Anexos

Anexo 1. Recuento de Clase N° 20

Clase N°:	20
Fecha:	25-04-2017
Curso:	Geometría del Espacio
Profesora:	Carmen Samper
Fragmentos de clase:	1. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$.
	2. Comentarios de la Tarea Extraclase 10 sobre el siguiente ítem: Escribir la prueba de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto externo:** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto externo:** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$.
	3. Abordaje, por grupos, del Problema Principal 10: Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes? En la actividad se pedía un reporte de construcción, exploración, conjetura y su correspondiente demostración

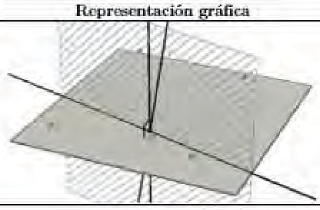
OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Le vamos a seguir un seguimiento a este problema... esto, por cuanto es un problema que no es tan evidente en su solución; es el más abierto que se ha propuesto hasta el momento. Permite introducir el plano mediador.

Fragmento 1

Dentro de los comentarios que hizo, destacó que el ítem 2a, en esencia, alude a que la recta perpendicular a un plano β por un punto C es única; aclaró que este hecho se incluirá en el T. Plano punto interno – recta perpendicular. La profesora comenta cómo teoremas previos son útiles para demostrar otros, hecho que ilustra cómo se va construyendo un sistema teórico; alude lo anterior debido a lo que había estado pasando en las últimas sesiones de clase: en la búsqueda de mostrar cómo un plano es perpendicular a una recta, se demostró el T. Fundamental de la perpendicularidad; y cómo estos dos teoremas permitieron demostrar el T. Plano punto interno – recta perpendicular. De manera específica, la profesora pide al grupo C que comenten su respuesta y justificación a tal ítem 2a; Brayan 1 (miembro de tal grupo) dice que la respuesta es No e inicia su justificación. Alude en primera instancia a la creación de un plano: al suponer que sí existe dicha recta l, se genera el plano $\delta_{l,k}$ por el T. Dos rectas – plano. La profesora valida esa respuesta y dice que es muy importante, para este tipo de demostraciones (en el contexto de la Geometría del Espacio) buscar planos [3:50 C.Pan1]. Hecho esto, la profesora pregunta a la clase qué implica tal construcción; varios aluden a la recta m de intersección entre los dos planos inmersos en la situación. Brayan 1 retoma su justificación; con lo hecho hasta el momento, se tendría $l \perp m$ por C, $k \perp m$ por C por D. Recta perpendicular a un plano; la profesora ayuda en la conclusión de la demostración aludiendo a que tal hecho es contradictorio porque no pueden existir dos rectas perpendiculares a una recta por un mismo punto en un mismo plano; esto gracias a la unicidad que provee el T. Existencia perpendicular punto interior.

OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Norma sobre estrategia para hacer demostraciones en Geometría del Espacio.

Representación gráfica



La profesora termina comentando que en este tipo demostraciones se debe observar cómo las situaciones del espacio se pueden llevar al plano [6:57 C.Pan1]. Vale decir que las demostraciones solo son verbalizadas en sus ideas claves; no se alude a algún formato ni se escucha las palabras Núcleos y Pilares; se enuncian los núcleos más no los pilares verbalmente y se acompaña de una

OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Refuerza la norma del comentario anterior. Estrategia para abordar una demostración en el espacio.

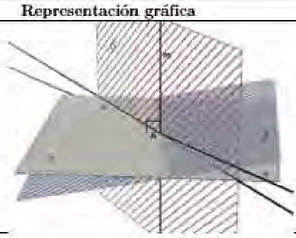
La profesora propone abordar la *Unicidad de plano perpendicular a una recta por punto interno*. Pregunta a los estudiantes cómo abordar esa demostración. José Luis proponen suponer que hay dos planos; la profesora lo parafrasea diciendo que una demostración de unicidad siempre es por contradicción.

Antes de iniciar el proceso de demostración, la profesora recuerda que siempre que vaya a usar el formato *Núcleos y Pilares* para una demostración, es necesario reportar los asuntos previos a la demostración misma, esto es, *datos*, *aserción* y el *tipo de demostración*, para que se puedan entender los núcleos y pilares. De otro lado, comenta que las construcciones auxiliares son muy importantes para el curso aun cuando no son muy frecuentes; ilustra la situación con base en la construcción de clase pasadas, de dos triángulos congruentes empleando sus respectivas alturas, y no directamente construyendo sus partes correspondientes. A la luz de ese ejemplo, la profesora resalta que este caso, los datos serían los triángulos que comparten un lado, cada uno en un plano respectivamente y sus alturas congruentes. [23:00 C.Pan1]

OSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Norma sobre formatos. La profesora aclara asunto relativo al Formato Núcleo y Pilares, en términos de los aspectos que se deben poner previo a la demostración

Volviendo al asunto de demostrar la unicidad del plano, Natalia expone su demostración y es apoyada por Sebastián. Finalmente, este último provee ideas, mientras la profesora las parafrasea y las escribe con notación geométrica en el tablero, no precisando el formato a usar, pero estipulando los Núcleos y Pilares. Hace una representación gráfica similar la que sigue.

Representación gráfica



En el tablero que escrita la demostración como sigue:

Anexo 2. Enunciados Problemas por Bloques

BLOQUE N° 1		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Segmentos Congruentes; Circunferencia	
Problema Principal 1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Construir dos segmentos congruentes.	Generar de la necesidad de introducir objetos primarios en torno a la circunferencia: su definición y teorema de existencia.	1,2
Problema Auxiliar 1.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Quiero que ahora definamos circunferencia. ¿Quién se acuerda, quién quiere promover una primera definición de circunferencia?	Precisar las condiciones que permiten definir circunferencia dadas por los estudiantes, contrastándolas con el procedimiento de construcción exigido por el software Cabri 3D cuando se emplea la herramienta circunferencia.	3
Problema Auxiliar 1.2	**Objetivo**	**Sesión N°**
Ahora nos toca pensar en cómo muestro que realmente existe una circunferencia en nuestro sistema teórico, es decir, usando los elementos que tenemos hasta ahora, ¿es posible?	Demostrar e instaurar el Teorema de la existencia de una circunferencia	3
Tarea Extraclase 1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Los triángulos se clasifican según relaciones entre los lados o de acuerdo con propiedades de los ángulos. Demuestre, si es posible, que existen triángulos de cada tipo, dentro de cada clasificación. Si no es posible explique por qué.	Usar el objeto circunferencia, entre otros, como herramienta para construir y justificar la existencia de los triángulos, particularmente isósceles y equiláteros.	2, 4
Tarea Extraclase 2	**Objetivo**	**Sesión N°**
En clase demostramos que las circunferencias tienen infinitos puntos. Para ello, ¿es realmente necesario usar los rayos opuestos? Justifique su respuesta.	Aclarar la diferencia entre la infinitud de puntos que puede tener un objeto determinado y la totalidad de puntos que conforma a dicho objeto.	4

BLOQUE N° 2		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Plano, Relación de Paralelismo	
Problema Principal 2	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Se puede justificar o no si los planos tienen infinitos puntos, de manera análoga a cómo tenemos para las rectas con el Teorema recta – infinitos puntos?	Instaurar el Teorema plano infinitos puntos.	4
Problema Auxiliar 2.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Es cierto que con el método de considerar todas las rectas que contienen al punto C en el plano y a un punto de la $\overline{AB}$ hay puntos del plano que no están en esas rectas? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de demostrar el T. Existencia de la paralela: existe una recta paralela a la $\overline{AB}$ que contiene a C. [Surge la primera demostración por contradicción en el curso]	5
Tarea extraclase 3	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. En clase, se propuso la siguiente situación: α plano, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$, C punto, $C \in \alpha$, $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Sean $X_i \in \overleftrightarrow{AB}, i = 1,2,\ldots$. Entonces si $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $C \in l$ se tiene que $\alpha = \overleftrightarrow{AB} \cup \bigcup \overleftrightarrow{CX_i} \cup l$. Analice la situación, indique su acuerdo o desacuerdo, y justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir el Postulado de las Paralelas	6
2. Sean ΔABC y un punto $D \in m$ tal que $A \in m, B, C \notin m$ y $\Delta ABC \cong \Delta BAD$. ¿Cuál es la relación entre m y $\overleftrightarrow{BC}$? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir el Teorema AIP	6
3. Demuestre, si es posible, el teorema propuesto en clase. Si no es posible, explique por qué. **T. Perpendicular paralela-perpendicular** En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces es perpendicular a la otra	Usar el Postulado de las paralelas.	7
Tarea Extraclase 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
3. Determine si la respuesta a la pregunta es Sí, No o No Se Sabe. Justifique su respuesta. a) Sean $\angle ABC$ y $\angle EFG$ tal que $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{FG}$. Sean $\overrightarrow{BX}$ y $\overrightarrow{FY}$ las bisectrices de los ángulos, respectivamente; $\overrightarrow{BX} \parallel \overrightarrow{FY}$. ¿Es $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{FE}$? b) Las rectas m y k son paralelas. ¿Todos los puntos de m equidistan de k? c) La recta t es una traseversal de las rectas paralelas, m y n; $t \cap m = \{S\}$; $t \cap n = \{Q\}$; P punto, $P \in m$ y R punto tal que $R \in S_{t,P} \cap n$. ¿Es $\angle PSQ \cong \angle SQR$?	Usar los diferentes teoremas asociados al paralelismo: T. AIP, T. PAI.	9

