$a+e-4=a$

$e=a-a+4$

$e=+4$

Inverso

$a*a'=-4$

$a+a'-4=+4$

$a'=4+4-a$

$a'=8-a$

$a'=-a+8$

b) Sean a, b y c entonces

$(a*b)*c \stackrel{?}{=} a*(b*c)$

$(a*b)*c=(a+b-4)*c$

$=(a+b-4)+c-4$

$=a+b-4+c-4 \Rightarrow a+(b+c-4)-4 = a*(b+c-4) \Rightarrow a*(b*c)$.

c) $3*b=4$ $3*b=e$ $e=4$.

$3+b-4=4$ Inverso de 3 es -4

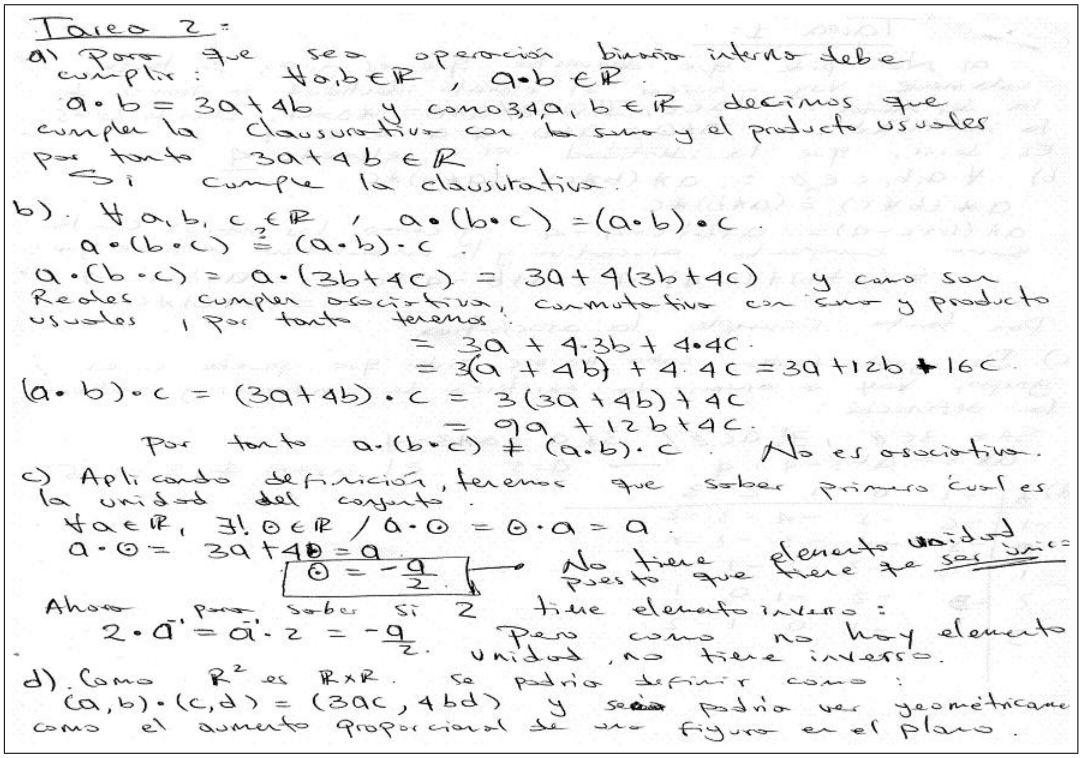
$b-1=4$

$b=-4$

d)

*	0	1	2	3	4	...
0	-4	-3	-2	-1	0	...
1	-3	-2	-1	0	1	...
2	-2	-1	0	1	2	...
3	-1	0	1	2	3	...
4	0	1	2	3	4	...

Figura A.11: p1L11



Tarea 2:

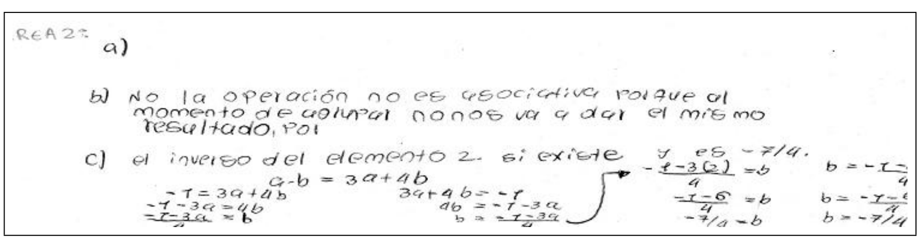
a) Para que sea operación binaria interna debe cumplir: $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \bullet b \in \mathbb{R}$.
$a \bullet b = 3a+4b$ y como $3,4,a,b \in \mathbb{R}$ decimos que cumple la clausurativa con la suma y el producto usuales por tanto $3a+4b \in \mathbb{R}$
Si cumple la clausurativa.

b). $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
$a \bullet (b \bullet c) \overset{?}{=} (a \bullet b) \bullet c$.
$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (3b+4c) = 3a + 4(3b+4c)$ y como son Reales cumplen asociativa, conmutativa con suma y producto usuales, por tanto tenemos:
$= 3a + 4 \cdot 3b + 4 \cdot 4c$.
$= 3(a+4b) + 4 \cdot 4c = 3a + 12b + 16c$.
$(a \bullet b) \bullet c = (3a+4b) \bullet c = 3(3a+4b) + 4c$
$= 9a + 12b + 4c$.
Por tanto $a \bullet (b \bullet c) \neq (a \bullet b) \bullet c$. No es asociativa.

c) Aplicando definición, tenemos que saber primero cual es la unidad del conjunto.
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists! \odot \in \mathbb{R} / a \bullet \odot = \odot \bullet a = a$.
$a \bullet \odot = 3a + 4\odot = a$
$\boxed{\odot = -\frac{a}{2}.}$ → No tiene elemento unidad puesto que tiene que ser único
Ahora para saber si 2 tiene elemento inverso:
$2 \bullet \bar{a}' = \bar{a}' \bullet 2 = -\frac{a}{2}$. Pero como no hay elemento unidad, no tiene inverso.

d). Como $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. se podría definir como:
$(a,b) \bullet (c,d) = (3ac, 4bd)$ y se podría ver geométricamente como el aumento proporcional de una figura en el plano.

Figura A.12: p2L1



REA 2:
a)

b) No la operación no es asociativa porque al momento de agrupar no nos va a dar el mismo resultado, por

c) el inverso del elemento 2. si existe y es $-7/4$.
$a \bullet b = 3a+4b$
$-7 = 3a+4b$
$-7-3a = 4b$
$\frac{-7-3a}{4} = b$
$3a+4b = -7$
$4b = -7-3a$
$b = \frac{-7-3a}{4}$ → $-\frac{7-3(2)}{4} = b$
$\frac{-7-6}{4} = b$
$-7/4 = b$
$b = -\frac{7-}{4}$
$b = -\frac{7-6}{4}$
$b = -7/4$

Figura A.13: p2L2

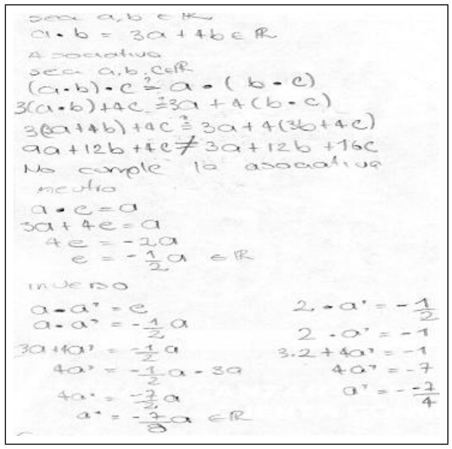


Figura A.14: p2L3

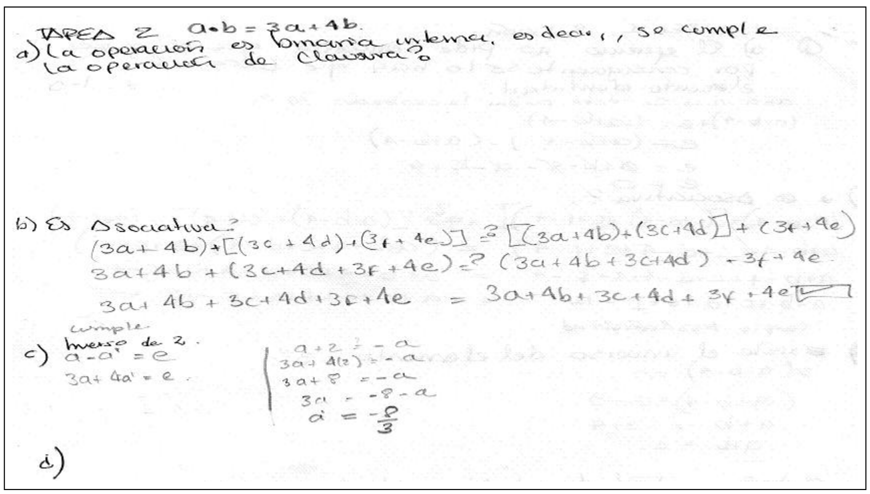


Figura A.15: p2L4

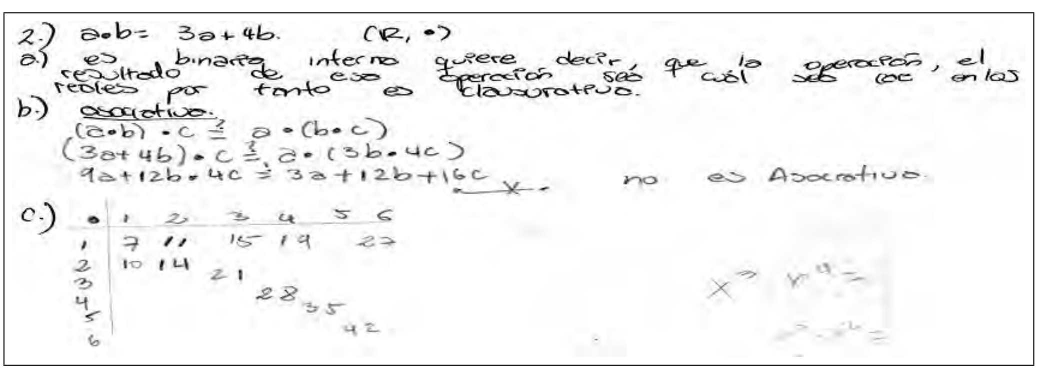
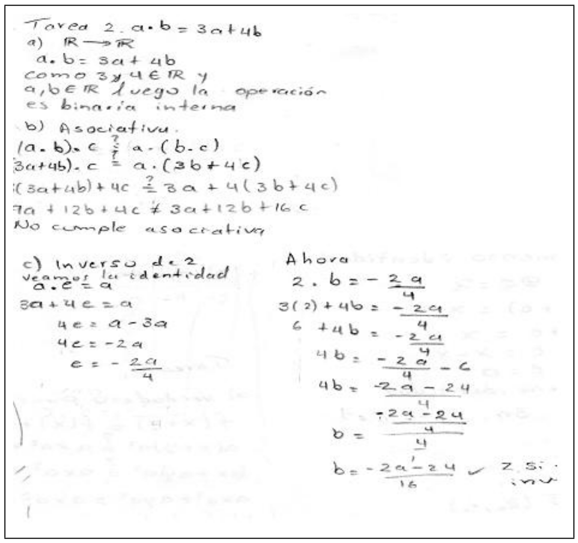


Figura A.16: p2L5



Tarea 2. $a \cdot b = 3a + 4b$

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a \cdot b = 3a + 4b$

como 3 y $4 \in \mathbb{R}$ y

$a, b \in \mathbb{R}$ luego la operación

es binaria interna

b) Asociativa.

$(a \cdot b) \cdot c \stackrel{?}{=} a \cdot (b \cdot c)$

$(3a+4b) \cdot c \stackrel{?}{=} a \cdot (3b+4c)$

$3(3a+4b)+4c \stackrel{?}{=} 3a + 4(3b+4c)$

$9a + 12b + 4c \neq 3a + 12b + 16c$

No cumple asociativa

c) Inverso de 2

veamos la identidad

$a \cdot e = a$

$3a + 4e = a$

$4e = a - 3a$

$4e = -2a$

$e = -\frac{2a}{4}$

Ahora

$2 \cdot b = -\frac{2a}{4}$

$3(2) + 4b = -\frac{2a}{4}$

$6 + 4b = -\frac{2a}{4}$

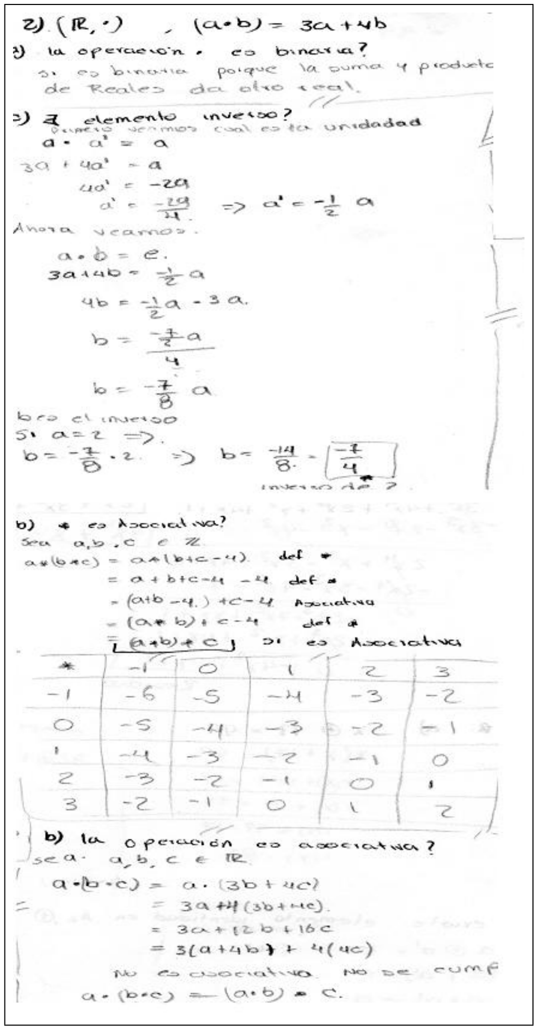
$4b = -\frac{2a}{4} - 6$

$4b = \frac{-2a - 24}{4}$

$b = \frac{\frac{-2a-24}{4}}{4}$

$b = \frac{-2a-24}{16}$ ✓ 2 si inv

Figura A.17: p2L6



2) $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(a \cdot b) = 3a + 4b$

a) la operación $\cdot$ es binaria?

si es binaria porque la suma y producto de Reales da otro real.

c) $\exists$ elemento inverso?

Primero veamos cual es la unidad

$a \cdot a' = a$

$3a + 4a' = a$

$4a' = -2a$

$a' = \frac{-2a}{4} \Rightarrow a' = -\frac{1}{2}a$

Ahora veamos.

$a \cdot b = e.$

$3a + 4b = \frac{-1}{2}a$

$4b = \frac{-1}{2}a - 3a.$

$b = \frac{\frac{-7}{2}a}{4}$

$b = -\frac{7}{8}a$

b es el inverso

si $a = 2 \Rightarrow$.

$b = -\frac{7}{8} \cdot 2. \Rightarrow b = \frac{-14}{8} = \boxed{\frac{-7}{4}}$

inverso de 2

b) $*$ es Asociativa?

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a*(b*c) = a*(b+c-4)$ def $*$

$= a+b+c-4-4$ def $*$

$= (a+b-4)+c-4$ Asociativa

$= (a*b)+c-4$ def $*$

$= (a*b)*c$ si es Asociativa

$*$	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

b) la operación es asociativa?

sea $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (3b + 4c)$

$= 3a + 4(3b + 4c).$

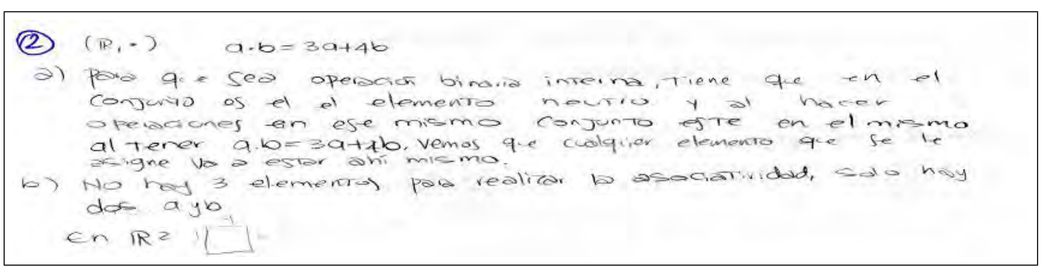
$= 3a + 12b + 16c$

$= 3(a + 4b) + 4(4c)$

No es asociativa. No se cumple

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

Figura A.18: p2L7



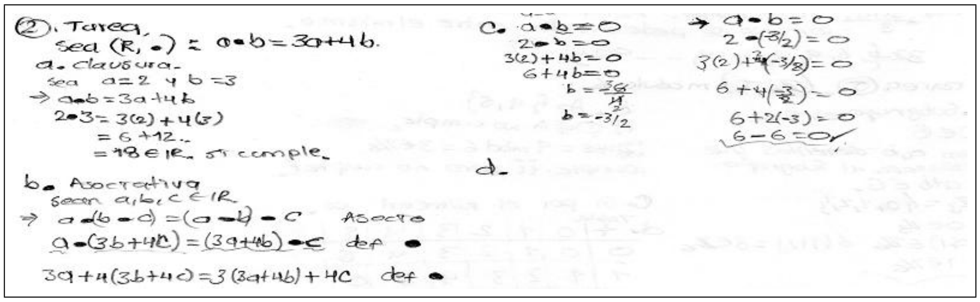
② $(\mathbb{R}, \cdot)$ $a \cdot b = 3a + 4b$

a) Para que sea operación binaria interna, Tiene que en el conjunto os el el elemento neutro y al hacer operaciones en ese mismo conjunto este en el mismo al tener $a \cdot b = 3a + 4b$. Vemos que cualquier elemento que se le asigne va a estar ahí mismo.

b) No hay 3 elementos para realizar la asociatividad, solo hay dos a y b

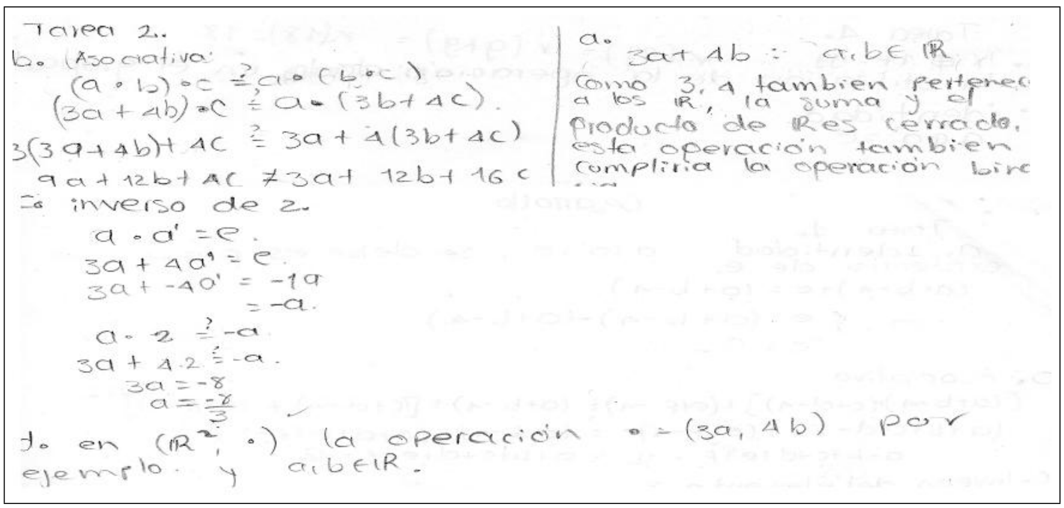
en $\mathbb{R}^2$

Figura A.19: p2L8



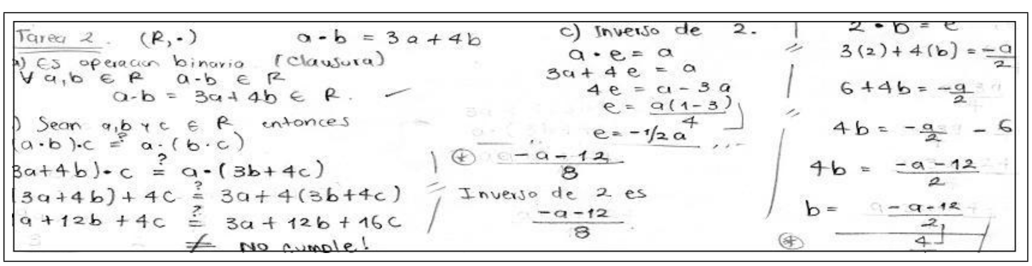
② Tarea.
Sea $(R, \bullet) : a \bullet b = 3a + 4b$.
a. clausura.
sea $a = 2$ y $b = 3$
$\Rightarrow a \bullet b = 3a + 4b$
$2 \bullet 3 = 3(2) + 4(3)$
$= 6 + 12$.
$= 18 \in \mathbb{R}$. si cumple.
b. Asociativa
sean $a, b, c \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ Asocia
$a \bullet (3b + 4c) = (3a + 4b) \bullet c$ def $\bullet$
$3a + 4(3b + 4c) = 3(3a + 4b) + 4c$ def $\bullet$
c. $a \bullet b = 0$
$2 \bullet b = 0$
$3(2) + 4b = 0$
$6 + 4b = 0$
$b = \frac{-36}{12}$
$b = -3/2$
$\rightarrow a \bullet b = 0$
$2 \bullet (-3/2) = 0$
$3(2) + 4(-3/2) = 0$
$6 + 4(\frac{-3}{2}) = 0$
$6 + 2(-3) = 0$
$6 - 6 = 0$ ✓
d.

