DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL PROCESO DE INSTRUCCIÓN DE UNA CLASE DE PRIMERO DE BACHILLERATO

Tesis doctoral para optar al título de doctor en la Universidad de Jaén

Presentada por

MANUEL GARCÍA ARMENTEROS

Dirigida por:

DR. ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE

y

DRA. CARMEN SÁNCHEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD DE JAÉN

JAÉN, 2008

ÍNDICE

RESUMEN

En esta investigación se presenta un estudio teórico-experimental sobre el significado y la comprensión del límite de una función en primero de Bachillerato de la Educación Secundaria, cuyo objetivo general es avanzar en la identificación, descripción y explicación de los fenómenos didácticos de naturaleza ontosemiótica que influyen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, del objeto matemático *límite* con objeto de elaborar conocimiento matemático para la mejora de la enseñanza del límite funcional en el Bachillerato.

En el aspecto teórico se ponen en funcionamiento constructos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS), tales como las trayectorias epistémica, docente, discente e instruccional, así como las idoneidades epistémica, interaccional y cognitiva. Además, se analizan los significados institucionales de referencia, pretendido e implementado, y los significados personales de los estudiantes participantes en el estudio, correspondientes a un proceso instruccional en una clase de primero de Bachillerato en la que se desarrolla el tema del límite de una función.

El trabajo experimental comienza con el estudio del curso de Matemáticas en primero de Bachillerato y el límite en el currículo del citado curso. Seguidamente, se efectúa un análisis de los significados epistemológico-históricos del límite de una función con el objetivo de determinar los significados institucionales de referencia de dicho objeto. Posteriormente, se estudia el significado institucional pretendido, para lo cual se analiza el libro de texto al constituir éste el apoyo del profesor en la clase.

Se estudia una clase de primero de Bachillerato durante el desarrollo de cuatro sesiones sobre el concepto implicado en la investigación, construyéndose, a partir de los datos de observación obtenidos, las trayectorias epistémica, docente, discente e instruccional. Esto ha permitido analizar los significados del límite presentes en cada una de las sesiones, al hacer explícitos los distintos estados de las trayectorias. También se han detectado los conflictos semióticos, tanto los que induce o controla el profesor como aquellos otros que muestran los estudiantes. Asimismo, se han detectado diversas técnicas cronogenéticas y topogenéticos a lo largo de la trayectoria instruccional.

Para los significados personales se ha elaborado y aplicado un cuestionario que consta de 11 ítems sobre el concepto, buscando significados, conflictos semióticos y posibles errores de los estudiantes.

Por último, a partir de los datos obtenidos con las trayectorias, se han estudiado las idoneidades epistémica, interaccional y cognitiva, lo cual aporta datos de cómo poder configurar una enseñanza adecuada de este objeto matemático en primero de Bachillerato.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza-aprendizaje del límite en los niveles de educación secundaria y universidad es un tema ampliamente investigado, siendo el enfoque métrico-analítico del límite el centro de atención. Con la reforma educativa de la Logse en los centros de secundaria el estudio de este concepto ha variado sensiblemente, de tal forma que de desarrollos formales se ha pasado a otros más intuitivos que, precisamente por eso, llevan a veces a la creencia de que son más fáciles para los estudiantes. Sin embargo, la experiencia en clase nos hizo pronosticar que en los planteamientos más intuitivos siguen apareciendo numerosas dificultades y errores en los estudiantes, incluso algunos de ellos bastante inesperados, pero que no por ello dejan de ser errores.

Del contraste entre las creencias transparentes que defienden la disminución de dificultades con este nuevo enfoque y la experiencia del investigador de esta Memoria, surgió la idea de buscar, mediante el análisis de una clase sobre el límite funcional, qué tipo de elementos y fenómenos didácticos aparecen en el desarrollo de las clases sobre el concepto.

Un problema que surge en este tipo de estudios es la necesidad de que al tener que ser pormenorizado y, por tanto, la información que se obtiene debe ser muy densa, es difícil generalizarlo, por lo que nos hemos centrado en un caso. Es decir, se ha analizado de modo minucioso lo que el profesor hace en clase con sus alumnos cuando desarrolla el tema de límites. Paralelamente, se ha utilizado como marco teórico el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (ya contrastado en trabajos donde se tratan aspectos relacionados con la tesis, como los de Godino, 2002, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005 y Godino, Contreras y Font, 2006), el cual permite realizar los análisis oportunos y que facilitara la elaboración de las idoneidades didácticas, todo ello de cara a las aportaciones para la mejora de la enseñanza de los profesores de educación secundaria.

La experiencia como profesor de educación secundaria me hace intuir que los resultados obtenidos en este trabajo pueden ser de utilidad a los profesores y alumnos del nivel educativo de primero de Bachillerato en cuanto a la instrucción del límite de una función. Se consiga o no, será cuestión de verlo posteriormente, pero, al menos, ha sido el hilo impulsor de la elaboración de la Tesis.

Como toda investigación primaria, el desarrollo de la misma surge para dar respuesta a intuiciones que se cristalizan en forma de preguntas que se formulan. Los interrogantes que nos planteamos y a los que se intenta dar respuesta, al menos de forma parcial, son los siguientes:

1. ¿Cuáles son los significados institucionales epistemológico-históricos y de referencia del límite de una función?

En el capítulo 3 se ha acudido a la historia de las Matemáticas, utilizando textos originales cuando ha sido posible, para tratar de extraer aquellos significados del límite que han ido evolucionando a lo largo del tiempo. Para ello se ha realizado un análisis epistémico basado en las entidades primarias de la cognición matemática, utilizando aquellas entidades más destacadas que han podido dar sentido a un significado concreto.

Pero estos significados no pueden ser los de referencia para el investigador, aunque sí que tienen una gran relación con ellos. Por esto, se ha tenido en cuenta la experiencia del investigador y su equipo, la cual, junto al desarrollo histórico, ha permitido hacer unos significados de referencia que son los que han sido empleados a lo largo del trabajo.

2. ¿Cuál es el significado pretendido del límite de una función en la institución primero de Bachillerato?

Para dar respuesta a este interrogante se ha elaborado el capítulo 4, en el cual se efectúa un análisis ontosemiótico de las configuraciones global y parciales del límite correspondientes al libro de texto de primero de Bachillerato que utiliza el profesor investigado y que corresponde a lo que se pretende desarrollar en clase, detectando aquellos puntos en los que aparecen conflictos de significado. Para ello, nos hemos basado en Contreras y Sánchez (1997 y 1998), Contreras, Luque, Ordóñez, Ortega y Sánchez (1999b), y Sánchez y Contreras (1995a y 1997), Para realizar estos estudios el texto se ha descompuesto en unidades de análisis, se han detectado conflictos semióticos potenciales y se han propuesto las posibles funciones semióticas ausentes en el discurso del libro de texto, todo con el objetivo de dar pautas para la superación de dichos conflictos semióticos.

3. ¿Qué tipo de significado es el que verdaderamente se implementa en la clase observada?

En el capítulo 5 se trata de dar respuesta a esta importante cuestión. Por una parte, se analiza la trayectoria epistémica de las cuatro sesiones de clase, obteniéndose un conjunto de configuraciones epistémicas en las que se hacen explícitos conflictos de significado. En segundo lugar, se estudian las configuraciones docente y discente en las que se pone de manifiesto los distintos estados y su justificación respecto al papel del profesor y al papel de los estudiantes en el desarrollo de la enseñanza.

Por último, se desarrolla la trayectoria instruccional, fundamental en el estudio para poder relacionar las configuraciones anteriores. En dicha trayectoria se analizan los significados, los conflictos semióticos inducidos por el profesor o estudiados expresamente para la superación de los mismos, así como los conflictos semióticos mostrados por los alumnos. Además, se hacen explícitas las técnicas cronogenéticas y topogenéticos típicas de la enseñanza, incluso se detallan algunos fenómenos didácticos presentes en el discurso profesor-alumnos.

4. ¿Cuál es el significado institucional evaluado?

El capítulo 6 trata de dar respuesta al significado institucional evaluado. Una vez analizado el significado institucional implementado y para dar validez de contenido, el profesor y su equipo de investigación seleccionaron un conjunto de cuestiones, íntimamente relacionadas con los conflictos de significado, extraído del significado institucional implementado, conformando un cuestionario de once ítems que fue aplicado a los alumnos.

Además, se efectúa un análisis a priori de las diferentes cuestiones con el objetivo de determinar lo que se indaga en cada cuestión, así como la hipotética trayectoria funcional semiótica seguida por el estudiante a la hora de resolver el ítem.

5. ¿Cuáles son los significados personales de los estudiantes correspondientes a sus respuestas al cuestionario?

En el capítulo 7 se analizan las respuestas de los alumnos a los ítems del cuestionario, para lo cual se ha realizado un análisis según las entidades primarias de la instrucción matemática que se desarrollan en el EOS. Dentro de las entidades procedimentales, conceptuales y proposicionales, se han detectado conflictos semióticos, los cuales se describen para cada uno de los ítems, aunque posteriormente son unificados.

Para dar más información, en cada uno de los ítems se hacen explícitas algunas de las respuestas de los alumnos, tratando de clarificar los conflictos de significado que han mostrado éstos.

6. ¿Cuáles son los criterios de idoneidad correspondientes al proceso de estudio desarrollado?, ¿de qué variables o factores depende la idoneidad de un proceso de instrucción matemática?, ¿en qué medida es idóneo/eficaz el proceso de instrucción observado?

Para poder aportar datos del proceso de instrucción, de cara a establecer futuras pautas de comportamiento en clases naturales del tipo de las descritas en la investigación, se han estudiado tres tipos de idoneidades: epistémica, interaccional y cognitiva. Todo ello se describe en el capítulo 8.

En la idoneidad epistémica nos referimos al grado de representatividad de los significados institucionales implementados respecto al significado de referencia. En la idoneidad cognitiva nos referimos al grado en el que los significados pretendidos/implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los implementados. Por último, en la idoneidad interaccional se mide el grado en que las configuraciones y trayectorias permiten identificar conflictos semióticos y resolverlos mediante la negociación de significados.

El trabajo que se presenta aporta información inicial a los interrogantes planteados y por eso abre nuevas líneas de investigación para los investigadores interesados en temas similares al estudiado. Sin embargo, confiamos en que las aportaciones y la bibliografía sean útiles, tanto para los investigadores como para los profesores de matemáticas de educación secundaria.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. ANTECEDENTES

1.1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.1. Introducción

En la enseñanza de las Matemáticas de primer y segundo año del Bachillerato español, los conceptos básicos del Análisis Matemático representan un alto porcentaje de los contenidos del currículo de las asignaturas de Matemáticas —aproximadamente el 40%—, pudiéndose observar en los resultados de las evaluaciones un preocupante fracaso académico en muchos de los estudiantes que se enfrentan a la comprensión de los conocimientos de esta rama de la Matemática. Este fenómeno, unido al hecho de que ambos cursos son verdaderamente preuniversitarios para el alumno, dota de gran importancia social a su formación matemática, ya que una comprensión superficial de las nociones del Cálculo Infinitesimal les conduce a una deficiente formación que, posteriormente, redundará en una posible frustración en las aulas universitarias, llevándoles muchas veces al abandono de los estudios.

Dado que el concepto de límite de una función es uno de los más controvertidos del Análisis Matemático, en cuanto a su comprensión, al estar asociado a las ideas de infinito potencial y actual, su enseñanza siempre ha representado una fuente de problemas didácticos de muy difícil solución. Esto hace que no extrañe la existencia de numerosos trabajos de investigación relacionados con su aprendizaje. Incluso, se puede apreciar en la literatura al uso que la profundización acerca de la naturaleza y fundamentación de esta noción, junto a otras del Análisis Matemático, ha sido motor de la construcción y formalización de algunas de las teorías más conocidas hoy en la Didáctica de las Matemáticas, como es el caso de la teoría APOS (Dubinsky, 1991; Asiala y al., 1996; Baker y al., 2000).

Desde marcos teóricos diferentes, se han realizado memorias de doctorado sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en los niveles pre y universitarios. En nuestro país, por ejemplo, Sánchez (1997) lo estudió desde la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos; Espinoza (1998) aplicó la teoría antropológica de lo didáctico; Blázquez (1999) utilizó el método de la epistemología genética. En otros países, investigadores como Vinner y Tall (1981), Cornu (1983), Robinet (1983), Antibi (1988), Williams (1991), Sierpisnka (1991), Deledicq (1994); y, más recientemente, Williams (2001), Szydlik (2000), Schneider (2001), Mamona-Downs (2001) y Przenioslo (2004), o bien han utilizado la ingeniería didáctica, o la teoría de obstáculos epistemológicos, o el APOS, o la teoría antropológica de lo didáctico. Sin embargo, no se conocen memorias de tesis sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en las que se haya aplicado el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Contreras, 2001; Contreras y Font, 2002; Godino, 2002; Contreras, García y Sánchez, 2003; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005 y Godino, Contreras y Font, 2006).

Esta situación, nos ha impulsado a la realización de este trabajo de investigación el cual es de naturaleza epistemológica-cognitiva-curricular sobre "las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos, respecto al concepto de límite de una función en 1º de Bachillerato". Se trata de un estudio que busca describir, explicar e identificar factores condicionantes de la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un contexto institucional fijado.

Nos proponemos, asimismo, mostrar la dialéctica existente entre los aspectos prácticos, tecnológicos y científicos en la investigación didáctica, así como las tres dimensiones básicas involucradas en un problema de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional. Por tal razón, la solución del problema nos lleva a plantear otros subproblemas de naturaleza epistemológica y cognitiva: la clarificación epistemológica de los significados institucionales del concepto de límite a lo largo de su evolución en el devenir científico, su impacto en los currículos matemáticos y los significados personales de los estudiantes de 1º de Bachillerato en torno a la noción, tratando de determinar las dificultades de comprensión inherentes, tanto a los cambios entre los sistemas de representación semiótica como a los problemas subyacentes a la propia transposición didáctica de significados. Además, también se analizarán las idoneidades epistémica, instruccional y cognitiva del proceso de estudio con el objetivo de orientar el análisis y valoración de tales procesos.

1.1.2. Problemática docente

Este trabajo surge de la conjunción de varios intereses complementarios: por una parte, la experiencia del autor en la enseñanza de Matemáticas en centros de Bachillerato; por otra, su implicación en la elaboración de diversos proyectos de investigación sobre la enseñanza de conceptos del Análisis Matemático, y también su presencia activa, por medio de diversas comunicaciones, en numerosos congresos acerca de la Didáctica de la Matemática; por último, su formación en el EOS, como lo acreditan los cursos de doctorado realizados en las Universidades de Granada y Jaén.

La idea impulsora que motivó esta investigación hay que centrarla en la propia observación del investigador en el aula, en cuanto a su experiencia en la enseñanza del objeto límite de una función, así como, en el hecho de que esta noción es el germen de todos los conceptos básicos del Análisis Matemático y, por tanto, responsable directo de las dificultades que representa esta rama de las Matemáticas para los estudiantes del Bachillerato. La pregunta inicial que surge, a raíz de las consideraciones anteriores, es la siguiente: ¿están los estudios sobre la investigación en la enseñanza de límite de una función sesgados, o bien a la faceta cognitiva, o bien a la faceta institucional? Además, dada la intersubjetividad, presente e ineludible del aula, y de la influencia de la semiosis en los procesos de estudio, ¿habría que enfocar el estudio desde perspectivas en las que se conjuntaran tanto los aspectos institucionales como los personales, a fin de intentar explicar, de modo más clarificador, las dificultades de carácter ontosemiótico que los estudiantes muestran secularmente en la comprensión de esta noción?

Como puede observarse, el problema que se pretende abordar, al estar íntimamente relacionado con la práctica del profesor en el aula de 1º de Bachillerato, tiene una componente *instruccional*. Además, como la enseñanza está dirigida a estudiantes y nos interesamos por las dificultades de comprensión, tiene una dimensión *cognitiva*. Al contemplarse el aspecto de tipo institucional, subyace también una componente *epistemológica*. Por último, al tratarse de la noción de límite de una función, coexiste un componente *semiótico* propio del lenguaje del Análisis Matemático.

Debido a su complejidad, las preguntas anteriores encierran una serie de interrogantes más específicos que podemos clasificar en diversas categorías:

a) Epistemológica: ¿Qué significados institucionales son inherentes al desarrollo evolutivo del objeto matemático límite de una función?, ¿qué problemas dieron lugar a un determinado tipo de significado?, ¿qué métodos se emplearon en la resolución de tales problemas?, ¿qué tipo de conflictos semióticos históricos se dieron?

b) Cognitiva: ¿Cómo coordinar los aspectos intuitivo-geométricos, inherentes al desarrollo epistemológico-evolutivo del límite, con los numéricos?, ¿son transferibles ciertos procedimientos de cálculo de límites desde el profesor al alumno?, ¿qué influencia pueden tener los conflictos semióticos en las posibles no transferencias de dichos procedimientos?, ¿es pertinente introducir la formalización analítica del límite, por medio del δ y el ε, a estos alumnos?, ¿cómo coordinar las diversas representaciones semióticas del límite de modo que pueda emerger en el sujeto el objeto límite de una función?

c) Instruccional: Dado que en la formación actual de los estudiantes de Bachillerato la intuición juega un papel cada vez más relevante, relegándose paralelamente los aspectos de tipo formal, ¿qué contenidos sobre el objeto límite de una función son necesarios abordar en su enseñanza de modo que se dé una continuidad, y no una ruptura, en la formación del alumno?, ¿qué recursos serían pertinentes para abordar situaciones de enseñanza encaminadas a superar las dificultades y, por tanto, a facilitar la emergencia del objeto?

Aunque el problema se ha centrado sobre un contenido matemático particular, pensamos que su solución puede aportar criterios y métodos de indagación de interés más general, esto es, se puede aplicar a otros contenidos y a otros currículos. El problema de investigación que se plantea es el estudio de los factores epistemológicos, cognitivos e instruccionales condicionantes del grado de estudio de un contenido matemático en un contexto institucional determinado.

1.1.3. El curso de Matemáticas en primero de Bachillerato.

Las Matemáticas en el Bachillerato deben cumplir tres funciones principales: instrumental, formativa y de fundamentación teórica.

- Instrumental, desde el punto de vista de aplicar las estrategias y herramientas matemáticas a las actividades de las distintas materias y a la actividad profesional.
- Formativa, como contribución al desarrollo práctico de las capacidades de análisis y de síntesis, de relación y de generalización, fomentando actitudes de trabajo sistemático y ordenado, constancia en la búsqueda de soluciones, precisión en el razonamiento y en el lenguaje simbólico, características propias del trabajo matemático. Estas capacidades y actitudes contribuyen en gran medida a la formación integral del alumnado.
- Fundamentación teórica, dirigida a construir la base fundamental de los conocimientos matemáticos que deben adquirirse en el Bachillerato para lograr la preparación adecuada y suficiente previa a los estudios universitarios. Es una meta a alcanzar el sustituir la mera intuición, sin prescindir de ella, por la capacidad de abstracción.

El curso de Matemáticas de Primero de Bachillerato se imparte en cuatro horas semanales y está enmarcado en el Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud, tanto en el itinerario de Ciencias de la Salud, como en el de Ciencias e Ingeniería (Bescós y Pena, 2002). Los alumnos que estudian esta materia proceden del segundo ciclo de la ESO, 4º curso, y han cursado la asignatura de "Matemáticas *B*" por estar incluida en esta modalidad de Bachillerato.

La formación previa de Matemáticas en estos alumnos es muy variada y deficiente, dado que el currículo de la ESO está enfocado para alcanzar sólo conocimientos iniciales de los conceptos básicos; además, el problema se agrava si observamos que en estos cursos la temporalización de la asignatura contempla sólo tres horas semanales.

La primera paradoja surge cuando se piensa que los dos años de Bachillerato que el alumno debe cursar están enfocados hacia una preparación adecuada para su ingreso en la Universidad y el profesor se debate internamente sobre qué metodología adoptar: por una parte, la necesaria preparación para la Universidad nos lleva a valorar preferentemente la abstracción frente a las aplicaciones concretas; por otra, la precaria formación del alumno en Matemáticas, su predisposición a los aprendizajes intuitivos y su rechazo a los aspectos formales, conduce a desarrollar la intuición frente al formalismo.

En cualquier caso, son cuatro los grandes Bloques en que se divide la asignatura de Matemáticas I que, por norma general, se suelen ajustar a la siguiente temporalización:

- Bloque I: Aritmética y Álgebra (números reales, polinomios, ecuaciones, inecuaciones, sistemas y números complejos), al que se dedican 7 semanas y un total de 28 horas.
- Bloque II: Geometría (razones trigonométricas, resolución de triángulos, geometría analítica plana y cónicas), con igual número de semanas y horas que el bloque anterior.
- Bloque III: Análisis (funciones reales de variable real, límites de funciones, continuidad y cálculo diferencial), en él se emplean 11 semanas, es decir, 44 horas.
- Bloque IV: Estadística (distribuciones bidimensionales, combinatoria, probabilidad y distribuciones de probabilidad), que se desarrolla en 5 semanas, es decir, 20 horas.

Por último, hay que considerar que partimos de tres premisas, en cierto modo, poco alentadoras: la escasa preparación "matemática" del alumnado que se incorpora al Bachillerato, la densidad de contenidos de que consta el curso y la falta de tiempo para impartir la materia. Son tres cuestiones a tener en cuenta como factores que pueden influir en la asimilación de contenidos por parte del alumnado e incidir en el abandono de los estudios en el primer curso de Bachillerato, hecho claramente constatable.

1.1.4. El *límite de una función* en el currículo de Matemáticas I

Admitiendo que el objeto límite es uno de los contenidos más importantes de la rama de las Matemáticas que denominamos Análisis Matemático*,* es lógico que el currículo de Matemáticas I lo contemple de manera exhaustiva, aunque su enseñanza-aprendizaje tiene una gran dificultad.

De partida, el objeto límite presenta una considerable complejidad y basta con fijarse en su desarrollo histórico para observar que hasta el siglo XIX no se alcanzó una definición tan precisa como la actual, aunque en nuestro currículo se huye de la definición formal de límite para introducir el concepto desde un punto de vista más intuitivo y gráfico. Desde el punto de vista matemático, no debemos olvidar que este objeto es totalmente nuevo para los alumnos de este nivel, lo que, añadido a su complejidad, hacen del límite una de las nociones más difíciles de asimilar.

Si atendemos al desarrollo de la Unidad sobre el límite, la introducción de la misma conlleva, en primer lugar, un repaso del dominio de una función, imágenes y antiimágenes, que el alumno necesitará para seguir el desarrollo teórico.

Asimismo, se pretende que el alumno recuerde el procedimiento de cálculo de raíces de un polinomio y de factorización del mismo, procedimiento que necesitará para resolver la indeterminación del tipo 0/0. También se realiza un repaso de las características de determinadas funciones que les serán de utilidad en el cálculo de límites en un punto y en el infinito. Se insiste en el cálculo de dominios, ya que durante el desarrollo de la Unidad los alumnos constatarán que tiene sentido calcular el límite de una función en un punto que no es de su dominio.

Se recomienda que muchas de las actividades presentadas en este desarrollo deban ser resueltas de forma simultánea a las explicaciones teóricas, con el fin de ir reforzando los conceptos teóricos e ir trabajando los procedimientos de cálculo de límites. En definitiva, no se debe perder ninguna oportunidad para insistir en el concepto de límite de una función en el infinito y en un punto.

La utilización de representaciones gráficas de funciones es muy importante para la introducción de los contenidos relacionados con los límites y la continuidad de las mismas, y viceversa, a partir del cálculo de límites es aconsejable esquematizar gráficamente su significado.

Según Bescós y Pena (2002), el límite de una función en el currículo de Matemáticas I se desarrolla según los siguientes epígrafes:

- Idea intuitiva de límite de una función. Se opta por introducir el concepto de límite de una función mediante la representación gráfica de algunas funciones, pues la idea de *tendencia* a un determinado valor tiene una comprensión más fácil. En la mayoría de textos consultados de 1º de Bachillerato no se da la definición formal y, generalmente, ésta no se produce hasta el segundo curso.
- Cálculo de límites de funciones. Este epígrafe consta de los siguientes apartados:
  - Límites de funciones en el infinito. A partir de la representación gráfica de funciones es posible estudiar cuál es su comportamiento para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable. Se aprovechan los resultados para definir *asíntota horizontal* de una función.
  - Cálculo de límites de funciones en el infinito ($+\infty$ y $-\infty$). Se contemplan en este apartado los casos de límites de funciones polinómicas, racionales, irracionales y potenciales-exponenciales, y se recuerda que antes de calcular el límite de una función con radicales en $+\infty$ o en $-\infty$ es preciso determinar su dominio. Aparece un nuevo concepto: el de *indeterminación* y se trabajan las indeterminaciones propias en estos casos, a saber, $\infty-\infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0.(\pm\infty)$ y 1^{∞}.
  - Límites laterales de una función en un punto. Se definen mediante el empleo de funciones representadas gráficamente, junto con la elaboración de tablas de valores para ver el comportamiento de los mismos en torno a un punto.
  - Límite de una función en un punto. No se define este concepto de forma rigurosa; su existencia se relaciona con la existencia y coincidencia de los límites laterales y las funciones que introducen mejor este concepto son, fundamentalmente, las definidas a trozos. Se calculan los límites en un punto de forma gráfica y analítica y, como ya se ha indicado anteriormente, es más conveniente introducir primero los contenidos mediante soporte gráfico, para

después intentar que, a partir del resultado del cálculo del límite en un punto, se esboce el comportamiento de la función en el entorno del punto en el que se está estudiando el límite. Aparece en este apartado la última indeterminación a estudiar en este nivel, $\frac{0}{0}$, ya comentada en el inicio del desarrollo de esta Unidad y surge, también, el concepto de *asíntota vertical*.

- Propiedades de las operaciones con límites de funciones en un punto. El objetivo que se persigue con estas operaciones es formalizar el álgebra de límites en un punto y preparar una base para las propiedades de las funciones continuas, consecuencia de las propiedades de los límites.

En todo caso, se evita caer en un formalismo estricto, teórico y notacional, dada la complejidad del objeto límite en el primer curso de Bachillerato.

1.2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.

1.2.1. Introducción

Se describe este apartado según los paradigmas de investigación en el campo de la Didáctica del Análisis Matemático, ya que la mayoría de las aportaciones contienen, en general, elementos relacionados con cuestiones de tipo epistemológico, cognitivo y curricular.

Como podrá apreciarse a lo largo del capítulo, la investigación de la enseñanza del límite, en cuanto a las dificultades asociadas a su definición, a los errores que muestran los alumnos…, ha sido el verdadero germen de desarrollo de una rama de la Didáctica de las Matemáticas. Sólo teniendo en cuenta este hecho se encuentran múltiples trabajos de investigación en torno a esta noción. Si a lo anterior añadimos la progresión en el uso de las tecnologías durante estos últimos veinticinco años, el volumen de artículos que tratan el límite es tan denso que es complicado describir el estado de la cuestión en torno al mismo.

Aunque los trabajos son numerosísimos, es posible dar una visión global de los antecedentes si nos centramos en los diferentes marcos conceptuales, al menos en los más destacados, que se han ocupado de realizar investigaciones relacionadas con la instrucción del objeto límite.

Posteriormente, se aborda el trabajo realizado por miembros del grupo de investigación en Didáctica del Análisis Matemático y las incidencias que tienen en este trabajo, en cuanto precedentes de esta Memoria.

1.2.2. El Advanced Mathematical Thinking (AMT)

En esta línea de investigación es un antecedente, ya clásico, el trabajo de Vinner y Tall (1981), en el que se aplica este marco teórico a los conceptos de límite y continuidad a fin de estudiar los factores causantes del conflicto cognitivo originado por la ruptura entre el "concept image" y el "concept definition" del alumno. Tall (1991, 1992, 1994 y 1995), después de realizar un breve análisis de la enseñanza del Cálculo en diversos países, estudió las dificultades de los estudiantes en cuanto a su comprensión de los conceptos del Cálculo Infinitesimal, buscando las causas de dichas dificultades en cuanto al límite y postulando que su triple representación (gráfica, numérica y simbólica) es imprescindible para el aprendizaje del concepto.

Otra visión sobre el pensamiento matemático avanzado la da Cantoral (1997 y 2000) y Cantoral y Farfán (1998), donde se revisan distintos enfoques sobre la investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

La corriente investigadora que más desarrollo ha tenido, dentro del AMT, es la seguida por Dubinsky (1996), el cual, basándose en determinados constructos de la teoría de Piaget —como abstracción reflexionante, acción, esquema, …— , ha creado la teoría APOS (acción, proceso, objeto y esquema). Siguiendo esta corriente, en Cottrill y als. (1996), después de realizar una estudio crítico de la literatura sobre el concepto de límite desde la dicotomía del límite como proceso dinámico o como proceso estático, se efectúa una descomposición genética del límite basada en los términos teóricos, se aplica a la enseñanza una revisión de la descomposición genética y, por último, se discuten las observaciones realizadas.

Desde una perspectiva de las concepciones espontáneas que tienen los estudiantes asociadas a la idea de límite, en Williams (1990, 91), se estudiaron tres concepciones erróneas básicas de los alumnos respecto al límite: si se puede alcanzar; si se puede sobrepasar; y, el carácter estático del límite. Se diseñaron tres tipos de situaciones de enseñanza buscando el desequilibrio cognitivo que facilite el cambio conceptual deseado. Los resultados mostraron que las dos concepciones erróneas primeras eran más fácilmente superables que la concepción estática y se formularon varias hipótesis explicativas de las causas de la persistencia de la tercera concepción.

Este investigador, Williams (2001), utilizando la metodología de "repertory grids", dentro de un marco teórico de las metáforas específicas conceptuales y la extensión del significado, estudió las intuiciones de los estudiantes acerca del límite por medio del análisis de las respuestas a un cuestionario y a entrevistas. Las conclusiones detectaron que las dificultades conceptuales sobre el límite pueden explicarse, en parte, por la anulación del infinito actual de la matemática moderna, al intentar eliminar artificiosidad y paradojas matemáticamente complejas.

Szydlik (2000), investigó en estudiantes de 27 universidades las creencias acerca del cálculo y su relación con los conocimientos sobre el límite. En cuanto a éstos, tuvo en cuenta varios modelos del límite: por una parte, el límite como algo inalcanzable (Tall y Schwarzenber, 1978); por otra, el límite como movimiento (Tall y Vinner, 1981); y, por último, el límite como frontera que no puede ser rebasada (Cornu, 1991).

Los resultados indicaron que aquellos estudiantes que ven el cálculo como un conjunto de hechos y procedimientos para ser memorizados y aplicados, tienen conceptos erróneos del límite como una frontera que no puede ser cruzada o como inalcanzable. Aquellos otros que interpretan el cálculo como algo lógico y consistente, acceden a las definiciones formales del límite y tienen imágenes del concepto exentas de inconsistencias internas.

Mamona-Downs (2001), presenta una secuencia didáctica sobre el límite de una sucesión de cara a la formación de intuiciones sobre la noción en los estudiantes, que trata de solucionar los problemas derivados con la definición formal del límite. Para la enseñanza introductoria del límite propone los tres pasos didácticos siguientes: a) Iniciación y desarrollo de la intuición a través de progresos crecientes en un ambiente en el que se favorece el debate en la clase; b) Introducción de la definición formal y su análisis a raíz de los resultados obtenidos en el apartado anterior, buscando una representación particular del límite; y c) Respaldar o revocar las afirmaciones realizadas en el apartado a), por comparación con la definición formal, sobre todo mediante la representación efectuada en el apartado b).

Przenioslo (2004), estudia las imágenes mentales acerca del concepto de límite en 238 estudiantes de tercer, cuarto y quinto curso de estudios matemáticos y en 182 estudiantes que comenzaban dichos estudios. Se utilizaron análisis de tests escritos, así como observaciones sobre las discusiones entre grupos de alumnos y, por último, se realizaron entrevistas. Se identificaron varias clases de imágenes sobre el concepto de límite: aproximación gráfica, aproximación estimada, el límite como valor de la función en un punto y el límite considerado como un algoritmo de cálculo.

Respecto a esta teorización hay que destacar que no se hace operativo el constructo concept image. Son trabajos cognitivos en los que la imagen mental tiene un papel relevante, por tanto, la semiosis depende de la noesis y los elementos semióticos no son tenidos en cuenta de manera relevante.

1.2.3. Las concepciones y la teoría de los obstáculos epistemológicos

Cornu (1983), en su trabajo de investigación sobre el concepto de límite, estudia las respuestas de los alumnos a varios cuestionarios y clasifica las concepciones sobre el concepto de límite desde dos puntos de vista: atendiendo a la naturaleza de la respuesta sobre el propio concepto, las llama concepción estática y concepción dinámica, y según el momento en el que se producen (antes o después de haber recibido enseñanza de la noción), las llama concepción espontánea y concepción propia. Afirma que las concepciones espontáneas permanecen en los alumnos durante mucho tiempo. En esta línea, Castela (1995) trata el tema del aprendizaje con y en contra de conocimientos anteriores.

La idea de concepción propia, mezcla de la concepción espontánea y la noción matemática, se corresponde con el "concept image" de Tall y Vinner (1981) y, por tanto, con la de concepción. Como señala Cornu: "Nuestras pruebas han mostrado que la noción matemática no tomará pura y simplemente el lugar de concepciones espontáneas, pero que se formará una mezcla, dando lugar en cada alumno a esto que llamamos concepción propia".

En Sánchez y Contreras (1998) sobre la enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función en primer curso de Ingeniería Técnica, se señalan las siguientes concepciones ligadas a la génesis histórica del concepto de límite, siguiendo las etapas que consideran Cornu (1983) y Robinet (1983) en su estudio histórico del límite: concepción geométrica, concepción numérica o aritmética, concepción métrico-analítica y concepción topológica

Sierra, González y López (1999), proponen cinco concepciones del límite que aparecen en la historia: Concepción de los matemáticos hasta finales del siglo XVII, concepción de Euler y Lagrange, concepción de D' Alembert y Cauchy, concepción de Weierstrass y concepción topológica de Hausdorff.

Respecto a los obstáculos epistemológicos, Cornu (1985) estudió algunos obstáculos de la noción de límite basándose en la concepción de obstáculo epistemológico según Bachelard. Las investigaciones de Cornu (1981, 1983, 1985), consistentes en un recorrido histórico del concepto de límite y en la observación de varios grupos de alumnos en las primeras lecciones acerca del mismo, le conducen a establecer la siguiente lista de obstáculos epistemológicos:

1. El aspecto metafísico del concepto de límite es, sin duda, uno de los principales obstáculos de los alumnos.

2. Los conceptos de infinitamente pequeño e infinitamente grande: parece como si hubiera unos números muy pequeños, pero no nulos.

3. ¿Se alcanza o no se alcanza el límite? Los alumnos utilizan expresiones distintas según se alcance o no el límite: así, por ejemplo, reservan las expresiones "tiende a", "se aproxima a..." para los casos en que no se alcanza el límite.

4. El paso de lo finito a lo infinito. Los alumnos tienden a aislar lo que pasa en el infinito. Se trata de una visión estática, en la cual se pierde la visión dinámica que permite prever lo que pasa en "el infinito" (también tratado por Tall, 1980, D'Amore, 1996, y por Turégano, 1996) y, por tanto, hablar de límite.

Otros obstáculos son exteriores al concepto de límite como son las desigualdades, las condiciones suficientes, el valor absoluto y la convergencia.

Posteriormente, Sierpinska (1985a y b, 1987, 90, 91 y 97) profundizó en esta línea de investigación buscando abordar la enseñanza de los conceptos por medio del enfrentamiento de los alumnos ante los obstáculos epistemológicos —dada la presencia inevitable de éstos en la enseñanza— y la posterior superación de los mismos por medio de los actos de comprensión. Establece la siguiente clasificación de los obstáculos epistemológicos ligados al concepto de límite: Obstáculos ligados al "horror" al infinito, obstáculos ligados al concepto de función, obstáculo geométrico, obstáculo lógico y obstáculo ligado al símbolo.

En Sánchez (1997) y Sánchez y Contreras (1998) se estudiaron, por medio de cuestionarios aplicados a alumnos del Curso de Orientación Universitaria (COU), los obstáculos epistemológicos y didácticos, así como algunos actos de comprensión, respecto del concepto de límite de una función. Los obstáculos encontrados fueron los siguientes: centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones; uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente; creer que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo; creer que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos; creer que el entorno es siempre simétrico; creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de ∞; creer que las letras ε y δ, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables; creer que existe el límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo y creer que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto.

En Blázquez (1999) se estudió el límite como aproximación y se profundizó en los obstáculos y en los actos de comprensión, enumerando explícitamente los mismos:

a) Obstáculos y actos de comprensión relacionados con el sujeto.

b) Obstáculos y actos de comprensión relacionados con verbo y frase adverbial.

c) Obstáculos y actos de comprensión relacionados con el objeto y su relación con el sujeto.

d) Obstáculos y actos de comprensión relacionados con la comprensión de la definición formal.

Por último, en Blázquez y Ortega (2002) se estudia la definición de límite según la idea de aproximación de D'Alembert, aprovechando la preferencia de los estudiantes por la concepción dinámica del límite, frente a la definición formal:

Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, cuando a toda aproximación de L, le corresponde un entorno reducido de a, de manera que las imágenes de los puntos de dicho entorno mejoran dicha aproximación.

La teorización de los obstáculos epistemológicos es interesante y ha dado importantes frutos en Didáctica de las Matemáticas, como lo muestran las diversas tesis doctorales que han seguido esta fundamentación. Sin embargo, como afirma Artigue (1994, 1995 y 1998), en la teoría de los obstáculos epistemológicos se detecta un efecto subyacente a la conversión didáctica de la noción de obstáculo epistemológico, cual es una hipótesis de universalidad que no se sostiene. Por lo que hay que desplazar esa universalidad del obstáculo hacia niveles de principios más generales del funcionamiento matemático, buscando su presencia en contextos más particulares.

Por otra parte, Radford (1997) indica que los obstáculos epistemológicos no pueden resistir el efecto de la cultura ya que ésta no es inconveniente para el conocimiento ni éste "sobrevuela" las culturas, el conocimiento es una producción cultural ineludiblemente inmersa en el medio.

Además, en Artigue (1998), se señala: "La evolución global de la didáctica contribuye a situar las cuestiones institucionales y culturales en escena, a poner el acento sobre los instrumentos, especialmente los de naturaleza semiótica, en el sentido amplio del trabajo matemático." (p. 248).

1.2.4. La teoría de situaciones (TS) y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Robert (1982) estudió las concepciones de estudiantes de 14 y 15 años, y también de alumnos universitarios, relativas a la noción de "límite de sucesión". Esta autora intenta mostrar que para los estudiantes es mucho más fácil evocar la definición dinámica del concepto (concept image) que la definición formal del concepto (concept definition). Para ello construye un cuestionario y en función de los resultados clasifica las respuestas de los estudiantes en 4 grandes grupos: a) Dinámica monótona (12%), b) Dinámica (35%), c) Estática (13%), d) Mezcla (14%). Al mismo tiempo, el 4% de los estudiantes dieron la definición formal, el 5% no contestaron y los restantes (17%) dieron respuestas incompletas. Esta autora concluye que su hipótesis es correcta puesto que el 74% de los estudiantes de la muestra dieron una definición o imagen dinámica del concepto. No obstante, este resultado se verá invalidado —cuanto menos, restringido— por un argumento expuesto por Davis y Vinner (1986) que afirma que el hecho que los estudiantes evoquen una definición o una imagen particular no significa, necesariamente, la ausencia de otras definiciones o imágenes. Además, Robert interroga a estudiantes en cuyos niveles de enseñanza no se estudia la definición formal de "limite de sucesión" por considerarla excesivamente difícil para éstos.

Robinet (1983) hace un estudio de ingeniería didáctica bastante completo con alumnos de 16-17 años; en primer lugar analiza la situación del concepto en la enseñanza a través del análisis de manuales y programas, señalando que en la mayor parte de los manuales analizados se sigue la misma estrategia de presentación. Seguidamente realiza un análisis histórico y, a continuación, se plantea la elección de una situación problema con la que presentar la noción de límite de entre tres posibles: a través de la derivada, de la continuidad o a través de la construcción de la gráfica de una función, decidiéndose por esta última. Tras realizar un test a los alumnos, con objeto de juzgar el efecto de la enseñanza efectuada, analiza los resultados obtenidos indicando que un éxito o fracaso no son más que indicios sobre el efecto de la enseñanza, ya que es imposible no tener en cuenta las sesiones de repaso y reforzamiento que el profesor ha podido hacer durante el curso. Cajaraville (1996) también realiza un estudio de ingeniería didáctica, enfocado a estudiantes preuniversitarios, sobre el Cálculo Diferencial.

Inspirada en los trabajos de Chevallard (1991, 1992 y 1999) en nuestro país se ha desarrollado la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), que comienza a introducirse con Gascón (1998), desde la perspectiva de los objetos del Análisis Matemático en la tesis doctoral de Espinoza (1998) y en el trabajo de Bosch, Espinoza y Gascón (2003) —donde se estudia el objeto límite desde el punto de vista de su reconstrucción institucional por medio de las praxeologías—; así como en Gascón y Fonseca (2000) —donde al estudiar los objetos del Análisis Matemático se pone de manifiesto la ruptura de contrato didáctico institucional entre el Bachillerato y la Universidad— .

En Espinoza (1998) se analizan las técnicas didácticas y tecnologías que utiliza el profesor para gestionar y dirigir el proceso de estudio de los límites de funciones en la Educación Secundaria. También se realiza una reconstrucción de la organización matemática propuesta por los cuestionarios oficiales en la institución escolar. La mayor contribución que realiza la autora es preparar una metodología de análisis útil y potente para realizar el estudio del proceso didáctico en toda su amplitud, distinguiendo lo espontáneo de lo naturalizado. Chevallard describe el proceso de naturalización de las prácticas humanas de la siguiente forma: una tarea rutinaria —naturalizada— en una primera fase es una actividad complicada, por lo que surge una técnica para abordarla que, muchas veces, es enseñada por el entorno. Durante algún tiempo la técnica es claramente visible, ya que hay que dominarla; posteriormente viene un periodo de rutinización y, por último, la naturalización —se convierte en algo natural para el ser humano, como si fuera creado por él—.

Como gran parte de las técnicas utilizadas por el profesor están naturalizadas, hay que desnaturalizarlas, es decir, hay que describir aquellos gestos y estrategias que el profesor realiza de manera totalmente espontánea y natural, como si no necesitara para ello ningún tipo de conocimiento elaborado. El proceso de estudio no empieza y acaba en la clase. El profesor ha iniciado la función de ayuda al estudio antes de que las clases comiencen, después, los alumnos estudian en sus casas los apuntes y problemas del profesor.

La autora centra su investigación en un proceso de estudio de clase, complementado con entrevistas a profesores. Para ello se marca una serie de objetivos:

1. Examen de la organización matemática en la institución sabia del objeto límite de una función.
2. Examen de las distintas construcciones escolares del mencionado objeto en cuestionarios y programas.
3. Examen de los distintos manuales al uso, como una organización matemática local del concepto en la institución escolar, con lo que se verá el carácter proceptual, o no, del límite.
4. Análisis de distintos momentos de estudio marcados por los propios profesores.
5. Restricciones o incoherencias en las reconstrucciones escolares.
6. Topogénesis del estudio, o papeles del profesor y alumnos en el proceso de estudio (relación institucional y relaciones de los alumnos).
7. Fenómenos didácticos emergentes del proceso de estudio de la organización matemática escolar.

En Schneider (2001) se analiza un proyecto de enseñanza de los límites en Educación Secundaria analizando la complementariedad entre la teoría de Situaciones Didácticas (Brosseau) y la teoría Antropológica (Chevallard). De la primera toma la noción de adidacticidad —filiación con teorías constructivistas y un enfoque "heurístico" de las mismas—, para, con la segunda, poner de manifiesto características de cierta praxeología didáctica inspirada por las situaciones-problema —praxeologías locales que requieren una memoria a largo plazo con especificidad de conocimientos y técnicas respecto a los problemas encontrados—.

Además, la autora plantea la cuestión de los dispositivos de ayuda al estudio y un interrogante relativo a la articulación entre la teoría de situaciones y la antropológica:

¿a qué precio, en términos de organizaciones praxeológicas, se realiza la búsqueda de la adidacticidad?

Respecto a estas teorizaciones hay que destacar que en la TAD el elemento personal sólo tiene sentido como elemento dentro de una institución y esto conduce a no problematizar los significados personales, con lo que el sujeto queda fuera del estudio, lo que hace que, a nuestro entender, no sea completo el análisis del proceso de instrucción.

1.2.5. Approach heuristique de l'analyse

Por último, una línea de investigación de relevancia, por su componente práctico fundamentalmente, la constituye los trabajos elaborados en el seno del proyecto A.H.A (Approach Heuristique de L'Analyse), dirigido por los Drs. Rouche y Schneider en la Universidad de Lovaina, los cuales se apoyan en la fenomenología de Freudenthal. Los constructos objeto mental y umbral epistemológico constituyen unos aportes teóricos que facilitan el enlace entre las ideas de los alumnos sobre los objetos del análisis (objetos mentales) y los propios conceptos, proponiendo actividades en el aula que ayudan a acercar la distancia (umbral epistemológico) entre dichas ideas y los conceptos. Estos trabajos se han plasmado, a nivel didáctico, en dos documentos: el libro del alumno "Vers l'infini pas a pas" (Schneider, 1999) y la guía metodológica correspondiente para el profesor.

Este marco teórico se basa en la fenomenología de Freudhental y no distingue lo institucional de lo personal. Por otra parte, la idea de objeto mental no deja de estar íntimamente relacionada con la teoría cognitiva. Le faltan instrumentos que le den operatividad a los análisis didácticos.

1.2.6. Los registros semióticos y el EOS.

Son numerosos los trabajos que algunos de los miembros del grupo de investigación HUM-793, dentro del Plan Andaluz de Investigación (PAI), han realizado a lo largo de varios años sobre el objeto límite de un función. Como antecedente del EOS cabe destacar los trabajos de Font (1999), Godino (1999) y Godino y Batanero

(1999), aunque la evolución del marco conceptual de este grupo viene reflejada en Contreras (2000) y posteriores estudios como el de Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2001). Inicialmente, el enfoque teórico que se sigue estuvo relacionado con dos líneas de investigación bien definidas: por una parte, la teoría de los registros semióticos (Duval, 1995) que nos ha permitido abordar aspectos relacionados con las muy diversas formas de representación del límite, así como dar explicación a algunos de los errores frecuentes de los estudiantes por medio de las no congruencias semánticas (Radford, 2002); por otra, el enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática (EOS), (Godino, 2002), ofrece un marco idóneo, sobre todo en sus últimos desarrollos, para poder abordar el estudio de un proceso de instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

En la Didáctica del Análisis Matemático una hipótesis de aprendizaje especialmente relevante es la que coloca a los registros de representación semiótica y su coordinación (Duval, 1996, 2000) como los responsables de la emergencia del concepto. Un primer trabajo de investigación (Contreras y Font, 2002) puso el interés en mostrar el funcionamiento de los registros de representación en cuanto a la descomposición analítica del límite, así como el comportamiento del EOS en cuanto a dicha descomposición.

Posteriormente, en Contreras, García y Sánchez (2003) y García (2003), se abordaron aspectos relacionados con el límite de una función y el EOS, aportando elementos de acercamiento entre ésta y la teoría de los registros semióticos, como es el caso de las relaciones que pueden establecerse entre conflicto semiótico y la no congruencia, el primero del EOS y la segunda del otro marco teórico.

Además, basados en Godino, Contreras y Font (2006), en García y Sánchez (2006) se analizaron los procesos de estudio de una sesión de clase sobre el límite de una función en estudiantes de primero de Bachillerato, poniendo en evidencia las trayectorias epistémica, docente y discente, así como las configuraciones asociadas a las mismas.

Por último, en Contreras, García y Sánchez (2007) se estudiaron las configuraciones epistemológicas-históricas de la noción de límite de una función, con el objetivo de extraer las configuraciones escolares de referencia. Posteriormente, éstas se aplicaron a un estudio sobre manuales del curso de primero de Bachillerato.

Es decir, esta Memoria de Tesis puede considerarse una continuación de los estudios de investigación realizados por el autor en el seno del grupo de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función, dentro del enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática.

El marco teórico en el que se desarrolla permite:

- definir ontológicamente a los objetos matemáticos,
- analizar de modo operativo, a través de las entidades primarias y las facetas duales, la actividad matemática,
- efectuar un análisis pormenorizado de los procesos de instrucción matemática, por medio de la teoría de las trayectorias y configuraciones didácticas,
- establecer pautas de comportamiento en los profesores a través del análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

CAPÍTULO 2

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe, en primer lugar, el marco teórico utilizado en el desarrollo de la investigación, que corresponde al enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (como precursores de este marco teórico podemos citar los trabajos de Artigue, 1989 y 1994) y en él se precisan términos teóricos fundamentales para la elaboración de la Tesis.

Posteriormente, se enumeran y comentan los objetivos de la investigación, así como las hipótesis de trabajo. Por último, se hace explícita la metodología empleada con especial atención a las técnicas de análisis utilizadas, muchas de las cuales representan una aportación de la Tesis.

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS)

Cualquier indagación sobre la enseñanza-aprendizaje del límite en el Bachillerato conduce a un complejo proceso en el que están implicados diversos elementos didácticos, tanto institucionales como cognitivos, además de instruccionales. Por tanto, para poder abordar la investigación sobre la enseñanza del límite de una función consideramos que hay que acudir a un enfoque unificado de los fenómenos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales), para lo cual es necesario asumir presupuestos ecológicos, sistémicos, ontológicos y semióticos (Godino, 2006).

Consideramos que un enfoque teórico que responde a estos planteamientos, desde la perspectiva de la educación matemática, lo constituye el marco teórico denominado "Enfoque ontosemiótico de la cognición matemática" (EOS) (Godino, 2002). Es preciso estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento (las ideas matemáticas), el lenguaje matemático (sistema de signos) y las situaciones-problema para cuya resolución se inventan tales recursos. Además, se debe progresar en el desarrollo de una semiótica específica que estudie los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos.

Se han realizado diversas ampliaciones de este modelo teórico, de tal forma que el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática se configura en torno a las tres líneas teóricas siguientes:

- Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1997), que es, al menos en parte, equivalente al componente epistemológico de la teoría antropológica desarrollada por Chevallard (1992; 1997), al partir ambas teorizaciones de los supuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein (1953; 1987). Se ha ampliado esta problemática hasta organizarse en la teoría de los significados sistémicos (TSS), en la cual se describen las entidades primarias y sus facetas duales, así como las configuraciones epistémicas y cognitivas (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006).

- Teoría de las funciones semióticas (TFS) (Godino y Recio, 1997; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005 y Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005), que es el germen de una teoría semiótico-cognitiva basada en presupuestos lingüísticos (Hjemslev, 1943; Eco, 1979).

- Teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006; Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), que proponemos como modelización de los procesos de instrucción matemática. Este modelo interpreta y extiende el componente instruccional de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1983 y 1986) y la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) y en él se estudian nociones como los criterios de idoneidad de un proceso de estudio y los conflictos didácticos.

A continuación se describen algunos de los constructos referidos.

2.2.1.1. Significados institucionales y personales

Los procesos semióticos puestos en juego para la formación de los conceptos matemáticos, para el establecimiento y validación de las proposiciones matemáticas, y en general en los procesos de resolución de problemas, dan lugar a significados sistémicos.

El significado sistémico de un objeto tiene un carácter teórico y trata de explicar la complejidad de los actos y procesos de semiosis, pero no puede describirse en su totalidad. Aún cuando, desde un punto de vista de una semiótica general, pueda postularse la enciclopedia como competencia global, desde el punto de vista sociosemiótico es interesante determinar los diversos grados de posesión de la enciclopedia, o sea las enciclopedias parciales.

Esta característica de los significados sistémicos nos lleva a diferenciar entre "significados personales" y "significados institucionales", distinción relevante, según se traten de prácticas sociales compartidas, o por el contrario, se refieran a manifestaciones idiosincrásicas de un sujeto individual.

Como se señala en Font (2006), en la planificación de un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, el profesor comienza por delimitar lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas. Acudirá, por tanto, a los textos históricos y matemáticos y, en general, a lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Todo ello constituye un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto.

Se considera el *significado institucional pretendido (SIP)* como el sistema de prácticas que se planifica para un determinado objeto matemático de cara al desarrollo de un cierto proceso instruccional. Es decir, el profesor tiene en cuenta el significado institucional de referencia, su propia experiencia, las restricciones institucionales y los conocimientos previos de los estudiantes para seleccionar y ordenar la parte del significado que va a proponer a los estudiantes.

La realidad del aula, esto es, las interacciones del profesor con los estudiantes y entre éstos, conducen a aquél a seleccionar las prácticas, introducir nuevas, abordar nuevos conceptos, etc. Por ello, interesa definir el *significado institucional implementado (SII)* como el sistema de prácticas, operativas y discursivas, que tienen lugar realmente en el aula de matemáticas, las se constituyen en la referencia para el estudio de los alumnos y la evaluación de sus aprendizajes.

En el momento de la evaluación, el profesor ha de seleccionar aquellas prácticas y elementos teóricos que considera pertinentes para tratar de evaluar los aprendizajes de sus alumnos. Es decir, habrá de tomar una muestra del significado institucional implementado, esto es lo que se denomina *significado institucional evaluado*.

Desde la perspectiva del estudiante, hay que distinguir entre distintos tipos de significados personales. Por una parte, existe un conjunto de prácticas personales sobre un objeto matemático dado capaces de expresarse potencialmente por el sujeto, en este caso de hablará de *significado personal global*.

Una vez que el profesor elabora las pruebas de evaluación se proponen al estudiante y éste muestra un conocimiento que, lógicamente, trata de acercarse al significado institucional implementado. En este caso, a las prácticas manifestadas por el sujeto se las denomina por el término *significado personal declarado*.

Es obvio que de todas las prácticas manifestadas por el sujeto ante la evaluación, sólo una parte de ellas están de acuerdo con la pauta institucional. Al conjunto de prácticas acorde con el significado evaluado, se le denomina *significado personal logrado*.

Por último, aquella parte del significado personal declarado en disconformidad con el significado institucional evaluado, constituye el conjunto de errores de aprendizaje.

2.2.1.2. Entidades primarias

La relación entre los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo ha sido modelizada por diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan los propuestos por Frege, Peirce, Ogden y Richards, así como la interpretación que hace Steinbring de ellos y que denomina el triángulo epistemológico. Los elementos que incluye Steinbring son concepto, signo/símbolo y objeto/contexto de referencia. Inspirados en esta tríada, así como en la tripleta conceptual de Vergnaud (1982 y 1990), en Godino (2002) se esboza un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades primarias:

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

(2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios,...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

(4) Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función,...).

(5) Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

(6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc.

Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional —se ponen en lugar de las restantes— y también instrumental, es decir, deben contemplarse además como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales.

2.2.1.3. Facetas duales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1987) confiere al objeto matemático un amplio sentido y ocupa un lugar importante en esta teorización, ya que como se señala en Godino (2002, p. 248): *"Estas entidades primarias, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales:*

- personal - institucional (individual – social)
- ostensiva - no ostensiva (perceptible – mental (gramatical))
- intensiva – extensiva (ejemplar – tipo, concreta – abstracta)
- elemental – sistémica (unitaria – compuesta)
- expresión – contenido (significante – significado)"

La dimensión personal-institucional ya ha sido comentada anteriormente, por lo que a continuación se efectuará sólo una breve aclaración de las otras cuatro dimensiones. Además, la dimensión expresión-contenido se desarrolla con profundidad en el apartado siguiente al aplicar las funciones semióticas a objetos del Análisis Infinitesimal.

Ostensiva - no ostensiva

Los objetos personales y los institucionales se pueden considerar como objetos no ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados. Las expresiones simbólicas, el texto, las figuras, las gráficas, los gestos, etc. que se usan en las prácticas públicas son ostensivos (escritos, orales o gestuales).

En el EOS se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Conviene remarcar que el uso del término ostensivo que hace el EOS tiene un ámbito de aplicación más reducido que el de la teoría antropológica (Bosch, 1994; Bosch y Chevallard, 1999). El uso más amplio del término ostensivo en la teoría antropológica se observa, por ejemplo, en el siguiente párrafo: *"A menos que en lugar de "decir" y "escribir" nos limitemos a "pensar" las palabras y escrituras anteriores, lo que consideraremos como otra forma de manipulación de objetos ostensivos..."* (Bosch 1994, p. 49).

Intensiva-extensiva/ Ejemplar-tipo

El EOS, Godino (2002), interpreta la distinción entre extensivo-intensivo en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos). Dicha consideración es relativa al juego de lenguaje. En efecto, un mismo objeto, según el contexto, se puede interpretar como un caso particular o como uno general. En el caso de la derivada, por ejemplo, esto no implica que no podamos distinguir el caso particular del caso general si nos situamos en un juego del lenguaje en el que, cuando se dice que el ostensivo "f´(a)" es muy pequeño se entiende que nos interesa el aspecto individual, prescindiendo del general, mientras que cuando se habla de la derivada en un punto utilizando el ostensivo "f´(a)" prescindimos del aspecto particular y nos centramos en el aspecto general (Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005).

Expresión-contenido

Como ya se ha indicado, esta dimensión se desarrollará con profundidad posteriormente, aunque es conveniente destacar que los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido y su correspondencia por medio de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. Se entenderá por función semiótica la correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. En el EOS se considera que cualquier objeto puede desempeñar el papel de expresión o contenido en una función semiótica.

Elemental-sistémica

El significado de un objeto se considera como un conjunto de prácticas en las que dicho objeto es un dato esencial. Este punto de vista supone que un objeto pueda considerarse como un sólo elemento o bien como un conjunto sistémico de prácticas en las que intervienen este objeto junto con otros entre los que hay determinadas relaciones, lo que permite considerar a los objetos (personales o institucionales) como nudos de una red. Por ejemplo, si consideramos el objeto elemental derivada y nos preguntamos por su significado, inmediatamente aparecen determinadas prácticas en las que interviene y las relaciones con otros objetos (límite, velocidad, derivada, función, tangente trigonométrica, rectas, etc.). Estos nuevos objetos a su vez se pueden entender de manera sistémica. De esta manera, tenemos una red de nudos los cuales a su vez son redes de nudos y así sucesivamente.

2.2.1.4. Funciones semióticas y conflictos semióticos

Se parte de la teoría del lenguaje de Hjelmslev (1943). Nociones claves de la misma son las de función de signo —que Eco (1979) designa como “función semiótica”—, expresión y contenido. Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra cosa; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Hay que tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales, existen otras dependencias de naturaleza operatoria o actuativa entre distintas partes de un texto.

En esta teoría la palabra "signo" no se aplica a la expresión sino a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido. La expresión y el contenido son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia.

Además, el signo es siempre lo que se abre a algo distinto. No existe interpretante alguno que, al aclarar el signo que interpreta, no desplace, al menos mínimamente, sus límites. El signo, por tanto, no supone mera correspondencia entre expresión y contenido de un algo que está en lugar de otro algo, sino que alguien debe hacer una posible interpretación.

La noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como "una correspondencia entre conjuntos", poniendo en juego tres componentes:

-un plano de expresión (objeto inicial, considerado como significante).

-un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor).

-un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Tanto el objeto inicial como final pueden estar constituidos por uno, o varios, de los tipos de entidades primarias consideradas. Es decir, los tipos de entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, resultando, por tanto, diferentes tipos de tales funciones. En este trabajo nos centraremos en aquéllas en las que figura el lenguaje.

Cuando se comparan dos significados atribuidos a un objeto matemático por dos instituciones, o por una persona y un referente institucional, tendremos conflictos semióticos entre dichos agentes, entendiéndose por conflicto semiótico a: *"la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos —personas o instituciones— en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas"* (Godino, 2002, pág. 258).

2.2.2. Los procesos de instrucción matemática

En este apartado se analizan los procesos de instrucción matemática basándonos en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. La enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático se modeliza como un proceso estocástico multidimensional, el cual se compone de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales (Godino, Contreras y Font, 2006).

Todo proceso de instrucción consta de diferentes dimensiones interconectadas: epistémica (significados institucionales), docente (funciones del profesor), mediacional (recursos materiales), cognitiva (significados personales) y emocional (sentimientos y afectos). Los diversos elementos que se pueden identificar en estas dimensiones se secuencian en el tiempo. Es decir, cuando se pone en juego el proceso de instrucción aparecen un conjunto de tareas, acciones, argumentaciones,… correspondientes al significado pretendido, unidas a las funciones docentes y discentes. Además, se selecciona unos recursos instruccionales específicos. De los posibles estados potenciales, en el proceso de instrucción concreto sólo se activan una serie de ellos, se produce una trayectoria muestral del proceso, que no es otra cosa que la secuencia de funciones que han tenido lugar a lo largo del tiempo.

La aleatoriedad de todo proceso de instrucción conduce a que, por mucho que se planifique, siempre aparecen elementos no previstos que alteran las trayectorias, sobre todo debido a la adaptación a la realidad escolar que todo profesor ha de hacer.

Solamente, observando el desarrollo instruccional es posible constituir las trayectorias muestrales empíricas. A continuación, se desarrollan las trayectorias muestrales citadas.

2.2.2.1. Trayectoria epistémica

Como se indica en Godino, Contreras y Font (2006), el análisis epistémico de un proceso de instrucción consiste en descomponer aquél en unidades de análisis con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. Con este fin consideramos útil introducir las nociones de configuración epistémica (matemática), trayectoria epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias.

El EOS distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos en ella, por tanto, seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento.

E1: *Situacional*: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo*: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: *Lingüístico*: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: *Argumentativo*: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático.

La clasificación de las entidades matemáticas en las categorías que hemos definido no es absoluta, sino que, al tratarse de entidades funcionales, depende del nivel de análisis elegido y de los juegos de lenguaje en los cuales se generan. Podríamos entonces pensar que la identificación de los estados de las trayectorias tiene un carácter subjetivo. Sin embargo, si dos personas participan en el mismo juego de lenguaje y adoptan el mismo punto de vista, progresivamente llegarán a un acuerdo en la categorización de una cierta unidad de análisis.

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos *configuración epistémica* al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema[1]. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad ontosemiótica. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que llamamos *unidades epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos *unidades naturales* de análisis.

2.2.2.2. Trayectoria docente

Tal y como se señala en Godino, Contreras y Font (2006), usaremos la expresión trayectoria docente para referirnos a la secuencia de actividades que realiza el profesor

[1] Si bien el origen de la configuración será una situación-problema, en algunas circunstancias puede ser más operativo tomar en consideración otro de los estados potenciales de la trayectoria para delimitar la configuración epistémica.

durante el proceso de estudio de un contenido o tema matemático. Cuando tales actividades se circunscriben a una situación-problema (o tarea) específica hablaremos de *configuración docente*, la cual irá asociada a un configuración epistémica. Estas actividades o acciones del profesor son su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales proponemos la siguiente categorización[2].