BLOQUE N° 3		
Dominio temático: Geometría Plana	**Temas:** Recta tangente a una circunferencia	
Problema Principal 3	**Objetivo**	**Sesión N°**
Sea recta m en plano α y circunferencia de centro P y radio r contenida en α. ¿Existe un radio de la circunferencia perpendicular a m? Justifique su respuesta.	Generar la necesidad de introducir teoremas relativos a la recta tangencia de una circunferencia: Si una recta es tangente a una circunferencia en un punto S, entonces el radio con extremo en S es perpendicular a dicha recta.	6, 7
Tarea Extraclase 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
2. En clase, tratamos de demostrar el siguiente teorema: **T. Tangente - perpendicular** Si $\overleftrightarrow{DE}$ es tangente a $\odot P_r$ en el punto D, entonces $\overline{PD} \perp \overleftrightarrow{DF}$. Un estudiante propuso hacer la demostración por contradicción, suponiendo que la recta no es perpendicular al radio, e hizo una demostración, que todos aceptamos, que lleva a que la recta tendría que intersecar a la circunferencia en dos puntos. Esto es la contradicción a que se llega. Lo que no nos quedó claro fue en qué momento usó la negación de la conclusión en su demostración. ¿Sí usa la negación de la conclusión? Justifique su respuesta.	Reflexionar sobre una demostración previamente hecha, con el ánimo de precisar el método llevado a cabo para la misma.	8
1. Demuestre el siguiente teorema: **T. Perpendicular a radio -tangente:** Sean $\odot P_r$ y l recta, $\overline{PX}$ es un radio y $l \perp \overline{PX}, X \in l$, entonces l es tangente a $\odot P_r$.	Demostrar el respectivo teorema bien sea por método directo (usando teoremas de desigualdades) o por método indirecto (negando la tesis del teorema).	9

BLOQUE N° 4		
Dominio temático: Geometría Plana, Geometría del Espacio	**Temas:** Relación de paralelismo, Cuadriláteros, Cuadriláteros plegados, El espacio, Visualización de Planos en el espacio	
Problema Principal 4	**Objetivo**	**Sesión N°**
Sean A, B, C y D cuatro puntos. ¿Qué figura sería la unión de segmentos determinados por estos puntos, si ningún par de segmentos se intersecan en puntos diferentes a los extremos?	Generar la necesidad de definir cuadriláteros y algunos de sus tipos. Generar la necesidad de establecer el Postulado de existencia de puntos fuera del plano, si por su propia iniciativa, los estudiantes ponen un punto fuera del plano.	8, 9 (Geometría Plana) 11 (Geometría del Espacio)
Tarea Extraclase 5 (Geometría Plana)	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. En clase, surgió la propuesta de usar el HG Ángulo inscrito en semicircunferencia, que se estableció en el curso Elementos de Geometría, para demostrar que realmente existe un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos congruentes y un par de ángulos opuestos rectos. La propuesta resultó a partir del uso de la circunferencia que contiene tres vértices del cuadrilátero para encontrar el cuarto vértice. Como no hemos demostrado el hecho geométrico, no se aceptó la propuesta. La tarea consiste en decidir si el hecho geométrico se puede deducir a partir de la teoría que tenemos en el momento. En caso afirmativo, escribir la demostración completa. Si no se puede, explique por qué.	Demostrar e instaurar el T. ángulos inscrito en circunferencia.	10
2. Para la siguiente tarea, use geometría dinámica. Reporte su construcción, exploración y conjetura. Para demostrar sus conjeturas, consigne solo los Núcleos y Pilares. Determine la relación entre “tipo de cuadrilátero” y la propiedad “una diagonal biseca a la otra”.	Generar la necesidad de instaurar teoremas relativos a propiedades de varios tipos de cuadriláteros, en particular aquellos que son paralelogramos.	10, 11
3. ¿Las diagonales de un paralelogramo se intersecan? Demuestre su respuesta.	Usar teoremas de paralelismo y semiplanos.	11

<table>
<tr><th>Tarea Extraclase 6 (Geometría Plana)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>1. a) Desarrolle la demostración completa usando el formato Aserción-Garantía y Datos.
Tipo de demostración: Directa
Datos: ΔABC, X punto medio de $\overline{AB}$, Y punto medio de $\overline{AC}$
Aserción: $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$, $XY = \frac{1}{2}BC$
<table>
<tr><th>Núcleos</th><th>Pilares</th></tr>
<tr><td>1. Punto $Z \in \overleftrightarrow{XY}$ tal que $YZ = XY$</td><td>T. Localización de puntos</td></tr>
<tr><td>2. $\Delta AXY \cong \Delta CZY$</td><td>P. LAL</td></tr>
<tr><td>3. $\boxdot\, XBCZ$ paralelogramo</td><td>T. Lados opuestos paralelos y congruentes-paralelogramo</td></tr>
</table></td><td>Usar teoremas relativos a las propiedades de cuadriláteros</td><td>12, 13</td></tr>
<tr><td>2. Demuestre, si es posible, que existen los trapecios. (Formato Aserción-Garantía y Datos).</td><td>Instaurar el T. Existencia de los trapecios usando en su demostración T. de la paralela.</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3. Usando el formato Núcleos y Pilares, demuestre: Si un segmento tiene extremos en lados opuestos de un paralelogramo y contiene el punto de intersección de las diagonales, entonces ese punto lo biseca.</td><td>Usar teoremas relativos a las propiedades de cuadriláteros</td><td>13</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.1 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Es el espacio diferente a un punto, a una recta y a un plano?</td><td>Establecer teóricamente y no de manera figural las diferencias entre punto, recta, plano y espacio.
Generar la necesidad del P. del Espacio.</td><td>11, 12, 13</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.2 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>¿Cuántos puntos tiene el espacio?</td><td>Garantizar que el espacio tiene infinitos puntos.</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Problema Auxiliar 4.3 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>Al redefinir fuera del plano base dado un vértice de un $\boxdot ABCD$. ¿La figura que queda es un cuadrilátero?</td><td>Construir la definición de cuadrilátero plegado y pirámide</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><th>Tarea Extraclase 7 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>1. Resuelva el siguiente problema con Cabri 3D. Reporte el proceso: construcción, exploración, conjetura. Demuestre su conjetura. ¿Existe un cuadrilátero plegado con un par de ángulos opuestos rectos?</td><td>Proveer procedimientos para construir un cuadrilátero plagado con características específicas.</td><td>15</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Problema Principal 5 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>En una línea de una demostración de geometría del espacio un estudiante ha escrito una aserción. Escriba todas las posibles garantías que conozca para dicha aserción, y datos correspondientes que posibilitaría usar dicha garantía (Si necesita poner más filas, puede hacerlo):
<table>
<tr><th>Aserción</th><th>Garantía</th><th>Datos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sea el plano α</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>Recodar todas las garantías y respectivos datos que permiten justificar teóricamente, la determinación de un plano. [Este Problema se concibe como útil para explicitar varias herramientas para determinas planos en el espacio].</td><td>13, 14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Problema Principal 6 (Geometría del Espacio)</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td>Dado el $\triangle ABC$, sean D y F puntos tal que $F \in \overleftrightarrow{AB}, D \in \overleftrightarrow{AC}$, e I un punto que no pertenece al plano determinado por A, B y C. Sea un punto H tal que $H \in \overleftrightarrow{DI}$, y un punto G tal que $G \in \overleftrightarrow{FH}$.
a) ¿Pueden determinarse por lo menos tres planos distintos al inicial? Justifique su respuesta.
b) Considere todos los planos determinados por triángulos que no comparten vértice con el ΔABC ¿Qué relación tienen esos planos con α_{ABC}?</td><td>Visualizar distintos planos en el espacio y generar la necesidad de establecer el P. Intersección de planos y el T. Intersección de planos.</td><td>16, 17</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Tarea Extraclase 8</th><th>Objetivo</th><th>Sesión N°</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Espacio</td><td>Responda la pregunta. Justifique su respuesta con una demostración.
c) Considere el siguiente teorema:
T. Punto – Infinitas rectas Dado un punto A en un plano β entonces existen infinitas rectas en β que contiene al punto A.
¿Seguirá siendo un teorema si se elimina toda mención del plano β?</td><td>Demostrar que existen infinitas rectas no coplanares en el espacio.</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Ya vimos que los cuadriláteros plegados pueden tener dos ángulos opuestos rectos. La pregunta que surge es si pueden tener más de dos ángulos rectos. Describan cómo exploran la situación y cuál es la conclusión que establecen. Indiquen cómo llegaron a esa conclusión. NO DEBEN DEMOSTRAR SU RESPUESTA.</td><td>Proveer procedimientos para construir un cuadrilátero plagado con características específicas.</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Plano</td><td>Justifique cada afirmación usando el formato Núcleos y Pilares.
a) Si ambos pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces es paralelogramo.
b) Si dos ángulos consecutivos de un trapecio son congruentes, pero no suplementarios, entonces el trapecio es isósceles.</td><td>Poner en juego el sistema teórico relativo al paralelismo o perpendicularidad en el plano para demostrar las proposiciones enunciadas.</td><td>17</td></tr>
<tr><td colspan="4">BLOQUE N° 5</td></tr>
</table>