Figura A.20: p2L9



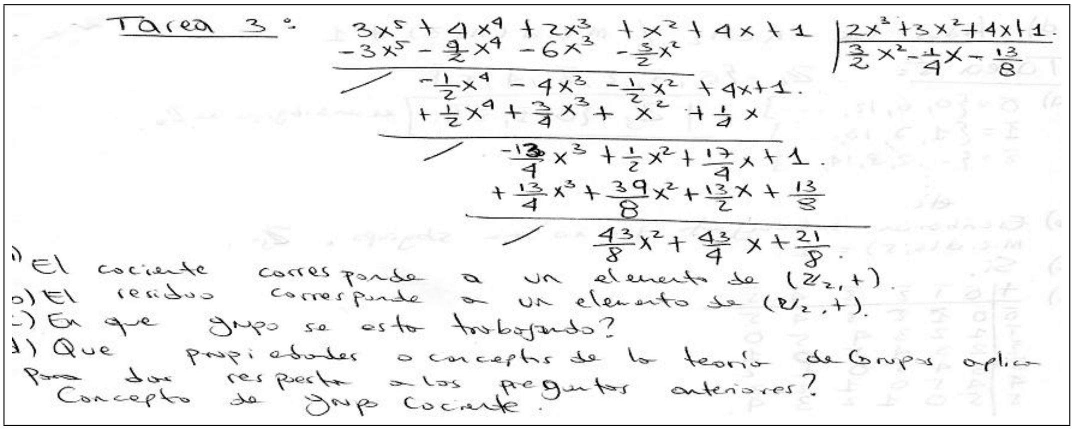
Tarea 2.
b. Asociativa:
$(a \circ b) \circ c \overset{?}{=} a \circ (b \circ c)$
$(3a + 4b) \circ c \overset{?}{=} a \circ (3b + 4c)$.
$3(3a + 4b) + 4c \overset{?}{=} 3a + 4(3b + 4c)$
$9a + 12b + 4c \neq 3a + 12b + 16c$
c. inverso de 2.
$a \circ a' = e$.
$3a + 4a' = e$.
$3a + -4a' = -1a$
$= -a$.
$a \circ 2 \overset{?}{=} -a$
$3a + 4 \cdot 2 \overset{?}{=} -a$.
$3a = -8$
$a = \frac{-8}{3}$
d. en $(\mathbb{R}^2, \circ)$ la operación $\circ = (3a, 4b)$ por ejemplo. y $a, b \in \mathbb{R}$.
a.
$3a + 4b : a, b \in \mathbb{R}$
Como 3, 4 tambien pertenec a los $\mathbb{R}$, la suma y el producto de $\mathbb{R}$ es cerrado, esta operación tambien cumpliria la operación bin...

Figura A.21: p2L10



Tarea 2. $(R, \cdot)$ $a \cdot b = 3a + 4b$
a) Es operacion binaria (clausura)
$\forall a, b \in R$ $a \cdot b \in R$
$a \cdot b = 3a + 4b \in R$.
b) Sean a, b y $c \in R$ entonces
$(a \cdot b) \cdot c \overset{?}{=} a \cdot (b \cdot c)$
$(3a + 4b) \cdot c \overset{?}{=} a \cdot (3b + 4c)$
$3(3a + 4b) + 4c \overset{?}{=} 3a + 4(3b + 4c)$
$9a + 12b + 4c \overset{?}{=} 3a + 12b + 16c$
$\neq$ No cumple!
c) Inverso de 2.
$a \cdot e = a$
$3a + 4e = a$
$4e = a - 3a$
$e = \frac{a(1-3)}{4}$
$e = -1/2 a$
(*) $\frac{-a - 12}{8}$
Inverso de 2 es $\frac{-a - 12}{8}$
$2 \cdot b = e$
$3(2) + 4(b) = \frac{-a}{2}$
$6 + 4b = -\frac{a}{2}$
$4b = -\frac{a}{2} - 6$
$4b = \frac{-a - 12}{2}$
$b = \frac{\frac{-a - 12}{2}}{4}$ (*)

Figura A.22: p2L11



Tarea 3:

$3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1 \;|\; 2x^3+3x^2+4x+1$

$-3x^5-\frac{9}{2}x^4-6x^3-\frac{3}{2}x^2 \;|\; \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{13}{8}$

$-\frac{1}{2}x^4-4x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+1.$

$+\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}x^3+x^2+\frac{1}{4}x$

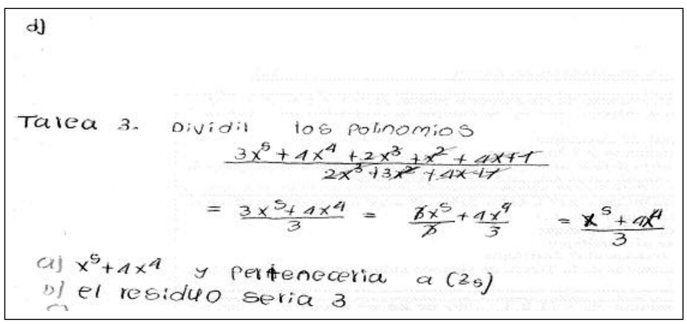
$-\frac{13}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{4}x+1.$

$+\frac{13}{4}x^3+\frac{39}{8}x^2+\frac{13}{2}x+\frac{13}{8}$

$\frac{43}{8}x^2+\frac{43}{4}x+\frac{21}{8}.$

a) El cociente corresponde a un elemento de $(\mathbb{Z}_2,+)$.
b) El residuo corresponde a un elemento de $(\mathbb{Z}_2,+)$.
c) En que grupo se esta trabajando?
d) Que propiedades o conceptos de la teoría de Grupos aplica para dar respuesta a los preguntas anteriores?
Concepto de grupo cociente.

Figura A.23: p3L1



d)

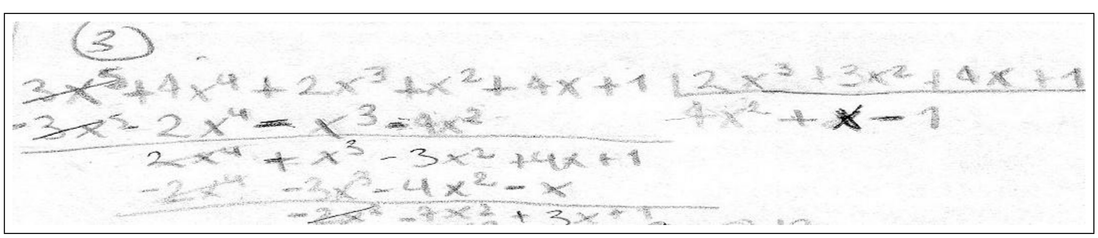
Tarea 3. Dividir los polinomios

$\frac{3x^5+1x^4+2x^3+x^2+4x+1}{2x^3+3x^2+4x+1}$

$= \frac{3x^5+1x^4}{3} = \frac{3x^5}{3}+\frac{1x^4}{3} = \frac{x^5+x^4}{3}$

a) x^5+1x^4 y pertenecería a $(\mathbb{Z}_5)$
b) el residuo sería 3

Figura A.24: p3L2



(3)

$3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1 \;|\; 2x^3+3x^2+4x+1$

$-3x^5-2x^4-x^3-4x^2 \;|\; 4x^2+x-1$

$2x^4+x^3-3x^2+4x+1$

$-2x^4-3x^3-4x^2-x$

$-2x^3-7x^2+3x+1$

Figura A.25: p3L3

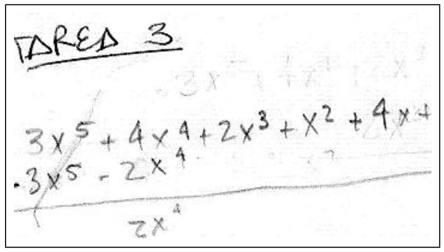


Figura A.26: p3L4

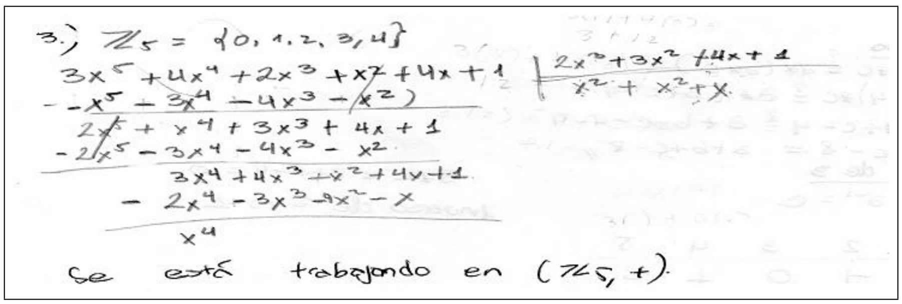


Figura A.27: p3L5

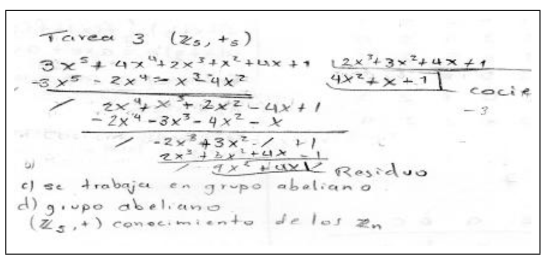


Figura A.28: p3L6

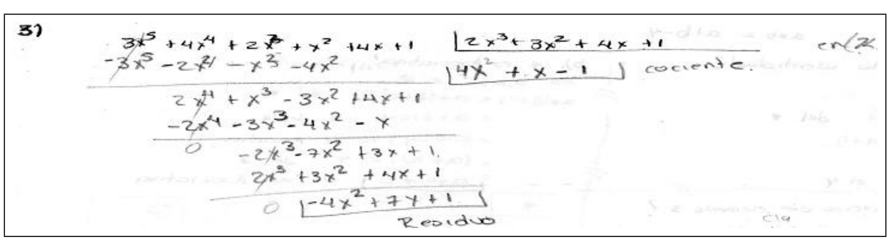
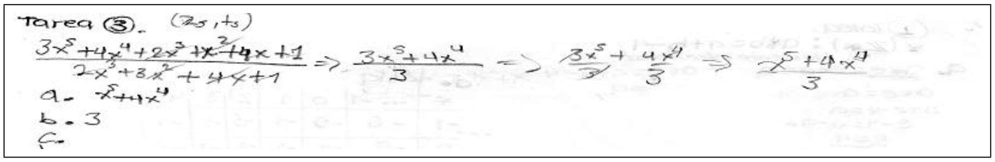


Figura A.29: p3L7


Tarea ③. $(\mathbb{Z}_5, +_5)$

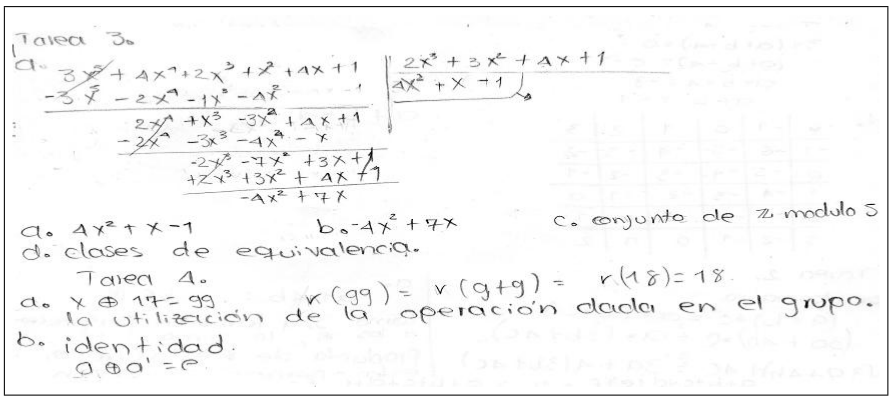
$\dfrac{3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1}{2x^3+3x^2+4x+1} \Rightarrow \dfrac{3x^5+4x^4}{3} \Rightarrow \dfrac{3x^5}{3}+\dfrac{4x^4}{3} \Rightarrow \dfrac{x^5+4x^4}{3}$

a. x^5+4x^4

b. 3

c.

Figura A.30: p3L9


Tarea 3.

a. $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1 \;|\; 2x^3+3x^2+4x+1$

$-3x^5-2x^4-1x^3-4x^2 \quad\quad 4x^2+x-1$

$2x^4+x^3-3x^2+4x+1$

$-2x^4-3x^3-4x^2-x$

$-2x^3-7x^2+3x+1$

$+2x^3+3x^2+4x+1$

$-4x^2+7x$

a. $4x^2+x-1$ b. $-4x^2+7x$ c. conjunto de $\mathbb{Z}$ modulo 5

d. clases de equivalencia.

Tarea 4.

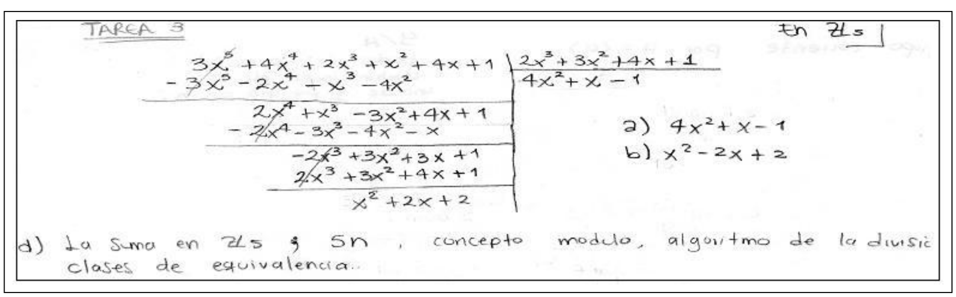
a. $x \oplus 17 = 99$ $r(99) = r(9+9) = r(18) = 18$

la utilización de la operación dada en el grupo.

b. identidad.

$a \oplus a' = e$

Figura A.31: p3L10


TAREA 3 En $\mathbb{Z}_5$

$3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1 \;|\; 2x^3+3x^2+4x+1$

$-3x^5-2x^4-x^3-4x^2 \quad\quad 4x^2+x-1$

$2x^4+x^3-3x^2+4x+1$

$-2x^4-3x^3-4x^2-x$

$-2x^3+3x^2+3x+1$

$2x^3+3x^2+4x+1$

x^2+2x+2

a) $4x^2+x-1$

b) x^2-2x+2

d) La suma en $\mathbb{Z}_5$ y $5n$, concepto modulo, algoritmo de la divisió clases de equivalencia.

Figura A.32: p3L11

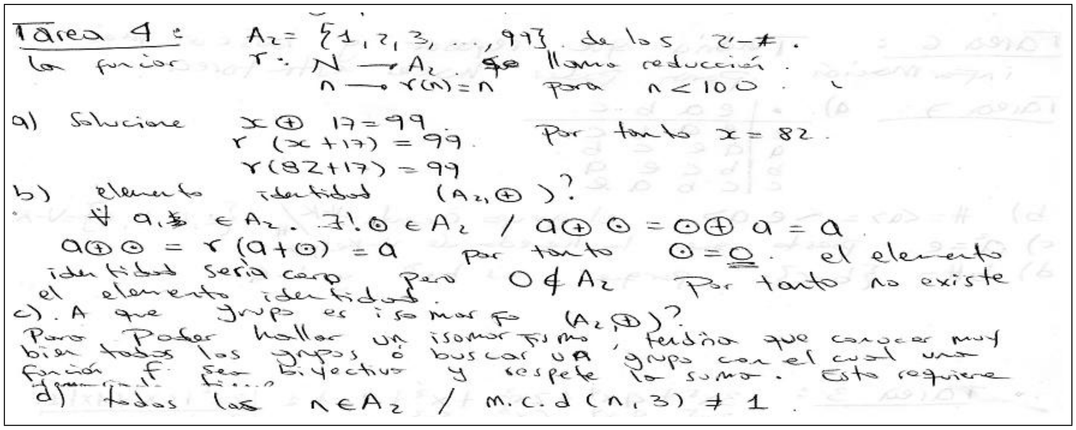

Tarea 4: $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. de los $\mathbb{Z}^+$.
La funcion $r: \mathbb{N} \to A_2$. se llama reducción.
$n \to r(n) = n$ para $n < 100$.
a) Solucione $x \oplus 17 = 99$.
$r(x+17) = 99$. Por tanto $x = 82$.
$r(82+17) = 99$
b) elemento identidad $(A_2, \oplus)$?
$\forall a \in A_2$. $\exists! \odot \in A_2 \,/\, a \oplus \odot = \odot \oplus a = a$
$a \oplus \odot = r(a + \odot) = a$ por tanto $\odot = 0$. el elemento identidad sería cero pero $0 \notin A_2$ Por tanto no existe el elemento identidad.
c). A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$?
Para poder hallar un isomorfismo, tendría que conocer muy bien todos los grupos ó buscar un grupo con el cual una función f sea biyectiva y respete la suma. Esto requiere
d) todas las $n \in A_2$ / m.c.d $(n, 3) \neq 1$.

Figura A.33: p4L1

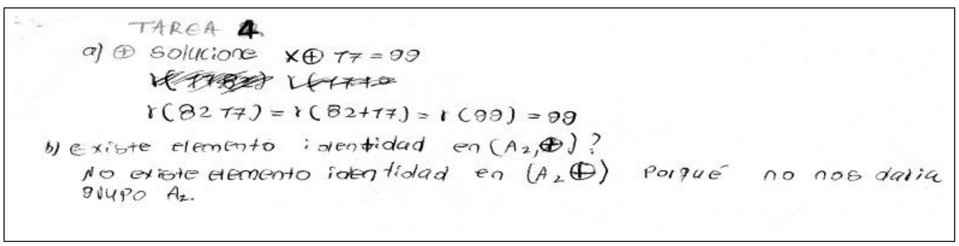

TAREA 4
a) Solucione $x \oplus 17 = 99$
$r(82\ 17) = r(82+17) = r(99) = 99$
b) existe elemento identidad en $(A_2, \oplus)$?
No existe elemento identidad en $(A_2 \oplus)$ porqué no nos daria grupo A_2.

Figura A.34: p4L2

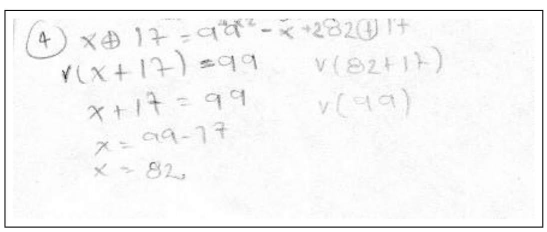

(4) $x \oplus 17 = 99$
$r(x+17) = 99$ $r(82+17)$
$x + 17 = 99$ $r(99)$
$x = 99 - 17$
$x = 82$

Figura A.35: p4L3

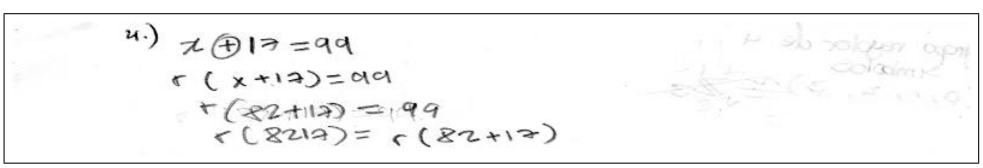
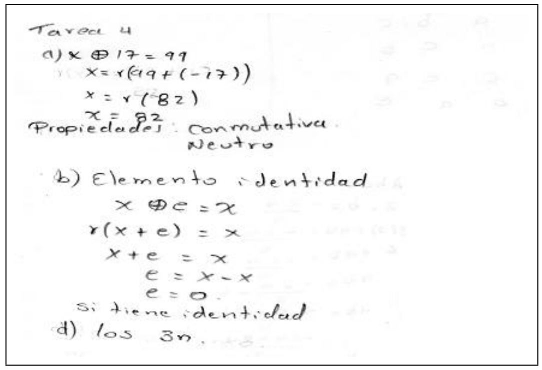

4.) $x \oplus 17 = 99$
$r(x+17) = 99$
$r(82+17) = 99$
$r(8217) = r(82+17)$

Figura A.36: p4L5



Tarea 4

a) $x \oplus 17 = 99$

$x = r(99 + (-17))$

$x = r(82)$

$x = 82$

Propiedades: Conmutativa

Neutro

b) Elemento identidad

$x \oplus e = x$

$r(x+e) = x$

$x + e = x$

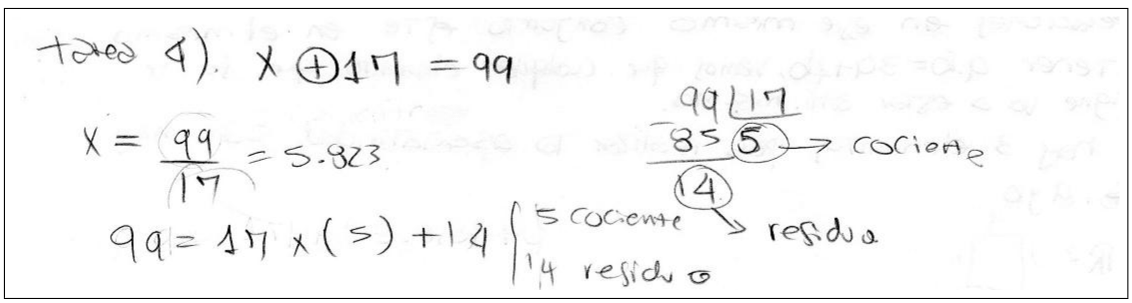
$e = x - x$

$e = 0$

Si tiene identidad

d) los $3n$.