Funciones docentes:

P1: *Planificación*: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: *Motivación*: creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: *Asignación* de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: *Regulación*: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: *Evaluación*: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

P6: *Investigación*: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

[2] Esta relación es una propuesta inicial que puede ser refinada y completada, pero ello no resta validez al tipo de análisis que proponemos.

2.2.2.3. Trayectoria discente

De manera similar al caso de las trayectorias epistémica y docente interesa definir la noción de *configuración discente*, como el sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica. La siguiente relación puede constituir un primer inventario de tipos potenciales de estados o funciones del estudiante en el proceso instruccional.

A1: *Aceptación* del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: *Exploración*, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: *Recuerdo*, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: *Formulación* de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: *Argumentación* y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: *Recepción* de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: *Demanda* de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (por ejemplo, cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: *Ejercitación*: realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: *Evaluación*: estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

2.2.2.4. *Trayectoria mediacional*

En el proceso instruccional se podrán utilizar diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio. Esto incluirá medios de presentación de la información en clase (pizarra, retroproyector, etc.), dispositivos de cálculo y graficación (calculadoras, ordenadores), materiales manipulativos, etc. El uso de estos recursos (tipo, modalidad, secuenciación, articulación con los restantes elementos del proceso, etc.) debe ser objeto de atención en la práctica y en la investigación didáctica. La noción de *trayectoria mediacional* pretende servir de herramienta para analizar los usos potenciales y efectivamente implementados de los recursos instruccionales y sus consecuencias cognitivas.

2.2.2.5. *Trayectoria cognitiva*

En el EOS se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Con la noción de *trayectoria cognitiva* hacemos referencia al proceso de cronogénesis de tales sistemas de prácticas personales, que puede modelizarse como un proceso estocástico.

La cronogénesis de los significados personales es una dimensión del proceso de estudio imposible de caracterizar con una simple grabación audiovisual del desarrollo de la clase, dado que es relativa a cada aprendiz, tiene lugar dentro y fuera de la clase. Será necesario examinar los "apuntes de clase", cumplimentar cuestionarios y pruebas de evaluación inicial y final, realizar entrevistas, etc. En nuestro ejemplo tenemos indicios de esa cronogénesis por medio de las esporádicas intervenciones de los estudiantes y limitada a aspectos puntuales.

La interacción del profesor con los alumnos mientras resuelven las tareas en clase, en los segmentos en que tiene lugar esa actividad, le permite acceder parcialmente a la progresiva construcción de los conocimientos por parte de los alumnos y tomar decisiones sobre la cronogénesis institucional.

2.2.2.6. Trayectoria emocional

Otros factores condicionantes del proceso de instrucción que admiten distintos estados y cambian a lo largo del tiempo se aglutinan en torno a lo que designamos como estados emocionales (interés, compromiso personal, sentimientos de autoestima, aversión, etc.). El proceso de *devolución* que introduce la Teoría de Situaciones Didácticas responde a la necesidad de que los alumnos asuman como propias las situaciones-problemas que el profesor propone como medio para la construcción del conocimiento matemático. En este trabajo la devolución es uno de los componentes de las trayectorias emocionales.

Si bien es importante tener en cuenta la trayectoria emocional de los alumnos en cualquier proceso de instrucción, en aquéllos en los que participen grupos de estudiantes con necesidades educativas especiales (alumnos con discapacidad, alumnos inmigrantes con dificultades, etc.) ésta puede llegar a ser determinante.

En este trabajo se han analizado las trayectorias epistémica, docente, discente e instruccional, dado que no se han recabado datos para estudiar el resto de las trayectorias. No obstante, debido a la densidad del trabajo, no se han realizado entrevistas personales con los alumnos, imprescindibles para poder desarrollar las trayectorias emocional, cognitiva y mediacional.

Para identificar regularidades en la secuenciación de los estados, en cuanto a la interacción de dos o más trayectorias, se ha utilizado la trayectoria instruccional; esta trayectoria deriva de los resultados que se obtienen cuando se analizan las interacciones entre las trayectorias epistémica, docente y discente.

2.3. HIPÓTESIS

Una vez mostrados el problema de investigación y el marco conceptual en el que se basa esta investigación, interesa hacer explícitas las hipótesis de trabajo que se formulan.

En primer lugar ha sido necesario detectar los significados institucionales epistemológico-históricos como medio para llegar a los significados institucionales de referencia. Posteriormente, éstos se han comparado con los significados implementados. Estas ideas se plasman en las dos hipótesis siguientes:

H1: *En el desarrollo epistemológico del objeto límite de un función, a lo largo del estudio histórico realizado, se detectan unos significados institucionales a partir de los cuales se han construido los significados institucionales de referencia, de tal forma que, algunos de éstos, pueden identificarse con los significados del manual objeto de estudio (SIP).*

H2: *En el desarrollo epistemológico del objeto límite de un función, a lo largo del estudio histórico realizado, se detectan unos significados institucionales a partir de los cuales se han construido los significados institucionales de referencia, de tal forma que, algunos de éstos, pueden identificarse en el proceso de estudio que se da en la institución primer curso del Bachillerato de Ciencias e Ingeniería, cuando se analizan las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas realizadas en dicha institución (SII).*

En el marco teórico del EOS, la noción de conflicto semiótico permite analizar los momentos en los que, o bien los significados institucionales inducen dificultades en la enseñanza del objeto límite, o bien los estudiantes las muestran en su aprendizaje. Las dos hipótesis siguientes cristalizan estas ideas.

H3: *En el SIP aparecen unos conflictos semióticos epistémicos de significado que pueden explicar potencialmente algunas dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio del límite de una función.*

H4: *En el SII aparecen unos conflictos semióticos epistémicos y cognitivos que se relacionan entre sí y que pueden explicar algunas dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio del límite de una función.*

La construcción de las diversas trayectorias didácticas que se realiza en el proceso de estudio facilita, por medio de las configuraciones correspondientes, la extracción de información pertinente con el objetivo de analizar las diferentes idoneidades de dicho proceso de estudio. Esto queda reflejado en la siguiente hipótesis que se formula.

H5: *Las trayectorias didácticas detectadas en el proceso de estudio permiten dar orientaciones de cara a las idoneidades de dicho proceso de estudio.*

Una vez obtenidos los diferentes criterios de idoneidad, es lógico que ciertos elementos, que en un determinado criterio aparecen como positivos, en otros criterios se muestren negativos para los mismos. La hipótesis que refleja estas ideas se expone a continuación.

H6: *La aplicación de los criterios de idoneidad al proceso de estudio muestra la dificultad de mantener un equilibrio entre las diversas componentes epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional.*

2.4. OBJETIVOS

La investigación que se propone tiene el siguiente objetivo general: *avanzar en la identificación, descripción y explicación de los factores y fenómenos didácticos de naturaleza ontosemiótica que influyen en una adecuada comprensión, por parte de los estudiantes, del objeto matemático límite de cara a elaborar conocimiento didáctico para la mejora de la enseñanza del límite funcional en el Bachillerato.*

En función de este objetivo general, se plantean seis objetivos específicos que tratan de desarrollar los anteriores.

Aunque hay estudios sobre las concepciones y obstáculos en torno al objeto límite de una función (Sánchez, 1997), en el EOS es preciso reconstruirlos desde la perspectiva de los significados, conflictos semióticos, situaciones-problema y métodos de resolución utilizados por la matemática a lo largo de la historia, por ello se propone el objetivo:

1) *Efectuar un estudio del desarrollo epistemológico-histórico del objeto límite, según los significados institucionales y los conflictos semióticos asociados, en las diversas instituciones de la matemática, a fin de poder detectar y caracterizar la emergencia de los distintos objetos institucionales por medio de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas, reconstruyendo el significado de referencia del objeto límite de una función.*

Por otra parte, puesto que el profesor de Matemáticas utiliza el manual en el aula de muy diversas formas (como libro de ejercicios, de consulta, de estudio en sí mismo y como complemento de lo que él explica), su análisis nos permitirá determinar el significado pretendido (SIP). El objetivo que especifica lo anterior es:

2) *Caracterización del SIP para un proceso de instrucción del límite de una función en una institución de Primero de Bachillerato.*

El significado institucional implementado (SII) en el aula se analiza desde la perspectiva del proceso de estudio del aula de Matemáticas de 1º de Bachillerato. De aquí que replantee el objetivo:

3) *Caracterización de SII para un proceso de instrucción del límite de una función efectivamente implementado en dicha institución.*

A fin de completar este estudio sistémico, es necesario tener en cuenta el significado personal (SP) del alumno. Es decir, hay que tratar de detectar qué conflictos semióticos potenciales pueden convertirse en reales, así como otras dificultades de comprensión que puedan darse sobre el objeto límite de una función. Todo esto se delimita en el objetivo:

4) *Caracterización de los SP de los alumnos participantes en el proceso de instrucción del límite de una función.*

El conocimiento de las interacciones en el aula entre el saber, el profesor y los estudiantes parece esencial para la explicación de fenómenos didácticos, por tanto, hay que conocer las trayectorias didácticas verdaderamente implementadas en el proceso de estudio. Se establece el objetivo:

5) *Descripción de las Trayectorias Didácticas implementadas en el proceso de instrucción del límite de una función.*

La intención última de la investigación didáctica es la búsqueda de elementos idóneos de cara a la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos. La descripción y valoración de la pertinencia de un proceso de instrucción, es decir, la idoneidad del mismo, se convierte en un logro importante, de aquí el siguiente objetivo:

6) *Utilización de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS para valorar la idoneidad didáctica del proceso de instrucción del límite de una función.*

2.5. METODOLOGÍA

La investigación que se ha desarrollado aporta diferentes componentes del sistema didáctico: contenido a enseñar, manual, profesor y alumnos. En ella se combinan diversas técnicas y enfoques según las distintas facetas del estudio, dependiendo de la cuestión particular abordada en las mismas.

En la dimensión epistemológica de la investigación se complementa y coordina el estudio documental con diversas técnicas y enfoques en la parte instruccional y cognitiva. Las cuestiones relativas a la dimensión instruccional se enfocan mediante el estudio de casos de experiencias de enseñanza diseñadas con criterios derivados del análisis epistemológico y de los estudios cognitivos previos. Aquí, el método de observación ha desempeñado un papel relevante. En la investigación de la dimensión cognitiva (significados personales de los estudiantes) se utiliza el enfoque cualitativo-interpretativo.

Evidentemente, puesto que el estudio cualitativo se ha realizado con una muestra de tamaño reducido, su carácter es exploratorio y está principalmente orientado a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

Se emplean diversas técnicas de recogida de datos, dependiendo de la fase de la investigación. En primer lugar, se ha construido una ficha para el análisis epistemológico del manual que se analiza. En cuanto a los estudiantes, con la finalidad de lograr una muestra de máxima representatividad, se ha utilizado el cuestionario escrito. Asimismo, se realiza una observación no participante a la clase del Centro de Bachillerato, con el objeto de contrastar, y corroborar o no, los significados construidos por los profesores en la enseñanza del límite de una función, así como poner en evidencia las interrelaciones docente-discentes en el aula.

La población objeto de estudio está formada por los estudiantes de primer curso del Bachillerato de Ciencias e Ingeniería. La muestra la constituyen alumnos de un grupo de un Instituto de Educación Secundaria de la provincia de Jaén.

En la investigación se analizan principalmente variables cualitativas, como los elementos de significado institucional y personal del límite de una función en primero de Bachillerato. Dado que la investigación se ha realizado en varias etapas, se estima adecuado describir las diversas técnicas de análisis según el desarrollo de la Tesis, las cuales se consideran una aportación para la investigación en Didáctica de la Matemática en el marco teórico adoptado.

Para responder al estudio de los significados epistemológico-históricos, la metodología ha consistido en un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico e histórico de las que se han extraído los diversos elementos del significado más relevantes, aplicando el enfoque del EOS. Es decir, se trata de un análisis epistémico (Godino, 1999), centrado en la naturaleza de los diversos componentes del conocimiento matemático a estudiar en cada una de las instituciones históricas consideradas, aunque con las limitaciones propias de la necesidad de interpretación a través de los textos. Para evitar interpretaciones erróneas, siempre que ha sido posible, se ha acudido a fuentes originales.

El estudio del significado institucional pretendido se ha efectuado por medio del análisis del libro de texto, puesto que en el proceso de estudio el profesor ha seguido fielmente el manual. En primer lugar, se ha realizado un análisis ontosemiótico de las configuraciones globales del objeto límite de una función con el objeto de poder situar las configuraciones parciales y prepararlas para el estudio.

Para cada una de las cuatro configuraciones parciales extraídas, se han detectado puntos críticos de las mismas. Es decir, la investigación se centró en aspectos del manual que pudieran presentar conflictos semióticos y dificultades de comprensión para el estudiante. Con el objetivo de hacer operativo el análisis, el texto se descompuso en unidades de análisis, las cuales fueron estudiadas críticamente para extraer las dificultades potenciales de significado.

El significado implementado en la clase de primero de Bachillerato se ha estudiado según diversas fases y de acuerdo con la metodología propuesta en Godino, Contreras y Font (2006). Se desarrollaron inicialmente las trayectorias epistémicas, docente y discente de cada una de las cuatros sesiones analizadas.

Para la trayectoria epistémica se han considerado los estados siguientes: situacional, actuativo, conceptual, proposicional y argumentativo. Las unidades naturales de análisis se han dividido según las configuraciones epistémicas, las cuales a su vez han tenido en cuenta los estados situacionales que han ido apareciendo a lo largo del estudio. Por último, en cada configuración se muestran las unidades epistémicas correspondientes.

Para la trayectoria docente se han considerado los estados siguientes: planificación, motivación, asignación, regulación, evaluación e investigación. El resto del análisis ha seguido pautas similares a la trayectoria epistémica. Es decir, aparecen configuraciones docentes y las unidades docentes correspondientes.

Para la trayectoria discente se han considerado los estados siguientes: aceptación, exploración, recuerdo, formulación, argumentación, recepción, demanda de información, ejercitación y evaluación. El resto del análisis ha seguido pautas similares a las dos anteriores trayectorias. Es decir, aparecen configuraciones discentes y las unidades discentes correspondientes.

En cuanto al significado institucional implementado, se ha desarrollado la trayectoria instruccional. Para ello, se ha analizado pormenorizadamente el desarrollo de cada una de las cuatro sesiones de clase sobre el límite funcional, utilizando los cuatro tipos de configuraciones instruccionales teóricas: magistral, adidáctica, personal y dialógica. Para el análisis, se han ido detectando conflictos semióticos inducidos por el profesor y no resueltos, conflictos semióticos inducidos por el profesor para dar pautas de superación en los estudiantes y aquellos otros mostrados por los alumnos a lo largo del proceso de estudio. Finalmente, se han hecho explícitas todas las dificultades detectadas y las técnicas cronogenéticas y topogenéticas (Sensevy, 2000).

Los significados personales de los estudiantes participantes en el estudio se han evaluado por medio de la aplicación de un cuestionario. Para dar la validez de contenido necesaria, dicho cuestionario se construyó teniendo en cuenta los datos aportados por el estudio de las distintas trayectorias, elaborando una tabla resumen en la que los ítems se corresponden con los conflictos semióticos detectados.

Antes de la aplicación del cuestionario se ha realizado un análisis a priori de los diferentes ítems con el objetivo de determinar con la mayor exactitud posible lo que se indaga con cada uno de ellos, así como la hipotética trayectoria semiótica seguida por el alumno al resolver cada cuestión.

El análisis de las respuestas de los estudiantes se ha efectuado según una metodología de análisis basada en la naturaleza de la actividad matemática, con las aportaciones correspondientes a la clasificación de los conflictos semióticos mostrados por los alumnos en diversas categorías.

Para el análisis de los criterios de idoneidad epistémica, interaccional y cognitiva, se han utilizado las pautas de análisis que se describen a continuación. Para la idoneidad epistémica se han comparado las situaciones, lenguajes y elementos regulativos implementados en la clase con aquellas otras situaciones, lenguajes y elementos regulativos de referencia no estudiados. Para la entidad primaria argumentación, se han considerado momentos de validación y argumentaciones no formuladas.

En el análisis de la idoneidad interaccional se han utilizado diversas componentes: interacción docente-discente, interacción entre discentes y autonomía. Finalmente, en la idoneidad cognitiva se han empleado dos componentes: conocimientos previos y aprendizaje logrado.

CAPÍTULO 3

ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO-HISTÓRICO DE LOS SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestra el estudio realizado sobre los significados institucionales del límite de una función detectados a lo largo de su evolución histórica, teniendo en cuenta los cambios entre las distintas situaciones problema. Son muchos los trabajos que han tratado de estudiar la evolución histórica del límite y del Análisis en general (incluyendo la noción de función, en particular), destacando los de Lacroix (1806), Moigno (1840), Bühler (1990), Ruiz (1994), Contreras y Sánchez (1999a), González (2002), Sánchez y Contreras (1996a y 1996b) y Schubring (1985, 1987 y 1997).

A raíz de estos estudios, se han considerado cinco configuraciones epistémicas o significados parciales en la reconstrucción de los mismos (Contreras, García y Sánchez, 2007) y se han analizado dichas configuraciones de cara a extraer los significados institucionales de referencia.

3.2. SIGNIFICADOS EPISTEMOLÓGICOS-HISTÓRICOS

Las entidades primarias que se han tenido en cuenta a lo largo del estudio serán las situacionales además de aquellas otras que estén relacionadas con los conflictos semióticos. La ventaja de esta tipología es que permite el análisis de la actividad matemática desde una perspectiva operativa que facilite la explicitación del significado institucional, así como los conflictos semióticos potenciales asociados.

3.2.1. Significado geométrico del límite

La idea de límite está asociada en el mundo griego a la Geometría y a la noción de infinito. Los filósofos pitagóricos con su idea de que el número constituye la esencia de todas las cosas, sufrieron un contratiempo al descubrir las cantidades inconmensurables. Con el hallazgo de la magnitud irracional se eliminaba la posibilidad de poder medirlo todo de manera exacta, creencia muy arraigada en los matemáticos griegos. Como señala González (1992): "*Se había descubierto la magnitud irracional, el alogon (lo inexpresable), provocando una crisis sin precedentes en la historia de la Matemática.*" (pág. 20).

Surgen, por tanto, los problemas que se derivan del tratamiento del infinito, "*los cuales*, como puntualiza Bessot et als. (1999), *están íntimamente ligados a la propia constitución de la matemática griega y descansan sobre la divisibilidad infinita de las magnitudes y sobre la posibilidad de considerar un razonamiento que comporta un número infinito de etapas.*" (pág. 11). El paso siguiente fue la construcción de una teoría que soslayara los problemas señalados, aunque incapaz darle una explicación a los mismos. Esta teoría apareció en los Elementos de Euclides, en la que, además de los axiomas, postulados y proposiciones, afloró un tipo de razonamiento (por reducción al absurdo) que permitía eludir las demostraciones de carácter infinito. Sin embargo, la genialidad griega no podía dejar escapar una fundamentación teórica que no abordaba la cuestión del infinito, sino que lo obviaba, y aparecieron las aporías de Zenón como muestra de la profundidad del pensamiento de esa civilización, cuya continuidad hay buscarla en el siglo XVII con el nacimiento del Cálculo Infinitesimal.

En el significado geométrico del límite, correspondiente a la etapa griega, se han detectado los siguientes elementos de significado, reflejados en las tablas siguientes:

Tabla 3.1. Entidades situacionales.

Entidades situacionales
Medición de la diagonal del cuadrado con relación al lado y obtención de la relación entre la medida de las diagonales del pentágono regular. (Hipasos)
Realización de la cuadratura de una figura comprendida entre dos arcos de círculo de una configuración muy simple (lúnulas) mostrando que es igual a un triángulo de lados dados. (Hipócrates)
Cálculo de los volúmenes de la pirámide y del cono como la tercera parte de los del prisma y del cilindro, utilizando ideas metafísicas precursoras de la Geometría de los indivisibles. (Demócrito)
Intento de resolver los problemas de la irracionalidad establecidos por Zenón, por medio de las razones entre magnitudes inconmensurables. (Eudoxio)
En la proposición tercera de su obra Medida del Círculo, que dice: "el perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro, aumentado en un segmento comprendido entre los diez setenta y un avos y el séptimo del diámetro", acota la relación $\frac{P}{D}$ -la notación π data de comienzos del siglo XVIII- con $\frac{P_{96}}{D}$ y $\frac{Q_{96}}{D}$, donde P_{96} es el perímetro de un polígono de 96 lados inscrito y Q_{96} el del circunscrito. (Arquímedes)

Tabla 3.2. Entidades argumentativas y conflictos semióticos.

Entidades argumentativas	Conflictos semióticos
Aporías de Zenón.	Creencia de que el límite no es alcanzable.
Reducción al absurdo (Hipócrates).	Se elude el infinito actual.
Método de exhauscíón (Eudoxio).	Se elude el infinito actual.
Método mecánico de descubrimiento (Arquímedes).	

Tabla 3.3. Entidades conceptuales y conflictos semióticos.

Entidades conceptuales	Conflictos semióticos
Cantidades inconmensurables.	Imposibilidad de medir magnitudes irracionales.

Tabla 3.4. Entidades proposicionales y conflictos semióticos.

Entidades proposicionales	Conflictos semióticos
Axioma de continuidad.	Se elude el infinito actual.
Principio de Eudoxio.	Se elude el número irracional.

Quedaron planteados problemas asociados al límite que fueron abordados posteriormente a partir del siglo XVII, bifurcándose en su desarrollo, por una parte, con la teoría de los indivisibles de Cavalieri y, por otra, con el método de adigualdad de Fermat.

3.2.2. Significado preinfinitesimal del límite

La Humanidad, desde el año 400 hasta el 1100 que corresponde a la Alta Edad Media, se desinteresa por el mundo físico y centra sus fines en la espiritualidad. De esta forma, las cuestiones relativas a la naturaleza, siempre que estuvieran ligadas a razones pragmáticas o, incluso, a mera curiosidad, carecían de valor alguno. Como señala Kline (1994): "*La Cristiandad, e incluso los últimos filósofos griegos, estoicos, epicúreos y neoplatónicos, resaltaron la elevación de la mente sobre la materia y la preparación del alma para una vida futura en el cielo. La realidad era la vida eterna del alma; y la salud del alma se reforzaba mediante el aprendizaje de verdades morales espirituales... Puesto que el estudio de la naturaleza no contribuía a alcanzar tales fines o a prepararse para la vida futura, era rechazado como algo sin valor e incluso herético.*" (pág. 276).

Fue alrededor de 1100 cuando nuevas influencias van creando un clima intelectual, de tal forma que en Europa se comienzan a conocer los trabajos griegos de Euclides y Arquímedes fundamentalmente. En este entorno la Matemática infinitesimal se abre camino entre los escolásticos. Se pueden citar dos científicos que, en esta época medieval ya alumbraron ciertas ideas que pueden considerarse de matiz infinitesimal. Primeramente Brawardine (1290-1349), que distinguió dos tipos de magnitud infinita: primero, aquélla que no tiene fin; segundo, aquélla tal que dada cualquier magnitud finita siempre puede encontrase otra mayor. En segundo lugar, Oresme (1323-1382) introdujo una serie de ideas innovadoras: la de la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo, y la de una sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo, de repercusión posterior en el Cálculo del siglo XVII.

Las aportaciones anteriores, así como la disposición de traducciones de las obras matemáticas griegas, facilitaron la emergencia y coexistencia de varios planteamientos de tipo preinfinitesimal a finales del siglo XVI y principios del XVII. Así, Stevin, resta importancia al doble razonamiento por reducción al absurdo y se desplaza hacia razonamientos infinitesimales; Kepler aborda aspectos relacionados con los infinitamente pequeños, aunque muy imbricados con la metafísica; por último, Cavalieri aporta su teoría de los indivisibles. Todos ellos, aunque con diferentes planteamientos en cuanto a las nociones que utilizan, comparten el uso de métodos infinitesimales que es lo que va a caracterizar la concepción.

La etapa que corresponde a este significado es desde el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XVII.

En el significado preinfinitesimal del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las tablas siguientes:

Tabla 3.5. Entidades situacionales.

Entidades situacionales
Cálculo del centro de gravedad de una figura plana, desarrollado en su obra "De la estática". (Stevin)
Identifica una curva con una suma de segmentos infinitamente pequeños, un círculo con un conjunto de triángulos infinitamente pequeños. Enunció sus leyes en la obra "Astronomía Nova". Se planteó el problema de la búsqueda de los valores máximos y mínimos de una magnitud variable, al estudiar el aforo de toneles (Método de los infinitésimos). (Kepler)
En su obra "Discursos que se refieren a las ciencias nuevas", recompone las magnitudes continuas por medio de los indivisibles (la línea está formada por puntos, la superficie por líneas, ...). (Galileo)
En su obra "De la Dimensión de la Parábola" utilizó indivisibles curvilíneos, cilíndricos cuando estudió un sólido hiperbólico infinito. (Torricelli)
Desarrolla el método cinemático de las tangentes al considerar todas las curvas como trayectorias engendradas por la composición de dos movimientos de los que se conocen las velocidades ("Tratado de los indivisibles"). (Roberval)
Compara las superficies planas confrontando las líneas en que se pueden dividir y los sólidos, al confrontar las superficies en que se puede descomponer, en su obra "Geometría por medio de los indivisibles" (Método de los indivisibles). (Cavalieri)

Tabla 3.6. Entidades argumentativas y conflictos semióticos.

Entidades argumentativas	Conflictos semióticos
Las argumentaciones pre-inifinitesimales de Stevin y Kepler.	El razonamiento infinitesimal se argumenta de modo metafísico.
La aportación de los indivisibles de Cavalieri y Torricelli.	Se elude el razonamiento infinitesimal.

Tabla 3.7. Entidades conceptuales y conflictos semióticos.

Entidades conceptuales	Conflictos semióticos
La noción de lo infinitamente pequeño de Kepler.	Se elude el razonamiento infinitesimal.
Utilización de los indivisibles de distinta dimensión (Cavalieri) y de igual dimensión (Torricelli).	Se elude el razonamiento infinitesimal.
Uso, casi estricto, del marco geométrico.	No permite el uso de herramientas de carácter numérico que faciliten el razonamiento infinitesimal. Esto conduce a: "Uso exclusivo de la aproximación gráfica sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente".

El significado preinfinitesimal resuelve ciertos problemas en los que se utilizan razonamientos infinitesimales y de indivisibles de carácter geométrico. Sin embargo, no pudo resolver problemas en los que era necesario haber usado los infinitamente pequeños numéricos.

Quedaron planteados problemas que hubieron de resolverse por Fermat y, posteriormente, por Newton y Leibniz.

3.2.3. Significado infinitesimal del límite

Este significado está asociado a la noción de infinitésimo y, por tanto, se usan métodos y razonamientos infinitesimales, aunque desde distintas interpretaciones respecto al infinitésimo.

Se considera por primera vez la idea de los infinitamente pequeños numéricos (estáticos y no variables) y no únicamente geométricos, como los indivisibles de la época anterior. "*Las cuestiones de convergencia y aproximación quedan para estos matemáticos muy ligadas al cálculo numérico*" (Robinet, 1983).

La etapa que corresponde a este significado es desde la segunda mitad del siglo XVII hasta los inicios del siglo XIX.

En el significado infinitesimal del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las tablas siguientes:

Tabla 3.8. Entidades situacionales.

Entidades situacionales
Halla los puntos en los que una función polinómica toma un valor máximo o mínimo. (Fermat) ("Méthode pour la recherche du maximun et du minimun", 1638, in Euvres, tome III, pp. 121-123; en Gaud, 1998, pp. 97-98)
Plantea un método para calcular tangentes en un punto cualquiera de una curva, aunque él sólo lo hace en la parábola. (Fermat)
Plantea un método para calcular tangentes en un punto de una curva, utilizando los incrementos. (Barrow)
Plantea un método de naturaleza geométrico-mecánica para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal (Método de las fluxiones). (Newton) ("La méthode des fluxions", en Babault, 1985, pp. 75-76)
La aproximación de $\sqrt{20}$. (Euler) ("Eléments d'Algébre", en Bühler, 1990, pp. 163-167)
Cálculo de la tangente a una parábola. (D'Alembert[3]) ("Différentiel. En Encyclopédie ou Dictionaire raisonné des sciencies", en Babault et als., 1985, pp. 39-42)

Tabla 3.9. Entidades argumentativas y conflictos semióticos.

Entidades argumentativas	**Conflictos semióticos**
El procedimiento de "adegalisation" (Fermat).	Enmascara el infinitésimo y asocia el límite con el valor de la función. Esto conduce a considerar que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto.
El método de las fluxiones (Newton).	- Considerar que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo y no "tanto como queramos". - Centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones.
Uso de la aproximación gráfica para establecer razonamientos	
Se considera la idea de los números infinitamente pequeños.	No se distingue entre aproximación y distancia.

[3] Aunque en los textos de D'Alembert, éste se expresa en términos de aproximación: "… c'est-á-dire la valeur dont ce rapport approche toujours de plus en plus à mesure que l'une des ordenées s'approche de l'autre, cette limite donnera la position de la tangente, puisque la tangente est la limite des fecantes" (Babault et als., pág. 41), sin embargo cuando efectúa cálculos con tangentes toma directamente valores iguales a 0, por lo que está dentro del método de adegalisation de Fermat.

El significado infinitesimal del límite resuelve algunos problemas relacionados con los infinitésimos en cuanto al cálculo de los mismos. Sin embargo, quedan planteados problemas de clarificación teórica del infinitamente pequeño que serán abordados posteriormente.

3.2.4. Significado numérico del límite

Se define el infinitésimo como una variable cuyo valor decrece indefinidamente, en un esfuerzo en dotar de rigor a la fundamentación del Análisis Matemático, lo cual se explica por el desarrollo de su enseñanza: "*El hecho de tener que enseñar obliga a los matemáticos a fundamentar el Análisis sobre bases rigurosas.*" (Robinet, 1983)

Se aplican las reglas de los infinitamente pequeños a conceptos del Análisis Matemático, como el límite, la continuidad y la discontinuidad de funciones.

La etapa que corresponde a este significado es la primera mitad del siglo XIX. En el significado numérico del límite aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las tablas siguientes:

Tabla 3.10. Entidades situacionales.

Entidades situacionales
Resolución de las formas indeterminadas $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ y $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando α converge hacia cero. (Cauchy) ("Leçons sur le calcul différentiel", Cauchy, M.A-L., 1829)
Determinación de la reglas sobre el orden de una cantidad infinitamente pequeña. (Moigno) ("Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral", tome I, Moigno, M., 1840, Paris. Bachelier, imprimeur-libraire)
Demostración del teorema de los valores intermedios utilizando el concepto de continuidad. (Bolzano) (Citado por El Bouazzoui, 1988)

Tabla 3.11. Entidades argumentativas y conflictos semióticos.

Entidades argumentativas	Conflictos semióticos
Resolución de las formas indeterminadas $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ y $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando α converge hacia cero (Cauchy).	Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de ∞.

Determinación de la reglas sobre el orden de una cantidad infinitamente pequeña (Moigno).	
Demostración del teorema de los valores intermedios utilizando el concepto de continuidad (Bolzano).	

Tabla 3.12. Entidades conceptuales y conflictos semióticos.

Entidades conceptuales	Conflictos semióticos
Aplicación de las reglas de los infinitamente pequeños como variables a conceptos del Análisis Matemático, como la continuidad y discontinuidad de funciones.	- Considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos. - Considerar que existe límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo.

Con el significado numérico del límite queda definido el infinitésimo por Cauchy como una variable que tiende a cero. Además, se fundamentan numerosos teoremas del Cálculo.

Sin embargo, aún no hay una ruptura con la metafísica del cálculo. Expresiones tales como "tan pequeño como queramos" carecen de una adecuada precisión. Dicha precisión fue abordada con posterioridad.

3.2.5. Significado métrico-analítico del límite

La preocupación por la naturaleza del número, como paso previo a la consideración del límite, conduce a que, en el hacer matemático, es antes el sistema que el objeto individual. Se rompe definitivamente con la "metafísica del cálculo".

Se define el concepto de entorno y las variables lógicas ε y δ, algebrizando el Análisis y, por tanto, suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo.

La etapa que corresponde a este significado es el tercer cuarto del siglo XIX.

En el significado métrico-analítico del límite, correspondiente a esta etapa, aparecen los siguientes elementos de significado, que se reflejan en las tablas siguientes:

Tabla 3.13. Entidades situacionales.

Matemáticos	Entidades situacionales
Weiertrass.	Desarrollo de una función continua sobre un intervalo cerrado del eje real como una serie de polinomios uniformemente convergente.
Darboux.	Demostración correcta y rigurosa del teorema de Bolzano (teorema de Darboux) al demostrar la existencia de una cota superior mínima para un conjunto acotado de números reales.
Weiertrass.	Cauchy había utilizado, sin probar, la existencia de un mínimo de una función continua definida sobre un intervalo cerrado. Weiertrass lo demuestra tanto para el mínimo como para el máximo.

Tabla 3.14. Entidades conceptuales y conflictos semióticos.

Entidades conceptuales	Conflictos semióticos
Preocupación por la naturaleza del número, como paso previo a la consideración del límite. En el hacer matemático es antes el sistema que el objeto individual. Se rompe definitivamente con la "metafísica del cálculo".	
Se define el concepto de entorno y las variables lógicas ε y δ, algebrizando el Análisis y, por tanto, suprimiendo todos los elementos trascendentes y geométricos en el mismo.	- Considerar que las letras ε y δ, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables y no operadores lógicos. - Considerar que el entorno ha de ser siempre simétrico.

El significado métrico analítico deja zanjado el problema de la precisión de la distancia con el ε y el δ. Posteriores ampliaciones basadas en la teoría de conjuntos dotaron al objeto límite de una generalización por medio del concepto de entorno topológico. Sin embargo, no se entrará en una nueva configuración dado que los objetivos de esta investigación se centran en estudiantes de primero de Bachillerato.

3.3. SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE REFERENCIA

Los significados institucionales históricos del límite de una función conducen a cinco tipos de significados o configuraciones. Sin embargo, la experiencia docente indica que no son exactamente éstos los significados que se pueden caracterizar en el entorno escolar.

Teniendo en cuenta lo anterior, se han caracterizado diversos significados de referencia que son los que se han tenido presentes a lo largo de la investigación. Dichos significados de referencia son los siguientes:

Significado gráfico, el cual se corresponde con los significados históricos geométrico y preinfinitesimal y está asociado a la idea de responder con motivos gráficos al concepto de límite de una función. Balkar y Tall (1991) hacen un estudio de la idea de gráfica que tienen los estudiantes, así como Wenzelburger (1991 y 1993).

Significado infinitesimal, que se corresponde con el significado histórico infinitesimal y está asociado a la idea de aproximación intuitiva numérica, de modo no ostensivo, obteniéndose el cálculo del límite al sustituir la variable “x” por el valor al que tiende el límite.

Significado numérico, que se corresponde con el significado histórico numérico y está asociado a la justificación tabular del límite.

Significado métrico-analítico, que se corresponde con el significado histórico métrico-analítico y está asociado al uso de entornos con su medida.

CAPÍTULO 4

ESTUDIO DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDO

4.1. INTRODUCCIÓN

El significado institucional pretendido, definido en el apartado 2.2.1.1, es el sistema de prácticas que se planifica para un determinado objeto matemático, el límite de una función, de cara al desarrollo de un cierto proceso instruccional. En el caso que nos ocupa, el profesor ha seguido estrictamente el libro de texto por lo que se ha considerado pertinente el análisis de los sistemas de prácticas correspondientes a dicho libro.

En general, el profesor tiene en cuenta, para seleccionar y ordenar parte del significado que va a proponer a los estudiantes, su propia experiencia, los significados de referencia, las restricciones institucionales y los conocimientos previos de los estudiantes. En el estudio realizado el significado institucional pretendido viene expresado en el libro de texto al ser un fiel reflejo de la planificación realizada.

Para el análisis ontosemiótico de los significados se ha utilizado la idea de configuración epistémica, puesto que este constructo permite visualizar los elementos de la actividad matemática relacionados entre sí. Se efectúan dos tipos de análisis: en primer lugar, un macroanálisis de la configuración global y de las configuraciones parciales correspondientes al objeto límite de una función; de este análisis se extraerán los "puntos críticos" o centros de interés específicos explicativos de las diversas dificultades de los sujetos mostradas a lo largo del proceso de estudio. En segundo lugar, se realiza un microanálisis de las configuraciones puntuales correspondientes a los puntos críticos detectados, de cara a poder hacer explícitas las entidades primarias, facetas, funciones semióticas y conflictos semióticos potenciales implicados en dichas configuraciones puntuales.

4.2. ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LAS CONFIGURACIONES GLOBAL Y PARCIALES DEL OBJETO LÍMITE

El manual estudiado se emplea en la institución primero de Bachillerato del IES “La Pandera“ de Los Villares (Jaén), y es uno de los más utilizados en Jaén y provincia en dicho nivel. Como se ha señalado, el profesor de la asignatura utiliza el libro de texto como referencia para la impartición de sus clases de Matemáticas, por lo que puede decirse que el significado institucional implementado queda bien reflejado con el discurso que efectúa el libro de texto.

En dicho manual, la introducción del límite de una función se realiza después de haber estudiado el tema de “Características de las funciones”, en el cual se desarrolla el análisis de las funciones elementales, incidiendo en la representación gráfica, en el dominio, recorrido y algunas propiedades de las mismas como simetrías, signo de la función, monotonía, acotación y periodicidad. Es decir, previamente al estudio del objeto límite, el estudiante está familiarizado con la gráfica de algunas funciones elementales que, posteriormente, serán utilizadas como apoyo al estudio del límite.

Globalmente, para responder a la pregunta ¿qué es el objeto límite de una función?, se recurre al apartado “Calculo de límites de funciones”, por lo que desde su inicio el lector se encuentra con el proceso de cálculo de límites, dejando la definición del concepto como objeto emergente de las prácticas realizadas anteriormente. Es decir, las situaciones-problema que se introducen son de tipo actuativo, obteniéndose como emergentes de la actividad matemática los conceptos y proposiciones correspondientes al límite.

De la configuración global: “Cálculo de límites de funciones” se extraen cuatro configuraciones parciales: “límites de funciones en el infinito”; “cálculo de límites de funciones en el infinito”; “límites laterales de una función en un punto”; y, “límite de una función en un punto”.

4.2.1. Estudio de la configuración parcial "límites de funciones en el infinito"

En esta configuración que denominaremos CGP1, Anexo 1, se parte de la representación gráfica de una función racional y se estudia el comportamiento intuitivo de dicha función para valores de x *muy grandes* (en el texto se dice lo anterior mediante la expresión *cuando x tiende a* $\pm\infty$), para obtener su límite 1. Posteriormente, a la recta y=1 se la denomina asíntota horizontal, generalizando para y=k. Por último, partiendo del hecho de que el límite en el infinito puede ser también infinito, se toma una función racional adecuada y se definen intuitivamente las asíntotas oblicuas y las ramas asintóticas y parabólicas.

El punto crítico de esta configuración corresponde al estudio de la función racional hasta determinar que su límite, cuando x tiende a ∞, es 1, puesto que ahí es donde se encuentran los elementos más interesantes de la actividad matemática y que pueden ayudar a comprender ausencias y disparidades de significados. Por tanto, de este punto crítico extraemos la siguiente configuración puntual que se analiza a continuación.

4.2.1.1. Análisis de la configuración puntual correspondiente a la configuración parcial CGP1

El texto, que aparece en el Anexo 1, se divide en las siguientes unidades de análisis que se estudian a continuación.

$U_{1.1}$: A partir de la representación gráfica de funciones, es posible estudiar cuál es el comportamiento para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable x.

Se trata de una función semiótica en la que la expresión es la representación gráfica, a la que se le asocia el contenido: comportamiento de la función para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable independiente. Se utiliza la faceta intensiva en ambos funtivos.

Es decir, la expresión *representación gráfica* sustituye al contenido en el cálculo del límite con lo que se están utilizando los significados gráfico e infinitesimal del límite. Se advierte la ausencia del significado numérico del límite como medio para poder hacer emerger el objeto límite de una función. Se echa en falta una función semiótica de expresión, una tabla de variación, y de contenido, la gráfica de la función. Por tanto, aparece un conflicto semiótico debido a la ausencia de dicha función semiótica.

$U_{1.2}$: Consideremos, por ejemplo, la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$. *Como se observa en su gráfica (figura 9.6), para valores de x muy grandes, es decir, cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a 1, y lo mismo ocurre para valores de x muy pequeños, es decir, cuando x tiende a $-\infty$.*

Se toma una entidad situacional extensiva como expresión del contenido función, que es de carácter intensivo.

La representación gráfica es la expresión de la función semiótica cuyo contenido es el resto de la unidad: "para valores muy grandes…". Se deja a cargo del lector la elaboración implícita de sucesiones de valores de las variables independiente y dependiente. Es decir, no se usa el significado numérico como medio para la comprensión del objeto límite de una función en el infinito. Se echa en falta una función semiótica de expresión, una tabla de variación, y de contenido, la gráfica de la función. Por tanto, aparece un conflicto semiótico debido a la ausencia de dicha función semiótica.

$U_{1.3}$: Si la función presenta la misma tendencia en ambos extremos de la gráfica, se escribe: $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$.

La expresión "$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$" sustituye al contenido "la función presenta la misma tendencia en ambos extremos de la gráfica". Esta función semiótica permite definir, de modo intuitivo, el límite de una función en el infinito.

4.2.2. Estudio de la configuración parcial "cálculo de límites de tipos de funciones en el infinito"

Esta configuración, que corresponde a la CGP2 y aparece en el Anexo 1, se dedica al cálculo de funciones polinómicas, racionales, irracionales y exponenciales generales, para x tendiendo a $\pm\infty$. Se plantean diversas situaciones-problema que son de carácter totalmente actuativo. Por tanto, no se han detectado puntos críticos que puedan explicar dificultades de los estudiantes más allá de las típicas del cálculo algebraico.

4.2.3. Estudio de la configuración parcial "límites laterales de una función en un punto"

La siguiente configuración, Anexo 1, corresponde a la CGP3. En ella se estudia, por medio de una función polinómica de segundo grado, el comportamiento de la función cuando la variable independiente x se aproxima a un valor concreto, utilizando una tabla de variación de x y f(x). No se da una definición específica de límite lateral sino que se expresa que los valores leídos de izquierda a derecha y los leídos de derecha a izquierda convergen al mismo valor. Posteriormente, se desarrolla un ejemplo de función con límite en un punto, aunque no definida en el mismo y se opera como en el caso anterior. Por último, se estudian varios ejemplos de funciones con infinitos puntos en los que los límites laterales son distintos, con límites laterales infinitos y con un único límite lateral.

Se ha detectado un "punto crítico" en esta configuración, que corresponde al proceso de estudio de los límites laterales en un punto que pertenece a la función. Por tanto, de este punto crítico se extrae la configuración puntual siguiente:

4.2.3.1. Análisis de la configuración puntual correspondiente a la configuración parcial CGP3

El texto, que aparece en el Anexo 1, se divide en varias unidades de análisis.

$U_{3.1.}$ La figura 9.11 es la representación gráfica de la función f(x)=x^2-1. Pero, ¿cómo se comporta la función cuando x se aproxima a un valor concreto, por ejemplo a 3? Se puede realizar la aproximación tomando valores cercanos a 3 tanto por la derecha como por la izquierda, es decir, para $x>3$ y $x<3$.

Se establece una función semiótica en la que la expresión, una vez más, es la gráfica de la función y el contenido es el comportamiento de la función cuando la variable independiente se aproxima a 3. El modo de aproximarse se concreta posteriormente mediante otra función semiótica en la que la expresión es la función semiótica anterior y el contenido es la definición de aproximación que se efectúa.

El interrogante que deja al lector en cuanto a la pregunta: ¿cómo tomar los valores cercanos a 3 por la izquierda y por la derecha? se trata de responder por medio de la unidad siguiente.

$U_{3.2.}$ En cualquier caso, las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8:

x	2,90	2,95	2,99	3	3,01	3,05	3,10
f(x)	7,41	7,7025	7,94	8	8,0601	8,3025	8,61

Como se observa en la tabla, los valores leídos de izquierda a derecha hacia x = 3 y los leídos de derecha a izquierda hacia x = 3, convergen en el valor 8. Por eso se escribe $\lim_{x\to 3}(x^2-1)=8$. *Además, f (3)=8.*

Mediante una función semiótica de expresión, la unidad anterior, y de contenido, la propia $U_{3.2}$, se trata de aclarar la aproximación, aunque pueden surgir algunos interrogantes al lector tales como los siguientes: ¿cuántas sucesiones hay en la tabla?, ¿representa este proceso la definición de límite de una función?

Consideramos que faltan algunas funciones semióticas que permitirían aclarar la definición del límite lateral. Por una parte, habría que construir la función semiótica siguiente:

De contenido: construir un entorno de 8. De expresión: tomando dos sucesiones de aproximaciones de x^2-1, tales como:

x^2-1	7,9	7,99	7,999…	8
	8,1	8,01	8,001…	8

Y dos sucesiones de aproximaciones de x^2, tales como:

x^2	8,9	8,99	8,999…	9
	9,1	9,01	9,001…	9

Una segunda función semiótica tendría de contenido: construir un entorno de 3. De expresión: tomando dos sucesiones de aproximaciones de x mediante las raíces cuadradas de los valores de las sucesiones anteriores de x^2:

x	2,9832	2,9983	2,9998…	3
	3,016	3,001	3,0001…	3

Por último, la unión de ambas funciones semióticas nos da la definición de límite de una función más correcta que la intuitiva empleada por el texto.

La utilización del significado numérico del límite sin el uso posterior del significado métrico-analítico, implica, además, varios conflictos semióticos, tales como: *considerar que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos*, o bien, *considerar que existe límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo*.

4.2.4. Estudio de la configuración parcial "límite de una función en un punto"

Esta configuración, Anexo 1, que corresponde a la CGP4, define el límite de una función en un punto generalizando la definición planteada en la configuración parcial anterior, al utilizar variables. La configuración finaliza con cinco ejemplos de cálculo de límites de funciones. Sin embargo, la introducción de valores absolutos puede dificultar la interpretación de la definición, ya que anteriormente no se ha realizado el paso de las sucesiones a derecha e izquierda con el valor absoluto. Por tanto, el punto crítico de esta configuración parcial reside en este aspecto.

Del punto crítico se extrae la siguiente configuración puntual:

4.2.4.1. Análisis de la configuración puntual correspondiente a la configuración parcial CGP4

El texto que aparece en el Anexo 1, corresponde a la unidad de análisis siguiente:

U_4: Se dice que un número real L es el límite de una función en un punto a si, al tomar valores de x cada vez más próximos a a, sus imágenes correspondientes, f(x), están también más próximas a L (figura 9.23).

Intuitivamente, esto significa que si $|x-a| \to 0$, *entonces* $|f(x)-L| \to 0$.

Como puede observarse, se deja a cargo del lector la realización de varias funciones semióticas no triviales. Por una parte, falta una función semiótica que relacione las sucesiones por la derecha y por la izquierda de la variable independiente x con la expresión $|x-a| \to 0$. Por otra, falta otra función semiótica que relacione las sucesiones por la derecha y por la izquierda de la variable dependiente con la expresión $|f(x)-L| \to 0$.

Además, la definición se plantea como una implicación "si… entonces", que es contraria a la verdadera definición de límite de una función, en la que se parte de un entorno de L y se busca un entorno de *a*.

CAPÍTULO 5

ESTUDIO DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL IMPLEMENTADO. ORGANIZACIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO DEL OBJETO LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

Una vez analizado el significado pretendido del proceso de estudio, se desarrolla el significado implementado. Es decir, la descripción exhaustiva de los contenidos, procedimientos, argumentaciones, proposiciones, etc., que se desarrollan en el aula. La modelización de la instrucción se efectúa mediante procesos estocásticos de tal forma que cada una de las dimensiones del proceso de instrucción analizadas (epistémica, docente, discente e instruccional) se puede modelizar mediante un proceso estocástico. En cada realización de un proceso de instrucción matemática se pondrán en juego una muestra de elementos del significado pretendido del objeto, así como una muestra de las funciones docentes y discentes. Por último, dadas las interacciones entre las funciones docentes y discentes, se desarrolla la trayectoria instruccional, la cual trata de explicar dichas interrelaciones y poner en evidencia los posibles conflictos de significado presentes a lo largo de la instrucción.

Como se señala en Godino, Contreras y Font, 2006, en cada realización del proceso instruccional (cada experiencia particular de enseñanza de un contenido matemático) se producen una serie de estados posibles y no otra. Es decir, se produce una trayectoria muestral del proceso, que describe la secuencia particular de funciones o componentes que ha tenido lugar. En este trabajo se distinguen cuatro trayectorias: epistémica, docente, discente e instruccional.

Cada una de estas trayectorias es una realización de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene unas características no deterministas. Incluso aunque la planificación haya sido cuidadosa, siempre hay elementos aleatorios que producen cambios en cada una de las trayectorias anteriores por la necesidad de adaptar la enseñanza planificada a las características y requerimientos de los alumnos.

A continuación se describen las cuatro trayectorias indicadas anteriormente, correspondientes a las cuatro sesiones de clase descritas en el Anexo 2.

5.2. TRAYECTORIAS EPISTÉMICAS

En este apartado se desarrolla lo que se denomina el análisis epistémico del proceso de instrucción. El texto se descompone en unidades de análisis con el objetivo de poder caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa realmente en la clase.

El EOS distingue diversas categorías de entidades primarias que conforman los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos (Godino, 1999). La trayectoria epistémica es la distribución de estos componentes en un proceso de estudio. Se distinguen seis estados posibles, según el tipo de entidad que se analiza en cada momento:

E1: Situacional: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: Actuativo: se aborda el desarrollo de una manera de resolver los problemas.

E3: Lingüístico: se introducen simbolizaciones, notaciones, representaciones gráficas,…

E4: Conceptual: se expresan las definiciones de los objetos matemáticos que intervienen en el proceso.

E5: Proposicional: se formulan propiedades.

E6: Argumentativo: se justifican tanto los procedimientos utilizados como las propiedades enunciadas.

Los estados se van sucediendo en todo el proceso de estudio según un determinado contenido matemático.

El análisis de la trayectoria epistémica del proceso instruccional permite caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica. Para hacer operativo el análisis, se divide en unidades de análisis según las distintas situaciones problemas que aparecen en el proceso de estudio. Se denomina configuración epistémica al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos y que se relacionan con la resolución de la situación problema. En cada configuración se distinguen unidades de análisis más elementales que se denominan unidades epistémicas. Las oraciones que van apareciendo se enumeran correlativamente y se denominan unidades naturales de análisis.

En las cuatro tablas siguientes se muestra la trayectoria epistémica de cada una de las sesiones del estudio del límite funcional en primero de Bachillerato.

Tabla 5.1. Trayectoria epistémica de la primera sesión.

Unidad Natural	Configuración Epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado
0	CE1	0	Idea intuitiva de límite en el infinito en modo gráfico.	E1: Situacional
1-3		1	Dibujo y presentación de gráficas.	E1: Situacional
4-8		2	Estudio de f para $x \to +\infty$	E2: Actuativo
9-11		3	Estudio de f para $x \to -\infty$	E2: Actuativo
12-18		4	Estudio de g para $x \to +\infty$	E2: Actuativo
19-23		5	Estudio de g para $x \to -\infty$	E2: Actuativo
24		6	Definición de Asíntota Horizontal.	E4: Conceptual
25-28		7	Estudio de h para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo
29-31		8	Estudio de una asíntota horizontal	E1: Situacional
32-37		9	Estudio de i para $x \to \pm\infty$	E2: Actuativo
38-42		10	Asignación de una fórmula a una gráfica de función.	E4: Conceptual
43	CE2	11	Plantea un ejemplar de una tarea	E1: Situacional
44-45		12	Actuación de dos alumnos	E2: Actuativo
46		13	Plantea un ejemplar de una tarea	E1: Situacional
47-48		14	Actuación de alumnos	E2: Actuativo
49		15	Pregunta del profesor	E1: Situacional
50		16	Acción del alumno	E2: Actuativo
51		17	Contraejemplo	E6: Argumentativo

52		18	El profesor pregunta y responde	E2: Actuativo
53		19	Argumenta una situación	E6: Argumentativo
54		20	Tarea	E1: Situacional
55		21	Respuesta de alumnos	E2: Actuativo
56		22	Pregunta del profesor	E1: Situacional
57		23	Respuesta de alumnos	E2: Actuativo
58		24	Justificación de acción	E6: Argumentativo
59-60		25	Justificación de alumnos	E6: Argumentativo
61		26	Justificación de acción	E6: Argumentativo
62		27	Se aborda un nuevo planteamiento	E1: Situacional
63	CE3	28	Notación de límites laterales	E3: Lingüístico
64-67		29	Estudio de límites laterales en modo gráfico	E1: Situacional
68-85		30	Cálculo de límites laterales en modo gráfico	E2: Actuativo
86-87		31	Estudio de límites laterales en modo gráfico	E1: Situacional
88		32	El valor de una función en un punto no influye en el valor del límite en ese punto.	E4: Conceptual
89		33	Estudio de límites laterales	E1: Situacional
90-97		34	Cálculo de límites laterales	E2: Actuativo

En esta clase de límites hemos detectado tres configuraciones epistémicas con una función específica dentro del proceso de instrucción. Globalmente consideradas, las configuraciones detectadas tienen un carácter esencialmente *actuativo*, ya que se pretende que los estudiantes ejerciten y dominen unas técnicas de cálculo de límites apoyadas en la representación gráfica de determinadas funciones. No hay, por lo general, carácter *proposicional* en toda la trayectoria epistémica, dado que no se pretende enunciar propiedades correspondientes al trabajo con límites. Hay un predominio del cálculo de límites desde un punto de vista puramente intuitivo, con abuso de lenguaje gráfico y carencia de lenguaje analítico, postergado a futuras clases. Es decir, aparecen los significados de referencia gráfico e infinitesimal y, en menor medida, el significado de referencia numérico.

Las tres configuraciones epistémicas identificadas en esta clase se analizan a continuación.

Configuración epistémica 1.

El proceso de estudio se inicia con un estado "situacional", es decir, con el planteamiento de cuatro gráficas para que, desde un punto de vista intuitivo, se dé solución a un cierto tipo de problema de modelización matemática: la determinación del límite de estas funciones en el infinito ($+\infty$ y $-\infty$), por medio del uso del lenguaje gráfico, buscando la definición intuitiva de asíntota horizontal.

Para el éxito de la tarea, el tipo de actividad matemática requerida en estos ejemplos, basándose en el conocimiento escolar de gráficas de funciones, es el recuerdo e interpretación de la gráfica de una función, con el fin de analizar el comportamiento de la misma según valores de x y su *tendencia* a los infinitos.

La realización de la tarea requiere una acción de modelización, lo que implica establecer una correspondencia entre dos sistemas de prácticas: el ligado a la interpretación gráfica de unas funciones y el correspondiente al objeto límite de función como resultado del comportamiento gráfico de las mismas. Es decir, se trata de una función semiótica de tipo epistémico, donde la expresión sería el planteamiento gráfico y el contenido sería el objeto límite de función.

Se utilizan de manera implícita unas restricciones de trazado de figuras, que de alguna manera habría que problematizar, puesto que se muestran funciones en las que las gráficas de las mismas nunca atraviesan a las asíntotas, ignorando, por tanto, los casos más complejos donde esto no ocurre.

Se resalta el hecho de que en el discurso del profesor se están realizando funciones semióticas de cara a eludir el conflicto semiótico de que *el infinito es un número.* En el apartado 31 de la trascripción, el profesor comenta explícitamente este hecho.

Las cuatro gráficas escogidas por el profesor tienen comportamientos muy diversos: una gráfica es estrictamente creciente y sin asíntotas, en otra aparece implícitamente la idea de asíntota horizontal, sin especificar cuál es para que el estudiante la deduzca, en otra hay dibujadas sus asíntotas horizontales −esperando conducir heurísticamente al alumno a su definición− y, por último, aparece una gráfica tipo “parábola”.

Como actividad matemática de recuerdo, el profesor plantea a los alumnos intentar asignar a esta última gráfica de función una expresión analítica, con lo que se pone de manifiesto un estado *conceptual* al interpretar definiciones de los objetos puestos en juego, buscando que el alumno efectúe una función semiótica del lenguaje gráfico al analítico.

Configuración epistémica 2.

Para el estudio del límite finito en un punto, se analizan dos casos: el primero, corresponde a una función continua en el punto, y el segundo, a una función discontinua en el punto a tratar.

Se inicia el estudio con una función conocida, a saber, cuadrática. La técnica a aplicar requiere recordar el cálculo del valor numérico de una función en un punto y deducir que el límite en ese punto coincide, en este caso, con su valor numérico. A continuación, se utiliza una tabla de variación, a fin de aclarar términos como “cerca del 5”, así como que a la izquierda es una sucesión creciente y a la derecha es decreciente, tratando de hacer ver al alumno que el valor de límite en el punto se obtiene de manera independiente al valor de la imagen de la función en el punto −aunque en este caso coincidan−. Esto ha supuesto la elaboración, de manera implícita, de funciones semióticas entre el lenguaje gráfico y el numérico, así como entre el numérico y el gráfico.

Como sólo se desarrolla una idea intuitiva, es necesario resaltar de algún modo que las restricciones institucionales impiden una aritmetización del límite, es decir, una medida del “tan cerca como queramos”.

El hecho de basar la enseñanza en los aspectos intuitivos visuales, mediante una potenciación excesiva de la faceta gráfica, acorta un tiempo importante que debería utilizarse en incrementar el lenguaje tabular variacional, como medio de acercarse al aspecto formal del límite.

Como complemento a esta actividad se propone un segundo caso gráfico, el cálculo del límite en un punto que no pertenece al dominio de definición de la función. El profesor, utilizando la configuración dialógica, trata de negociar y reconducir ciertos conflictos semióticos muy arraigados en el estudiante, que tiene conocimientos rudimentarios adquiridos sobre la noción de límite, tales como: *si un punto no está en el dominio de definición de una función, no hay límite en ese punto*, o también, *el límite de una función en un punto coincide con la imagen del mismo*.

Configuración epistémica 3.

Se comienza abordando los límites laterales –usando el ejemplo de la unidad 51– lo que permite completar la noción de límite finito en un punto. Se insiste en lo pertinaz del conflicto semiótico del límite como valor de la función, pues incluso aunque exista el límite, si no hay valor de la función en el punto, el estudiante niega la existencia del límite, con lo que se observa, una vez más, la existencia de los conflictos semióticos anteriores. La cuestión vuelve a ser aclarada en las unidades 86 y 88.

Se muestran ejemplos gráficos de funciones a trozos –unidades 64 y 86–, donde se puede detectar de forma más clara si el alumno ha superado los conflictos semióticos ya referidos. La propia notación del lenguaje, al especificarse "por la izquierda" o "por la derecha", presupone confusión en el estudiante con "valores positivos" o "valores negativos", puesto que esto sólo es cierto para el 0, pero no en los demás casos. Precisamente por eso, el profesor cree pertinente el estudio de los límites laterales en el 0 como un primer acercamiento al problema del cálculo de límites laterales.

Acaba la configuración con el planteamiento de un cuarto caso: funciones cuyo dominio no es todo $\Re$. Si el dominio de una función –ejemplo gráfico de la unidad 89– es sólo R^- (o R^+), el problema del cálculo de límites puede verse acentuado al no encontrar sentido al estudio de algún límite lateral, provocando una cierta "desconfianza" en las producciones del estudiante.

Tabla 5.2. Trayectoria epistémica de la segunda sesión.

Unidad Natural	Configuración Epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado
0	CE1	0	Continuación del día anterior	E1: Situacional
1		1	Descripción de lo que se vio en tres funciones	E1: Situacional
2-4	CE2	2	Límites de diversas funciones en el infinito	E2: Actuativo
5	CE3	3	Funciones polinómicas y papel del infinito	E4: Conceptual
6		4	Definición de $\lim_{x \to +\infty} p(x)$	E4: Conceptual
7-8		5	Ejemplo de cálculo de $\lim_{x \to +\infty} p(x)$	E2: Actuativo
9-11		6	Ejemplo de cálculo de $\lim_{x \to -\infty} p(x)$	E2: Actuativo
12-17		7	Ejemplo de cálculo en $\pm\infty$	E2: Actuativo
18	CE4	8	Funciones racionales	E1: Situacional
19-23		9	Relación entre los grados de los miembros de una función racional.	E4: Conceptual
24		10	Indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	E4: Conceptual
25-39		11	Cálculo con infinitos	E2: Actuativo
40	CE5	12	Solución del apartado a)	E2: Actuativo
41-43		13	Generalización de la propiedad	E5: Proposicional
44	CE6	14	Solución del apartado b)	E2: Actuativo
45		15	Generalización de la propiedad	E5: Proposicional
46-48		16	Recuerdo de los coeficientes principales de un polinomio	E4: Conceptual
49-52	CE7	17	Solución del apartado c)	E2: Actuativo
53		18	Generalización de la propiedad	E5: Proposicional
54-58		19	Cálculo de límites en $-\infty$	E2: Actuativo
59-62	CE8	20	Funciones irracionales	E1: Situacional
63		21	Cálculo de límites de funciones irracionales	E2: Actuativo
64	CE9	22	Indeterminaciones con raíces	E1: Situacional
65-67		23	Indeterminación $(\pm\infty)-(\pm\infty)$	E4: Conceptual
68-74		24	Resolución de la indeterminación $(\pm\infty)-(\pm\infty)$	E2: Actuativo
75		25	Enunciado de ejercicios	E1: Situacional

En esta sesión se han detectado nueve configuraciones epistémicas que se describen a continuación.

Configuraciones epistémicas 1 y 2

Se toma como punto de partida las funciones trabajadas el día anterior, por lo que predomina un estado situacional del que se extraen consecuencias para continuar la temática del límite en el infinito, destacando dos puntos de vista del análisis: cuando se tiene la gráfica de la función, aunque no su expresión analítica y cuando se tiene ésta y no la gráfica.

Se recuerdan técnicas de análisis de los dominios de definición para implicar al estudiante en el estudio posterior.

Configuración epistémica 3

Se trata de una configuración en la que predominan los estados conceptual y actuativo, ya que se definen los límites de funciones polinómicas y se trabaja con cálculos sobre dichos límites.

Se comienza abordando un conflicto semiótico: *creer que el infinito es un número*, al efectuar el profesor argumentaciones sobre la consideración errónea del infinito como un número.