Dominio temático: Geometría del Espacio	Temas: Relación de perpendicularidad entre plano y recta	
Problema Principal 7	**Objetivo**	**Sesión N°**
Dados m recta, α plano, $m \cap \alpha = \{X\}$, ¿existe recta l, $l \subset \alpha$, tal que $l \perp m$?	Precisar que una recta que interseca a un plano en un único punto y que es perpendicular a una recta de tal plano, no son condiciones suficientes para garantizar que tal recta es perpendicular al plano.	17, 18
Problema Auxiliar 7.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Cómo lograr que la recta m sea perpendicular al plano α?	Generar la necesidad de introducir la D. de recta perpendicular a plano y de la existencia de un plano perpendicular a una recta por un punto de ella.	18
Problema Auxiliar 8.1	**Objetivo**	**Sesión N°**
Un estudiante asegura que dados un $\overline{PQ}$ y puntos B y C tales que equidistan de los extremos de tal segmento, con seguridad la $\overleftrightarrow{BC}$ es mediatriz del $\overline{PQ}$. Además, afirma que cualquier punto S entre B y C equidista de P y Q. ¿Está de acuerdo con las dos aseveraciones del estudiante? Justifique su respuesta.	Generar e instaurar el T. de equidistancia en el espacio, importante para la demostración del T. Fundamental de la perpendicularidad.	18
Tarea Extraclase 9	**Objetivo**	**Sesión N°**
Demuestre el siguiente teorema que corresponde a la situación que estudiamos al finalizar la clase: **T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio:** Sean A, B, X, T puntos no coplanares y ningún trio de ellos colineales, tal que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$; entonces S equidista de A y B. Se provee una tabla con todas las aserciones.	Demostrar e instaurar el T. Interestancia – Equidistancia en el Espacio	18
Problema Principal 8	**Objetivo**	**Sesión N°**
a) Construya un ΔABC en el plano α y un ΔABD congruente al ΔABC, tal que $D \notin \alpha$. i) Escriba el proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación. ii) Escriba el proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).	Identificar el criterio por excelencia para determinar que un plano es perpendicular a una recta: una recta es perpendicular a un plano por un punto si dos rectas de este son perpendiculares a la recta dada por dicho punto (T.	19

iii) Provea una conjetura que responda la pregunta del problema. iv) Provea una demostración de dicha conjetura [Núcleos y Pilares].	Fundamental de la perpendicularidad)	
Problema Auxiliar 8.2	**Objetivo**	**Sesión N°**
Para construir el ΔABD del problema anterior, un estudiante propuso la siguiente construcción: i) Construye $\overline{CE}$ altura relativa al $\overline{AB}$ ii) En un plano β que interseca a α en $\overleftrightarrow{AB}$, construye $m \perp \overleftrightarrow{AB}$, m recta, $E \in m$. iii) D punto, $D \in m$, $DE = CE$. a) Represente la situación. b) ¿Se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle ABD$? Justifique su respuesta. c) ¿Existe una relación especial entre una recta y alguno de los planos que se pueden determinar? Si es el caso indique la relación, y cuáles la recta y el plano.	Generar la necesidad del T. Fundamental de la perpendicularidad	19
Tarea Extraclase 10	**Objetivo**	**Sesión N°**
1. Escribir las pruebas de los siguientes teoremas enunciados al finalizar la clase [sesión 19]. **T. Recta-plano perpendicular punto interno** Sea m una recta y A un punto de ella. Entonces existe un plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. unicidad Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. [Lo análogo para los siguientes teoremas: **T. Plano-recta perpendicular punto interno:** Sea un plano α y un punto A, tal que $A \in \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$. **T. Recta-plano perpendicular punto externo** Sea m una recta y $A \notin m$. Entonces existe un único plano α, tal que $A \in \alpha$ y $\alpha \perp m$ por A. **T. Plano-recta perpendicular punto externo:** Sea un plano α y un punto A tal que $A \notin \alpha$. Entonces existe una única recta m tal que $A \in m$ y $m \perp \alpha$.]	Demostrar los Teoremas respectivos.	19, 20

<table>
<tr><th colspan="3">BLOQUE N° 6</th></tr>
<tr><td>Dominio temático: Geometría del Espacio</td><td colspan="2">Temas: Conjunto mediador y Plano mediador</td></tr>
<tr><td>Problema Principal 9</td><td>Objetivo</td><td>Sesión N°</td></tr>
<tr><td>Para responder las siguientes preguntas, deben usar la geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en el que incluyan para cada numeral la siguiente información:
i) El proceso de construcción de los procesos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o bola de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o bola de cristal-, si se redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda a la pregunta del problema.
iv) La demostración de la conjetura (núcleos y pilares).
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?</td><td>Usar la definición de mediatriz como herramienta para solucionar el problema, si la situación se aborda en un plano.
Generar la necesidad de introducir el Plano Mediador de un segmento para solucionar el problema, si los segmentos dados son alabeados.</td><td>20, 21, 22, 24</td></tr>
<tr><td>Problema Auxiliar 9.1</td><td>Objetivo</td><td>Sesión N°</td></tr>
<tr><td>Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:
i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.
1. a) Dados dos puntos A y B en un plano α, ¿existen puntos P y Q talque $P, Q \notin \alpha$ y equidistan de A y B? Si es el caso, represéntelos.
b) Sea $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$. ¿Qué relación existe entre Q y $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$?
c) ¿Qué relación existe entre los puntos del $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$ y los puntos A y B?
2. a) ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento?
b) ¿Se agrupan las mediatrices para formar una figura geométrica espacial?</td><td>Precisar las características del plano mediador y, con base en ello, introducir la Definición de Plano Mediador y el T. Plano Mediador</td><td>22</td></tr>
</table>

Tarea Extraclase 11	Objetivo	Sesión N°

Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema:

El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$.

¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta

Demostración:

Datos: $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B; α el plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$

Aserción: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.

La demostración del teorema implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$. Es decir, se debe demostrar que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se demostrará primero que $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Tipo de demostración: Directa

Aserción	**Datos y garantía**
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado
2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)

Se demostrará ahora que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Tipo de demostración: Directa

Aserción	**Datos y garantía**
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)

Como $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ entonces $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$ por D. Igualdad de conjuntos.

Corregir la demostración provista del teorema *El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del* $\overline{AB}$ el cual es otra forma de caracterizar al Plano Mediador.

24

BLOQUE N° 7		
Dominio temático: Geometría del Espacio	**Temas:** Cubo, Ángulos diedros	
Problema Principal 10	**Objetivo**	**Sesión N°**
¿Existe un cubo?	Definir cubo y demostrar su existencia a partir de métodos de construcción válidos. Generar la necesidad de instaurar el T. rectas perpendiculares a plano - paralelas. Generar la necesidad de instaurar la definición de ángulo diedro y el T. Ángulos diedros.	24

Anexo 3. Recuento Bloque N° 6 y preanálisis con Atlas.ti 7

Recuento

Problema Principal 9 y Problema Auxiliar 9.1

Al finalizar la sesión de clase 20, la profesora entrega una hoja con el Problema Principal 9 para el cual debía hacerse uso de Cabri 3D. Su enunciado es el siguiente:

> **PP9**: Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:
>
> i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
> ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
> iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.
> iv) La demostración de la conjetura (Núcleos y pilares)
>
> Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?

En la actividad se pedía un reporte de construcción, exploración, conjetura y su correspondiente demostración. Dice la profesora que de él surge un teorema bien importante. Al recogerse dicha actividad (luego de 20 minutos aproximadamente), se dio por terminada la sesión de clase 20.

En la sesión de clase 21, luego de que la profesora hiciera un breve comentario sobre la Tarea Extraclase 10, la profesora retoma el Problema Principal 9. Pide a los estudiantes que se organicen por grupos pues se van a estudiar usando el software Cabri 3D cada una de las propuestas producidas por ellos. La profesora, muestra un documento donde pone cada una de las propuestas, y lo proyecta en el televisor; dice que los resultados fueron muy chéveres. El documento es el siguiente:

I. Caso I: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, E coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{RT}$
2. $E \in M_{\overline{AB},\alpha} \cap M_{\overline{CD},\alpha}$

II. Caso II: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares, E no coplanar a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$

1. $\boxdot ABCD$ paralelogramo, $X \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por X. $E \in l$
2. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, M punto medio de $\overline{RT}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$
3. Punto medio de $\overline{AD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$

III. Caso III: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ no coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$ (Pr2)

La profesora dice que va a formular las propuestas, y que quiere que cada grupo las estudie en el software para ver sin son válidas o no. Para cada propuesta, la profesora pide que algún grupo/estudiante pase al frente, con su computador, para ilustrar la situación. Ella advierte que el problema no dice algo sobre la localización de puntos. En consecuencia, varios grupos pensaron que

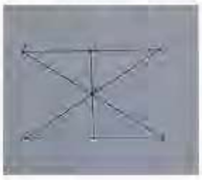
F- Fc
F- Fm
Prob - Be
F- Fc
F- Fi
F- Fm
F- Fi
ActClas
F- Fm
F- Fm

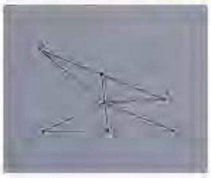
todos los puntos dados, extremos del segmento y el punto E, debían estar en el mismo plano [6:43 C.Pan1].