Figura A.37: p4L6



tarea 4). $X \oplus 17 = 99$

$X = \frac{99}{17} = 5.823$

$99 \,\lfloor 17$

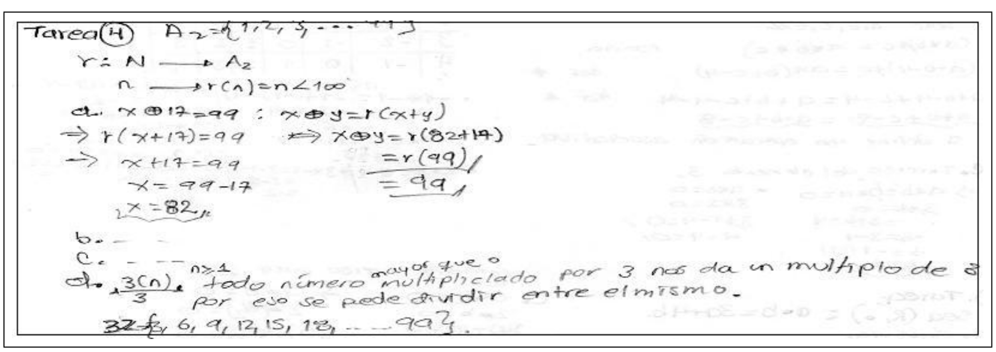
$85 \; 5 \rightarrow$ cociente

$14 \rightarrow$ residuo

$99 = 17 \times (5) + 14$ 5 cociente

14 residuo

Figura A.38: p4L8



Tarea(4) $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots 99\}$

$r : N \longrightarrow A_2$

$n \longrightarrow r(n) = n < 100$

a. $x \oplus 17 = 99$; $x \oplus y = r(x+y)$

$\Rightarrow r(x+17) = 99$ $\Rightarrow x \oplus y = r(82+17)$

$\Rightarrow x + 17 = 99$ $= r(99)$

$x = 99 - 17$ $= 99$

$x = 82$

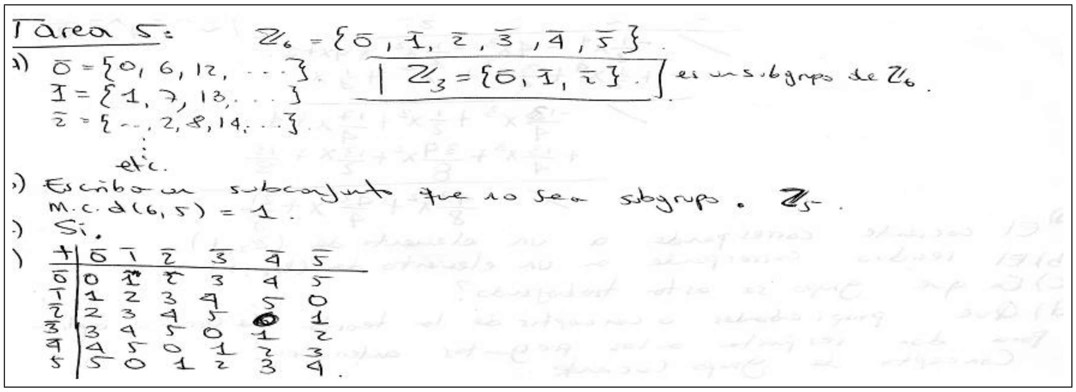
b. - -

c. - - -

d. $\frac{3(n)}{3}$, $n \geq 1$ todo número mayor que 0 multiplicado por 3 nos da un multiplo de 3 por eso se pede dividir entre el mismo.

$3Z = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots 99\}$.

Figura A.39: p4L9



Tarea 5: $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

a) $\bar{0} = \{0, 6, 12, \ldots\}$ $\boxed{\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$.
$\bar{1} = \{1, 7, 13, \ldots\}$
$\bar{2} = \{\ldots, 2, 8, 14, \ldots\}$
etc.

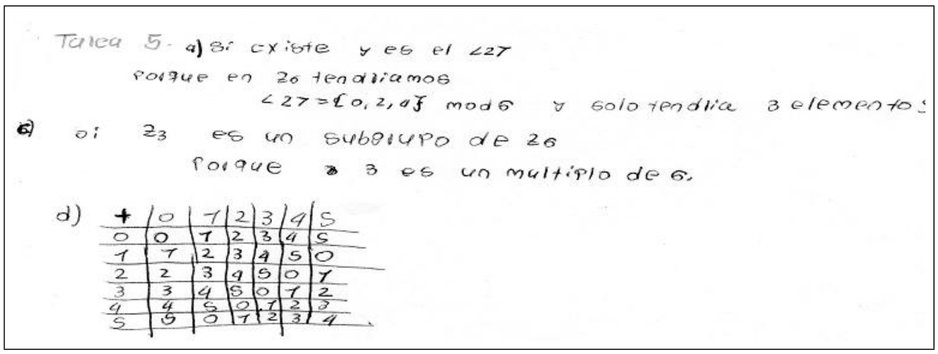
b) Escribo un subconjunto que no sea subgrupo. $\mathbb{Z}_5$.
M.c.d(6, 5) = 1.

c) Si.

d)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	0	1	2	3	4	5
$\bar{1}$	1	2	3	4	5	0
$\bar{2}$	2	3	4	5	0	1
$\bar{3}$	3	4	5	0	1	2
$\bar{4}$	4	5	0	1	2	3
$\bar{5}$	5	0	1	2	3	4

Figura A.40: p5L1



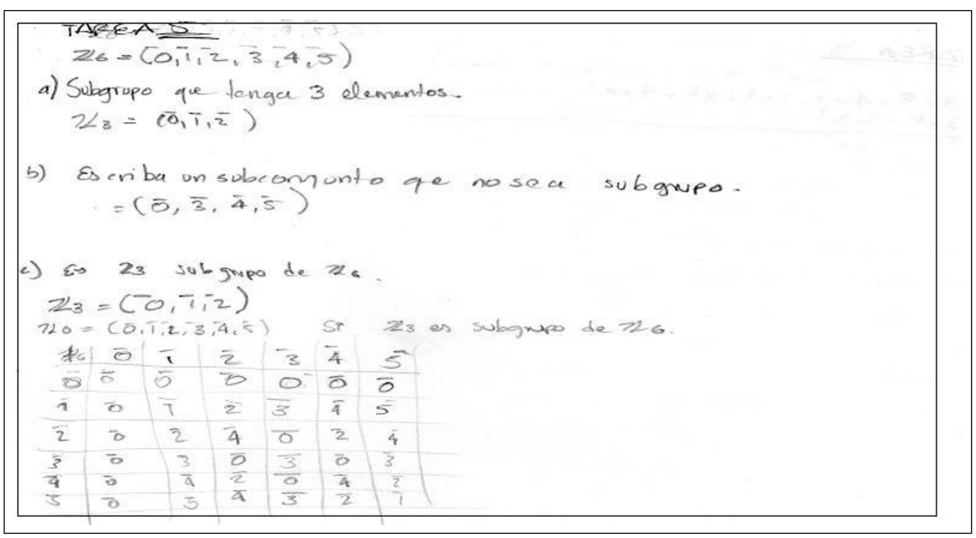
Tarea 5. a) Si existe y es el <2>
porque en Z6 tendríamos
<2> = {0, 2, 4} mod 6 y solo tendría 3 elementos

c) Si Z3 es un subgrupo de Z6
porque 3 es un multiplo de 6.

d)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.41: p5L2



TAREA 5

$\mathbb{Z}_6 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$

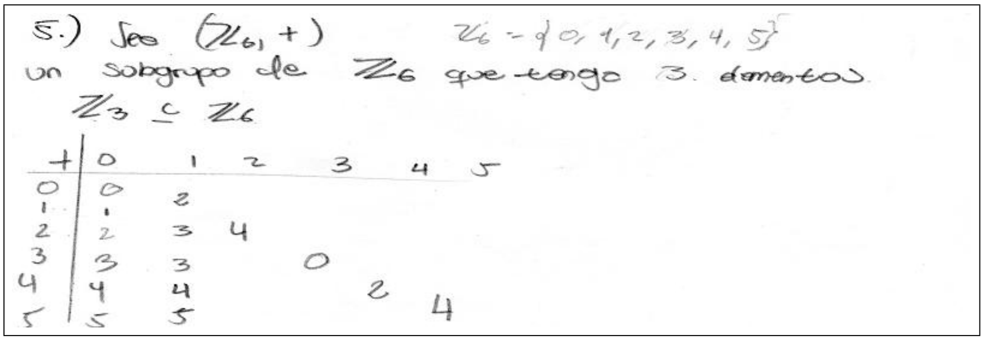
a) Subgrupo que tenga 3 elementos.
$\mathbb{Z}_3 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2})$

b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo.
$= (\bar{0}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$

c) Es Z3 subgrupo de Z6.
$\mathbb{Z}_3 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2})$
$\mathbb{Z}_6 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ Si Z3 es subgrupo de Z6.

$\times_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Figura A.42: p5L4

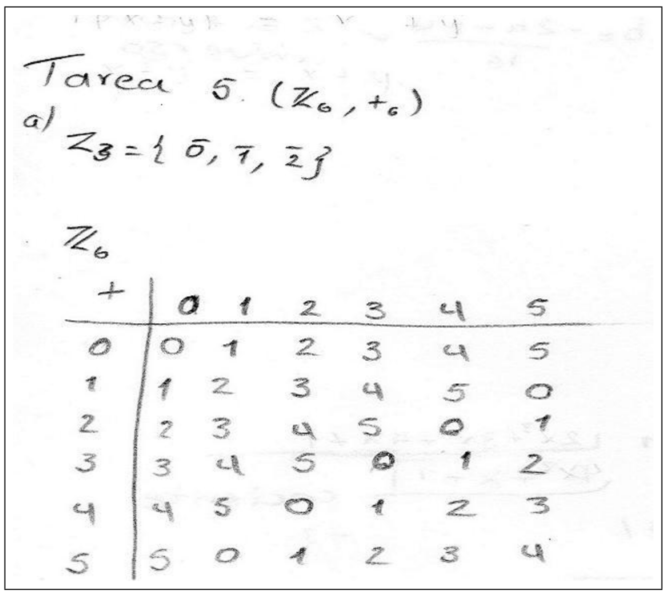

5.) Sea $(\mathbb{Z}_6, +)$ $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ que tenga 3 elementos.

$\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	2				
1	1					
2	2	3	4			
3	3	3		0		
4	4	4		2		
5	5	5			4	

Figura A.43: p5L5

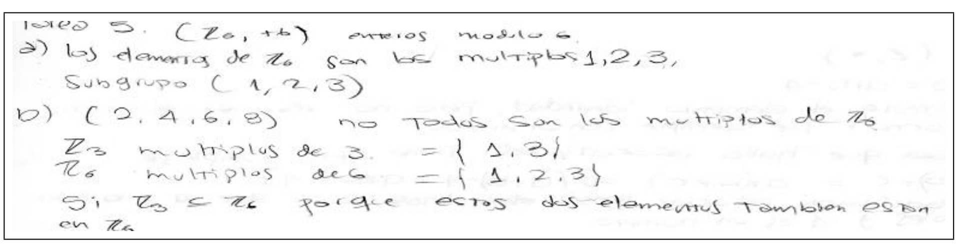

Tarea 5. $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

a) $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$\mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.44: p5L6


Tarea 5. $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ enteros modulo 6

a) los elementos de $\mathbb{Z}_6$ son los multiplos 1,2,3,

Subgrupo (1, 2, 3)

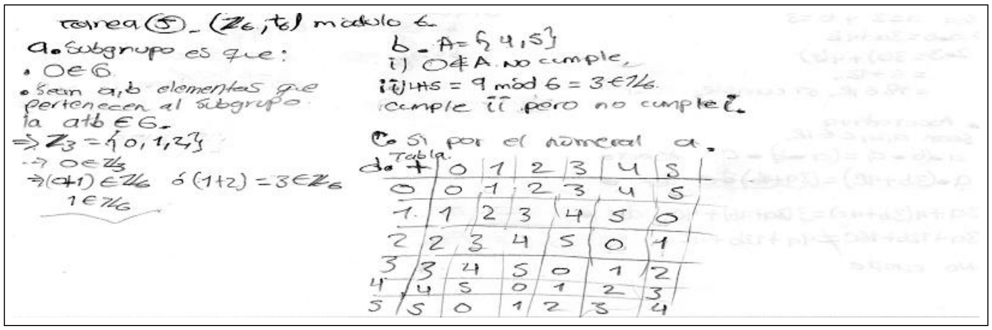
b) (2, 4, 6, 8) no todos son los multiplos de $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_3$ multiplos de 3. $= \{1, 3\}$

$\mathbb{Z}_6$ multiplos de 6 $= \{1, 2, 3\}$

Si $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$ porque estos dos elementos tambien estan en $\mathbb{Z}_6$

Figura A.45: p5L8



tarea (5) _ $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ módulo 6.

a. Subgrupo es que:
- $0 \in G$
- Sean a, b elementos que pertenecen al subgrupo
  la $a+b \in G$.

$\Rightarrow \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$
$\rightarrow 0 \in \mathbb{Z}_6$
$\Rightarrow (0+1) \in \mathbb{Z}_6$ ó $(1+2) = 3 \in \mathbb{Z}_6$
$1 \in \mathbb{Z}_6$

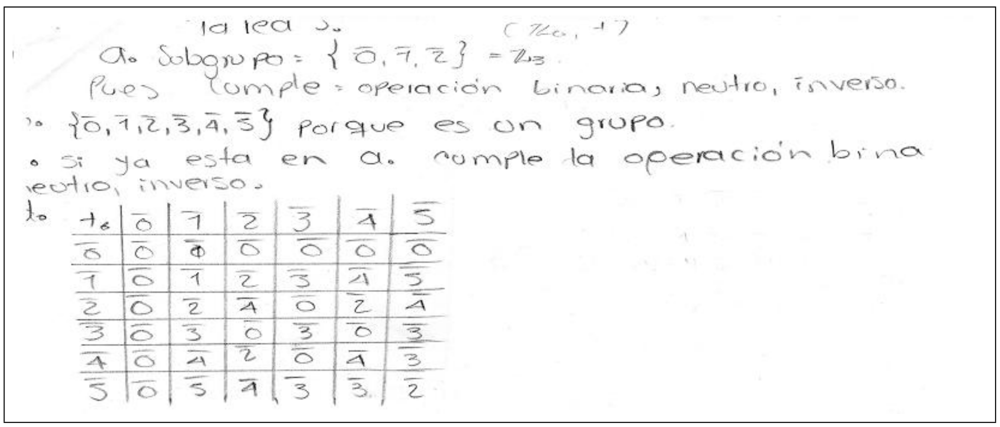
b. $A = \{4, 5\}$
i) $0 \notin A$ no cumple,
ii) $4+5 = 9$ mód $6 = 3 \in \mathbb{Z}_6$.
cumple ii pero no cumple i.

c. Si por el numeral a.

d. Tabla.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.46: p5L9



Tarea 5. $(\mathbb{Z}_6, +)$

a. Subgrupo $= \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$.
Pues cumple = operación binaria, neutro, inverso.

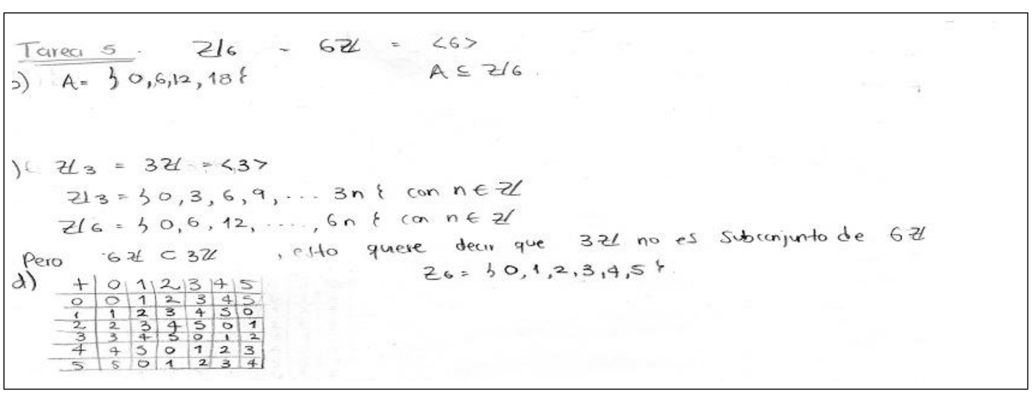
b. $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ porque es un grupo.

- Si ya esta en a. cumple la operación bina[ria] neutro, inverso.

d.

$+_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$

Figura A.47: p5L10



Tarea 5. $\mathbb{Z}/6 - 6\mathbb{Z} = \langle 6 \rangle$

a) $A = \{0, 6, 12, 18\}$ $\quad A \subseteq \mathbb{Z}/6$

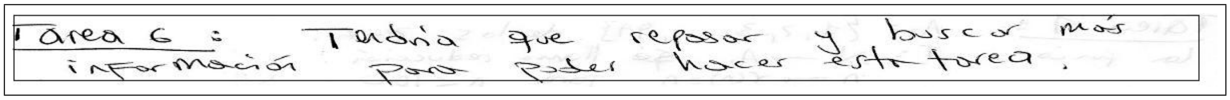
c) $\mathbb{Z}_3 = 3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle$
$\mathbb{Z}_3 = \{0, 3, 6, 9, \ldots 3n\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/6 = \{0, 6, 12, \ldots, 6n\}$ con $n \in \mathbb{Z}$
Pero $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$, esto quiere decir que $3\mathbb{Z}$ no es Subconjunto de $6\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d)

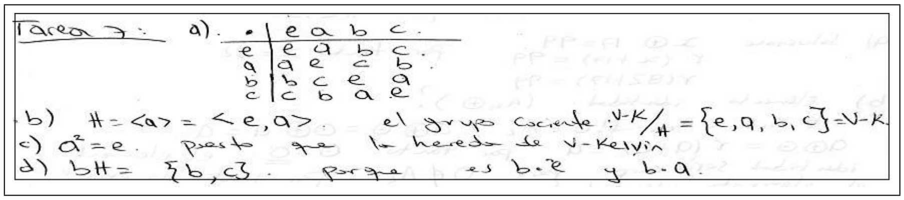
+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.48: p5L11



Tarea 6: Tendría que repasar y buscar más información para poder hacer esta tarea.

Figura A.49: p6L1



Tarea 7: a).

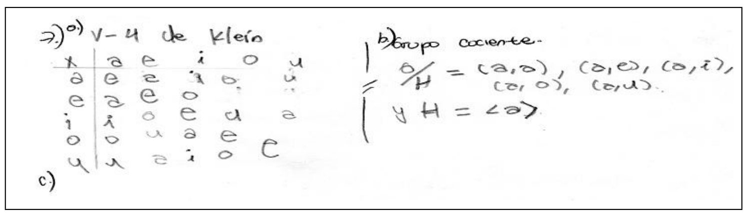
·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $H = \langle a \rangle = \langle e, a \rangle$ el grupo cociente $V\text{-}K/_H = \{e, a, b, c\} = V\text{-}K$

c) $a^2 = e$. puesto que lo hereda de V-Kelvin

d) $bH = \{b, c\}$. porque es $b \cdot e$ y $b \cdot a$.

Figura A.50: p7L1



7) a) V-4 de Klein

x	a	e	i	o	u
a	e	e	i	o	u
e	a	e	o		
i	i	o	e	u	a
o	o	u	a	e	
u	u	a	i	o	e

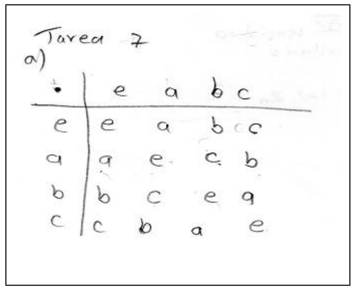
c)

b) Grupo cociente.
$\theta/H = (a,a), (a,e), (o,i), (o,o), (o,u)$.
$y\ H = \langle a \rangle$

Figura A.51: p7L5

A.5. Respuesta de los estudiantes de Matemáticas a la prueba piloto

Se presentan en esta sección las respuestas de los estudiantes de Matemática en la prueba piloto.

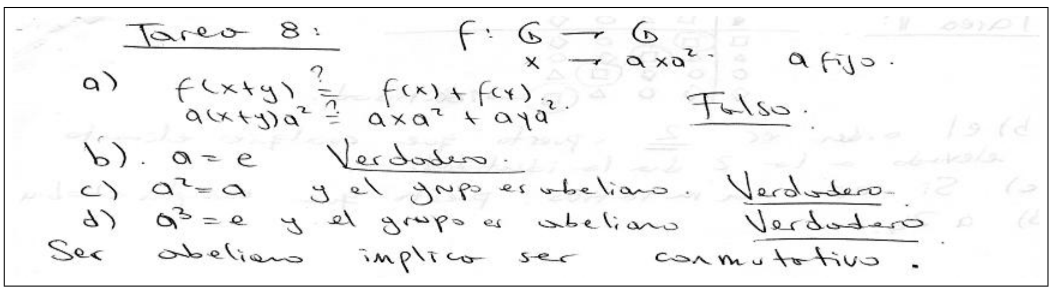


Tarea 7

a)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Figura A.52: p7L6



Tarea 8: $f: G \to G$

$x \to axa^2$. a fijo.

a) $f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x)+f(y)$.

$a(x+y)a^2 \stackrel{?}{=} axa^2 + aya^2$. Falso.

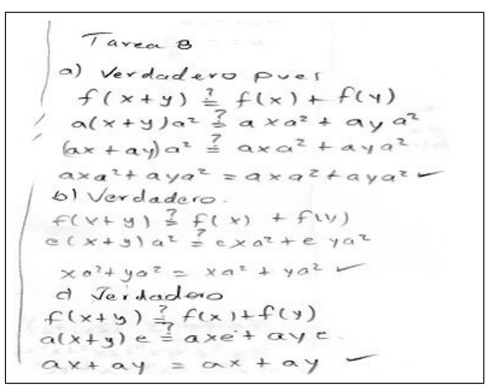
b). $a=e$ Verdadero.

c) $a^2=a$ y el grupo es abeliano. Verdadero.

d) $a^3=e$ y el grupo es abeliano Verdadero.

Ser abeliano implica ser conmutativo.

Figura A.53: p8L1



Tarea 8

a) Verdadero pues

$f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x)+f(y)$

$a(x+y)a^2 \stackrel{?}{=} axa^2 + aya^2$

$(ax+ay)a^2 \stackrel{?}{=} axa^2 + aya^2$

$axa^2 + aya^2 = axa^2 + aya^2$

b) Verdadero.