Seguidamente se aborda el límite de funciones polinómicas destacando el monomio de mayor grado como el responsable del límite de la función, indicando explícitamente que el infinito juega con los signos y las potencias como si fuera un número real, de ahí la pertinencia de haber realizado comentarios acerca del conflicto semiótico citado.

Configuraciones epistémicas 4, 5, 6 y 7

En estas configuraciones los estados que aparecen son el conceptual, actuativo y proposicional, puesto que se define una indeterminación, se relacionan los tipos de límites en cocientes polinómicos para resolver ésta y se resuelven, de manera individual, cada una de las funciones propuestas. Por último, el estado proposicional aparece cuando se generalizan cálculos de límites que no se corresponden con un solo monomio.

En estas configuraciones se trabaja con los límites en el infinito de funciones racionales, partiendo de tres ejemplos según los distintos casos que pueden presentarse relacionando el grado del numerador respecto del grado del denominador.

El profesor destaca la primera indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (unidad 24) y discute con los estudiantes el posible valor erróneo de 1, lo que causa extrañeza en éstos. A modo de justificación el profesor propone ejemplos de otras operaciones con infinitos que no son indeterminaciones. Para extraer el valor de algunos de estos cálculos, el profesor recurre al significado de referencia numérico del límite.

Las unidades epistémicas se completan con la resolución de cada uno de los ejemplos, correspondiendo, respectivamente, a cada uno de los tres casos que se pueden presentar.

Configuraciones epistémicas 8 y 9

En este caso, los estados son: situacional, al presentar las funciones irracionales, actuativo, al calcular límites de funciones irracionales, y, por último, conceptual, al presentar la indeterminación $\infty - \infty$.

El profesor destaca la dificultad de este tipo de funciones en los que aparece el signo de la raíz, interrogando sobre el dominio de la función y haciendo explícito el hecho de que algunos límites en los infinitos puede que carezcan de sentido, como es el caso del límite $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+x}$ (unidad 63).

Posteriormente, se estudia la indeterminación $\infty - \infty$ muy típica en este tipo de funciones. Para resolver la indeterminación, el profesor recurre a la técnica de multiplicación por el conjugado, ya conocida por los alumnos.

Tabla 5.3. Trayectoria epistémica de la tercera sesión.

Unidad	Configuración Epistémica	Unidad Epistémica	Descripción	Estado
0	CE1	0	Estudio del límite de una función continua en un punto	E1: Situacional
1-2		1	Se introduce la notación analítica y gráfica	E2: Lingüístico
3-4		2	Cálculo del límite como valor de la función	E2: Actuativo
5-7		3	Estudio de una tabla de aproximación	E2: Actuativo
8-12		4	Estudio del término "tan cerca como se quiera"	E4: Conceptual
13-14		5	Definición del $\lim_{x \to a} f(x)$	E4: Conceptual
15-17	CE 2	6	Aplicación de la definición a un ejemplo	E1: Situacional
18-19		7	Cálculo del límite como valor de la función	E2: Actuativo
20-24		8	Cálculo del límite como valor de una tabla de aproximación	E2: Actuativo
25-26	CE 3	9	Estudio del límite de una función no continua con una asíntota vertical, gráficamente	E1: Situacional
27		10	Introducción de la notación analítica del límite finito en el infinito	E3: Lingüístico
28-31		11	Estudio de una tabla de aproximación	E2: Actuativo
32-33		12	Definición de las asíntotas verticales y horizontales	E4: Conceptual
34-35	CE 4	13	Estudio del límite de una función no continua con asíntota vertical, analíticamente	E1: Situacional
36-45		14	Cálculo del límite por la izquierda a partir de una tabla de valores	E2:Actuativo
46-49		15	Cálculo del límite por la derecha a partir de una tabla de valores	E2:Actuativo
50-52		16	Determinación de la asíntota vertical	E4: Conceptual
53-55		17	Recuerdo de la definición de asíntota horizontal	E4: Conceptual
56-57		18	Dibujo de la gráfica de la función a partir de la información anterior	E3: Lingüístico
58		19	Distinción entre el límite	E5: Posicional

			para función continua y función discontinua	
59-63	CE5	20	Estudio del límite f(x) en una función definida a trozos de modo gráfico	E1: Situacional
64-65		21	Justificación intuitiva del comportamiento de la función en un entorno de x_0	E6: Argumentativo
66-73		22	Cálculo de los límites laterales para $x \to x_0$ de modo numérico	E2:Actuativo
74-78		23	Institucionalización de la noción de $\lim_{x \to a} f(x)$	E4: Conceptual
79-80		24	Interpretación de la noción de $\lim_{x \to a} f(x)$	E4: Conceptual
81	CE 6	25	Estudio del $\lim_{x \to a} f(x)$ de una función definida a trozos, analíticamente	E1: Situacional
82-92		26	Dibujo de la gráfica de la función a partir de la información dada	E3: Lingüístico
93-94		27	Enunciado de ejercicios de cálculo de límites	E1: Situacional

Se describen, a continuación, las seis configuraciones epistémicas detectadas para esta sesión:

Configuraciones epistémicas 1 y 2

En estas configuraciones dominan los estados *actuativo* y *conceptual*, ya que el profesor trata, mediante dos unidades de análisis, el límite de una función continua en un punto, desde un punto de vista general para una función arbitraria y particularizando en un caso de función dada por su fórmula.

En la primera unidad de análisis, casi de modo intuitivo, se trata el término “tan cerca como se quiera”, pero se huye de una tabla de variación y de valores concretos, más bien se hace un estudio gráfico tratándose de deducir que los puntos cercanos en un entorno del punto objeto del límite tienen sus imágenes en un entorno respecto al valor del límite. El abuso de este lenguaje gráfico puede ser transparente a la vista del alumno y no aclarar los significados que el estudiante pueda construir sobre este concepto. De todas formas, el profesor intenta construir una definición de límite en un punto huyendo de la definición métrica de límite y sin hacer referencia a los valores ε y δ tan pertinentes en este tipo de definición.

Como práctica de este concepto se propone el cálculo de límite en un punto de una función continua en todo R, lo que puede llevar al conflicto semiótico de entender que *el límite de una función en un punto coincide con el valor de la función en dicho punto* si no se retoma este cálculo para funciones de otra naturaleza.

Se observa la ausencia de tablas de variación en la deducción de límites por parte del profesor, lo que puede ser explicable dado el carácter intuitivo que se le da a este cálculo en primero de Bachillerato, abusando del lenguaje gráfico frente al analítico y variacional.

Configuraciones epistémicas 3 y 4

En estas configuraciones se plantea el cálculo de límites en funciones con asíntotas verticales, tanto desde un punto de vista gráfico como analítico, por lo que el estado dominante es el *actuativo*, aunque también aparece el estado *conceptual* cuando el profesor recuerda y define los conceptos de asíntota horizontal y vertical, ya estudiados por los alumnos, pero se detecta que en las producciones de éstos aún no quedan claras las implicaciones de las asíntotas con el cálculo de límites, en parte porque la introducción de las mismas se produce desde un punto de vista gráfico, es decir, dada una gráfica de función se reconoce si tiene, o no, asíntotas.

El cálculo de las asíntotas sin la gráfica es más complejo y se aborda en estas unidades de análisis, especialmente en la cuarta, donde para dar un mayor énfasis a las asíntotas verticales, el profesor les habla de la *indeterminación* $\frac{k}{0}$, la cual no siempre aparece como tal en los manuales de texto al uso.

Acaba la configuración con el estudio de las asíntotas de una función dada por su fórmula y la traducción de esta interpretación a la construcción de la gráfica de la función, por lo que se constata una función semiótica que pasa del lenguaje analítico al gráfico, hecho que se produce por primera vez en el análisis de todas estas sesiones.

Configuraciones epistémicas 5 y 6

En estas unidades de análisis se trata el mismo aspecto, cálculo del límite en una función definida a trozos, desde dos puntos de vista: gráfico y analítico.

El estado que predomina en la configuración 5 es el *conceptual*, dado que el profesor trata de institucionalizar, a partir de un ejemplo, la noción de límite en un punto y la interpretación del mismo, puesto que con la gráfica ha conducido a los estudiantes a esta noción. A pesar de ello, y como ya refiere el observador en la unidad 79, los alumnos movilizan un conflicto semiótico que subyace en la unidad, a saber, "*existe f(a) implica que existe el límite*" y "*no existe f(a) implica que no existe el límite*", de ahí que, siendo consciente el profesor de ello, le lleva en la unidad 80 a indicar explícitamente el hecho de que el valor de la función en el punto no es condicionante para la existencia del límite.

La configuración 6 trata de la misma cuestión desde un punto de vista analítico, dando una función formada por dos trozos, una parábola y una recta que se definen antes y después del 0. Al estar finalizando esta sesión, sólo hay tiempo para dibujar la función a trozos sin hacer cálculos de límites, proponiendo el profesor éstos para una nueva sesión, lo que implica que las producciones de los alumnos volverán a ser como hasta ahora: los límites serán resueltos desde un punto de vista gráfico, lo que parece que no era la acción que el profesor tenía pensada al comienzo de esta unidad de análisis.

Tabla 5.4. Trayectoria epistémica de la cuarta sesión.

Unidad Natural	Configuración Epistémica	Unidad epistémica	Descripción	Estado
1	CE1	1	Resolución de ejercicios del día anterior	E1: Situacional
2		2	Gráfica de función	E3: Lingüístico
3-6		3	Cálculo de límites en $\pm\infty$	E2: Actuativo
7-10		4	Cálculo de límites en puntos	E2: Actuativo
11-15		5	Cálculo de límites laterales	E2: Actuativo
16-17		6	Interpretación de resultados	E4: Conceptual
18-25		7	Cálculo de límites en un punto	E2: Actuativo
26-29	CE2	8	Recuerdo de indeterminaciones	E4: Conceptual

30		9	Indeterminación $\frac{0}{0}$	E4: Conceptual
31-36		10	Resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$	E2: Actuativo
37-42		11	Recuerdo de descomposiciones factoriales de polinomios	E4: Conceptual
43-49		12	Interpretación gráfica	E2: Actuativo
50		13	Institucionalización en el caso $\frac{0}{0}$	E4: Conceptual
51-62		14	Indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones irracionales	E2: Actuativo
63-68		15	Resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones irracionales	E2: Actuativo
69-71		16	Recuerdo de $\frac{1}{+\infty}$	E4: Conceptual
72-74	CE3	17	Funciones analíticas a trozos	E1: Situacional
75-88		18	Cálculo de límites en un punto	E2: Actuativo
89		19	Institucionalización del proceso	E4: Conceptual
90-92		20	Asignación gráfica al cálculo analítico	E2: Actuativo
93-98	CE4	21	Aplicación de Ruffini en la indeterminación $\frac{0}{0}$	E1: Situacional
99-114		22	Cálculo de límite en un punto por Ruffini	E2: Actuativo
115-116		23	Cálculo de límites y enunciado de ejercicios	E1: Situacional

En esta sesión se han detectado cuatro configuraciones epistémicas, que pasan a ser comentadas:

Configuración epistémica 1

La sesión comienza con la revisión del ejercicio propuesto el día anterior: una función a trozos, ya dibujada, para el estudio de cálculo de límites concretos. Estamos, pues, ante un estado *actuativo* predominante, ya que se calculan los límites de esta función en $\pm\infty$ y en algunos puntos concretos, para acabar con el límite en x = 0 como punto de salto de rama. Como parece que hay algunas dudas en esta resolución, el profesor, a petición de un alumno, vuelve a plantear otro ejemplo en el que ahora coinciden los límites laterales, pero no con el valor de la función en el punto, con lo que vuelve a insistir en que este valor no tiene por qué ser igual al del límite (el profesor es consciente de que este conflicto semiótico ya analizado es muy resistente en los alumnos).

Configuración epistémica 2

Aparecen en esta configuración dos estados, el *conceptual*, al tratarse del planteamiento de una indeterminación nueva, $\frac{0}{0}$, y el *actuativo,* ya que se aborda un método para resolver esta indeterminación con unos ejemplos. En éstos, el profesor los conduce a la resolución de esta indeterminación mediante la descomposición factorial y posterior simplificación, cuando se trata de funciones racionales, y la multiplicación por el conjugado y posterior simplificación, cuando se trata de funciones irracionales. Este último método resulta costoso para algunos alumnos, lo que hace que la mayor parte de toda esta unidad de análisis esté dedicada a su resolución.

Configuración epistémica 3

Se plantea ahora el estudio de límites en una función a trozos dada por su fórmula, sin apelar a su representación gráfica, en la que los límites laterales coinciden entre sí, pero no con la imagen en el punto. Como hecho a destacar, surge el conflicto semiótico de la función constante, ya que una de las ramas lo es ("*...si no hay x, entonces no hay límite*") pero el profesor lo aborda tanto analítica como gráficamente, ya que aprovecha el cálculo de límites para pasar del lenguaje analítico y numérico al gráfico, proceso más complejo y que los alumnos aceptan por asentimiento general.

Configuración epistémica 4

Dado que el profesor considera pertinente el caso de la resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones racionales por descomposición factorial, se presenta ahora una unidad práctica sobre el recuerdo y cálculo de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de polinomios. Estamos ante un estado *actuativo* de cálculo de un límite por este método, acabando la sesión con la propuesta de una serie de ejercicios de entrenamiento sobre cálculos de límites planteados en el libro de texto, que serán los que se resuelvan en futuras clases, ya no analizadas en este trabajo por ser clases puramente instrumentales.

5.3. TRAYECTORIAS DOCENTES

La trayectoria docente es la secuenciación de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio de un conjunto de contenidos matemáticos. Cuando tales actividades se circunscriben a una situación-problema específica hablaremos de configuración docente, la cual irá asociada a una configuración epistémica. Estas actividades o acciones del profesor son su respuesta o manera de afrontar las tareas o funciones docentes, para las cuales se propone la siguiente categorización.

Funciones docentes:

P1: Planificación: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).

P2: Motivación: creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: Asignación de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: Regulación: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: Evaluación: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.

P6: Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

A continuación se desarrollan las trayectorias docentes de las cuatro sesiones del proceso de estudio.

Tabla 5.5. Trayectoria docente de la primera sesión.

Unidad Natural	Configuración Docente	Unidad docente	Descripción	Estado
0-3	CD1	1	Límites en el infinito	P4: Regulación
4-8		2	Interrogación colectiva sobre f	P5: Evaluación
9-11		3	Resolución de f	P4: Regulación
12		4	Motivación ("Chiquitín…")	P2: Motivación
13-23		5	Interrogación colectiva sobre g	P5: Evaluación
24		6	Definición de asíntota horizontal	P4: Regulación
25-28		7	Interrogación colectiva sobre h	P5: Evaluación
29-31		8	Justificación de asíntota horizontal	P4: Regulación
32-35		9	Interrogación individual sobre i	P5: Evaluación
36-37		10	Motivación ("Votos a favor…")	P2: Motivación
38-42		11	Asignación de expresión analítica a una gráfica	P4: Regulación
43	CD2	12	Límites finitos en un punto	P3: Asignación
44-50		13	Resolución del cálculo	P4: Regulación
51		14	Se aborda el estudio de otra gráfica	P3: Asignación
52-57		15	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
58-62		16	Resolución del cálculo	P4: Regulación
63	CD3	17	Se introduce notación sobre límites laterales	P4: Regulación
64		18	Se aborda el estudio de límites laterales	P3: Asignación
65-72		19	Resolución del cálculo	P4: Regulación
73		20	Motivación ("Votos a favor…")	P2: Motivación
74-76		21	Resolución del cálculo	P4: Regulación
77		22	Motivación ("Votos en contra…")	P2: Motivación
78-85		23	Resolución del cálculo	P4: Regulación
86		24	Planteamiento de un nuevo ejemplo gráfico	P3: Asignación
87-88		25	Institucionalización del saber	P4: Regulación
89		26	Planteamiento de un ejemplo gráfico por un alumno	P3: Asignación
90-97		27	Resolución del ejemplo	P4: Regulación

Vamos a enmarcar en este apartado la secuencia de actividades que realiza el profesor durante el proceso de estudio del cálculo de límites de funciones.

La configuración docente va íntimamente ligada a la configuración epistémica ya desarrollada, y podría proponerse una clasificación como la que sigue:

Configuración docente 1.

El trabajo del profesor comienza con la revisión de cuatro gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando la variable independiente tiende a infinito.

El trabajo de modelización que hace el profesor requiere un proceso de *regulación*: recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios de gráficas de funciones y comportamiento de las mismas cuando la variable se hace muy grande en valor absoluto.

Una manera de mantener la atención del alumno es la *evaluación* colectiva que realiza el profesor a los alumnos sobre los límites encontrados en las cuatro funciones, motivo principal de este tramo –unidades 1 a 42–.

Aparecen también actividades de *regulación* cuando el profesor fija reglas concretas, como la definición de asíntota horizontal –unidad 24– y la búsqueda de una expresión analítica a una gráfica –unidades 38 a 42–.

El profesor, en su interés por captar la atención del estudiante, intenta crear un clima de afectividad y estímulo del trabajo con expresiones como “chiquitín…” –unidad 12– y “votos a favor” o “votos en contra” –unidad 36–.

Configuración docente 2.

Comienza esta configuración con la *asignación* de una tarea –unidad 43–, retomando un ejemplo que acaba de construir en la unidad anterior. De esta manera el alumno no ve un cambio brusco en la secuenciación del tema, pero pasa del cálculo de límites en el infinito al cálculo de límites finitos en un punto.

Como es una cuestión que da mucho juego, se proponen distintos casos para abordarlo: uno, analítico –unidades 43 a 50– y otro, gráfico –unidades 51 a 61–. El proceso de interrogación colectiva predomina en la metodología del profesor pero, aunque la resolución es asumida por él mismo, a lo largo de la presentación trata de dar una cierta participación a los alumnos, intentando dejar bajo su responsabilidad una parte de la tarea, con objeto de lograr su devolución.

El proceso de *regulación* para la resolución del cálculo finaliza esta configuración. El profesor los ha conducido heurísticamente –es decir, utilizando elementos de la situación que buscan conducir al estudiante a los estados emocionales de interés, compromiso personal,...– a considerar el caso de que una función puede tener límite en un punto y, sin embargo, no estar definida en ese punto, situación que de no estar bien conducida, favorece la emergencia de conflictos semióticos ya comentados en situaciones anteriores. Además, el profesor los lleva a esta conclusión por medio de un ejemplo gráfico –unidad 51–, al considerar que de esta forma se "ve" mejor que cuando se utiliza un lenguaje puramente numérico.

Configuración docente 3.

Por medio de los tramos anteriores a esta configuración –unidades 58 a 62– el profesor conduce al alumno a una nueva situación: el cálculo de límites laterales.

Se produce un estado de *regulación*, en el que el profesor introduce la notación sobre límites laterales, seguido de una *asignación* de tareas, con el cálculo de los límites laterales en tres ejemplos gráficos de funciones dadas (unidades 64, 86 y 89).

Estas funciones de regulación y asignación de tareas se van repitiendo en esta configuración, mediante las cuales el profesor establece reglas concretas sobre el cálculo de límites laterales. En el caso de aparición del error, el profesor indaga sobre los orígenes del mismo, buscando su superación mediante el debate.

Dado que el objetivo del docente es estimular al estudiante, aparecen con frecuencia funciones de motivación, con expresiones como "votos a favor" –unidad 73– o "votos en contra" –unidad 77–, lo que hace provocar una participación del estudiante, sin que éste abandone la responsabilidad de asumir las tareas que aquél les ha propuesto.

Tabla 5.6. Trayectoria docente de la segunda sesión.

Unidad Natural	Configuración Docente	Unidad docente	Descripción	Estado
0-1	CD-1	0	Continuación del día anterior: cálculo gráfico y analítico	P3: Asignación
2-4	CD-2	1	Límites de funciones en el infinito	P3: Asignación
5	CD-3	2	Regulación del empleo del infinito	P4: Regulación
6		3	Se aborda el límite de funciones polinómicas	P4: Regulación
7		4	Planteamiento analítico de límites infinitos en funciones polinómicas	P3: Asignación
8-17		5	Resolución de límites de funciones polinómicas	P4: Regulación
18	CD-4	6	Planteamiento de límites de funciones racionales	P3: Asignación
19-21		7	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
22		8	Explicación de procedimiento en funciones racionales	P4: Regulación
23-24		9	Justificación de indeterminaciones	P4: Regulación
25		10	Regulación de cocientes con el infinito	P4: Regulación
26-35		11	Cálculo con infinitos	P4: Regulación
36-39		12	Motivación ("Votos a favor...")	P2: Motivación
40-43	CD-5	13	Solución del apartado a)	P4: Regulación
44-48	CD-6	14	Solución del apartado b)	P4: Regulación
49-53	CD-7	15	Solución del apartado c)	P4: Regulación
54		16	Se aborda el estudio en $-\infty$	P3: Asignación
55-58		17	Resolución del límite	P4: Regulación
59	CD-8	18	Sobre funciones irracionales ("que tanto nos gustan...")	P2: Motivación
60-63		19	Pregunta colectiva acerca del dominio de funciones irracionales	P5: Evaluación
64-67		20	Se aborda el estudio de indeterminaciones en funciones irracionales	P3: Asignación
68-69		21	Interrogación colectiva sobre racionalizar	P5: Evaluación
70-74		22	Resolución de un límite	P4: Regulación
75		23	Plantea el cálculo de diversos límites	P3: Asignación

Se han detectado ocho configuraciones docentes en esta trayectoria que se describen a continuación.

Configuraciones docentes 1, 2 y 3

Se contemplan los estados de asignación y de regulación, puesto que es el profesor el que controla y dirige el proceso de estudio, asignando los distintos planteamientos analíticos para el cálculo de funciones en el infinito, en general, y funciones polinómicas, en particular. La regulación aparece cuando se aborda el límite de funciones polinómicas y la resolución de límites con funciones de este tipo.

Configuraciones docentes 4, 5, 6 y 7

Comienza con el estado de asignación de tareas al plantear límites de funciones racionales y predomina en estas configuraciones el estado de regulación al explicarse el procedimiento a seguir en estas funciones racionales, al justificarse las indeterminaciones, al calcular límites con infinitos y al solucionar los tres tipos de funciones racionales que dan lugar a cada uno de los respectivos tipos de límites.

Además, en estas configuraciones se produce un estado de evaluación durante el proceso de estudio, al interrogar de modo colectivo el profesor a los estudiantes (unidades 19 a 21) y, buscando el docente la implicación del alumno y su atención, se produce un estado de motivación intentando crear un clima de afectividad que los haga más partícipes (unidades 36 a 39).

Configuración docente 8

Comienza con un estado de motivación, al intentar el profesor un acercamiento a las funciones irracionales, consciente de la dificultad que entrañan para los estudiantes (unidad 59).

Al potenciar la participación de los estudiantes, se producen estados de evaluación colectiva cuando se pregunta acerca del dominio de las funciones irracionales y de racionalizar cocientes de estas funciones, herramienta que es imprescindible para el cálculo de límites cuando aparecen las indeterminaciones descritas.

La configuración finaliza con el planteamiento del cálculo de distintos límites de funciones como una tarea para el día siguiente, con lo que se concluye esta configuración con un estado de asignación.

Tabla 5.7. Trayectoria docente de la tercera sesión.

Unidad Natural	**Configuración Docente**	**Unidad docente**	**Descripción**	**Estado**
0-1	CD-1	1	Se aborda el estudio del límite en un punto: $\lim_{x \to a} f(x)$	P_3: Asignación
2		2	Se describe la expresión analítica y gráfica	P_4: Regulación
3-4		3	Interrogación colectiva	P_5: Evaluación
5		4	Interrogación colectiva	P_5: Evaluación
6-7		5	Resolución de la actividad	P_4: Regulación
8		6	Evaluación de significados personales	P_5: Evaluación
9-14		7	Explica / justifica el procedimiento utilizado e institucionaliza el saber	P_4: Regulación
15	CD-2	8	Cálculo del límite de una función expresada analíticamente	P_3: Asignación
16-17		9	Pregunta colectiva acerca del dominio de la función	P_5: Evaluación
18-21		10	Interrogación colectiva	P_5: Evaluación
22-24		11	Resolución del cálculo	P_4: Regulación
25	CD-3	12	Planteamiento gráfico de límites infinitos	P_3: Asignación
26-27		13	Explicación y expresión analítica de los límites laterales	P_4: Regulación
28-31		14	Interrogación colectiva	P_5: Evaluación
32-33		15	Relación entre los límites infinitos y las asíntotas verticales	P_4: Regulación
34-35	CD-4	16	Planteamiento analítico de límites infinitos	P_3: Asignación
36		17	Se plantea un ejemplo	P_4: Regulación
37-46		18	Resolución del límite a la izquierda de *a*	P_4: Regulación
47-49		19	Resolución del límite a la derecha de *a*	P_4: Regulación
50-52		20	Institucionalización de las asíntotas verticales	P_4: Regulación
53-55		21	Recuerdo de las asíntotas horizontales	P_4: Regulación
56-58		22	Dibujo de la gráfica de acuerdo con la información disponible	P_4: Regulación
59-64	CD-5	23	Planteamiento gráfico del $\lim_{x \to a} f(x)$ en una función definida a trozos	P_3: Asignación
65		24	Cambio a la representación analítica	P_4: Regulación

			de f(x)	
66-67		25	Interrogación colectiva acerca del límite a la izquierda	P_5: Evaluación
68-69		26	Motivación ("votos a favor...")	P_2: Motivación
70-71		27	Interrogación colectiva acerca del límite a la derecha	P_5: Evaluación
72-73		28	Motivación	P_2: Motivación
74-77		29	Interrogación de significados personales acerca del $\lim_{x \to a} f(x)$	P_5: Evaluación
78-80		30	Institucionalización del $\lim_{x \to a} f(x)$	P_4: Regulación
81-86	CD-6	31	Planteamiento analítico del $\lim_{x \to a} f(x)$ en una función definida a trozos	P_3: Asignación
87		32	Cambio a la representación gráfica de f(x)	P_4: Regulación
88-90		33	Motivación ("Procurad...")	P_2: Motivación
91-92		34	Resuelve el dibujo	P_4: Regulación
93-94		35	Plantea el cálculo de diversos límites	P_3: Asignación

En esta sesión se han detectado seis configuraciones docentes que se analizan a continuación:

Configuraciones docentes 1 y 2

Se aborda en ellas el estudio del límite de una función continua en un punto, desde un punto de vista general para una función y = f(x) en un punto x = a, y en un caso concreto de función continua dada por su fórmula.

El estado que domina es el de *regulación*, ya que el profesor fija reglas, como definiciones y enunciados, necesarias para la progresión del estudio, y se complementa con el estado de *evaluación* del aprendizaje durante este proceso mediante la interrogación colectiva, actividad muy utilizada por el profesor para mantener la atención del alumnado en todo momento.

Configuraciones docentes 3 y 4

El discurso del profesor se dirige ahora a los límites en funciones no continuas, con la aparición de asíntotas verticales, lo que genera estados de *regulación* al aparecer los límites laterales, al estudiar la relación entre los límites infinitos y las asíntotas verticales, y al tratar la resolución de estos límites por la izquierda y la derecha, intercalando esta actividad con la interrogación colectiva para hacer partícipe al alumno del proceso de resolución.

La actividad con asíntotas es tan importante que el profesor plantea una función con una asíntota vertical y otra horizontal y conduce a los estudiantes a plantear su gráfica una vez calculadas las asíntotas, haciendo ver que éstas proporcionan una información muy valiosa a la hora de la representación gráfica de una función.

Configuraciones docentes 5 y 6

Finaliza esta sesión con dos unidades que se corresponden con el estudio de límites en funciones definidas a trozos, abordándolos desde los puntos de vista gráfico y analítico, respectivamente.

Aparte de los estados de *asignación de tareas*, *regulación* y *evaluación*, que son los más usados por el profesor, aparecen en estas unidades estados de *motivación* (unidades 68, 72 y 88) tan importantes para mantener un clima de afectividad que logran implicar más al alumno en las tareas propuestas por el profesor.

Por último, se asignan tareas para el día siguiente y que serán analizadas en la próxima sesión.

Tabla 5.8. Trayectoria docente de la cuarta sesión.

Unidad Natural	Configuración Docente	Unidad docente	Descripción	Estado
1	CD-1	1	Resolución del ejercicio del día anterior	P4: Regulación
2		2	Dibujo de la gráfica de una función según su fórmula	P4: Regulación
3-10		3	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
11-17		4	Resolución del cálculo por límites laterales	P4: Regulación
18-19		5	Planteamiento de otra gráfica	P4: Regulación

20-25		6	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
26-29	CD-2	7	Recuerdo de indeterminaciones	P4: Regulación
30		8	Planteamiento de nueva indeterminación	P3: Asignación
31		9	Se plantea un ejemplo	P3: Asignación
32-38		10	Se resuelve el ejemplo	P4: Regulación
39-42		11	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
43-50		12	Se justifica la gráfica de dicha función	P4: Regulación
51-52		13	Se plantea un ejemplo de función irracional	P3: Asignación
53-60		14	Resolución del cálculo	P4: Regulación
61		15	Motivación ("Antoñico...")	P2: Motivación
62-68		16	Resolución del cálculo	P4: Regulación
69		17	Motivación ("¿Cuánto vale, hermosos?")	P2: Motivación
70-71		18	Resolución del cálculo	P4: Regulación
72	CD-3	19	Se aborda el estudio de una función a trozos	P3: Asignación
73-74		20	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
75		21	Cálculo de un límite de forma analítica	P3: Asignación
76		22	Motivación ("Vamos a contar hasta 20...")	P2: Motivación
77-78		23	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
79-89		24	Resolución del límite	P4: Regulación
90-92		25	Dibujo de gráfica	P4: Regulación
93		26	Planteamiento de un límite con aplicación de Ruffini	P3: Asignación
94-105		27	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
106-107		28	Motivación ("Antoñico...")	P2: Motivación
108		29	Motivación ("No metáis la gamba...")	P2: Motivación
109-112		30	Interrogación colectiva	P5: Evaluación
113-114		31	Resolución del límite	P4: Regulación
115-116		32	Se plantean ejercicios	P3: Asignación

Tres son las configuraciones docentes detectadas en esta sesión y que se describen a continuación:

Configuración docente 1

Retomando el final de la sesión anterior, se comienza ésta con la resolución del ejercicio planteado sobre el estudio de varios límites en una función definida a trozos. La resolución parte del profesor pero, como quiere implicar a los alumnos en la misma, se producen los estados de *regulación*, ya que es el profesor quien asume la tarea, y de *evaluación*, ya que se compromete con los alumnos por medio de la interrogación colectiva.

En esta unidad no sólo se corrige la actividad propuesta sino que, dada la importancia de la misma, se propone un nuevo ejercicio con otra función a trozos sugerida por un alumno, por lo que será motivo de análisis en la configuración discente de esta sesión.

Configuración docente 2

Se plantea en esta configuración el tratamiento de la indeterminación $\frac{0}{0}$, típica del estudio de límites en un punto, mediante la *asignación* de dos tareas concretas: calcular el límite de una función racional en un punto, necesitando la factorización del numerador para poder simplificar y dar respuesta al mismo; y otro cálculo en una función irracional en la que será preciso utilizar el conjugado, multiplicando y dividiendo los dos términos de la fracción para poder simplificar, volviendo a dominar los estados de *regulación* y de *evaluación* por interrogación colectiva, además de dos estados de *motivación* en las unidades 61 y 69.

Configuración docente 3

El profesor plantea ahora el cálculo de límites en una función a trozos, desde un punto de vista analítico para luego deducir su gráfica, con lo que las actividades de gestión de la clase son las mismas que las ya descritas en configuraciones anteriores.

Además, el profesor quiere dar más énfasis a un tipo de cálculo necesario en la resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$, es decir, la descomposición polinómica por la regla de Ruffini, por lo que propone una nueva actividad más compleja que implique la utilización de esta regla, sin poder recurrir a otros productos notables que favorezcan tal descomposición. Se detecta cómo en esta actividad, la aplicación de la regla, muy utilizada en cursos anteriores, no produce los efectos deseados porque surgen lagunas al recordarla, por lo que tiene que recurrir a estados de *motivación* para procurar que el estudiante se implique y se apropie del problema.

Finaliza la sesión con la *asignación* de tareas para el día siguiente, con el fin de familiarizar al alumnado con estos cálculos e instrumentalizar al objeto límite de función.

5.4. TRAYECTORIAS DISCENTES

Se utiliza la expresión trayectoria discente para referirse a la secuencia de actividades que realiza el alumno durante el proceso de estudio de unos contenidos matemáticos. Se define la configuración discente como el sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica.

Funciones discentes:

A1: Aceptación: se admite el compromiso educativo, adoptándose una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: Exploración: indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: Recuerdo: interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: Formulación: respuestas a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: Argumentación: justificación de conjeturas (al profesor o a los compañeros).

A6: Recepción: toma de información sobre modos de hacer, describir, nombrar y validar.

A7: Demanda de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros.

A8: Ejercitación: realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: Evaluación: estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

A continuación se desarrolla la trayectoria discente correspondiente a las cuatro sesiones del proceso de estudio.

Tabla 5.9. Trayectoria discente de la primera sesión.

Unidad Natural	Configuración Discente	Unidad discente	Descripción	Estado
0	CDI-1	0	Revisión de gráficas	A3: Recuerdo
1-3		1	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
4-8		2	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
9		3	Recepción de la explicación	A6: Recepción
10-11		4	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
12-18		5	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
19-23		6	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
24		7	Recepción de la explicación	A6: Recepción
25-28		8	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
29-30		9	Recuerdo de asíntota horizontal	A3: Recuerdo
31		10	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
32-35		11	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
36-37		12	Adopción de una actitud positiva	A1: Aceptación
38-42		13	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
43	CDI-2	14	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
44-50		15	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
51-52		16	Recepción de la explicación	A5: Recepción
53		17	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
54-57		18	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
58		19	Recepción de la explicación	A6: Recepción
59		20	Los alumnos argumentan que no existe un valor	A7: Demanda de información
60		21	Un alumno pregunta por una asíntota	A7: Demanda de información
61-62		22	Recepción de la explicación	A6: Recepción
63	CDI-3	23	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
64-65		24	Recepción de la explicación	A6: Recepción
66-69		25	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
70		26	Recepción de la explicación	A6: Recepción
71-72		27	Responde a las preguntas del	A4: Formulación

			profesor	
73-77		28	Adopción de una actitud positiva	A1:Aceptación
78-81		29	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
82-83		30	Recepción de la explicación	A6: Recepción
84		31	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
85-86		32	Recepción de la explicación	A6: Recepción
87		33	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
88		34	Recepción de la explicación	A6: Recepción
89		35	Un alumno plantea otra gráfica	A7: Demanda de información
90-97		36	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación

Configuración discente

Se muestra el sistema de funciones y acciones que desempeña el alumno a propósito de la configuración epistémica ya descrita anteriormente. En este proceso instruccional se han detectado los siguientes comportamientos del estudiante:

Configuración discente 1.

Comienza la sesión con una actividad de *recuerdo* al implicarse el alumno en la solución de unos problemas gráficos propuestos el día anterior.

En toda esta configuración domina el estado de *formulación*, es decir, comunicación de soluciones a las tareas propuestas, mediante la emisión de conjeturas. Paralelamente el profesor va validando o desechando dichas conjeturas de cara a que el propio alumno pueda realizar un trabajo de autoevaluación sobre lo encomendado el día anterior.

El alumno, a la hora de recibir la explicación del profesor, adopta una actitud de *recepción* de la información presentada. En todo este proceso se observa que los alumnos están atentos, tratan de seguir las explicaciones y se produce la aceptación de las pautas marcadas para resolver los ejercicios que plantea el profesor.

Configuración discente 2.

Esta nueva configuración trata del cálculo de límites en un punto. En ella el alumno adopta una postura de *recepción* del planteamiento, respondiendo a las preguntas del profesor, estado que domina en la metodología empleada para implicar al alumnado.

Los alumnos, por medio de la formulación de conjeturas, argumentan al profesor acerca de la solución de los ejercicios y le preguntan sobre los mismos. Ello supone que dichos alumnos *demandan* información, estado que se consigue por los intentos del docente de hacerles participar en la solución de algunas de las subtareas.

Configuración discente 3.

En esta configuración surge un nuevo estado de *recepción* activa de la información presentada por el profesor, al exponer el planteamiento sobre el cálculo de límites laterales. Los alumnos reciben la explicación, que viene motivada con ejemplos gráficos, y responden a las preguntas del profesor.

Hay un estado de *aceptación*, es decir, de adopción de una actitud positiva al estudio, y los alumnos plantean más casos a los gráficos ya propuestos –unidad 89– con lo que se produce una situación de *demanda* de información, esto es, los alumnos no participan como meros espectadores del trabajo del profesor, sino que se ven implicados en el desarrollo de estas tareas.

Tabla 5.10. Trayectoria discente de la segunda sesión.

Unidad Natural	Configuración Discente	Unidad discente	Descripción	Estado
0	CDI-1	0	Recuerdo de límites	A3: Recuerdo
1		1	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
2	CDI-2	2	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
3		3	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
4		4	Recepción de la explicación	A6: Recepción
5-6	CDI-3	5	Recepción de la explicación	A6: Recepción
7		6	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
8		7	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
9		8	Recepción de la explicación	A6: Recepción

10-11		9	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
12		10	Pregunta de un alumno	A7: Demanda de información
13-16		11	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
17		12	Recepción de la explicación	A6: Recepción
18	CDI-4	13	Asunción de los ejemplos	A1: Aceptación
19-21		14	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
22		15	Recepción de la explicación	A6: Recepción
23		16	Pregunta de un alumno	A7: Demanda de información
24		17	Recepción de la explicación	A6: Recepción
25		18	Búsqueda de conjeturas	A2: Exploración
26		19	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
27-33		20	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
34		21	Recepción de la explicación	A6: Recepción
35		22	Pregunta de un alumno	A7: Demanda de información
36-38		23	Adopción de una actitud positiva	A1: Aceptación
39		24	Recepción de la explicación	A6: Recepción
40-41	CDI-5	25	Recepción de la explicación	A6: Recepción
42-43		26	Pregunta de un alumno	A7: Demanda de información
44-45	CDI-6	27	Recepción de la explicación	A6: Recepción
46-48		28	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
49-50	CDI-7	29	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
51-53		30	Recepción de la explicación	A6: Recepción
54		31	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
55		32	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
56-58		33	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
59	CDI-8	34	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
60-62		35	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
63		36	Recepción de la explicación	A6: Recepción
64	CDI-9	37	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
65		38	Recepción de la explicación	A6: Recepción
66-67		39	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
68		40	Recuerdo de técnicas de cálculo	A3: Recuerdo
69-74		41	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
75		42	Adopción del compromiso educativo	A1: Aceptación

En esta trayectoria discente se han detectado nueve configuraciones discentes que se describen a continuación.

Configuraciones 1, 2 y 3

Se plantea un estado de recuerdo de límites de funciones en el infinito como inicio de la sesión, puesto que la clase continúa con lo propuesto en la sesión anterior. Los estados que dominan en estas configuraciones son los de recepción, ya que el estudiante recibe información por parte del profesor respecto al cálculo de límites de funciones en el infinito, comenzando por las del tipo polinómico.

Hay un estado de demanda de información al profesor (unidad 12) cuando un estudiante pregunta por el signo del infinito. Además, aparecen varios estados de formulación y/o comunicación de soluciones a las tareas propuestas por el profesor.

Configuraciones 4, 5, 6 y 7

Comienza la primera configuración con la asunción, por parte de los estudiantes, de los ejemplos que serán motivo de estudio en las configuraciones siguientes, por lo que podríamos hablar de un estado de aceptación del alumno y de una actitud positiva hacia el estudio.

Estas cuatro configuraciones se corresponden, fundamentalmente, con los estados de recepción de la información, cuando el profesor da las instrucciones y explica el método de cálculo de límites en funciones racionales, y de formulación y comunicación de soluciones cuando los estudiantes responden a las preguntas planteadas por el profesor respecto a la resolución de estos límites.

Hay tres estados en los que el alumno es el que demanda información al profesor (unidades 23, 35 y 42), más un estado de aceptación y de adopción de una actitud positiva hacia el estudio (unidades 36 y 54).

Configuraciones 8 y 9

De nuevo aparecen los estados de recepción de información, cuando el profesor explica las funciones irracionales y sus límites en el infinito, y de formulación, cuando los alumnos responden a sus preguntas.

Acaba la sesión con un estado de aceptación por parte de los estudiantes, los cuales se ven involucrados en la resolución de un ejercicio con diversos apartados.

Tabla 5.11. Trayectoria discente de la tercera sesión.

Unidad Natural	Configuración Discente	Unidad discente	Descripción	Estado
0	CDI-1	1	Recuerdo del límite en el infinito y la asíntota horizontal	A_3: Recuerdo
1-2		2	Recepción del planteamiento	A_6: Recepción
3-4		3	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
5-6		4	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
7		5	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
8-9		6	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
10		7	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
11		8	Búsqueda de conjeturas	A_2: Exploración
12-14		9	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
15	CDI-2	10	Recepción del planteamiento	A_6: Recepción
16-17		11	Explicación de conjeturas	A_5: Argumentación
18		12	Asunción del ejemplo	A_1: Aceptación
19-20		13	Explicación de conjeturas	A_5: Argumentación
21		14	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
22-23		15	Explicación de conjeturas	A_5: Argumentación
24		16	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
25-27	CDI-3	17	Recepción del planteamiento	A_6: Recepción
28-31		18	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
32-33		19	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
34-35	CDI-4	20	Recepción del planteamiento	A_6: Recepción
36		21	Asunción de la tarea	A_1: Aceptación
37-45		22	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
46		23	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
47-55		24	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
56-58		25	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
59	CDI-5	26	Asunción del ejemplo	A_1: Aceptación
60-63		27	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
64-65		28	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
66-67		29	Explicación de conjeturas	A_5: Argumentación

68-69		30	Adopción de una actitud positiva	A_1: Aceptación
70-71		31	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
72-73		32	Adopción de una actitud positiva	A_1: Aceptación
74-77		33	Explicación de conjeturas	A_5: Argumentación
78		34	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
79		35	Intercambio de opiniones acerca de f(x) y del límite	A_2: Exploración
80		36	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
81	CDI-6	37	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
82-86		38	Responde a las preguntas del profesor	A_4: Formulación
87-89		39	Adopción de una actitud positiva	A_1: Aceptación
90-92		40	Recepción de la explicación	A_6: Recepción
93-94		41	Adopción del compromiso educativo	A_1: Aceptación

En esta sesión se han detectado seis configuraciones discentes, que se pasa a describir:

Configuraciones discentes 1 y 2:

El profesor comienza con el planteamiento del cálculo de límites en funciones continuas, desde un punto de vista gráfico, por lo que la actitud del alumnado es la de *recepción* de la explicación, aunque el profesor les va planteando preguntas sobre la gráfica, hecho que se repite a lo largo de todas las sesiones, para que ellos "vean" mejor conceptos como los de *entorno* o ideas como la de "tan cerca como se quiera". Incluso hay un estado de *exploración* por el que los alumnos buscan conjeturas para deducir que la proximidad entre dos valores implica que la diferencia se hace cero. Después de estas conclusiones, el profesor les da una definición de límite que no resulta muy rigurosa, pero que se estima es suficiente para que los propios estudiantes se hagan una idea de lo que el concepto viene a ser.

Se continúa con el cálculo de un límite en el caso de una función continua predominando, en este caso, los estados de *recepción* y de *argumentación*, lo que les lleva a resolver satisfactoriamente el ejemplo, aunque muchos alumnos pueden entender que *el límite de una función en un punto es la imagen en dicho punto*, por mucho que el profesor se haya esforzado en hacerles ver por qué, en este caso, es así.

Configuraciones discentes 3 y 4:

Se trabaja en estas configuraciones con funciones no continuas, presentando discontinuidades de salto infinito, es decir, asíntotas verticales, con lo que el profesor, una vez definidas, las compara con "tabiques negros", metáfora que los alumnos parecen captar bien. A destacar que el profesor les vuelve a insistir en que, si no hay problemas, el límite sería f(a), y, dada su insistencia, se estima que muchos alumnos lo toman como una generalidad.

Configuraciones discentes 5 y 6:

Se trabaja ahora con las funciones a trozos, desde los puntos de vista gráfico y analítico, donde se presenta el cálculo de límites laterales. Los alumnos se implican en un estado de *aceptación*, aparte de los estados predominantes de *recepción* y *formulación*, lo que les lleva a terminar con éxito la tarea propuesta, aunque subyace en este trabajo un conflicto semiótico como es el creer que si no hay imagen en un punto, tampoco hay límite en ese punto, conflicto que se confirma tras el análisis de las respuestas del cuestionario que se les propuso al finalizar las cuatro sesiones.

Tabla 5.12. Trayectoria discente de la cuarta sesión.

Unidad Natural	Configuración Discente	Unidad discente	Descripción	Estado
1	CDI-1	1	Asunción de la tarea	A1: Aceptación
2		2	Recuerdo de la gráfica	A3: Recuerdo
3-10		3	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
11-12		4	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
13-17		5	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
18-19		6	Pregunta de un alumno	A7: Demanda de información
20-23		7	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
24-25		8	Recepción de la explicación	A6: Recepción
26-29	CDI-2	9	Recuerdo de indeterminaciones	A3: Recuerdo
30		10	Recepción del planteamiento	A6: Recepción
31		11	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
32-33		12	Responde a las preguntas del	A4: Formulación

			profesor	
34-38		13	Recepción de la explicación	A6: Recepción
39-42		14	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
43-44		15	Recepción de la explicación	A6: Recepción
45-47		16	Preguntas de los alumnos	A7: Demanda de información
48-50		17	Recepción de la explicación	A6: Recepción
51		18	Pregunta de una alumna	A7: Demanda de información
52-55		19	Explicación de conjeturas	A5: Argumentación
56-58		20	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
59		21	Recuerdo de cálculo	A3: Recuerdo
60-62		22	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
63		23	Recepción de la explicación	A6: Recepción
64-70		24	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
71		25	Búsqueda de conjeturas	A2: Exploración
72	CDI-3	26	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
73-88		27	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
89-90		28	Recepción de la explicación	A6: Recepción
91-92		29	Adopción de una actitud positiva	A1: Aceptación
93	CDI-4	30	Asunción del ejemplo	A1: Aceptación
94-104		31	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
105-110		32	Repaso de aplicación de Ruffini	A3: Recuerdo
111-112		33	Responde a las preguntas del profesor	A4: Formulación
113-114		34	Recepción de la explicación	A6: Recepción
115		35	Realización de tareas rutinarias	A8: Ejercitación
116		36	Adopción del compromiso educativo	A1: Aceptación

Cuatro son las configuraciones discentes detectadas en esta última sesión analizada, que se describen a continuación:

Configuración discente 1:

En la sesión anterior, el profesor dejó planteada una función a trozos para el cálculo de algunos límites, que ahora pasa a corregir. Hay, por tanto, estados de *aceptación*, al asumir los alumnos la tarea encomendada, *recuerdo*, puesto que la función está expresada en forma analítica y deben representarla gráficamente, *formulación*, porque responden a las preguntas del profesor, y *recepción* de la explicación y *demanda* de información, porque algunos alumnos en su afán por implicarse preguntan al profesor sobre ésta y otras funciones parecidas.

A destacar que, en otro ejemplo, se verifica que el límite de la función en el punto a estudiar no coincide con su imagen, hecho que enfatiza el profesor –unidad 25– para no caer en el conflicto de considerar siempre el límite en un punto como la imagen en dicho punto. A pesar de ello, en las respuestas al cuestionario es un conflicto que persiste en el alumnado y que es difícil de eliminar.

Configuración discente 2:

En esta configuración se recuerdan las diversas indeterminaciones propias de este nivel, junto a una nueva, como es la de $\frac{0}{0}$. Por tanto, se provocan estados de *recuerdo*, *recepción* y *formulación* de conjeturas, que junto con el de *demanda* de información por los propios alumnos, conforman una configuración del tipo de la ya analizada. Se destaca, también, la aparición del estado de *argumentación* –unidades 52 a 55– al tratar de explicar diversas conjeturas sobre la resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$ (simplificaciones) y la de *exploración* –unidad 71–, referida a la búsqueda de nuevos casos en los que esta indeterminación aparece.

Configuración discente 3:

En esta nueva configuración se presenta el estudio de un límite de una función definida a trozos, desde un punto de vista analítico. El ritmo que el profesor imprime en este ejemplo es el que ha llevado hasta ahora, por lo que los estados que dominan son los de *aceptación*, *formulación* y *recepción*, destacando por el observador de la sesión cómo aparece el conflicto semiótico de la función constante –unidad 88– por parte de una alumna. En contra lo que se pudiera esperar, este conflicto parece estar superado una vez tratado por el profesor, porque no aparece en el análisis del cuestionario propuesto en días siguientes.

Configuración discente 4:

Finaliza la sesión con esta configuración en la que se propone el repaso de la Regla de Ruffini para el cálculo del límite de una función en un punto. El desarrollo de esta configuración es como el de las anteriores, con los estados ya referidos, y la aparición de un nuevo estado como es el de *ejercitación* al proponerse y solucionarse en clase un ejercicio propuesto en el libro de texto.

Todas las sesiones finalizan con la *aceptación* por parte del alumnado de la propuesta del profesor de realizar ejercicios para el próximo día y en ésta se proponen una serie de actividades de límites que serán corregidas en sucesivas sesiones que ya no forman parte de este análisis.

5.5. TRAYECTORIA INSTRUCCIONAL

La modelización de la instrucción matemática como un proceso de trayectorias con sus diversos estados potenciales, proporciona un procedimiento con el que se identifican regularidades en la secuenciación de estados en cada trayectoria, o en las interacciones entre dos o más trayectorias. Se trata de describir la manera de cómo se relaciona el profesor con los alumnos a propósito de un saber matemático dado, usando determinados recursos materiales.

Se define *trayectoria instruccional* como la secuencia interactiva de estados de las diferentes trayectorias que tienen lugar a propósito de las distintas situaciones-problema que componen dichas trayectorias. Una trayectoria instruccional se compone de las trayectorias docente y discente en interacción, además de las correspondientes mediacionales y emocionales. En este trabajo se utilizan fundamentalmente la trayectoria docente y la trayectoria discente, estudiadas junto con aspectos topogenéticos y cronogenéticos. Sobre la relación didáctica profesor-estudiante en la enseñanza del concepto de límite de una función cabe destacar, como precursor, el trabajo de Sánchez y Contreras (1997c).

Toda trayectoria instruccional está compuesta, obviamente, por diversas configuraciones instruccionales, según las distintas situaciones-problema que aparecen en el proceso de estudio.

Estas nociones van a permitir un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática, según los modelos teóricos que nos servirán de referencia (Godino, Contreras y Font, 2006).

Se consideran cuatro tipos de configuraciones instruccionales teóricas que van a desempeñar el papel de configuraciones de referencia y que se designan como *configuración magistral, adidáctica, personal y dialógica.*

La primera configuración, *magistral*, corresponde a la manera tradicional o clásica de enseñar Matemáticas, basada en la presentación de los contenidos, seguida de ejercicios de aplicación de los conocimientos presentados. Es decir, primeramente se presenta el componente discursivo del significado de los objetos matemáticos (definiciones, enunciados, demostraciones), y se deja la responsabilidad de dar sentido al discurso a los propios estudiantes por medio de los ejemplos, ejercicios y aplicaciones que se proponen. En realidad, en este tipo de configuración instruccional no se suprimen los momentos de exploración, de formulación y de validación, sino que quedan bajo la responsabilidad del estudiante, o bien se ponen en juego en momentos aislados de evaluación.

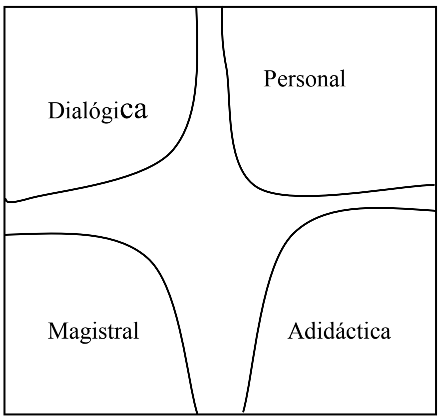
La configuración *adidáctica* viene marcada por la teoría de situaciones didácticas, la cual propone una manera de organizar el trabajo del profesor y los alumnos a propósito de un saber matemático pretendido, que se considera óptimo en términos de los aprendizajes de los alumnos. La secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización, especifican los papeles del estudiante en interacción con el medio. Esta configuración puede interpretarse como un tipo de configuración instruccional de naturaleza teórica ya que la propia teoría de situaciones didácticas no afirma que todos los saberes matemáticos puedan, ni deban, ser estudiados de esta manera.

La configuración instruccional *dialógica* debe verse como una estructura tripolar: profesor, alumno, clase (lo que Sensevy et als., 2000, denominan estructura general dialógica), y es intermedia entre las configuraciones instruccionales adidáctica y magistral, respetándose en ella el momento de exploración, aunque los procesos de formulación y validación se construyen entre el profesor, algunos alumnos determinados y la clase. Incluso la institucionalización tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos.

Por último, la configuración instruccional *personal* surge cuando la resolución de una situación-problema la realiza directamente el estudiante sin una intervención directa del docente. En la práctica esto es lo que ocurre cuando los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor, o están incluidos en el libro de texto y están capacitados para resolverlos. Es decir, se trata de un tipo de configuración instruccional en la que básicamente predomina el estudio personal.

Como se señala en Godino, Contreras y Font (2006), en la figura siguiente se representan en los cuatro vértices de un cuadrado los cuatro tipos de configuraciones instruccionales teóricas descritos.

Figura 5.1. Configuraciones instruccionales teóricas.



Las configuraciones instruccionales empíricas que acontecen en los procesos de estudio reales pueden representarse mediante un punto interior del cuadrado y estar más o menos próximas a estas configuraciones teóricas, es decir, oscilarán en torno a los cuatro tipos teóricos.

En función de las configuraciones de referencia *magistral*, *dialógica, adidáctica* y *personal*, se pasa a describir la trayectoria instruccional seguida en las sesiones de clase sobre el objeto límite de una función.

5.5.1. Trayectoria Instruccional de la 1ª sesión.

La primera clase analizada en este trabajo comienza con la revisión de cuatro gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando x tiende a infinito. Hay que tener en cuenta que en la clase anterior, de gráficas de funciones, quedaron planteados los problemas que se desarrollan en esta sesión en cuanto a la tendencia de f(x) según la tendencia de x, es decir, se utilizará una terminología y un lenguaje propios del desarrollo intuitivo del límite, dejando de lado los aspectos analíticos del mismo.

La sesión se ha dividido en tres configuraciones instruccionales, según el tipo de situación-problema analizado, comenzando por la que se ha llamado "idea intuitiva de límite en el infinito".

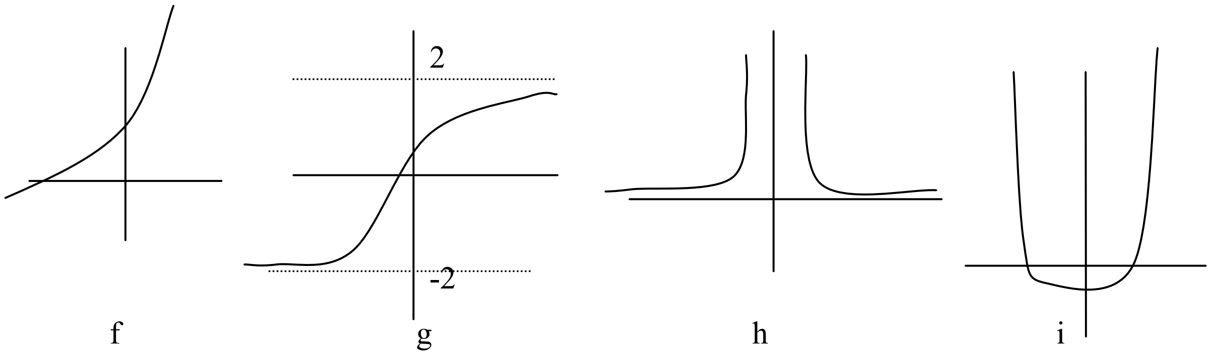
Las diversas configuraciones instruccionales se van desarrollando según las unidades naturales de análisis, especificando en cada caso de cuáles se trata:

Unidad de análisis 1: Idea intuitiva de límite en el infinito.

*1. **Profesor**: ¿Tenéis hechos los límites de las 4 funciones de las gráficas f, g, h, i?*

El trabajo que hace el profesor requiere un proceso de *regulación*, solicitando de los alumnos las actividades planteadas el día anterior, para las que éstos han debido movilizar actividades de recuerdo sobre gráficas de funciones. Se desprende que el tratamiento gráfico es más importante para el profesor que el propiamente analítico. Es decir, el profesor utiliza el significado gráfico del límite.

*2. **Profesor**:* [Usando tizas blanca y roja mate, las dibuja en la pizarra] *¿Éstas son?, ¿Os suena la 2ª?*



La primera acción consiste en utilizar los medios más importantes para el profesor a lo largo de este proceso instruccional, a saber, la pizarra y las tizas de colores, mediante la asignación de tareas. La segunda acción es asignar tareas una vez dibujadas las gráficas e implicar de nuevo a los alumnos en la actividad (*¿éstas son?*). Además, el profesor ayuda a los alumnos a que recuerden una de las gráficas propuestas que, sin duda, ya ha debido aparecer en alguna clase anterior en que se trataban las gráficas de funciones (*¿os suena la 2ª?*). Es decir, mediante un clima de estímulo el profesor trata de motivar a los alumnos.

3. ***Alumnos****: Sí, los tenemos.*

Se produce la *aceptación* por parte de los alumnos del compromiso educativo al afirmar en grupo que sí han realizado los correspondientes límites. Al proponer los ejercicios el día anterior, el profesor puso énfasis en que los trabajaran, avisando que en la sesión siguiente se comenzaría por dar solución a los mismos.

4. ***Profesor:*** [Toma y observa la libreta de una alumna].

La acción del profesor es la revisión de los apuntes de una alumna, haciendo ver implícitamente, según se desprende del contrato didáctico, que él va a revisar las soluciones propuestas por algunos alumnos, con lo que se establece un estado de evaluación y observación del aprendizaje, tras un proceso instruccional *personal* por parte del estudiante que ha realizado la tarea sin la intervención directa del docente.

5. ***Profesor:*** *¿Cómo pueden determinarse los límites?*

6. ***Profesor:*** *¿Cuánto vale para el caso f?* [Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la "tendencia"].

La acción del profesor se sitúa en la demanda de las soluciones a las actividades planteadas, comenzando por la gráfica f. Al hacer la pregunta a toda la clase, se desprende que, por contrato didáctico, los alumnos deben tomar la iniciativa para responder y, en caso de responder mal, él los guíe hacia la respuesta correcta. Nos encontramos ante una configuración *dialógica* del proceso instruccional, en la que la institucionalización del saber tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos, pues éstos han tenido la ocasión de asumir la tarea y, posiblemente, desbrozar alguna técnica de solución.

A la vez que el profesor va señalando las gráficas, va realizando diversos gestos, que no son explicitados, que van marcando la "tendencia" de las mismas con una acción claramente metafórica de lo que se pide. El profesor está utilizando, de manera implícita, el significado infinitesimal del límite.

7. ***Alumna*** *(Yurena): Según la tendencia.*
8. ***Alumna*** *(Yurena): Vale* $+\infty$ *y se expresa:* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Una alumna acepta la devolución al tomar la iniciativa y responder a la pregunta del profesor, haciéndolo correctamente.

9. ***Profesor:*** [Se centra en la gráfica f y explica el comportamiento de la gráfica para x tendiendo a más infinito y menos infinito]. *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto?, indefinidamente.*

Y el $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$*, ¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?* [Se dirige a un alumno].

La primera acción es aclarar la respuesta de la alumna al resto de la clase, expresando frases metafóricas (*cuando la gráfica va para infinito*, *se hace mayor la y*, *indefinidamente*), aunque el tratamiento que da es muy transparente, la noción "indefinidamente" se estima que no ha quedado clara. La expresión "indefinidamente", al no aclararse posteriormente que los valores de *y* pueden hacerse tan grandes como se quiera, da lugar a un conflicto semiótico por ausencia de dicha función semiótica. Es decir, un alumno ante una asíntota horizontal puede creer que f(x) (la *y*) tiende a más infinito.

Cuando el profesor plantea la pregunta en $-\infty$, trata de inducir a los alumnos a error al pedir los valores que puede tomar la "x" y dar como posibilidad el 0 o el -1.

*10. **Alumno**:* [El alumno interrogado no contesta y dice que no lo sabe].

La acción del alumno se sitúa en no asumir la tarea cuando es preguntado, seguramente por no entender esas "pistas falsas" que el profesor ha emitido en su comentario anterior.

*11. **Alumno**:* [Otro alumno]. *Pues –5000, menos (lo que se quiera)...*

Otros alumnos sí se implican en la acción, encontrándonos ante un claro estado de *formulación/comunicación* de soluciones, aceptando que el profesor trataba de pedir respuestas de ese tipo (*...pues -5000, menos (lo que se quiera)*).

A lo largo de esta subconfiguración, correspondiente a la gráfica de la función f, el profesor utiliza diversas técnicas topogenéticas (Sensevy et als., 2000), como son la cooperación, en la que el profesor y los alumnos construyen el saber; y la diferenciación topogenética: el profesor hace las preguntas, el alumno responde, el profesor consensúa la respuesta con los alumnos e instituye el saber.

También utiliza técnicas cronogenéticas de control-delimitación, como es la demora o ralentización del saber en los momentos de preguntas y respuestas entre el profesor y los alumnos; de afirmación de avance del saber, cuando el profesor, ante la respuesta de los alumnos sobre la institucionalización del saber, asiente. Por último, la técnica cronogenética de cambio de fase, que se da al haber finalizado la gráfica de f y pasar a la gráfica g.

Como puede observarse, a lo largo de esta subconfiguración el profesor ha utilizado la configuración instruccional de referencia dialógica, aunque ha permitido a los alumnos desarrollar fases de formulación y validación, por tanto, también aparecen elementos correspondientes a la configuración instruccional de referencia adidáctica.

Más adelante se verá que estas técnicas topogenéticas y cronogenéticas son utilizadas en las gráficas que aún faltan por estudiar.

12. ***Profesor:*** *¡Chiquitín!, dime el* $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

La acción que reproduce el profesor es tratar de cuidar el aspecto emocional y evitar el desánimo de los estudiantes, pues realiza una nueva pregunta en la que interviene un estado de *motivación*, quizá porque pueda prever que algunos alumnos no acepten la devolución del problema (*¡chiquitín!...*).