CASO I: $\overline{AB}$, $\overline{CD}, E$ coplanares

1. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, E punto medio de $\overline{RT}$
Un grupo (el de Sandra) dice que No siempre funciona; Ronald pasa con su equipo y muestran un ejemplo en el que los triángulos en cuestión son congruentes y otro en el que no. Este grupo usa Geogebra para hacer su representación. Dicha propuesta es descartada [12:00 C.Pan1].

Arg~Ce
SI~E

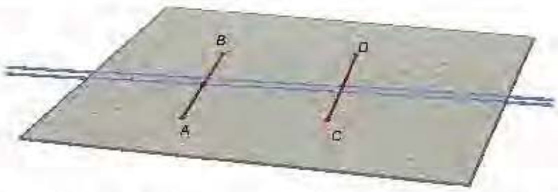




2. $E \in M_{\overline{AB},\alpha} \cap M_{\overline{CD},\alpha}$

Pasa Tatiana 2 con su equipo para ilustrar la situación. Ella usa Cabri 3D. Ella muestra casos donde se cumple la propiedad y casos en los cual ello no pasa. Específicamente, si los dos segmentos son paralelos las mediatrices no se intersecan.

Arg~Ce
SI~CF
SI~E

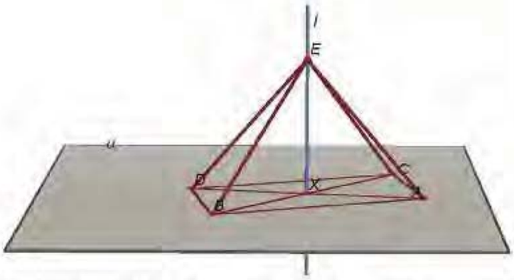


Faltó decir que existe en punto E siempre y cuando los segmentos no sean paralelos o colineales. Luego de que Tatiana 2 mueve cualquiera de los segmentos dados mediante sus extremos, se percatan que en este caso se cumple muy pocas veces la propiedad en cuestión.

Continuando con las opciones de exploración, la profesora comenta que hubo otros grupos que pensaron los segmentos dados coplanares, pero el punto E en un plano diferente al plano en referencia. Dice que estas propuestas son chéveres porque estamos en un curso de Geometría del Espacio, y pues que se podría "pensar que me están pidiendo cosas en el espacio".

CASO II: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ coplanares, E no coplanar a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

1. $\boxdot\, ABDC$ paralelogramo, $X \in \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$, por X. $E \in l$.
   Pasa José Luis e lustra la situación.



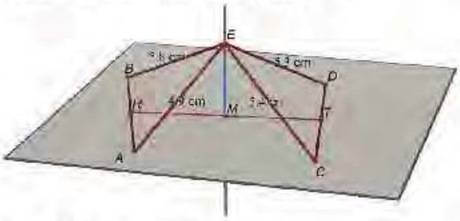
Steven dice que la recta l es mediatriz de cada una de las diagonales en los planos que determina cada diagonal con l. La profesora pide arrastra el punto E y visualmente pareciera que los ΔABE y ΔCDE son congruentes. Steven y Oscar inician un proceso para argumentar que los triángulos, en este caso, necesariamente son congruentes. Se sabe que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y son paralelos. Como l es perpendicular al plano, lo es a cada diagonal. Por definición de mediatriz, se sabe que $\overline{BE} \cong \overline{CE}$ y $\overline{AE} \cong \overline{DE}$. Por el T. L.L.L, los triángulos son congruentes.

Arg~Ad~Dir
SI~CF

2. R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, M punto medio de $\overline{RT}$. $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$.

Comenta la profesora que lo bueno de esta propuesta es que los segmentos dado en este caso no tienen una posición relativa especial. Karen pasa con su equipo y muestra su representación. En ella, están las medidas de los segmentos de los triángulos en cuestión, y se observan que no son iguales; razón por la cual no son congruentes. Es descartada tal propuesta.

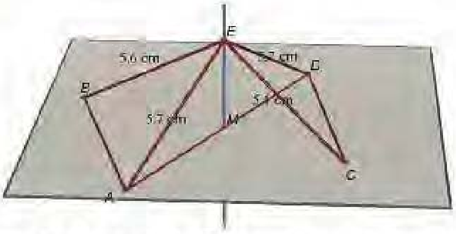
Arg~Ce
SI~CF
SI~E



3. M punto medio de $\overline{AD}$, $l \perp \alpha_{\overline{AB},\overline{CD}}$ por M, $E \in l$

Zayra pasa con equipo para mostrar la representación asociada. La profesora resalta que, en esta propuesta, no se trata del punto medio de los segmentos dados, sino del punto medio del $\overline{AD}$. Zayra hace varios arrastres y toma la medida de los lados de los triángulos.

Arg~Ce
SI~CF
SI~E



José Luis dice que la recta l es mediatriz de $\overline{AD}$. La profesora dice que, entonces los $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$ son congruentes y nada más. La profesora dice que teóricamente solo se puede garantizar la congruencia de dos parejas de lados. La propuesta es descartada entonces.

La siguiente propuesta, dice la profesora, es muy interesante porque asumieron que todo lo dado estaba en diferentes planos.

CASO III: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ no coplanares

> R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$

Pasa Andrés, miembro del grupo que propuso esta solución. Para la construcción del $\overline{CD}$ congruente al $\overline{AB}$, Andrés hace una esfera de centro C y radio AB; de esa manera no solo garantiza congruencia, sino que no sean coplanares. Mientras Andrés llevaba a cabo los demás pasos de la construcción (R punto medio de $\overline{AB}$, T punto medio de $\overline{CD}$, $\beta \perp \overline{AB}$ por R, $\delta \perp \overline{CD}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$) la profesora la parafraseaba. SI~CF

Dado que era difícil determinar la congruencia de los ΔABE y ΔCDE visualmente, la profesora sugirió tomar medida de los lados de los triángulos. Sin embargo, después de mover la caja de cristal, se dieron cuenta que no lo eran. SI~E

Así que realizaron un ajuste a la propuesta respecto a los puntos medios, diciendo que: R punto medio de $\overline{BD}$,T punto medio de $\overline{CA}$, $\beta \perp \overline{BD}$ por R, $\delta \perp \overline{AC}$ por T, $l = \beta \cap \delta$, $E \in l$. Andrés hace la construcción con el ajuste, pero el tiempo de la clase agotó y no se alcanzó explorar con detalle la situación. La sesión de clase termina. SI~CF

En la sesión de clase 22, luego de que la profesora hiciera unos comentarios sobre las producciones relativas al Parcial 3, retoma las propuestas correspondientes al Problema Principal 9 [00:00 C.Pan2]. Reitera que fueron chéveres la soluciones que surgieron dado que algunos grupos propusieron que los segmentos y el punto E fueran coplanares, otros que los segmentos fueran coplanares pero el punto E no estuviera en el plano que contiene los segmentos, y solo un grupo que los segmentos no fueran coplanares. La profesora pide a los estudiantes que recuerden lo realizado hasta el momento con respecto al problema. Específicamente, les pregunta a los estudiantes qué les impactó sobre el proceso llevado a cabo. Le pregunta a Edwin; él dice no recordar mucho al respecto. Esteban recuerda que algunas propuestas consideraron los segmentos y el punto K en el plano, otras los segmentos en el plano y el puto fuera de él y otros todo en distintos semiplanos. La profesora pregunta qué le impacto del proceso llevado a cabo. Esteban dice que la única propuesta que llevó a una solución fue aquella que consideró los segmentos dados como lados de un paralelogramo y la propuesta descrita al final de la clase anterior que consideró la intersección de planos (aquella comentada por Andrés). La profesora luego le pregunta a Zayra qué le impresionó; antes de que ella le responda dice que la profesora que "a veces uno dice por qué no se me ocurrió las propuestas que otros exponen". Zayra comenta que su grupo consideró todo en el plano, pero que no les ocurrió considerar objetos en el espacio. Jefferson alza la mano para participar luego de que la profesora preguntara qué les sorprendió del proceso. Dice que a ellos no se les ocurrió pensar la situación en el plano; de una vez estudiaron el caso de segmentos dados no coplanares.

La profesora comenta que cuando se abordó la solución en el plano, solo se estableció una solución. Esto es, tomar los segmentos paralelos y tomar el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo asociado como la solución al problema. Hace la representación en el tablero.

La profesora pregunta si en el plano, sólo se establece esa solución o si hay otra.