$f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x) + f(y)$

$e(x+y)a^2 \stackrel{?}{=} exa^2 + eya^2$

$xa^2 + ya^2 = xa^2 + ya^2$

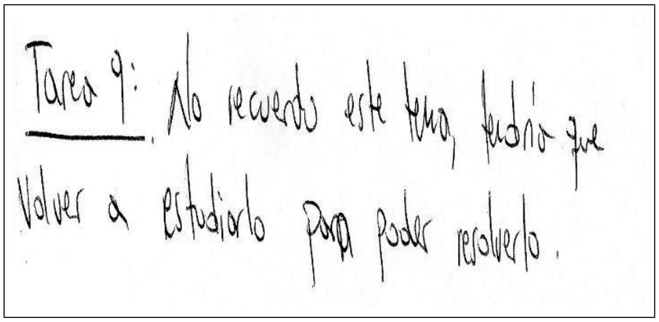
c) Verdadero

$f(x+y) \stackrel{?}{=} f(x)+f(y)$

$a(x+y)e \stackrel{?}{=} axe + aye$

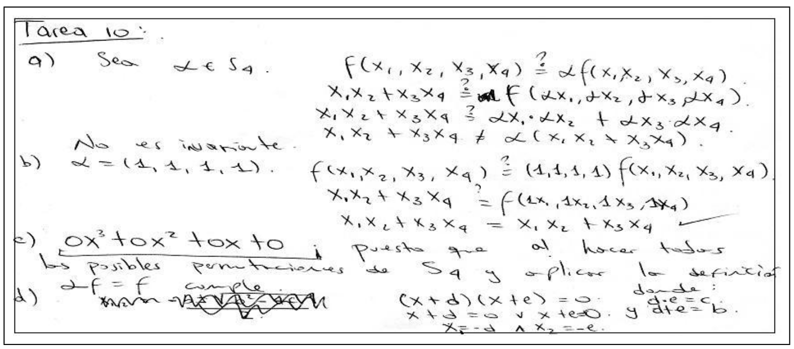
$ax + ay = ax + ay$

Figura A.54: p8L6



Tarea 9: No recuerdo este tema, tendría que volver a estudiarlo para poder resolverlo.

Figura A.55: p9L1



Tarea 10:

a) Sea $\alpha \in S_4$.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \overset{?}{=} \alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$x_1x_2 + x_3x_4 \overset{?}{=} f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$.

$x_1x_2 + x_3x_4 \overset{?}{=} \alpha x_1 \cdot \alpha x_2 + \alpha x_3 \cdot \alpha x_4$.

$x_1x_2 + x_3x_4 \neq \alpha(x_1x_2 + x_3x_4)$.

No es invariante.

b) $\alpha = (1, 1, 1, 1)$.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \overset{?}{=} (1,1,1,1) f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$x_1x_2 + x_3x_4 \overset{?}{=} f(1x_1, 1x_2, 1x_3, 1x_4)$

$x_1x_2 + x_3x_4 = x_1x_2 + x_3x_4$

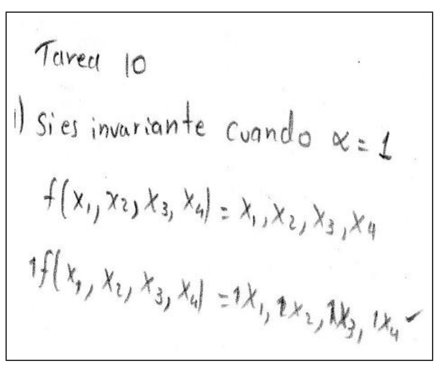
c) $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$; puesto que al hacer todas los posibles permutaciones de S_4 y aplicar la definición $\alpha f = f$ cumple.

d) $(x+d)(x+e) = 0$. donde: $d \cdot e = c$ y $d + e = b$.

$x + d = 0 \vee x + e = 0$.

$x_1 = -d \wedge x_2 = -e$.

Figura A.56: p10L1



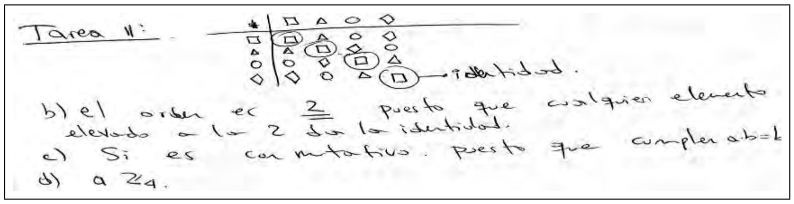
Tarea 10

1) Si es invariante cuando $\alpha = 1$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1, x_2, x_3, x_4$

$1f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1x_1, 1x_2, 1x_3, 1x_4$

Figura A.57: p10L6



Tarea 11:

$*$	□	△	○	◇
□	□	△	○	◇
△	△	□	◇	○
○	○	◇	□	△
◇	◇	○	△	□

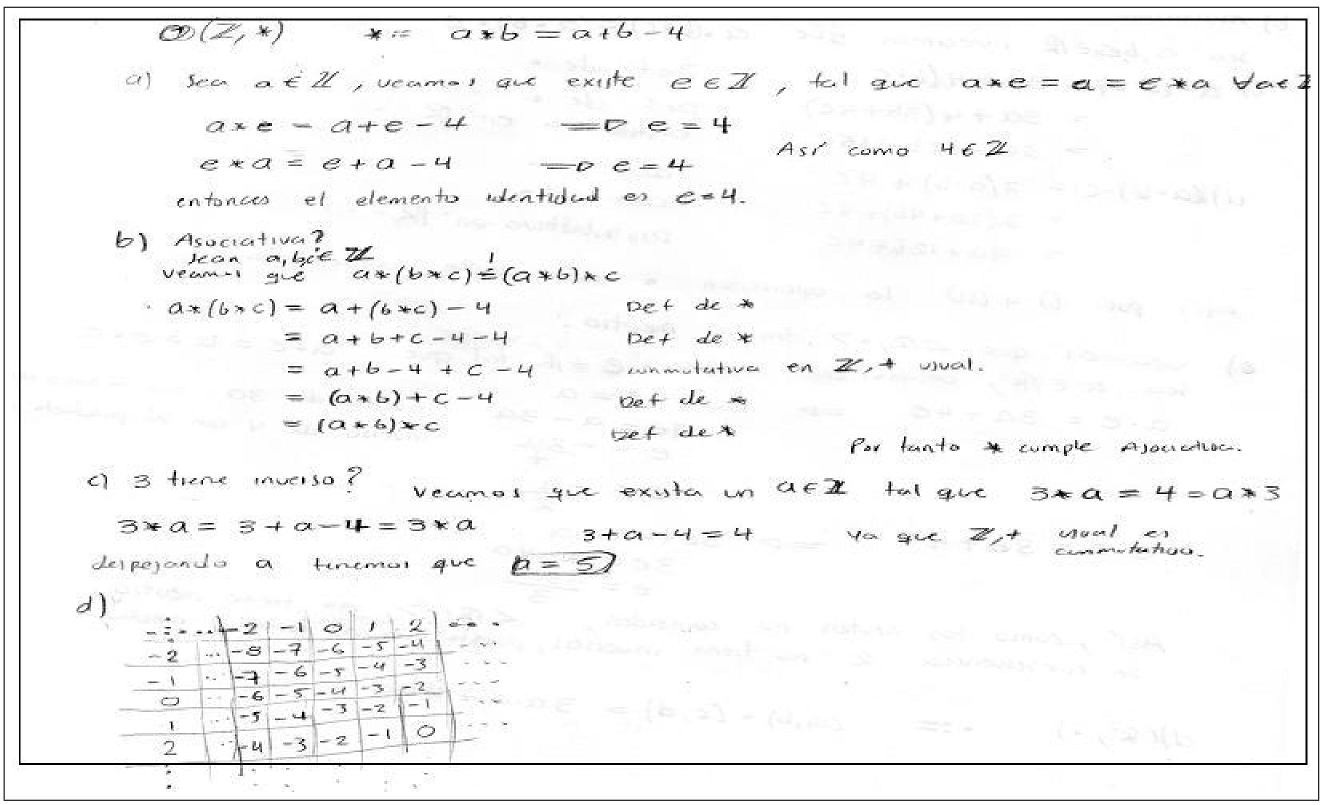
→ identidad.

b) el orden es $\underline{\underline{2}}$ puesto que cualquier elemento elevado a la 2 da la identidad.

c) Si es conmutativo. puesto que cumple a·b=b

d) a $\mathbb{Z}_4$.

Figura A.58: p11L1



$(\mathbb{Z}, *)$ $\quad * := a*b = a+b-4$

a) Sea $a \in \mathbb{Z}$, veamos que existe $e \in \mathbb{Z}$, tal que $a*e = a = e*a \ \forall a \in \mathbb{Z}$

$a*e = a+e-4 \Rightarrow e = 4$

$e*a = e+a-4 \Rightarrow e=4$ $\quad$ Así como $4 \in \mathbb{Z}$

entonces el elemento identidad es $e=4$.

b) Asociativa?

Sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$

veamos que $a*(b*c) \stackrel{!}{=} (a*b)*c$

$a*(b*c) = a+(b*c)-4$ $\quad$ Def de $*$

$= a+b+c-4-4$ $\quad$ Def de $*$

$= a+b-4+c-4$ $\quad$ conmutativa en $\mathbb{Z},+$ usual.

$= (a*b)+c-4$ $\quad$ Def de $*$

$= (a*b)*c$ $\quad$ Def de $*$

Por tanto $*$ cumple Asociativa.

c) 3 tiene inverso? $\quad$ Veamos que exista un $a \in \mathbb{Z}$ tal que $3*a = 4 = a*3$

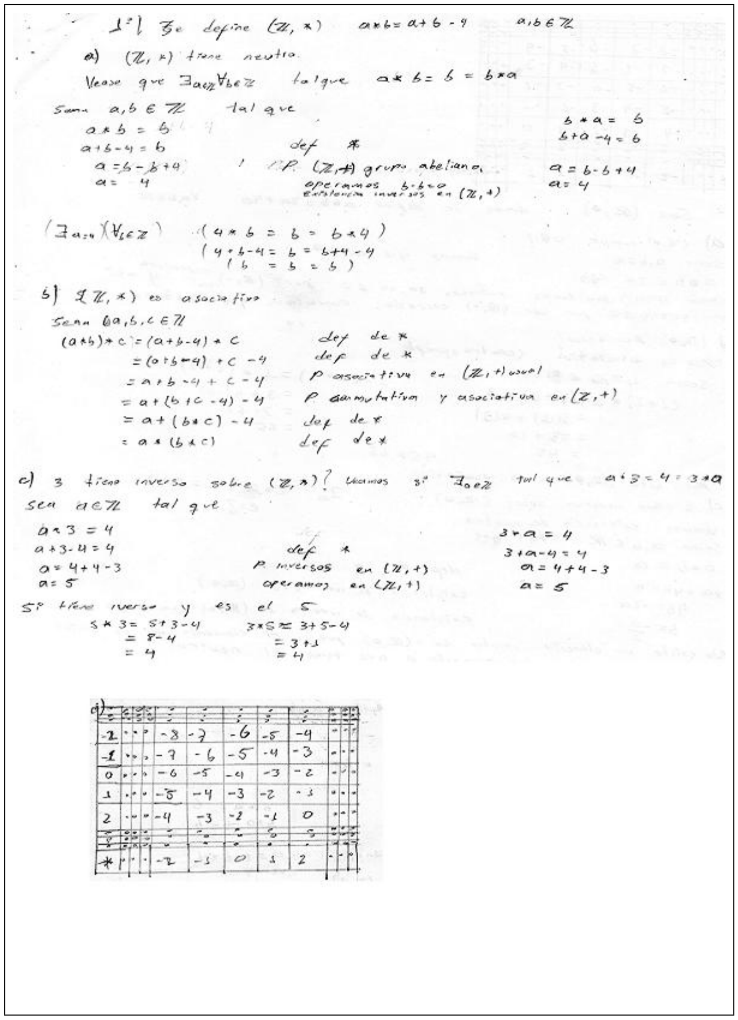
$3*a = 3+a-4 = 3*a$ $\quad$ $3+a-4=4$ $\quad$ ya que $\mathbb{Z},+$ usual es conmutativo.

despejando a tenemos que $\boxed{a=5}$

d)

$*$	...	-2	-1	0	1	2	...
-2	...	-8	-7	-6	-5	-4	...
-1	...	-7	-6	-5	-4	-3	...
0	...	-6	-5	-4	-3	-2	...
1	...	-5	-4	-3	-2	-1	...
2	...	-4	-3	-2	-1	0	...

Figura A.59: p1M1



1°) Se define $(\mathbb{Z}, *)$ $a*b = a+b-4$ $a,b \in \mathbb{Z}$

a) $(\mathbb{Z}, *)$ tiene neutro.

Vease que $\exists_{a\in\mathbb{Z}} \forall_{b\in\mathbb{Z}}$ tal que $a*b = b = b*a$

Sean $a,b \in \mathbb{Z}$ tal que

$a*b = b$

$a+b-4 = b$ def $*$

$a = b-b+4$ P. $(\mathbb{Z},+)$ grupo abeliano,

$a = 4$ operamos $b-b=0$ Existencia inversos en $(\mathbb{Z},+)$

$b*a = b$

$b+a-4 = b$

$a = b-b+4$

$a = 4$

$(\exists_{a=4})(\forall_{b\in\mathbb{Z}})$ $(4*b = b = b*4)$

$(4+b-4 = b = b+4-4$

$(b = b = b)$

b) $(\mathbb{Z}, *)$ es asociativo

Sean $a,b,c \in \mathbb{Z}$

$(a*b)*c = (a+b-4)*c$ def de $*$

$= (a+b-4)+c-4$ def de $*$

$= a+b-4+c-4$ P asociativa en $(\mathbb{Z},+)$ usual

$= a+(b+c-4)-4$ P conmutativa y asociativa en $(\mathbb{Z},+)$

$= a+(b*c)-4$ def de $*$

$= a*(b*c)$ def de $*$

c) 3 tiene inverso sobre $(\mathbb{Z}, *)$? veamos si $\exists_{a\in\mathbb{Z}}$ tal que $a*3 = 4 = 3*a$

sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que

$a*3 = 4$

$a+3-4 = 4$ def $*$

$a = 4+4-3$ P. inversos en $(\mathbb{Z},+)$

$a = 5$ operamos en $(\mathbb{Z},+)$

$3*a = 4$

$3+a-4 = 4$

$a = 4+4-3$

$a = 5$

Si tiene inverso y es el 5

$5*3 = 5+3-4$

$= 8-4$

$= 4$

$3*5 = 3+5-4$

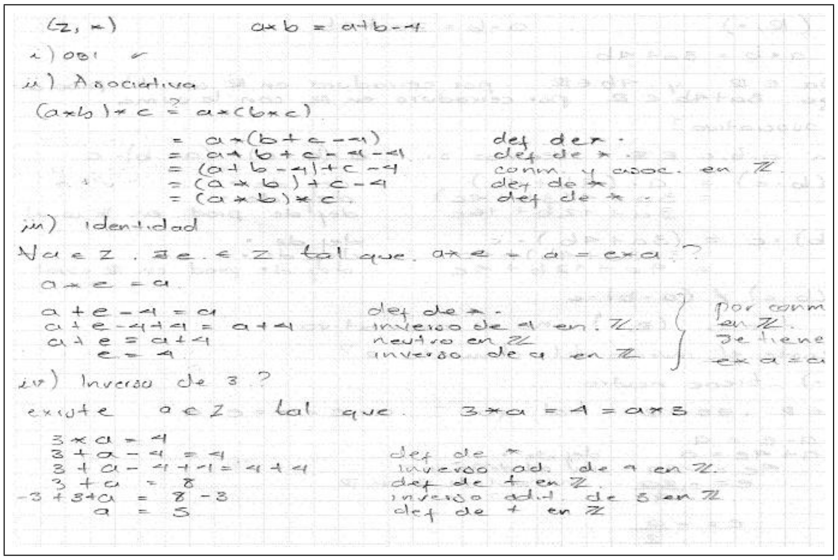
$= 3+1$

$= 4$

d)

-2	·	·	·	-8	-7	-6	-5	-4	·	·	·
-1	·	·	·	-7	-6	-5	-4	-3	·	·	·
0	·	·	·	-6	-5	-4	-3	-2	·	·	·
1	·	·	·	-5	-4	-3	-2	-1	·	·	·
2	·	·	·	-4	-3	-2	-1	0	·	·	·
*	·	·	·	-2	-1	0	1	2	·	·	·

Figura A.60: p1M2



$(\mathbb{Z}, *)$ $a*b = a+b-4$

i) OBI ✓

ii) Asociativa

$(a*b)*c \overset{?}{=} a*(b*c)$

$= a*(b+c-4)$ def de $*$

$= a+(b+c-4)-4$ def de $*$

$= (a+b-4)+c-4$ conm y asoc. en $\mathbb{Z}$

$= (a*b)+c-4$ def de $*$

$= (a*b)*c$ def de $*$

iii) Identidad

$\forall a \in \mathbb{Z}.\ \exists e \in \mathbb{Z}$ tal que $a*e = a = e*a$?

$a*e = a$

$a+e-4 = a$ def de $*$

$a+e-4+4 = a+4$ inverso de 4 en $\mathbb{Z}$

$a+e = a+4$ neutro en $\mathbb{Z}$

$e = 4$ inverso de a en $\mathbb{Z}$

por conm en $\mathbb{Z}$ se tiene $e*a=a$

iv) Inverso de 3 ?

existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $3*a = 4 = a*3$

$3*a = 4$

$3+a-4 = 4$ def de $*$

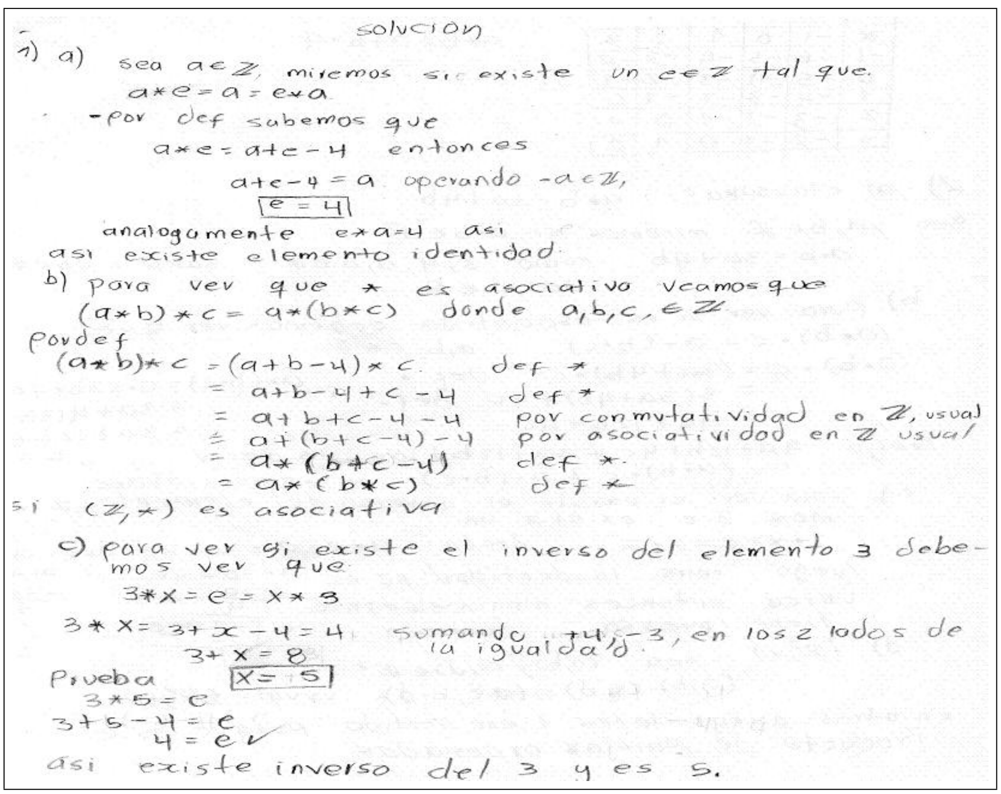
$3+a-4+4 = 4+4$ inverso ad. de 4 en $\mathbb{Z}$

$3+a = 8$ def de $+$ en $\mathbb{Z}$

$-3+3+a = 8-3$ inverso adit. de 3 en $\mathbb{Z}$

$a = 5$ def de $+$ en $\mathbb{Z}$

Figura A.61: p1M3



solucion

1) a) sea $a \in \mathbb{Z}$, miremos si existe un $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a*e=a=e*a$.

-por def sabemos que

$a*e=a+e-4$ entonces

$a+e-4=a$ operando $-a \in \mathbb{Z}$,

$\boxed{e=4}$

analogamente $e*a=4$ asi

asi existe elemento identidad.

b) para ver que $*$ es asociativa veamos que

$(a*b)*c = a*(b*c)$ donde $a,b,c, \in \mathbb{Z}$

Por def

$(a*b)*c = (a+b-4)*c$ def $*$

$= a+b-4+c-4$ def $*$

$= a+b+c-4-4$ por conmutatividad en $\mathbb{Z}$, usual

$= a+(b+c-4)-4$ por asociatividad en $\mathbb{Z}$ usual

$= a*(b+c-4)$ def $*$

$= a*(b*c)$ def $*$

si $(\mathbb{Z},*)$ es asociativa

c) para ver si existe el inverso del elemento 3 debemos ver que

$3*x = e = x*3$

$3*x = 3+x-4 = 4$ sumando $+4,-3$, en los 2 lados de la igualdad.