13. ***Alumnos****:* [El alumno no contesta].

Al igual que en 10, el alumno no contesta.

A partir de esta unidad y hasta la número 18, el estado de la trayectoria docente es el de *evaluación*, a la vez que en la trayectoria discente se corresponde con el de *formulación*.

14. ***Alumnos****: Otros alumnos dicen: ¡2!*

Hay un grupo de alumnos que, tomando la iniciativa, responden correctamente, aunque el profesor parece que no se siente aludido por la respuesta, ya que no la sanciona, es decir, el profesor no instituye el saber.

15. ***Profesor:*** *Dime la monotonía.*

La acción del profesor se centra en el alumno que no ha sabido responder y trata de conducirlo a la respuesta correcta demandándole la monotonía, quizá para, a posteriori, hacerle ver que el que una función sea estrictamente creciente no implica que tenga por límite $+\infty$.

*16. **Alumno**: Creciente.*

*17. **Profesor**: Pero, ¿crece siempre?*

El alumno responde correctamente, aunque el profesor insiste en este proceso dialógico (*pero, ¿crece siempre?*). Es por ello que el conflicto semiótico del crecimiento y el límite está muy presente y parece ser que el alumno no ha relacionado aún estos conceptos porque, en caso contrario, ya habría dado una respuesta.

*18. **Alumno:** Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*

Ante la pregunta del profesor, el alumno la justifica de una forma vaga e imprecisa (*hay infinitos números decimales*). Sin embargo, el alumno es consciente de que el crecimiento de esta función no es como el de la anterior (*desde luego, no crece igual que la f*). Asumiendo el alumno un estado de argumentación y justificación de conjeturas, no parece que haya entendido este límite y da la impresión que prefiere no dar la respuesta antes que equivocarse. Aún sin saber la respuesta, puede haber superado el conflicto antes aludido (si $x \to +\infty$, entonces $f(x) \to +\infty$) al que parece que lo quiere conducir el profesor, aunque no aparece explícitamente la justificación. Se echa en falta la técnica cronogenética de la *"determinación del momento propicio para la institucionalización del saber"*.

*19. **Profesor**: ¿Y* $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ *?*

Obviando la respuesta que da el alumno, la acción del profesor se centra en el cálculo del siguiente límite, preguntando a toda la clase, en general, en vez de particularizar en otro alumno. Parece que con esta respuesta el profesor prefiere cambiar de actividad.

Desde esta unidad, y hasta la número 23, el estado docente es el de *evaluación*, y el discente es de *formulación*.

20. ***Alumnos****: ¡-2!*

Los alumnos se han visto motivados por las indicaciones del profesor en el proceso de estudio anterior y, en su gran mayoría, responden correctamente a la demanda del docente.

21. ***Profesor*****:** *¿Cómo lo interpretas Antonio?*

La acción del profesor se centra en interpretar el significado de esta respuesta y le pregunta a un alumno que, posiblemente, no ha respondido con el grupo de la clase, valorando así que su estado del aprendizaje está aún deficiente (*¿cómo lo interpretas, Antonio*?).

22. ***Alumnos****:* [Antonio no contesta, pero lo hace una alumna]. *La función toma valores menores que –2.*

El alumno no contesta, que sería lo esperado por el profesor al dirigirse a él, pero una alumna parece que acepta la demanda del compañero de recibir información y le responde ella, aunque de manera desafortunada (*la función toma valores menores que –2*) e incoherente ya que, por su respuesta, no parece que ni siquiera haya confundido valores de la variable independiente con los de la función.

23. ***Alumnos****: Es la x la que interesa.*

Ante esta respuesta parece que sus compañeros sí han entendido que se refería a valores de f y ante la demanda de información le sugieren que se fije en la variable independiente (*es la x la que interesa*). Hay, pues, una confusión entre la variable dependiente e independiente.

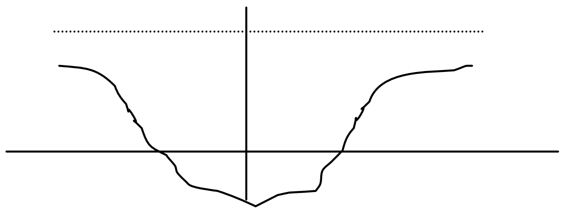
24. ***Profesor*****:** *Toma valores muy grandes, pero en valor absoluto, aunque con signo menos. ¿Cómo son estas rectas?* [Señala las asíntotas]. *Se denominan asíntotas horizontales.*

[Define lo que es una asíntota horizontal con la expresión analítica].

Y = k es una asíntota horizontal $\Longleftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$

"La recta se va a pegar a la función".

Ahora sí, que si es más infinito o menos infinito, intervienen las semirrectas. Por ejemplo:



$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$

La acción del profesor ahora es situarse en una perspectiva magistral del proceso de instrucción para definir la noción de asíntota horizontal y, metafóricamente, les induce la idea de que *"la recta se va a pegar a la función"* (se observa cómo el profesor introduce con esta metáfora un posible conflicto semiótico a los alumnos), comparando la gráfica g, objeto de estudio, con otra gráfica que sólo posee una asíntota horizontal.

A lo largo de esta subconfiguración correspondiente a la función g(x), el profesor adopta los estados docentes de evaluación y regulación, mientras que los alumnos adoptan los de recuerdo, recepción y formulación.

25. ***Profesor*** [respecto a la gráfica h]. *Veamos, Isabel, ¿cuál es el límite cuando x tiende a más infinito de h(x)?*

Al igual que en la unidad 12, en la que se sigue un modelo dialógico, la acción del profesor se centra en preguntar a una alumna la siguiente actividad. Observamos que la pauta a seguir por el profesor es alternar las preguntas a toda la clase con las preguntas a alumnos concretos, tratando en todo momento de conseguir la devolución de los alumnos.

26. ***Alumna****:* [Isabel responde 0, pero no lo explica].

La respuesta de la alumna es correcta, pero no la justifica, con lo que podría deberse a una casualidad el haber respondido así, ocasión que podría haber aprovechado el docente para insistir en la importancia en Matemáticas de argumentar y justificar las conjeturas que se puedan establecer.

Se echa en falta el uso de una técnica cronogenética de incitación a la contestación.

27. ***Profesor:*** [El profesor lo aclara y razonadamente llega a 0. Y hace otra pregunta]. *¿Qué ocurre con la otra rama? Es decir, límite cuando x tiende a menos infinito de h(x).*

El profesor asume un estado de regulación para aclarar y conducir a los alumnos a la respuesta pretendida, es decir, instituye el saber, a la vez que les plantea la siguiente pregunta sin huir de la correspondiente metáfora (*¿qué ocurre con la otra rama?*), aunque parece evidente que los alumnos entienden que se refiere al cálculo de $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

28. ***Alumna****:* [Responde Mª José]. *Es 0. Va pegándose al eje X.*

Una alumna responde, argumentando su respuesta con otra metáfora que ha captado del profesor (*va pegándose al eje X*), con lo que se ratifica el conflicto semiótico, introducido por el profesor, de que la recta se va a "pegar a la función" al asumirlo la alumna.

29. **Profesor:** *Hay una asíntota horizontal en y = 0.*

El profesor institucionaliza el saber.

30. ***Profesor:*** *Con h sí podemos aplicar que el límite cuando x tiende a infinito de h(x) es igual a k.*

La acción del profesor persigue institucionalizar el concepto de asíntota horizontal, dando su ecuación y haciéndoles ver que, en este caso, coincide el comportamiento de h tanto para $x \to +\infty$, como para $x \to -\infty$, de ahí que se pueda entender el comentario que hace al expresar el concepto de ∞ (sin signo) cuando el límite coincide en ambos casos.

31. ***Profesor:*** *Ya vimos que infinito no es un número, pero cuando me acerco a él tengo que especificar si es por la derecha o por la izquierda.*

Como parece que este comentario puede crearles confusión, el profesor intenta abordar el conflicto subyacente de considerar el infinito como un número y lo trata expresamente (*ya vimos que infinito no es un número*) y metafóricamente (*cuando me acerco a él*), aunque parece que no lo aborda definitivamente, quizá porque se autojustifique de que ya lo han visto antes.

A lo largo de esta subconfiguración correspondiente a la función h(x), el profesor adopta los estados de evaluación y regulación, mientras que los alumnos adoptan los de formulación, recuerdo y argumentación.

32. ***Profesor*** [Respecto a la gráfica i(x)]. *¿Y con esta gráfica, Lucía, ...? ¿María?*

Intentando en todo momento que el alumnado esté pendiente y no pierda el interés, se dirige ahora a otra alumna, María Lucía, y lo hace como si se dirigiera a dos alumnas distintas (*¿Lucía?,…¿María?*), con lo que, sin duda, está tratando de llamar la atención de todos los demás compañeros. La alumna se da por aludida con una sonrisa.

Es decir, el profesor busca la devolución de la tarea a los alumnos recurriendo a las propias emociones de éstos.

33. ***Alumna****:* [María responde que el límite cuando x tiende a más infinito es más infinito].
34. ***Profesor****:* [Señala la parte de la izquierda de la gráfica]. *¿Qué pasa aquí?*
35. ***Alumna****:* [María responde que el límite cuando x tiende a menos infinito de i es menos infinito].

Al responder correctamente a la primera parte de la pregunta, y ante la demanda del profesor de la segunda parte, esta alumna pone de manifiesto un conflicto semiótico que está latente en el alumnado en general, ya indicado anteriormente, como es el relacionar directamente que si $x \to +\infty$, la función también tiende a +∞, y si $x \to -\infty$, la función también tiende a $-\infty$.

36. ***Profesor:*** *¡¡Votos a favor!!* [3 o 4 votos]. *¡¡Votos en contra!!* [Todos los demás].

Abordando un estado motivador y fomentando el clima de afectividad presente en el aula, el profesor pide una votación entre los alumnos para corregir a su compañera (*votos a favor, ..., votos en contra,...*). Se observa como se produce una puesta en confrontación (técnica cronogenética de confrontación o cambio cognitivo). El profesor pretende que la alumna cambie de opinión a raíz de las respuestas de sus compañeros.

El profesor, recurriendo a los alumnos, utiliza la técnica cronogenética de la cooperación. Además, son los propios alumnos los que instituyen el saber.

37. ***Alumna****:* [María rectifica y dice más infinito].

Sin otra acción correctora, la alumna rectifica porque se ha dado cuenta de su error y responde correctamente. Entendemos que esta ocasión habría sido idónea para rebatir que la "tendencia" de la variable independiente no tiene por qué ser la misma que la de la variable dependiente, pero el profesor no realiza comentario alguno.

38. ***Profesor:*** *Podemos intuir lo que es una asíntota. ¿Podemos intuir una función para la parábola?* [El profesor escribe y = x^2 + ?].

Aparece una técnica cronogenética de bifurcación, al hablar de asíntotas y, acto seguido, de la gráfica de la función.

La primera acción del profesor se sitúa en hacer ver a los alumnos cuándo hay y cuándo no hay asíntotas en la gráfica de una función, a raíz de los ejemplos tratados hasta ahora, aunque la expresión que utiliza (*podemos intuir lo que es una asíntota*) no se considera adecuada porque parece querer huir del cálculo de las mismas y que éstas aparezcan sólo por "intuición". Se echa en falta una técnica cronogenética de finalización de la acción.

La segunda acción pretende aflorar en los alumnos las funciones de recuerdo y exploración de conjeturas al querer encontrar una expresión analítica para la última de las gráficas, parábola, ya estudiada en este curso y en cursos anteriores. El profesor incita a la participación de los estudiantes al proponerles la forma de su ecuación (*el profesor escribe* $y = x^2 + ?$). Ha habido un cambio en el proceso de estudio, puesto que el calcular la ecuación de esta parábola no tiene nada que ver con el estudio que ahora están tratando, es decir, como se ha señalado, se ha producido un cambio de fase o bifurcación (técnica cronogenética).

39. ***Alumna:*** *$x^2 \pm 50x$.*
40. ***Profesor****: Pasa por el origen y es contradictorio.*

Una alumna responde y el profesor le hace ver su error justificando por qué no puede ser de esa forma la ecuación.

41. ***Alumna****:* [La alumna rectifica y dice $y = x^2 + k$].

La alumna rectifica correctamente y da una ecuación genérica para ese tipo de parábola.

42. ***Profesor:*** *El patrón nuestro es $f(x) = x^2$ con el vértice en (0,0).* [Razonadamente el profesor los conduce a $y = x^2 - 2$].

Fomentando de nuevo el recuerdo en los alumnos, les hace ver qué tipo de término independiente tendría esa ecuación y partiendo del vértice para la parábola $y = x^2$, que él llama, abusando del lenguaje metafórico, "patrón", los conduce a que bien podría ser del tipo $y = x^2 - 2$.

El profesor ha institucionalizado el saber.

A lo largo de esta subconfiguración correspondiente a la función i(x), el profesor adopta los estados de evaluación, motivación y regulación, y los alumnos, de formulación, aceptación y argumentación.

Unidad de análisis 2: Límites cuando x →a (finito).

La siguiente unidad de análisis trata de los límites en un punto, y se sigue con la pauta ya marcada de abusar del lenguaje gráfico, frente al analítico, utilizándose como elementos mediacionales la pizarra y las tizas de colores.

*43. **Profesor:** ¿Qué pasará si quiero calcular el límite cuando x tiende a 5 de* x^2-2*?*

El profesor emite una pregunta sobre el cálculo del límite de una función en un punto, pero, al tratarse este concepto por primera vez, entendemos que la cuestión la realiza para él mismo, sin ánimo de que los alumnos le respondan porque, entre otras cosas, no tienen por qué saberlo.

*44. **Alumna**: Sustituyo x por 5.*

El profesor utiliza la técnica de la bifurcación de manera muy brusca, sin resaltar el hecho de que ahora x no tiende a ∞.

Una alumna le responde (*sustituyo x por 5*), lo cual puede dejar entrever un conflicto semiótico muy importante, a saber, *el límite de una función en un punto coincide con la imagen en ese punto*, con lo que el profesor debe actuar regulando el concepto para evitar que este conflicto se generalice.

*45. **Alumno**: Se dan valores mayores que 5 o menores que 5.*

Un alumno también responde a la demanda del profesor y, en su respuesta, aunque no muy concreta, deja entrever la idea de entorno de un punto (*se dan valores mayores que 5 o menores que 5*).

*46. **Profesor:** ¿No cercanos? ¿Cuál es el número real que hay antes del 5?*

Profundizando en esta idea, el profesor realiza una pregunta sobre la densidad de **R** , preguntando por el número real que hay antes del 5.

Aparece una técnica cronogenética de bifurcación que no parece pertinente, ya que se debería aclarar el entorno de 5.

*47. **Alumnos:*** [Algunos dicen 4’1, 4’9, ...].
*48**. Alumnos**:* [Otros alumnos dicen que no se sabe].

Entre los alumnos que responden a la demanda del profesor, hay respuestas variadas, casi esperadas como el 4’9, 4’99, …, y, aunque el concepto de densidad se trató en el correspondiente capítulo de álgebra sobre el número real, tardan en admitir que no se sabe, hecho que no resulta tan transparente como podríamos suponer. El alumno admite mal que “*no se sabe*” sea una respuesta para una pregunta en Matemáticas, y más aún si la pregunta está relacionada con los números.

Se echa en falta una técnica cronogenética de determinación del momento propicio para enseñar el entorno de 5. Es decir, no se instituye el saber. Además, el profesor introduce los primeros pasos del significado numérico del límite.

*49. **Profesor:** ¿Dónde van a parar las imágenes?*

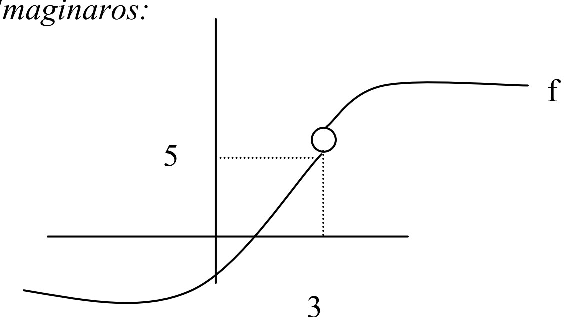
Con esta pregunta, el profesor trata de relacionar los valores entorno al cinco con sus imágenes. Parece como si el profesor quisiera conducirles a la definición de límite de una función en un punto con un ejemplo concreto, entre otras cosas porque es consciente de que la definición métrica de límite no la van a ver con el rigor que ello exige y puede conformarse con aplicarlo al caso de una función conocida.

*50. **Alumno**: Cerca de 23, que es la imagen del 5.* [Antes ha habido fallos y por ensayo y error llegan a la verdad].

Se produce un debate entre los alumnos en el que da la impresión de que no saben cuál es la intención del profesor con este tipo de preguntas ya que hay fallos, aunque, por ensayo y error, llegan a la verdad. Es decir, instituyen el saber los alumnos. No queda claro si esta verdad a la que llegan ha sido producto de la intencionalidad del docente al poner el énfasis en aquello a lo que querían llegar.

51. ***Profesor:*** *Luego límite cuando x tiende a 5 de x^2-2 es igual a 23. Cuando me acerco a 5, las imágenes se acercan a 23. Pero todo esto no siempre ocurre así.*

Imaginaros:



La primera acción del profesor es enunciar el resultado del límite. Es decir, instituye el saber. Si a este enunciado le agregamos lo dicho en la unidad 44 por una alumna, puede quedar patente como propiedad general el conflicto semiótico ya comentado y que muchos alumnos pueden arrastrar consigo.

La segunda acción es intentar acometer dicho conflicto, expresándose en términos de lenguaje metafórico (*cuando me acerco a 5, las imágenes se acercan a 23*), quizá haciéndoles ver que no basta sólo con la imagen del punto para hablar de límite, aunque echamos en falta en este punto del estado dialógico el uso del lenguaje numérico variacional, pues bien podría haber acompañado todo este razonamiento con una tabla de valores, para dar más énfasis a la idea de "acercamiento".

Aparece una técnica de bifurcación. En este caso no se da la oportunidad al alumno de accionar, formular o validar. El profesor entra en el desarrollo de una clase magistral. La topogénesis del saber, por tanto, cambia en un movimiento descendente.

La tercera acción es plantear otro caso, desde el punto de vista gráfico, de una función no definida en un punto, ya que el profesor busca que los alumnos superen el conflicto semiótico anterior. Se observa cómo el profesor cambia de lenguaje constantemente desde dos puntos de vista, gráfico y analítico, prescindiendo del numérico, que tan buen papel podría aquí desempeñar.

52. ***Profesor:*** *¿Dominio de f?* [Él mismo contesta que es $\mathbf{R}-\{3\}$].

Una vez planteada la gráfica, pregunta por el dominio, que él mismo responde, para evitar un tiempo de demora si espera a las respuestas del alumnado. Es decir, se emplea una técnica cronogenética de aceleración de la acción.

53. ***Profesor:*** *¿Y f(3)? No caigáis en la trampa de decir 5, porque no está en el dominio y no puede haber imagen. Pero no nos preocupa f(3), pero sí el acercarme a 3 lo más que pueda y antes del 3.*

La primera acción es preguntar por la imagen del punto que no está en el dominio e, intentando conducir a los alumnos a la respuesta correcta, termina por darla él, quizá porque esperaría que algún alumno buscara una imagen donde no la hay. Es decir, utiliza una técnica de aceleración para mantener la topogénesis descendente.

La segunda acción es mostrar a los alumnos que, para lo que persigue sin aún haberlo dicho, la imagen es lo de menos. En este proceso dialógico, el profesor no ha enfatizado lo que pretende y esto puede despistar a la clase, que se ve inmersa en la consecución de una serie de microobjetivos y todavía no saben para qué los están haciendo. De nuevo aparece la idea del "acercamiento" a un punto, de forma transparente, sin comprobar si los alumnos tienen asumido este concepto, máxime cuando en el diálogo del profesor intercala valores de la función con valores de la variable, lo que puede llevar a éstos a confundirlos o identificarlos (*...no nos preocupa f(3), pero sí acercarme a 3 los más que pueda...*).

54. ***Profesor:*** *¡Ojo!, ¿dónde están las imágenes? No tengo ahora fórmula.*

Pregunta por las imágenes, llamando la atención de los alumnos (*¡ojo!*) ya que ahora no disponen de una fórmula en la que sustituir. El profesor espera que las respuestas sean imprecisas y que las realicen sobre la gráfica.

El profesor cambia la topogénesis, volviendo al marco analógico, en una topogénesis ascendente.

*55. **Alumnos**: Cerca del 5.*

Los alumnos responden a la demanda del profesor.

*56. **Profesor:** ¿Y si ahora me acerco a 3 por la derecha, dónde están sus imágenes?*

Realiza otra pregunta, del mismo estilo que en 54, con otra metáfora (…*me acerco a 3 por la derecha*…).

*57. **Alumnos**: Por encima del 5.*

Los alumnos responden a la demanda del profesor.

*58. **Profesor:*** [Analiza lo dicho hasta ahora. Tiza amarilla]. *Sí podemos decir límite cuando x tiende a tres de f(x).*

El profesor regula lo dicho hasta ahora y desvela lo que quería conseguir (*sí podemos decir límite cuando x tiende a tres de f(x)*). El énfasis de lo pretendido lo indica el profesor al expresar lo anterior con tiza amarilla ya que como se ha indicado el trabajo con tizas de colores es un recurso muy usado por el docente. Es decir, el profesor instituye el saber gráficamente.

*59. **Alumnos**: Pero si no existe f(3).*

Los alumnos demandan información al profesor, pues no entienden cómo puede haber límite en el punto sin que exista la imagen de ese punto (*pero si no existe f(3)*). Con esta cuestión se desprende que para los alumnos, la imagen y el límite han de identificarse y coincidir, con lo que, a pesar de los esfuerzos (no muy acertados) del profesor por mostrar lo contrario, no parece que se haya conseguido el objetivo, ya que el conflicto semiótico subyace.

*60. **Alumno*** [Jaime]: *Pero la asíntota tampoco lo toca.* [El profesor obvia el comentario].

Un alumno demanda información también con un comentario que no tiene nada que ver con la cuestión a tratar en este momento, tanto es así que el profesor ignora la apreciación del alumno. Se estima dudoso si en el alumno subyace la idea de que, al expresar en la gráfica de la unidad 51 la ausencia de imagen en el punto con un "agujero", no haya identificado este "agujero" con la idea de una asíntota vertical.

El profesor, al no atender el comentario del alumno, interrumpe el proceso de devolución. Es decir, ante la demanda del alumno, el profesor no regula.

*61. **Profesor:** Luego es curioso pero* $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$. *No está definida en 3 pero sí existe su límite. Ahora existe ese límite sin tener la expresión analítica y sin tener f(3).*

La acción del profesor es expresar en términos del lenguaje de límites lo dicho en 58, reiterando la ausencia de relación entre la imagen de un punto y su límite (*no está definida en 3, pero sí existe su límite*). Da la impresión de que el profesor pretende que a fuerza de repetir esta propiedad, los alumnos la asuman como tal, aunque, dada su insistencia, parece que tiene claro que no ha conseguido el objetivo de que lo entiendan.

*62. **Profesor:*** [Los conduce razonadamente a los límites laterales, con lo cual llegamos a una nueva unidad de análisis].

El profesor institucionaliza el saber, aunque de forma intuitiva.

A partir de aquí el profesor planifica la siguiente unidad de análisis, los límites laterales, ya introducidos en ésta cuando metafóricamente se quería "acercar" a un punto antes y después de él.

A lo largo de esta configuración, el profesor adopta los estados de asignación, evaluación, motivación y regulación, y los alumnos, los de recepción, formulación, argumentación y demanda de información.

Unidad de análisis 3: Límites laterales.

La siguiente unidad de análisis trata de los límites laterales, última de esta sesión.

63. ***Profesor*** [En relación al ejemplo gráfico anterior, unidad 51]: *Límite cuando x tiende a 3 por la izquierda,* [y aclara la expresión de 3 por la izquierda], *será igual a 5. Y límite cuando x tiende a 3 por la derecha será igual a 5.*

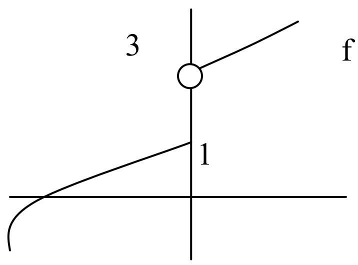
[Aclara los valores cercanos a 3].

Pues bien, cuando existen los límites laterales y los dos coinciden, se escribe $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

El profesor utiliza la técnica cronogenética de determinación del momento propicio para institucionalizar el saber.

Tomando el ejemplo de la unidad anterior, la acción del profesor se centra en fijar la notación de los límites laterales entorno a un punto y de la lectura de dicha notación. De nuevo aclara los valores cercanos al punto a estudiar, aunque da la impresión de que el profesor asume la transparencia del concepto, hecho que no resulta así para el alumnado.

64. ***Profesor:*** *Situación que se nos puede presentar:*



El profesor, tratando que los alumnos superen el conflicto semiótico descrito, propone otro ejemplo utilizando la técnica de la confrontación.

Siguiendo con el tratamiento mantenido a lo largo de toda la unidad, el profesor materializa gráficamente otro caso de límites laterales con un ejemplo gráfico. Mediante las funciones de regulación y asignación de tareas, el profesor quiere establecer reglas concretas sobre el cálculo de límites laterales, desde un punto de vista gráfico y obviando aún el cálculo analítico de los mismos.

65. ***Profesor:*** *No todas las funciones son "parabolitas". Lo primero que interesa es ver si el Dom (f) =* $\mathbf{R}$.

La primera acción es hacer una llamada de atención sobre la diversidad de aspectos gráficos que se pueden presentar, dando de lado a las gráficas de las funciones más conocidas por los alumnos (*no todas las funciones son "parabolitas"*).

La segunda acción es de recuerdo, al querer plantear el cálculo del dominio de definición de la función cuya gráfica ha representado, posiblemente preparando el camino para cuando haya que relacionar el cálculo de límites en un punto con el concepto de continuidad en dicho punto. El hecho de calcular dominios de funciones a la vista de sus gráficas es una actividad ya practicada por los alumnos en temas anteriores.

66. ***Alumnos****:* [Algunos caen en los valores 1 y 3, dudan, hasta que admiten que el Dom(f) es $\mathbf{R}$].

Los alumnos responden a la demanda del profesor, no sin antes presentar algún tipo de confusión con los valores que ha dibujado en la pizarra. Por consenso se llega a la respuesta de que el dominio es todo el conjunto de números reales. Los alumnos instituyen el saber.

67. ***Profesor:*** *¿Y la imagen de 0? Vale 1.* [Él mismo contesta].

La acción del profesor es preguntar por la imagen de un punto y, como ya ha pasado en otras ocasiones, él mismo contesta. El profesor considera trivial la respuesta y, para evitar que algún alumno no lo sepa o conteste mal, prefiere asumir la tarea de responder y que los alumnos asientan.

El profesor utiliza una técnica cronogenética de aceleración y se da un cambio en la topogénesis descendente. El profesor valida e instituye de modo magistral sin contar con los alumnos.

68. ***Profesor:*** *Ahora vamos a investigar* $\lim_{x \to 0} f(x)$.

La acción del profesor es proponer una tarea concreta de cálculo del límite en un punto. El profesor asume la tarea desde un estado de investigación guiada según una perspectiva dialógica formulando preguntas a los alumnos (*ahora vamos a investigar…*).

Puede observarse un cambio en la topogénesis hacia una ascendente. Es decir, se vuelve al modo analógico.

69. ***Alumnos****: Hay que ver a la derecha y a la izquierda.*

Los alumnos son conscientes de que, al tratarse de una función a trozos, hay que calcular los límites laterales (también pueden haberse motivado en sus respuestas al saber de antemano que se encuentran en un apartado que el profesor ha titulado como cálculo de límites laterales), y así lo manifiestan.

70. ***Profesor:*** *Eso hay que verlo, esta función tiene dos comportamientos, derecha e izquierda, luego es necesario calcular:* $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

El profesor está de acuerdo con lo manifestado por los alumnos (*eso hay que verlo*) y lo confirma volviendo a utilizar un lenguaje metafórico (*esta función tiene dos comportamientos, derecha e izquierda…*), expresando en notación de límites laterales el cálculo que hay que hacer. Por tanto, valida lo manifestado por los alumnos.

71. ***Alumno*** [Francisco José]: *Por la izquierda es menos infinito.*

Un alumno acepta la devolución y contesta mal, quizá porque tiene muy recientes los límites en los infinitos y se deja llevar por, en este caso, el comportamiento de la función cuando la variable tiende a $-\infty$, ya que con esta tendencia sí habría respondido bien.

Como puede observarse, surge el problema de no haber institucionalizado correctamente el entorno de un punto.

72. ***Alumno****:* [Otro alumno dice que es 1].

Otro alumno contesta bien, pero parece que, por ahora, es el único, ya que la respuesta no se ve refrendada por más compañeros.

73. ***Profesor:*** *Votos a favor: Nada. Ahora 3, ahora 4.*

El profesor toma conciencia de la no transparencia de este cálculo, a raíz de las respuestas que van surgiendo, y para mantener la atención de los alumnos, antes de confirmar, o no, la respuesta, pregunta quién está de acuerdo, aunque lo hace intentando motivarlos (*votos a favor…*).

Se utiliza una técnica cronogenética de ralentización. Además, aparece una confrontación, cuyo resultado será un cambio cognitivo.

74. ***Alumno*** [Julio]: *Es menos infinito.*

De nuevo otro alumno responde como si se tratara de calcular el límite de la función en $-\infty$, al igual que en 71, y es que el cambio de límites en el infinito al cálculo de límites en un punto se ha producido muy bruscamente y los estudiantes aún no han asimilado la diferencia.

75. ***Profesor:*** *Estamos en 0.*

Tanto es así que el profesor se ve obligado a recordarles que están ante el límite en un punto, metafóricamente hablando (*estamos en 0*).

76. ***Alumno*** [Julio]: *¡Ah!, es 1.*

El comentario surte su efecto ya que el alumno responde correctamente y con cierto asombro, como pensando lo claro que estaba y que no lo había visto antes (*¡ah!, es 1*).

77. ***Profesor:*** *Votos en contra de 1: Ninguno.* [Aclara]: *si tomo valores cerca de 0 por la izquierda, las imágenes se me pegan a 1.*

El profesor vuelve a solicitar la participación de los alumnos, intentando la implicación de todos (*votos en contra de 1, ninguno*) y aclara este límite lateral, seguramente, aunque no se dice, señalando en la gráfica dibujada en la pizarra y haciendo gestos que confirmen el valor del límite, acompañado de un comentario metafórico (*...las imágenes se me pegan a 1*). Se insiste en el conflicto semiótico debido a la metáfora elegida.

Finalmente, el profesor instituye el saber.

78. ***Profesor:*** *¿Y límite cuando x tiende a 0 por la derecha?*

La acción del profesor consiste en plantear a los alumnos el cálculo del límite por la derecha.

79. ***Alumno*** [Emilio]: [Duda algo]. *Es 3. Se acercan a 3, pero no llega a tocarlo.*

Un alumno contesta, mostrando su contrariedad porque, aunque lo ha dicho sin convicción, no puede entender que el valor al que se acercan las imágenes no sea el valor que toma la función en ese punto. El alumno no puede entender que ése sea el límite cuando la imagen va por otro lado (*se acercan a 3, pero no llega a tocarlo*). Es decir, persiste el conflicto semiótico de confundir el límite con el valor de la función.

80. ***Profesor:*** *¿Y cuánto me acerco? ¡Todo lo que quiera!*

La acción del profesor es aclarar sus dudas con la idea del “acercamiento”, aunque entendemos que lo que hace es complicar la situación (*¿cuánto me acerco?, ¡todo lo que se quiera!*). Al no utilizarse el lenguaje numérico, el término *acercarse todo lo que se quiera* queda confuso.

*81. **Alumno**:* [Duda y dice 1. El profesor lo saca a la pizarra].

Tanto es así que el alumno responde como valor de este límite lateral el valor de la imagen en el punto, aunque sigue sin tenerlo claro y duda. La acción del profesor es implicarlo aún más en el problema y lo saca a la pizarra, primera vez que lo hace en toda la sesión.

*82. **Profesor:*** [Pone un valor de x. Pero, aunque el profesor intenta aclarar, el 1 sigue siendo una barrera para este alumno].

A pesar de los intentos del profesor, el alumno tiene anclado el conflicto semiótico de considerar el valor del límite en un punto como el valor de la imagen en dicho punto y sigue sin verlo.

Al utilizar la técnica cronogenética de aceleración del saber, el profesor se desentiende del saber del alumno.

*83. **Profesor:** Fijaos, está definida en 0, aunque los límites laterales existen, pero son distintos. El límite cuando x tiende a cero por la izquierda de f(x) es 1. El límite cuando x tiende a cero por la derecha de f(x) es 3. ¿Cuál es el límite cuando x tiende a 0 de f(x)?*

La primera acción del profesor es institucionalizar el valor de los límites laterales y, como no dice nada más, se estima que habrá pretendido con ello que el que no lo entienda, se lo “crea”. Da la impresión de que el profesor se da por vencido en su intento de “investigar” el problema y da el resultado, a pesar de ser consciente de su fracaso.

La segunda acción es, una vez conocidos los límites laterales (dos valores distintos), plantear el valor del límite en el punto.

84. ***Alumnos****: No se puede saber. No hay. Pero, si tiene dos.* [Varias intervenciones].

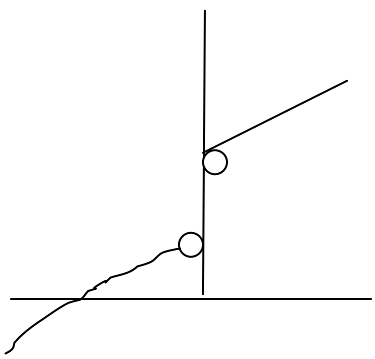
Hay varias intervenciones de los alumnos, con la mayoría de respuestas erróneas, señal de que el concepto de límite lateral no han llegado a relacionarlo con el valor del límite en el punto.

85. ***Profesor:*** *Antes vimos que existían los límites laterales para x tendiendo a 3 de f(x) y era 5. Ahora, no existe el límite cuando x tiende a 0 de f(x).*

El profesor utiliza la técnica cronogenética de determinación del momento propicio para definir el $\lim_{x \to 0} f(x)$ cuando los límites laterales, aún existiendo, no coinciden.

La acción del profesor consiste en institucionalizar el saber: como los límites laterales son distintos, no existe el límite cuando x tiende a 0 de f(x).

86. ***Profesor:*** *Distinguiremos el valor de la función y el valor del límite.* [Pone un nuevo ejemplo gráfico y pregunta por el dominio]:



El profesor insiste para que los alumnos puedan superar el conflicto semiótico presente de límite como valor de la función.

La primera acción es situar el punto de partida del siguiente caso que quiere estudiar: distinguir el valor de la función del valor del límite.

La segunda acción es mostrar gráficamente el caso que quiere estudiar.

La tercera acción es preguntar, como ya lo hiciera en el caso anterior, por el dominio de la función.

87. ***Alumnos:*** *Es* **R** *menos el 0.*

Los alumnos responden en grupo y correctamente a la demanda del profesor.

88. ***Profesor:*** *¿Y el límite? Observad que el resultado del límite no cambia con respecto al caso anterior. Luego, corroboramos la idea de que el valor de la función en el punto puede no influir en el límite.*

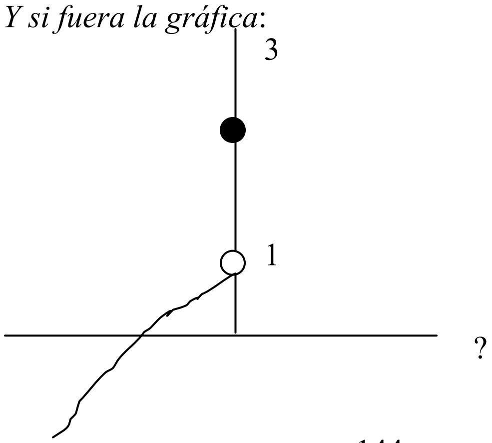
Se observa el uso de una técnica cronogenética de aceleración. Se da un cambio topogenético a una topogénesis descendente, al pasar a la clase magistral.

La primera acción es preguntar por el límite.

La segunda acción es responder él mismo, evitando quizá respuestas incómodas, tratando de relacionarla con el caso anterior. A pesar de su buena intención, por el comentario que hace (*corroboramos la idea de que el valor de la función en el punto puede no influir en el límite*), creemos que la función no es la mejor indicada para la propuesta que se había hecho en la unidad 86, ya que la función no está definida en el punto objeto del límite, ni los límites laterales coinciden.

El profesor, al decir que el valor de la función puede no influir en el límite, deja abierta la posibilidad de que, en algún caso, pueda influir, lo que conduce al conflicto semiótico ya comentado.

89. ***Alumno****: ¿Y si fuera la gráfica*:



Un alumno demanda información del profesor, planteándole ahora otro caso gráfico de una función cuyo dominio es $(-\infty,0]$.

90. ***Profesor:*** *Mª Lucía, ¿cuánto vale f(0)?*

El profesor pregunta a una alumna por la imagen del 0, soslayando el dominio de definición de la función.

91. ***Alumna*** [Mª Lucía]: *No tiene imagen.*
92. ***Profesor:*** *¿Por qué?*

La alumna responde erróneamente y el profesor pide una justificación a su respuesta.

93. ***Alumna*** [Mª Lucía]: *Porque el Dominio llega hasta el 0.*

La respuesta de la alumna es incoherente ya que trata de relacionar el dominio de la función con el valor de la imagen, aunque entiende que el 0 está en el dominio (*porque el dominio llega hasta el 0*).

94. ***Profesor****: Luego, independientemente de la imagen del 0, no existe* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *No hay nada. ¿Y a la izquierda hay límite?*

La primera acción del profesor es ignorar la respuesta dada por la alumna, a pesar de su error, y directamente pasa a decir que no hay límite a la derecha de 0. Da la impresión de que el cálculo de límites laterales se le está complicando a los alumnos y el profesor prefiere dar respuestas directas antes que entrar en la explicación de las mismas. Parece que el tiempo apremia.

La segunda acción es preguntar por el límite a la izquierda.

95. ***Alumnos****: Es 1.*

Los alumnos, en grupo, responden que 1, posiblemente por la similitud con las gráficas de los casos anteriores, ya que no justifican la solución.

96. ***Alumno****: Pues, yo creo que es 3 porque el 3 entra y el 1 no entra en el rango.*

Un alumno dice que 3, que es la imagen del punto (de nuevo el conflicto), justificando que el 1 no entra en el rango de f y el 3 sí, aunque no se haya hablado del rango de una función en toda la sesión (la función planteada en 89 tiene por rango $(-\infty,1)\cup\{3\}$).

97. ***Profesor:*** [Aclara otra vez]. *Miraos el apartado 6.3.*

El profesor vuelve a aclarar de nuevo, pero se da por vencido ya que los remite al libro de texto para que se miren el apartado 6.3, que justamente es el que trata los límites laterales. Se observa que el profesor no ha conseguido su objetivo: explicar gráficamente el cálculo de límites laterales y su vinculación con el límite de una función en un punto.

A lo largo de esta configuración, el profesor adopta los estados de asignación, motivación y regulación, y los alumnos, los de recepción, aceptación y formulación.

5.5.2. Trayectoria Instruccional de la 2ª sesión

En la segunda clase analizada el profesor continúa el estudio del límite mediante un planteamiento analítico, una vez que los estudiantes ya han visto en la sesión anterior la idea intuitiva de límite desde un punto de vista gráfico.

Las unidades de análisis están distribuidas según los tipos de funciones para los que se calcula el límite en $\pm\infty$, distinguiendo entre polinómicas, racionales e irracionales.

Las diversas configuraciones instruccionales se desarrollan según las unidades naturales de análisis, especificando en cada caso de cuáles se trata.

Unidad de análisis 1: **Se continúa con lo último del día anterior**.

1. ***Profesor:*** *¿Qué tal lo de ayer? ¿Se va viendo cómo intuitivamente funcionan los límites? Hoy toca cálculo. Hay dos puntos de vista: con gráfica, sin tener la función (la forma analítica es la función), y otra teniendo la función.*

El trabajo del profesor comienza preguntando a los alumnos por sus impresiones respecto a la idea de límite, fomentando que éstos recuerden lo ya visto en la clase anterior y, al mismo tiempo, planificando el desarrollo de esta nueva sesión. Los comentarios del profesor pretenden centrar la acción de esta nueva sesión (*hoy toca cálculo*) y, aunque comienza preguntando a los alumnos, se observa que no espera respuesta de sus preguntas, que más bien podrían corresponder al "saludo" del inicio de clase.

El profesor busca crear un ambiente con los alumnos donde se propicie la devolución de éstos ante los problemas que les va a ir planteando.

Al identificar la existencia de la función con su expresión analítica origina una confusión entre la representación semiótica de la función (la expresión analítica) con el mismo objeto función. Es decir, al alumno se le induce un conflicto semiótico: confundir el objeto función con una de sus representaciones semióticas, puesto que cuando la función se expresa mediante una gráfica, el profesor le dice que *no tiene función*.

Unidad de análisis 2: **Límites de funciones en el infinito**.

Una vez que se ha planificado la sesión de hoy, se establece como unidad de análisis el cálculo de límites en el infinito, a modo de introducción de los distintos casos de funciones que se pueden presentar, y que se corresponderán con unidades de análisis posteriores.

2. ***Profesor:*** *Vimos los apartados 6.1 y 6.3 juntos, pero hoy vemos el 6.2. Comenzaremos por x tendiendo a* $\pm\infty$*, y después lo haremos en un punto. ¿Recordáis cómo hicimos el dominio? ¿Cómo clasificamos el dominio?*

La primera acción del profesor es hacer una referencia al libro de texto, indicando los apartados ya vistos en la sesión anterior y planificando el que se tratará en la presente sesión. El profesor les está diciendo implícitamente que lo deben seguir mientras explica, porque él lo va a utilizar de guión en sus explicaciones.

La segunda acción es una acción de recuerdo para los alumnos, haciendo referencia al dominio de definición de las funciones (tema anterior). Aunque da la impresión de que el profesor se “aleja” del objetivo actual, se desprende por las unidades siguientes que lo que pretende es que los alumnos recuerden cómo estudiaron los dominios, según el tipo de funciones, porque seguirán la misma pauta para estudiar los límites: funciones polinómicas, racionales e irracionales.

Al interrogar sobre la tarea, el profesor inicia un proceso dialógico poniendo en práctica la comunicación. Utiliza la técnica cronogenética de la ralentización de la acción y la técnica topogenética de la cooperación.

3. ***Alumnos:*** S*egún el tipo de función.*

Los alumnos parecen saber a qué se refiere el comentario del profesor, respondiendo a su demanda en el sentido que él espera.

4. ***Profesor:*** *Porque cada función tiene una forma y condiciona el cálculo del límite.*

De nuevo, el profesor corrobora que su acción se centrará en la forma de la función, porque dependiendo de ésta se procederá para el cálculo del límite.

El profesor, mediante la técnica cronogenética de la bifurcación o cambio de fase, pasa del dominio de la función al cálculo de límites, lo cual puede conducir a los alumnos a confusión.

Unidad de análisis 3: Funciones polinómicas.

Una vez planificada la acción, esta unidad de análisis contempla el cálculo en $\pm\infty$ de las funciones polinómicas, atendiendo a la siguiente secuencia de unidades naturales.

5. ***Profesor:*** *Un riesgo, el infinito no es un número, pero en algunos casos lo trataremos como un número: ya que* $\infty+3=\infty$*;* $2-\infty=-\infty$ [Lo dice verbalmente]. *Jugaremos con esa idea, pero que no es un número, porque, por ejemplo,* $2.\infty=\infty$ *y* $\infty^2=\infty$. *Es una ampliación de* $\mathbf{R}$ *un poco extraña.*

La primera acción del profesor es, sin más preámbulos, advertir del riesgo que supone trabajar con el infinito, ya que su uso para el cálculo de límites lo lleva a tratarlo como si fuera un número, y esto puede crear en los alumnos un conflicto semiótico muy importante a la vez que muy extendido. De ahí la prioridad de prevenirlos nada más empezar, pero a la vez que lo avisa propone unos ejemplos que hacen ver que, efectivamente, pueden tratar al infinito como si fuera un número.

La precipitación en este comentario lo único que hace es conseguir el efecto contrario al deseado, ya que, en ausencia de algunas tablas de variación numérica, el profesor ha estado "jugando" con el "número" infinito. Es decir, no aplica la técnica cronogenética de determinación del momento propicio.

La segunda acción del profesor es una reflexión (*es una ampliación de* $\mathbf{R}$ *un poco extraña)* que hace para sí mismo y que, seguramente, no habrán llegado a entender sus alumnos.

Se crea una gran confusión en el alumno, ya que, por una parte, se afirma que ∞ es un número porque 2 + ∞ = + ∞, y, por otro, se afirma que no lo es porque 2. ∞ = ∞. Es decir, el intento de que los alumnos superen el conflicto semiótico "infinito es un número" conduce a la introducción de nuevos conflictos.

6. ***Profesor:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}$ *(monomio de mayor grado). Quien manda es el monomio de mayor grado.*

La acción del profesor es enunciar esta propiedad para el cálculo de límites de funciones polinómicas, acompañando la propiedad con un enunciado dado en lenguaje metafórico (*quien manda…*), quizá para dar más énfasis a la importancia que en estos límites tiene el monomio de mayor grado.

El profesor comienza instituyendo el saber, es decir, utiliza una topogénesis descendente al emplear ahora la enseñanza magistral. Además, se basa en la técnica cronogenética de la aceleración para llegar lo antes posible a la regla del cálculo del límite.

7. ***Profesor:*** *Sea* $f(x) = x^4 + 3894\,x^3$. *Manda el cuatro por muy grande que sea el 3894. Trabajamos con resultados intuitivos. ¿Qué ocurre?* $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4 + 3894x^3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4$. *Fijaos que utilizo el infinito como si fuera un número. ¿Cuánto dará?*

La primera acción es plantear un ejemplo ilustrativo de lo dicho anteriormente, aunque hace referencia metafórica sólo al grado del monomio, y no al monomio en sí (*manda el cuatro…*).

La segunda acción es implicar a los alumnos en resultados intuitivos imaginados (por ausencia de tablas de valores) y aplicar la propiedad enunciada en la unidad anterior.

La tercera acción, no muy afortunada, es reiterar lo contrario de lo dicho hace un momento respecto a la utilización del infinito como un número (*fijaos que utilizo el infinito como si fuera un número)*, con lo que a estas alturas el alumnado, no muy experto aún en estos conceptos, puede llegar a pensar que el infinito es un número.

La cuarta acción es preguntar por el resultado del límite. El planteamiento del mismo ha quedado poco adecuado, ya que los alumnos no han trabajado con una tabla de valores y no han visto cómo las imágenes de la función crecen indefinidamente para concluir el resultado. Da la impresión de que el profesor está más preocupado por dar una serie de “recetas” a la hora de calcular límites que den un resultado inmediato, antes de que los alumnos intenten deducir el por qué de esos resultados. Además, tampoco parece un ejemplo muy afortunado, ya que se trata de un límite en $+\infty$ y aparece una suma de monomios positivos. El alumno no llega a ver la importancia del monomio principal hasta que no se le propone un ejemplo del tipo de función $f(x) = x^4 - 3894x^3$ (la sustracción de un monomio “grande” puede hacerles dudar de esta propiedad).

8. ***Alumnos:*** $+\infty$.

Los alumnos responden a la demanda del profesor correctamente de forma colectiva, aunque da la impresión de que era el resultado “esperado” y no habría duda en lo que se iba a responder.

9. ***Profesor:*** *Pero fijaos que* $\lim_{x\to-\infty}(x^4 + 3894x^3) = \lim_{x\to-\infty} x^4$. *El signo menos juega con la potencia, por lo que infinito es como si fuera un número. ¿Cuánto dará?*

El profesor cambia el límite sin previo aviso (ahora lo trata en $-\infty$) reiterando la propiedad anterior, sin dar importancia a la posibilidad de establecer una tabla variacional numérica, incurriendo de nuevo en la idea de tratar al infinito *como* si fuera un número (a estas alturas de clase, el alumno puede haber asumido que el infinito *es* un número). La acción del signo en el cálculo de los límites la plantea el profesor desde un punto de vista metafórico (*el signo menos juega con la potencia*) incitándoles a usar la regla de los signos para el cálculo de límites, sin haber estudiado ningún caso particular previamente.

10. ***Alumnos:*** $+\infty$.

Los alumnos responden a la demanda del profesor.

11. ***Profesor:*** *Luego,* $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.

El profesor institucionaliza el saber y expresa el cálculo realizado, aunque entendemos que debería haber expresado $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 3894x^3) = +\infty$, que era el límite pedido al principio.

Se echa en falta una técnica cronogenética de confrontación para hacer ver que la potencia tercera no influye en el resultado.

12. ***Alumno***: *Si no hay signo en infinito, ¿cuál es, el de mayor potencia?*

Un alumno demanda información del profesor, aunque parece que no se expresa correctamente. Entendemos que la pregunta va relacionada con la idea de que la variable tienda a infinito (sin signo), pero por la ausencia de comentarios del profesor, creemos que ha entendido la pregunta, obviando la segunda parte de la misma, que no tiene nada que ver.

La ausencia de una técnica cronogenética de confrontación, conduce al alumno a nuevos conflictos semióticos. Puede desprenderse de la pregunta, por ejemplo, que el signo de infinito tiene que ver con el monomio de mayor potencia, lo cual es una incongruencia.

13. ***Profesor:*** *Sí, jugamos con los términos y con los signos. Si tengo:*
$\lim_{x \to \infty}(2x^3 + 7x + 4) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3)$, *¿Podéis interpretar lo que vale?*

La respuesta del profesor es metafórica (*jugamos con…*) y da la impresión de que quiere presentar a los estudiantes el cálculo de límites como un “juego”, ya que el comentario lo ha realizado ya en otra ocasión. El ejemplo que plantea tiene por novedad respecto a los anteriores que para él son equivalentes las expresiones $x \to \infty$ y $x \to +\infty$, pero no lo plantea explícitamente. Es decir, aunque se pide el cálculo de este límite, el profesor pide una “interpretación” de su valor, sin dejar muy claro cuál es el motivo de esta pregunta.

14. ***Alumna:*** $+\infty$.

Una alumna responde a la demanda del profesor.

15. ***Profesor:*** *¿Qué ocurre:* $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+7x+4)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ *?*

El profesor plantea otro ejemplo, para $x\to-\infty$, que resuelve completamente aunque lo hace interrogando. Da la impresión de que no quiere esperar respuestas de los alumnos y prefiere dar la solución.

Se utiliza una topogénesis descendente al utilizar la lección magistral para instituir un resultado. Emplea la técnica cronogenética de la aceleración.

16. ***Alumno:*** *Pues que dará menos infinito.*

Un alumno responde a la demanda del profesor, dando por hecho que, efectivamente, el límite vale menos infinito. La ausencia de las tablas de valores conduce a que los alumnos consideren al infinito como un número.

17. ***Profesor:*** *Se intuye, ¿verdad? ¿Qué ocurre si fuera* $-2x^3$*? Que el juego de signos actúa y sería más infinito. Por esto la gente utiliza el infinito como si fuera un número.*

El profesor da por transparente este hecho, basándose en la pura intuición, y así se lo hace ver a los alumnos, preguntándolo de manera que no espera respuesta (*se intuye, ¿verdad?*). El siguiente ejemplo vuelve a mostrar el papel de los signos en el cálculo de estos límites, y de nuevo vuelve a presentarlos como un "juego", expresión a la que ya se deben haber acostumbrado los alumnos.

Al no utilizar la tabla de variación, el profesor induce en los alumnos el conflicto semiótico de que el infinito es un número.

A lo largo de esta configuración, el profesor adopta los estados de regulación y asignación de tareas, y los alumnos, los de recepción, aceptación, formulación y demanda de información.

Unidad de análisis 4: Funciones racionales f(x) = p(x)/q(x), cociente de polinomios.

En esta unidad de análisis se trabajará con los límites en infinito de funciones racionales, planteando los casos y las situaciones que siguen a continuación.

18. ***Profesor:*** *Ponemos tres ejemplos que serán el punto de partida:*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{x^3-x+1}\ ;\ b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{3x^2-x+2}\ ;\ c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6x}{x-5}$$

La primera acción del profesor es plantear la unidad de análisis con los casos de funciones racionales que se van a tratar como punto de partida.

19. ***Profesor:*** *¿Con qué he jugado en estos ejemplos? ¿Qué observáis?*

La pregunta del profesor vuelve a ser tratada desde un punto de vista metafórico, aludiendo de nuevo al juego, esperando que los alumnos se den cuenta de que ha variado los grados de los polinomios del numerador y denominador en cada caso.

El profesor vuelve al proceso dialógico mediante la técnica cronogenética de ralentización, buscando implicar a los alumnos en el aprendizaje.

20. ***Alumnos:*** [Responden mal, hay confusión].
21. ***Alumno:*** *El grado.*

Como era de esperar, los alumnos participan de varias respuestas que no se ajustan a la demanda del profesor, ya que es difícil que, sin previo aviso, los alumnos sean conscientes de que la clave del cálculo de este tipo de funciones es la relación entre los grados de los dos miembros de la fracción. Por fin, un alumno se da cuenta de este hecho y responde correctamente.

22. ***Profesor:*** *Hay como tres posibilidades:*

- *grado (numerador) > grado (denominador)*
- *grado (numerador) = grado (denominador)*
- *grado (numerador) < grado (denominador)*

El profesor explicita este hecho mostrando las tres posibilidades que se pueden presentar en cuanto a la relación de los grados en una función racional.

23. ***Alumno:*** *¿Por qué insiste en estas tres posibilidades?*

Un alumno demanda información, mostrando su inquietud del por qué de tanto empeño en la relación de los grados, muestra de que nos encontramos ante una clase muy participativa y con ansias de aprender. Entendemos que en esta sesión de límites, los alumnos aún no tengan claro qué tienen que ver unos grados polinómicos para la realización de los mismos, sobre todo porque no se ha visto ningún ejemplo concreto hasta ahora. La pregunta es lógica ya que el profesor no ha incidido aún en los límites.

24. ***Profesor:*** *Porque mandan los grados de los polinomios. Y, además, sigue mandado el monomio de mayor grado. Pero hay un problema: llegamos a una cosa extraña (escribe con rojo mate)* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *no es una operación. Lo lógico es decir 1, pero no* [los alumnos se ríen]. *Es algo de lo que no sabemos el resultado. Cada vez me puede salir una cosa distinta. Se llama una indeterminación. No está determinado lo que vale.*

La primera acción del profesor es contestar al alumno, abusando del lenguaje metafórico (*porque mandan los grados…*) y volver a poner el énfasis en el monomio de mayor grado, de nuevo metafóricamente (*sigue mandando el monomio…*).

La segunda acción es plantear la aparición de la expresión $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, haciéndoles ver que, aunque bien se podría pensar que valiera 1, han de rechazar esta idea. La sonrisa que esto provoca en el aula puede venir motivada por la forma de expresarse el profesor (*lo lógico es 1, pero no*), aunque entendemos que es un aviso del profesor de que la "lógica", a veces, puede no ser compatible con las Matemáticas (los alumnos pueden empezar a pensar que el cociente de dos términos iguales es 1, pero en este caso, no).

La tercera acción es explicar esta expresión e institucionalizar su nombre (*se llama indeterminación*). Podemos pensar que, sin haber trabajado aún esta cuestión, al alumno le cueste trabajo hacerse a la idea de que "cada vez puede salir una cosa distinta", como dice el profesor.

Aparece una topogénesis descendente, al utilizarse la clase magistral. Al no utilizar las tablas de variación, el profesor emplea una técnica cronogenética de aceleración.

25. ***Profesor:*** *Para que veáis la diferencia entre la indeterminación y otros casos:* $\frac{+\infty}{+5}=+\infty$ *y* $\frac{+\infty}{-5}=-\infty$, *es decir,* $\frac{+\infty}{n}=\pm\infty$ *(según el signo de n), luego es un resultado fijo.*

La acción del profesor es, mediante ejemplos, hacerles ver que hay resultados con el infinito que son fijos y se pueden reglar, a diferencia de las indeterminaciones, cuyo resultado no está determinado, pero abusando del lenguaje, el profesor vuelve a mostrar ejemplos en los que está tratando al infinito como un número, por lo que pueden ver en los ejemplos anteriores cocientes de números, aumentando así las posibilidades de afianzar el conflicto semiótico ya introducido en unidades anteriores. Pensamos que el profesor pretende que las reglas sean aprendidas sin significado.

El profesor ha utilizado la técnica cronogenética de la bifurcación para tratar de distinguir las indeterminaciones de las determinaciones.

26. ***Profesor:*** *Vamos a demostrar que en los tres ejemplos a, b y c habrá una indeterminación. A ver si me intuís esta operación:* $\frac{2}{+\infty}$.

El profesor les adelanta que en los ejemplos propuestos va a aparecer una indeterminación, aunque lo correcto habría sido decir que se van a obtener tres resultados distintos, con lo que quedaría más claro la aparición de la misma indeterminación en cada uno de ellos.

A continuación, el profesor les plantea una pregunta sobre una expresión que él trata de "operación", incurriendo en el conflicto anterior, y esperando que por simple intuición el alumno encuentre su valor. De nuevo parece que al profesor le interesan más “recetas” de resultados que analizar los mismos con algunas tablas de variación numérica.

27. ***Alumnos****: Más infinito.*
28. ***Profesor:*** *Mal.*

Los alumnos responden a la demanda del profesor, pero, al estar acostumbrados a resultados infinitos en los ejemplos anteriores, imitan el mismo patrón de resultados y responden con la misma idea que hasta ahora han trabajado, lo que hace pensar si en los casos anteriores respondían de la misma manera, o no. La respuesta del profesor no deja lugar a dudas, esperando que vuelvan a replantearse el posible resultado.

29. ***Alumno:*** *Se acerca a cero por la parte positiva.*

Un alumno parece haber captado la idea de esta expresión porque da una explicación muy pertinente, matizando, incluso, el resultado.

30. ***Profesor:*** *Esto no es un número, sólo sale en el límite.*

El comentario del profesor puede responder a matizar lo dicho en la unidad 26 acerca del tratamiento como “operación” de la expresión planteada. Los alumnos deben entender que sólo es un planteamiento que se produce en el límite y que no es una operación.

31. ***Alumnos:*** *Cero.*

Los alumnos, siguiendo las indicaciones de su compañero, responden correctamente, lo que puede suponer que se han dejado influir por la respuesta de éste más que por las indicaciones del profesor.

32. ***Profesor:*** *¿2/1000, 2/88000000, ..., qué les ocurre?*
33. ***Alumnos****: Se acercan a cero.*

La acción del profesor es poner ejemplos de valores de fracciones con denominadores muy grandes, para que la respuesta anterior quede refrendada con algunos casos concretos, y que deberían haberse tratado con anterioridad a la pregunta para evitar los errores que se han presentado.

Los alumnos responden a la demanda del profesor correctamente, lo que puede suponer que ante casos concretos pueden predecir mejor el resultado.

34. ***Profesor***: *Insiste, infinitamente cerca de 0, y escribe* $\frac{18}{+\infty}=0$ *y* $\frac{1000000}{+\infty}=0$

La insistencia del profesor le lleva a incurrir de nuevo en plantear estos resultados como una "operación" con el infinito y, además, no aclara la expresión que utiliza al decir "infinitamente cerca de 0".

35. ***Alumno***: *¿Con n dividido entre menos infinito también será cero?*

Un alumno demanda información respecto a la misma expresión con $-\infty$. La inquietud por aprender de algunos alumnos de esta clase es digna de mención, ya que, en algunos casos, parecen querer ir por delante del profesor.

36. ***Profesor:*** *Votos a favor.*

En su afán por mantener la atención y la participación de todos los estudiantes, a la par que intentar motivarles, el profesor realiza la pregunta como si de una votación se tratara, método que ya ha utilizado en otras ocasiones y que parece dar buen resultado, ya que los alumnos participan activamente a favor o en contra de lo propuesto.

37. ***Alumnos***: [Todos menos Yurena, que no lo entiende].

Todos los alumnos están de acuerdo con el comentario de su compañero excepto una alumna que parece no entender la pregunta

38. ***Profesor:*** *¿Tú no te acercas todo lo que quieras a 0?* [El profesor utiliza la tabla de valores de modo verbal].

El profesor le hace ver que podemos acercarnos a 0 por la izquierda todo lo que uno quiera, comentario que sólo lo apoya utilizando una tabla de valores de forma verbal, lo que puede suponer que no es una duda que requiera más tiempo de explicación y que está suficientemente aclarado sin necesidad de utilizar más tiempo de respuesta. Es más, el profesor no da oportunidad a la alumna de que manifieste si lo ha entendido o no, por lo que se puede entender que la alumna haya podido hacer algún gesto que confirme que lo ha entendido.

39. ***Profesor:*** [Vuelve sobre el cociente $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$]. *Es muy cachondo, cada caso sale distinto. Del resultado no sé nada, siempre mandan los monomios de mayor grado.*

De nuevo se insiste en lo ya comentado a lo largo de toda la unidad de análisis con respecto a la indeterminación que se está estudiando y vuelve a recordar, en lenguaje metafórico, la importancia de los monomios de mayor grado (*siempre mandan…*). Además, quizá para mantener la atención de los alumnos, el profesor emplea otra curiosa palabra en sentido metafórico para dar a entender que en una indeterminación no se puede predecir el resultado (*es muy cachondo, cada caso sale distinto*).

A lo largo de esta configuración, el profesor ha utilizado los estados de asignación, regulación, evaluación y motivación; y los alumnos, los estados de aceptación, recepción, formulación, exploración, argumentación y demanda de información.

Unidad de análisis 5: Solución del apartado a).

La siguiente unidad de análisis trata ya de la corrección del apartado a), propuesto en la unidad 18.

40. ***Profesor:*** *Siempre mandan los monomios de mayor grado.* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$

[0 lo dicen los alumnos].

La acción del profesor es plantear, en lenguaje de límites, la idea que tanto ha reiterado a lo largo de la exposición: el límite de la función racional propuesta se reduce a calcular el límite del cociente de los monomios de mayor grado. Parece que la repetición de la propiedad ha surtido su efecto en los alumnos, pues son ellos los que dan la respuesta al límite pedido. A pesar de todo, se echa en falta el haber trabajado previamente con una tabla de valores y haber calculado imágenes de valores muy grandes en la función dada, para ver el comportamiento de las imágenes y que, efectivamente, se acercan cada vez más a 0, para concluir que ése es su límite.