Ronald propone la siguiente idea:

1. m recta, $m \parallel \overline{CD}$ por el punto E
2. K punto, $K \in m \cap \overline{DB}$

La profesora hace la siguiente representación en el tablero:

Esta idea exige demostrar que el punto K es punto medio del $\overline{DB}$, lo cual dio lugar a un nuevo teorema:

SI~IP

> **T. Segmento paralelo punto medio triángulo** Dado el $\triangle CBD$, si $\overline{EK} \parallel \overline{CD}$, E es punto medio de $\overline{CB}$, entonces K es punto medio de $\overline{DB}$.

La demostración fue sugerida por Andrés; la profesora parafrasea lo dicho por él, pero no la escribe.

Arg~Ad~Dir

SI~HP

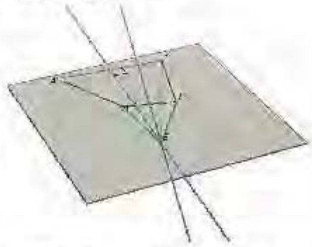
La profesora dice que esta propuesta (de Ronald) la deja para que los estudiantes la exploren de tarea extraclase.

SI~E

La profesora ahora sugiere explorar otra solución en el plano si los segmentos dados no son paralelos, es decir si no tienen ninguna condición especial. Entrega a los estudiantes el computador para que hagan la respectiva exploración en grupos. Los estudiantes toman 10 minutos aproximadamente en hacer lo correspondiente.

El grupo de Vanesa es el primero que expone una solución: En Cabri 3D construyen los $\overline{AC}, \overline{BD}$ y sus mediatrices. Luego afirman que $\{E\} = M_{\overline{AC}} \cap M_{\overline{BD}}$.

SI~CF



Comenta la profesora que le pareció curioso que los estudiantes en sus producciones no usaran los criterios de congruencia, esto es, buscar congruencias o bien de lados o bien de ángulos; pues eso era lo natural. Si se buscan lados congruentes, pues el punto e debería estar en la mediatriz de segmentos. Con esa afirmación, la profesora parece validar la idea de este grupo de estudiantes [3:00 C.Pan3] Dice que esta es una solución para cualesquiera segmentos congruentes en el plano.

Arg~Ab
F~Fc
F~Fb

Enseguida, la profesora le pide a Andrés que describa el procedimiento de solución que su grupo propuso para los segmentos no coplanares (aquella que había intentado exponer en la sesión de clase anterior). Andrés dice que construyen los planos perpendiculares por el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y determinan la recta que es intersección de los dos planos. La profesora comenta que ellos propusieron exactamente lo mismo que en el plano, pero ahora en el espacio: lo que son rectas se convierten, en la solución de Andrés, en planos. Parafrasea lo dicho por el estudiante y dice que, entonces, el plan que el grupo de Vanessa propuso para el plano, se puede pasar a un plan en el espacio, en donde, en lugar de mediatrices, se busca planos.

Arg~Aa
F~Fb
F~Fb

Justo después del fragmento anterior, la profesora propuso el Problema Auxiliar 9.1, para ser abordado en grupos y con el uso de Cabri 3D [07:20 C.Pan3]:

F~Fm

> **PA9.1**: Para responder las siguientes preguntas, deben usar geometría dinámica Cabri 3D. La tarea no es solo responder las preguntas sino también realizar un reporte completo en la que incluyan para cada numeral la siguiente información:
>
> i) El proceso de construcción de los objetos involucrados en la situación.
> ii) El proceso de exploración que llevó a cabo (por ejemplo, qué medidas tomó, qué arrastró -objeto o caja de cristal-, en qué se fijó cuando arrastró tal objeto -o caja de cristal-, si redefinió algún objeto, etc.).
> iii) Una conjetura que responda la pregunta del problema.
>
> 1.
>
> a) Dados dos puntos A y B en un plano α, ¿existen puntos P y Q talque $P, Q \notin \alpha$ y equidistan de A y B? Si es el caso, represéntelos.
> b) Sea $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$. ¿Qué relación existe entre Q y $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$?
> c) ¿Qué relación existe entre los puntos del $\beta_{P,\mathcal{M}_{\overline{AB},\alpha}}$ y los puntos A y B?

Prob~Eb

2.

a) ¿Cuántas mediatrices tiene un segmento?

b) ¿Se agrupan las mediatrices para formar una figura geométrica espacial?

3. Hecho este proceso, ¿algo de lo realizado lo sorprendió verdaderamente (es decir, no esperaba un resultado como el arrojado luego de llevar a cabo todo el proceso)?

La profesora provee 45 minutos aproximadamente para abordar su solución. Luego de que los estudiantes entregan sus producciones, la profesora establece la siguiente definición sin mediar interacción entre ella y la clase [20:04 C.Pan4]:

SI~IC

D. El **conjunto mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

Notación: $\mu_{\overline{AB}}$

Así pues, $\mu_{\overline{AB}}=\{X \in \mathcal{E} | XA = XB\}$

F~F

La profesora pregunta que, con base en lo realizado en dicho taller, le indiquen qué condición tienen esos puntos del conjunto mediador diferente a la explicitada en la definición. Varios responden que están en un plano; Andrés dice que ese plano es perpendicular al plano por el punto medio. Pregunta luego, si todos los puntos de ese plano están en el conjunto mediador; algunos responden que sí. Dice entonces la profesora que otra formar de decir lo anterior es que: $\mu_{\overline{AB}}$ es igual β, un plano perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio. Dice que ello hay que demostrarlo. La profesora evoca la situación ocurrida en su momento con la mediatriz, que es similar a la que se tiene entre manos: la mediatriz se define como el conjunto de puntos que equidistan del plano y luego se mostró que dicho conjunto es una recta perpendicular al segmento por su punto medio. La sesión de clase termina.

SI~IP

Los objetos instaurados en la sesión de clase fueron:

T. Segmento paralelo punto medio triángulo Dado el $\triangle CBD$, si $\overline{EK} \parallel \overline{CD}$, E es punto medio de $\overline{CB}$, entonces K es punto medio de $\overline{DB}$.

D. El **conjunto mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

Tarea Extraclase 11

Pmb~Qp

SI~HP

En la sesión de clase 24, la profesora aborda la Tarea Extraclase 11, sin que ella previamente haya hecho la revisión de las producciones de los estudiantes. En un primer momento aborda el ítem dos de la tarea [01:05 C.Pan0]:

2. Un estudiante propone la siguiente demostración para el teorema:

El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$.

¿Está usted de acuerdo con ella? Explique su respuesta

Demostración:

Datos: $\mu_{\overline{AB}}$ el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B; α el plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$

Aserción: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$.

La demostración del teorema implica demostrar la igualdad entre dos conjuntos: $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$. Es decir, se debe demostrar que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se demostrará primero que $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Tipo de demostración: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado
2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)

Se demostrará ahora que $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Tipo de demostración: Directa

Aserción	Datos y garantía
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1, 2)
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos: Principio de sustitución (3)
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)

Como $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$ entonces $\mu_{\overline{AB}} = \alpha$ por D. Igualdad de conjuntos.

La profesora comenta que este teorema surgió del Problema Auxiliar 9.1 el cual había sido propuesto en la sesión de clase 22. Dice que esta es otra manera de caracterizar al conjunto mediador advirtiendo ahora que es un plano que contiene todas las mediatrices del segmento dado. Se inicia el proceso de corrección de la demostración que se proponía en enunciado del ejercicio. La profesora aclara que en este caso hay que demostrar dos inclusiones: $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$ y $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

Se inicia con la primera de ellas: $\mu_{\overline{AB}} \subset \alpha$.

FArg-A-E
FArg-A-P-I
FArg-G-E
FArg-G-P-I
FArg-R-E
[illegible]

Les pregunta a varios grupos sobre cada uno los pasos. De igual forma, cuestiona a otros grupos sobre las ideas que los primeros proponen. A continuación, se presentan sendas Tablas que exponen los cambios de algunos de los pasos de la prueba de cada contenencia. Se destaca el autor respectivo a cada complementación. Vale indicar que la profesora iba corrigiendo un documento de Word que proyectó en el televisor en donde tenía las pruebas en cuestión.

Aserción	Datos y garantía	Complemento Aserción	Complemento Datos y garantía	Autor Complemento
1. Sea X tal que $X \in \mu_{\overline{AB}}$	Dado	Sea X, $X \in \mu_{\overline{AB}}$, M punto medio de $\overline{AB}$	T. Existencia Conjunto mediador	Profesora

2. $XA = XB$	D. Conjunto Mediador (1)			
3. Sea β_{ABX}	P. Plano-Puntos (2)		P. Puntos-Planos (2)	Varios
4. Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Existencia de la mediatriz (2)	Sea la $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ en β_{ABX}	T. Existencia de la mediatriz (2, 3)	Steven
5. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB}}$	T. Mediatriz (2, 4)		D. Mediatriz (2, 4)	Varios
6. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} \subset \alpha$	Caracterización de α (5)			
7. $X \subset \alpha$	T. Contenencia (5, 6)	$X \in \alpha$	Noción primitiva. Pertenecer a y D. Subconjunto (5, 6)	Profesora

En relación con el primer paso, la profesora dice que se debe tener claro lo siguiente:

- **Sea** significa que se está seguro de que hay un objeto geométrico en el conjunto.
- **Suponer** significa que consideramos cierto que hay un elemento en el conjunto, pero es tan solo una posibilidad.