$3+x = 8$

$\boxed{x=5}$

Prueba

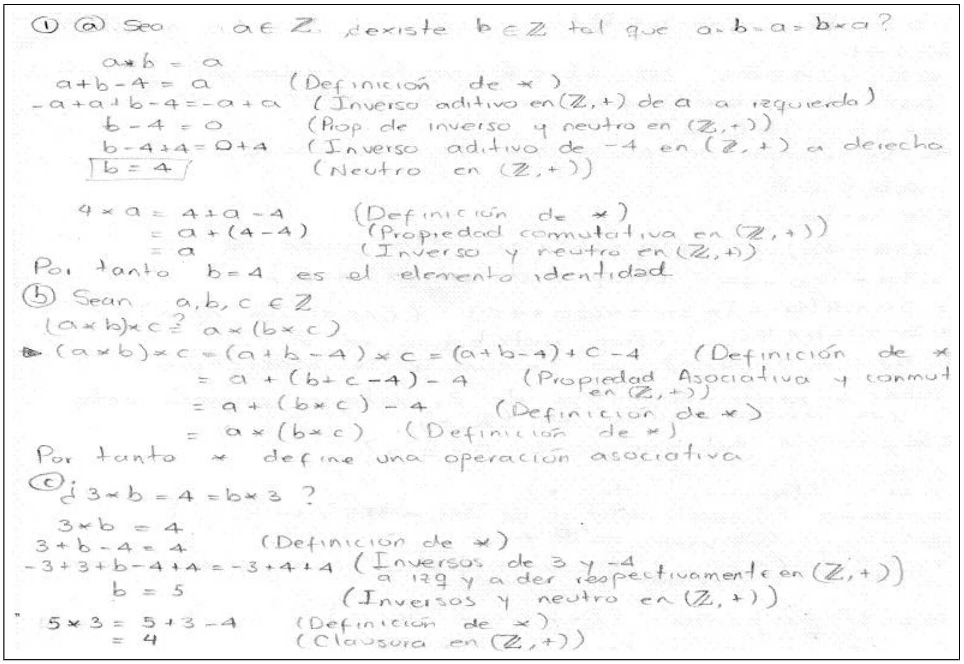
$3*5 = e$

$3+5-4 = e$

$4 = e$ ✓

asi existe inverso del 3 y es 5.

Figura A.62: p1M5



(1) (a) Sea $a \in \mathbb{Z}$ ¿existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot b = a = b * a$?

$a * b = a$
$a + b - 4 = a$ (Definición de $*$)
$-a + a + b - 4 = -a + a$ (Inverso aditivo en $(\mathbb{Z}, +)$ de a a izquierda)
$b - 4 = 0$ (Prop de inverso y neutro en $(\mathbb{Z}, +)$)
$b - 4 + 4 = 0 + 4$ (Inverso aditivo de -4 en $(\mathbb{Z}, +)$ a derecha
$\boxed{b = 4}$ (Neutro en $(\mathbb{Z}, +)$)

$4 * a = 4 + a - 4$ (Definición de $*$)
$= a + (4 - 4)$ (Propiedad conmutativa en $(\mathbb{Z}, +)$)
$= a$ (Inverso y neutro en $(\mathbb{Z}, +)$)

Por tanto $b = 4$ es el elemento identidad

(b) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$(a * b) * c \stackrel{?}{=} a * (b * c)$

$(a * b) * c = (a + b - 4) * c = (a + b - 4) + c - 4$ (Definición de $*$
$= a + (b + c - 4) - 4$ (Propiedad Asociativa y conmut en $(\mathbb{Z}, +)$)
$= a + (b * c) - 4$ (Definición de $*$)
$= a * (b * c)$ (Definición de $*$)

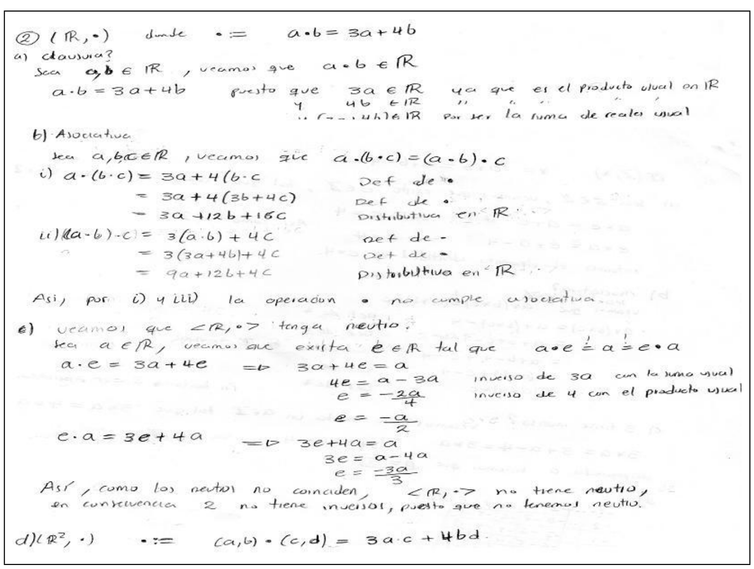
Por tanto $*$ define una operación asociativa

(c) ¿$3 * b = 4 = b * 3$?

$3 * b = 4$
$3 + b - 4 = 4$ (Definición de $*$)
$-3 + 3 + b - 4 + 4 = -3 + 4 + 4$ (Inversos de 3 y -4 a izq y a der respectivamente en $(\mathbb{Z}, +)$)
$b = 5$ (Inversos y neutro en $(\mathbb{Z}, +)$)

$5 * 3 = 5 + 3 - 4$ (Definición de $*$)
$= 4$ (Clausura en $(\mathbb{Z}, +)$)

Figura A.63: p1M6



(2) $(\mathbb{R}, \cdot)$ donde $\cdot :=$ $a \cdot b = 3a + 4b$

a) clausura?
Sea $a, b \in \mathbb{R}$, veamos que $a \cdot b \in \mathbb{R}$
$a \cdot b = 3a + 4b$ puesto que $3a \in \mathbb{R}$ ya que es el producto usual en $\mathbb{R}$
y $4b \in \mathbb{R}$ " " " "
$\therefore (3a + 4b) \in \mathbb{R}$ por ser la suma de reales usual

b) Asociativa
Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$, veamos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
i) $a \cdot (b \cdot c) = 3a + 4(b \cdot c$ Def de $\cdot$
$= 3a + 4(3b + 4c)$ Def de $\cdot$
$= 3a + 12b + 16c$ Distributiva en $\mathbb{R}$
ii) $(a \cdot b) \cdot c = 3(a \cdot b) + 4c$ Def de $\cdot$
$= 3(3a + 4b) + 4c$ Def de $\cdot$
$= 9a + 12b + 4c$ Distributiva en $\mathbb{R}$

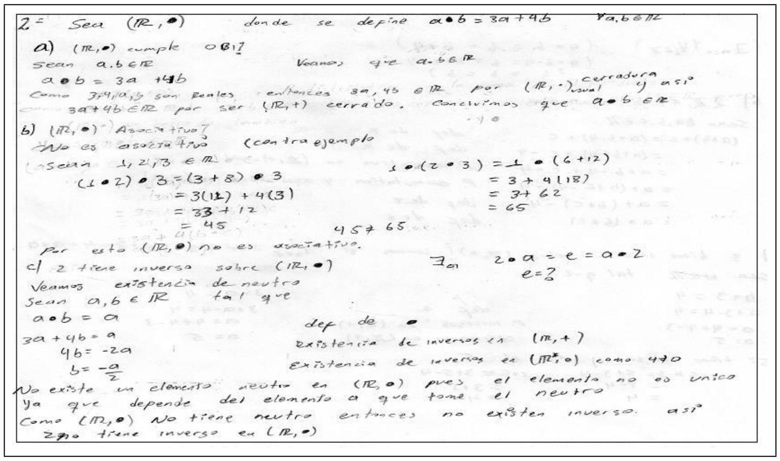
Así, por i) y ii) la operación $\cdot$ no cumple asociativa.

c) veamos que $<\mathbb{R}, \cdot>$ tenga neutro.
Sea $a \in \mathbb{R}$, veamos que exista $e \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot e \stackrel{!}{=} a \stackrel{!}{=} e \cdot a$
$a \cdot e = 3a + 4e \Rightarrow 3a + 4e = a$
$4e = a - 3a$ inverso de $3a$ con la suma usual
$e = -\frac{2a}{4}$ inverso de 4 con el producto usual
$e = \frac{-a}{2}$
$e \cdot a = 3e + 4a \Rightarrow 3e + 4a = a$
$3e = a - 4a$
$e = \frac{-3a}{3}$

Así, como los neutros no coinciden, $<\mathbb{R}, \cdot>$ no tiene neutro, en consecuencia 2 no tiene inversos, puesto que no tenemos neutro.

d) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ $\cdot :=$ $(a, b) \cdot (c, d) = 3a \cdot c + 4bd$.

Figura A.64: p2M1



2= Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde se define $a \bullet b = 3a + 4b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

a) $(\mathbb{R}, \bullet)$ cumple OBI?

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Veamos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

$a \bullet b = 3a + 4b$

Como 3, 4, a, b son Reales entonces $3a, 4b \in \mathbb{R}$ por $(\mathbb{R}, \cdot)$ cerradura usual y así $3a + 4b \in \mathbb{R}$ por ser $(\mathbb{R}, +)$ cerrado. Concluimos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}, \bullet)$ Asociativo?

No es asociativo (contra ejemplo

Sean $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$

$(1 \bullet 2) \bullet 3 = (3 + 8) \bullet 3$
$= 3(11) + 4(3)$
$= 33 + 12$
$= 45$

$1 \bullet (2 \bullet 3) = 1 \bullet (6 + 12)$
$= 3 + 4(18)$
$= 3 + 62$
$= 65$

$45 \neq 65$

Por esto $(\mathbb{R}, \bullet)$ no es asociativo.

c) 2 tiene inverso sobre $(\mathbb{R}, \bullet)$ $\exists a$ $2 \bullet a = e = a \bullet 2$ $e = ?$

Veamos existencia de neutro

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$a \bullet b = a$ def de $\bullet$

$3a + 4b = a$ existencia de inversos en $(\mathbb{R}, +)$

$4b = -2a$ existencia de inversos en $(\mathbb{R}^*, \circ)$ como $4 \neq 0$

$b = -\frac{a}{2}$

No existe un elemento neutro en $(\mathbb{R}, \bullet)$ pues el elemento no es único ya que depende del elemento a que tome el neutro

Como $(\mathbb{R}, \bullet)$ No tiene neutro entonces no existen inverso. así 2 no tiene inverso en $(\mathbb{R}, \bullet)$

Figura A.65: p2M2

2 $(\mathbb{R}, \cdot)$ $a \cdot b = 3a+4b$

a) $a \cdot b = 3a+4b$

$3a \in \mathbb{R}$ y $4b \in \mathbb{R}$ por cerradura en $\mathbb{R}$ con el producto
luego $3a+4b \in \mathbb{R}$ por cerradura en $\mathbb{R}$ con la suma.

b) asociativo?

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ veamos si $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (3b+4c)$ def de $\cdot$
$= 3a + 4(3b+4c)$ def de $\cdot$
$3a + 12b + 16c$ def de prod en $\mathbb{R}$ usual

$(a \cdot b) \cdot c = (3a+4b) \cdot c$ def de $\cdot$
$= 3(3a+4b)+4c$ def de $\cdot$
$= 9a+12b+4c$ def de prod en $\mathbb{R}$ usual

$a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$

Por tanto $(\mathbb{R}, \cdot)$ no es asociativa

c) existe el inverso del elemento 2?

$(\mathbb{R}, \cdot)$ tiene neutro

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists e \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot e = a = e \cdot a$?

$a \cdot e = a$
$3a + 4e = a$ def de $\cdot$
$4e = -2a$ inv ad de $3a$ en $\mathbb{R}$
$e = -\frac{2a}{4}$ inv mul de 4 en $\mathbb{R}$

$e = -\frac{a}{2}$

$e \cdot a = a$
$3e + 4a = a$ def de $\cdot$
$3e = a - 4a$ inv ad de $4a$ en $\mathbb{R}$
$e = -\frac{3a}{3}$ inv mul de 3 en $\mathbb{R}$

$e = -a$

$(\mathbb{R}, \cdot)$ no tiene neutro, por tanto 2 no tiene inverso.

Figura A.66: p2M3

) a) clausura? $a \bullet b = 3a+4b$

sea $a, b \in \mathbb{R}$ miremos si $a \bullet b \in \mathbb{R}$
$a \bullet b = 3a+4b$ como $3, 4, a, b \in \mathbb{R}$ $3a \in \mathbb{R} \wedge 4b \in \mathbb{R}$
$3a+4b \in \mathbb{R}$.

b) para ver si es asociativa debemos ver que
$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a \bullet b) \bullet c = (3a+4b) \bullet c$ def $\bullet$
$= 3(3a+4b)+4c$ def $\bullet$
$= 9a+12b+4c$

$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (3b+4c)$
$= 3a+4(3b+4c)$
$= 3a+12b+16c$

luego $9a+12b+4c \neq 3a+12b+16c$ es decir
$(a \bullet b) \bullet c \neq a \bullet (b \bullet c)$ no es asociativo

c) para ver si existe el inverso del elemento 2 veamos que exista un
$2 \bullet x = e = x \bullet 2$ donde $a * e = a = 3a+4e$ $e * a = a = 3e$
luego como la identidad no es unica entonces ningun elemento tiene inverso

$a - 3a = 4e$
$\frac{-2a}{4} = e$
$\boxed{-\frac{1}{2}a = e}$

$a - 4a =$
$\frac{-3a}{3} = e$
$-a = e$

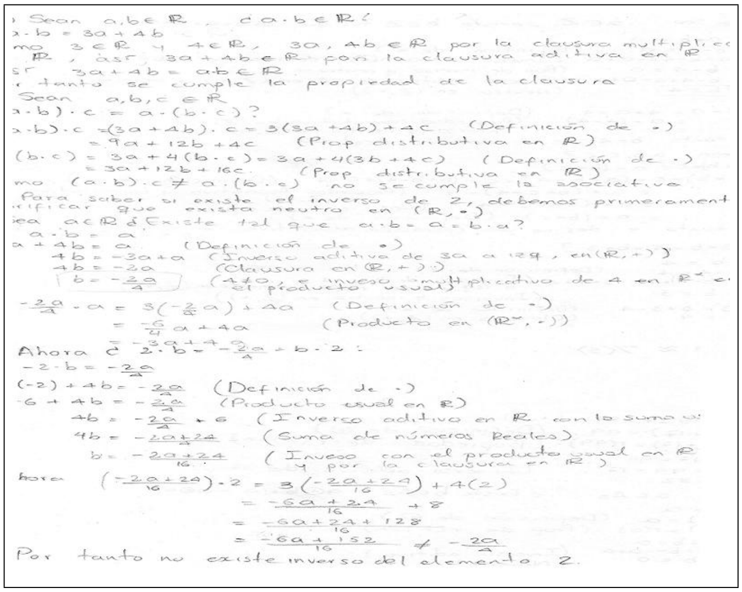
d) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ sea $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$
$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$. usual $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

en otras asignaciones tiene sentido porque es el producto de parejas ordenadas

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^5}+4x^4+2x^3+x^2+4x+1 & 2x^3+3x^2+4x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{3x^5}+2x^4-11x^3-4x^2 & 4x^2+x+4 \\ \hline \quad 2x^4+x^3+2x^2+4x+1 & \\ \quad -\cancel{2x^4}-3x^3-4x^2-x & \\ \hline \quad\quad \cancel{3x^3}+3x^2+3x+1 & \\ \quad\quad -\cancel{3x^3}-2x^2-x-4 & \\ \hline \quad\quad\quad x^2+2x+2 & \end{array}$$

a) el cociente correspondea a $4x^2+x+4$
b) el residuo corresponde a x^2+2x+2
c) en $(\mathbb{Z}_5, +)$
d) algoritmo de la division
clases residuales
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ usual y en $\mathbb{Z}_5$
propiedad de inverso aditivo,

Figura A.67: p2M5



Sean $a, b \in \mathbb{R}$, ¿ $a \cdot b \in \mathbb{R}$?

$a \cdot b = 3a + 4b$

mo $3 \in \mathbb{R}$ y $4 \in \mathbb{R}$, $3a, 4b \in \mathbb{R}$ por la clausura multiplic $\mathbb{R}$, así, $3a + 4b \in \mathbb{R}$ por la clausura aditiva en $\mathbb{R}$

sí $3a + 4b = a \cdot b \in \mathbb{R}$

tanto se cumple la propiedad de la clausura

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$?

$(a \cdot b) \cdot c = (3a + 4b) \cdot c = 3(3a + 4b) + 4c$ (Definición de $\cdot$)

$= 9a + 12b + 4c$ (Prop distributiva en $\mathbb{R}$)

$(b \cdot c) = 3a + 4(b \cdot c) = 3a + 4(3b + 4c)$ (Definición de $\cdot$)

$= 3a + 12b + 16c$ (Prop distributiva en $\mathbb{R}$)

mo $(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$ no se cumple la asociativa

Para saber si existe el inverso de 2, debemos primerament ificar que exista neutro en $(\mathbb{R}, \cdot)$

ea $a \in \mathbb{R}$ ¿Existe tal que $a \cdot b = a = b \cdot a$?

$a \cdot b = a$

$a + 4b = a$ (Definición de $\cdot$)

$4b = -3a + a$ (Inverso aditivo de $3a$ a izq, en $(\mathbb{R}, +)$)

$4b = -2a$ (Clausura en $(\mathbb{R}, +)$)

$\boxed{b = -\frac{2a}{4}}$ ($4 \neq 0$, e inveso multiplicativo de 4 en $\mathbb{R}^*$ c el producto usual)

$-\frac{2a}{4} \cdot a = 3(-\frac{2}{4}a) + 4a$ (Definición de $\cdot$)

$= \frac{-6}{4}a + 4a$ (Producto en $(\mathbb{R}^*, \cdot)$)

$= -3a + 4a$

Ahora ¿ $2 \cdot b = -\frac{2a}{4} = b \cdot 2$?

$-2 \cdot b = -\frac{2a}{4}$

$(-2) + 4b = -\frac{2a}{4}$ (Definición de $\cdot$)

$-6 + 4b = -\frac{2a}{4}$ (Producto usual en $\mathbb{R}$)

$4b = -\frac{2a}{4} + 6$ (Inverso aditivo en $\mathbb{R}$ con la suma u

$4b = -\frac{2a + 24}{4}$ (Suma de números Reales)

$b = -\frac{2a + 24}{16}$ (Inveso con el producto usual en $\mathbb{R}$ y por la clausura en $\mathbb{R}$)

hora $\left(-\frac{2a + 24}{16}\right) \cdot 2 = 3\left(-\frac{2a + 24}{16}\right) + 4(2)$

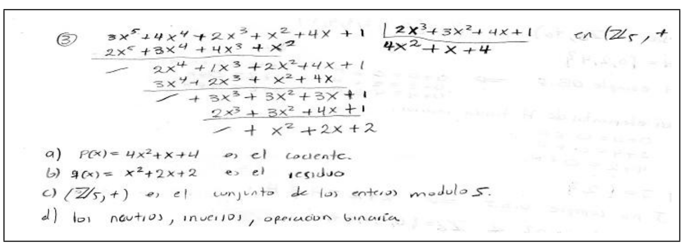
$= \frac{-6a + 24}{16} + 8$

$= \frac{-6a + 24 + 128}{16}$

$= \frac{-6a + 152}{16} \neq -\frac{2a}{4}$

Por tanto no existe inverso del elemento 2.

Figura A.68: p2M6



③ $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1 \quad \lfloor 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ en $(\mathbb{Z}_5, +$

$2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 \qquad 4x^2 + x + 4$

$\diagup \quad 2x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

$3x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x$

$\diagup + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$\diagup + x^2 + 2x + 2$

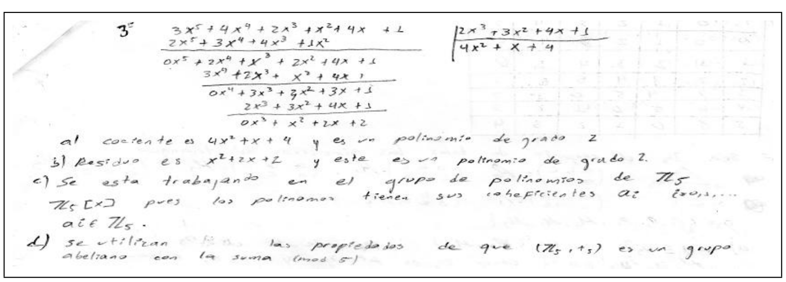
a) $P(x) = 4x^2 + x + 4$ es el cociente.

b) $q(x) = x^2 + 2x + 2$ es el residuo

c) $(\mathbb{Z}/5, +)$ es el conjunto de los enteros modulo 5.

d) los neutros, inversos, operacion binaria

Figura A.69: p3M1



3° $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1 \quad | 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 1x^2 \qquad 4x^2 + x + 4$

$0x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1$

$3x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x$

$0x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$0x^3 + x^2 + 2x + 2$

a) cociente es $4x^2 + x + 4$ y es un polinomio de grado 2

b) Residuo es $x^2 + 2x + 2$ y este es un polinomio de grado 2.

c) Se esta trabajando en el grupo de polinomios de $\mathbb{Z}_5$ $\mathbb{Z}_5[x]$ pues los polinomos tienen sus cohefecientes a_i {0,1,... $a_i \in \mathbb{Z}_5$.

d) se utilizan las propiedades de que $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ es un grupo abeliano con la suma (mod 5)

Figura A.70: p3M2

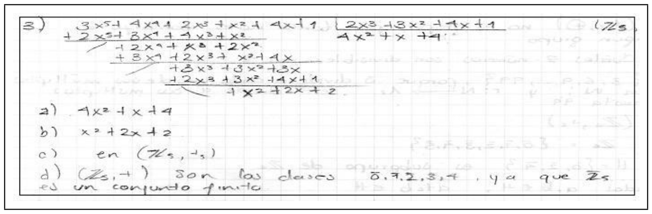


Figura A.71: p3M3

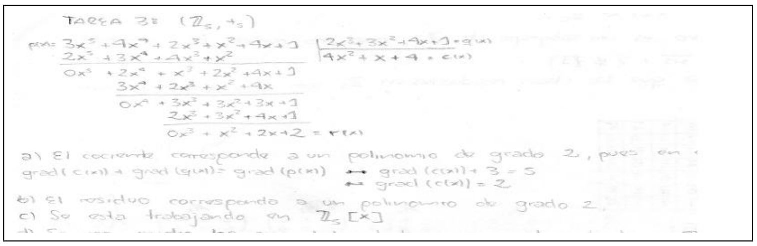


Figura A.72: p3M4

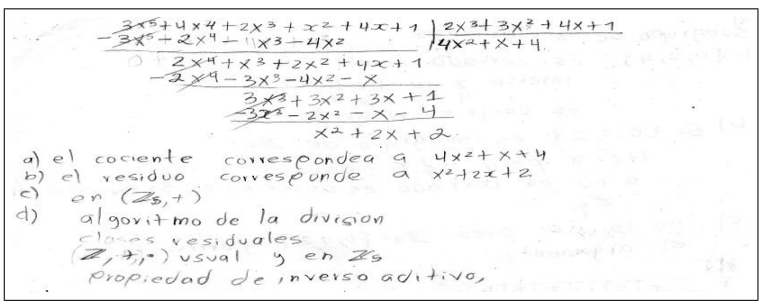
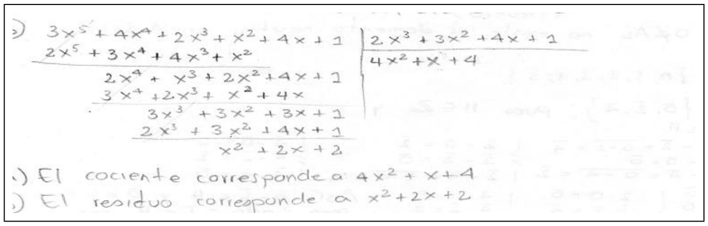


Figura A.73: p3M5

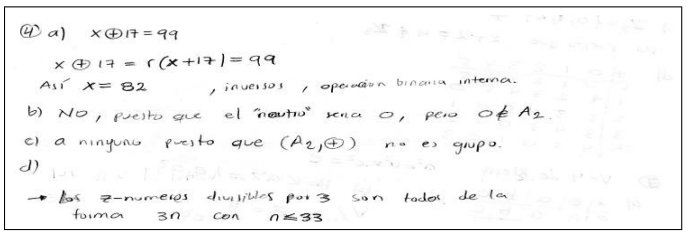


$3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1 \quad | \; 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
$2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 \quad | \; 4x^2 + x + 4$
$2x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1$
$3x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x$
$3x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
$x^2 + 2x + 2$

El cociente corresponde a $4x^2 + x + 4$

El residuo corresponde a $x^2 + 2x + 2$

Figura A.74: p3M6



(4) a) $x \oplus 17 = 99$

$x \oplus 17 = r(x+17) = 99$

Así $x = 82$, inversos , operación binaria interna.