41. ***Profesor:*** *Esta propiedad se puede generalizar, cuando gr(denominador) es mayor que gr(numerador), el límite es igual a 0.*

El profesor generaliza la propiedad y, como a la vista de los resultados parece una cuestión clara, no se detiene más en la misma.

42. ***Alumno****: ¿Puedo poner directamente 0?*

Dada la simpleza de la propiedad, un alumno se extraña de una resolución tan rápida preguntando si es válido sólo dar el resultado. Da la impresión de que quiere establecer un contrato didáctico con el profesor que prefiere clarificar: *si usted me pide un límite así, yo pongo directamente el resultado*. Seguro que este alumno está pensando en el examen de límites que, cuando terminen el tema, deberán realizar.

43. ***Profesor:*** *Claro que sí.*

Las sospechas del alumno son confirmadas por el profesor, que se conforma sólo con el resultado. Incluso, la respuesta del profesor elimina la posibilidad de utilizar la técnica cronogenética de la confrontación utilizando la tabla de variación.

A lo largo de esta configuración el profesor adopta el estado de regulación, y los alumnos, los estados de recepción y demanda de información.

Unidad de análisis 6: **Solución del apartado b).**

Siguiendo con el desarrollo de los ejemplos planteados en la unidad 18, toca ahora el turno de responder al apartado b).

44. ***Profesor:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ [El resultado lo dicen los alumnos].

El profesor sólo plantea el límite del cociente entre los monomios principales, según lo afirmado en ocasiones anteriores, y son los alumnos los que asumen la respuesta, que después de lo visto, parece evidente a raíz de la simplificación de las correspondientes potencias.

Una vez más el no usar las tablas de variación conduce a los alumnos hacia un cálculo rutinario sin significado.

45. ***Profesor:*** *Regla de aplicación del caso b: si gr(num)=gr(den), el límite es el cociente de los coeficientes…*

46. ***Profesor:*** *¿Qué coeficientes, cómo se llamaban?*

El profesor generaliza la propiedad, aunque se reserva el nombre de los coeficientes protagonistas del resultado, que inmediatamente después pregunta a los alumnos incitándoles a que recuerden su nombre.

47. ***Alumnos****:* [No lo saben].

Los alumnos, a pesar de haber utilizado este nombre en múltiples ocasiones, no son capaces de recordarlo, sorprendiendo por la simpleza de la pregunta.

48. ***Profesor:*** *¿Es que nadie se acuerda? Prin - ci - pa - les.*

A modo de llamada de atención, el profesor vocaliza la respuesta deteniéndose y enfatizando cada una de las sílabas que pronuncia, mostrando su extrañeza por el hecho de que ninguno de los estudiantes haya recordado la respuesta. Es decir, el profesor responde por los alumnos.

El estado utilizado por el docente, al igual que en el caso anterior, es el de regulación, y los alumnos han movilizado los estados de recepción y de formulación.

Unidad de análisis 7: Solución del apartado c).

En esta unidad de análisis se procede a la corrección del apartado c).

49. ***Profesor:*** *¿Intuís lo que ocurre?*
50. ***Alumnos:*** S*í.*

La acción del profesor es preguntar por el límite y para ello utiliza la palabra intuición. Parece como si el profesor quisiera que adivinaran el valor del límite por pura intuición ya que no se han construido tablas de valores ni se han dado reglas concretas de cálculo. La metodología observada al profesor consiste primero en hacer intuir el resultado y, después, generalizarlo.

Los alumnos, que ya han visto una cierta regularidad en el cálculo de estos límites con los dos ejemplos anteriores, responden afirmativamente, seguramente porque creen saber el resultado sin lugar a dudas (los alumnos han debido formar su propia concepción entorno a los límites porque el profesor les incita a dar resultados sin ningún fundamento teórico, sólo por intuición, y saben que si se equivocan no van a ser reprendidos por él).

51. **Profesor:** [Escribe $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x$]. *Por tanto...*
52. ***Alumnos****: Más infinito.*

El profesor, siguiendo con el mismo procedimiento usado hasta ahora, establece el límite entre el cociente de los monomios de mayor grado, realizando la correspondiente simplificación y dejando a la responsabilidad de los alumnos la respuesta final. La metodología que ha usado en este caso es la misma que la usada en casos anteriores: los pasos intermedios los hace él, dejando a los alumnos la tarea de dar la solución al límite propuesto.

En este caso, dada su simplicidad, los alumnos asumen la tarea de responder y lo hacen correctamente.

53. ***Profesor:*** *Generalización, cuando gr(num)>gr(denom), entonces es* $\pm\infty$. *Será más ó menos, según el signo del coeficiente principal de los polinomios del numerador y denominador.* [Poco claro para los alumnos].

Como en casos anteriores, el profesor generaliza ahora el cálculo del límite en funciones que responden a esta condición, aunque el resultado va condicionado según los signos de los coeficientes principales y, al exponerlo a los alumnos sin ningún caso práctico, resulta poco claro para ellos porque se observan caras y gestos de extrañeza por parte de los mismos, aunque, contrariamente a situaciones anteriores, no realizan pregunta alguna. Seguramente se imaginan que el profesor les proporcionará a continuación los suficientes ejemplos como para salir de la duda.

Estamos ante un estado en el que el profesor instituye el saber.

54. ***Profesor:*** [Escribe $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+7x}{-2x^2+5x+1}$]. *¿Qué es, más infinito, menos infinito, o cero?*

[Polémica fuerte].

El profesor plantea un nuevo ejemplo con la idea de que sean los alumnos los que asuman la responsabilidad de resolverlo, aunque les da una serie de posibilidades entre las que tienen que elegir. El plantear un caso como éste sugiere que el alumno pueda contestar al azar y acertar, con lo que el procedimiento no es muy didáctico, ya que el alumno no va a llegar a ver la tendencia efectiva de esa función cuando x tienda a $-\infty$ y, simplemente, una vez que sepa el resultado, se lo "creerá" sin verificarlo.

El profesor utiliza la técnica cronogenética de confrontación para obtener el resultado deseado.

55. ***Profesor:*** *Debido a que al dividir los coeficientes de mayor grado queda al final el 2x en el caso c), y el coeficiente del denominador era 1, éste no se tuvo en cuenta y por eso dio más infinito, pero, ¿y en este nuevo caso?*

La explicación del profesor intentando argumentar el procedimiento seguido en el caso c) puede terminar por equivocar aún más, si cabe, a los alumnos que todavía se muestran inseguros ante la avalancha de signos que tienen que controlar: el signo del infinito que se proponga y los signos de los coeficientes principales del numerador y denominador. Después de esta desafortunada explicación, vuelve a reiterar la pregunta que ya les había propuesto.

56. ***Alumna*** [Yurena]*: Más infinito.*

Una alumna contesta correctamente, aunque el profesor no lo sanciona, ni tampoco lo verifica en una tabla de valores. Para el resto de los alumnos queda constancia de que el resultado es $+\infty$ pero, para muchos de ellos, puede quedarles la duda del saber por qué.

Solamente una alumna valida el resultado, aunque el profesor interpreta que es validado por todos los alumnos.

57. ***Profesor:*** *¿Y si hubiera sido el numerador de segundo grado y el denominador de tercero?*

58. ***Alumno*** [Julio]*: Sería cero.*

Ahora el profesor repasa las propiedades que ya ha tratado y pregunta por un caso en el que el numerador es de menor grado que el denominador.

Un alumno responde a la demanda del profesor, pues no tiene más que recordar este caso para dar la respuesta correcta.

A lo largo de esta configuración, el docente ha utilizado los estados de regulación y asignación, mientras que los alumnos han utilizado los estados de formulación, recepción y aceptación.

Como puede observarse, a lo largo de las resoluciones de estos casos de límites, el profesor ha utilizado la configuración instruccional de referencia dialógica, respetándose en ella el momento de exploración, aunque los procesos de formulación y de validación se construyen entre el profesor, algunos alumnos determinados y el resto de la clase. En algunas ocasiones, además, ha surgido la configuración instruccional personal, al implicarse al alumnado en la resolución del problema sin la intervención directa del docente.

Unidad de análisis 8: Funciones Irracionales.

Se produce ahora una nueva unidad de análisis, usando el profesor la técnica cronogenética de cambio de fase, al pasar a estudiar los límites de las funciones irracionales.

59. ***Profesor:*** *Que tanto nos gustan y tienen una raíz muy graciosa. En principio no deben ofrecer ninguna complicación, porque tienen un comportamiento como hasta ahora. Lo único es que a veces se presentan ocasiones en las que el límite no tiene sentido, sobre todo con los índices pares de las raíces. Por ejemplo, f(x)=* $\sqrt{1+x}$. *¿Cuál es su dominio?*

La primera acción del profesor es llamar la atención de los estudiantes sobre el tipo de funciones que van a tratar, ya que es consciente de la fama que arrastran estas funciones desde que se comienzan a estudiar. La frase que utiliza para la introducción de las funciones irracionales busca atraerlos hacia las mismas para que el proceso de estudio no sea muy complejo (*que tanto nos gustan y tienen una raíz muy graciosa).*

La segunda acción, que complementa a la anterior, es un comentario acerca del comportamiento de estas funciones enfatizando que no tienen diferencia con las estudiadas hasta ahora, insistiendo en este hecho como para que no resulten complicadas a los alumnos.

La tercera acción es poner un ejemplo de una función irracional de índice par, para analizar su dominio y estudiar la posibilidad de si existe límite, o no, en $+\infty$ o en $-\infty$, dependiendo del mismo.

Así, una vez propuesta la función, la última acción es preguntar por el dominio de la misma, concepto ya estudiado en el tema anterior y que se supone todos deben conocer.

El profesor continúa con el proceso dialógico, buscando la devolución del problema a los alumnos. Utiliza la técnica cronogenética de la ralentización.

60. ***Alumnos****:* [Ninguno lo sabe excepto Mª Lucía, que es la que responde]. *Intervalo desde –1 hasta infinito.*
61. ***Profesor:*** *¿El –1 entra?*
62. ***Alumna****: Sí, en general.*

Sorprendentemente, sólo una alumna lo conoce, pues es ella la que asume la responsabilidad de responder oralmente, ante el silencio mostrado por el resto de sus compañeros. El profesor le pide una matización sobre el intervalo y ella responde correctamente ante el asentimiento del docente. Como es un concepto ya estudiado anteriormente, el profesor no se detiene a dar más explicaciones del por qué de este dominio, esperando que los alumnos terminen asumiendo la respuesta dada por su compañera.

Vuelve a darse en el docente un fenómeno consistente en aceptar el saber de todos los alumnos por medio de la contestación de una única alumna.

63. ***Profesor:*** *Hay que cuidar mucho estos casos, porque* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}=+\infty$. *Es fácil ver que es infinito, pero imaginaros* $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x}$. *Como veis no existe. Le daré un pescozón al que me haga la pregunta, ¿por qué? Porque no hay función. ¿Cuál es la imagen de –5? No existe.* [El profesor tacha el límite anterior].

El profesor llama la atención sobre el cuidado que hay que tener con estas funciones a la hora de calcular según qué límite. Analiza el límite en $+\infty$, dando el resultado directamente, sin más explicación (*es fácil ver que es infinito*) y plantea, a continuación, su límite en $-\infty$, que también resuelve obviamente (*como veis no existe*).

El profesor está tan seguro de la transparencia de estos resultados, que se atreve a comprometer a los alumnos en un tono tajante, pero a la vez, emotivo y cariñoso sobre la seguridad de estas afirmaciones (*le daré un pescozón…*). A continuación, el profesor confirma la acción tachando el límite en $-\infty$, prueba de que no deben plantearse su existencia.

Se echa en falta una técnica cronogenética de confrontación que hubiera aclarado seguramente para todos los alumnos la ausencia de límite.

A lo largo de esta configuración, el profesor ha movilizado los estados de motivación y evaluación y los alumnos, los de recepción y formulación.

Unidad de análisis 9: Tipos de indeterminaciones con raíces.

Pasamos a describir la última de las unidades de análisis en que se descompone esta segunda sesión, en la que se tratará la indeterminación más importante que se puede presentar en un límite con funciones irracionales, es decir, $(+\infty)-(+\infty)$.

64. ***Profesor:*** *Imaginaros* $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$. *Yo hago los límites de la primera y segunda raíz y los resto. Si fuera 8 – 5, el resultado sería 3, pero aquí es más infinito en los dos casos: luego queda* $(+\infty)-(+\infty)$. *¿Qué operación surge?*

La primera acción del profesor es plantear un caso concreto de límite en $+\infty$ y, a la vez, utilizar una de las propiedades de límites que, hasta ahora no ha enunciado, pero que la considera trivial, a saber, el límite de una diferencia es la diferencia de los límites. Aún a sabiendas de que no va a esperar respuesta de los alumnos, el profesor pregunta por la operación a que dan lugar los límites de cada una de las funciones que componen esta sustracción. Simplemente hace una pregunta que él mismo contestará en la línea siguiente.

Al no utilizarse la tabla de variación, se elude la técnica de la confrontación para hacer emerger el saber.

65. ***Profesor:*** $(+\infty)-(+\infty)$ *INDETERMINACIÓN* [en rojo fuerte]. [Como los alumnos se quedan extrañados, dice a continuación]: *¡Ojo!, ¿y* $(-\infty)+(+\infty)$ *?*

El profesor institucionaliza esta nueva indeterminación, con la correspondiente extrañeza de los alumnos, pues bien se podría pensar que fuera cero, aunque él no da lugar a que los estudiantes conjeturen sobre posibles resultados de esta nueva "operación". De manera inmediata vuelve a expresar esta indeterminación de otra forma, para ver si los alumnos han captado bien la idea de este formato de indeterminación, y pregunta por su valor.

Se utiliza una topogénesis descendente al cambiar hacia la lección magistral. Se echa en falta técnicas cronogenéticas adecuadas como las de ralentización y confrontación.

66. ***Alumnos****: Indeterminación.*

Como los alumnos están atentos y siguen bien las explicaciones del profesor, responden adecuadamente, aunque pensamos que aún no han tenido ocasión de valorar el por qué de esta indeterminación ni su importancia. Parece como si el profesor quisiera ir dando recetas paso a paso, sin ver en su conjunto lo que se pretende.

67. ***Profesor:*** *Estas indeterminaciones lo son porque no sabemos lo que valen estas expresiones.*

La acción del profesor es comentar de nuevo qué quiere decir una indeterminación, por si los alumnos no habían recordado su significado. Cabe decir que a los alumnos les cuesta trabajo darle sentido a esta indeterminación ya que para muchos de ellos, al tratarse de una sustracción de dos elementos iguales, debería dar cero.

68. ***Profesor:*** *Pensad que más infinito y menos infinito no son números, luego no tiene por qué dar 0. En estos casos vamos a recordar una de las técnicas que ya tenemos: al racionalizar ¿qué se hacía?*

La primera acción es de recuerdo de que los infinitos no son números, por lo que ya se pierde el sentido de la operación para dar cero. La segunda acción es preparar el camino para operar el límite propuesto en 64, volviendo de nuevo a implicar a los alumnos en recordar una de las tareas que surgen cuando hay que racionalizar una fracción.

69. ***Alumnos****: Multiplicar por el conjugado del denominador.*

Los alumnos responden a la demanda del profesor.

70. ***Profesor:*** *Luego* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

El profesor escribe en la pizarra el paso que acaban de comentar, multiplicando y dividiendo por el conjugado de esa función, aunque en este caso no ha explicado la idea de conjugado para esta expresión. Es un concepto que considera transparente y por el que ningún alumno pregunta.

71. ***Alumnos****:* [Algunos dicen que hay que simplificar (con lo que se volvería a lo mismo)].

En los alumnos surge una idea que se reitera cuando se utiliza este recurso, como es la de simplificar la fracción para volver al punto de partida. Parece que el profesor no da mucha importancia a esta acción ya que él sigue con el proceso de cálculo.

72. ***Profesor:*** *¿Por qué lo hago? Para poder operar. ¿Qué operación puedo hacer? Más por menos...*

La acción del profesor es justificar el por qué de este recurso (*para poder operar*) y deja a los alumnos la posibilidad de que recuerden una de las frases más utilizadas en las operaciones polinómicas: "más por menos igual a diferencia de cuadrados".

73. ***Alumno**: 1 + x - x.*

Un alumno no sólo no termina la frase que el profesor había empezado, sino que da el resultado del numerador, una vez operados los cuadrados.

74. ***Profesor:*** [Aclara y los alumnos ven que el numerador es 1].

Al surgir entre los alumnos algunas dudas sobre la expresión dada por su compañero, el profesor se ve obligado a aclarar el resultado hasta que los alumnos asienten sobre el mismo.

75. ***Profesor:*** *Para mañana perseveráis sobre lo que vale* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$. *Ahora una invitación: página 222, el 14 y el 15. Página 225, el 17. Solamente.* [Cada ejercicio tiene muchos apartados y al darse cuenta los alumnos se produce al final una situación jocosa].

Por falta de tiempo, el profesor deja como tarea para el día siguiente la terminación del límite y propone otro ejercicio del libro, a modo de "invitación". Para llamar la atención de sus alumnos, enfatiza que sólo les propondrá un ejercicio de límites, pero cuando los alumnos se dan cuenta de que consta de muchos apartados, la clase termina con una cierta algarabía, como dando a entender que los alumnos han aceptado la broma de su profesor.

Los estados del profesor para esta unidad han sido los de asignación, evaluación y regulación, mientras que los alumnos han movilizado los de recepción, formulación, recuerdo y aceptación.

5.5.3. Trayectoria Instruccional de la 3ª sesión

Nos situamos ya en la tercera sesión, en la que se prosigue con el cálculo de límites de funciones continuas y definidas a trozos, aunque el concepto de función continua no se ha estudiado todavía y los alumnos pueden entender *función continua* como cualquier función de las estudiadas hasta ahora.

La sesión se ha dividido en seis unidades de análisis, que se pasan a describir:

Unidad de análisis 1: Límite de una función continua en un punto.

0. ***Profesor:*** *Hasta ahora hemos visto el límite en el infinito, lo que nos ha llevado a una idea agradable de asíntotas.*

La acción del profesor es comentar lo visto hasta ahora en las dos sesiones anteriores, pero la síntesis que hace en este comentario tan breve no es muy afortunada porque el alumno puede entender que el límite en el infinito lleva asociado necesariamente la aparición de asíntotas, tanto verticales como horizontales, ya que el docente no especifica más su afirmación. Podemos, pues, afirmar que el profesor conduce a los alumnos al conflicto semiótico siguiente: cuando se estudia el límite en el infinito, entonces aparecen asíntotas.

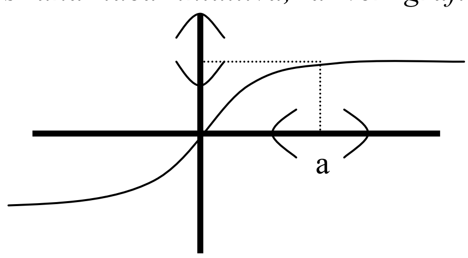
De todas formas, sigue intentado mantener la atención y la implicación del alumnado en la tarea, haciendo ver que este estudio es muy asequible para los alumnos y que no se pueden desanimar (…*idea agradable de asíntotas*).

1. ***Profesor***: *Hoy vemos el límite en un punto. Dada y = f(x) hay que hallar* $\lim_{x\to a} f(x)$.

La acción del profesor es plantear la tarea que toca a partir de ahora, aunque no entendemos por qué ha titulado la cuestión a tratar como “límite de una función continua en un punto”, cuando aún no va a abordar la continuidad de las funciones. El alumnado se puede crear una concepción de *continuidad* que más tarde no se ajuste a la realidad.

El profesor, que a largo de sus clases tiene acostumbrados a los alumnos a utilizar una técnica de enseñanza en la que trata con extensivos y luego generaliza a intensivos, cambia su discurso comenzando la explicación directamente con un intensivo. Es decir, utiliza una técnica cronogenética de aceleración para llegar rápidamente a la definición de límite en un punto.

2. ***Profesor:*** *Veremos una idea intuitiva, a ver gráficamente en qué deriva. Un esquema:*



De nuevo, el planteamiento comienza con un esquema gráfico para comentar la idea de límite en un punto, aunque, por el dibujo, se desprende que quiere plantear el concepto de entorno en un punto, cuando tampoco lo ha desarrollado anteriormente.

El profesor, en su discurso, utiliza términos que son confusos para los alumnos, como es el caso de "*idea intuitiva*", cuando está usando intensivos.

3. ***Profesor***: *El valor es...*
4. ***Alumnos:*** *f(a).*

Ante la pregunta que realiza el profesor debemos suponer que está señalando el valor de "a" que ha marcado en el eje de abcisas, siguiendo con el dedo hasta llegar al eje de ordenadas, porque si no es así no entendemos cómo los alumnos responden correctamente a su demanda, por muy acostumbrados que estén a trabajar con gráficas de funciones.

De forma implícita, el profesor está diciendo que se necesita que exista f(a) para poder hablar de límite. Es decir, introduce otro conflicto semiótico: si hay límite, entonces la función es continua.

5. ***Profesor**: ¿Qué ocurre con una serie de valores muy próximos tanto a la derecha como a la izquierda? Las imágenes, ¿qué pasa con ellas?*

La primera acción es plantear una pregunta expresada incorrectamente, tratando de introducirles en la idea de entorno, ya que no especifica que se trata de valores a la derecha como a la izquierda del valor que ha seleccionado como "a". Pensando en la transparencia del concepto, su segunda acción es preguntar por las imágenes de estos puntos en relación con f(a).

Cabe la posibilidad de que parte del alumnado no sepa interpretar el sentido de estas preguntas porque da la impresión de que la presentación que hace el docente del concepto se ha realizado de una forma un tanto rápida, presionado, tal vez, por la falta de tiempo de enseñanza ya que queda muy poco para acabar el curso y muchos contenidos por desarrollar.

6. ***Alumnos:** Se acercan a f(a).*

Algunos alumnos responden a la demanda del profesor y otros muchos ratifican la respuesta una vez que la han oído de sus compañeros. El tiempo de que se dispone hace que el profesor aproveche la respuesta de esos alumnos para concluir la explicación.

7. ***Profesor**:* [Da valores separados por una centésima, una milésima...]. *Las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera.*

La acción del profesor es señalar valores muy cercanos al valor de "a" para analizar el comportamiento de las imágenes de estos valores, siempre desde un punto de vista gráfico y prescindiendo de una tabla de variación numérica, con la dificultad añadida de "comprobar" la afirmación posterior de *"tan cerca como yo quiera"* que tanto se repite en el trabajo con límites. Además, no resulta lógico que se den valores concretos si no se sabe cuánto vale a.

8. ***Profesor**: ¿Cuál es la diferencia de los valores con "a"?*

La acción del profesor es preguntarles por la relación antes descrita del "tan cerca como yo quiera" respecto al valor "a", e inducirles que la diferencia también se hará tan pequeña como se quiera. La dificultad de este razonamiento estriba en que todo lo está tratando con valores genéricos en los que es imposible analizar la idea de aproximación sin contar con una tabla de valores que haga más explícito este comentario.

El uso de intensivos dificulta la comprensión del objeto matemático "tan cerca como yo quiera".

9. ***Alumno*** [Luis]*: Infinitamente pequeña.*

Un alumno parece darse cuenta de esta idea de aproximación y contesta correctamente, utilizando una expresión demasiado precisa como para que el profesor no haya sacado partido de ella comentándola más explícitamente.

10. ***Profesor****: Una forma de decir "estar muy cerca" es ésa: si* $x\text{-}a \longrightarrow 0$ *implica f(x)-L...*

El profesor pretende conducir a los alumnos a la idea de que unos valores muy próximos también se pueden estudiar desde otro punto de vista: su diferencia "tiende" a cero. Se deja entrever que el profesor quiere introducir la definición de límite de una función en un punto y les está presentando distintas "partes" de esta definición que, más adelante, intentará enlazar en la misma.

11. ***Alumnos***: [Dudan en lo que les pasa a las imágenes. No lo ven. Dicen f(a). Uno sólo dice 0].

Una prueba de que el concepto que se está tratando no es nada transparente es que los alumnos no saben encontrar el significado de lo que pretende el profesor con estas preguntas y aquí lo demuestran con sus dudas y errores. Parece que están pidiendo más claridad en la explicación del profesor, pero éste no termina de observar dicha demanda. Sólo hay un alumno que responde correctamente, pero ni siquiera enfatiza su respuesta.

Se observa cómo la técnica cronogenética de la confrontación no ha funcionado.

12. ***Profesor**: Si tomo valores de x tan cerca de a como yo quiera, las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera, pero pueden estar antes o después.*

El profesor no atiende a la demanda de los alumnos sobre una mayor claridad y da por hecho de que todos están de acuerdo con lo expresado por uno solo de ellos, con lo que sigue su guión de considerar ahora que esas diferencias puedan ser positivas o negativas, comentario que puede hacer que los alumnos terminen por no ver el sentido a la línea de explicación que el profesor ha utilizado.

Da la impresión de que el profesor quiere introducir un concepto de forma brusca y rápida, provocando en los alumnos el que no sepan seguirle como lo han hecho hasta ahora, por lo que se podría estar produciendo una ruptura del contrato didáctico que haga que la motivación del alumnado decaiga.

Una de las confusiones viene dada por no haberse definido, mediante prácticas, el entorno de un punto. Es decir, hay un conflicto semiótico: utilizar un objeto matemático sin haber realizado prácticas con el mismo.

13. ***Profesor**: Si x es más pequeño que a, x-a será negativa. Pero si tomo valor absoluto:*

$|x-a| \to 0 \implies |f(x)-L| \to 0$. *Ya da igual.*

La acción del profesor es proponer la solución de evitar diferencias negativas utilizando el valor absoluto, institucionalizando una implicación fundamental en la definición de límite, aunque el comentario que hace al final es muy significativo: ya da igual que las diferencias sean del signo que sean, o da igual que los alumnos hayan, o no, entendido el concepto (perece ser consciente de lo poco fructífera que ha resultado su exposición).

Se da una topogénesis descendente al utilizar la clase magistral, por medio de una técnica cronogenética de aceleración.

14. ***Profesor***: *El límite de f(x) es un valor L, cuando se verifica: en un entorno de a con todos los valores de x de ese entorno, ¿qué les pasa a sus imágenes? Pues que las f(x) estarán en un entorno de L.*

Se trata de una definición intuitiva de $\lim_{x \to a} f(x)$, que no tiene en cuenta el término "tan cerca como quiera".

En esta acción del profesor se ratifica lo anterior: ha tomado conciencia de que no va a dar una definición rigurosa de límite en un punto, dado el "despiste" que su exposición ha creado en la mayoría del alumnado, enunciando sin rigor lo que él ha querido tratar y que no ha conseguido.

A lo largo de esta unidad de análisis los estados movilizados por el profesor han sido los de asignación, regulación y evaluación, mientras que por la parte discente se han movilizado los de recuerdo, recepción, formulación y exploración.

Unidad de análisis 2: Ejemplo del cálculo del límite de una función continua.

15. ***Profesor***: *¿Cómo se plasma en el cálculo lo visto, para* $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+1}$*, que es lo suficientemente complicada como para no intuir la gráfica?*

El profesor presenta una función, a modo de ejemplo, para aplicar lo visto en la unidad de análisis anterior, aunque, como lo visto hasta ahora no ha quedado muy claro, el alumno debe estar dudando si lo que quiere el profesor es construir entornos, o hacer tablas de valores, o calcular límites. Lo que sí le queda claro a los estudiantes es que esta función la van a tratar desde un punto de vista analítico, ya que no es una función conocida por su gráfica.

16. ***Profesor***: *Por cierto, ¿cuál es el dominio?*

Se produce un cambio de fase o bifurcación en las peticiones del profesor, ya que ahora les pide el dominio de definición, cuando en esta sesión no se ha hecho referencia al mismo: el profesor está intentando calcular límites en un punto y ahora solicita el dominio de una función. Entendemos que lo que quiere es movilizar en los alumnos actividades de recuerdo, porque de lo contrario no sería pertinente esta pregunta.

17. ***Alumna*: $\mathbf{R}$**, *porque el denominador no puede hacerse 0.*

Una alumna responde a la demanda del profesor y justifica su respuesta, que es correcta.

18. ***Profesor***: *Imaginaos que me dicen* $\lim_{x \to 2} \frac{2x+4}{x^2+1}$.

Ahora los alumnos saben a qué se refiere el profesor, porque dice lo que pretende conseguir con esta función: el cálculo del límite en un punto. Lo que éste ha hecho hasta ahora es introducir ideas vagas e imprecisas sobre esta cuestión para acabar planteando lo que realmente quiere hacer.

19. ***Profesor***: *¿Cómo empezarías calculando ese límite?*

La pregunta del docente puede considerarse un tanto "osada" ya que no se ha tratado en ningún momento cómo abordar estos límites, aunque se deja entrever que para él es un concepto transparente al preguntarlo de forma tan directa.

El profesor intenta iniciar el proceso dialógico y, sin embargo, utiliza una técnica cronogenética de aceleración, lo cual es una contradicción.

Además, al no utilizar valores numéricos, el profesor conduce al alumno al siguiente conflicto semiótico: el límite para x tendiendo a "*a*" es el valor de la función $f(a)$.

20. ***Alumna***: *Sustituyo el 2 en la función.... bueno yo me entiendo.*

La respuesta de la alumna es verosímil al responder esta trivialidad. De hecho parece que ni ella misma lo tiene claro por el comentario que añade a su respuesta (*...bueno yo me entiendo*) como reflexionando para sí: lo único que puedo hacer es sustituir un valor numérico…

Se confirma el conflicto semiótico anterior.

21. ***Profesor***: *Esta función, ¿tiene algún problema en el 2? No, luego puedo visualizar lo que ocurre en un entorno del 2. Saco con una foto dónde es igual a 2, ahí está claro que hay un valor clave, f (2).*

El comentario del profesor es muy metafórico (*¿tiene algún problema?,…puedo visualizar…,…saco con una foto…*) dando a entender de que, efectivamente, la clave del problema está en calcular la imagen del 2.

22. ***Profesor***: *Pero, ¿vosotros creéis que los valores muy próximos a 2 se pegarán a alguien?*

Vuelve a insistir en la idea de entornos y les invita a visualizar qué pasa en valores muy cercanos al 2, haciendo referencia, posiblemente, al esquema gráfico que planteó en la unidad 2, con el consiguiente uso metafórico del concepto (*...se pegarán a alguien?*), ya empleado en otras ocasiones.

23. ***Alumna***: *A la imagen del 2. Explica, por ejemplo, 1'9999, 2'00001, sus imágenes se acercarán y estarán lo más próximas posibles a f (2).*

La misma alumna responde como él quiere que lo haga, con lo que ha tratado todo este proceso en función de las respuestas de una alumna, prescindiendo de respuestas de otros compañeros por si éstas no eran satisfactorias. Dos consecuencias se extraen de este método: el profesor considera que esta alumna es brillante y el profesor tiene prisa por introducir el método y pasar a hacer ejercicios. El tiempo de enseñanza apremia y eso se nota en la exposición.

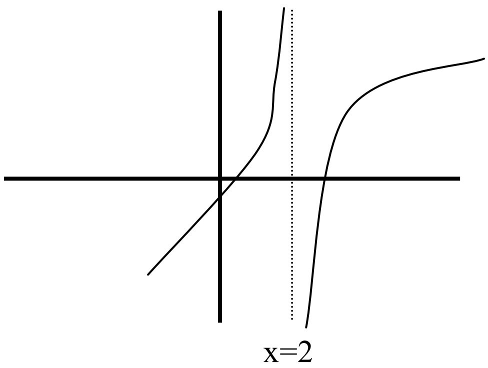
24. ***Profesor****: Luego todo se reduce a calcular las imágenes. El límite será 8/5 y no hay más que hacer.*

Con esta conclusión tan estricta, aunque se afirme para este caso concreto, el profesor, sin quererlo, está insistiendo sobre el conflicto semiótico ya citado: el límite de una función en un punto coincide con la imagen de dicho punto, quizá porque le falta aclarar que, para funciones continuas, el cálculo del límite para x tendiendo a "a" coincide con $f(a)$.

A lo largo de esta unidad, el profesor ha movilizado los estados de asignación, evaluación y regulación, mientras que los alumnos han recurrido a los estados de recepción, argumentación y aceptación.

Unidad de análisis 3: Límites en funciones no continuas.

25. ***Profesor****: Ahora bien, hay situaciones que no controlamos por este método. ¿Recordáis las asíntotas horizontales? Ahora vamos a introducir las verticales:*



En esta unidad de análisis se plantea el cálculo del límite en funciones no continuas, a pesar de que aún no se ha visto este concepto. El profesor pretende que los alumnos realicen una actividad de recuerdo respecto a las asíntotas horizontales para pasar a trabajar las asíntotas verticales, desde un punto de vista analítico, ya que las conocen desde un punto de vista gráfico. Por eso realiza el dibujo correspondiente de una función con una asíntota vertical $x = 2$.

El profesor habla de un método que no está claro para los alumnos: utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación, al pasar a las asíntotas verticales para tratar de explicar la discontinuidad.

26. ***Profesor**: Vamos a plasmar esta idea. Si quiero calcular límite cuando x tiende a 2, la f(x) se comporta de forma distinta por la derecha que por la izquierda.*

El profesor plantea el cálculo de los límites laterales desde un punto de vista gráfico porque sabe que los alumnos ya han trabajado este concepto y lo conocen bien. El problema es que el planteamiento lo introduce gráficamente y los alumnos aún no tienen la idea de cómo afrontar este tipo de límites cuando no tengan presente la gráfica de la función.

27. ***Profesor**: Luego,* $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.

El profesor escribe en la pizarra los límites laterales ya solicitados sin preguntar a los alumnos, como suele hacer cuando realiza cálculos. Posiblemente no ponga en duda que son unos resultados esperados por todos, a la vista de la gráfica.

El profesor usa una topogénesis descendente, al pasar a la lección magistral. Evita una técnica cronogenética de confrontación que posiblemente hubiera sido eficaz. En cambio, utiliza una técnica cronogenética de aceleración.

28. ***Profesor**: ¿Qué ocurre? Con valores todo lo cercanos a 2 como yo quiera, las imágenes se van...*
29. ***Alumnos**: A más infinito en el primer caso.*
30. ***Profesor**: ¿Y por la derecha?*
31. ***Alumnos**: Las imágenes se van a menos infinito.*

La acción del profesor es preguntar a los alumnos por lo que acaba de escribir en la pizarra (lenguaje analítico) para que respondan en grupo a la vista del resultado de cada límite lateral. Es como volver a confirmar lo dibujado en la gráfica y ya respondido por él mismo.

Aparece el conflicto semiótico de que el infinito es un valor numérico, al no utilizarse la tabla de valores.

32. ***Profesor**: Esta es la idea de asíntota vertical. Podemos dar una definición: "la recta x=a es asíntota vertical de y = f(x) sii* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *" y esto es válido también para límites laterales, porque en muchos casos todo lo tendremos que reducir a los límites laterales.* [La definición entrecomillada la escribe el profesor en la pizarra con tiza roja].

El profesor institucionaliza el saber y escribe la definición de asíntota vertical. El alumno debe suponer que éstos son los límites que ahora va a aprender, desde un punto de vista analítico, porque gráficamente ya sabe interpretarlos.

33. ***Profesor**: Vamos a hacer una síntesis con las asíntotas:*
Horizontales: $x \to \pm\infty$ *; f(x) tiende a un número real.*
Verticales: x tiende a un número "a"; f(x) tiende a $\pm\infty$*. Como veis, es al contrario.*

La acción del profesor es confrontar los dos métodos de cálculo de asíntotas ya que son procedimientos que, a priori, los alumnos pueden confundir si no le dan un sentido gráfico al significado de asíntota, distinguiendo entre tendencias de la variable y resultados del límite. Entendemos que el profesor les está dando la "receta" para que no se confundan en los cálculos, ya que ahora no dispondrán de la gráfica.

En esta unidad de análisis, el docente ha movilizado los estados de asignación, regulación y evaluación, y los alumnos, los de recepción y formulación.

Como conclusión, cabe destacar que a lo largo de la unidad de análisis, el profesor no ha citado la discontinuidad. Únicamente se citan las asíntotas, lo cual deja al alumno preguntándose por el significado del epígrafe de esta unidad.

Unidad de análisis 4: Asíntotas con la expresión analítica de f(x).

34. ***Profesor****: ¿Qué ocurre cuando no tenga la imagen gráfica, sino las fórmulas? Vamos a entender una indeterminación nueva:*

35. ***Profesor****: INDETERMINACIÓN:* $\frac{k}{0}$ [Lo escribe en azul].

La primera acción del profesor es reiterativa: les vuelve a recordar que en sucesivos cálculos no van a disponer de la gráfica de la función, que hasta ahora les proporcionaba una información muy útil. La segunda acción es presentar una indeterminación, a saber, $\frac{k}{0}$, expresión que en muchos manuales no se presenta como indeterminación, aunque él la ha preferido tratar así porque no se conoce de antemano el signo del infinito que se obtiene como resultado.

36. ***Profesor****: De ésta sabemos que sólo admite dos posibilidades: más infinito y menos infinito. El trabajo de la indeterminación está acotado. Vamos a poner un ejemplo agradable:* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ *, de la cual vamos a calcular* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+3}{x-1}$*. En un principio, puedo tener la osadía de sustituir, y ¿qué ocurre? 5/0, pero el 1 no está en el dominio, lo que me confirma que esto vale más o menos infinito, con lo que tengo una asíntota vertical.*

La primera acción es recordar las dos posibilidades que se pueden obtener ante esta expresión. La segunda acción es plantear un ejemplo y, como el profesor quiere seguir manteniendo la atención de sus alumnos, dentro del clima de afectividad que se respira en sus clases, utiliza para el ejemplo una expresión que provoque en los alumnos una motivación añadida para realizar estos cálculos (*…un ejemplo agradable*).

Al plantear este límite, el docente toma a su cargo la resolución del mismo como modelo de ejercicio a aprender, aunque sus conclusiones no son muy acertadas, pues relaciona el que 1 no esté en el dominio con una “confirmación” de que el límite resulta infinito. El alumno puede entender que el hecho de que un punto no esté en el dominio de una función puede implicar que el límite en ese punto valga infinito.

Al hablar de las posibilidades de más infinito y menos infinito, utiliza la lección magistral, no dando opción a que los alumnos confronten resultados. Es decir, se usa una técnica topogenética descendente y la cronogénesis de aceleración.

37. ***Profesor***: *Por tanto, tengo que desdoblar en límites laterales:* $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+3}{x-1}$ *y* $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+3}{x-1}$. *¿Cuánto vale el límite para x tendiendo a 1 por la izquierda? Tomemos un número cercano.*

El profesor justifica la realización de límites laterales para abordar esta indeterminación y, preguntando a los alumnos, se propone darles solución.

El profesor utiliza la técnica cronogenética de la confrontación por medio de la ralentización.

38. ***Alumna:*** *Uno negativo.*

Una alumna responde a la demanda del profesor, aunque se observa que no tiene asumida la idea de cercanía (entorno) que el profesor ha intentado inculcarles, ya que contesta un tipo de número que se "aleja" de las peticiones del profesor. Éste parece no sancionar su respuesta.

39. ***Alumno*****:** *No, 0'9.*

Otro alumno parece entender la petición del profesor en cuanto a un número cercano y sanciona a su compañera corrigiéndola.

40. ***Profesor***: *Sustituimos, ¿qué signos?*

El profesor no realiza comentario alguno sobre estas dos respuestas, pero entendemos que se inclina por la del último en responder y se preocupa en seguir su explicación, sustituyendo este valor en la función para observar el signo que se obtiene. Con este modelo de configuración instruccional dialógica, observamos que el profesor sigue interaccionando con el alumnado, pero tomando de éste lo que le interesa en cada momento, admitiendo respuestas de un alumno como si las dictara toda la clase y, sobre todo, no deteniéndose en justificar por qué algunas de ellas son equívocas.

Se origina un fenómeno didáctico que se viene dando con frecuencia, que denominaremos *fenómeno del alumno genérico*: interpretar como genérico de la clase la respuesta de un alumno concreto, basándose el profesor en esto para continuar su discurso.

41. ***Alumnos*****:** *Numerador positivo y denominador negativo.*

Los alumnos entienden que sólo se deben preocupar por obtener el signo del cociente, sin importar el valor numérico concreto que se pueda obtener y responden en esas condiciones.

42. ***Profesor****: Luego, ¿el cociente?*
43. ***Alumnos*****:** *Negativo.*

Paso a paso, el profesor les pregunta y ellos responden. Se ve que ésas son las preguntas que quiere que los alumnos se hagan cuando realicen una actividad de este tipo y por eso las va diciendo una a una.

44. ***Profesor****:* $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x+3}{x-1}$ *es...*
45. ***Alumnos*****:** $-\infty$.

Con esta pregunta, y su correspondiente respuesta, el límite se ha obtenido y los alumnos han ido viendo cómo se ha ido consiguiendo: sustituir un valor muy cercano, análisis de los signos, signo del cociente y signo del infinito que resulta. El profesor ha fraccionado todo este proceso en subtareas para concluir el resultado final.

46. ***Profesor****: Tened cuidado con esta idea. Son valores en un entorno cercano, porque si nos separamos caemos en el error. Hay que acercarse al entorno, ahí es donde se ve el efecto de* $\pm\infty$*, si me separo demasiado me puede salir mal.*

Con esta acción ha llegado el momento de hacer balance final del proceso y dar respuesta a algún planteamiento que se podría pensar a la hora de elegir el correspondiente valor "cercano" para sustituir en la función, como le ocurrió a la alumna que respondió en la unidad 38. El profesor ha retrasado el momento de sancionar aquella respuesta, posiblemente para no distraer la atención de los alumnos en el método a seguir, aunque debería haberlo hecho en ese momento porque hubiera sido más efectivo.

Por otro lado, no justifica el por qué deben ser valores tan cercanos, se limita a decir que "*si me separo demasiado me puede salir mal*", pero no da justificación alguna a ese argumento, echándose en falta algún esquema gráfico que lo complemente, o bien el uso de valores numéricos.

47. ***Profesor***: *¿Y éste:* $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$*, hermosas?*

La acción del profesor es plantear un nuevo límite lateral, procurando no perder la atención de los alumnos, por lo que acompaña la pregunta con una pequeña broma (llama a toda la clase *hermosas*).

El profesor intenta la devolución del problema mediante el uso de un halago bromista.

48. ***Profesor***: *Pensáis en 1'1, el numerador positivo y denominador positivo, implica positivo. ¿Hacia dónde va a ir ahora?*

Como el método ya se ha perfilado en el caso anterior, el profesor dice en voz alta lo que se supone que deberían pensar los alumnos, es decir, quiere preguntarles por el proceso a seguir, pero él mismo responde los pasos intermedios para preguntar por el resultado final.

49. ***Alumnos*****:** *A más infinito.*

Los alumnos responden correctamente porque el profesor se ha encargado de que el límite no haya supuesto ninguna traba y la respuesta final se haya reducido a pensar en un infinito con signo positivo.

50. ***Profesor****: Otro detallito, ¿podemos ya decir que tiene una asíntota vertical?*

Ahora el profesor quiere relacionar el cálculo que han realizado con la aparición de asíntotas verticales. La reflexión del profesor viene a decirles: cuando en un límite se obtienen estos resultados, aparecen las asíntotas verticales, que es otra forma de decir que para calcular las asíntotas verticales hay que proceder de esta forma. A los alumnos les debe haber quedado claro que este "detallito" lo deben tener en cuenta.

51. ***Alumnos:*** *Sí.*

Los alumnos responden afirmativamente porque el profesor les ha conducido a esta conclusión. Parece que, en el límite, la expresión $\frac{k}{0}$ es la que da lugar a las asíntotas verticales.

52. ***Profesor****: La asíntota vertical es x = 1.*

El profesor no quiere perder el tiempo pensando que algún alumno aún no lo tenga claro y da él la respuesta a esta asíntota. Si la hubiera preguntado, podría encontrarse con respuestas que hubieran exigido un mayor tiempo de enseñanza, algo a lo que él no estaba dispuesto. Es decir, utiliza una topogénesis descendente, pasando del proceso dialógico a la lección magistral, por medio de la técnica cronogenética de la aceleración.

53. ***Profesor****: ¿Y para la asíntota horizontal, qué hacíamos? Calcular el límite cuando x tiende a infinito. ¿Alguien se atreve?*

En su afán por relacionar conceptos, pregunta ahora por el método para calcular asíntotas horizontales, pero como no quiere respuestas erróneas, él mismo responde cómo hacerlo. Lo que sí deja a la responsabilidad de los alumnos es el resultado del límite que acaba de plantear, pensando que es una tarea cómoda que ya realizaron en la sesión anterior.

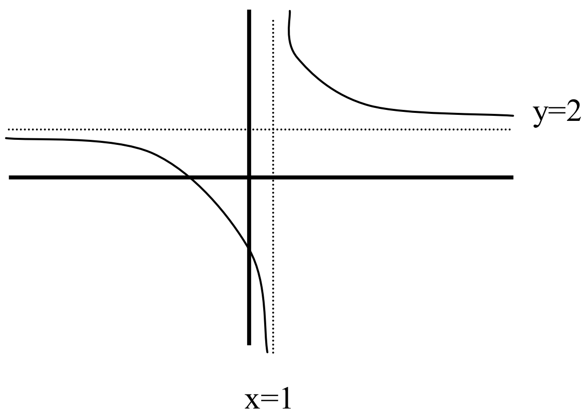
54. ***Alumnos:*** *2.*

Los alumnos responden correctamente, como era de esperar, ya que la función es un cociente de polinomios de primer grado y el cálculo del límite no exigía ninguna operación.

55. ***Profesor****: Asíntota horizontal y = 2.*

Ante la respuesta del límite, el profesor da la ecuación de la asíntota sin dar la opción a que los alumnos se pronuncien sobre ella.

56. ***Profesor****: Fijaos cómo con el conocimiento de las asíntotas podemos fácilmente encontrar la gráfica de la función. El 1 es como si fuera un tabique negro. Podría hacerse una pequeña tabla de valores, luego sería la gráfica:*



En esta unidad el profesor relaciona directamente el cálculo de las asíntotas de una función con su representación gráfica, dado que la información que proporcionan aquéllas puede resultar suficiente para esbozar una gráfica, pero no en todos los casos y, por eso, debería haber sido más explícito en su comentario. A destacar la metáfora que utiliza para denominar a las asíntotas verticales (*el 1 es como si fuera un tabique negro*) y que da la posibilidad de plantear una tabla de valores para delimitar mejor este esbozo gráfico, aunque no lo hace, como no lo ha hecho a lo largo de toda su exposición. Es claro que el profesor huye de las tablas de variación numérica debido, posiblemente, a que resulta un procedimiento lento de verificación, cuando el alumno puede "creerse" los resultados sin llegar a comprobarlos.

Es decir, el profesor, aunque utiliza el proceso dialógico, usa la topogénesis descendente con frecuencia, por medio de la técnica cronogenética de la aceleración, sin contar con la técnica de la confrontación.

57. ***Profesor***: *¿Vista? En este tipo de funciones, donde colocar las asíntotas es fácil, la gráfica puede hacerse fácilmente.*

El comentario del profesor es muy significativo: todo es muy fácil, calcular las asíntotas, dibujarlas y esbozar una gráfica. Parece como que, a fuerza de repetirlo, quiera convencer a los alumnos de que están ante un tema de Matemáticas muy fácil, cuando la realidad, a posteriori, demuestra lo contrario.

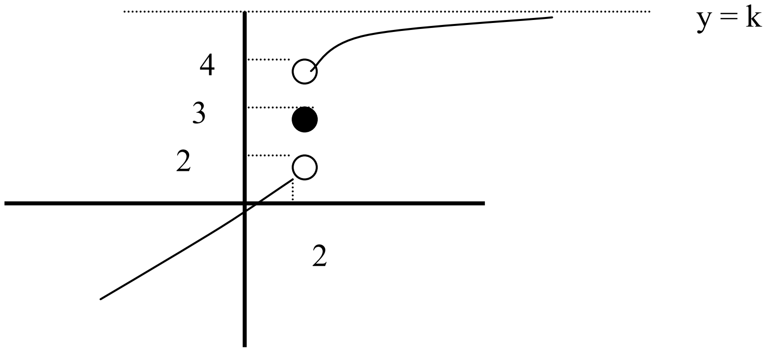
58. ***Profesor***: *En el* $\lim_{x \to a} f(x)$ *cuando no hay problemas en a, es f(a), y cuando no existe f(a) surge lo de las asíntotas verticales.*

La conclusión del profesor se considera muy osada: quiere volver a dar "recetas" de cálculo de límites de funciones en un punto refiriéndose sólo a los aspectos que acaban de estudiar, pero el acabar generalizando estos cálculos confunde al alumnado, sobre todo, cuando estudien las funciones a trozos o se les presente la indeterminación $\frac{0}{0}$, que aún no han estudiado. El profesor introduce un conflicto semiótico: cuando no existe f(a), hay asíntotas verticales.

En esta unidad de análisis, el profesor ha movilizado los estados de asignación y regulación, mientras que los alumnos, los de recepción, aceptación y formulación.

Unidad de análisis 5: Límite de una función definida a trozos, gráficamente.

59. ***Profesor***: *Primero vamos a analizar la idea gráficamente y luego sin usar la gráfica, analíticamente.*



La acción del profesor es planificar el estudio del límite en una función a trozos, desde los dos puntos de vista conocidos: a partir de su gráfica y a partir de su fórmula. Para ello construye la gráfica de una función y espera sacar consecuencias de ella, aunque todavía no ha enunciado el límite que quiere proponer.

Como los alumnos han trabajado reiteradamente las gráficas de funciones, el profesor, a continuación, les va a realizar una serie de preguntas sobre la que ha dibujado, aunque esto lo separe un poco del objetivo de calcular el límite en un punto. (El profesor pretende calcular el límite de esta función para $x \to 2$, como más tarde planteará, pero, en su afán por realizar actividades de recuerdo, va a desaprovechar la oportunidad que le brinda esta gráfica de calcular los límites en $+\infty$ y $-\infty$, ya que aparece una asíntota horizontal sólo en un sentido y no lo va a mencionar a lo largo de toda la unidad de análisis).

El profesor utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación para atender aspectos de la función que no son el cálculo del límite.

60. ***Profesor***: *Dominio de f =* $\mathbf{R}$. [Él mismo contesta]. *¿Y f(2)?*

La acción del profesor se centra en calcular el dominio de definición de la función, aunque él mismo lo responde, pensando que se trata de una cuestión trivial. Lo que sí deja para los alumnos es el cálculo de f(2), al tratarse de una función a trozos, una de cuyas ramas es sólo el valor numérico en este punto.

El profesor usa el proceso dialógico mediante la técnica cronogenética de la ralentización.

61. ***Alumnos*: *3.***

Los alumnos responden correctamente, como era de esperar por la simplicidad de la cuestión.

62. ***Profesor***: *¿Y el recorrido?*

63. ***Alumnos***: $(-\infty,2)\cup\{3\}\cup(4,k)$. [El profesor lo escribe así en la pizarra, una vez dicho por los alumnos oralmente].

Ahora el profesor pregunta por el recorrido que, en este caso, no es trivial y exige una mayor atención sobre el comportamiento de la gráfica. Los alumnos responden correctamente, visto lo cual se puede desprender que el trabajo gráfico de las funciones está bien controlado por los mismos. La expresión analítica del recorrido la transcribe el profesor en la pizarra, por si algún alumno encuentra dificultad en expresar el recorrido por intervalos. Puede ocurrir que haya alumnos que entiendan perfectamente de qué recorrido se trata y luego no sepan expresarlo correctamente.

64. ***Profesor***: *Antes del 2 y después, la f(x) se comporta de distinta manera. Si me coloco antes, estoy en un trozo y si voy después estoy en otro.*

La acción del profesor se centra en comentar la función f a la vista de la gráfica, haciendo hincapié en lo que ocurre antes y después del valor x = 2, comentario que, como suele ocurrir cuando el profesor se expresa, goza de un alto contenido metafórico (*…se comporta de…, …si me coloco…, …si voy después…*).

65. ***Profesor***: *Esta idea me lleva a:*

$$\begin{tikzcd} & \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) \arrow[ur] \arrow[r] & \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{tikzcd}$$

Con el comentario anterior, el profesor les conduce a pensar que, ante un comportamiento así, se deben calcular los límites laterales, realizando el esquema anterior y dando a entender que el límite que quieren calcular (que hasta ahora no lo había propuesto ni mencionado) debe desdoblarse a su vez en el cálculo de los dos límites laterales entorno a dicho punto. Se observa cómo el profesor tiene muy claro lo que busca, lo introduce paso a paso, pero no suele ser explícito cuando comienza un proceso de este tipo y los alumnos no saben qué van a hacer hasta que no llega el momento de resolverlo.

66. ***Profesor****: ¿Para x tendiendo a 2 por la izquierda?*

El profesor pregunta por un límite lateral refiriéndose sólo a la tendencia del punto por la izquierda (no dice que quiere calcular un límite) y señala la rama que va a dar la solución.

67. ***Alumno*** [Emilio]**:** *2, porque las imágenes se acercan a 2.*

Un alumno acepta la devolución y responde dando, incluso, una justificación del resultado, muy pertinente, en este caso, ya que el valor de x es 2 y el valor del límite también, con lo que demuestra que tiene claro que el límite se corresponde con valores de las imágenes, no incurriendo en la confusión de ambas variables.

68. ***Profesor****: Votos a favor.*

En su afán por mantener la atención de sus alumnos, somete a "votación" la respuesta de éste, claro elemento motivador para dar la oportunidad a todo aquél que no esté de acuerdo con el valor dado. El profesor evita caer en el fenómeno del alumno genérico.

69. ***Alumnos*****:** [Todos].

Todos los alumnos se implican en la pregunta y responden afirmativamente, con lo que, como ya ha hecho en otras ocasiones con este mismo método, fomenta la participación de la clase.

70. ***Profesor***: *¿Y para x tendiendo a 2 por la derecha?*
71. ***Alumno*** [Emilio]: *Se aproxima mucho al 4.*

Ahora el profesor realiza la pertinente pregunta y el mismo alumno responde, aunque de una manera menos explícita que antes (*se aproxima…*) como no estando seguro de la respuesta. El profesor no lo sanciona y, de nuevo, se dirige a la clase.

72. ***Profesor***: *Votos a favor.*
73. ***Alumnos*****:** [Todos].

Con la implicación de todos los alumnos, se considera la respuesta correcta, con lo que se puede entender que la respuesta a un límite es una aproximación. El profesor debería haber aprovechado el momento para indicar que el límite es 4, y no "una aproximación al 4".

74. ***Profesor***: *Entonces, quiero* $\lim_{x \to 2} f(x)$

Como es lógico, el profesor busca el límite en el 2, y así lo propone. Ahora surge la cuestión que ha motivado toda esta unidad de análisis. Quizá se ha pasado por una introducción muy larga, pero el alumnado habrá aprendido que todo este proceso era necesario para analizar el límite en un punto de una función con estas características, aunque da la impresión de que el profesor está pensando más en el concepto de continuidad (a estudiar en el tema siguiente) que en el propio de cálculo de límites.

75. ***Alumna*** [Yurena]: [Duda, balbucea, se calla].

Una alumna parece ser que quiere intervenir, pero no sabe la respuesta. Su intervención se debe a que, cuando el profesor hace la pregunta, la mira a ella, entendiéndose que es ella quien debe asumir la devolución del problema, aunque su silencio parece revelador de cómo ha seguido la evolución del procedimiento.

76. ***Profesor****: ¿Chari?*

El profesor dirige la pregunta a otra alumna, en vez de lanzarla a toda la clase, que hubiera resultado más fácil. Parece ser consciente de la dificultad del límite a partir de los límites laterales y prefiere dirigirse a alumnos concretos.

77. ***Alumna*** [Chari]: *No tiene, porque no coinciden los límites laterales.*

La alumna contesta correctamente, justificando su respuesta al haber recordado que si los límites laterales no coinciden, el límite no existe. A pesar de ello, al alumno le resulta complejo este tipo de respuestas en nuestra asignatura: "no existir" o "no se sabe" son tipos de respuestas que el alumno no asume con claridad.

78. ***Profesor****: Fijaos qué cosa más curiosa, existen los límites laterales y no existe el límite. Esto es así porque la idea de límite es en el entorno. No hay nada que hacer, o se corresponde la idea con el entorno, o no hay límite.*

El profesor realiza este primer comentario como una "curiosidad", cuando es una cuestión que hay que cuidar porque se puede encontrar en muchos tipos de funciones a trozos. Más que una curiosidad, es un hecho natural y así lo deben entender los alumnos. Trata de que los alumnos superen el conflicto semiótico de que el límite para $x \to a$ es el valor de la función en dicho punto.

El segundo comentario trata de justificar lo anterior, relacionando la idea de límite en un punto con la de entorno, pero al ser términos que no han quedado claros hasta ahora, no da la impresión de que esta explicación les haya resuelto el problema.

El profesor vuelve a caer en el fenómeno del alumno genérico.

79. ***Alumnos*****:** [Surgen comentarios en los que parece ser que algunos creen que existiendo f(a) entonces hay límite].

[Observador]: Subyace un conflicto semiótico: "existe f(a) implica existe limite" y "no existe f(a) implica no existe límite".

Como era de esperar, la justificación no ha quedado clara, ya que en el aula se detecta la extrañeza por este resultado, debido, fundamentalmente, a que al alumnado le cuesta trabajo separar la imagen en un punto con el límite en dicho punto, con lo que el conflicto semiótico al que el observador hace referencia está apareciendo en muchos alumnos del grupo.

80. ***Profesor***: *Puede que la imagen de 2 fuese 4, pero no cambia nada. A la hora del límite, el valor de f(a) es el que menos cuenta.*

El profesor es consciente de este hecho y trata de despejar dudas, simplemente enunciando que el valor del límite y la imagen no tienen nada que ver, asunto complicado cuando la referencia para los alumnos en muchos cálculos de límites es justamente la imagen del punto.

A lo largo de esta unidad de análisis, la trayectoria docente ha seguido los estados de asignación, regulación, motivación y evaluación, mientras que la discente, los de aceptación, formulación, recepción, argumentación y exploración.

Unidad de análisis 6: Límite de una función definida a trozos, analíticamente.

81. ***Profesor***: *Bueno, veamos. f(x)* = $\begin{cases} x^2+1 & x \leq 0 \\ 2x-1 & x > 0 \end{cases}$. *Dos trozos perfectamente conocidos. ¿Uno es...?*

La unidad que ahora se pasa a describir comienza con la propuesta de una función a trozos dada por su fórmula, sin disponer de su gráfica, y como ya ha hecho en otras ocasiones, antes de plantear la cuestión principal trata de describir qué tipo de función ha presentado para que los alumnos se familiaricen con ella. Así, comienza preguntando qué trozos la componen.

El profesor utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación para realizar un estudio de la gráfica previo al límite.

82. ***Alumnos*****:** *Parábola.*
83. ***Profesor****: ¿Otro?*
84. ***Alumnos*****:** *Recta.*

Los alumnos reconocen perfectamente cada uno de los trozos y así se lo hacen saber. Las cuestiones las ha formulado el profesor a toda la clase y, en grupo, se dan las respuestas.

85. ***Profesor****: ¿Dominio?*
86. ***Alumnos*****:** $\mathbf{R}$.

De nuevo, el profesor pregunta por el dominio y la respuesta de los alumnos es unánime. Vuelve a quedar implícito en los alumnos (porque lo pregunta reiteradamente) que deben saber trabajar el dominio de una función, tanto desde un punto de vista gráfico como analítico.

87. ***Profesor****: Vamos a hacer la gráfica: antes del límite podemos hacer la gráfica, damos 45 segundos.* [Algún alumno mira para atrás. Comentarios del profesor conforme observa resultados].

En esta acción se observa una contradicción: el profesor se ha planteado el cálculo del límite en un punto a partir de la expresión analítica de una función, sin conocer su gráfica, pero si ahora se detiene en dibujar la función, los alumnos pueden tomar información de la misma para calcular los límites, con lo que se volvería al punto anterior. Además, no siempre van a poder disponer de la gráfica para tal cometido, según la dificultad de la función a trabajar. El conocimiento de gráficas de funciones en este nivel de primero de Bachillerato es muy limitado.

Como se ha propuesto dibujar la gráfica, tarea fácil en este caso, les apremia con un tiempo muy limitado, 45 segundos, que los alumnos deberían aceptar como una broma, aunque alguno no deje de mostrar su extrañeza por ello. El profesor se desplaza entre los alumnos para observar sus producciones y comentar los resultados.

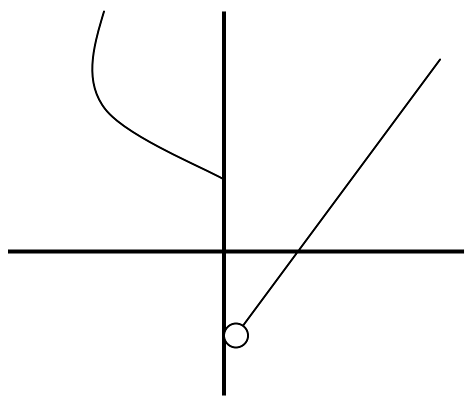
88. ***Profesor****: Procurad que no se haga de noche.*

De nuevo un comentario en tono afectivo, a modo de broma, dirigido a aquéllos que se están demorando en la actividad. También puede quedar patente que lo que él había propuesto como algo trivial no resulte tan transparente en los alumnos. No olvidemos que el dibujar una función a trozos es un problema para muchos, no por el tipo de gráfica que tienen que hacer, sino por el trozo donde la tienen que construir.

89. ***Profesor*** [Mirando cómo lo hace Mª José]: *Bien.*
90. ***Profesor****: Hay dos que la tienen, bien Emilio, bien Antonio. Yurena esto no, piensa en una parábola sola.*

El profesor va sancionando las producciones personales de cada uno, emitiendo palabras de aliento que hacen que los alumnos recobren confianza en lo que están haciendo y se motiven mejor, bien porque la tengan correcta o ayudando con instrucciones en caso contrario.

91. ***Profesor*** [Dibujando la primera rama]*: Vamos a ver, vértice de la parábola (0,1) que está en la rama.*



Recordando acciones de otras lecciones anteriores, el profesor construye el primer trozo de gráfica, correspondiente a una parábola, dando un cierto énfasis en ver si el vértice lo puede situar en este trozo, ya que es una referencia importante para que los alumnos dibujen bien (deben recordar que, antes y después del vértice, la parábola es simétrica). De todas formas, el trozo de parábola acaba justo en el punto que hace de vértice de la misma, caso de estar definida en todo $\mathbf{R}$.