La profesora sugiere abordar la segunda inclusión: $\alpha \subset \mu_{\overline{AB}}$

Se hace el mismo ejercicio que para la demostración de la contenencia anterior. En la tabla siguiente se pone la complementación respectiva, precisada en clase.

Aserción	**Datos y garantía**	**Complemento Aserción**	**Complemento Datos y garantía**	**Autor Complemento**
1. Sea X tal que $X \in \alpha$	Dado	α plano que contiene las mediatrices	Dado	Profesora
		Sea X tal que $X \in \alpha$	T. Plano Infinitos Puntos	
2. Sea β_{ABX}	P. Puntos - plano (2)			
3. $X = \beta \cap \alpha$	D. Intersección de conjuntos (1. 2)			
4. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	T. Existencia mediatriz (2)			
5. $\mathcal{M}_{\overline{AB},\beta} = \beta \cap \alpha$	T. intersección de planos; Principio de sustitución (3)			
6. $X \in \mathcal{M}_{\overline{AB},\beta}$	Transitividad (3, 4)		Transitividad o Principio de sustitución (3, 4)	Varios
7. $XA = XB$	D. Mediatriz (6)			
8. $X \in \mu_{\overline{AB}}$	D. Conjunto mediador (7)			

La profesora aclara que es importante saber qué es lo que se provee como dado, para realizar bien la demostración. Para que la demostración sea válida tenemos que desarrollar el caso en el que X no sea el punto medio $\overline{AB}$, pues un punto con esta condición sí está en $\mu_{\overline{AB}}$ y no estaríamos demostrando algo nuevo [20:05 C.Pan0].

FArg~A~E
FArg~A~P~I
FArg~G~E
FArg~G~P~I
FArg~R~E

En relación con el paso 5, luego de una discusión entre varios (José Luis, Tatiana 1) la profesora indicó que toca determinar que α, el plano determinado por las mediatrices existe. Al respecto, Tatiana 1, Steven y Yesid sugieren pasos de la respectiva demostración. Las ideas centrales de la misma, las cuales fueron verbalizadas, son las siguientes: al emplear el T. Existencia mediatriz en cada uno de los planos que contiene al segmento dado, existen infinitas mediatrices del segmento. Entonces por T. Mediatriz se tiene que cada una es perpendicular al segmento y contienen al punto medio. Por ende, comparten un punto por lo menos dos mediatrices; es decir se intersecan. Por el T. Rectas-plano se tiene el plano α. Se tiene que al menos dos rectas de α son perpendiculares a la $\overleftrightarrow{AB}$ por el mismo punto. Entonces por el T. Fundamental de la Perpendicularidad, el plano α es perpendicular a la $\overleftrightarrow{AB}$ por el punto medio del segmento. Por tanto, se demostraría que el plano α contiene a todas las rectas perpendiculares a $\overline{AB}$ por el punto medio del segmento. Por el T. Mediatriz, dichas rectas son mediatrices del $\overline{AB}$; en consecuencia, el plano α es la unión de las mediatrices.

FArg~Id~E
SI~HP

Los demás pasos fueron corregidos, pero no generaron mayor discusión.

Hecha la demostración sugerida en el enunciado del problema de la tarea, la profesora advierte que se puede introducir a nuestro sistema teórico el siguiente teorema:

SI~IP

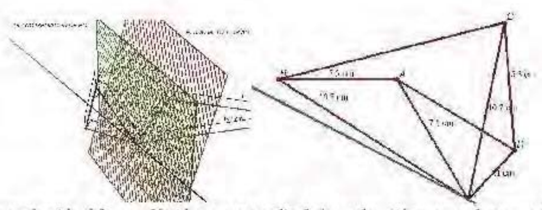
> **T. Plano mediador** El plano mediador de un segmento es el plano perpendicular al segmento por el punto medio.

La profesora propone retomar las soluciones dadas al Problema Principal 9 [08:50 C.Pan1]:

> **PP9**: *Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos congruentes. ¿Es posible determinar un punto E de forma tal que ΔABE y ΔCDE sean congruentes?*

La Profesora recuerda las propuestas: (i) tomar los segmentos dados paralelos, (ii) tomar los dos segmentos coplanares, pero no paralelos. En relación con esta última propuesta, la profesora usa una representación gráfica en el tablero con la cual recuerda la construcción respectiva consistente en hacer las mediatrices de los otros dos segmentos formados por los extremos de los segmentos dados ($\overline{AC}$ y $\overline{CD}$, por ejemplo), y determinar la intersección de las mediatrices. Esta intersección es el punto E buscado. Así los triángulos son congruentes por el T. LLL. Dice la profesora que esta propuesta fue la que el grupo de Andrés intentó llevar al espacio, pero en lugar de usar mediatrices se construyen unos planos. Pregunta cómo hacer la construcción asociada a ese caso. Varios responden que para construir los segmentos congruentes se empleó una esfera. La profesora da la instrucción de que cada grupo haga la respectiva construcción en Cabri 3D sugerida por el grupo de Andrés. Yesid hace la construcción proyectando su pantalla en el Televisor. Específicamente, construye los dos segmentos no coplanares siguiendo las directrices del grupo citado, esto es, utilizando la esfera para construir los segmentos congruentes no coplanares. Una vez construidos los segmentos, oculta la esfera. Luego, construye los planos mediadores de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, determina la recta de intersección y pone el punto E en ella. Construye los lados de los ΔABE y ΔCDE y toma sus medidas. Resumiendo, la construcción tiene las siguientes condiciones: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Sean $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $M_{\overline{AC}}\,M_{\overline{BD}}$, E punto, tal que $E \in M_{\overline{AC}} \cap M_{\overline{BD}}$. Entonces $\Delta ABE \cong \Delta CDE$.

SI~CF
Arg~Aa
Arg~Ad~Dir



La profesora le pide el favor a Yesid que, por medio de la exploración, comprobara que todo punto de la recta de intersección da lugar a todos los posibles triángulos congruentes. Al arrastrar el punto E sobre la recta m, vemos que se cumple la congruencia de los triángulos. La profesora dice que el argumento es similar al realizado para el caso de los segmentos coplanares, esta vez usando la definición de plano mediador. Los objetos instaurados luego del proceso descrito fueron los siguientes:

SI~E

> **T. Conjunto Mediador** El conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$), es igual al plano unión de todas las mediatrices.

SI~IP

> **T. Plano mediador** El plano mediador de un segmento, es el plano perpendicular al segmento por el punto medio.

Anexo 4. Programa del curso

I. IDENTIFICACIÓN

Geometría del Espacio (1444413)
Semestre en el plan de estudios: III
Intensidad ADD[70] **(semanal)**: 4
Horario del espacio académico: martes y jueves de 9 a 11
Horario de atención a estudiantes: Se precisa con los estudiantes
Prerrequisito(s): Geometría Plana
Nombre del profesor: Carmen Samper de Caicedo
Correo electrónico del profesor: csamper@pedagogica.edu.co/carmensamper@gmail.com

Semestre: 2017-I
Número de créditos: 3
Intensidad TI[71] **(semanal)**: 5
Salón: B311
Lugar de atención: B306

II. PRESENTACIÓN DEL ESPACIO ACADÉMICO

El espacio académico Geometría del Espacio continúa el proceso formativo disciplinar del Área de Geometría posterior al estudio de procesos de la geometría (visualización, exploración, conjeturación, comunicación con lenguaje formal, argumentación en el marco de un sistema teórico, etc.) y de contenidos relativos a la geometría plana (relaciones entre puntos, rectas y planos, ángulos, congruencia de triángulos, etc.). En tal sentido, pretende repasar y afianzar los conceptos y teoremas relacionados con las temáticas ya estudiadas, y apoyar al desarrollo de las habilidades necesarias para producir demostraciones formales, esta vez en el marco de la geometría del espacio. En tal sentido, abordar asuntos como la visualización en tres dimensiones (3D) y la exploración con objetos virtuales que están en 3D (con la ayuda de software especializado), se convierte en uno de los ejes central del curso, dado que ello cambia esquemas de pensamiento con relación al contexto de la geometría plana.

De manera específica, los propósitos del espacio son:

1. Relacionar al estudiante con procesos matemáticos, tales como: intuir, conjeturar, interpretar, crear, diseñar estrategias, ensayar - errar - corregir, explorar, razonar, generalizar; entre otras en el contexto de la geometría del espacio.
2. Ampliar el sistema axiomático de la geometría euclidiana plana para incluir los elementos propios de la geometría del espacio.
3. Consolidar el desempeño comprensivo de los estudiantes dentro de un sistema teórico de la geometría, afianzando la habilidad para hacer demostraciones formales por medio del planteamiento de ideas y estrategias que involucran conceptos geométricos.
4. Comunicar correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. Participar en el marco de una comunidad de práctica cuya empresa es continuar con el proceso de aprendizaje de la geometría plana e inicial el respectivo al de la geometría del espacio. En esa comunidad, el trabajo cooperativo (en grupo) es fundamental –ver metodología-

[70] ADD. Acompañamiento directo de docente (Decreto 0808 de abril 25 de 2002, Artículo 5.)
[71] TI: Trabajo Independiente

5. Usar adecuadamente el software de geometría dinámica Cabri 3D con el objetivo de solucionar problemas de la geometría del espacio en correspondencia con una teoría específica.
6. Experimentar una manera de gestionar una clase de geometría, alternativa a la tradicional –ver metodología-.