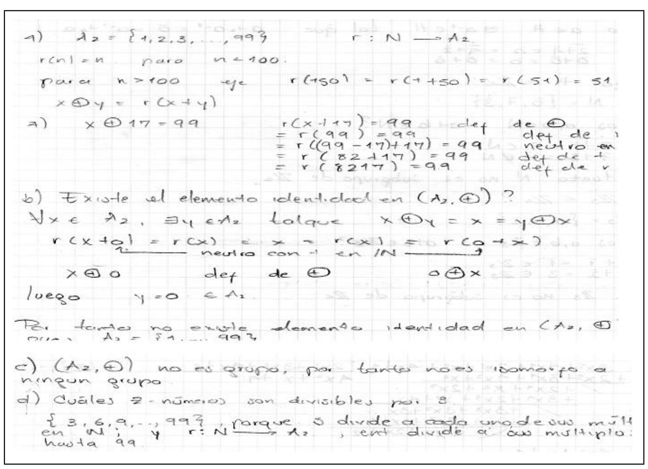
b) NO, puesto que el "neutro" sería 0, pero $0 \notin A_2$.

c) a ninguno puesto que $(A_2, \oplus)$ no es grupo.

d)

→ los Z-numeros divisibles por 3 son todos de la forma $3n$ con $n \leq 33$

Figura A.75: p4M1



1) $A_2 = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ $\quad r : N \longrightarrow A_2$

$r(n) = n$ para $n < 100$.

para $n > 100$ eje $r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$

$x \oplus y = r(x+y)$

a) $x \oplus 17 = 99$

$r(x+17) = 99$ def de $\oplus$
$= r(99) = 99$ def de r
$= r((99-17)+17) = 99$ neutro en
$= r(82+17) = 99$ def de +
$= r(8217) = 99$ def de r

b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$?

$\forall x \in A_2, \exists y \in A_2$ talque $x \oplus y = x = y \oplus x$

$r(x+0) = r(x) = x = r(x) = r(0+x)$

neutro con + en $\mathbb{N}$

$x \oplus 0$ def de $\oplus$ $0 \oplus x$

luego $y = 0 \in A_2$

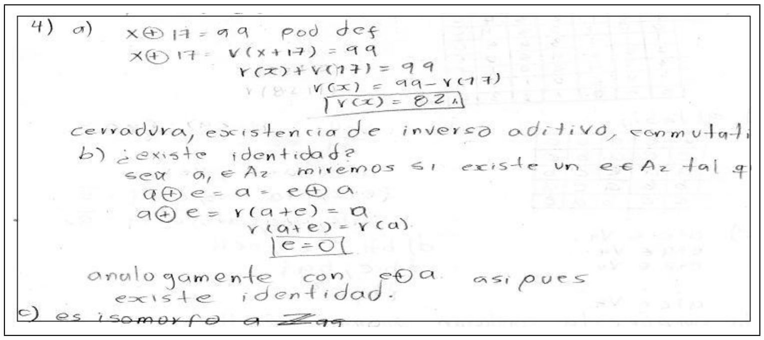
Por tanto no existe elemento identidad en $(A_2, \oplus)$ pues $A_2 = \{1, \ldots, 99\}$

c) $(A_2, \oplus)$ no es grupo, por tanto no es isomorfo a ningun grupo

d) Cuáles Z-números son divisibles por 3

$\{3, 6, 9, \ldots, 99\}$, porque 3 divide a cada uno de sus múlt en $\mathbb{N}$; y $r : N \longrightarrow A_2$, ent divide a sus multiplos hasta 99

Figura A.76: p4M3



4) a) $x \oplus 17 = 99$ pod def
$x \oplus 17 = r(x+17) = 99$
$r(x) + r(17) = 99$
$r(x) = 99 - r(17)$
$\boxed{r(x) = 82}$

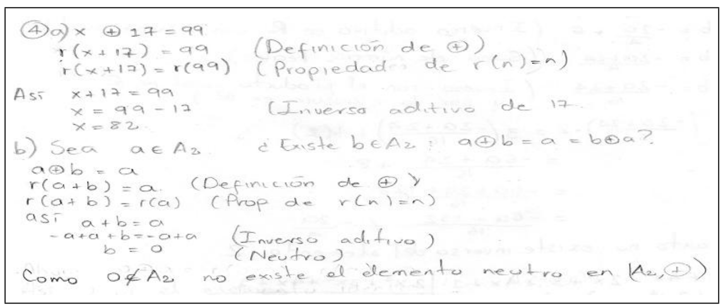
cerradura, existencia de inverso aditivo, conmutati

b) ¿existe identidad?
sea $a \in A_2$ miremos si existe un $e \in A_2$ tal q
$a \oplus e = a = e \oplus a$
$a \oplus e = r(a+e) = a$
$r(a+e) = r(a)$
$\boxed{e = 0}$

analogamente con $e \oplus a$ asi pues existe identidad.

c) es isomorfo a $\mathbb{Z}_{99}$

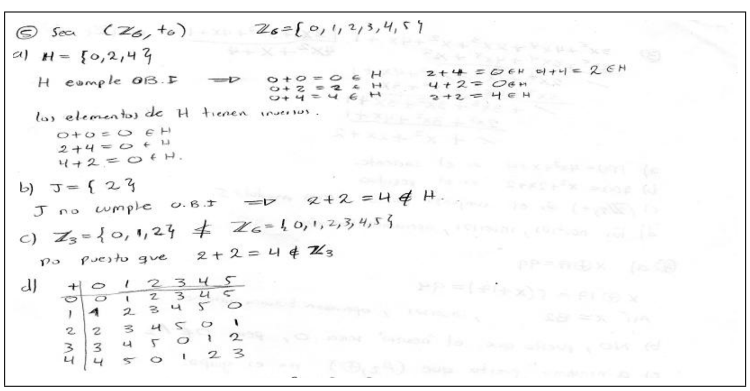
Figura A.77: p4M5



4 a) $x \oplus 17 = 99$
$r(x+17) = 99$ (Definición de $\oplus$)
$r(x+17) = r(99)$ (Propiedad de $r(n) = n$)
Así $x + 17 = 99$
$x = 99 - 17$ (Inverso aditivo de 17
$x = 82$

b) Sea $a \in A_2$ ¿Existe $b \in A_2$: $a \oplus b = a = b \oplus a$?
$a \oplus b = a$
$r(a+b) = a$ (Definición de $\oplus$)
$r(a+b) = r(a)$ (Prop de $r(n) = n$)
así $a + b = a$
$-a + a + b = -a + a$ (Inverso aditivo)
$b = 0$ (Neutro)
Como $0 \notin A_2$ no existe el elemento neutro en $(A_2, \oplus)$

Figura A.78: p4M6



5 Sea $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

a) $H = \{0,2,4\}$
H cumple O.B.I $\Rightarrow$ $0+0=0 \in H$, $0+2=2 \in H$, $0+4=4 \in H$, $2+4=0 \in H$, $4+4=2 \in H$, $4+2=0 \in H$, $2+2=4 \in H$

los elementos de H tienen inversos.
$0+0=0 \in H$
$2+4=0 \in H$
$4+2=0 \in H$.

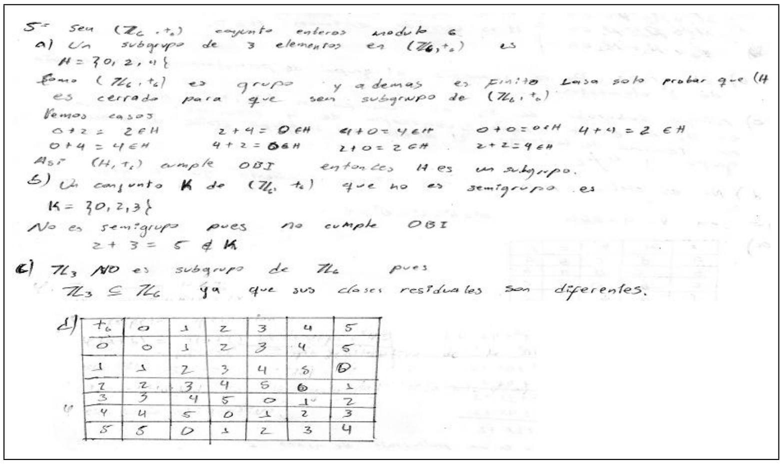
b) $J = \{2\}$
J no cumple O.B.I $\Rightarrow$ $2+2=4 \notin H$.

c) $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\} \nleq \mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$
no puesto que $2+2=4 \notin \mathbb{Z}_3$

d)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3

Figura A.79: p5M1



5= sea $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ conjunto enteros modulo 6

a) Un subgrupo de 3 elementos en $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ es

$H = \{0, 2, 4\}$

Como $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ es grupo y ademas es finito basa solo probar que (H es cerrado para que sea subgrupo de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

Vemos casos

$0+2 = 2 \in H$ $\quad 2+4 = 0 \in H$ $\quad 4+0 = 4 \in H$ $\quad 0+0 = 0 \in H$ $\quad 4+4 = 2 \in H$

$0+4 = 4 \in H$ $\quad 4+2 = 0 \in H$ $\quad 2+0 = 2 \in H$ $\quad 2+2 = 4 \in H$

Asi $(H, +_6)$ cumple OBI entonces H es un subgrupo.

b) Un conjunto K de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no es semigrupo es

$K = \{0, 2, 3\}$

No es semigrupo pues no cumple OBI

$2 + 3 = 5 \notin K$

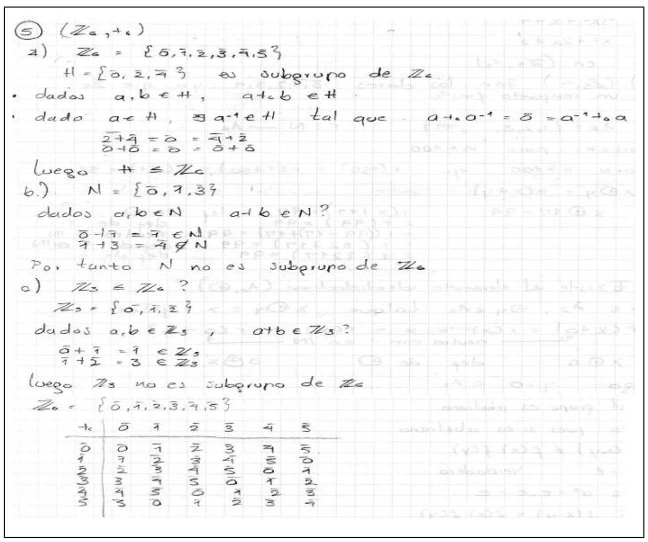
c) $\mathbb{Z}_3$ NO es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ pues

$\mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6$ ya que sus clases residuales son diferentes.

d)

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.80: p5M2



5) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

a) $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

- dados $a, b \in H$, $a +_6 b \in H$
- dado $a \in H$, $\exists a^{-1} \in H$ tal que $a +_6 a^{-1} = \bar{0} = a^{-1} +_6 a$

$\bar{2} + \bar{4} = \bar{0} = \bar{4} + \bar{2}$

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}$

Luego $H \leq \mathbb{Z}_6$

b.) $N = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}\}$

dados $a, b \in N$ $\quad a+b \in N$?

$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in N$

$\bar{1} + \bar{3} = \bar{4} \notin N$

Por tanto N no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

c) $\mathbb{Z}_3 \leq \mathbb{Z}_6$?

$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

dados $a, b \in \mathbb{Z}_3$, $\quad a+b \in \mathbb{Z}_3$?

$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_3$

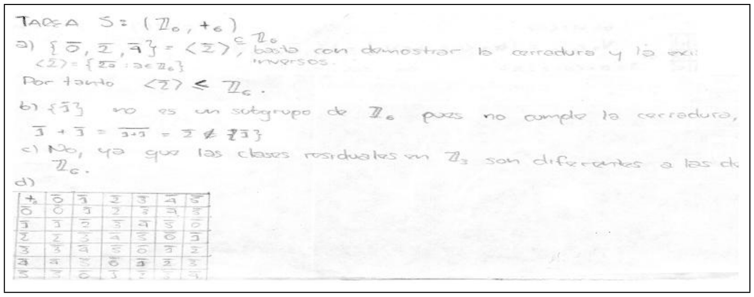
$\bar{1} + \bar{2} = 3 \in \mathbb{Z}_3$

Luego $\mathbb{Z}_3$ no es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$+_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Figura A.81: p5M3


TAREA 5: $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

a) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{2} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_6$, basta con demostrar la cerradura y la exi. inversos.

$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{2a} : a \in \mathbb{Z}_6\}$

Por tanto $\langle \bar{2} \rangle \leq \mathbb{Z}_6$.

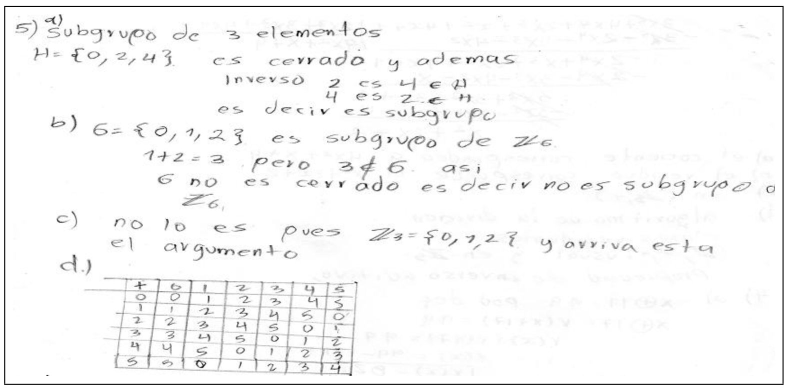
b) $\{\bar{1}\}$ no es un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$ pues no cumple la cerradura, $\bar{1} + \bar{1} = \overline{1+1} = \bar{2} \notin \{\bar{1}\}$

c) No, ya que las clases residuales en $\mathbb{Z}_3$ son diferentes a las de $\mathbb{Z}_6$.

d)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Figura A.82: p5M4


5) a) Subgrupo de 3 elementos

$H = \{0, 2, 4\}$ es cerrado y ademas
inverso 2 es $4 \in H$
4 es $2 \in H$
es decir es subgrupo

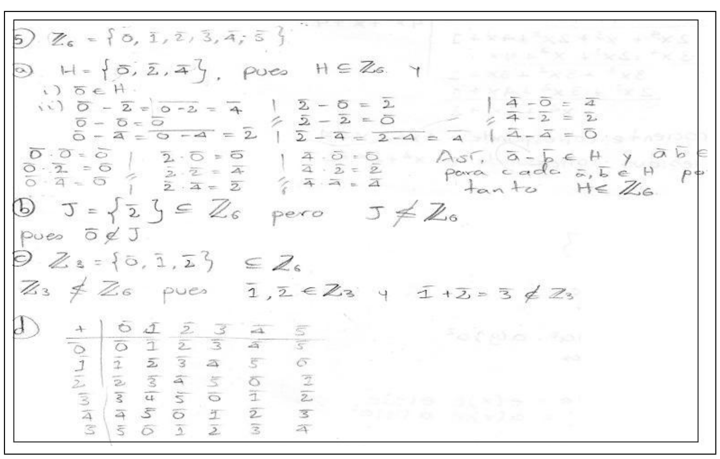
b) $G = \{0, 1, 2\}$ es subgrupo de $\mathbb{Z}_6$.
$1+2=3$ pero $3 \notin G$ asi
G no es cerrado es decir no es subgrupo o $\mathbb{Z}_6$.

c) no lo es pues $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ y arriva esta el argumento

d.)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Figura A.83: p5M5


5) $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

a) $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$, pues $H \subseteq \mathbb{Z}_6$ y

i) $\bar{0} \in H$

ii) $\bar{0} - \bar{2} = \overline{0-2} = \bar{4}$ | $\bar{2} - \bar{0} = \bar{2}$ | $\bar{4} - \bar{0} = \bar{4}$

$\bar{0} - \bar{0} = \bar{0}$ | $\bar{2} - \bar{2} = \bar{0}$ | $\bar{4} - \bar{2} = \bar{2}$

$\bar{0} - \bar{4} = \overline{0-4} = \bar{2}$ | $\bar{2} - \bar{4} = \overline{2-4} = \bar{4}$ | $\bar{4} - \bar{4} = \bar{0}$

$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ | $\bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ | $\bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{0}$

$\bar{0} \cdot \bar{2} = \bar{0}$ | $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ | $\bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{2}$

$\bar{0} \cdot \bar{4} = \bar{0}$ | $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{2}$ | $\bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{4}$

Así, $\bar{a} - \bar{b} \in H$ y $\bar{a}\bar{b} \in$ para cada $\bar{a}, \bar{b} \in H$ por tanto $H \leq \mathbb{Z}_6$

b) $J = \{\bar{2}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ pero $J \not\leq \mathbb{Z}_6$
pues $\bar{0} \notin J$

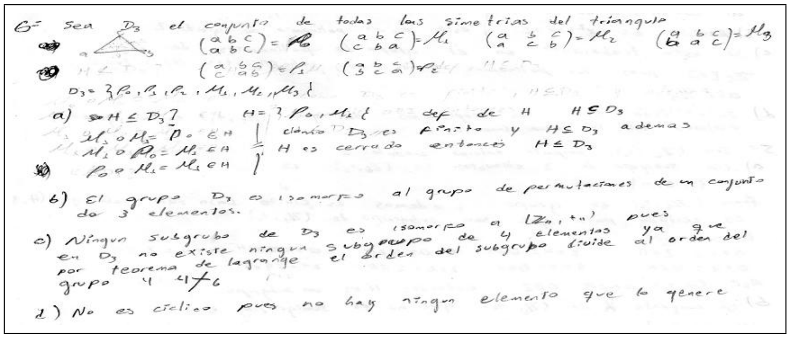
c) $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_3 \not\leq \mathbb{Z}_6$ pues $\bar{1}, \bar{2} \in \mathbb{Z}_3$ y $\bar{1} + \bar{2} = \bar{3} \notin \mathbb{Z}_3$

d)

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Figura A.84: p5M6



6- Sea D_3 el conjunto de todas las simetrias del triangulo

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = P_0$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = M_1$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = M_2$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = M_3$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = P_1$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = P_2$

$D_3 = \{P_0, P_1, P_2, M_1, M_2, M_3\}$

a) $H \leq D_3$? $H = \{P_0, M_1\}$ def de H $H \subseteq D_3$

$M_1 \circ M_1 = P_0 \in H$ | dado D3 es finito y $H \subseteq D_3$ ademas

$M_1 \circ P_0 = M_1 \in H$ | H es cerrado entonces $H \leq D_3$

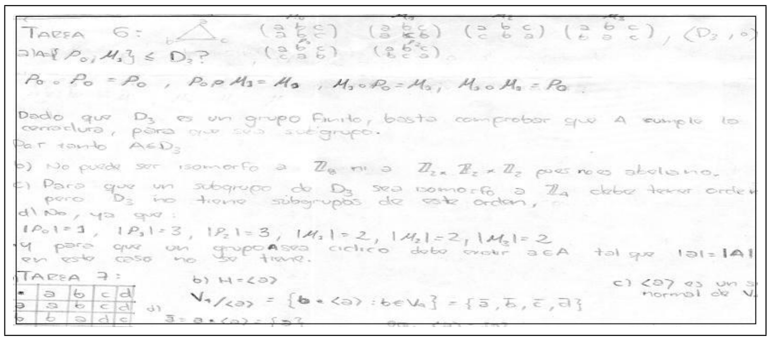
$P_0 \circ M_1 = M_1 \in H$ |

b) El grupo D_3 es isomorfo al grupo de permutaciones de un conjunto de 3 elementos.

c) Ningun subgrubo de D_3 es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ pues en D_3 no existe ningun subgrupo de 4 elementos ya que por teorema de lagrange el orden del subgrupo divide al orden del grupo y $4 \nmid 6$

d) No es ciclico pues no hay ningun elemento que lo genere

Figura A.85: p6M2



TAREA 6: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $(D_3, \circ)$

a) $A = \{P_0, M_3\} \leq D_3$? $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$P_0 \circ P_0 = P_0$, $P_0 \circ M_3 = M_3$, $M_3 \circ P_0 = M_3$, $M_3 \circ M_3 = P_0$.