92. ***Profesor*** [Construyendo la segunda rama]*: Le doy 0 aunque no entre, pero empieza inmediatamente después del 0.*

Para dibujar la segunda rama, se plantea la imagen en ésta del 0, ya que es una manera de empezar la parte que ahora toca, sin olvidar que eso hay que especificarlo con un punto abierto, para indicar que dicho punto no está en esa rama.

Ante el comentario del profesor (*...pero empieza inmediatamente después del 0*) algún alumno habrá recordado que no se sabe cuál es el número real inmediatamente después de 0.

93. ***Profesor***: *Para mañana, calcular:* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *;* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *;* $\lim_{x \to +4} f(x)$ *;* $\lim_{x \to -2} f(x)$

La sesión está finalizando y no ha dado tiempo a formalizar toda la tarea que esta función, gráfica incluida, debía dar de sí. Por tanto, propone actividades de recuerdo para que los alumnos desarrollen un trabajo personal en casa, acerca del cálculo de unos límites en los infinitos y en algunos puntos concretos.

94. ***Profesor***: *Ahora la guindilla:* $\lim_{x \to 0} f(x)$. *¿De acuerdo? Tomad algo que ya nos vamos.*

La sesión finaliza con la propuesta del cálculo del límite de esta función donde todos los alumnos podrían esperar: el 0 es el punto en el que la función cambia de definición y era lógico pensar en este punto como el "protagonista" para el cálculo del límite. Además, el comentario del profesor no deja lugar a dudas (*ahora la guindilla*) y la despedida es, también, muy elocuente (*tomad algo…*) reconociendo positivamente el trabajo de la clase durante esta sesión.

A lo largo de esta unidad, el profesor ha movilizado los estados de asignación, regulación y motivación, y los alumnos, los de recepción, formulación y aceptación.

5.5.4. Trayectoria Instruccional de la 4ª sesión

En esta cuarta sesión, última de las sesiones a analizar, se prosigue con el cálculo de límites de funciones y definidas a trozos, dadas, principalmente, por su expresión analítica, con especial hincapié en el estudio de una nueva indeterminación, como es la $\frac{0}{0}$. El planteamiento del profesor es, aparte de corregir la actividad propuesta el día anterior, estudiar la indeterminación $\frac{0}{0}$ desde dos puntos de vista: uno, gráfico, en el que intentará relacionar la aparición de esta indeterminación con la gráfica asociada a esa función (siempre que sea una gráfica asequible a los conocimientos de los alumnos); el otro, analítico, donde intentará que los alumnos dominen técnicas de cálculo que permiten resolver la misma.

La sesión se ha dividido en cuatro unidades de análisis, que se pasan a describir:

Unidad de análisis 1: **Resolución del ejercicio del día anterior.**

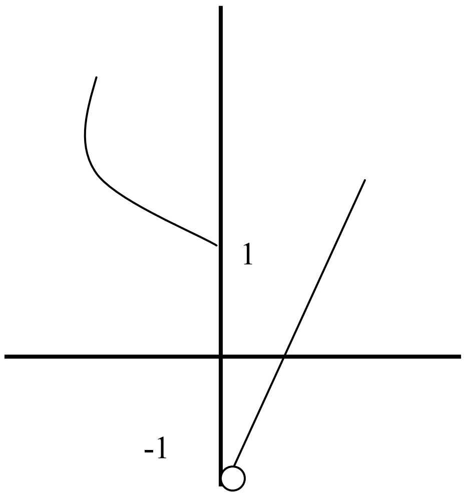
1. ***Profesor:*** *Bueno, vamos con esta emoción. ¿Qué tal la gráfica de ayer? ¿Hemos entendido bien los límites laterales? Teníamos una función muy agradable:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si\ x\leq 0 \\ 2x-1, & si\ x>0 \end{cases}$$

La sesión comienza con la corrección del ejercicio que dejó planteado el día anterior: el cálculo de algunos límites en esta función a trozos. Al encontrarse al principio de una nueva sesión, el profesor trata de dar ánimos a sus alumnos para incentivar sus futuras intervenciones y prueba de ello son sus comentarios nada más empezar la clase (*...vamos con esta emoción,...función muy agradable...*) lo que hace que el estado de ánimo del alumnado frente a esta clase de Matemáticas sea más positivo y optimista.

El profesor trata de poner en práctica la comunicación con una iniciación a la devolución. Intenta, por tanto, utilizar la técnica topogenética de la cooperación.

2. ***Profesor:*** *Recordad siempre las características de cada uno de los trozos.*



Las características de la gráfica de esta función a trozos ya fueron comentadas en la sesión anterior, por lo que ahora el profesor dibuja la gráfica y les invita a que recuerden todo lo que se dijo el día anterior sobre la misma.

Se utiliza la configuración instruccional dialógica.

3. **Profesor:** $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *¿Cuánto vale, Antonio?*

4. ***Alumno*** [Antonio]***:*** $+\infty$.

5. **Profesor:** *¿Y* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$*?*

6. ***Alumno*** [Antonio]***:*** $+\infty$.

Comienza la corrección del ejercicio y el profesor pregunta a un alumno concreto sobre los límites en más y menos infinito. Como la gráfica está dibujada en la pizarra, al alumno no le supone ningún problema dar las respuestas correctas sin tener que salir al encerado para hacer los cálculos analíticos sobre cada una de las ramas. La dificultad del ejercicio sería superior si no se dispusiera de la gráfica, no por el cálculo de los límites en sí, sino por ver a qué rama tendría que dirigir el alumno sus producciones.

7. ***Profesor:*** *¿Y* $\lim_{x\to +4} f(x)$ *?*

8. ***Alumnos****:* S*e sustituye 4 en la función y da 7.* [Comentarios generales de algunos alumnos].

Ahora la actividad se desarrolla en el cálculo del límite en un punto, y varios alumnos asumen la respuesta por sustitución de la variable en la rama correspondiente, aunque no especifican en qué rama han sustituido.

9. ***Profesor:*** *En la rama correspondiente, tanto por la derecha como por la izquierda se me va a pegar a 7, ¿y* $\lim_{x\to -2} f(x)$ *?*

El profesor se ve obligado a especificar aún más cómo ha de hacerse este límite, señalando la rama pertinente y haciendo un comentario que podría hacer referencia a la idea de entorno, que tanto trabajo costó asumir en la sesión anterior, aunque parece dar por bueno el que simplemente se obtenga este límite como el resultado de calcular la imagen en un punto.

Mediante el comentario metafórico anterior, trata de abordar el conflicto semiótico de "*el límite es el valor de la función en el punto*", especificando lo que ocurre a izquierda y a derecha de 4. Sin embargo, el uso del término "se me va a pegar a 7" puede conducir a los alumnos al conflicto semiótico de la ausencia de funciones semióticas que doten de significado a dicho término.

A continuación, pregunta, de nuevo en general, por otro de los límites propuestos.

10. ***Alumnos****:* [Respuestas correctas].

Los alumnos responden correctamente y el profesor no sanciona nada más.

11. ***Profesor:*** *Por último, ¿* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *?*

12. ***Profesor:*** *Hay un cambio de definición de la función, es decir, ¿* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *?*

La primera acción es abordar el último de los límites propuestos, aquél que parecía el más importante y que él denominó como “la guindilla”. En su segunda acción, y para evitar problemas de comprensión posteriores, se adelanta a las respuestas de los alumnos y les hace ver que el cambio de definición de la función en ese punto implica tener que tratar los límites laterales. El profesor les está guiando paso a paso para abordar este límite.

El profesor usa una técnica cronogenética de aceleración para acortar el tiempo de enseñanza, pasando a la técnica topogenética descendente, desde la técnica mesogenética de la estructura dialógica a la lección magistral.

13. ***Alumnos****: 1.*
14. ***Profesor:*** *¿Y* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *?*
15. ***Alumnos****: -1.*

Los alumnos responden correctamente a cada uno de estos límites laterales según las preguntas planteadas por el profesor, lo que supone que no podemos afirmar que si se hubiera propuesto sólo calcular el $\lim_{x \to 0} f(x)$, sin más argumentaciones, hubieran tenido el mismo éxito.

16. ***Profesor:*** *¿Lo veis todos? Todas las imágenes se van a agrupar en el +1 y luego en el –1. ¿Existe límite, entonces, para x tendiendo a 0?*

La primera acción por parte del profesor es corroborar que estos límites han sido comprendidos por todos los alumnos, aunque la forma de preguntar (*¿lo veis todos?*) parece que no invita a que alguno o algunos planteen sus dudas.

La segunda acción es insistir en que los límites laterales han resultado valores distintos, aunque no lo expresa con estas palabras sino con comportamientos de las imágenes, pensando que así les resultará más fácil responder a la pregunta sobre el límite en 0, que hace a continuación.

La no utilización del lenguaje numérico conduce al profesor a hablar de “agrupamiento” de imágenes en +1 y -1, lo que enmascara, una vez más, el término “tan cerca como se quiera”. Es decir, la idea de límite queda sin resolver.

17. ***Alumnos**: No existe límite.* [Acuerdo unánime].

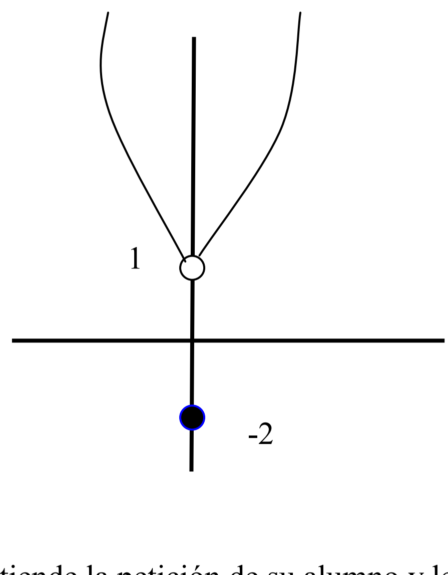
Los alumnos han entendido perfectamente el sentido de este comentario, por si a alguien le quedaba alguna duda, y responden correctamente.

18. ***Alumno*** [Jaime]*: ¿Siempre ocurre esto?*

Un alumno demanda información al profesor sobre si éste es el comportamiento general de las funciones a trozos, pregunta muy pertinente porque las funciones a trozos trabajadas en la sesión anterior daban esta impresión.

La utilización de la técnica mesogenética de la estructura dialógica produce excelentes resultados, al permitir al alumno anticiparse a los diversos casos que pueden presentarse en los límites de funciones definidas a trozos.

19. ***Profesor:** Veamos lo que dice Jaime con otro caso:*



El profesor entiende la petición de su alumno y les plantea otro caso de función a trozos, prescindiendo de su expresión analítica (que siempre es más complicada de trabajar), para estudiarla desde un punto de vista gráfico.

20. ***Profesor:*** *Dominio de f =* $\mathbf{R}$. *¿f(0) ?*

Como hasta ahora, siempre que se plantea una función, la primera acción del profesor es preguntar por el dominio de definición de la misma, aunque él mismo responde para evitar respuestas incómodas.

La segunda acción es preguntar por la imagen del 0, que es un punto aislado.

21. ***Alumnos****: -2.*

Los alumnos, en grupo, responden correctamente a la demanda del profesor, ya que el tratamiento gráfico de las funciones está bien controlado por ellos.

22. ***Profesor:*** *¿Y* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *?*

Como era de esperar, el profesor lanza la pregunta del límite en el punto 0, ya que, como se ha visto, su imagen es un punto aislado y ahora pueden surgir problemas en las respuestas de los alumnos.

23. ***Alumno*** [Luis]*: Vale 1.*

Sólo un alumno acepta la devolución y responde correctamente. El resto parece quedar expectante a la sanción del profesor, ya que no asienten la respuesta del compañero, ni éste explica cómo ha obtenido el resultado.

24. ***Profesor:*** *Lo tendríamos que plantear con laterales, pero en la figura se ve que ambos son iguales, luego sí es 1.*

El profesor explica ahora cómo se debería haber obtenido, aunque no lo desarrolla, porque hace referencia a que la figura lo dice todo y da por hecho que si este alumno lo ha dicho bien es porque así lo habrá pensado, como lo deben haber pensado todos los demás. Nos encontramos ante un nuevo caso del fenómeno que ya describimos como del alumno genérico.

Se pierde la oportunidad de ralentizar la acción para conocer por qué el alumno responde que el límite es 1. Se utiliza, en cambio, la técnica de la aceleración.

25. ***Profesor:*** *Debemos de actuar independientemente de lo que pase en el punto.*

La conclusión que quiere plantear a los alumnos ante este nuevo caso es la de que el límite en un punto es independiente de la imagen de ese punto, y por eso ha propuesto este ejemplo. El profesor ha insistido mucho en este hecho, pero eso no quiere decir que el alumnado lo haya asumido como tal, porque la experiencia, a posteriori, dice lo contrario.

Desde un punto de vista gráfico con funciones a trozos, el profesor podría haber planteado otros casos también muy interesantes: sin haber imagen en el punto, que haya límite en el mismo, o que no haya límite, preparando así el terreno para cuando tenga que estudiar la continuidad en el tema siguiente.

Se echa en falta, pues, el uso de la técnica cronogenética de la determinación del momento propicio para aclarar a los alumnos que el límite no coincide con el valor de la función en el punto.

A lo largo de esta unidad de análisis, el profesor ha movilizado los estados de regulación y evaluación, mientras que los alumnos, los de aceptación, recuerdo, formulación, recepción y demanda de información.

Unidad de análisis 2: Indeterminaciones.

26. ***Profesor:*** *Queda un poco para terminar todo este bloque, veamos una indeterminación muy importante.* [El profesor escribe INDETERMINACIÓN en rojo mate]. *¿Cuántas indeterminaciones conocemos?*

La primera acción del profesor es seguir dando ánimos a sus alumnos: el tema de límites es ciertamente complicado y comienza esta unidad comentando que ya queda poco para acabar, aunque es consciente que queda la indeterminación más importante y así se lo hace ver a todos. El cálculo de límites va muy relacionado con la aparición de indeterminaciones, por lo que, antes de empezar una nueva, les invita a que recuerden todas las que han tratado hasta ahora.

27. ***Alumnos**:* $\frac{k}{0}$.

Curiosamente, la primera que recuerdan es la más atípica de ellas, ya que, como dijimos, muchos manuales no la consideran una indeterminación, al estar "casi" determinado el resultado. Es posible que, para los alumnos, ésta sea la principal porque está directamente relacionada con la aparición de las asíntotas verticales, y ese aspecto de las funciones lo han trabajado con cierta insistencia.

28. ***Profesor:*** *Ésa es una especial que vale* $\pm\infty$.

El profesor les recuerda qué ocurría con esa "indeterminación", como no sintiéndose seguro de si es correcto, o no, llamarla como tal.

29. ***Alumnos**:* $\infty - \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$.

Los alumnos siguen realizando funciones de recuerdo y comentan entre todos las que aún faltan por decir.

Hay que destacar, a modo de mención especial, que la indeterminación $1^{\pm\infty}$ no se encuentra presente en el currículo de Matemáticas en Andalucía, ni en primero ni en segundo de Bachillerato.

30. ***Profesor:*** *Hoy veremos* $\frac{0}{0}$. *Se practica mucho, pues surge en muchos casos al calcular* $\lim_{x \to a} f(x)$.

La acción del profesor es presentar la nueva indeterminación a estudiar, motivando el por qué tienen que hacerlo.

31. ***Profesor:*** *Un ejemplo:* $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ [Con tiza naranja].

Para introducir dicha indeterminación se propone un extensivo, puesto que estas indeterminaciones es mejor verlas en un caso práctico concreto. Se trata de un ejemplo que utilizará para estudiar dicha indeterminación, pero el profesor le quiere dar un cierto énfasis a este trabajo, por lo que plantea este límite con tiza de otro color.

32. ***Profesor:*** *¿Y el dominio cuál es?*
33. ***Alumnos**:* $\mathbf{R}-\{2\}$.

La acción del profesor es plantear la pregunta ya esperada por los alumnos acerca del dominio de definición de esta función. El "ritual" al que tiene acostumbrados a los alumnos con esta pregunta les vuelve a sugerir que es un planteamiento que deben hacerse a la hora de calcular límites, pensando quizá en los buenos efectos que les producirá cuando estudien la continuidad de las funciones. Hay que pensar que el estudio de los límites de funciones en este curso está pensado para su inmediata aplicación en la continuidad de las mismas.

Por este motivo, el profesor utiliza la técnica del cambio de fase para hacer ver la importancia del dominio de la función en el cálculo de límites y, posteriormente, en la continuidad de las funciones.

34. ***Profesor:*** *Pero el que 2 no pertenezca al dominio no tiene que ver con que calculemos el límite. A veces puedo sustituir, pero es un atrevimiento, en este caso aparece* $\frac{0}{0}$*. ¿Alguien puede imaginar un recurso?*

De nuevo hace una primera referencia a que no es ningún problema el hecho de que el punto no esté en el dominio de la función para poder calcular su límite, clara mención de que ahora no van a poder tener en cuenta la imagen del punto para obtener el límite.

La siguiente acción es motivar la aparición de la indeterminación pretendida y, como ya hizo en anteriores ocasiones, les pregunta cómo abordar la misma, quizá para hacerles pensar en el significado que tiene el sustituir una raíz de un polinomio en él mismo.

Se echa en falta la técnica cronogenética de ralentización que permitiría introducir a los alumnos en los límites laterales, para que pudiera conducirlos a la indeterminación 0/0.

35. ***Alumnos****:* [No saben].

Como era de esperar, los alumnos no asumen la tarea porque, al tratarse de un procedimiento nuevo, no se "imaginan" (en términos del profesor) cómo darle solución.

36. ***Profesor:*** *Hay que simplificar.* [El profesor escribe entre corchetes SIMPLIFICAR en tiza amarillo mate].

La acción del profesor es muy directa, ahora no se entretiene en dar más indicaciones o "pistas", les dice simplemente lo que deben hacer y lo enfatiza escribiéndolo en la pizarra con tiza de otro color.

La no utilización de valores numéricos, cercanos a 2, que hubiera aclarado la aparición coherente de la indeterminación 0/0, conduce al profesor a dar una técnica de simplificación bastante alejada de lo que el alumno puede ver.

37. ***Profesor:*** *Si sale* $\frac{0}{0}$ *es porque el 2 es una raíz, por lo que habrá factores comunes y se podrá simplificar, ¿cómo?, descomponiendo en factores. Tendré que recordar: ecuación de 2º grado, Ruffini, sacar factor común, productos notables,...*

La primera acción del profesor es justificar qué quiere decir que salga esta indeterminación y la aparición de factores comunes en los dos términos de la fracción. A pesar de tener ya la "herramienta" para operar esta indeterminación, el profesor es consciente de que este proceso no se destaca por el dominio que de ello tienen los alumnos, por lo que les incita a que recuerden diversos métodos de descomposición factorial para poder llegar al objetivo de la simplificación.

38. ***Profesor:*** *En este caso* $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$.

Antes de cualquier otro comentario, el profesor escribe en la pizarra el resultado de descomponer el numerador y plantea el límite de nuevo, ya preparado para que los alumnos asuman la tarea de dar el resultado.

39. ***Profesor:*** *¿El numerador?*
40. ***Alumnos****: Más por menos.*

A pesar de dar por escrito la respuesta, insiste en la descomposición del numerador y pregunta cómo lo ha conseguido, utilizando una pregunta coloquial (*¿el numerador?*), siendo entendido perfectamente por los alumnos, que responden correctamente con la típica frase que se utiliza al descomponer una diferencia de cuadrados.

41. ***Profesor:*** *Un término cuyo cuadrado es* x^2 *es x, un término cuyo cuadrado es 4, es 2. Entonces al factorizar puedo simplificar: ¿* $\lim_{x \to 2}(x+2)$ *?*

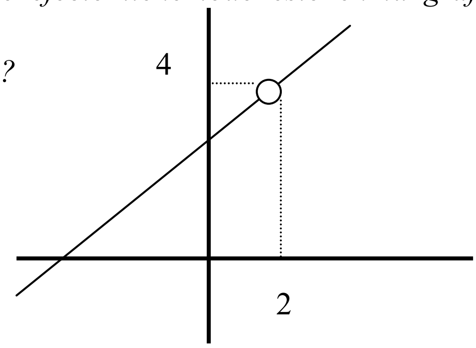
A pesar de que todo ha quedado claro para los alumnos, el profesor vuelve a recordar este tipo de descomposición factorial, dándole un sentido a la expresión "más por menos" que han dicho los alumnos, como siendo consciente de que puede haber alumnos que aún no hayan visto por qué la descomposición es la que figura en el límite. El profesor quiere asegurarse de que todos los alumnos lo comprendan porque sabe que este tipo de descomposición lo deberán utilizar en sucesivos límites con esta indeterminación. Una vez aclarado procede a la simplificación y pregunta por el resultado del límite que queda.

42. ***Alumnos****: 4.*

La respuesta es unánime por parte de todos los alumnos.

A pesar del éxito en la respuesta, pensamos que falta una técnica cronogenética de ralentización para aclarar que este valor es un límite y no el valor de la función en el punto. Es decir, se pierde la oportunidad de abordar la superación del conflicto semiótico de que el límite es el valor de la función.

43. ***Profesor:*** *¿Qué efecto tiene todo esto en la gráfica?, ¿cómo se interpreta que* $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ *?*



[El profesor dibuja la gráfica usando tizas de colores]

Ahora, la acción del profesor se centra en interpretar el significado de este límite, intentando estudiar qué relación hay entre las gráficas de la función planteada y la que se obtiene al simplificarla.

44. ***Profesor:*** *¿x + 2 es* $\frac{x^2-4}{x-2}$ *?*

La pregunta del profesor es obvia pero es una cuestión que suele confundir a los alumnos, ya que, acostumbrados como están a este tipo de simplificaciones con fracciones algebraicas, no terminan de ver la relación que hay entre estas dos expresiones desde el punto de vista de las funciones.

45. ***Alumnos****: Pero hay una parábola.*

46. ***Otros alumnos****: No, es lo mismo.*

Los alumnos establecen entre ellos una especie de debate: unos observan algo extraño en esta relación ya que confunden la expresión $\frac{x^2-4}{x-2}$ con una parábola, al ver el numerador como una función cuadrática (hay que destacar que este tipo de funciones no se estudian en el apartado de "gráficas de funciones conocidas", pero ellos las relacionan con las del tipo "parábola"); otros opinan que es la misma función que $y = x + 2$ ya que al simplificar la primera se obtiene la segunda. Surge la polémica entre ellos.

Se echa en falta la institucionalización del profesor para aclarar que no se trata de una parábola.

47. ***Alumnos***: *¿Y el dominio?*

Intentado reconducir este debate, algunos alumnos se preguntan por el dominio de ambas funciones, para ver hasta qué punto son "iguales".

48. ***Profesor:*** $Dom(f) = \mathbf{R} - \{2\}$. *En cambio en y = x + 2, el dominio es* $\mathbf{R}$. [El profesor se va a la figura y dice]*: ¿Qué problemas tengo para que salga esto?*

El profesor toma la iniciativa de responder, aunque el dominio de ambas funciones es de sobra conocido por los alumnos. Seguramente, la pregunta de algunos alumnos sobre el dominio no era por su desconocimiento, sino por la extrañeza de que "algo" pasaba al no tener dominios iguales.

El profesor intenta que se den cuenta de que las funciones son "casi" iguales, salvo un detalle al que hace referencia señalando la gráfica que acaba de dibujar en la unidad 43, para que analicen qué tiene de nuevo esta gráfica respecto a la otra.

Se utiliza una técnica de aceleración, cuando lo interesante es que, mediante la ralentización, los alumnos hubieran extraído el dominio para así distinguir ambas funciones.

49. ***Alumnos****: El agujero.*

Los alumnos responden metafóricamente, identificando el punto que no está en el recorrido de la función con un agujero, expresión que, seguramente, deben haber oído al profesor en alguna ocasión.

50. ***Profesor:*** *Son dos funciones iguales, excepto en x = 2, sin embargo, si analizamos en f(x) el límite, sí se confirma lo que hemos trabajado, que utilizando los valores de las imágenes del entorno, se pegan a 4. Entonces como recurso en* $\frac{0}{0}$ *se extraen raíces comunes en numerador y denominador y se simplifica.*

El profesor conduce la respuesta y retoma de nuevo el valor del límite que ya habían calculado, insistiendo en que la clave para resolver las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ es la de simplificar.

Vuelve a sustituirse el término "tan cerca como se quiera" por el de "pegarse a 4". Se elude así la idea de entorno y todo queda bajo la responsabilidad del campo visual.

51. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: ¿Y si no se puede?*

Una alumna demanda información al profesor planteando una cuestión que les puede provocar problemas cuando aparezca esta indeterminación en funciones no aptas para ser simplificadas, es decir, funciones cuyos términos no sean polinómicos, como podrían ser las expresiones irracionales.

52. ***Profesor:*** *Pues a veces no está tan claro:* $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. *Si sustituimos x por 2 nos aparece la indeterminación* $\frac{0}{0}$. *Ojo, la raíz de 4 puede ser +2 o –2. ¿Qué pasa aquí?*

El profesor parece haber entendido el sentido de su pregunta y plantea un nuevo límite de una función en cuyo numerador aparece una expresión irracional.

La siguiente acción es corroborar que, efectivamente, aparece la indeterminación objeto de estudio, pero, a continuación, cambia de planteamiento, dejando a un lado el cálculo del límite para implicar a los alumnos en movilizar una actividad de recuerdo al proponerles que reflexionen sobre los posibles valores numéricos que puede tomar la raíz de un número.

El profesor utiliza la técnica cronogenética del cambio de fase o bifurcación para destacar el concepto de función.

53. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: Sería +2, porque si no, no sería una función.*

Una alumna responde a esta cuestión, haciendo referencia a que nos encontramos trabajando con funciones y no con valores numéricos, pensando que a un original no le pueden corresponder dos imágenes.

Observamos que una cuestión complicada como ésta, que no es nada trivial, sólo podría ser respondida por un buen estudiante, y esta chica ya lo ha demostrado en varias intervenciones.

54. ***Profesor:*** *Debemos tomar la raíz con signo positivo, así es como la entendemos cuando no tiene el signo delante.*

El profesor les recuerda un criterio convencional para el caso de funciones irracionales a la hora de interpretar el signo del resultado, aunque esta cuestión no suele suponer un problema en los alumnos, ya que ellos suelen tomar siempre la imagen positiva porque no se plantean la otra solución posible.

55. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: Ahora no puedo simplificar fácilmente.*

Nuestra alumna sigue insistiendo en su demanda y no muestra interés en que el profesor comente otra cosa que no sea lo que a ella le preocupa, porque ahora, con un caso concreto planteado por el profesor, es consciente de su falta de recursos para simplificar.

El insistir sobre la misma alumna en el proceso dialógico, el profesor cae en el fenómeno del alumno genérico, como ya se ha comentado anteriormente. Es decir, se echa en falta una técnica de confrontación entre los alumnos.

56. ***Profesor:*** *¿Qué hacer?*
57. ***Alumnos***: *Elevar al cuadrado.*

El profesor vuelve a la actividad inicial y pregunta a la clase cómo abordar este problema. Los alumnos responden con un recurso que a ellos les recuerda la manera en cómo han suprimido raíces en otras ocasiones, sin reflexionar que la expresión que ahora deben operar es un binomio y no una raíz aislada. Subyace un conflicto semiótico en esta actuación, a saber: el cuadrado de una diferencia es la diferencia de los cuadrados. Además, el profesor no sanciona este procedimiento y deja seguir a los alumnos con sus posibles recursos para operar este límite.

58. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: El de abajo... los dos por el conjugado.*

La alumna que ha motivado este debate parece caer en la cuenta de cómo abordar la cuestión, recordando un "truco" que ya han usado en el cálculo de límites y que siempre es muy efectivo. El comentario que ésta hace parece como si lo dijera para sí, hablando en voz alta y no dando muestras de seguridad sobre su afirmación, aunque el profesor va a confirmar que está en lo cierto.

59. ***Profesor:*** *Los conjugados andaban por ahí, en complejos, en infinito menos infinito. Luego* $\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2).(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2).(\sqrt{x+2}+2)}$*, ¿vale?, ¿de acuerdo? Operarme, ya sabemos que no conviene operar los denominadores...* [El profesor va mirando la actividad de los alumnos]. *En el numerador hay que operar y resolver, no volver a lo anterior.*

El profesor confirma lo que se debe hacer en estos casos y plantea el límite con la operación indicada, dejando a la responsabilidad de los alumnos el darle solución. Como piensa que puede haber algún problema en esta operación, les indica qué operar y qué no, confiando en que así todos lleguen a la solución correcta.

60. ***Alumno*** [Antonio]: [Lo hace mal].

61. ***Profesor:*** *¿Ya, Antoñico?... ¿Y luego en los exámenes,...? ¿Qué queda en el numerador?*

El profesor va supervisando las producciones de los alumnos y sancionando las mismas. Un alumno, que ya ha finalizado, lo hace mal y el profesor le reprende llamándole la atención sobre lo que podría ocurrir si así trabajara en los exámenes. El comentario que hace es muy significativo, porque sin decirlo completamente, deja muy claro qué podría ocurrirle a todo el que operara mal (*¿y luego en los exámenes…?*).

62. ***Alumno*** [Antonio]*: x – 2.*

El alumno reprendido ha corregido su tarea y responde correctamente. Parece como si el comentario del profesor hubiera surtido efecto positivo en él, haciéndole poner más cuidado en los cálculos necesarios para llegar a la solución.

Hacer mal los cálculos con este tipo de expresiones suele ser bastante normal, por lo que todo profesor debe asumirlo.

63. ***Profesor:*** *Para el que no lo haya visto:*

$\left(\sqrt{x+2}-2\right).\left(\sqrt{x+2}+2\right)=x+2-4=x-2$.

Luego, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2).\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$, *se simplifica* [El profesor tacha x – 2 en ambos términos]. *¿Y el numerador, cuánto vale*?

El profesor es consciente de que muchos alumnos pueden no haber llegado a la solución correcta y la desarrolla en la pizarra, realizando la simplificación pertinente y preguntando por el valor que toma el numerador, una vez simplificado. No es de extrañar este tipo de pregunta, ya que muchos alumnos que simplifican toda la expresión de uno de los términos de la fracción, terminan diciendo que no les queda nada, es decir, 0. No se tiene asumido que el 1 es elemento neutro para la multiplicación.

64. ***Alumnos**: 1.*

Los alumnos, en grupo, responden correctamente, aunque siempre cabría la posibilidad de considerar que alguno hubiera pensado en el cero.

65. **Profesor:** *A ver si me dices el límite, Lucía.*

66. ***Alumna*** [Mª Lucía]*:* $\frac{1}{4}$.

El profesor se dirige a una alumna para pedir el resultado del límite y ésta contesta correctamente, como era de esperar. El profesor es consciente que si le pregunta a esta alumna, la respuesta va a ser correcta. Por eso, al hacerlo, pensará que ésa es la respuesta de toda la clase y pasará a otra cuestión (efecto del alumno genérico).

67. ***Alumnos**:* S*í.*

Merece ser destacado que el resto de los alumnos quiere participar en la respuesta de este límite y lo hacen sancionando a su compañera y confirmando que ellos también están de acuerdo con el resultado. Quizá, alguno haya llegado a pensar que es "injusto" que una pregunta tan fácil se la haya hecho el profesor a una buena alumna.

68. ***Alumno*** [Jaime]*: 0.*

Sólo un alumno no está de acuerdo con la respuesta dada y propone otra, aunque da la impresión de que el profesor se imagina cuál es la causa de este resultado.

69. **Profesor:** *Cuidado con hacer x tender a infinito, que entonces es un despiste, y saldría* $\frac{1}{+\infty}=0$. *¿Cuánto vale, hermosos?*

El profesor ha visto que su error se debía al pensar en que la variable tendía a infinito, y así lo corrige a toda la clase con el comentario de que estos “despistes” pueden llevarnos a resolver mal un límite que, a priori, podríamos haber hecho bien.

Como quiere corroborar el resultado, vuelve a preguntarlo y, de nuevo, utiliza una palabra cariñosa a modo de broma (*hermosos*), destacando que antes la había utilizado en género femenino (*hermosas*), siendo aceptada con total naturalidad por todos sus alumnos.

70. ***Alumnos****:* $\frac{1}{4}$. [Casi todos].

La mayoría de los alumnos dan por bueno este resultado y el profesor no se detiene a preguntar si hay algún alumno que aún no lo haya obtenido.

71. **Profesor:** *¿Qué pasa si no se pueden descomponer los polinomios? Alguna herramienta habrá que buscar.* [El profesor explica lo que podría salir para otros valores].

La acción del profesor es recordar, de nuevo, algunos procedimientos para que, ante esta indeterminación, se llegue a poder simplificar.

A lo largo de esta unidad de análisis, la trayectoria docente ha movilizado los estados de regulación, asignación, evaluación y motivación, mientras que la discente, los de recuerdo, aceptación, formulación, demanda de información, recepción y argumentación.

Unidad de análisis 3: Función analítica a trozos.

72. **Profesor:** *Ahora, sin pensar en la gráfica, veamos cómo atacar una función a trozos:*

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<4 \\ 3 & si \quad x=4 \\ 2x-6 & si \quad x>4 \end{cases}$$

El comienzo de esta unidad de análisis es metafórico: el profesor presenta una función a trozos para calcular algún límite analíticamente, sin disponer de la gráfica, pero lo hace con una metáfora que debe resultar impactante en los alumnos (*...veamos cómo atacar una función...*).

73. ***Profesor:*** *¿Dominio?*
74. ***Alumnos:*** $\mathbf{R}$.

Como ha hecho hasta ahora, la primera acción del profesor, una vez presentada la función a estudiar, es preguntar por su dominio de definición, a lo que los alumnos, en grupo, responden correctamente.

75. ***Profesor:*** *Vamos a intentar el* $\lim_{x \to 4} f(x)$. *Sólo con la expresión analítica de la función, después la dibujamos.*

Una vez realizado este "trámite" inicial, el profesor plantea la cuestión a trabajar, haciendo hincapié en que el estudio del límite lo harán analíticamente, para después realizar la gráfica de la función. Parece ser que el profesor no quiere que los alumnos puedan deducir conclusiones para el límite a partir de la representación gráfica.

76. ***Profesor:*** *Venga, vamos a contar hasta 20 y lo hacéis. Si hay,..., si no hay,... y si hay cuánto vale,...*

De nuevo, el profesor les lanza una pequeña broma (*...vamos a contar hasta 20...*) para animarlos y motivarlos en este ejercicio, ya que propone una nueva actividad para realizar y no quiere que alguno no acepte la devolución del problema.

77. ***Profesor:*** *Ya tenemos una base. Recordad todo lo que hemos hecho para el cálculo de límites laterales y esto nos ayudará a resolver este problema.*

El profesor les intenta ayudar con este comentario, haciendo referencia a trabajos anteriores sobre cálculos de límites laterales, con lo que les está diciendo cómo tienen que afrontar este nuevo ejercicio. Parece un empeño del profesor el intentar conseguir que todos sus alumnos puedan calcular este límite.

El profesor utiliza la aceleración, pasando, en una topogénesis descendente, de una técnica mesogenética de estructura dialógica a la lección magistral.

78. ***Profesor:*** *¿Jaime?*
79. ***Alumno*** [Jaime]*: 2.*
80. ***Alumna*** [Mª Lucía]*:* [También dice 2].
81. ***Profesor:*** *¿Luis?, ¿Antonio?*
82. ***Alumnos*** [Luis, Antonio y otros]*: 2.*

Cuando los alumnos van terminando su límite, el profesor se dirige a ellos, uno por uno, preguntando el resultado: todos los preguntados coinciden en él, aunque no está claro que el resto de los alumnos, a los que no se pregunta, también coincidan en este valor.

El profesor inicia una técnica cronogenética de confrontación con respecto a los límites laterales, la cual seguramente aclarará la respuesta correcta.

83. ***Profesor:*** *¿Imagen del 4?*
84. ***Alumnos****: 3.*

Ahora el profesor se dirige a toda la clase para preguntar la imagen del punto, pregunta obvia porque, además, aparece expresamente en la definición de la función. Los alumnos responden bien.

85. ***Profesor:*** *¿Entonces?*

Con esta pregunta el profesor pretende que los alumnos se den cuenta de su perplejidad y da la impresión de que los quiere conducir al conflicto semiótico, ya visto, de que el límite coincide con la imagen, a fin de que superen dicho conflicto. Poniéndolos en duda, trata de asegurar que estén convencidos de su respuesta o cambien de opinión. (Parece que el profesor quiere que los alumnos piensen: *¿cómo me podéis decir que el límite vale 2, cuando la imagen vale 3?*).

86. ***Alumna*** [Lucía]*: Por la izquierda y por la derecha.* [Otra alumna, Sara, dice que sólo hay que estudiarlo por la derecha].

Una alumna responde, aunque sin explicarse muy bien, que el límite hay que hacerlo estudiando los límites laterales, como dando a entender (según palabras del profesor) que la imagen no tiene nada que ver.

87. ***Profesor:*** *¿Sólo a la derecha, Sara?*
88. ***Alumna*** [Sara]*: Como no hay x,...entonces no hay límite.*
[Observador: conflicto semiótico de la función constante].

Como otra alumna ha respondido de forma que ha llamado la atención del profesor, éste se dirige específicamente a ella para que corrobore lo que ha creído entender, apareciendo, por primera vez, el conflicto semiótico de la función constante: no se puede calcular el límite en una función constante porque no hay variable “x” donde sustituir.

A pesar de haber centrado la atención en esta alumna, el profesor no hace comentario alguno sobre la aparición de este conflicto. Seguramente, se habrá conformado con mirarla extrañadamente para que ella se dé cuenta de que está en un error, aunque no la corrige con ningún argumento.

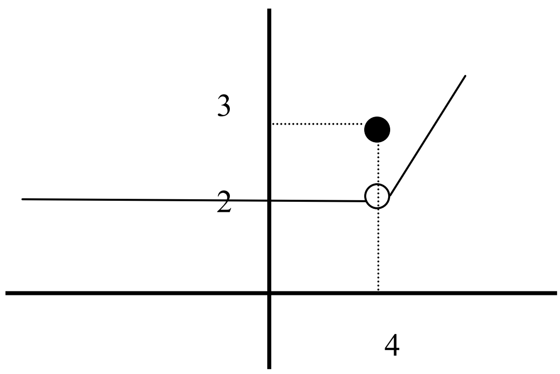
Es decir, el profesor no usa la técnica de la confrontación para extraer las conclusiones oportunas sobre la superación del conflicto.

89. ***Profesor:*** *Surge un problema, independientemente del f(4), tengo una rama a la derecha del 4 y otra a la izquierda de 4, luego...* $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$*, por ser trozo de función constante, y* $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$*. Por tanto* $\lim_{x\to 4} f(x)$ *=2, independientemente de que f(4) sea 3.*

Ahora se dirige a toda la clase para argumentar el proceso seguido al calcular este límite, insistiendo de nuevo en que el valor del límite no coincide con el valor de la imagen del punto.

El único comentario que hace respecto del límite por la izquierda es que se trata de un trozo de función constante, no verificando después si con este único argumento la alumna que presentaba el conflicto de la función constante ha quedado libre de su error.

90. ***Profesor:*** *¿Qué planteamiento tendríamos para dibujar la gráfica?*



La acción del profesor puede dar lugar a confusión, porque en un primer momento les pregunta cómo sería la gráfica, para inmediatamente después dibujarla en la pizarra, sin dar la oportunidad de que los alumnos puedan dar sus respuestas y poder observar que han comprendido todas las argumentaciones anteriores.

Se utiliza la aceleración, cuando habría que haber planteado la ralentización y haber abierto la confrontación.

91. ***Profesor:*** *Luego fijaos cuál será la imagen gráfica de esta función. ¿Todo bien?*
92. ***Alumnos****:* [Asentimiento general].

Una vez dibujada, el profesor llama la atención de sus alumnos para que la observen bien y manifiesten sus posibles dudas, aunque la pregunta que hace (*¿todo bien?*) parece estar preparada para que los alumnos respondan afirmativamente y no planteen problemas de comprensión, como así es.

Del asentimiento de los alumnos no se puede deducir que el proceso haya quedado claro para todos, máxime cuando la gráfica la ha realizado el profesor y los alumnos se han limitado a confirmarla.

A lo largo de esta unidad de análisis, el profesor ha movilizado los estados de asignación, evaluación, motivación y regulación, mientras que los alumnos, los de aceptación, formulación y recepción.

Unidad de análisis 4: Se insiste en $\frac{0}{0}$, pero con necesidad de aplicar Ruffini.

93. ***Profesor:*** *Veamos el ejemplo siguiente:* $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2+x-1}{x^3-1}$. *¿Por qué éste? Porque es necesario recordar cálculos de tiempos pasados. Aquí la ayuda gráfica no me sirve. ¿Cuál es el dominio de f?*

La unidad cuarta comienza con el planteamiento de un nuevo límite, justificado por el profesor como necesario para que los alumnos recuerden la regla de Ruffini y, además, no se puedan apoyar en la gráfica de la función para calcular el límite.

Una vez propuesta la actividad, el profesor realiza la pregunta ritual sobre el dominio de la función. Esta acción la ha realizado siempre, ya sea mediante una propuesta gráfica o analítica de la función a estudiar.

94. ***Alumnos**:* $\mathbf{R}$.

Sorprendentemente los alumnos no responden correctamente, lo cual no guarda relación con el cálculo de otros dominios ya planteados. Podemos pensar que la dificultad de esta expresión analítica les ha llevado al error, sin meditar posibles ceros del denominador.

95. ***Profesor:*** *¿* $\mathbf{R}$ *? El 1 anula al denominador...*
96. ***Alumnos**: Sí.*

La acción del profesor, aparte de mostrar su extrañeza por la respuesta dada, es afirmar que hay un valor que anula al denominador, sin esperar a que los alumnos rectifiquen, ni busquen ellos las raíces del denominador. Al conocerse ya que el 1 anula al denominador, los alumnos no tienen más que confirmarlo, porque el profesor les ha dado la solución.

97. ***Profesor:*** *Luego, ¿1 está en el dominio?*

98. ***Alumnos****: El dominio es* $\mathbf{R}-\{1\}$.

La pregunta es obvia y a los alumnos no les hace falta ya responderla, sino que, directamente, rectifican su respuesta anterior para decir correctamente el dominio pedido.

99. ***Profesor:*** *¿Hay alguna indeterminación?*

100. ***Alumnos****:* $\frac{0}{0}$.

El profesor les pregunta por la indeterminación que aparece, fácil de encontrar pues basta con sustituir, aunque tratándose de un apartado en el que se va a estudiar esta indeterminación, no es probable que pudiera aparecer otra. De todas formas, los alumnos se equivocan con frecuencia al sustituir valores numéricos en los polinomios y siempre es bueno confirmarlo.

101. ***Profesor:*** *¿Todos lo veis? Efectivamente al sustituir 1 sale* $\frac{0}{0}$*. El numerador y denominador son expresiones conocidas, ¿cómo operamos?*

De nuevo una pregunta que no admite negación, aunque parece obvio en este caso, dado el comentario del profesor. Ahora su acción se centra en cómo operar los polinomios para salvar dicha indeterminación. Está claro que el profesor espera que los alumnos descompongan factorialmente para poder simplificar y el único recurso es aplicar la regla de Ruffini.

102. ***Alumnos****: Sacando factor común.*

La respuesta de los alumnos es automática y la dicen sin pensar, recordando que ésa era una manera de descomponer polinomios, aunque en este caso es imposible. No entendemos cómo pueden haber cometido este error.

103. ***Profesor:*** *¿Cómo? Habrá que descomponer en factores, ¿qué hago?*

De nuevo la sorpresa del profesor es evidente y los reconduce a planteamientos de otro tipo: les está diciendo claramente que aquí sólo hay una manera de operar y espera que algún alumno encuentre el procedimiento correcto.

104. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: Ruffini.*

Por fin una alumna (la que normalmente lo saca de estos aprietos) responde lo que el profesor esperaba y eso le permite continuar con el cálculo del límite. El profesor da por sentado que la respuesta de esta alumna es asumida por toda la clase, apareciendo una vez más el fenómeno del alumno genérico.

105. ***Profesor:*** *Vamos a descomponer ayudándonos con la regla de Ruffini. Lo bueno es que tengo el valor de 1 y ése me interesa. Haced Ruffini...* [El profesor observa los resultados de los alumnos]. *Con huecos, sin huecos,...*

La acción del profesor va dirigida a toda la clase y consiste en impartir instrucciones sobre cómo aplicar la conocida regla: quiere dar “pistas” para que los alumnos apliquen bien la regla, y que tengan en cuenta todos los coeficientes de los polinomios (los monomios que no aparecen suelen ser problemáticos porque a los alumnos se les olvida poner el correspondiente cero). A la ausencia, o no, de algún monomio, el profesor lo trata metafóricamente como “un hueco”.

106. ***Profesor:*** *Antoñico, aquí te has comido un cero.*

Dos acciones claramente definidas por parte del profesor: se dirige al alumno de manera cariñosa buscando su motivación (*Antoñico…*), aunque no es la primera vez que lo hace, y una corrección en lenguaje metafórico para llamarle la atención sobre los coeficientes de los monomios que ha omitido (*...aquí te has comido un cero*).

107. ***Alumnos****:* [Seis alumnos omiten algunos ceros].

Al oír esta corrección, hay alumnos que reconocen también su error y así lo manifiestan. Hay un clima de confianza y afectividad en la clase que les permite comportarse así, porque saben que el profesor no les va a reprender por su acción.

108. ***Profesor:*** *Hay que hacerlo bien. Ya sabéis que al descomponer el polinomio tiene que salir bien. A veces sale 0 y está mal. No hay modo entonces de validar. ¡No metáis la gamba!*

El profesor se dirige a toda la clase para enfatizar que deben tener cuidado al operar y les avisa de que aún saliendo 0 en el resto, la operación puede estar mal (clara referencia a que no pueden omitir coeficientes cero de los monomios ausentes). Termina su acción dando ánimos a sus alumnos para que no se equivoquen, usando una metáfora bromista (*¡no metáis la gamba!*).

109. ***Alumna*** [Mª Lucía]*: La segunda vez no sale con 1.*

Esta alumna ya ha descompuesto los polinomios una vez y se ve que ha querido seguir aplicando la regla de Ruffini: ha relacionado esta regla con la descomposición de los polinomios en factores irreducibles (porque para eso la había usado hasta ahora), olvidando que se trata del cálculo de un límite y que, a veces, basta con simplificar sólo una vez.

110. ***Profesor:*** *Pero, ¿interesa descomponer totalmente? No, sólo que haya un valor común. Sólo si persiste la indeterminación habría que seguir.*

El profesor justifica para qué se quiere usar esta regla e incide en que si la indeterminación persiste, entonces habría que seguir descomponiendo.

111. ***Profesor:*** *¿Lucía?* [Nadie contesta].

Como ya ha pasado un tiempo prudencial y nadie ha dado una solución, pregunta por el resultado, dirigiéndose a la alumna que quizá le dé la respuesta, pero ni ésta, ni ninguno del grupo contesta.

112. ***Alumno*** [Luis]*: Sale 0.*

113. ***Profesor:*** *¿Que te sale 0? ¿Jaime? A Jaime le da 1, a ti infinito, a ver si a cada uno le da un resultado distinto. Hasta ahora nada, yo no sé lo que da, pero lo hacemos y quizá lo sepa*

.

[El profesor hace Ruffini]

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(x^3+x^2+1)}{(x-1).(x^2+x+1)} = \frac{3}{3} = 1$$

[El profesor tacha el x – 1]

Un alumno acepta la devolución del problema y, tomando la iniciativa, da su resultado, que resulta incorrecto. El profesor visualiza otros resultados, todos distintos y erróneos, por lo que toma la determinación de hacerlo él en la pizarra después de insinuar, a modo de reprimenda que a cada alumno le puede salir un resultado distinto. Es más frecuente de lo deseable que, ante un límite que exige un proceso operatorio más complejo, los resultados no sean satisfactorios en la mayoría de los alumnos. El cálculo operacional es un problema en Matemáticas, cualquiera que sea el nivel.

114. ***Profesor:*** *Da las explicaciones oportunas hasta llegar a la solución 1. ¿Visto? ¿Sí o no?*

El profesor realiza una puesta magistral para resolver el ejercicio, como si de un modelo de actividad se tratara, que los alumnos deberán entender perfectamente ya que tendrán que resolver límites por este método con cierta frecuencia.

115. ***Profesor:*** *De la página 229, el 19.* [Se propone este ejercicio y los alumnos lo solucionan en este momento con la supervisión del profesor].

Una vez resuelto este “modelo”, el profesor propone un nuevo ejercicio en el que los alumnos deberán trabajar de manera individual, siguiendo el modelo de configuración dialógica personal, hasta llegar a al solución correcta.

116. ***Profesor:*** *Y luego a la parte emocionante: página 238, del 20, los 6 primeros apartados; el 21 al completo; y del 22, los 5 primeros apartados. Enhorabuena y adiós.*

Para finalizar la clase, el profesor plantea una serie de actividades de cálculo de límites que los estudiantes deberán solucionar en su casa (metafóricamente se refiere a *la parte emocionante*). Se trata de una colección de diferentes ejercicios que pondrán de manifiesto si los alumnos han alcanzado la suficiente madurez como para, una vez corregidos, pasar al tema siguiente. La solución a estos ejercicios se dará en sesiones sucesivas que, por no ser relevante para nuestro análisis, ya no serán tratadas en este trabajo.

A lo largo de esta última unidad, el profesor ha movilizado los estados de asignación, evaluación, motivación y regulación, mientras que los alumnos, los de aceptación, formulación, recuerdo, recepción y ejercitación.

CAPÍTULO 6

SIGNIFICADO INSTITUCIONAL EVALUADO

6.1. INTRODUCCIÓN

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática se distinguen cuatro tipos de significados institucionales de un objeto matemático: el significado de referencia, el pretendido, el implementado y el evaluado (Font, 2006).

El cuarto tipo de significado institucional citado se pone en juego en los procesos de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado.

En el Anexo 3 se muestra el cuestionario que se aplicó a los alumnos participantes en la investigación. Además, para dar respuesta a la coherencia en la construcción del cuestionario que debe responder al significado implementado, se ha elaborado el siguiente apartado donde se presentan las consecuencias extraídas sobre las configuraciones estudiadas para la elaboración de dicho cuestionario.

6.2. CONSECUENCIAS EXTRAÍDAS DE LAS CONFIGURACIONES ANALIZADAS PARA LA ELABORACIÓN DEL CUESTIONARIO

Como antecedentes, en la primera sesión de las clases analizadas, cabe destacar que el estudiante ya ha conocido la idea de función, gráficas de funciones elementales estudiadas en cursos anteriores y la noción de asíntotas. El tratamiento que se le ha dado a esta parte es puramente intuitivo y se ha potenciado el lenguaje gráfico frente al analítico y numérico.

En la clase anterior a esta primera sesión se ha introducido el concepto de límite de forma intuitiva, de manera gráfica y sin entrar en muchos detalles técnicos.

Por esto, la primera sesión comienza con la idea intuitiva de límite en el infinito, que constituye la unidad de análisis 1. Se inicia con el planteamiento de cuatro gráficas con comportamientos distintos para analizar los límites en el infinito: la primera, estrictamente creciente a $+\infty$; la segunda, con asíntota horizontal y vertical; la tercera, con dos asíntotas horizontales; y la cuarta, una gráfica tipo "parábola".

Es necesario que el alumno adquiera los significados de los límites de funciones en $+\infty$ y $-\infty$, de ahí el planteamiento de la **5ª cuestión** del cuestionario: detectar el límite cuando la variable independiente tiende a más infinito en seis funciones dadas por sus gráficas, a saber, la primera con asíntotas horizontal y vertical, la segunda del tipo "parábola", la tercera con una asíntota horizontal, la cuarta periódica (sin límite), la quinta es una función constante y la sexta creciente estrictamente hacia más infinito.

El objetivo de esta pregunta es confirmar que lo visto en clase para algunas funciones pueda generalizarse para otras, pues en el desarrollo de la sesión parecía que el alumnado encontraba dificultad en detectar comportamientos gráficos para $x \to +\infty$ de algunas funciones, en especial, cuando aparecían asíntotas horizontales.

Tanto en la primera clase de límites, que no está referida en este estudio, como en ésta y las siguientes, se repite mucho la idea de la tendencia de x hacia el infinito, sin ser aclarada por parte del profesor, lo cual puede indicar que es un concepto transparente para el alumnado. Dado que dicha transparencia puede no ser pertinente, se considera necesario comenzar el cuestionario con la **1ª cuestión**, interrogando al estudiante qué significa la expresión "x tiende a $+\infty$", pidiendo aclaraciones con ejemplos a sus respuestas.

También es importante que al alumno se le plantee el estudio del crecimiento indefinido de algunas funciones y su interpretación, por lo que se propone la **2ª cuestión**, mediante la cual se intenta detectar el significado personal de esta situación.

La segunda unidad de análisis de esta sesión se refiere a los límites de las funciones en un punto y en ella el profesor trata de eludir las aproximaciones numéricas utilizando aproximaciones gráficas. De aquí que se plantee la **3ª cuestión** para analizar en el estudiante el significado de la aproximación a un número, intentando detectar en las producciones de los alumnos si encuentran alguna relación entre el valor numérico de una función en un punto y el límite en dicho punto, así como la pertinencia de dicha relación.

En un momento de la sesión, el profesor, dando valores a derecha e izquierda del valor de la variable independiente para la que se calcula el límite, conduce a los estudiantes a la interpretación intuitiva de los límites laterales, motivo de una nueva unidad de análisis, y se estudia la relación entre éstos y el límite de la función con algunos ejemplos gráficos. Ello da origen a la **4ª cuestión,** en la que se pide que el alumno estudie en seis gráficas de funciones de distinto comportamiento la relación entre el valor de una función en un punto –en este caso, $x = 3$–, la existencia de límites laterales en dicho punto y la existencia del límite en el mismo. La primera presenta una asíntota vertical en $x = 3$; la segunda, con límites laterales distintos en el punto y no definida en el 3; la tercera, con límites laterales iguales y distintos al valor de $f(3)$; la cuarta, con límites laterales distintos y distinto valor para $f(3)$; la quinta, con límites laterales iguales y no definida en el 3; y la sexta, con un límite lateral finito y el otro infinito.

El planteamiento de estos seis casos implica una amplia gama de situaciones gráficas, cada una con su peculiaridad, que la hace diferente a las demás, permitiendo obtener la máxima información posible sobre los significados de los alumnos acerca de esta cuestión tan importante, cual es la relación de los límites de las funciones en unos puntos con los valores que toman en dichos puntos.

Las cuestiones 6ª y 7ª vuelven a insistir en planteamientos gráficos de funciones a trozos y con asíntotas –horizontales y verticales–; se presenta una gráfica en cada cuestión y se les pide el cálculo de diferentes límites, tanto en valores finitos como en $+\infty$ y $-\infty$. Está claro que, obviamente, los puntos que son demandados se corresponden con valores en los que la gráfica cambia de definición (funciones a “trozos”) o no están definidos por la existencia de asíntotas verticales.

En la segunda unidad de análisis de esta sesión, el profesor planteaba el siguiente cálculo: $\lim_{x\to 5}\left(x^2-2\right)$ y, utilizando valores a izquierda y derecha de x = 5, hace ver a los alumnos que su valor límite coincide con f(5) = 23. Basándonos en esto, se plantea la **9ª cuestión** para que el alumno clarifique y justifique si este caso es generalizable siempre en unas condiciones determinadas. Se utiliza una función polinómica conocida para que no resulte un cálculo engorroso, pues, lo que se pretende es que el alumno construya una tabla de valores numéricos y deduzca el valor del límite, sin tener que sustituir en la función para hallar una imagen.

Como ya se ha indicado, en este estudio de límites se potencia el lenguaje gráfico frente al analítico y al numérico, por lo cual se plantea la **10ª cuestión**, en la que cumpliéndose una serie de condiciones, se les pide a los estudiantes que dibujen una gráfica de función. Implícitamente, la gráfica que deben construir lleva asociada la posibilidad, o no, de la existencia de una asíntota vertical, una asíntota horizontal hacia $+\infty$, pero no hacia $-\infty$, y dos límites laterales en un punto dado distintos entre sí y distintos al valor numérico de la función en dicho punto. El resto de condiciones no son relevantes. Se intenta que el sujeto razone de manera inversa a la usual (extraer información de una función a la vista de su gráfica), es decir, dada la información sobre la función, dibujar una gráfica que cumpla todos los requisitos preestablecidos.

La segunda sesión es una clase puramente instrumental, en la que se calculan, analíticamente, límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales, haciendo especial hincapié en las típicas indeterminaciones $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y $(+\infty)-(+\infty)$.

Al tratarse de una sesión práctica, en la que el límite se considera como útil (y no como objeto en sí), no hemos considerado conveniente trasladar al cuestionario cálculos de límites de funciones bajo este punto de vista, ya que nuestro interés se centra en el objeto límite de función.

En la tercera sesión se plantea la definición de límite, no mediante el significado métrico analítico, sino por medio de los significados gráfico y numérico y se calculan límites en funciones continuas y discontinuas, utilizando el significado infinitesimal, donde vuelven a aparecer las asíntotas verticales y horizontales, por lo que las preguntas 4, 5, 6 y 7 siguen recobrando todo su sentido.

Se dedica también una unidad de análisis al cálculo de límites de una función definida a trozos, tanto gráfica como numéricamente y, posteriormente, en el cuestionario se plantean al alumno algunos ítems en los que aparecen cálculos de límites de funciones definidas a trozos.

La última sesión continúa con estas cuestiones y con la dedicación expresa a la resolución de una nueva indeterminación, a saber, $\frac{0}{0}$. Se trabaja con estos casos en funciones racionales e irracionales, pero, al igual que ocurrió en sesiones anteriores, tampoco se creyó conveniente su utilización para el cuestionario puesto que no se utiliza el límite como objeto de conocimiento.

Al analizar las cuatro clases estudiadas, se observó que el profesor no utilizó una tabla numérica de variación para introducir el concepto ni el cálculo de límites. Las mencionó y, en algún caso, puso ejemplos de valores próximos a un número para aclarar el concepto de "tan cerca como se quiera", pero no llegó a plasmarlas ni a estudiarlas de manera efectiva. Por todo ello, se planteó la **8ª cuestión**, en la que tomando valores cercanos al 3 se pretende que el alumno explique si las imágenes estaban tan cerca de 8 como para deducir que ése era su límite. Realmente se estaba aplicando el cálculo a límites de sucesiones, cuando, como se ha mostrado en las sesiones analizadas, el profesor no habló explícitamente de ellas.

Con el mismo planteamiento se propone la **11ª cuestión**, que incluye cuatro tablas de variación y se le pide al alumno que justifique si existe, o no, el límite cuando la variable independiente tiende a un número (en este caso, el 1), a la vista de valores de la variable independiente entorno al 1 y de sus respectivas imágenes. En la primera tabla, hay imagen para el 1 y los límites laterales existen, pero son distintos; en la segunda tabla, no hay imagen en el punto, pero sí límite en el mismo porque los límites laterales coinciden; en la tercera tabla hay imagen para el 1 y límite en el mismo punto, pero son valores distintos; por último, en la cuarta tabla no hay imagen en el punto, ni tampoco coinciden los límites laterales entre sí.

La variedad de estas situaciones, y la no utilización de estas tablas en las sesiones analizadas por el profesor, conducen a inferir que se puede estar ante la pregunta más compleja del cuestionario, aunque habrá que esperar al análisis de los resultados.

Como resumen, se exponen a continuación los posibles conflictos semióticos que se pretende detectar en los estudiantes, motivados por cada una de las preguntas del cuestionario, teniendo en cuenta que en su elaboración se ha respetado el modo de plantear las cuestiones por parte del manual al uso, que constituye el significado institucional pretendido.

Tabla 6.1. Cuestionario y posibles conflictos semióticos que se pueden detectar.

CUESTIONARIO	CONFLICTOS SEMIÓTICOS
1ª cuestión: significados personales sobre “x tiende a $+\infty$”.	- Posibles conflictos ligados al infinito. - Si x tiende a $+\infty$, la variable dependiente también tiende a $+\infty$.
2ª cuestión: significados personales sobre “una función crece indefinidamente”.	- Posibles conflictos ligados al infinito. - Si f(x) crece indefinidamente entonces crece a $+\infty$.
3ª cuestión: significados personales sobre “x se aproxima a 3”.	- No utilizar el lenguaje numérico. - Aproximar el número real sólo por defecto (o por exceso).
4ª cuestión: significados personales que relacionen el valor de una función en un punto y su límite en dicho punto, a partir de seis gráficas.	- El límite de una función en un punto coincide con el valor de la función en dicho punto, o recíprocamente. - La existencia de un límite lateral es suficiente para la existencia del límite.
5ª cuestión: saber identificar de entre una colección de seis gráficas de funciones, aquéllas que verifican que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	- Si x tiende a $+\infty$, entonces f(x) también. - No reconocer el papel de una asíntota horizontal por el conflicto anterior. - No reconocer el límite en el caso de la función constante.

6ª cuestión: significados personales respecto a los límites finitos en la gráfica de una función a trozos.	- El límite existe si existe uno de los límites laterales. - Si los límites laterales son distintos, sostener la existencia de dos límites. - Si los límites laterales son de dos trozos distintos, entonces no pueden coincidir.
7ª cuestión: significados personales respecto a límites infinitos en una función con asíntotas horizontales y verticales.	- Existe límite infinito porque existe uno de sus límites laterales. - Si $x \to \pm\infty$, entonces su límite es $\pm\infty$ (no reconocer el papel de una asíntota horizontal). - Si los límites laterales son infinitos, aunque de distinto signo, entonces su límite es infinito.
8ª cuestión: significados personales respecto al límite de una función representado en una tabla de valores.	- Justificar que el límite es 8 porque lo es uno de sus límites laterales. - Confundir la sucesión numérica de f(x) con la de x. - Justificar que el límite es 8 porque es el valor de la función para x = 3. - Los puntos suspensivos de la tabla indican que no puede saberse cuál es el límite.
9ª cuestión: significados personales del límite finito de una función en un punto.	- Sostener que el límite de una función en un punto es el valor numérico de la función en el punto.
10ª cuestión: significados personales acerca del dibujo de la gráfica de una función bajo un conjunto de condiciones expresadas en lenguaje analítico.	- Sostener que hay datos incompatibles dado que el valor de la función en x = 3 no coincide con el valor de los límites laterales en ese punto (apartados b, c y e). - Argumentar la falsedad del apartado a), ya que si x tiende a infinito, la función también.
11ª cuestión: significados personales respecto al límite de una función estudiando cuatro tablas de variación.	- El valor del límite coincide con el valor de la función en el punto. - No hay límite porque la función no está definida en ese punto. - Basta con que exista un límite lateral para que la función tenga límite en ese punto.