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que el estudiante durante el curso:

1. Establezca conjeturas respecto de propiedades o relaciones de la geometría del espacio.
2. Use representaciones gráficas 3D como apoyo en la interpretación de conceptos y relaciones geométricas.
3. Valide proposiciones con argumentos formales que se ciñan al sistema axiomático de referencia.
4. Use con significado los conceptos, propiedades y relaciones geométricas, tanto de la geometría plana como la del espacio, para justificar hechos geométricos. [Los anteriores propósitos se corresponden con la competencia básica del educador colombiano: Conocer y utilizar proceso y conceptos fundamentales de las matemáticas]
5. Comunique correctamente, en el marco de una teoría específica, argumentos que refuten, apoyen o complementen ideas. [Se corresponde con la competencia básica del educador colombiano: Comunicarse efectivamente de manera verbal y no verbal]
6. Usa adecuadamente un software de geometría dinámica con el objetivo de extraer elementos de una situación, resultado del dinamismo de las representaciones obtenidas en el software, como recurso en la elaboración de justificaciones. [Se corresponde con la competencia básica del educador colombiano: Usar de manera responsable los medios y tecnologías de la información y comunicación]
7. Desarrolle actitudes propias de un futuro profesor de matemáticas (Puntualidad, responsabilidad con las tareas asignadas, participación y proposición de actividades y soluciones a las mismas de manera activa y autónoma, entre otras).

IV. CONTENIDOS

1 Propiedades de Cuadriláteros

1.1. Cuadriláteros en un plano
1.2. Paralelismo de rectas
1.3. Cuadriláteros especiales (paralelogramo, rectángulo, rombo, trapecio, cometa)

2 Semejanza de triángulos

2.1. Proyección paralela
2.2. Criterios de semejanza
2.3. Teoremas fundamentales de la semejanza

3 Relación de perpendicularidad y paralelismo en el espacio

3.1. Definición de perpendicularidad para rectas y planos
3.2. Propiedades fundamentales de planos y rectas paralelos
3.3. Ángulos diedros
3.4. Planos perpendiculares
3.5. Teoremas asociados
3.6. Poliedros: tetraedro regular y cubo

4 Circunferencia y esfera

4.1. Propiedades de las circunferencias y las esferas
4.2. Tangencia de planos y rectas a una esfera y circunferencia, respectivamente.

V. METODOLOGÍA

El curso se desarrollará a través del diálogo participativo, en el que intervienen profesor-estudiante, estudiante-estudiante, por el cual se busca la construcción colectiva de conceptos y relaciones y la consolidación de los procesos argumentativos propios de la estructuración formal del sistema axiomático de la geometría euclidiana. También se realizarán talleres en forma grupal que permitan el acercamiento a los resultados fundamentales de los temas estudiados y lleven a la comprensión y a la solución de problemas que involucren las temáticas del curso. Para el desarrollo de las actividades que buscan favorecer la construcción del sistema teórico del curso se utiliza los softwares de geometría dinámica Cabri II plus y Cabri 3D. Específicamente, el profesor tiene el papel de proponer problemas que propicien la actividad demostrativa, y ser dinamizador de la discusión matemáticas que tenga lugar con respecto a la producción de los estudiantes en cuanto a la solución de los problemas. Por su parte, los estudiantes, como se vislumbra de lo anterior, deben ser actores enérgicos de la clase pues de su producción depende el desarrollo de esta. Ellos deben solucionar un problema usando, por lo general, los softwares ya precisados; presentar ante la clase su producción; refutar o apoyar ideas que se aborden en el marco de la presentación; y con ello, participar en la construcción del cocimiento a institucionalizar. Esta actividad permitirá repasar y afianzar los conceptos y teoremas relacionados con las temáticas estudiadas, y apoyar al desarrollo de las habilidades necesarias para producir demostraciones formales; además describe perfectamente el *Trabajo de acompañamiento directo del docente* que se lleva a cabo en las sesiones de clase.

Las actividades de *trabajo independiente* se centran en:

- Realización de trabajos en grupo (formados por dos o tres personas) a manera de **tarea oficial** extraclase.
- Realización de las notas de clase. Las mismas consisten en el recuento que dé cuenta de lo ocurrido en el transcurso de una clase. En las notas de clase se deben describir las actividades propuestas en clase, y dar un recuento de las discusiones que estas ocasionaron y las respectivas conclusiones. Además, deben contener un relato sobre el uso de la geometría dinámica en clase, y el listado de las definiciones y hechos geométricos establecidos. Estas notas de clase se realizan por grupos; un grupo es escogido para cada clase. El documento Notas de Clase se comparte a toda la clase mediante sistemas de comunicación virtuales como Dropbox o email.
- Realización autónoma de ciertas actividades cuyo registro no necesariamente se recoge por parte del profesor

VI. EVALUACIÓN

En este espacio académico se valorará la participación y el compromiso del estudiante hacia el curso por medio de la asistencia a las clases y acompañamientos, mediante trabajos en grupo e individuales, comprobaciones escritas, exposición ante la clase de solución de problemas. Se llevará a cabo una evaluación formativa y participativa, con miras a desarrollar competencia geométrica. La calificación final se obtiene de acuerdo con los siguientes porcentajes.

Comprobaciones escritas y notas de clase	35 %
Tareas en grupo	20 %
Participación, trabajo individual, trabajo en clase	15 %
Examen final	30 %

Nota: 1) El promedio de las calificaciones obtenidas en los documentos Notas de Clase, realizados a lo largo del semestre, se convierte en una nota equivalente a un parcial, que se incluye con las demás calificaciones de parciales para obtener el 35% de la nota final.

2) Se tratará de hacer un parcial cada tres semanas.

VII. BIBLIOGRAFÍA

MOISE, E (1964). *Elementary Geometry from an advanced standpoint.* Addison – Wesley Publishing Company.

ALFONSO, H. (1997). *Geometría Plana y del Espacio.* Universidad Pedagógica Nacional.

BARNETT, R. (1991). *Geometría.* Mc Graw Hill.

CAMPOS, A. (1994). Axiomática *y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Universidad Nacional de Colombia.

Anexo 5. Sistema Teórico

Postulados

P. de Existencia Puntos, rectas y planos existen.

P. Conjunto de puntos Rectas y planos son conjuntos no vacíos de puntos.

P. Dos Puntos – Recta Dados dos puntos diferentes existe una única recta que los contiene.

P. Recta – Reales Dada una recta m, se establece una correspondencia con $\mathbb{R}$ tal que:
i. A cada punto A en m le corresponde un único $x \in \mathbb{R}$.
ii. A cada $x \in \mathbb{R}$ le corresponde un único punto A en m.

Nota: El número x asignado al punto A se denotará como $c(A)$ y se leerá coordenada de A.

P. de la Distancia Dados dos puntos A y B, existe un único $x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ tal que $x = AB$.

P. Llaneza del plano Dados dos puntos A y B diferentes en un plano α entonces $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$.

P. Tres Puntos – Plano Dados tres puntos A, B y C existe un plano que los contiene y si son no colineales, entonces existe un único plano β que los contiene.

P. Plano – Tres Puntos Dado plano β entonces existen A, B y C no colineales que pertenecen a β.

P. Rayos – Reales Dada la $\overleftrightarrow{OP}$ en el plano α y los semiplanos δ_1 y δ_2 determinados por $\overleftrightarrow{OP}$ en α. Se puede establecer una correspondencia entre los números reales x entre 0 y 180 y los puntos $A \in \delta_1$ de tal forma que:
i. A todo $\overrightarrow{OA}$ corresponde un único número x.
ii. A todo número x *entre* 0 y 180 corresponde un único $\overrightarrow{OA}$.
iii. Al $\overrightarrow{OP}$ le corresponde $x = 0$.
iv. Al $\overrightarrow{OQ}$ opuesto al $\overrightarrow{OP}$ le corresponde $x = 180$.

Nota: El número x asignado a $\overrightarrow{OA}$ se representará como $x = r_{A,\overrightarrow{OP}}$.

P. Medida de ángulo Dado $\angle ABC$, existe un único $x \in \mathbb{R}$, con $0 < x < 180$ tal que $m\angle ABC = x$.

P. Adición medida de ángulo Si $K \in int\angle ABC$ entonces $m\angle ABC = m\angle ABK + m\angle KBC$.

P. LAL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

P. Paralelas Dada una recta l y un punto $C, C \notin l$, sea m una recta paralela a l talque $C \in m$, entonces m es única.

P. Paralelas Dada una recta l y un punto $C, C \notin l$, sea m una recta paralela a l talque $C \in m$, entonces m es única.

P. Espacio Dado un plano, existe un punto que no pertenece a él.

P. Intersección de planos Si dos planos α y β, talque $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, entonces la intersección es por lo menos dos puntos.