Dado que D_3 es un grupo finito, basta comprobar que A cumple la cerradura, para que sea subgrupo.

Por tanto $A \leq D_3$

b) No puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ ni a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pues no es abeliano.

c) Para que un subgrupo de D_3 sea isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ debe tener orden pero D_3 no tiene subgrupos de este orden,

d) No, ya que:

$|P_0| = 1$, $|P_1| = 3$, $|P_2| = 3$, $|M_1| = 2$, $|M_2| = 2$, $|M_3| = 2$

y para que un grupo A sea ciclico debe existir $a \in A$ tal que $|a| = |A|$ en este caso no se tiene.

TAREA 7:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c

b) $H = \langle a \rangle$

$V_4/\langle a \rangle = \{b * \langle a \rangle : b \in V_4\} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$

d) $\bar{a} = a * \langle a \rangle = \{a\}$

c) $\langle a \rangle$ es un s[illegible] normal de V[illegible]

Figura A.86: p6M4

7) V-4 de Klein $a^2 = b^2 = c^2 = e$

a)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $H = \langle a \rangle = \{e, a\}$

$V/H = \bar{e} = H$, $\bar{b} = \{b, c\}$

Así $V/H = \{\bar{e}, \bar{b}\}$

c) los subgrupos son cíclicos, es decir que son generados por un elemento

d) $bH = \bar{b} = \{b, c\}$

Figura A.87: p7M1

7= Sea V-4-Klein $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e$

a)

$\cdot$	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Figura A.88: p7M2

7) $a^2 = b^2 = c^2 = e$ V-4 de Klein

a)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $\langle a \rangle = \{e, a\} = H$

$H \trianglelefteq V_4$?

Como $|V_4 : H| = 2$ entonces $H \trianglelefteq V_4$

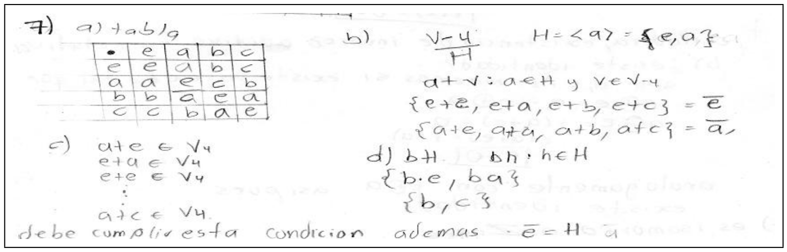
$V_4/H =$

$e \cdot H = e \cdot \{e, a\} = \{e, a\} = \bar{a}$
$b\,H = b \cdot \{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

c) el subgrupo H es un grupo normal de V_4, abeliano.

d) $bH = b\,\{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

Figura A.89: p7M3



7) a) tabla

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	a	e	a
c	c	b	a	e

b) $\frac{V-4}{H}$ $H = \langle a \rangle = \{e, a\}$

$a + v : a \in H$ y $v \in V-4$

$\{e+e, e+a, e+b, e+c\} = \bar{e}$

$\{a+e, a+a, a+b, a+c\} = \bar{a},$

c) $a+e \in V_4$

$e+a \in V_4$

$e+e \in V_4$

$\vdots$

$a+c \in V_4$

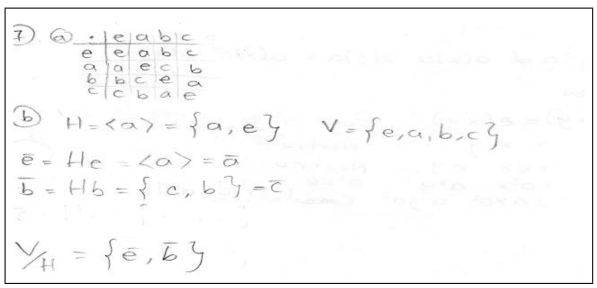
d) bH $bh : h \in H$

$\{b \cdot e, ba\}$

$\{b, c\}$

debe cumplir esta condicion ademas $\bar{e} = H$

Figura A.90: p7M5



7) a)

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

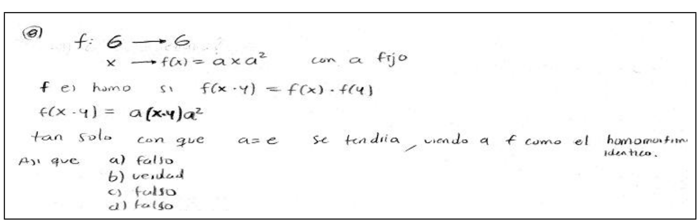
b) $H = \langle a \rangle = \{a, e\}$ $V = \{e, a, b, c\}$

$\bar{e} = He = \langle a \rangle = \bar{a}$

$\bar{b} = Hb = \{c, b\} = \bar{c}$

$V/_H = \{\bar{e}, \bar{b}\}$

Figura A.91: p7M6



8) $f: G \longrightarrow G$

$x \longrightarrow f(x) = a \times a^2$ con a fijo

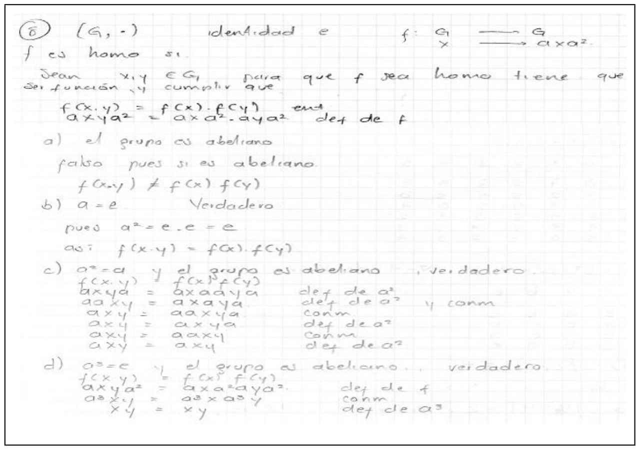
f es homo si $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x \cdot y) = a(x \cdot y)a^2$

tan solo con que $a = e$ se tendria, viendo a f como el homomorfismo identico.

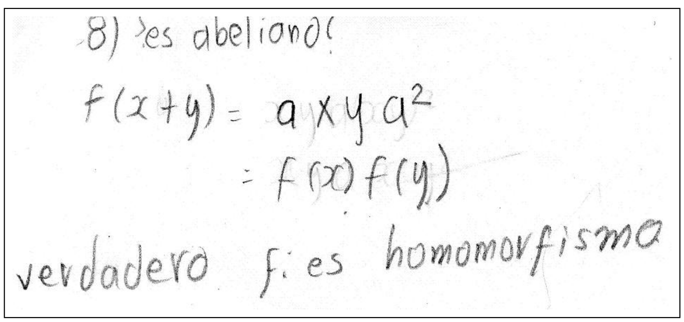
Asi que a) falso
b) verdad
c) falso
d) falso

Figura A.92: p8M1



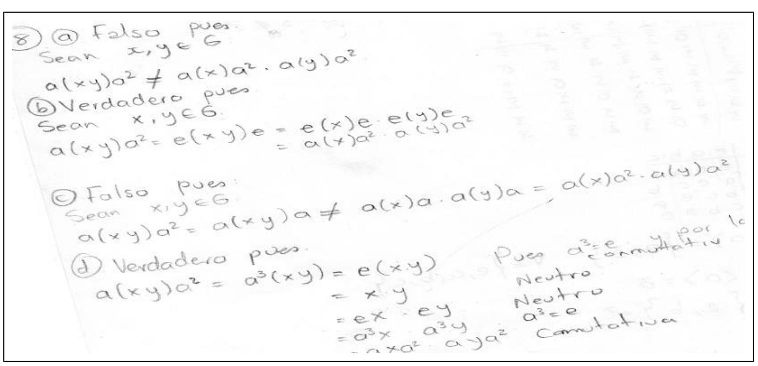
8) $(G, \cdot)$ identidad e $f: G \longrightarrow G$, $x \longrightarrow axa^2$.
f es homo si.
Sean $x, y \in G$ para que f sea homo tiene que ser función y cumplir que
$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ ent
$axya^2 = axa^2 \cdot aya^2$ def de f
a) el grupo es abeliano
falso pues si es abeliano
$f(x \cdot y) \neq f(x) f(y)$
b) $a = e$ Verdadero
pues $a^2 = e \cdot e = e$
así $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano, verdadero.
$f(x \cdot y) \stackrel{?}{=} f(x) f(y)$
$axya = axaaya$ def de a^2
$aaxy = axaya$ def de a^2 y conm
$axy = aaxya$ conm
$axy = axya$ def de a^2
$axy = aaxy$ conm
$axy = axy$ def de a^2
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano, verdadero.
$f(xy) \stackrel{?}{=} f(x) f(y)$
$axya^2 = axa^2aya^2$ def de f
$a^3xy = a^3xa^3y$ conm
$xy = xy$ def de a^3

Figura A.93: p8M3



8) ¿es abeliano?
$f(x+y) = axya^2$
$= f(x) f(y)$
verdadero f: es homomorfismo

Figura A.94: p8M5



8) a) Falso pues
Sean $x, y \in G$
$a(xy)a^2 \neq a(x)a^2 \cdot a(y)a^2$
b) Verdadero pues
Sean $x, y \in G$
$a(xy)a^2 = e(xy)e = e(x)e \cdot e(y)e$
$= a(x)a^2 \cdot a(y)a^2$
c) Falso pues
Sean $x, y \in G$
$a(xy)a^2 = a(xy)a \neq a(x)a \cdot a(y)a = a(x)a^2 \cdot a(y)a^2$
d) Verdadero pues
$a(xy)a^2 = a^3(xy) = e(xy)$ Pues $a^3 = e$ y por la conmutativ
$= xy$ Neutro
$= ex \cdot ey$ Neutro
$= a^3x \cdot a^3y$ $a^3 = e$
$= axa^2 \cdot aya^2$ Conmutativa

Figura A.95: p8M6

A.6. Cuestionario final *CDM-Grupo*

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Matemáticas y Estadística

Cuestionario CDM - Grupo

Nombre: ______________________________
Semestre: ______________________________
Correo personal: ______________________________
Asignatura: ______________________________
Programa académico: ______________________________

Estimado joven, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar con el desarrollo de estas tareas que corresponden a la comprensión que usted tiene del objeto grupo y de sus propiedades. Esta evaluación es confidencial y proporcionará información importante para el programa en la asignatura de Teoría de Grupos. Nuevamente, agradecemos su ayuda y colaboración al responder en forma clara cada una de las tareas que se le proponen; de igual forma, con las observaciones respecto a cada uno de los temas que se pretenden evaluar. Puede indicar al final de cada tarea si tiene algún tipo de problema con la comprensión del mismo. Por favor trate en lo posible de darnos a conocer sus conocimientos y sea organizado al dar respuesta a cada tarea. Esta prueba tiene una duración de dos horas.

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique
b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$? Justifique
d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.

a) Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique
b) Que elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique
c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico? Justifique
d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b, c en función de sus raíces x_1, x_2? Justifique

TAREA 3. Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.
a) Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique
b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique
c) El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique
d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

TAREA 4. Un subgrupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si mueve todos los $n-$ símbolos, excepto la identidad.
a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique
b) Encuentre el orden de cada elemento del subgrupo anterior. Justifique
c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique
d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

TAREA 5. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(\mathbb{Z}_5,+_5)$.
a) ¿El cociente corresponde a? Justifique
b) ¿El residuo corresponde a? Justifique
c) ¿En que grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique
d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

TAREA 6. Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función $r:\mathbb{N}\longrightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.
Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \bigoplus y = r(x+y)$.
a) Solucione $x \bigoplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.
b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
c) ¿A que grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\bigoplus)$? Justifique
d) ¿Qué $z-$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\bigoplus)$? Justifique

TAREA 7. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f: G\longrightarrow G$ tal que $x\longrightarrow axa^2$ para cada $x\in G$ y para un elemento fijo $a\in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).
a) El grupo es Abeliano.
b) $a = e$
c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.
d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 8. Sea $G = \langle A,B\rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Y $B=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de G. Justifique
b) ¿G es grupo abeliano? Justifique
c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique
d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

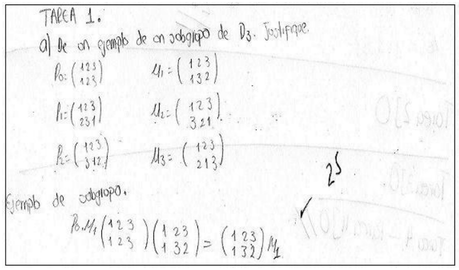


Figura A.96: f1aLM1

TAREA 9. Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$
a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique
b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique
c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique
d) ¿En el conjunto $\mathbb{R}^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad? Justifique

TAREA 10. Sea el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo con 3 elementos. Justifique
b) Escriba un subconjunto de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no sea subgrupo. Justifique
c) ¿Es $\mathbb{Z}_3$ un subgrupo de $\mathbb{Z}_6$? Justifique
d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$

TAREA 11. Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.
b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique
c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

A.7. Respuesta de los estudiantes de formación matemática al cuestionario final *CDM-Grupo*

Se presentan a continuación, las respuestas de los estudiantes de formación matemática al cuestionario final *CDM-Grupo*; éstas respuesta aparecen como por ejemplo: f1aLM.3 que es la respuesta al ítem 1a por el estudiante de Licenciatura (LM): el primer grupo son los estudiantes del LM1 a LM16; el segundo grupo de licenciados del LM17-LM32 y los estudiantes de matemáticas se representan por M1, M2, M3 y M4.

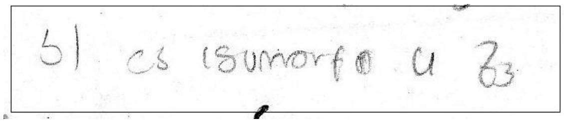

5) es isomorfo a Z_3

Figura A.97: f1bLM5

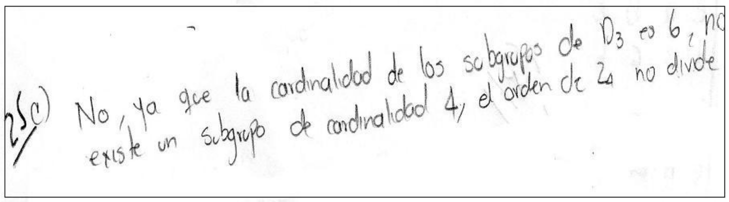

2.5 c) No, ya que la cardinalidad de los subgrupos de D_3 es 6, no existe un subgrupo de cardinalidad 4, el orden de Z_4 no divide

Figura A.98: f1cLM7

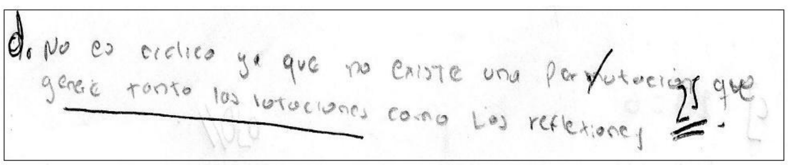

d. No es cíclico ya que no existe una permutación que genere tanto las rotaciones como las reflexiones
2.5

Figura A.99: f1dLM14

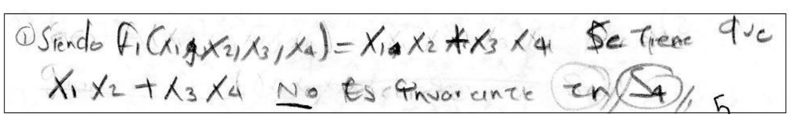

① Siendo $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ se tiene que $x_1 x_2 + x_3 x_4$ No es invariante en S_4 // 5

Figura A.100: f2aLM32

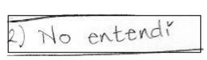

2) No entendí

Figura A.101: f2bLM3

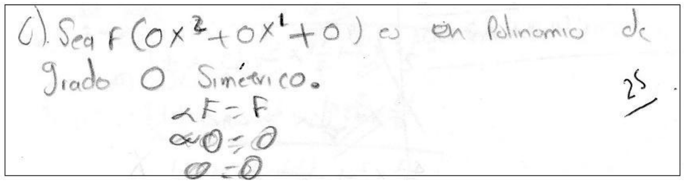

c) Sea $f(0x^2+0x^1+0)$ es un Polinomio de grado 0 Simétrico.
$\alpha F = F$
$\alpha 0 = 0$
$0 = 0$
25

Figura A.102: f2cLM32

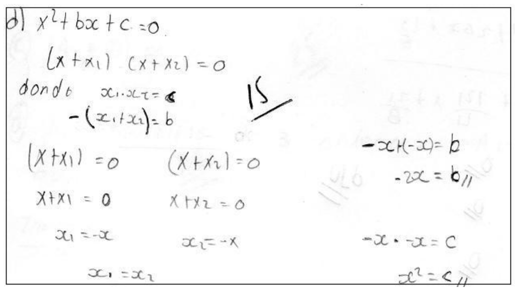

d) $x^2+bx+c=0$
$(x+x_1)(x+x_2)=0$
donde $x_1 \cdot x_2 = c$
$-(x_1+x_2)=b$
15
$(x+x_1)=0$ $(x+x_2)=0$ $-x+(-x)=b$
$x+x_1=0$ $x+x_2=0$ $-2x=b$
$x_1=-x$ $x_2=-x$ $-x\cdot -x = c$
$x_1=x_2$ $x^2=c$

Figura A.103: f2dLM30

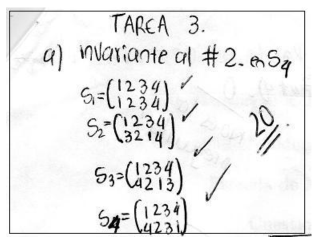

TAREA 3.
a) invariante al #2. en S_4
$S_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$
$S_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$
$S_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$
$S_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$
20

Figura A.104: f3aLM16

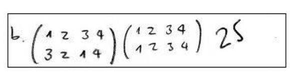

b. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 25

Figura A.105: f3bLM10

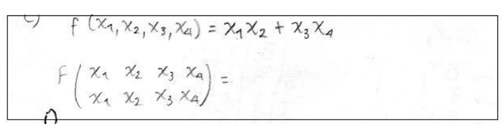

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$
$f\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix} =$
0

Figura A.106: f3cM3

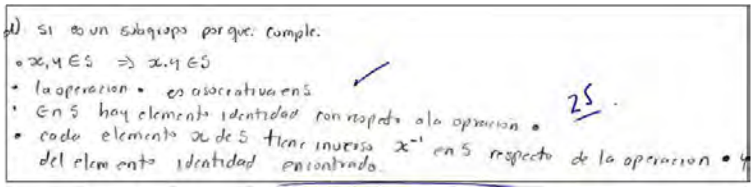


Figura A.107: f3dLM8

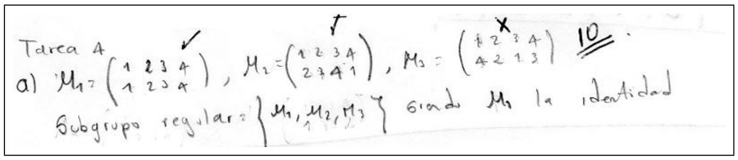


Figura A.108: f4aLM15

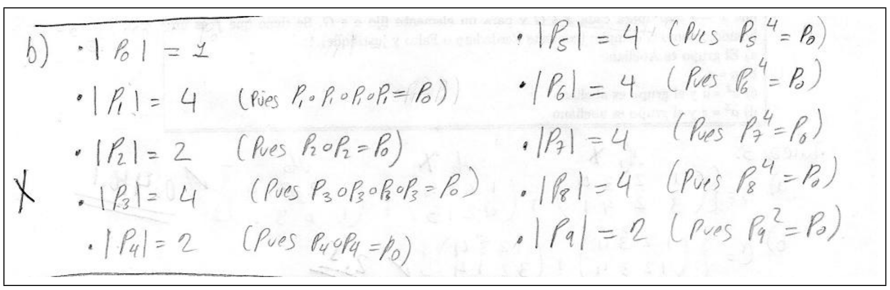


Figura A.109: f4bM4

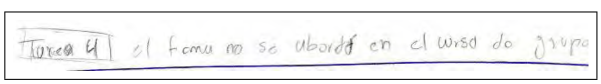


Figura A.110: f4cLM5

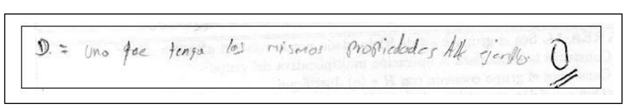


Figura A.111: f4dLM17

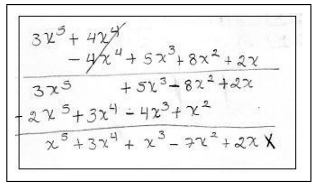


Figura A.112: f5aLM28

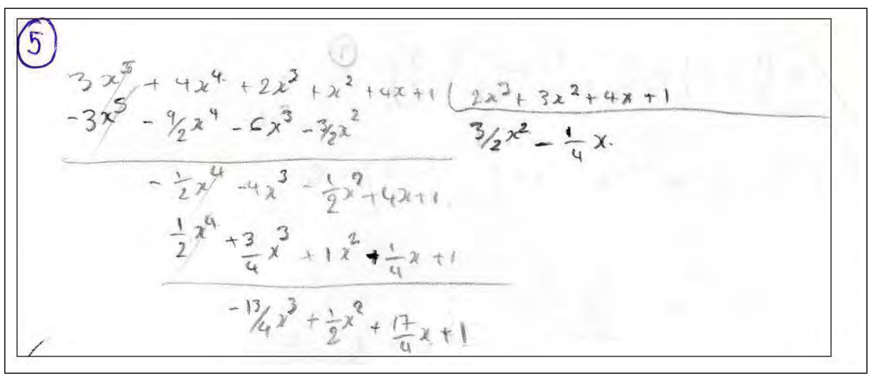


Figura A.113: f5bLM14

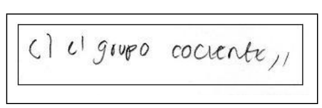


Figura A.114: f5cLM30

Referencias

Abel, N. (1824). Mémoire sur les equations algébriques, oul' on demontres l'impossibilité de la resolution de l'aquation générales du cinquiéne degré. J. reine angew. Math. 4, 131-156, 1829. Reprinted as Ch. 25 In Abel, N. H. Oeuvres complètes, tome 1. J. Gabay, (pp. 478-507), 1992.