6.3. ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO

Trabajos como los de Sánchez y Contreras (1995b y 1997b) ya señalaban la necesidad de realizar análisis a priori de las concepciones y los obstáculos de los alumnos en relación con el concepto de límite de una función. Es decir, antes de la aplicación del cuestionario, es necesario realizar un análisis semiótico de las distintas cuestiones que componen el mismo. En cada caso, se efectúa un análisis a priori en el que se pretende determinar lo que se indaga en cada cuestión, así como la hipotética trayectoria funcional semiótica seguida por el alumno a la hora de resolver la cuestión. Además, se estudian diversos apartados como objetivos generales, objetivos específicos, conflictos semióticos potenciales y entidades primarias.

Cuestión 1: *¿Qué significa la expresión "x tiende a +∞"? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Detectar significados personales de la "variable independiente tendiendo a más infinito".

Objetivos específicos:

1. Analizar las prácticas del alumno sobre los significados personales.
2. Análisis epistémico de dichas prácticas.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se indaga, por medio de esta cuestión, qué interpretación dan los alumnos a dicha expresión para poder justificar que no es algo sencillo y que presenta dificultades importantes a los alumnos.

Al estar construida la cuestión según el manual al uso, hay que tener en cuenta esto ya que es el mismo texto el que, acerca de lo que significa dicha expresión, dice: "x tiende a +∞, es decir, para valores de x muy grandes". Al no aclarar que los valores muy grandes no corresponden a infinito, sino que tender a infinito significa tomar valores tan grandes como se quiera, se puede conducir al alumno a un conflicto semiótico de tipo epistemológico al asignarle al infinito un valor numérico. Se podrían constatar expresiones del tipo "el límite de x se acerca a +∞" o "x toma un valor positivo grande".

Por otra parte, se puede estar en el caso de poder contrastar la existencia de un posible conflicto semiótico potencial de orden lógico (ya que el alumno convierte en general aquello que es válido para casos particulares): “si la variable independiente tiende a +∞, entonces la dependiente también”.

La trayectoria funcional semiótica hipotética seguida por el alumno en el proceso de resolución es la siguiente:

Por una parte, aparece la función semiótica:

x tiende a +∞ $\longrightarrow$ expresiones verbales del tipo: “x se acerca a, o toma, +∞” (conflicto semiótico); “x toma valores tan grandes como se quiera”...

Pero, por otra parte, podría utilizar otras intermedias, del tipo:

x tiende a +∞ $\longrightarrow$ Tabla de valores

$\updownarrow$

$\searrow$ Ejemplo gráfico

Se observa una no-congruencia semántica de orden lógico en la expresión “x tiende a +∞”, puesto que al lector se le dice que se tiende, se va hacia... una cosa definida y que se representa por +∞, pero luego se le está diciendo que hay una especie de “frontera” (valor estático) a la que nos acercamos. Sólo el convenio matemático puede aclarar este conflicto semiótico (límite como frontera).

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite infinitesimal y al significado geométrico del límite. Hay que tener en cuenta los posibles conflictos semióticos ligados al infinito.

b) Lenguajes: uso fundamental de los lenguajes natural y gráfico, aunque es interesante observar si se usa el lenguaje numérico como apoyo a las argumentaciones.
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque en las acciones podrán presentarse las heurísticas.
d) Conceptos y proposiciones: se observarán las interpretaciones de los conceptos de infinito y tendencia. Puede aflorar un conflicto semiótico, ligado a una entidad proposicional, en el que se relaciona el crecimiento de la variable dependiente con el de la independiente.
e) Acciones: estudio de los posibles pasos encaminados a la resolución de la situación-problema. Se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 2*: ¿Qué entiendes por "una función crece indefinidamente"? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

<u>Análisis a priori</u>:

Objetivo general:

1. Detectar significados personales de la expresión "una función crece indefinidamente".

Objetivos específicos:

1. Analizar las prácticas del alumno sobre los significados personales.
2. Análisis epistémico de dichas prácticas.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se busca identificar si los alumnos admiten el término crece indefinidamente como infinito potencial que puede llegar a ser un número concreto en el límite, o bien, consideran que crecer indefinidamente es crecer hacia infinito, lo que sería un conflicto semiótico potencial inducido por el texto.

El propio término "indefinidamente" es conflictivo por sus distintas connotaciones o interpretaciones: "algo poco preciso (tiene un color indefinido entre verde y amarillo)"; "que no tiene límite determinado o previsible (hoy se iniciará una huelga indefinida)"; "idea vaga o imprecisa de identidad, calidad o cantidad (algún día, cierta noche)".

Hay que resaltar que se plantea esta cuestión por el hecho de la confusión indefinido e infinito, dado que en la primera se le ha preguntado por la variable tendiendo a más infinito.

La red de funciones semióticas puede ser (en el caso de error):

Una función crece indefinidamente $\longrightarrow$ parábola x^2 $\longrightarrow$ función que crece hacia $+\infty$

(o similar)

La red de funciones semióticas puede ser:

Una función crece indefinidamente $\longrightarrow$ Evocar gráficas con asíntota horizontal.

Evocar racionales periódicos o sucesiones indefinidas con límite.

El caso típico de una parábola.

Función que tiene un límite o crece indefinidamente hacia el mismo; crece hacia infinito.

En todo caso, subyace el importante conflicto semiótico epistemológico: contraposición entre lo intuitivo geométrico y su correspondencia con el campo numérico formal.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite infinitesimal y al significado geométrico del límite. Hay que tener en cuenta los posibles conflictos semióticos ligados al infinito.
b) Lenguajes: uso fundamental de los lenguajes natural, gráfico y simbólico, aunque es interesante observar si se usa el lenguaje numérico como apoyo a las argumentaciones.
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque en las acciones podrán presentarse las heurísticas.
d) Conceptos y proposiciones: se observarán las interpretaciones de los conceptos de indefinido, infinito y crecimiento. Se estima que podría aparecer un conflicto semiótico, ligado a una entidad proposicional, en el que se relaciona el crecimiento indefinido de la función con su tendencia a infinito (si f(x) crece indefinidamente, entonces f(x) tiende a más infinito; si f(x) tiende a más infinito, entonces f(x) crece indefinidamente (siendo cierto, se parte de una hipótesis falsa)).
e) Acciones: estudio de los posibles pasos encaminados a la resolución de la situación-problema. Se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 3: *¿Qué entiendes por la expresión "x se aproxima a 3"? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Detectar significados personales de la expresión "x se aproxima a 3".

Objetivos específicos:

1. Analizar las prácticas del alumno sobre los significados personales.
2. Análisis epistémico de dichas prácticas.

3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Hay que resaltar que se plantea esta cuestión buscando el contraste entre los términos: tendencia, crecimiento indefinido y aproximación.

Por otra parte, se observa un enunciado conflictivo al no completar la expresión con “tanto como se quiera”, ya que con ello se pretende evitar contestaciones de aproximación de “2,7” aproxima a 3. Sin embargo, esta situación se atenúa porque los alumnos contestan teniendo en cuenta el conocimiento escolar y asocian sus contestaciones al “tanto como se quiera”.

Se investiga por medio de esta cuestión si el alumno entiende por aproximar a 3 el tomar valores enteros —tal y como aparece en las gráficas, con valores enteros para la abscisa y la ordenada—, como –1, 0, 1, 2, 4, 5...o, como realmente quiere decir, valores que disten de 3 tan poco como se quiera (una centésima, una milésima,...).

En esta expresión verbal puede haber una no congruencia con el tipo de cálculo numérico buscado y se detecta en el manual al uso una transparencia al no especificar qué entiende el autor cuando usa el término “aproximar”. Falta el grado de aproximación.

No sería de extrañar que el alumno no encontrara el sentido buscado a esta pregunta, en principio muy simple, y no supiera concluir de ahí la idea que le quiere dar el texto al cálculo de límites laterales de una función en un punto, pues de eso se trata.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite infinitesimal.
b) Lenguajes: uso fundamental de los lenguajes natural, gráfico y simbólico, aunque es interesante observar si se usa el lenguaje numérico como apoyo a las argumentaciones.

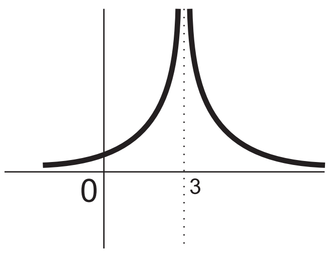
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: se pueden dar conflictos proposicionales del tipo: si f(x) se aproxima a 3, entonces basta que se haga a un solo lado.

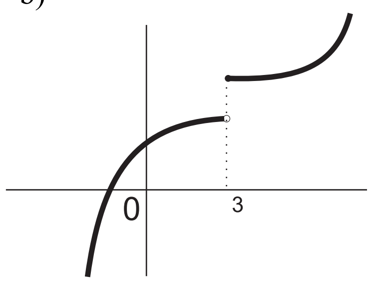
e) Acciones: estudio de los posibles pasos encaminados a la resolución de la situación-problema. Se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 4: *Estudia, para cada una de las siguientes gráficas, si existe, o no, f(3); y si existe, o no, el límite cuando x tiende a 3 de f(x), especificando el valor de sus límites laterales:*

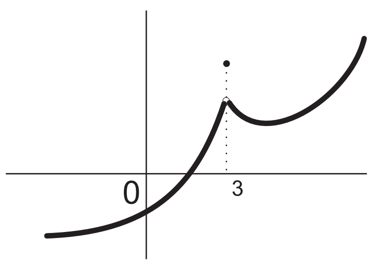
a)



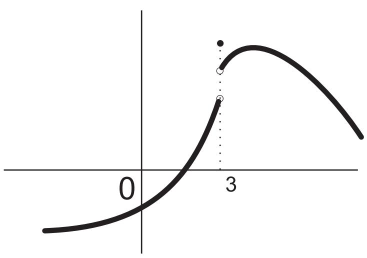
b)



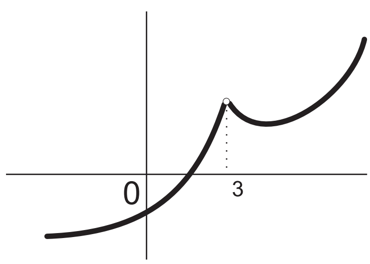
c)



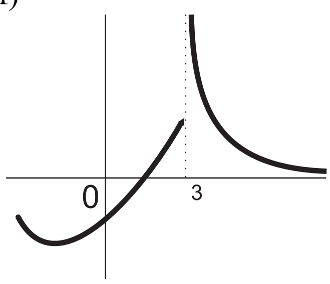
d)



e)



f)



<u>Análisis a priori</u>:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto al valor de una función en un punto y a su límite en dicho punto, en representaciones gráficas de funciones.

Objetivos específicos:

1. Discriminar f(3) de $\lim_{x \to 3} f(x)$, utilizando el lenguaje gráfico.

2. Valorar el límite de una función por medio de sus límites laterales.

3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se trata de determinar si el alumno resuelve sustituyendo el valor 3 en la función como modo de establecer el comportamiento de la función, lo cual supone un conflicto semiótico importante. Además, si es consciente, o no, que el comportamiento de la función es tanto a la derecha como a la izquierda de 3.

Asimismo, se busca comprobar si las propias figuras, que no muestran puntos del tipo (3, f(3)), constituyen una dificultad adicional para la interpretación del estudiante.

La red de funciones semióticas que el sujeto pueda establecer nos informará de los tipos de lenguaje que éste utiliza, las traducciones entre éstos, así como los registros de tipo discursivo a los que recurrirá (a un solo lado del 3 o a ambos lados).

Otra importante idea a contrastar será la relación que establecerá el estudiante entre límite en un punto, límites laterales en ese punto y valor de la función en el mismo.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que el valor del límite en un punto es el de la función en dicho punto, o el recíproco.
- Suponer que la función no existe para valores aislados de la misma.
- Sostener que la existencia de uno de los límites laterales basta para la existencia del límite en el punto.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite en el lenguaje gráfico.

b) Lenguajes: natural, analítico y numérico. No se espera que se utilice el lenguaje gráfico, sino que en las explicaciones se use los lenguajes natural, simbólico y eventualmente numérico.

c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:

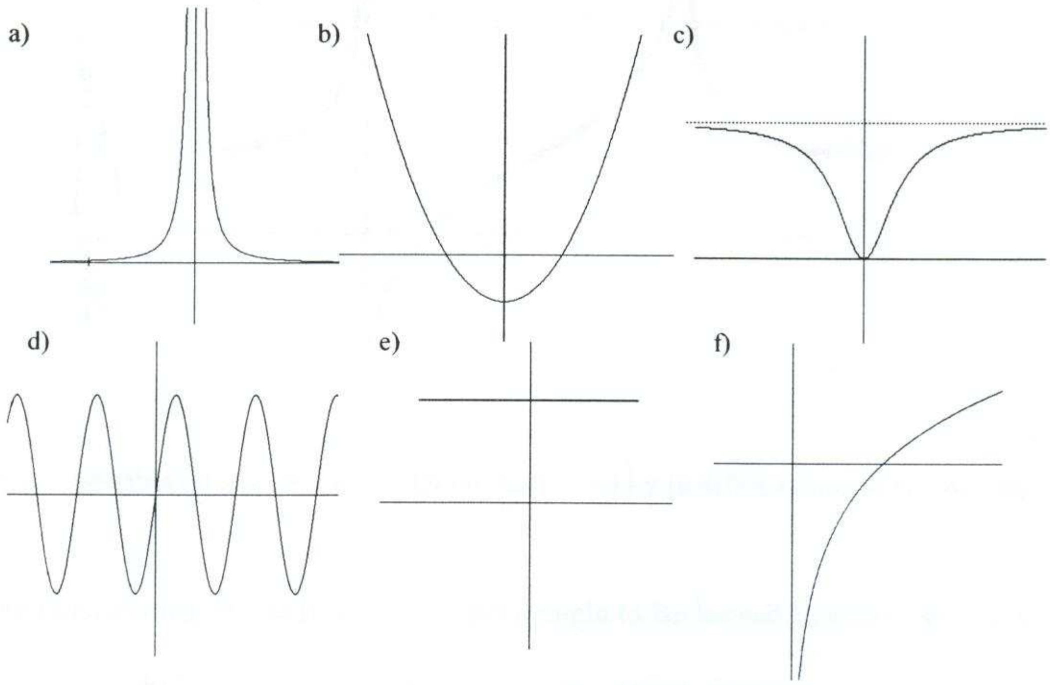
- Si $\exists$ f(a), entonces $\exists \lim_{x \to 3} f(x)$ = f(a).

- Si $\exists \lim_{x \to 3} f(x)$, entonces $\exists$ f(a)= $\lim_{x \to 3} f(x)$.

- Si existe límite lateral en un punto, entonces existe límite en dicho punto.

e) Acciones: estudio de los posibles pasos encaminados a la resolución de la situación-problema. Se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 5: *¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas son las de la figura de abajo, crees que verifican* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$*? Explica, una a una, los motivos de decisión.*



Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales
respecto a la identificación de aquellas representaciones gráficas de funciones que verifican que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Objetivos específicos:

1. Discriminar aquellas gráficas que verifican que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se intuye que los alumnos deben poner en juego la posibilidad de que un crecimiento indefinido condiciona el valor de este límite. Por tanto, se busca que el alumno no vea en la gráfica de c) un resultado hacia +∞, aunque sí un crecimiento indefinido, y que sí vea este resultado tanto en la gráfica de b) como en la de f).

Puede surgir un conflicto semiótico de carácter didáctico en el caso de la función cuya gráfica es e), ya que, al ser constante, el alumno puede “creer” cómo al tender x a +∞ la función se “alarga” todo lo que quiera también a +∞, y así interpretar como verdadera, en este ejemplo, la cuestión planteada.

En el caso de la gráfica de e), *x* varía constantemente (lo que corrobora la idea de “variable” independiente), pero *y* es constante (lo que contradice que *y* sea “variable” dependiente).

La red de funciones semióticas para un alumno que persista en este conflicto podría ser:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ⟶ La función e) (al ser una recta) se alarga todo lo que yo quiera.

Se podría también contrastar si la ausencia del registro analítico (fórmula de la función) sería una dificultad a la hora de responder a esta cuestión. El cálculo algebraico de límites de funciones en el infinito puede derivar en un cálculo mecánico de escasa dificultad, lo que puede suponer que un alumno “calcule” mejor un límite a que sepa “verlo” en el seno de un lenguaje gráfico.

Se observa que acercarse indefinidamente es equivalente para ciertos alumnos a tender hacia +∞. El caso e) podría ser un caso particular de éste.

Además, se podría contrastar si la ausencia del registro numérico es una dificultad a la hora de contestar la cuestión, puesto que no hay cuadrícula. Es decir, de modo general, es posible efectuar la reflexión de que “ciertas figuras predisponen a contestaciones sesgadas y erróneas” (conflicto semiótico de carácter didáctico debido al uso de figuras prototípicas).

Una posibilidad, poco frecuente, es que algún alumno se plantee que las gráficas de las figuras son necesariamente limitadas, lo que origina un conflicto semiótico de carácter escolar que, por convenio, debe haber superado.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que si x tiende a infinito, necesariamente f(x) tiende a infinito.
- Sostener que el límite es más infinito porque la función toma infinitos valores.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite infinito en el infinito, según el lenguaje gráfico.

b) Lenguajes: natural y analítico. No se espera que se utilice el lenguaje gráfico, sino que en las explicaciones se use los lenguajes natural y simbólico.

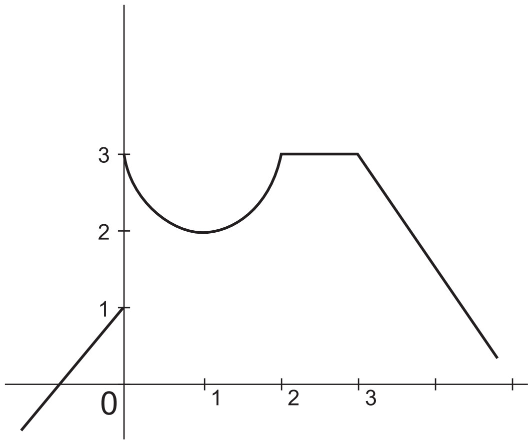
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: Las proposiciones que evocan conflictos semióticos son las siguientes:

- Si x tiende a más infinito, entonces f(x) también tiende a más infinito.
- Si f(x) toma infinitos valores positivos, entonces su límite es más infinito.

e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 6: *Hallar los límites en los puntos x=0; x=2 y x=3 para la función cuya gráfica es:*



Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto a límites finitos en gráficas de funciones a trozos.

Objetivos específicos:

1. Observar la influencia de distractores gráficos de "salto brusco" de forma de la figura en los significados personales.
2. Observar si los alumnos utilizan los límites laterales en la definición del límite.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Esta cuestión analiza el comportamiento de una función cuya representación gráfica es a trozos y se hace hincapié en puntos en los que no existe un salto infinito. El motivo de su planteamiento es analizar comportamientos del estudiante respecto a la existencia, o no, de límites laterales, y su relación con el límite de la función en los puntos indicados.

Se observa cómo en x = 2 y en x = 3, los trozos de la función están "conectados", a diferencia de lo que ocurre en x = 0, produciendo en el alumno la posibilidad de que éste sepa discernir cuándo hay límite y cuándo no. Realmente los casos de abcisas 2 y 3 son iguales, lo que implicaría que los dos se deben responder de la misma manera, según las concepciones del estudiante, independientemente de que las respuestas sean correctas, o no.

El caso de $x = 0$ es más complejo, puesto que los límites laterales no coinciden y el alumno puede verse conducido a conceder como límite el valor numérico de la función en dicho punto, aunque en el gráfico no se detecta claramente cuál es la imagen.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que si los límites laterales del límite de la función en un punto corresponden a figuras distintas no exita el límite o, bien, los límites laterales tengan que ser distintos.
- Sostener que existe límite únicamente si existe uno de sus límites laterales.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite finito en un valor finito, según el lenguaje gráfico, para funciones a trozos.

b) Lenguajes: natural y analítico. No se espera que se utilice el lenguaje gráfico, sino que en las explicaciones se use los lenguajes natural, numérico y simbólico.

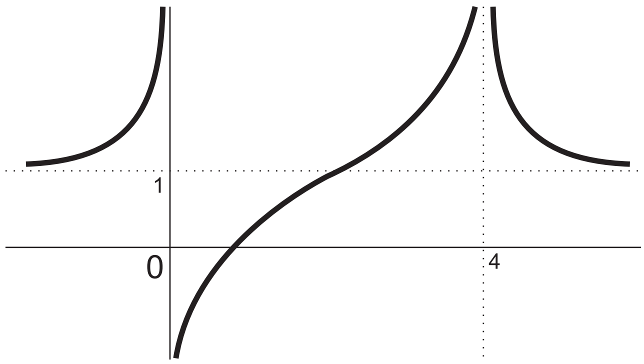
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:

- Si los límites laterales de la función en un punto corresponden a figuras distintas en la gráfica, entonces no existe el límite.
- Si los límites laterales de la función en un punto corresponden a figuras distintas en la gráfica, entonces los límites laterales tienen que ser distintos.
- Si existe uno de los límites laterales, entonces es suficiente para la existencia del límite.

e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 7: *Hallar los límites para: - ∞ ; 0 ; 4 y + ∞, para la función cuya gráfica es:*



Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto a límites en una función con asíntotas horizontales y verticales.

Objetivos específicos:

1. Observar la influencia de las discontinuidades bruscas de la gráfica en el cálculo de los límites para más o menos infinito.
2. Observar la influencia de las asíntotas como elementos distractores en las contestaciones de los sujetos.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Esta cuestión, a diferencia de la anterior, analiza el comportamiento de la gráfica de una función en puntos con salto infinito, además de en más y menos infinito.

Se trata, por tanto, de enfrentar al alumno a gráficas de funciones con asíntotas horizontales y verticales para analizar sus producciones y, junto con la cuestión anterior, recabar datos acerca de las creencias y saberes puestos en juego por los estudiantes para distinguir entre límites finitos e infinitos.

A destacar, también, el hecho de que una rama de la gráfica de la función "atraviesa" la asíntota horizontal, lo que puede provocar un conflicto en el alumno que le lleve a declarar que la función no existe por la imposibilidad de este hecho.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que si los límites laterales del límite de la función en un punto son distintos, aunque infinitos, entonces existe el límite y vale infinito.
- Sostener que existe límite infinito porque existe uno de sus límites laterales.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite finito en el infinito y al significado de límite infinito para valor finito.
b) Lenguajes: natural y analítico. No se espera que se utilice el lenguaje gráfico, sino que en las explicaciones se usen los lenguajes natural, numérico y simbólico.
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.
d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:
- Si el límite es infinito, aunque con distinto signo a ambos lados, entonces existe el límite infinito.
- Si existe uno de los límites laterales infinitos, entonces es suficiente para la existencia del límite infinito.
e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 8: *Observa la tabla de abajo y explica por qué crees que "las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8".*

x	*2,90*	*2,95*	*2,99*	*...*	*3*	*...*	*3,01*	*3,05*	*3,10*
f(x)	*7,41*	*7,7025*	*7,94*	*...*	*8*	*...*	*8,0601*	*8,3025*	*8,61*

Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto al límite de una función representado en una tabla de variación.

Objetivos específicos:

1. Observar si el conocimiento escolar adquirido por los alumnos es suficiente para que sepan interpretar la sucesión de la que se habla en el enunciado, planteada según el manual, aún cuando son dos las sucesiones, una por la derecha y otra por la izquierda. Es decir, hay que ver cómo interpretan los puntos suspensivos.
2. Observar si se discrimina entre las imágenes y los originales.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se induce al conflicto semiótico de considerar el límite como el valor de la función en el punto.

Las funciones semióticas asociadas serían:

tabla numérica $\longrightarrow$ tabla de variación $\longrightarrow$ dos sucesiones $\longrightarrow$

el límite de la función para x $\longrightarrow$ 3

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que 8 es el valor de la función para x=3 porque lo indica la tabla, aunque no existe límite.
- Confundir las respuestas de f(x) con las de x.
- Sostener que basta que exista uno de los límites laterales para que exista el límite de la función.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite finito representado en una tabla de variación.
b) Lenguajes: natural, numérico y analítico. Se espera que se utilice el lenguaje natural, numérico y simbólico en sus explicaciones.
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.
d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:
- Si en la tabla aparecen puntos suspensivos para f(x), entonces no puede saberse cuál es el límite.
- Si existe uno de los límites laterales, entonces es suficiente para la existencia del límite.
e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 9: *Calcula* $\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)$ *y justifica cómo lo has hecho.*

<u>Análisis a priori</u>:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto al límite finito de una función cuando x tiende a un número.

Objetivos específicos:

1. Observar si el sujeto se limita a sustituir la x por 2 en la función, o en cambio, utiliza un razonamiento numérico de aproximación a 2 por la derecha y por la izquierda.

2. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Después de haber resuelto el caso de $x \longrightarrow 3$, inducido por las cuestiones 3), 4) y 8), se busca analizar el tipo de vía semiótica que utiliza el sujeto, prestando especial atención a si se limita a calcular el límite como el valor numérico de la función en el punto.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que el límite de una función en un punto es el valor de la función en el punto.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite finito de una función para valor finito.

b) Lenguajes: natural y analítico. Se espera que se utilice el lenguaje numérico, sin más explicaciones, o bien, una tabla de variación o similar.

c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:

- Para calcular el límite de una función en un punto, basta sustituir el valor de la x en la función.

e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 10: *Dibuja una gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones.*

$$a)\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad b)\lim_{x\to 3^-} f(x)=-4 \quad c)\lim_{x\to 3^+} f(x)=6$$

$$d)\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad e) f(3)=2 \quad f)\ /\!\!\exists f(-4)$$

Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto al dibujo de la gráfica de una función, dado un conjunto de datos expresados en lenguaje analítico.

Objetivos específicos:

1. Observar el grado de coordinación entre los distintos datos, tanto de la función como de los límites, para construir la gráfica.
2. Observar el grado de dominio en el paso del lenguaje analítico al gráfico.
3. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se pretende en esta cuestión que el alumno domine el paso del lenguaje analítico al gráfico, cuando parece que en el desarrollo del texto se insiste más en el caso contrario, corroborado por las cuestiones 4), 5), 6) y 7) del presente cuestionario.

Se marca como objetivo prioritario de esta cuestión el analizar si el alumno es capaz de cumplir todos los requisitos para poder dibujar la gráfica.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que en la información hay datos falsos, como los b) y c), porque el límite para x tendiendo a 3 es el valor de la función.

- Sostener que el dato a) es falso porque el límite cuando x tiende a infinito debe ser infinito.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del lenguaje analítico de una función respecto al lenguaje simbólico.
b) Lenguajes: natural y analítico. Se espera que se utilice el lenguaje gráfico y el natural.
c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter heurístico, puesto que ha de trazarse un plan para el dibujo de la gráfica.
d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:
- Para calcular el límite de una función en un punto basta observar la condición e) y no tener en cuenta las condiciones b) y c).
- Si x tiende a infinito, entonces la función ha de tender también a infinito.
e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

Cuestión 11: *Fíjate en las tablas siguientes y razona si existe, o no, y por qué el límite cuando x tiende a 1.*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	...	*1*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*3*	*3*	*3*	...	*0*	...	*0,001*	*0,01*	*0,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	...	*1*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*-0,1*	*-0,10*	*-0,001*	...	—	...	*0,001*	*0,01*	*0,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	...	*1*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*1,9*	*1,99*	*1,999*	...	*4*	...	*2,001*	*2,01*	*2,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	...	*1*	...	*1,001*	*1,01*	*1,1*

f(x)	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*...*	*—...*	*0,001*	*0,01*	*0,1*

Análisis a priori:

Objetivo general:

1. Determinar los significados personales respecto al límite de una función representado en diversas tablas de variación.

Objetivos específicos:

1. Observar si el conocimiento escolar adquirido por los alumnos es suficiente para que sepan interpretar las sucesiones que aparecen en las tablas. Es decir, hay que ver cómo interpretan los puntos suspensivos y las rayas horizontales.
2. Observar si se discrimina entre las imágenes y los originales.
3. Observar la influencia de la existencia del valor de la función en el punto en la existencia y valor de los límites.
4. Detectar, por medio de los errores y aplicando las funciones semióticas, los conflictos semióticos presentes en el alumno.

Discusión:

Se pretende en esta última cuestión que el estudiante sepa relacionar los comportamientos de una función en un punto a partir de las tablas de variación que se presentan y, por ello, analizar el paso del lenguaje variacional numérico al lenguaje analítico.

Los casos que se estudian en estas cuatro tablas son muy variados y se espera que el alumno sepa discriminar la existencia del límite, o no, a partir de los valores que toma la función a la derecha y a la izquierda del 1, exista o no exista el valor de la función en dicho punto.

Los conflictos semióticos potenciales son los siguientes:

- Sostener que el valor del límite es del de la función en el punto.
- Sostener que no existe límite porque no existe el valor de la función en el punto.

- Sostener que basta que exista uno de los límites laterales para que exista el límite de la función.

Respecto a las entidades primarias se tendrá en cuenta:

a) Situación-problema: está ligada al significado del límite de una función representado en lenguaje numérico.

b) Lenguajes: natural y analítico. Se espera que se utilice el lenguaje natural y el numérico, aunque éste en menor medida.

c) Argumentaciones: puede ser heurística, cuando se desarrolla matemáticamente, y retórica, cuando se justifica verbalmente. Se esperan argumentaciones de carácter retórico, aunque no de tipo heurístico porque el enunciado no facilita la justificación por medio de desarrollos matemáticos.

d) Conceptos y proposiciones: los conflictos semióticos proposicionales son los siguientes:

- Para calcular el límite de una función en un punto, basta sustituir el valor de la x en la función.
- Si no existe valor de la función en el punto, entonces no existe límite en dicho punto.

e) Acciones: se estudiarán los pasos dentro de un mismo lenguaje y entre dos lenguajes distintos.

CAPÍTULO 7

SIGNIFICADOS PERSONALES DECLARADOS EN LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

7.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestran los significados personales declarados por los estudiantes, los cuales se han extraído de las respuestas dadas a las cuestiones de una prueba de evaluación que se aplicó a los 17 alumnos que tomaron parte en el proceso de instrucción (los 17 alumnos que constituían la clase de 1º de Bachillerato en su modalidad de Ciencias de la Salud). En el capítulo 6 se ha realizado un análisis a priori sobre las cuestiones planteadas y corresponde ahora analizar los datos obtenidos.

El análisis de las respuestas de los estudiantes se ha realizado teniendo en cuenta las entidades primarias que se ponen en juego en dicho análisis, según el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Es decir, para cada cuestión se estudia el lenguaje, las acciones y los conflictos semióticos detectados en los alumnos, que, además, se han dividido en conflictos semióticos conceptuales (interviene la entidad primaria *concepto*), conflictos semióticos proposicionales (interviene la entidad primaria *proposicional*) y los conflictos semióticos procedimentales (corresponden a las *acciones* o *procedimientos*).

Para la entidad primaria *argumental* no se da información, pues se considera que, dada la estructura de las cuestiones planteadas, los estudiantes siempre utilizan argumentaciones de tipo retórico (explicaciones escritas sin un discurso matemático desarrollado) y muy escasamente aparecen argumentaciones heurísticas (desarrollos matemáticos en las explicaciones).

Hay que tener en cuenta que la entidad primaria *situación-problema* ya fue desarrollada en el apartado 6.1 donde se justificaron las diversas cuestiones elegidas en función del análisis del proceso de estudio.

Por último, se ha realizado un apartado con "*otros errores*" que son aquéllos que tienen que ver con faltas de atención del alumno y no con verdaderos conflictos semióticos relacionados con entidades primarias.

7.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES.

7.2.1. Resultados sobre la cuestión 1.

¿Qué significa la expresión "x tiende a +∞"? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes, que se han clasificado en conceptuales, proposicionales y procedimentales, se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Proposicionales:</u>

CSP-1.1: Si "x" tiende a +∞ implica que "y" es cada vez mayor.
CSP-1.1': Si "x" tiende a +∞ implica que "f(x)" aumenta sus valores respecto al eje X.

CSP-1.2: Si "x" tiende a +∞ implica que "f(x)" tiende a +∞.
CSP-1.2': Si "x" tiende a +∞ implica que "f(x)" se prolonga a +∞.

CSP-1.3: Si "x" tiende a +∞ implica que "f(x)" es creciente.

CSP-1.4: Si "x" tiende a +∞ implica que la gráfica de "f(x)"se acerca a OX.

<u>Conflictos semióticos Conceptuales:</u>

CSC-1.1: Considera $\pm\infty$ como un número.
CSC-1.2: Identifica el límite con un cálculo algebraico.
CSC-1.3: Identifica "y" con los valores de "x".

Otros errores:

E-1.1: La 2ª parte del lenguaje natural es errónea.

E-1.2: Aislado, dibuja mal lo dicho en lenguaje natural.

E-1.3: El alumno utiliza una gráfica en la que x está bien tratada. Sin embargo, al utilizar una función con flecha hacia más infinito, puede pensarse que subyace un error reproducible ligado al conflicto semiótico ya conocido.

E-1.4: El alumno considera una gráfica que crece hacia más infinito, aunque x tienda a menos infinito.

Notas aclaratorias:

Gráfico_{ej} ; Analítico_{ej} :Lenguajes utilizados para los ejemplos.

Los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores aparecen en la siguiente tabla 7.1:

Tabla 7.1. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 1.

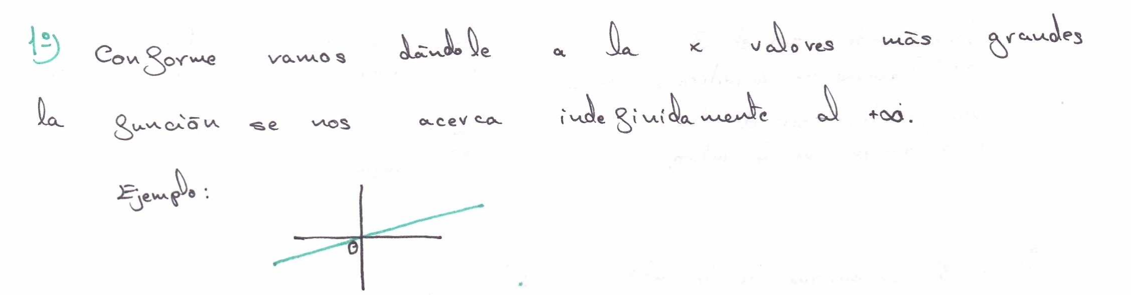
CUESTIÓN 1	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	Natural Gráfico		CSP-1.1	$N \rightarrow G$			INC.
Alumno 2	Natural Analítico	CSC-1.2		$N \rightarrow N$ $N \rightarrow A$		E-1.1	INC.
Alumno 3	Natural Gráfico		CSP-1.2	$N \rightarrow G$ $G \rightarrow N$			CORR.
Alumno 4	Natural Gráfico		CSP-1.2	$N \rightarrow G$			INC.
Alumno 5	Natural Gráfico	CSC-1.1	CSP-1.1	$N \rightarrow G$			INC.
Alumno 6	Natural Gráfico /Analítico		CSP-1.3 CSP-1.2	$N \rightarrow A$ $A \rightarrow G$			INC.
Alumno 7	Natural Gráfico/ Analítico		CSP-1.3 CSP-1.2	$N \rightarrow G$ $G \rightarrow A$			INC.
Alumno 8	Natural Gráfico		CSP-1.2	$N \rightarrow G$			INC.
Alumno 9	Natural Gráfico		CSP-1.2’	$N \rightarrow G$			INC.
Alumno 10	Natural Gráfico	CSC-1.3	CSP-1.2	$N \rightarrow G$		E-1.2	INC.
Alumno 11	Natural Gráfico	CSC-1.3	CSP-1.4	$N \rightarrow G$			INC.

Alumno 12	Natural Gráfico			N → G		E-1.3	CORR.
Alumno 13	Natural Gráfico		CSP-1.1’	N → G			INC.
Alumno 14	Natural Gráfico /Analítico		CSP-1.3 CSP-1.2	N → A A → G G → N			INC.
Alumno 15	Natural Gráfico	CSC-1.1		N → G			CORR.
Alumno 16	Natural Gráfico		CSP-1.2	N → G		E-1.4	INC.
Alumno 17	Natural+ Gráfico Graf. + Anal. (ej)			G → N A → G			CORR.

En esta primera cuestión no se han detectado conflictos semióticos procedimentales, quizá porque el tipo de pregunta no se presta a realizar acciones propias que conlleven la aparición de conflictos. Además, dentro de los conflictos semióticos proposicionales (se han descrito cuatro tipos), hay dos de ellos que aparecen con distintas versiones porque entendemos que aún tratándose del mismo tipo de conflicto, los estudiantes lo han reproducido de manera distinta.

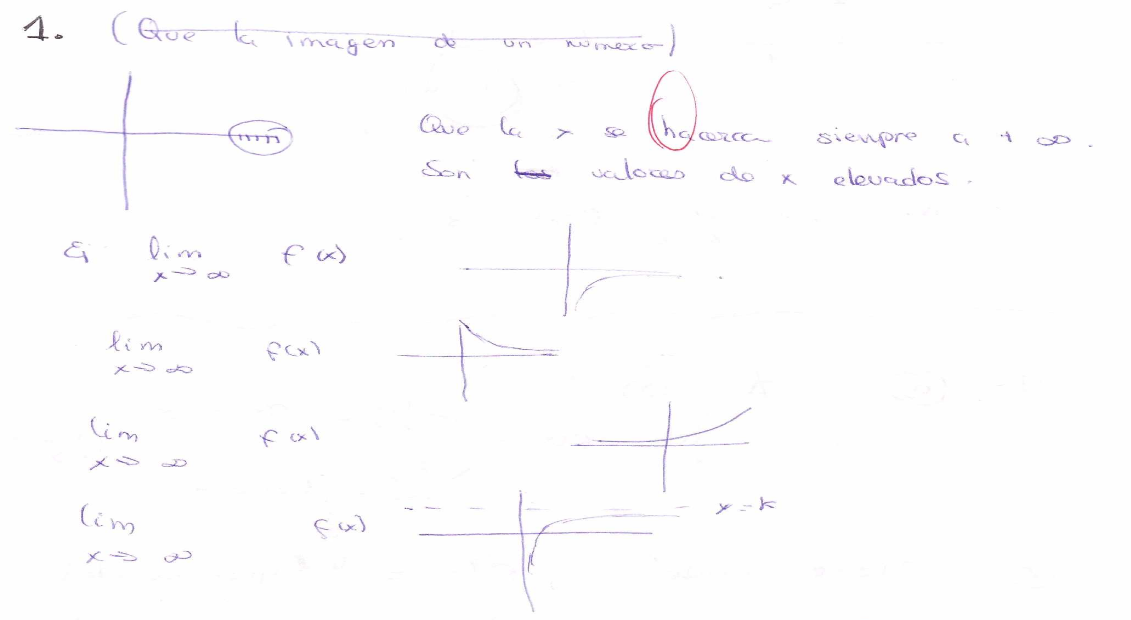
Como se puede observar en la tabla anterior, los tipos de lenguaje que predominan son el natural y el gráfico, y las acciones se realizan sobre estos dos tipos de lenguajes principalmente, aunque hay un cierto uso del lenguaje analítico, poco significativo, además de ausencia total del lenguaje variacional numérico.

Un ejemplo prototípico del uso de los lenguajes natural y gráfico corresponde al alumno 4, el cual se expresa del siguiente modo:



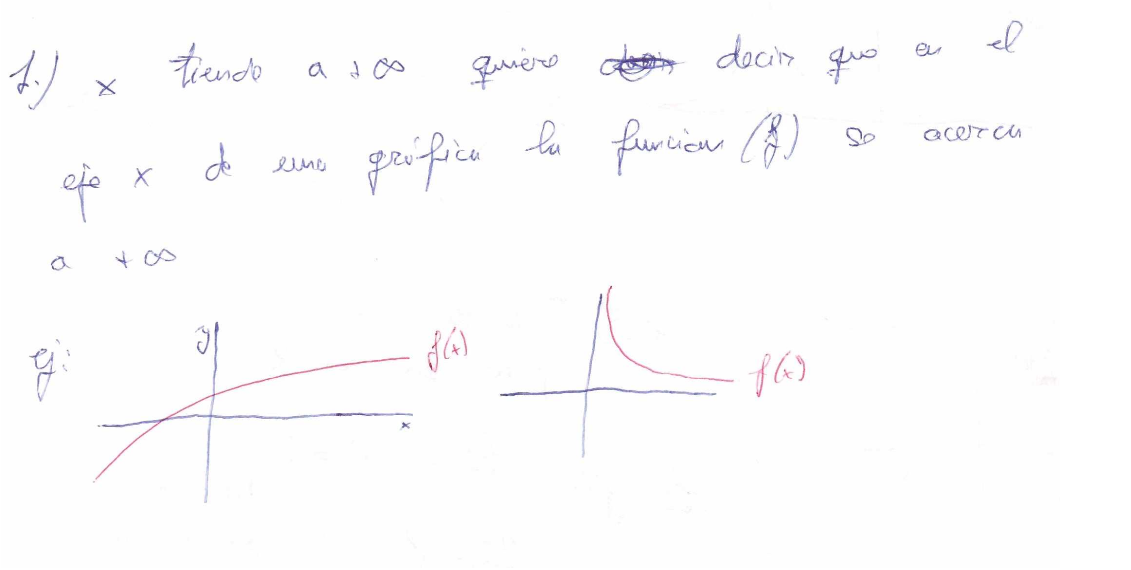
Como se observa, el estudiante asocia el crecimiento indefinido de “x” al crecimiento de la función hacia más infinito, corroborándolo mediante una gráfica. Es decir, en este alumno se detecta el conflicto semiótico CSP-1.2: *si "x" tiende a más infinito, entonces "f(x)" tiende a más infinito.*

Otro ejemplo corresponde al estudiante 17, el cual parte de un lenguaje gráfico para indicar que "x" crece indefinidamente. Posteriormente aclara con el lenguaje natural el significado de "x tiende a más infinito". Por último, se proponen ejemplos, utilizando los lenguajes analítico y gráfico en los que "x" tiende a más infinito:



En este caso se trata de una cuestión contestada correctamente.

Existen casos en los que aparecen incongruencias, incluso al expresar que la función se acerca a más infinito, como ocurre con el alumno 11:



Obsérvese cómo este alumno incurre en el conflicto semiótico CSC-1.3: *identificar "y" con los valores de "x"*, además del conflicto CSP-1.4: *si "x" tiende a más infinito, entonces la gráfica de "f(x)" se acerca al eje OX.*

En la siguiente tabla, 7.2, se recogen los conflictos tratados según el porcentaje en que aparecen en los alumnos:

Tabla 7.2. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS										
PROPOSICIONALES				CONCEPTUALES			OTROS ERRORES			
CSP-1.1	CSP-1.2	CSP-1.3	CSP-1.4	CSC-1.1	CSC-1.2	CSC-1.3	E-1.1	E-1.2	E-1.3	E-1.4
17'65%	52'94%	17'65%	5'88%	11'76%	5'88%	11.76%	5'88%	5'88%	5'88%	5'88%

De los quince alumnos que muestran conflictos semióticos en esta cuestión, nueve de ellos lo hacen respecto del CSP-1.2, lo que representa un 52'94% del total de la clase. Este conflicto se ha presentado de dos formas, pues aunque la mayoría de los alumnos que lo muestran hablan de "tendencia", un alumno se expresa en términos de "prolongar", lo que hemos entendido como una versión distinta del mismo conflicto. No es de extrañar el resultado, ya que es frecuente que identifiquen la tendencia de x al infinito con la tendencia de la función. El resto de conflictos no son tan significativos, y la conclusión que se puede extraer tras el análisis de las respuestas es que la mayoría de los alumnos tienden a establecer una relación de "proporcionalidad directa" entre ambas variables: "*cuanto más grande se hace la variable independiente, más grande se hace la variable dependiente*".

El número de respuestas correctas es de cuatro estudiantes de un total de diecisiete.

7.2.2. Resultados sobre la cuestión 2.

¿Qué entiendes por la expresión "una función crece indefinidamente"? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Proposicionales:</u>

CSP-2.1: Una función crece indefinidamente cuando ésta tiende a $+\infty$.
CSP-2.1': Una función crece indefinidamente implica que "f(x)" tiende a $+\infty$.
CSP-2.1'': Una función crece indefinidamente implica que crece en $\mathbf{R}$ hasta el infinito.
CSP-2.1''': Una función crece indefinidamente implica que el límite de dicha función es infinito.
CSP-2.1'''': Una función crece indefinidamente implica que la función se va a los infinitos ya sean positivos o negativos.

CSP-2.2: Una función crece indefinidamente implica que no está acotada por ningún lado.
CSP-2.2': Una función crece indefinidamente implica que no tiene valores definidos.
CSP-2.2'': Una función crece indefinidamente si no está acotada superiormente.
CSP-2.2''': Una función crece indefinidamente implica que no se sabe dónde acaba y no está acotada.

CSP-2.3: Una función crece indefinidamente implica que no puede decrecer en algún lugar.
CSP-2.3': Una función crece indefinidamente implica que f es estrictamente creciente.

CSP-2.4: Una función crece indefinidamente implica que la función posee una asíntota vertical.

<u>Conflictos semióticos Conceptuales:</u>

CSC-2.1: Creencia de que el límite no es alcanzable, luego enmascara que pueda crecer indefinidamente sin tender a infinito.

CSC-2.2: Interpreta que f nunca puede ser constante.

Los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores aparecen en la siguiente tabla 7.3:

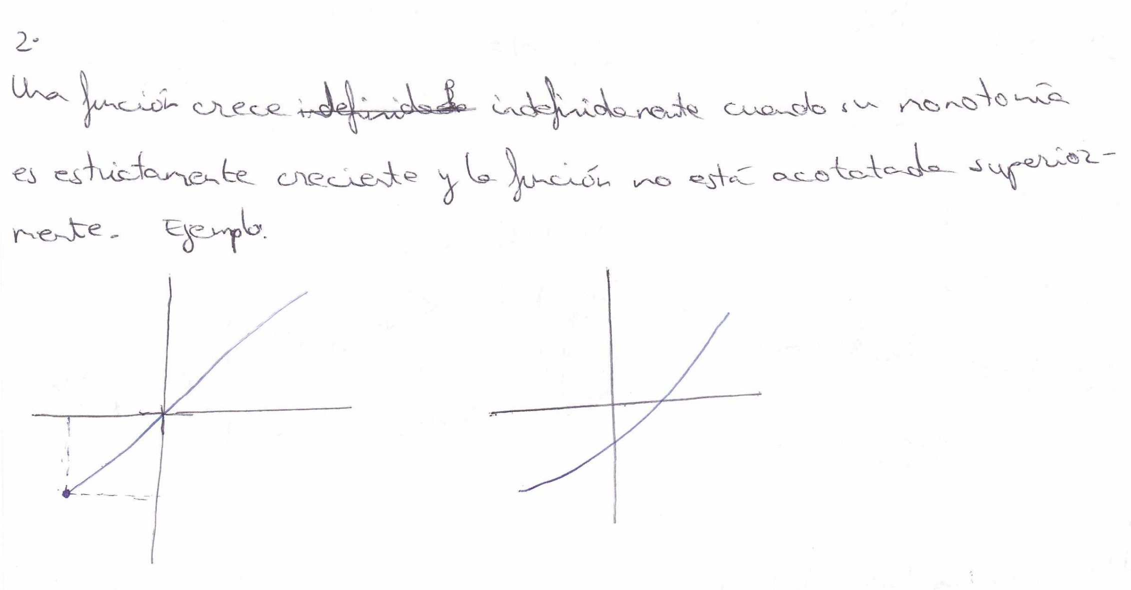
Tabla 7.3. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 2.

CUESTIÓN 2	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedi-mental	Otros errores	Valor
Alumno 1	Natural Gráfico		CSP-2.1	N → G			INC.
Alumno 2	Natural Gráfico	CSC-2.1	CSP-2.2''	N → G			INC.
Alumno 3	Natural Gráfico Analítico		CSP-2.1'	N ↔ A G → N			INC.
Alumno 4	Natural Gráfico	CSC-2.2	CSP-2.1'	N → G			INC.
Alumno 5	Natural Gráfico		CSP-2.1' CSP-2.2	N → G			INC.
Alumno 6	Natural Gráfico		CSP-2.1'	N → G → N			INC.
Alumno 7	Natural Gráfico		CSP-2.2'''	N → G			INC.
Alumno 8	Natural Gráfico			N → G			CORR.
Alumno 9	Natural Gráfico			N → G			CORR.
Alumno 10	Natural		Sin sentido	N → N			INC.
Alumno 11	Natural Gráfico		CSP-2.1'	N → G → N			INC.
Alumno 12	Natural Gráfico Analítico		CSP-2.1' CSP-2.3'	N → A → G			INC.
Alumno 13	Natural Gráfico		CSP-2.2'	N → G			INC.
Alumno 14	Natural Gráfico		CSP-2.1'' CSP-2.3	N → G → N			INC.
Alumno 15	Natural Gráfico Analítico		CSP-2.1'''	N → A → G			INC.
Alumno 16	Natural Gráfico		CSP-2.1'''' CSP-2.4	N → G			INC.
Alumno 17	Natural Gráfico			N → G			CORR.

En esta cuestión, al igual que en la anterior, tampoco se han detectado conflictos semióticos procedimentales, al igual que en la anterior, al ser un tipo de pregunta que se no presta a ello; sin embargo, hay una profusión de conflictos de carácter proposicional pues, aunque fundamentalmente son cuatro, algunos de ellos aparecen en muy variadas versiones.

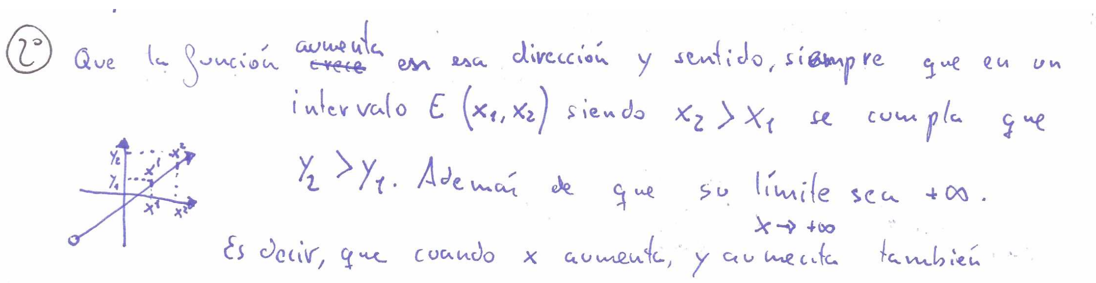
Los tipos de lenguaje más usados siguen siendo el natural y el gráfico, quizá porque con estos tipos se encuentran más cómodos los estudiantes, apareciendo raramente el lenguaje analítico y con ausencia total del lenguaje numérico (prácticamente no usado por el profesor).

Un ejemplo de trabajo con los lenguajes natural y gráfico puede ser el que se presenta en el alumno 2, que muestra confusión al expresar la relación entre monotonía y acotación:



Como se puede observar, hay dos conflictos presentes, uno de carácter conceptual, tipificado como CSC-2.1: *creencia de que el límite no es alcanzable, luego enmascara que pueda crecer indefinidamente sin tender a infinito*; el otro, de carácter proposicional, clasificado como CSP-2.2'': *una función crece indefinidamente si no está acotada superiormente.*

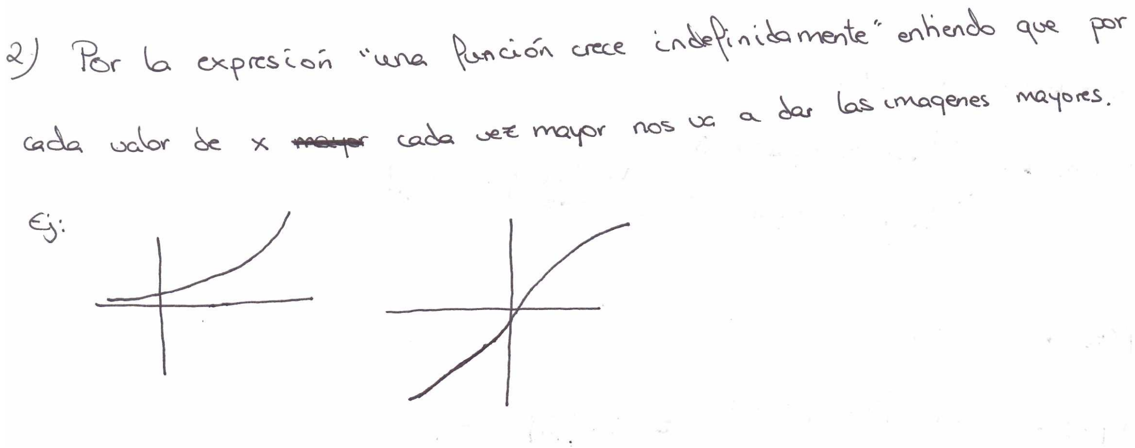
Un caso en el que también aparece el lenguaje analítico es el que presenta el alumno 12:



2) Que la función ~~crece~~ aumenta en esa dirección y sentido, siempre que en un intervalo $E\ (x_1, x_2)$ siendo $x_2 > x_1$ se cumpla que $y_2 > y_1$. Además de que su límite sea $+\infty$.
$x \to +\infty$
Es decir, que cuando x aumenta, y aumenta también

Ante esta respuesta tan formalista, se desprenden dos conflictos, ambos de carácter proposicional, como son el CSP-2.1': *una función que crece indefinidamente implica que "f(x)" tiende a más infinito*, y el CSP-2.3': *una función que crece indefinidamente implica que es estrictamente creciente*.

Como contrapunto a las respuestas erróneas de estos alumnos, se muestra la respuesta correcta del alumno 8:



2) Por la expresión "una función crece indefinidamente" entiendo que por cada valor de x ~~mayor~~ cada vez mayor nos va a dar las imagenes mayores.

Ej:

En la siguiente tabla, 7.4, se relacionan los conflictos semióticos proposicionales y conceptuales según el porcentaje en que aparecen en los alumnos:

Tabla 7.4. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS					
PROPOSICIONALES				CONCEPTUALES	
CSP-2.1	CSP-2.2	CSP-2.3	CSP-2.4	CSC-2.1	CSC-2.2
58'82%	23'53%	11'76%	5'88%	5'88%	5'88%

Más del 50% de los alumnos que muestran conflictos semióticos en esta cuestión interpretan que el crecimiento indefinido de una función implica que ésta tiende a más infinito. La relación de este conflicto con el aparecido en la cuestión 1 es evidente, pues de los 17 alumnos de la clase, 11 tienen relacionados ambos procesos, es decir, si “x” tiende a más infinito, entonces “f(x)” también lo hace, y este hecho se identifica con el crecimiento indefinido de la función. Son, pues, dos cuestiones muy diferentes pero totalmente identificadas por la mayoría del alumnado, a pesar de la insistencia del profesor en las clases por mostrar aspectos diferentes del crecimiento indefinido, hasta llevarlos heurísticamente a la existencia de asíntotas horizontales, como se ha observado en las clases analizadas.

Para los alumnos resulta fácil identificar una asíntota horizontal dando la gráfica de una función, pero es muy complicado pensar en la existencia de la misma cuando la gráfica no se ve, como queda patente en esta cuestión, por lo que se puede concluir también que el número de respuestas correctas no es satisfactorio.

7.2.3. Resultados sobre la cuestión 3.

¿Qué entiendes por la expresión “x se aproxima a 3”? Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Proposicionales:</u>

CSP-3.1: El hecho de aproximarse al 3 implica el no tener imagen en el 3.
CSP-3.1’: El hecho de aproximarse al 3 implica no llegar a tocarlo.

<u>Conflictos semióticos Conceptuales:</u>

CSC-3.1: Confusión del 3 como resultado de un límite.
CSC-3.1’: Identifica "y" con el valor 3.
CSC-3.1’’: Confunde el valor de "x" con el de "y".

CSC-3.2: Relación con el límite en x = 3.

CSC-3.3: Relación con una asíntota horizontal al identificar el valor x = 3 con y = 3.

Conflicto semiótico Procedimental:

CPC-3.1: Relacionado con la existencia de asíntotas verticales.

Notas aclaratorias:

Gráfico_{ej} ; Analítico_{ej} : Lenguajes utilizados para los ejemplos.

Los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores aparecen en la siguiente tabla 7.5.

Tabla 7.5. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 3.

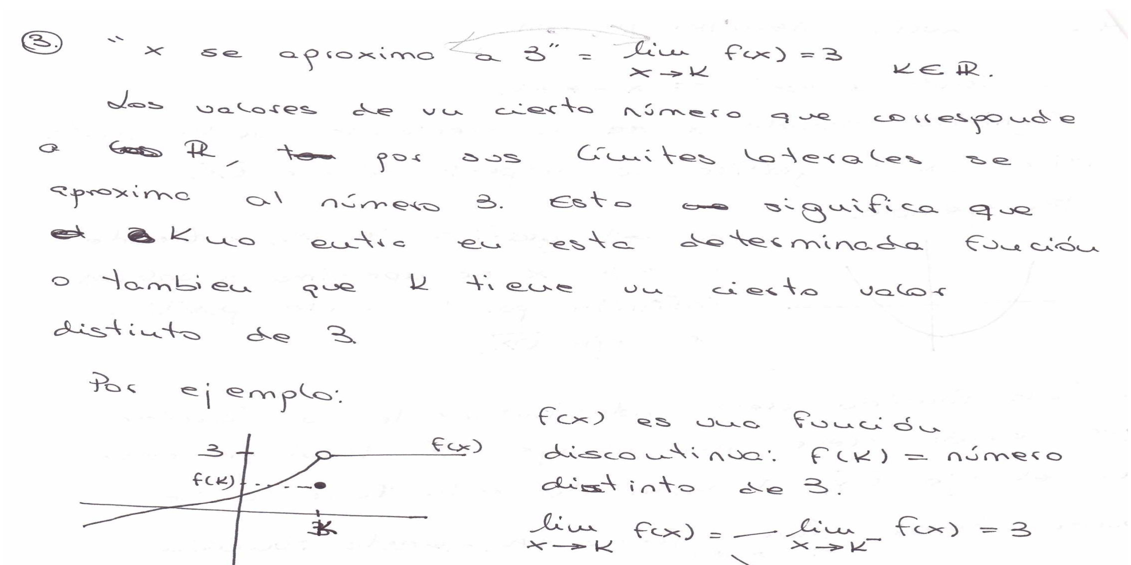
CUESTIÓN 3	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	Natural Gráfico_{ej}		CSP-3.1	N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 2	Natural Gráfico_{ej} Analítico		CSP-3.1’	N→ G→A	CPC-3.1		INC.
Alumno 3	Natural Gráfico_{ej} Analítico_{ej}	CSC-3.1		N → A N → G → A			INC.
Alumno 4	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 5	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’	CSP-3.1	G → N			INC.
Alumno 6	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 7	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 8	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’ CSC-3.1’’		N → G			INC.
Alumno 9	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G			INC.
Alumno 10	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 11	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’ CSC-3.2		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 12	Natural Gráfico_{ej} Analítico	CSC-3.1’ CSC-3.2		N → A→G	CPC-3.1		INC.
Alumno 13	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.1’		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 14	Natural Gráfico_{ej}	CSC-3.3		N → G→N	CPC-3.1		INC.

Alumno 15	Natural Gráfico$_{ej}$	CSC-3.1’ CSC-3.2		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 16	Natural Gráfico$_{ej}$	CSC-3.1’ CSC-3.2		N → G	CPC-3.1		INC.
Alumno 17	Natural Gráfico$_{ej}$ Analítico$_{ej}$	CSC-3.1 CSC-3.1’		N → G → A			INC.

En esta cuestión aparecen, en distintas versiones, los tres tipos de conflictos que se pretenden analizar, si bien, con menor variedad que en las cuestiones anteriores.

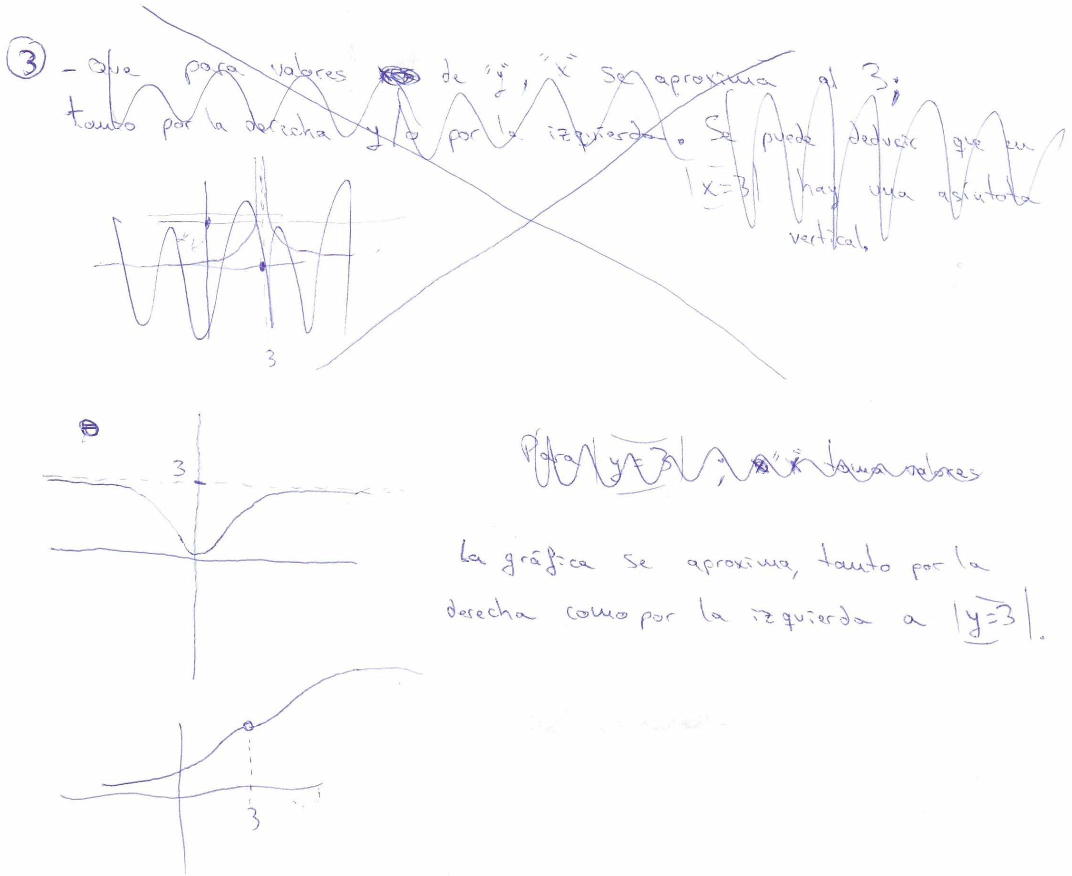
Los lenguajes que predominan, como era de esperar, son el natural y el gráfico, con ausencia total del lenguaje numérico que, en esta ocasión, parecía más pertinente.