Definiciones

D. Interestancia El punto B está entre los puntos A y C si y solo si:
a) A, B y C colienales.
b) $AC = AB + BC$.
Notación: $A - B - C$

D. Colinealidad A, B y C son colineales si y solo si existe una recta m tal que $A, B, C \in m$.

D. Segmento $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \mid A - X - B\}$.

D. Rayo $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$.

D. Punto medio M es punto medio de $\overline{AB}$ si y solo si: **(i)** $AM = MB$ y (ii) $A - M - B$.

D. Rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$ opuesto al $\overrightarrow{AB}$ si y solo si $C - A - B$.

D. Segmentos congruentes $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ si y solo si $AB = CB$.

D. Semirrecta $SemAB = \overrightarrow{AB} - \{A\}$.

D. Semiplano Dada recta m y plano α tal que $m \subset \alpha$, m determina en α dos conjuntos δ_1 y δ_2 llamados semiplanos, tal que:
a) $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset$.
b) $\delta_1 \cap m = \emptyset$.
c) $m \cap \delta_2 = \emptyset$.
d) $\delta_1 \cup \delta_2 \cup m = \alpha$.

D. Ángulo $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$ donde A, B, C no colineales.

D. de Interior de ángulo $int\angle ABC = \delta_{\overleftrightarrow{AB},C} \cap \delta_{\overleftrightarrow{BC},A}$. Nota: $\delta_{\overleftrightarrow{AB},C}$ es el semiplano determinado por la $\overleftrightarrow{AB}$ en el cual está el punto C.

D. Ángulos congruentes $\angle ABC \cong \angle MNO$ si y solo si $m\angle ABC = m\angle MNO$.

D. Ángulos par lineal $\angle ABC$ y $\angle ABD$ par lineal si y solo si
a) $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son rayos opuestos y
b) $A \notin \overleftrightarrow{BD}$.

D. Ángulos adyacentes $\angle ABC$ y $\angle DBC$ adyacentes si y solo si $D \in \delta_{\overleftrightarrow{BC},\sim A}$.

D. Rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ si y solo si $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{X\}$ y$\angle CXA$ recto

D. Triángulo $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ donde A, B, C no colineales.

D. Congruencia de triángulos $\Delta ABC \cong \Delta MNO$ si y solo si $\angle A \cong \angle M$, $\angle B \cong \angle N, \angle C \cong \angle O$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$, y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$

D. Mediatriz La mediatriz del $\overline{AB}$, $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$, es el conjunto de puntos del plano que equidistan de A y B. $\mathcal{M}_{\overline{AB}} = \{X \mid AX = XB, \text{donde } X, A, B \text{ coplanares}, \}$.

D. Altura de un triangulo $\overline{AK}$ es altura del ΔABC si y solo si:
a) $\overleftrightarrow{AK} \cap \overleftrightarrow{BC} = \{K\}$.
b) $\overleftrightarrow{AK} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

D. Recta paralela Dos rectas son paralelas si son coplanares y no se intersecan.

D. Circunferencia Todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano.

D. Centro Punto fijo de la circunferencia.

D. Radio Distancia constante entre el centro y un punto de la circunferencia.

D. El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.

D. cuadrilátero plegado Dados cuatro puntos no coplanares tales que cada punto es extremo de exactamente dos segmentos. Entonces la unión de los segmentos determinados por los cuatro puntos es un **cuadrilátero plegado**.

D. Esfera Dado un punto P, un $r \in \mathbb{R}^{+}$, entonces el conjunto de puntos del espacio que equidista r unidades en P se llama esfera. **Notación:** $\circledast P_r$.

D. Recta perpendicular a un plano Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano, que contienen al punto de intersección de la recta y el plano.

D. El **conjunto/plano mediador** de un segmento es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento.

D. Rectas alabeadas. Dos rectas son alabeadas si no se intersecan y no son coplanares.

Teoremas

T. Recta – Dos puntos Dada la recta m, existen puntos A y B en ella diferentes.

T. Recta – Infinitos puntos Dada la recta m, existen infinitos puntos en ella diferentes.

T. Punto entre Dados puntos A y B diferentes, existen un punto C tal que $A - C - B$.

T. Punto al lado Dados puntos A y B diferentes existen un punto C tal que $A - B - C$.

T. Recta – Rayo – Segmento
- Dado el $\overline{AB}$, se tiene entonces el $\overrightarrow{AB}$ y viceversa.
- Dado el $\overline{AB}$, se tiene entonces el $\overleftrightarrow{AB}$ y viceversa.
- Dado el $\overleftrightarrow{AB}$, se tiene entonces el $\overrightarrow{AB}$ y viceversa.

T. Existencia rayo opuesto Dado el $\overrightarrow{AB}$ entonces existe el $\overrightarrow{AD}$ opuesto a él.

T. Existencia del punto medio Dados los puntos A y B diferentes existe un único punto C tal que C es punto medio del $\overline{AB}$.

T. Localización de puntos Dado $\overrightarrow{AB}$ y $x > 0$. Existe un único punto $D \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AD = x$.

T. Punto – Infinitas rectas Dado un punto A en un plano β entonces existen infinitas rectas en β que contienen al punto A.

T. Recta, punto – Plano Dada una recta y un punto que no pertenece a la recta, entonces existe un único plano que los contiene.

T. Dos Rectas – Plano Dadas dos rectas diferentes. Si las rectas se intersecan entonces existe un único plano que las contiene.

T. Intersección de rectas Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es un único punto.

T. Axioma de Pash Dados δ_1, δ_2 semiplanos determinados por m en plano α y los puntos $A, B, C \in$**T. Ángulo coplanar** Dado $\angle ABC$ entonces existe un único plano α tal que $\angle ABC \subset \alpha$.

T. Construcción de ángulos Dado $\overrightarrow{AB}$ y $K \notin \overleftrightarrow{AB}$, $x \in \mathbb{R}$ $(0 < x < 180)$ entonces existe un único $\overrightarrow{AC}$ tal que $C \in \delta_{\overline{AB},K}$ y $m\angle BAC = x$.

T. Existencia perpendicular punto interior Dados recta l y plano α, $l \subset \alpha$ y un punto $A \in l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Existencia perpendicular punto externo Dados recta l y plano α y un punto $A \notin l$ entonces existe una única recta m en α tal que $m \perp l$ por A.

T. Par lineal – Congruentes Si $\angle ABC$ y $\angle ABD$ par lineal con $\angle ABC \cong \angle ABD$ entonces $\angle ABC$ y $\angle ABD$ rectos.

T. Mediatriz $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$ es la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por el punto medio.

T. Existencia mediatriz Dado el $\overline{AB}$ existe una única $\mathcal{M}_{\overline{AB}}$.

T. ALA Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. LLL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ y $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\overline{AC} \cong \overline{MO}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. AAL Dados ΔABC y ΔMNO. Si $\angle A \cong \angle M$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ y $\angle B \cong \angle N$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. Cateto – Hipotenusa Dados ΔABC y ΔMNO rectángulos con $\angle B$ y $\angle N$ rectos. Si $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{AC} \cong \overline{OM}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta MNO$.

T. 180 Si ΔABC entonces $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$.

T. Plano - infinitos puntos Dado plano α, existen infinitos puntos en él no colineales.

T. Existencia circunferencia Dado el plano α, entonces existe una circunferencia en él.

T. Circunferencia – Infinitos puntos Si $\odot P_x$, entonces existen infinitos puntos en ella.

T. Punto entre dos puntos Dado un punto P en una recta m entonces existen dos puntos Y, Z tal que $Y - P - Z$.

T. Ángulo inscrito en semicircunferencia Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

T. Puntos no coplanares Si cuatro puntos son no coplanares, entonces ningún trío de ellos son colineales.

T. Punto - infinitas rectas (ε) Dado un punto, hay infinitas rectas en el espacio que lo contienen.

T. Existencia esfera Las esferas existen.

T. Intersección de planos Si dos planos se intersecan, la intersección es una recta.

T. Punto en plano Dado un punto, existen infinitos planos que lo contienen.

T. Recta en plano Dada una recta existen infinitos planos que la contienen.

T. Fundamental de la perpendicularidad Si una recta m interseca al plano α y m es perpendicular a dos rectas l_1 y l_2 contenidas en α, entonces m es perpendicular al plano.

T. Interestancia – equidistancia en el espacio Sean A, B, X, T puntos no coplanares tales que T y X equidistan de A y B. Sea S un punto tal que $X - S - T$ entonces S equidista de A y B.

T. Recta-plano perpendicular punto interno Dada una recta y un punto en ella, existe un plano perpendicular a la recta por ese punto.

T. Plano-recta perpendicular punto interno Dado un plano y un punto de este, existe una recta perpendicular al plano por ese punto.

T. Recta-plano perpendicular punto externo Dado una recta y un punto externo a ella, existe un plano perpendicular a la recta que contiene el punto dado

T. Plano-recta perpendicular punto externo Dado un plano y un punto externo a él, existe una recta perpendicular al plano que contiene al punto dado.

T. Plano mediador: el conjunto de puntos que equidistan de A y B ($\mu_{\overline{AB}}$) es igual al plano que contiene todas las mediatrices del $\overline{AB}$

T. Existencia conjunto/plano mediador: Dado un segmento existe el plano mediador de este.

T. Perpendiculares a plano - paralelas. Si dos rectas son perpendiculares a un plano, entonces son paralelas.