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE" .(Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Arias, F. (1999). *El proyecto de Investigación: Guía para su elaboración.* (3a. ed.). Caracas: Episteme.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in collegiate mathematics education*, 2, 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, M., Morics, S. & Oktac, A. (1997). Development of students understanding of cosets, normality and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 241-309.

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J. & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journalof Computers for Mathematical Learning, 3*(1), 13-43.

Ayres, F. & Jaisingh, R. (2005). *Theory and Problems of Abstract Algebra.*(2a. ed.). Schaum's outline series. McGraw Hill: New York.

Azcárate, P. (1995). El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria. Tesis doctoral (inédita). Universidad de Cádiz.

Azcárate, C. (1996). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. En Bishop, A., Clements, A., Keitel, CH., Kilpatric, J. & Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publischer.

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 135-149.

Bachelard, G. (1983).*La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI. Trad. Cast. 1948. (14a. ed., 1987).

Badillo, E., Azcárate, C. & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos, f”(a), f’(x), en profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Ball, D. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball, D. & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners’ mathematical futures. Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany, March 1 - 4, 2009.

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator.* 14-22.

Ball, D., Lewis, J. & Thames, M. (2008). Making mathematics work in school. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph 14, A Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views.

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4a. ed.). New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barallobres, G. (2001). Contribución en el Foro Indimat realizada el 28 de Nov 2001. Http://listserv.rediris.es/archives/indimat.html.

Bedoya, E. (2002). Formación de profesores de matemáticas: Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Graficadoras. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: the SOLO taxonomy* (structureof the observed learning outcome). New York: Academic Press.

Bishop, E. Schizophrenia in contemporary mathematics. In Murray Rosenblatt, editor, *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, vol. 39 of Conte, pages 1(32). American Mathematical Society, 1973.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. (eds.). (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brewer, J., & Hunter, A. (1989). *Multimethod research: A synthesis of styles.* Newbury Park, CA: Sage.

Brousseau G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.*Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Buchthal, D. (1977). Operative and nonoperative group definitions. *Mathematics Teacher, 70*(3), 262-263.

Bedoya, E., Rico, L. & Segovia, I. (2000). Introducción a la función Cuadrática. Granada: Universidad de Granada.

Bolívar, A. (1993). Conocimiento didáctico del contenido y formación del profesorado: El Programa de L. Shulman. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,*(16), 113-124.

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroup. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 187 - 239.

Buchthal, D. C. (1977). *Operative and nonoperative group definitions.* Mathematics Teacher 70(3), 262-263.

Caicedo, J.F. (2003). *Introducción a la Teoría de Grupo.* Publicación de la Universidad Nacional de Colombia. Santa Fé de Bogotá.

Campos, A. (2007). *Huellas en los encuentros de Geometría y Aritmética.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Campbell, J. L. D. (1992). *The nature and origins of mathematical skills.* Elsevier Science Publisher.

Cardeñoso, J., Flores, P. & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.

Carroll. J. B. (1963). A Model of School Learning. *Teachers College Record.*

Cohen, L. Manion, L & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education.* (5a. ed.). London: Routledge Falmen. Taylor & Francis Gruop.

Chavarría, S. L. (2014). De las ecuaciones a la Teoría de Grupos, algunos obstáculos epistemológicos. Tesis de pregrado. Licenciatura en Matemáticas y Física. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Santiago de Cali. Cali.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Ed. Aique, 1997.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par unne approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Clements, M. (1983). The question of how spatial ability is defined, and its relevante to mathematics education.*Zentralblatt fur didactic der Mathematik, 15,* 8-20.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. & Ordóñez. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 25*(2), 151-186.

Cornu, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. These de 3eme cycle, Mathématique Grenoble: Université de Grenoble.

Crocket, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. These de 3eme cycle, Mathématiques Grenoble: Université de Grenoble.

Dávila, R. G. (2002). El desarrollo del álgebra moderna. Parte I: El álgebra en la antigüedad. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 1*(3), 5-21.

Dávila, R. G. (2003a). El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(1), 27-37.

Dávila, R. G. (2003b). El desarrollo del álgebra moderna. Parte III: El surgimiento del álgebra abstracta. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(3), 38-78.

D'Amore, Font & Godino. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, XXVIII,*(2), 49-77.

De la Peña, J. A. (2011). Las revoluciones de Galois. *Miscelánea Matemática. SMM, 53,* 39-53. Recuperado de `http://www.miscelaneamatematica.org/Misc53/5304.pdf`.

Descartes, R. (1596). The Geometry of René Descartes. Traslated from the French and Latin by David Eugene Smith and Murcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptica. Los meteoros. La Geometría.* Traducido por Manuel García Morente. Madrid: Colección Austral-Espasa Calpe.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (Ed.), *Mathematical Knowledge: It's Growth Throught Teaching.* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En: Tall, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking.*

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2).

Dubinsky, E. (1997). *On Students' Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups,* International Conference on Technology in College Mathematics: Chicago.

Dubinnsky, E., Leron, U. (1994). *Learning Abstract Algebra with ISETL.* New York: Springer-Verlang.

Dubinsky, E., Leron, U., Dautermann, J., & Zazkis, R. (1994) On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 267-305.

Duval, R. (1996). ¿Quel Cognitif Retenir en didactiques des Mathématiques ? *RDM, 16,*(3), 349-382.

Edwardsw, D. & M ercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom.* Londonres, Methuen.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. & McDonald, M. (2005). *Advanced mathematical thinking. Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

Elbanz, F. (1983). Teacher thinking. A study of practical knowledge. London: Croom-Helm.

Ellerton, N. (1985) *The Development of Abstract Reasoning - Results from a large scale mathematics study in Australia and New Zealand.*

Elmore, R. (1992). Why Restructuring Alone Won't Improve Teaching. *Educational Leadership, 49* (2), 44-48.

English, L., Bartolini-busi, M., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education.*London: Lawrence Erlbaum Ass.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing.

Fischbein, E. (1975). *The intuituve sources of probability thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel.

Fischbein, E. (1978). *Intuition and Mathematical Education.* Proc. 2nd Int. Conf. for the Psych. of Math. Educ. 197-202.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,*(69), 33-52.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,*(82), 97-124. The final publication is available at www.springerlink.com.

Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN,*(26), 9-25.

Franke, L. M. K., & Battey, D.(2007) Understanding teaching and clasroom practice in mathematics. In F.K. Lester, Jr. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Frege, G. (1998a). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), Ensayos de semántica y filosofía de la lógica (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1998b). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*(pp. 123-139). Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Riedel, P.C.

Gallian, J.(1990). *Contemporary Abstract Algebra.* (8a. Ed.) USA: Brooks/cole.

Gairín, S. (2001). *Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind. LLULL, 24,* 649-684.

García, M.(1992). *Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido.* Ponencia presentada al Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago, 6-10 de julio, 1992.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1*(52), 7-33.

Glaser, B. & Strauss, A. (1967).*The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research.* New York: Aldine Publishing Company.

Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la Matemática. En A. Gutiérrez (Ed.). *Área de Conocimiento, Didáctica de la Matemática* (pp. 105-148). Madrid: Síntesis.

Godino, J. (1996). *Mathematical concepts, their meaning, and understanding.* En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.). Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,*(20), 13-31.

Godino, J.D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Brasil: XIII CIAEM-IACME, Recife.

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1/2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII,*(2), 221-252.

Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2005). A semiotic analysis of combinatorial problems and its resolution by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 3-36.

Godino, J., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J., Font, V. & Wilhelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,*(38), 25-49.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J. & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, . Haser & M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J., Rivas, M. & Castro, W. (2008). *Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution.* , México: ICME 11, Topic Study Group 27, Monterrey.

Godino, J., Castro G., W., Aké, L. & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento algebraico Elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511.

Gómez, P. (s.f.) *Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. España.

Green, D. (1983). *A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years.* En D. R. Grey et al. (Eds.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics (2), (pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

Grossman, P., Wilson, S. & Shulman, L. (1989). Teachers of Substance: Subject Matter Knowledge for Teaching. En M. Reynolds (Ed.). *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 23-36). New York: Pergamon Press.

Grossman, P. (1990). The Making of a Teacher. *Teacher Knowledge and Teacher Education.* New York: Columbia University, Teachers College Press.

Guacaneme, E., Bautista, M. & Salazar, C. (2010). El contexto normativo de formulación de los programas de formación inicial de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(1), 62-77. ISSN: 2215-8421.

Hadamard, J. (1945) The psychology of invention in the mathematical field. *Princeton University Press.* Princeton N. J.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). *Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Hart, K.(1981). *Children's understanding of mathematics* (pp. 11-16). London: John Murray.

Hart, L., Smith, S., Swars, S., & Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education. *Journal of Mixed Methods Research*(30), (pp. 26-41). doi:10.1177/1558689808325771.

Hart, E. (1994). Analysis of the proof writing performance of expert and novice students in elementary group theory. In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results.*

Hazzan, O. (1996). On topological properties of functions. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 39-42.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.

Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange. *For the Learning of Mathematics, 16*(1), 23-26.

Herstein, I. N. (1986). *Abstract Algebra.* (3a. Ed.). New York: Wiley.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Hill, H., Ball, D., Sleep, L. & Lewis, J. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? In F. Lester (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Education* (2a. Ed.) (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishi.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*, 11-30.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos (1971).

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), Proc. 3rd Conf. for European *Research in Mathematics Education.* Bellaria: ERME.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). *Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result.* Submitted to 30th Conf. of the Int. Group for the Psycholog of Mathematics Education. Prague: PME.

Hoffman, L. M. (1989). *The science of patterns: A practical philosophy of Mathematics Education.* Washington: Paper of the MIT and Joint polycy Board Mathematics.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1955). *De la logique de l 'enfant á la logique de l'adolescent.* París: Presses Universitaires de France.

Ivorra, C (2011). *Las fórmulas de Cardano-Ferrari*. Disponible en: http://www.uv.es/ ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf.

Jiménez, E. A., Leguizamón, R. J. F. & Díaz, M. M. A. (2011). Propuesta de modelo pedagógico para formar licenciados en matemáticas. *Praxis & Saber* ISSN: 2216-0159. Tunja: Impresiones Y Publicaciones Uptc.

Johnson, B., & Turner, L. (2003). Data collection strategies in mixed methods research. In A. Tashakkori, and C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 297-319). Thousand Oaks, CA: Sage.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14-26. doi:10.3102/0013189X033007014.

Johnson, R. B. & Onwuegbuzie, A. J. (2006). The Validity Issue in Mixed Research. *Research in the Schools , 13*(1), 48-63.

Johnson, R. B., & Turner, L. A. (2003). Data collection strategies in mixed methods research. In A.Tashakkori, and C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 297-319). Thousand Oaks, CA: Sage.

Kaput, J. (1987). Representation and Mathematics. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in mathematics learning and problem solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. *In LESTER, F. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Charlotte.* N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM,(2), 707-762.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Leron, U. & Dubinsky, E.(1994). An Abstract Algebra story. *The American Mathematical Monthly, 102*(3), 227-242.

Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1994). Students' conceptions and misconceptions of group isomorphism. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 153-174.

Lesh, R. A. (1976). The influence of two types of advanced organizers on an instructional unit about finite groups. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(2), 87-91.

Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, (pp. 157-223). NC: Information Age Pub.

Lezama, O. (2012). *Teoría de Grupos*. Material de trabajo. Universidad Nacional de Colombia. Dirección en internet: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001007.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.) *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática*. Que formação? (pp. 47-82). Secção de Educação Matemática. SPCE: Lisboa, Portugal.

Llinares, S. (1997). Aprendizaje del profesor de matemáticas y reforma. *Actas ProfMat97* (pp. 37-43). Figueira da Foz. APM: Lisboa, Portugal.

López, R. J. (1999). *Conocimiento docente y práctica educativa. El cambio hacia una enseñanza centrada en el aprendizaje*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learns. En Gutiérrez, A., Boero, P. (Eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Ratterdam, 429-460.

Lichtenberg, D. R. (1981). A group whose elements are functions. *Mathematics Teacher, 74*(7), 521-523.

Macdonald, I. D. (1976). Modern algebra in the nineteenth century. *Australian Mathematics Teacher, 32*(1), 33-38.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras & L., Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *Actas del XV Simposio de la SEIEM,* Ciudad Real, España. 429-438.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente*. España: Labor S.A.

Mason, J. (1996) *Qualitative researching*. London: Sage Publications.

Mejía, M. F. (2004). Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas. Tesis de Licenciatura En Matemáticas. Universidad del Valle, Cali.

Millman, J. & Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). London: Macmillan.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide. (2a. Ed.).

Muñoz, J. (2011). *Historias de Matemáticas, Abel y la imposibilidad de resolver la quíntica por radicales*. Vitória, Brasil: Programa GEPEMEM.

Nicholson, J. (1993). The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia de la Mathemática,*(20), 68-88.

Noguera, J. (2004) Modelo de competencias DeSeCo. Universitat Rovirai Virgili Tarragona.

Novotná, J. (2000). *Teacher in the role of a student - a component of teacher training*. In J. Kohnova (Ed.), Proceedings of the International Conference Teachers and Their University Education at the Turn of the Millennium (pp. 28-32). Praha: UK PedF.

Novotná, J., Stehlíková, N. & Hoch, M. (2006). *Structure sense for university algebra*. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlínková, N. (Eds.), Proceedings $30th$. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague: PME (4), 24-256.

Novotná, J. & Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 93-104.

Onwuegbuzie, A., & Johnson, R. (2004). *Validity issues in mixed methods research.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in dolescentes and young adults.* Tesis Doctoral sin publicar. University of Leed.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* New York: Basic Books.

Patton, M. (1980). *Qualitative Evaluation Methods.* Beverly Hills, CA: Sage.

Pedersen, J. (1972). Sneaking up on a group. *Two Year College Mathematics Journal, 3*(1), 9-12.

Petricig, M. (1988). Combining individualized instruction with the traditional lecture method in a college algebra course. *Mathematics Teacher 81,* 385-387.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 257-315. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Piaget, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Paidós: Buenos Aires.

Piaget, J. & García, R. (2008). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (11 Ed.). Madrid: Siglo XXI editores.

Pierce, R. & Stacey, K. (2001). *A framework for algebraic insight.* In J. Bobis, B. Perry, y M. Mitchelmore (Eds.), Numeracy and Beyond. Proceedings of the 24th *Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,*(2), 418-425.

Pietrásheñ, M. I, Tŕıfonov, I. D. (2000). *Teoría de Grupos. Aplicación a la mecánica cuántica.* Malishenko, V. O., Sinche V. E., (trad.); Marín R., D. (Ed.). Editorial URSS.

Pérez, A. (s.f.). *Carl Friedrich Gauss (1777-1855). El príncipe de los matemáticos.* IES Salvador Dalí. Madrid. Recuperado de: http://platea.pntic.mec.es/ aperez4/html/sigloxix/Carl

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*(pp. 257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral. Universidad de Granada: España.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México, 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educaçao Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *REVEMAT* Florianópolis (SC), Edición especial (dez), 1-47.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT, 8*(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2013). Exploring the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge required to teach the derivative. In Lindmeier, A.M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*. Kiel, Germany: PME.

Pino-Fan, L. & Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pinto S. & González A. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 12*(2).

Planas, N. & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 105-127.

Pochulu, M. & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Poincaré, H. (1913). *Derniéres pensées.* Paris: Edition Ernest Flammarion.

Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future,* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 61-94. Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8.

Puig (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Freudenthal, H.)* (2a. Ed.) Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. (Introducción y nota a la segunda edición. El método. Fracciones. Razón y proporcionalidad. El lenguaje algebraico).

Quadling, D. (1978). A contorted isomorphism. *Mathematics Teaching,*(85), 48-49.

Ramos, A. & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*

Educativa - RELIME, 11(2), 233-265.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ICE - Horsori de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Rivero, M. F. (1999). Grupos Cristalográficos Planos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vi,*(1), 141-156.

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991).Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer.

Rojas, N., Flores, P. & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática,*(4), 47-64.

Rondero, C. & Font, V. (2014) Complejidad del objeto matemático y Articulación: El caso de la media aritmética.(in press.)

Rotman, J. (1995). Graduate Texts in Mathematics. *An introduction to the Theory of Groups.* (4a. Ed.). Springer Verlang.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching.* London: Springer.

Salazar, C. (2009). Teorema Fundamental del Álgebra y sus diferentes demostraciones. Trabajo de grado para optar el título de Matemático. Pontificia Universidad Javeriana.

Sánchez, J. (2011). Historias de Matemáticas. Abel y la imposibilidad de resolver la quíntica” por radicales. *Revista Pensamiento Matemático.*(1), 1-31.

Sánchez, M. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Universidad de Granada. Granada.

Schön, D. (1983). *The reflective Practitioner. How Professional Think in action.* London: Temple Smith.

Schön, D. (1987). *Educating the effective practitioner.* San Francisco: Jossey Bass.

Segovia, A. & Rico L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E.Castro(Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis, 83-104.

Selden, A. & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Sciencies and Mathematics, III,* 453-471.

Sepúlveda, O., (2014). *Conflictos semióticos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, con los conocimientos previos: GCD, divisibilidad e inducción matemática, necesarios para la comprensión del objeto matemático Grupo.* Trabajo de ascenso en el escalafón universitario: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (25 Ed.) (pp. 59-80). Washington DC: Mathematical Association of America.

Shoenfeld, A. & Kilpatric, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publisher.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Educational Review, 57,*(1), 1-22.

Shulman, L. & Sykes, G. (1986). A national board for teaching?: In search of a bold standard. Trabajo encargado por la Task Force on Teaching as a Profession, Carnegie Forum on Education and the Economy.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. En Harel, Guershon y Dubinsky, Ed (Eds.), The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy. *Mathematical Association of America, MAA Notes, 25.*

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Silverman, J. & Thompson, P. W. (2008).Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5.

Simmonds, G. (1982). Computer discovery of a theorem of modern algebra. *Mathematicsand Computer Education, 16*(1), 58-61.

Simpson, A. & Stehlíková, N. (2006). Apprehending mathematical structure: A case study of coming to understand a commutative rin. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 347-371.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding [Comprensión relacional y comprensión instrumental]. *Arithmetic Teacher.* Estados Unidos.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F.K.

Stehlíková, N. (2004). *Structural understanding in advanced mathematical thinking.* Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta.

Suárez, M. F. (1994). *Elementos de Álgebra, colección de edición previa.* Santiago de Cali: Centro editorial Universidad del Valle.

Sullivan, P. & Wood, B. (Eds.). (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development, 1.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer A. P.

Tall, D. & Vinner (1981). Concept image and concept definition m mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169. En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 66-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches. Applied Social Research Methods Series, 46. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook ofmixed methods in social and behavioral research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Thompson, P. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 165-208.

Torres, L.(2011). Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Thrash, K. & Walls, G. (1991). A classroom note on understanding the concept of group isomorphism. *Mathematics and Computer Education, 25*(1), 53-55.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.). *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). New York: Springer.

Uribe, A. (2010). Notas sobre prospectiva univerisitaria. *Pensamiento Y Acción, 20,*(17), 13-21.

Uribe, A. & Soto, D. (2007). Historia de la Educación Latinoamericana. Un campo de formación doctoral en Rudecolombia. En *Revista Historia De La Educación Latinoamericana.* ISSN: 0122-7238 Bogotá: Buhos Editores.

Varela, F. (1988) Conocer las ciencias cognitivas: Tendencias y perspectivas. *Cartografía de las ideas actuales.* Barcelona: Gedisa

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los Conocimientos Didáctico - Matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.* Tesis Doctoral, Universitat de Girona, España.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,*(14), 293-305.

Watson, A. & Tall, D. (2002). *Embodied action, effect and symbol in mathematical growth.* Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (4, pp. 369-376). Norwich, UK.

Wilson. S., Shulman, L., & Richert, A. (1987). *"150 different ways" of knowing: Representations of knowledge in teaching.* En J. Calderhead (Ed.), Exploring Teacher Thinking. Londres: Cassell, 104-124.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza editorial.

Woods, T. (2008). *The international Handbook of Mathematics Teacher Education.* Sens publishers Rotherdam.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Zúñiga, R. (1995). *DISQUISITIONES ARITHMETICAE CARL F. GAUSS*. Primera versión castellana (Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia). Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Colombia).

Colombia. Decreto 1295/2010, de 20 de abril, por el cual se reglamenta el registro calificado de que trata la Ley 1188 de 2008 y la oferta y desarrollo de programas académicos de educación superior. Presidente de la República de Colombia, 20 de abril, Bogotá.

Colombia. Decreto 2566/2003, de 10 de septiembre, por el cual se establecen las condiciones mínimas de calidad y demás requisitos para el ofrecimiento y desarrollo de programas académicos de educación superior y se dictan otras disposiciones.

Colombia. Sistema Nacional de Acreditación - CNA. (2013). Lineamientos para la acreditación de programas de pregrado.

Colombia. Ley 30/1992 de 28 de diciembre, por la cual se organiza el servicio público de la Educación Superior. Congreso de la República de Colombia, Bogotá.

Colombia. Ley 115/1994 de 8 de febrero, por la cual se expide la ley general de educación. Congreso de la República de Colombia, Bogotá.

Colombia. Ley 1188/2008 de 25 de abril. por la cual se regula el registro calificado de programas de educación superior y se dictan otras disposiciones. Congreso de la República de Colombia, Bogotá.

Colombia. Resolución 2769/2003 de 13 de noviembre, por la cual se definen las características específicas de calidad para los programas de pregrado en Ciencias Exactas y Naturales. Ministra de Educación Nacional, Bogotá.

Colombia. Resolución 1036/2004 de 22 de abril, por la cual se definen las características específicas de calidad para los programas de pregrado y especialización en Educación. Ministra de Educación Nacional, Bogotá.

Colombia. Resolución 5443/2010 de 30 de junio, por las cual se definen las características específicas de calidad de los programas de formación profesional en educación, en el marco de las condiciones de calidad, y se dictan otras disposiciones. Ministra de Educación Nacional, Bogotá.