Un caso en el que se ponen de manifiesto los lenguajes natural, analítico y gráfico se presenta en el alumno 3, que responde incorrectamente:



Como se puede observar, el conflicto que subyace es de tipo conceptual, tipificado como CSC-3.1: *confusión del 3 como resultado de un límite.*

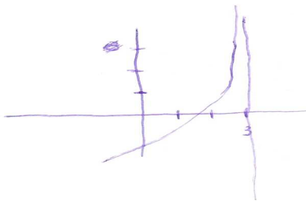
Un ejemplo del uso de los lenguajes natural y gráfico se muestra en la respuesta del alumno 5, que ejemplifica en lenguaje gráfico, para luego explicar en lenguaje natural, aunque tampoco responde correctamente:



En este alumno se presentan dos conflictos semióticos, uno de carácter conceptual, el CSC-3.1’: *identificar “y” con el valor 3*; el otro, de carácter proposicional, el CSP-3.1: *el hecho de aproximarse al 3 implica el no tener imagen en el 3*.

El alumno 10, cuya respuesta aparece a continuación, vuelve a incurrir en el conflicto antes mencionado CSC-3.1’, además de mostrar un conflicto de carácter procedimental, tipificado como CPC-3.1: *relación con asíntotas verticales*, que, como se verá más adelante, ha sido un conflicto que ha aparecido en esta cuestión muy frecuentemente:

3.- "x se aproxima a 3", quiere decir que x = 3 es una asíntota, y que la función se aproxima a 3, pero nunca llega a tocarla. Por ejemplo



En la siguiente tabla, 7.6, se recogen los porcentajes en que los conflictos detectados aparecen en los alumnos.

Tabla 7.6. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS				
PROPOSICIONALES	CONCEPTUALES			PROCEDIMENTALES
CSP-3.1	CSC-3.1	CSC-3.2	CSC-3.3	CPC-3.1
17’65%	76’47%	29’41%	5’88%	70’59%

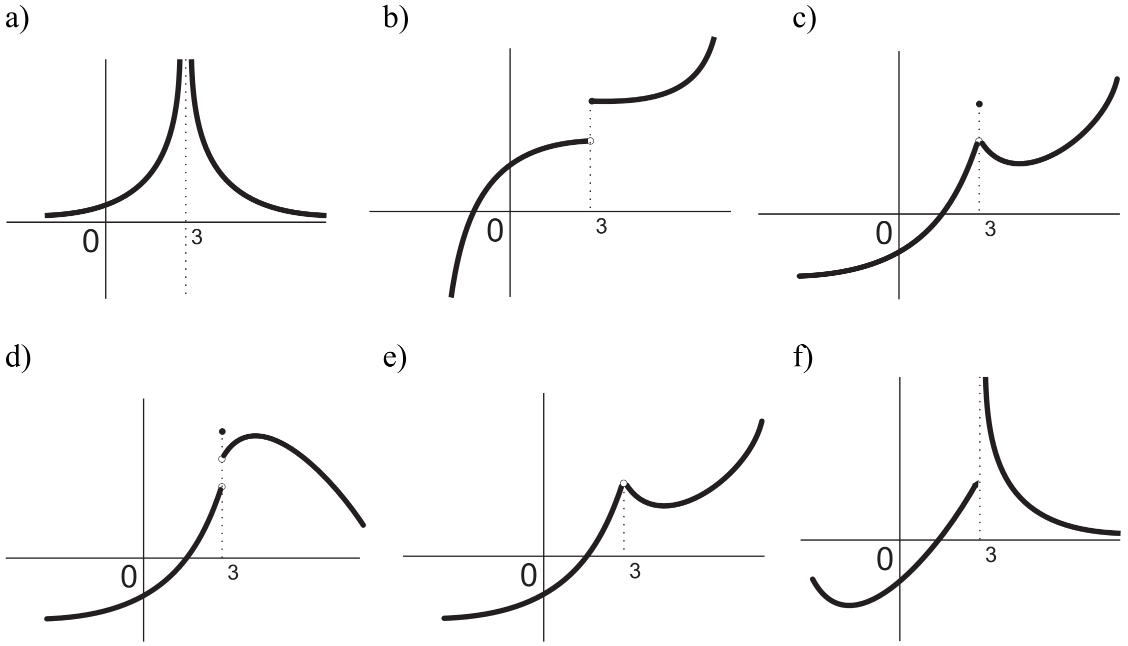
En esta cuestión, en la que se pedía una explicación sobre la frase “x se aproxima a 3”, todos los alumnos han incurrido en alguno de los conflictos ya reseñados, pero el resultado más importante viene relacionado con un conflicto semiótico de carácter conceptual, como es el de confundir el valor de abcisa 3 con el resultado de un límite (en las tres versiones de este conflicto) ya que más del 75% del alumnado lo han pensado así. Tiene estrecha relación esta cuestión con la cuestión 1, en la que también se describía cómo hay alumnos que confunden los valores de “y” con los valores de “x”. En definitiva, se muestra claro que una gran parte del alumnado no distingue en una función entre la variable dependiente e independiente y que su confusión les lleva a no saber interpretar la idea del objeto límite de una función.

Por otro lado, el relacionar esta cuestión con la idea de presentar asíntotas verticales también ha sido objeto de estudio por parte de muchos alumnos, que dan por hecho la existencia de las mismas.

Ningún alumno ha contestado correctamente esta pregunta a pesar de que, a priori, podría parecer carente de dificultad.

7.2.4. Resultados sobre la cuestión 4.

Estudia, para cada una de las siguientes gráficas, si existe, o no, f(3); y si existe, o no, el límite cuando x tiende a 3 de f(x), especificando el valor de sus límites laterales:



Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Proposicionales:</u>

CSP-4.1: Si una función no está definida en un punto no puede tener límite.

CSP-4.2: No considerar el infinito potencial.

<u>Conflictos semióticos Conceptuales:</u>

CSC-4.1: Interpretación incorrecta del límite al confundir los valores de "y" por "x".

CSC-4.2: No reconocer el valor de los límites laterales.

Conflictos semióticos Procedimentales:

CPC-4.1: No saber calcular límites laterales por no saber traducir del lenguaje gráfico al analítico.

CPC-4.2: Obliga a que el límite en el punto sea igual al valor de la función en el punto.

Otros errores:

E-4.1: No indica valor del límite en el punto.

E-4.2: No especifica el resultado del límite como $+\infty$.

E-4.3: No distingue el hecho de que una función no esté definida en un punto.

En la tabla 7.7. se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.7. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 4.

CUESTIÓN 4	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	a) Analítico	a)	a)		a)	a)	CORR.
	b) „	b) CSC-4.1	b)	Todas	b)	b)	INC.
	c) „	c)	c)	dentro	c)	c)	CORR.
	d) „	d) CSC-4.1	d)	del	d)	d)	INC.
	e) „	e) CSC-4.1	e) CSP-4.1	lenguaje	e)	e)	INC.
	f) „	f) CSC-4.1	f) CSP-4.2	analítico	f)	f)	INC.
Alumno 2	a) Analítico	a)	a)		a)	a)	CORR.
	b) „	b)	b)	Todas	b)	b)	CORR.
	c) „	c)	c)	dentro	c)	c)	CORR.
	d) „	d)	d)	del	d)	d)	CORR.
	e) „	e)	e)	lenguaje	e)	e)	CORR.
	f) „	f)	f)	analítico	f)	f)	CORR.
Alumno 3	a) Analítico	a)	a)		a)	a)	CORR.
	b) „	b)	b)	Todas	b)	b)	CORR.
	c) „	c)	c)	dentro	c)	c)	CORR.
	d) „	d)	d)	del	d)	d)	CORR.
	e) „	e)	e)	lenguaje	e)	e)	CORR.
	f) „	f)	f)	analítico	f)	f)	CORR
Alumno 4	a) Nat./An.	a)	a)		a)	a)	CORR.
	b) „	b) CSC-4.1	b)	A → N	b)	b) E-4.3	INC.
	c) „	c)	c)		c)	c) E-4.1	CORR.
	d) „	d) CSC-4.2	d)		d)	d) E-4.1	INC.
	e) „	e)	e)		e) CPC-4.2	e)	INC.
	f) „	f)	f)		f)	f) E-4.2	CORR
Alumno 5	a) N / A / G	a)	a)		a)	a)	CORR.
	b) „	b) CSC-4.2	b)		b)	b) E-4.3	INC.
	c) „	c)	c)	G → N	c)	c)	CORR.
	d) „	d) CSC-4.2	d)	→ A	d)	d)	INC.
	e) „	e)	e)		e)	e)	CORR.
	f) „	f)	f)		f)	f)	CORR.

Alumno 6	a) Nat./An. b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	N → A	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 7	a) Nat./An. b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	N → A	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 8	a) Analítico b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje analítico	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 9	a) Analítico b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	N → A	a) b) CPC-4.1 c) CPC-4.1 d) CPC-4.1 e) CPC-4.1 f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. INC. INC. INC. INC. CORR
Alumno 10	a) Analítico b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje analítico	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 11	a) N / A / G b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	G → A → N	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 12	a) Analítico b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje analítico	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 13	a) Natural b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	No interpreta nada	No interpreta nada	Dentro de un mismo lenguaje	No interpreta nada	No coherente en sus respuestas	INC. INC. INC. INC. INC. INC.
Alumno 14	a) A / N b) „ c) „ d) „ e) „ f) „	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	A → N	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.

<table>
<tr><td>Alumno 15</td><td>a) Analítico
b) „
c) „
d) „
e) „
f) „</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>A → A</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.</td></tr>
<tr><td>Alumno 16</td><td>a) N / A
b) „
c) „
d) „
e) „
f) „</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>N → A</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.</td></tr>
<tr><td>Alumno 17</td><td>a) Analítico
b) „
c) „
d) „
e) „
f) „</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>A → A</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>a)
b)
c)
d)
e)
f)</td><td>CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.
CORR.</td></tr>
</table>

Aparecen los tres tipos de conflictos semióticos, si bien en un porcentaje bajo de estudiantes.

El lenguaje que domina en esta cuestión es el analítico, ya que el estudiante, en su gran mayoría, simboliza correctamente el límite a partir de su lectura gráfica.

Un ejemplo interesante corresponde al alumno 1 que utiliza exclusivamente el lenguaje analítico y realiza todas las acciones dentro de dicho lenguaje, como puede observarse a continuación:

4.-) a) $f(3) = \nexists$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) $f(3) = 5$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2'\hat{9} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3 \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \nexists$

c) $f(3) = 5$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3 \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \boxed{3}$

d) $f(3) = 5$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3 \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \boxed{3}$

e) $f(3) = \nexists$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2'\hat{9} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3'01 \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \nexists$

f) $f(3) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3'01 \end{cases} \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \nexists$

En este caso se ha detectado el conflicto semiótico conceptual CSC-4.1: *interpretación incorrecta del límite al confundir los valores de "y" por "x"*, y los conflictos semióticos proposicionales CSP-4.1: *si una función no está definida en un punto, no puede tener límite*, y el CSP-4.2: *no considerar el infinito potencial*.

Otro caso relevante corresponde al alumno 4, el cual utiliza el lenguaje natural y el analítico, pasando del primero al segundo y viceversa, tal como se muestra a continuación:

4º)

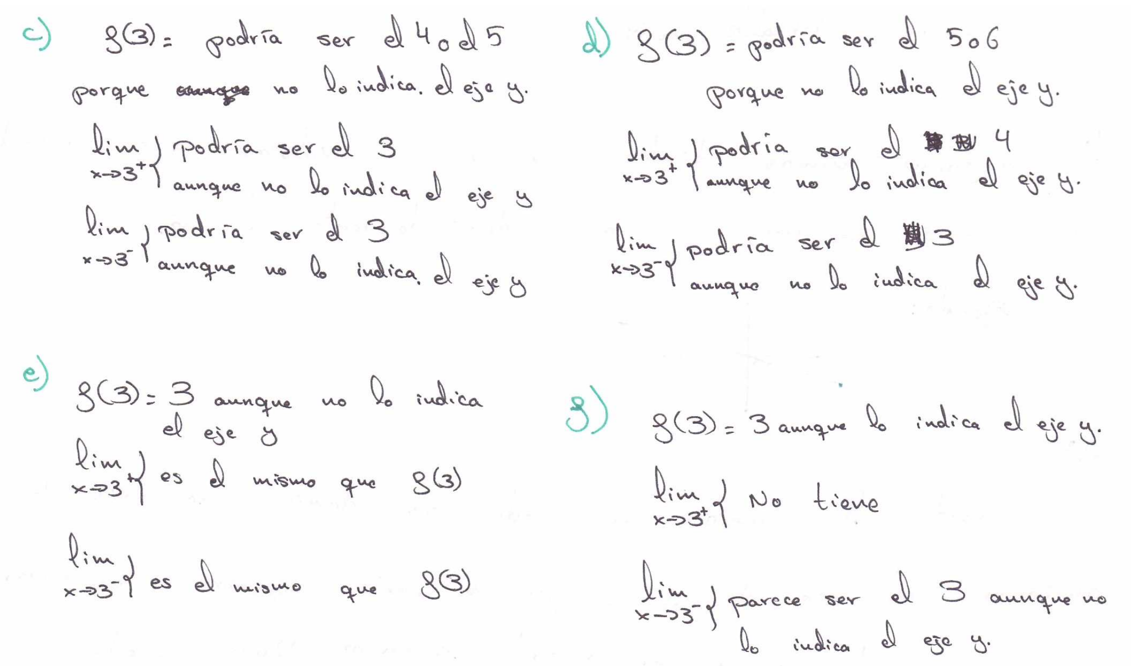
a) no tiene $f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3} +\infty$

b) $f(3)$ no da valores al eje y pero podría ser el $4 = f(3)$.

$\lim\limits_{x\to 3^+}$ } no da valores al eje y pero podría ser el 3

$\lim\limits_{x\to 3^-}$ } no da valores al eje y pero ~~no~~ podría ser el 3.


c) $g(3)=$ podría ser el 4 o el 5 porque ~~aunque~~ no lo indica. el eje y.

$\lim_{x \to 3^+}$ { podría ser el 3 aunque no lo indica el eje y

$\lim_{x \to 3^-}$ { podría ser el 3 aunque no lo indica. el eje y

d) $g(3) =$ podría ser el 5 o 6 porque no lo indica el eje y.

$\lim_{x \to 3^+}$ { podría ser el 4 aunque no lo indica el eje y.

$\lim_{x \to 3^-}$ { podría ser el 3 aunque no lo indica el eje y.

e) $g(3)= 3$ aunque no lo indica el eje y

$\lim_{x \to 3^+}$ { es el mismo que $g(3)$

$\lim_{x \to 3^-}$ { es el mismo que $g(3)$

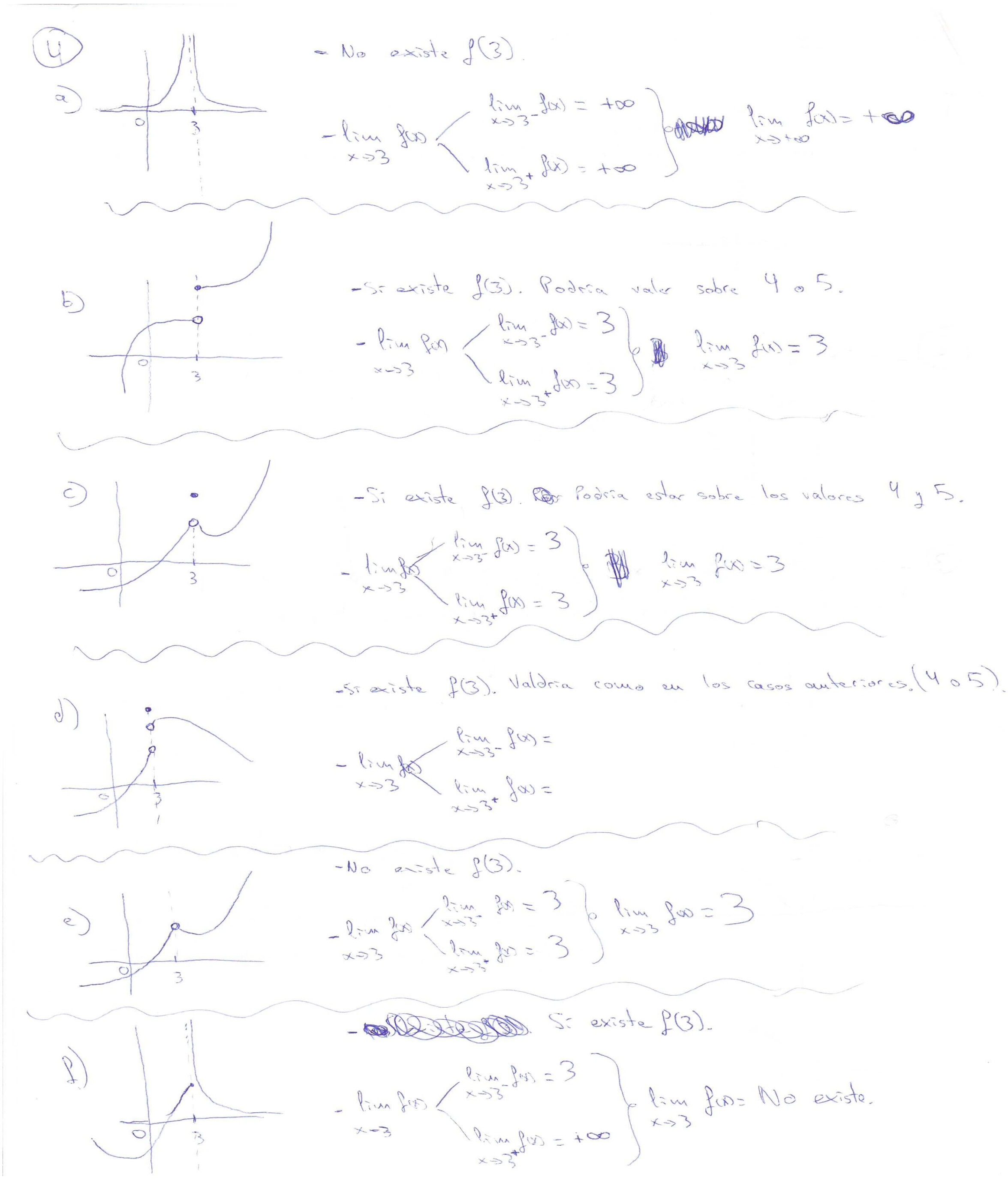
f) $g(3) = 3$ aunque lo indica el eje y.

$\lim_{x \to 3^+}$ { No tiene

$\lim_{x \to 3^-}$ { parece ser el 3 aunque no lo indica el eje y.

En este caso aparece el conflicto semiótico conceptual CSC-4.1, ya definido en el alumno anterior, y el conflicto semiótico conceptual CSC-4.2: *no reconocer el valor de los límites laterales*. Hay que destacar que se cometen otros errores como el E-4.1: *no indicar el valor del límite en el punto*, y el E-4.3: *no distingue el hecho de que una función no esté definida en un punto.*

Por último, se muestra la respuesta del alumno 5, que utiliza los tres lenguajes, natural, analítico y gráfico, con acciones del gráfico al natural y de éste al analítico:



Como puede observarse, este estudiante muestra el conflicto semiótico conceptual CSC-4.2 en los apartados b) y d), ya descrito anteriormente.

En la siguiente tabla, 7.8, están recogidos los porcentajes de incidencia de estos conflictos detectados.

Tabla 7.8. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

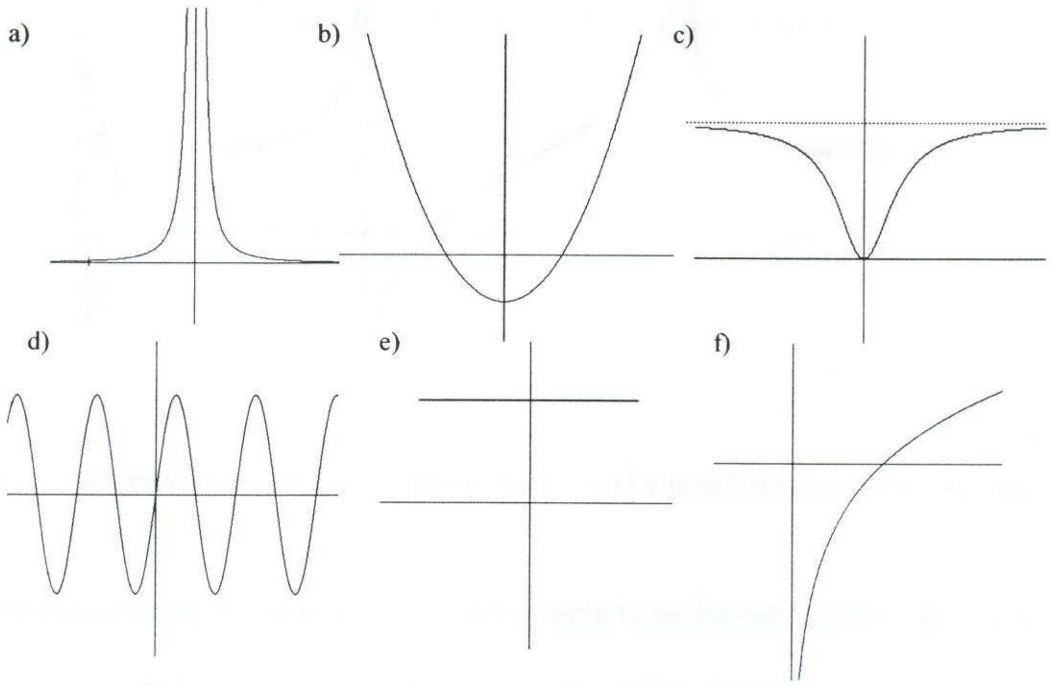
CONFLICTOS SEMIÓTICOS								
PROPOSICIONALES		CONCEPTUALES		PROCEDIMENTALES		OTROS ERRORES		
CSP-4.1	CSP-4.2	CSC-4.1	CSC-4.2	CPC-4.1	CPC-4.2	E-4.1	E-4.2	E-4.3
0'98%	0'98%	4'90%	2'94%	3'92%	0'98%	1'96%	0'98%	1'96%

Esta cuestión buscaba la correcta traducción, por parte del alumnado, del lenguaje gráfico al lenguaje analítico y, salvo escasas excepciones, hemos podido comprobar que este objetivo se cumple. Los errores provocados por conflictos semióticos son de un porcentaje más reducido que en cuestiones anteriores, aunque aún persiste la tendencia en el alumnado de asignar valores a una variable cuando lo son de la otra, como también se ha podido comprobar en las cuestiones 1 y 3, reduciéndose el porcentaje en ésta, quizás porque en el desarrollo de las clases teóricas se ha abusado del lenguaje gráfico y el alumno se ha acostumbrado más a este tipo de pregunta.

Se considera, pues, que el nivel de respuestas correctas de esta cuestión es satisfactorio.

7.2.5. Resultados sobre la cuestión 5.

¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas son las de la figura de abajo, crees que verifican $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *? Explica, una a una, los motivos de decisión.*



Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

Conflicto semiótico Proposicional:

CSP-5.1: Si x$\rightarrow$ +∞ entonces f(x)$\rightarrow$ +∞.

Conflictos semióticos Conceptuales:

CSC-5.1: Identificar valores de "y" con los de "x"
CSC-5.1': Confundir "y = 3" con "x = 3".

CSC-5.2: Calcula el límite cuando x$\rightarrow$ −∞ de forma incorrecta y justifica que al ser los límites laterales distintos no hay límite y no se verifica la cuestión.

CSC-5.3: Confunde la gráfica de la función con la asíntota en el apartado (c).

Otros errores:

E-5.1: Dice que no aumenta sus valores respecto al eje X en la gráfica del apartado (b).

E-5.2: Dice que sí aumenta sus valores respecto al eje X en la gráfica del apartado (e).

Notas aclaratorias:

NC: No contesta.

En la tabla 7.9 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.9. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 5.

CUESTIÓN 5	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	a) N + A b) ,, ,, c) ,, ,, d) ,, ,, e) ,, ,, f) ,, ,,	a) b) c) d) e) CSC-5.1' f)	a) b) c) d) e) f)	Todas del lenguaje $N \rightarrow A$	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. INC. CORR.
Alumno 2	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 3	a) N + A b) ,, ,, c) ,, ,, d) ,, ,, e) ,, ,, f) ,, ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas del lenguaje $N \rightarrow A$	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 4	a) A + N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) CSC-5.1 d) CSC-5.1 e) CSC-5.1 f)	a) CSP-5.1 b) c) d) e) f)	Todas del lenguaje $A \rightarrow N$	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	INC. CORR. INC. INC. INC. CORR
Alumno 5	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f) CSC-5.2	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. INC.
Alumno 6	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 7	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 8	a) N + A b) N c) ,, d) ,,	a) b) c) d)	a) b) c) d)	$N \rightarrow A$ $N \rightarrow N$ $N \rightarrow N$	a) b) c) d)	a) b) c) d)	CORR. CORR. CORR. CORR.

	e) ,, f) ,,	e) f)	e) f)	N → N N → N N → N	e) f)	e) f)	CORR. CORR
Alumno 9	a) b) A + N c) d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) CSC-5.1 e) CSC-5.1 f)	a) b) c) d) e) f)	Todas del lenguaje A → N	a) b) c) d) e) f)	a) NC b) c) NC d) e) f)	INC. CORR. INC. INC. INC. CORR
Alumno 10	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) CSC-5.1 b) c) CSC-5.3 d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	INC. CORR. INC. CORR. CORR. CORR
Alumno 11	a) A + N b) ,, ,, c) ,, ,, d) ,, ,, e) ,, ,, f) ,, ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	A → N A → N A → N A → N A → N G → A	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 12	a) A + N b) ,, ,, c) ,, ,, d) A+N+G e) A + N f) ,, ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	A → N A → N A → N A→N y G A → N A → N	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 13	a) Natural b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) E-5.1 c) d) e) E-5.2 f)	CORR. INC. CORR. CORR. INC. CORR
Alumno 14	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) CSC-5.1 b) c) CSC-5.1 d) CSC-5.1 e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	INC. CORR. INC. INC. CORR. CORR
Alumno 15	a) G + A+ N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	G → A→ N ,, ,, ,, ,, ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 16	a) N b) ,, c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	Todas dentro del lenguaje natural	a) b) c) d) e) f)	a) b) c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 17	a) Analítico b) ,,	a) b)	a) b)	 Todas	a) b)	a) b)	CORR. CORR.

	c) ,, d) ,, e) ,, f) ,,	c) d) e) f)	c) d) e) f)	dentro del lenguaje natural	c) d) e) f)	c) d) e) f)	CORR. CORR. CORR. CORR

El lenguaje que predomina en esta cuestión es el natural, ya que el alumno trata de explicar con "sus" términos los motivos que le hacen tomar una decisión al respecto. También aparece, aunque en menor medida, el lenguaje analítico, quedando patente cómo algunos alumnos se muestran cómodos con este lenguaje.

Respecto a los conflictos presentados se observa que no hay de tipo procedimental y que los otros tipos aparecen aunque no de forma muy significativa.

Para el caso del alumno 4 se observa que utiliza en todos los apartados los lenguajes analítico y natural, pasando del primero al segundo, según aparece a continuación:

5º)

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; si, porque conforme le damos valores a la x cada vez mayores se acerca al $+\infty$.

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; si, porque es una parábola convexa que su rama derecha va hacia al $+\infty$.

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: si, porque parece haber una asíntota horizontal y acercarse la función sin llegar a tocarla, tiraría indefinidamente al $+\infty$.

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: si, porque es periodica, esta función se aproximaría indefinidamente al $+\infty$.

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: si, porque es una constante.

f) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: si, porque crece indefinidamente hacia la derecha.

Se ha detectado reiteradamente el conflicto semiótico conceptual CSC-5.1: *identificar valores de "y" con los de "x"*. Asimismo, aparece el conflicto semiótico proposicional CSP-5.1: *si "x" tiende a más infinito, entonces "f(x)" tiende a más infinito.*

El estudiante 9 no contesta a algunos de los apartados en cuanto a la pregunta que se le hace, sin embargo responde con datos que no se le piden:

5

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$. Las ramas se acercan a la asíntota vertical sin llegar a tocar ese valor de x

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función crece indefinidamente hacia $+\infty$

c) función simétrica respecto $(0,0)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$

f) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ porque la función se prolonga hacia $+\infty$

Se detecta el conflicto semiótico conceptual CSC-5.1, ya descrito anteriormente.

En el caso del alumno 13, únicamente utiliza el lenguaje natural en sus respuestas:

5 A) No porque no aumenta sus valores respecto el eje x.

B) ~~No~~ porque aumenta sus valores respecto el eje x.

C) Si porque aumenta sus valores respecto el eje x.

D) No porque no aumenta sus valores respecto el eje x.

E) Si porque aumenta sus valores respecto el eje x.

f) Si porque aumenta sus valores respecto el eje x.

Se han detectado dos errores, el E-5.1: *no aumenta sus valores respecto al eje X en el caso de la parábola convexa*, y el E-5.2: *sí aumenta sus valores respecto al eje X en el caso de la función constante.*

En la tabla 7.10, se recoge el porcentaje de incidencia de estos conflictos en los alumnos.

Tabla 7.10. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

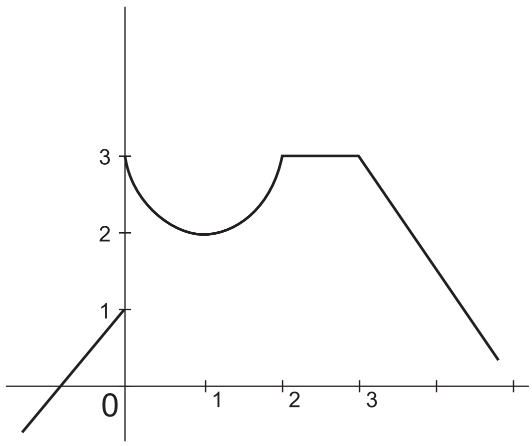
CONFLICTOS SEMIÓTICOS					
PROPOSICIONALES	CONCEPTUALES			OTROS ERRORES	
CSP-5.1	CSC-5.1	CSC-5.2	CSC-5.3	E-5.1	E-5.2
0’98%	9’80%	0’98%	0’98%	0’98%	0’98%

Al igual que la cuestión anterior, en esta cuestión se pregunta acerca de la interpretación analítica de gráficas de funciones para $x \to +\infty$ y, como era de esperar según lo visto en la cuestión 4, el índice de errores por conflictos es mínimo, destacando un error persistente también en cuestiones anteriores, de tipo conceptual, como es el de la asignación de valores a “y”, cuando en realidad son valores de “x”.

A pesar de la persistencia en este error, se puede concluir, a la vista de la tabla que resume los conflictos semióticos presentados, que el nivel de respuestas correctas en esta cuestión es satisfactorio.

7.2.6. Resultados sobre la cuestión 6:

Hallar los límites en los puntos x=0; x=2 y x=3 para la función cuya gráfica es:



Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

Conflictos semióticos Proposicionales:

CSP-6.1: Si los límites laterales en un punto se corresponden con figuras distintas en la gráfica, entonces no existe el límite en ese punto.

CSP-6.2: El límite de una función en un punto es la imagen de la función en ese punto.

Conflictos semióticos Conceptuales:

CSC-6.1: No reconocer la existencia de límites laterales distintos.

CSC-6.2: No reconocer límites laterales iguales como el límite de una función.

CSC-6.3: Sustituir los valores de "y" por los de "x".

Otros errores:

E-6.1: No da el valor del límite en el punto, aunque calcula bien los límites laterales.

Los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores aparecen en la siguiente tabla 7.11.

Tabla 7.11. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 6.

CUESTIÓN 6	**Lenguaje**	**C. S. Conceptual**	**C. S. Proposicional**	**Acciones**	**C. S. Pro-cedimental**	**Otros errores**	**Valor**
Alumno 1 X=0	A	CSC-6.1		Todas			INC.

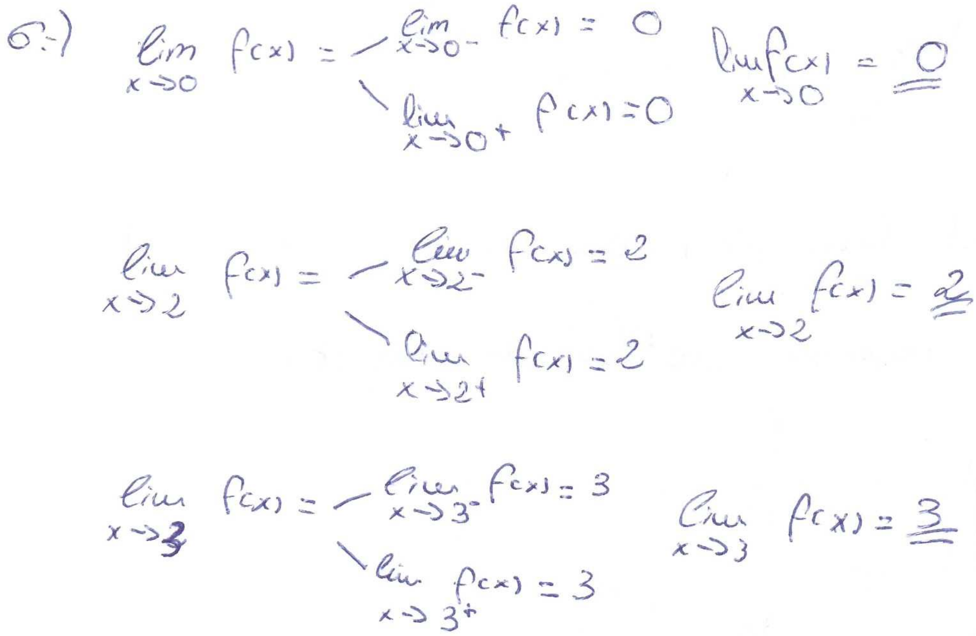
X=2 X=3	,, ,,	CSC-6.3		dentro del lenguaje analítico			INC. CORR.
Alumno 2 X=0 X=2 X=3	 A ,, ,,			 Todas dentro del lenguaje analítico			 CORR. CORR. CORR.
Alumno 3 X=0 X=2 X=3	 A ,, ,,			 Todas dentro del lenguaje analítico			 CORR. CORR. CORR.
Alumno 4 X=0 X=2 X=3	 N + A ,, ,, ,, ,,	 CSC-6.2 CSC-6.2		 A → N A → N A → N		 E-6.1 E-6.1 E-6.1	 INC. INC. INC.
Alumno 5 X=0 X=2 X=3	 A ,, ,,	 CSC-6.1		 Todas dentro del lenguaje analítico			 INC. CORR. CORR.
Alumno 6 X=0 X=2 X=3	 N ,, ,,			 Todas dentro del lenguaje natural			 CORR. CORR. CORR.
Alumno 7 X=0 X=2 X=3	 A + N ,, ,, ,, ,,			 A → N A → N A → N			 CORR. CORR. CORR
Alumno 8 X=0 X=2 X=3	 A + N ,, ,, ,, ,,			 A → N A → N A → N			 CORR. CORR. CORR.
Alumno 9 X=0 X=2 X=3	 A ,, ,,		 CSP-6.1	 Todas dentro del lenguaje analítico		 E-6.1	 INC. CORR. INC.
Alumno 10 X=0 X=2 X=3	 N ,, ,,		 CSP-6.2 CSP-6.2 CSP-6.2	 Todas dentro del lenguaje			 INC. INC. INC.

				natural			
Alumno 11 X=0 X=2 X=3	A „ „			Todas dentro del lenguaje analítico			CORR. CORR. CORR.
Alumno 12 X=0 X=2 X=3	N + A „ „ „ „			N → A → N N → A → N N → A → N			CORR. CORR. CORR
Alumno 13 X=0 X=2 X=3						No acepta la devolución del problema	
Alumno 14 X=0 X=2 X=3	A „ „			Todas dentro del lenguaje analítico			CORR. CORR. CORR.
Alumno 15 X=0 X=2 X=3	A + N „ „ „ „			A → N A → N A → N			CORR. CORR. CORR
Alumno 16 X=0 X=2 X=3	A + N „ „ „ „			A → N A → N A → N			CORR. CORR. CORR
Alumno 17 X=0 X=2 X=3	A + N „ „ „ „			A → N A → N A → N			CORR. CORR. CORR

Como puede observarse, en esta cuestión no aparecen conflictos semióticos de carácter procedimental, y los de tipo conceptual y proposicional no se producen con mucha incidencia.

Los lenguajes que predominan son el analítico y natural, y las acciones se producen todas dentro de un mismo lenguaje (en su mayoría, analítico), o bien, del analítico al natural. Los demás tipos de lenguaje no aparecen, quizás porque la cuestión no se prestaba a ello.

El alumno 1 utiliza únicamente el lenguaje analítico, realizando todas las acciones dentro de dicho lenguaje:



6:)

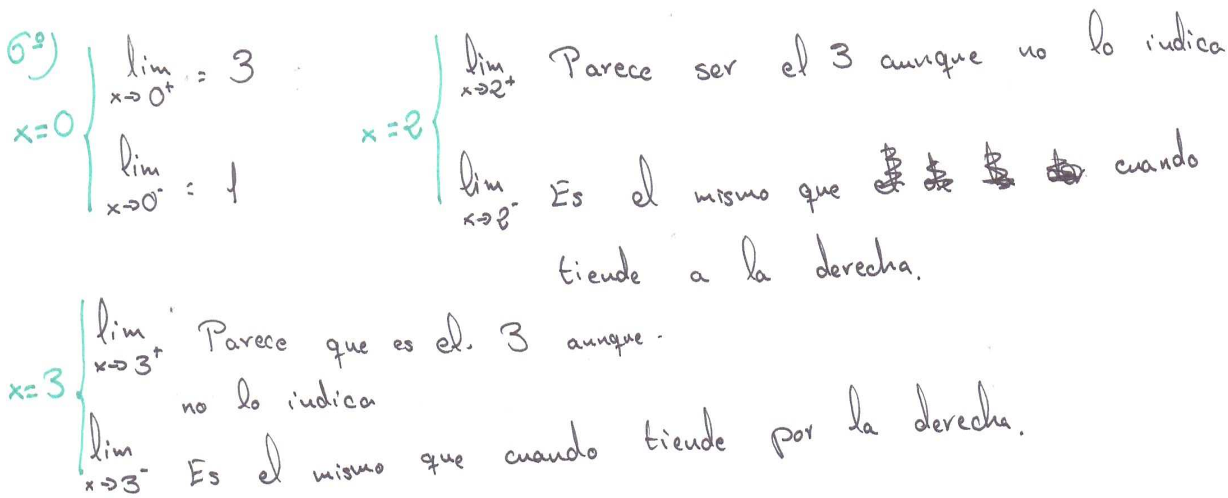
$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = \underline{\underline{0}}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \end{cases}$ $\lim_{x \to 2} f(x) = \underline{\underline{2}}$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 \end{cases}$ $\lim_{x \to 3} f(x) = \underline{\underline{3}}$

Se observan los conflictos semióticos conceptuales CSC-6.1: *no reconocer la existencia de límites laterales distintos*, y el CSC-6.3: *sustituir los valores de "y" por los de "x"*.

En el caso del alumno 4 se utilizan los lenguajes analítico y natural, estableciéndose acciones del primero al segundo:



6º)

$x=0 \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} = 3 \\ \lim_{x \to 0^-} = 1 \end{cases}$

$x=2 \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} \text{ Parece ser el 3 aunque no lo indica} \\ \lim_{x \to 2^-} \text{ Es el mismo que cuando tiende a la derecha.} \end{cases}$

$x=3 \begin{cases} \lim_{x \to 3^+} \text{ Parece que es el 3 aunque no lo indica} \\ \lim_{x \to 3^-} \text{ Es el mismo que cuando tiende por la derecha.} \end{cases}$

Puede observarse el conflicto semiótico conceptual CSC-6.2: *no reconocer límites laterales iguales como el límite de una función*. Aparece, también, un error tipificado como E-6.1: *no dar el valor del límite en el punto, aunque calcula bien los límites laterales.*

El alumno 10 utiliza únicamente el lenguaje natural en sus respuestas, realizando las acciones dentro de dicho lenguaje:

6.-

- lim en $x=0$ vale 1, porque la imagen de 0 en la gráfica es 1
- lim en $x=2$ vale 3, porque para este valor, su imagen es el 3.
- lim en $x=3$ vale 3, ya que para este valor es su imagen.

Se observa el conflicto semiótico proposicional CSP-6.2: *el límite de una función en un punto es la imagen de la función en ese punto*, en cada uno de los tres apartados.

En la siguiente tabla, 7.12, se recogen los conflictos tratados según el porcentaje en que aparecen en los alumnos.

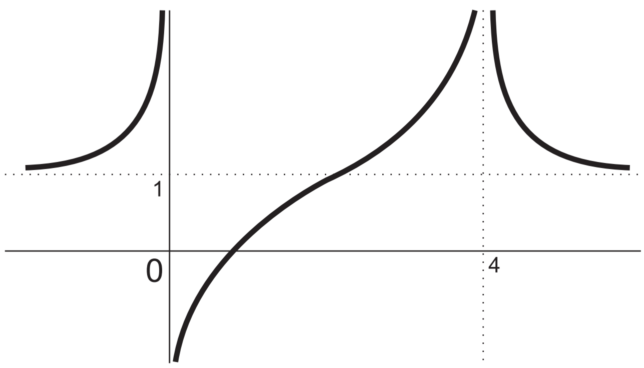
Tabla 7.12. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS					
PROPOSICIONALES		CONCEPTUALES			OTROS ERRORES
CSP-6.1	CSP-6.2	CSC-6.1	CSC-6.2	CSC-6.3	E-6.1
1’96%	5’88%	5’88%	1’96%	1’96%	3’92%

Esta cuestión presentaba una gráfica de una función a trozos para calcular límites en puntos dados de la misma, es decir, puntos en los que se producía un cambio de definición de la función. Como la información dada se realizaba en lenguaje gráfico, al igual que en las cuestiones 4 y 5, el nivel de conflictos presentados es mínimo, según se desprende de esta tabla, por lo que se puede concluir que el índice de respuestas correctas es satisfactorio.

7.2.7. Resultados sobre la cuestión 7:

Hallar los límites para: - ∞ ; 0 ; 4 y + ∞, para la función cuya gráfica es:



Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Proposicionales:</u>

CSP-7.1: Si el límite es infinito, aunque con distintos signos, entonces existe límite infinito.

CSP-7.2: Si existe uno de los límites laterales infinitos, entonces es suficiente para la existencia de límite infinito.

CSP-7.3: Si $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

CSP-7.4: Si $x \to +\infty$ entonces $f(x) \to +\infty$.

Conflictos semióticos Conceptuales:

CSC-7.1: Identificar los valores de "y" con los de "x".

Conflictos semióticos Procedimentales:

CPC-7.1: No reconoce la asíntota horizontal.

CPC-7.2: No reconoce la asíntota vertical.

CPC-7.3: Dice que el límite no existe pero no trata los límites laterales.

CPC-7.4: Da el valor del límite sin justificar por qué.

Notas aclaratorias:

NC: No contesta.

En la tabla 7.13 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.13. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 7.

CUESTIÓN 7	**Lenguaje**	**C. S. Conceptual**	**C. S. Proposicional**	**Acciones**	**C. S. Pro-cedimental**	**Otros errores**	**Valor**
Alumno 1 $x \to -\infty$ $x \to 0$ $x \to 4$ $x \to +\infty$	A ,, ,, ,,		CSP-7.1	Todas dentro del lenguaje analítico	CPC-7.1 CPC-7.1		INC. INC. CORR. INC.
Alumno 2 $x \to -\infty$ $x \to 0$ $x \to 4$ $x \to +\infty$	A + N ,, ,, ,, ,, ,, ,,		CSP-7.1	Todas del $A \to N$			CORR. INC. CORR. CORR.
Alumno 3 $x \to -\infty$ $x \to 0$ $x \to 4$ $x \to +\infty$	A + N ,, ,, ,, ,, ,, ,,			Todas del $A \to N$			CORR. CORR. CORR. CORR.

Alumno 4 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	N „ „ „			Todas dentro del lenguaje natural			CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 5 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A „ „ „		 CSP-7.2	Todas dentro del lenguaje analítico			CORR. INC. CORR. CORR
Alumno 6 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N „ „ „ „ „ „			Todas dentro del lenguaje natural			CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 7 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N „ „ „ „ „ „			 Todas del A → N			CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 8 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N „ „ „ „ „ „			 Todas del A → N			CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 9 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A „ „ „		CSP-7.3	Todas dentro del lenguaje analítico		 NC NC	INC. CORR
Alumno 10 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	N „ „ „	 CSC-7.1 CSC-7.1	 CSP-7.4	Todas dentro del lenguaje natural	 CPC-7.2 CPC-7.1		CORR. INC. INC. INC.
Alumno 11 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A „ „ „			Todas dentro del lenguaje analítico			CORR. CORR. CORR. CORR
Alumno 12 x→- ∞ x→ 0	A + N „ „			 Todas			CORR. CORR.

x→ 4 x→+∞	,, ,, ,, ,,			del A → N			CORR. CORR.
Alumno 13 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞						No acepta la devolución del problema	
Alumno 14 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A ,, ,, ,,		CSP-7.4	Todas dentro del lenguaje analítico	CPC-7.1-7.4 CPC-7.2-7.4 CPC-7.2-7.3 CPC-7.1		INC. INC. INC. INC.
Alumno 15 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N ,, ,, ,, ,, ,, ,,			Todas del A → N			CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 16 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N ,, ,, ,, ,, ,, ,,	CSC-7.1		Todas del A → N			CORR. CORR. INC. CORR.
Alumno 17 x→- ∞ x→ 0 x→ 4 x→+∞	A + N ,, ,, ,, ,, ,, ,,			Todas del A → N			CORR. CORR. CORR. CORR.

En las respuestas a esta cuestión, planteada también desde un punto de vista gráfico, se presentan conflictos de todos los tipos y en mayor número que en cuestiones anteriores y se estima que es debido a la aparición en la misma gráfica de una asíntota vertical y otra horizontal, lo que la hace más compleja.

De nuevo, los lenguajes que aparecen son el analítico y el natural, produciéndose las acciones como en la cuestión anterior.

En la respuesta del alumno 1 se puede observar que sólo utiliza el lenguaje analítico y todas las acciones se realizan dentro de éste:

7.) • $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$

• $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$ ~~A. Vertical~~

• $\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to 4} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$

Se detecta el conflicto semiótico procedimental CPC-7.1: *no reconocer la asíntota horizontal* y el conflicto semiótico proposicional CSP-7.1: *si el límite es infinito, aunque con distinto signo, entonces existe el límite infinito*.

El alumno 10 únicamente utiliza el lenguaje natural en sus respuestas a esta cuestión, realizando todas las acciones dentro de dicho lenguaje:

$\boxed{7.-}$

- lim para $-\infty$ en $x = 1^-$, ya que esta parte de la función tiende a irse a $-\infty$
- lim para 0 en $x = 0$, ya que se va aproximando un trozo de función a 0.
- lim para 4 en $x = 4$, ya que hay una asíntota que se va aproximando a este valor.
- lim para $+\infty$ en $x = 1^+$ y en $x = 4$, ya que se ve, que las ramas tienden a irse a $+\infty$.

Se observan los tres tipos de conflictos semióticos en las respuestas. Primeramente, el conflicto semiótico conceptual CSC-7.1: *identificar los valores de "y"* *con los de "x"*. Además, aparece el conflicto semiótico proposicional CSP-7.4: *si "x" tiende a más infinito, entonces "f(x)" tiende a más infinito*. Por último, también se observan los conflictos semióticos procedimentales CPC-7.2: *no reconocer la asíntota vertical,* y el CPC-7.1, ya descrito.

En el caso del alumno 14 se utiliza únicamente el lenguaje analítico, y sus acciones se efectúan dentro de éste:

7. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1^-$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 4} f(x) = \nexists \lim_{x \to 4} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Se aprecian cuatro conflictos de carácter procedimental: el CPC-7.1 y el CPC-7.2, ya descritos anteriormente, el CPC-7.3: *se afirma que el límite no existe aunque no se tratan los límites laterales*, y el CPC-7.4: *da el valor del límite sin justificar por qué.* Además, aparece un conflicto semiótico de carácter proposicional, el CSP-7.4: *Si* $x \to +\infty$ *entonces* $f(x) \to +\infty$.

En la siguiente tabla, 7.14, se recogen los conflictos tratados según el porcentaje en que aparecen en los alumnos.

Tabla 7.14. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS								
PROPOSICIONALES				CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES			
CSP-7.1	CSP-7.2	CSP-7.3	CSP-7.4	CSC-7.1	CPC-7.1	CPC-7.2	CPC-7.3	CPC-7.4

2’94%	1’47%	1’47%	2’94%	4’41%	7’35%	4’41%	1’47%	2’94%

Se observa en esta cuestión cómo se mantiene el nivel de respuestas correctas, ciertamente elevado, incidiendo, como en las cuestiones anteriores, en el hecho de que se plantea una cuestión en lenguaje gráfico para el cálculo de límites y, como era de esperar por resultados anteriores, el alumnado no encuentra dificultad en pasar del lenguaje gráfico al analítico o natural. No se presentan grandes porcentajes en conflictos semióticos, aunque persiste el conflicto de adjudicar a la variable dependiente los valores de la otra variable, junto con la dificultad de no saber identificar bien las asíntotas de la gráfica de una función, en especial, las horizontales.

El porcentaje de respuestas correctas en esta cuestión es satisfactorio.

7.2.8. Resultados sobre la cuestión 8:

Observa la tabla de abajo y explica por qué crees que “las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8”.

x	2,90	2,95	2,99	...	3	...	3,01	3,05	3,10
f(x)	7,41	7,7025	7,94	...	8	...	8,0601	8,3025	8,61

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

Conflictos semióticos Proposicionales:

CSP-8.1: Si en la tabla aparecen puntos suspensivos para f(x), entonces no puede saberse cuál es su límite.

CSP-8.2: El hecho de dos sucesiones que se acercan al 8 implica una gráfica simétrica.

CSP-8.3: Si existe uno de los límites laterales, es suficiente para la existencia del límite.

CSP-8.4: El hecho de que la función sea creciente implica que no puede saberse el límite.

Conflictos semióticos Conceptuales:

CSC-8.1: Asignar a la variable “x” los valores de la variable “y” (el alumno escribe $x \to 8^-$; $x \to 8^+$).

CSC-8.2: Creencia de que el límite no es alcanzable.

CSC-8.3: Aceptar como límite en un punto el valor de su imagen, sin tener en cuenta los límites laterales.

Conflicto semiótico Procedimental:

CPC-8.1: Reconoce que el límite es 8, pero no justifica nada. La interpretación que le da a la gráfica es correcta.

En la tabla 7.15 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.15. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 8.

CUESTIÓN 8	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	Natural	CSC-8.1 CSC-8.2		Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 2	Natural			Dentro del lenguaje N			CORR.
Alumno 3	A + N			$A \to N$			CORR.
Alumno 4	Natural	CSC-8.3		Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 5	N + G			$N \to G$			CORR.
Alumno 6	Natural			Dentro del lenguaje N		No acepta devolución	INC.
Alumno 7	Natural		CSP-8.1	Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 8	Natural			Dentro del lenguaje N			CORR.
Alumno 9	A + G			$G \to A$	CPC-8.1		INC.

Alumno 10	Natural		CSP-8.2	Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 11	Natural			Dentro del lenguaje N			CORR.
Alumno 12	N + A			A → N			CORR.
Alumno 13	Natural		CSP-8.3	Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 14	G + N	CSC-8.3		G → N			INC.
Alumno 15	Natural			Dentro del lenguaje N			CORR.
Alumno 16	Natural		CSP-8.4	Dentro del lenguaje N			INC.
Alumno 17	Natural			Dentro del lenguaje N			CORR.

En esta cuestión se han detectado todos los tipos de conflictos semióticos ya descritos anteriormente y, aunque son variados, el porcentaje de incidencia por alumno es menor que en otras cuestiones.

El tipo de lenguaje que predomina en esta cuestión es el natural que, como se hace patente, es el lenguaje en el que más cómodos se encuentran los estudiantes a lo largo de todo este cuestionario; en menor medida, aparecen los lenguajes gráfico y analítico. La mayoría de las acciones se producen dentro del lenguaje natural, en ausencia del lenguaje variacional numérico.

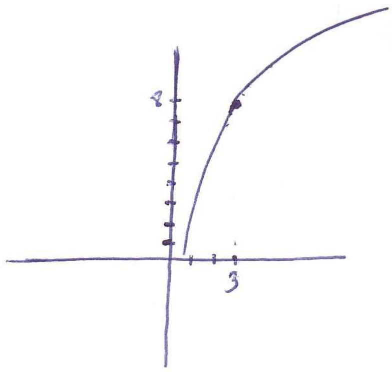
Para el alumno 1 puede observarse que utiliza únicamente el lenguaje natural y las acciones están dentro de este lenguaje:

8.-) Las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8 porque $\underset{x\to 8^-}{f(x)}$ se acerca infinitamente a 8 sin llegar a tocarlo y $\underset{x\to 8^+}{f(x)}$ se acerca infinitamente a 8 sin llegar a tocarlo.

Se observan los conflictos semióticos conceptuales CSC-8.1: *asignar a la variable "x" los valores de la variable "y" (el alumno escribe $x\to 8^-$; $x\to 8^+$)*, y el CSC-8.2: *creencia de que el límite no es alcanzable*.

Un ejemplo interesante en el que se ponen de manifiesto los lenguajes gráfico y analítico se produce en el alumno 9, cuyas acciones van del gráfico al analítico:

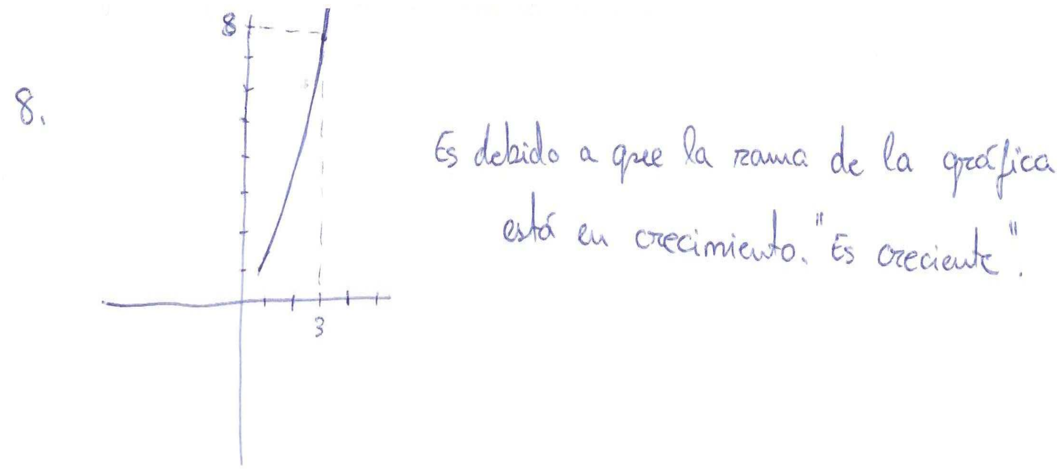
$\boxed{8}$



$\lim_{x\to 8} f(x) = 8$

Este alumno muestra un conflicto semiótico de carácter procedimental, el CPC-8.1: *reconoce que el límite es 8, pero no justifica nada*, con interpretación correcta de la gráfica.

Un último ejemplo representativo corresponde al alumno 14, que moviliza los lenguajes gráfico y natural y realiza las acciones del primero al segundo, según se puede observar:



Como se puede observar a través de la respuesta, este alumno presenta el conflicto semiótico conceptual CSC-8.3: *aceptar como límite en un punto el valor de su imagen, sin tener en cuenta los límites laterales.*

En la siguiente tabla, 7.16, se muestran los porcentajes con los que aparecen los conflictos detectados en los alumnos.

Tabla 7.16. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS							
PROPOSICIONALES				CONCEPTUALES			PROCEDIMENTALES
CSP-8.1	CSP-8.2	CSP-8.3	CSP-8.4	CSC-8.1	CSC-8.2	CSC-8.3	CPC-8.1
5’88%	5’88%	5’88%	5’88%	5’88%	5’88%	11’76%	5’88%

Para interpretar esta cuestión, el alumno debe traducir del lenguaje tabular o numérico al lenguaje natural o analítico, hecho poco trabajado por los alumnos hasta ahora y que apenas fue tratado por el profesor en las clases teóricas correspondientes. A pesar de ello, se estima que el nivel de respuestas es bastante bueno y que los porcentajes de conflictos no son significativos, lo que puede implicar que la tabla de variación tiene por sí misma información relevante para los estudiantes, a excepción de que hay alumnos que siguen considerando que el límite de una función en un punto coincide con la imagen de la función en dicho punto, obviando las indicaciones que el profesor explicaba al respecto.

7.2.9. Resultados sobre la cuestión 9:

Calcula $\lim_{x \to 2}(x^2 - 1)$ *y justifica cómo lo has hecho.*

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

Conflictos semióticos Conceptuales:

CSC-9.1: El límite de una función en un punto es la imagen de la función en ese punto.
CSC-9.2: El alumno especifica que el valor de "x" para el que hay que calcular el límite pertenece al dominio de la función.
CSC-9.3: La alumna especifica que si sale una indeterminación, habría buscado otros medios para llegar al límite.

Conflicto semiótico Procedimental:

CPC-9.1: Calcula el límite como dos límites laterales, pero hace lo mismo.

Notas aclaratorias:
A_{calc} : utiliza el lenguaje analítico para el cálculo.
N_{just} : utiliza el lenguaje natural para la justificación.

Los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores aparecen en la siguiente tabla 7.17.

Tabla 7.17. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 9.

CUESTIÓN 9	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$	CPC-9.1		INC.
Alumno 2	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 3	A_{calc} +	CSC-9.1		$A \to N$			INC.

	N_{just}						
Alumno 4	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 5	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 6	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 7	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 8	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 9	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 10	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 11	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 12	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1 CSC-9.2		$A \to N$			INC.
Alumno 13						No acepta devolución	
Alumno 14	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 15	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1 CSC-9.3		$A \to N$			INC.
Alumno 16	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.
Alumno 17	A_{calc} + N_{just}	CSC-9.1		$A \to N$			INC.

En esta cuestión no se han detectado conflictos semióticos de carácter proposicional, sólo uno de carácter procedimental y todos los alumnos que responden muestran un conflicto semiótico de carácter conceptual, que es el de mayor porcentaje.

Además, en las respuestas de los alumnos se observa la misma pauta: todos hacen un cálculo del límite utilizando el lenguaje analítico y lo justifican en lenguaje natural, por lo que se echa en falta el uso del lenguaje numérico o variacional que, para esta cuestión, sería el más pertinente.

Las acciones que reproducen todos los alumnos pasan del lenguaje analítico al natural, excepto un alumno que no acepta la devolución, siendo de destacar el hecho de que ningún alumno ha utilizado una tabla de variación numérica para justificar el valor del límite. También es de destacar, como ya se ha comentado, que todos reproducen un conflicto semiótico de carácter conceptual, tipificado como CSC-9.1: *el límite de una función en un punto es la imagen de la función en ese punto.*

A modo de representatividad, se han elegido las respuestas de tres alumnos que, además del conflicto señalado, incurren en otros conflictos:

Alumno 1:

9.) $\lim_{x\to 2}(x^2-1) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-}(x^2-1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+}(x^2-1) = 3 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 2}(x^2-1) = \underline{\underline{3}}$

He calcolado el $\lim_{x\to 2} f(x)$ por la izquierda y el $\lim_{x\to 2} f(x)$ por la derecha sustituyendo en $f(x)$.

Como puede observarse, este alumno presenta otro conflicto semiótico de carácter procedimental, el CPC-9.1: *calcula el límite como dos límites laterales, pero hace lo mismo.*

Alumno 12:

9° $\lim_{x\to 2}(x^2-1) = 3$

Se sustituye el valor de la x en la función y el resultado es el límite porque $x=2 \in \mathrm{Dom}\, f(x)$.

Otro conflicto semiótico de carácter conceptual que presenta es el CSC-9-2: *el alumno especifica que el valor de "x" para el que hay que calcular el límite pertenece al dominio de la función.*

Alumno 15:

$\boxed{9}$

$\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$ | pues nos pide el límite de un número, lo sustituimos en la función y nos ha salido el límite, si hubiera salido una indeterminación usaríamos otros medios para llegar al límite

Además del ya común a los tres, se observa aquí otro conflicto de carácter conceptual, el CSC-9.3: *la alumna especifica que si sale una indeterminación, habría buscado otros medios para llegar al límite.*

En la siguiente tabla, 7.18, se muestra el porcentaje de los alumnos que muestran los conflictos detectados.

Tabla 7.18. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS			
CONCEPTUALES			PROCEDIMENTALES
CSC-9.1	CSC-9.2	CSC-9.3	CPC-9.1
94’12%	5’88%	5’88%	5’88%

Esta cuestión, quizá la de más fácil respuesta, pedía una justificación para el cálculo del límite de una función polinómica (cuadrática) en un punto. Todos los alumnos que la realizan cometen el error de justificar dicho límite como el valor de la función en dicho punto y, aunque el resultado a alcanzar es ése, dichas respuestas se han considerado erróneas, pues la única justificación que dan es la que conlleva el conflicto CSC-9.1, es decir, el límite de una función en un punto es la imagen de la función en dicho punto, sin considerar, por ejemplo, que el dominio de la función es $\mathbf{R}$, por ser polinómica, y que la función es continua en todo su dominio. No se comprometen con analizar una tabla de variación numérica, ni otras justificaciones que los llevaran al mismo resultado pero con otro razonamiento.

Analizando cuestiones anteriores, se establece una estrecha relación de este conflicto con el CPC-4.2, CSP-6.2 y CSC-8.3, conflictos de distinto tipo, según la interpretación que se les da en cada cuestión.

7.2.10. Resultados sobre la cuestión 10:

Dibuja una gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones:

$$a)\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad b)\lim_{x\to 3^-} f(x)=-4 \quad c)\lim_{x\to 3^+} f(x)=6$$

$$d)\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad e) f(3)=2 \quad f)\,/\!\!\!\exists f(-4)$$

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflictos semióticos Conceptuales:</u>

CSC-10.1: Identificar valores de “y” con los de “x”.

CSC-10.2: Al aparecer límites laterales en x = 3, se presupone que hay una asíntota vertical en x = 3.

CSC-10.3: La existencia de asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ le lleva a dar por hecho que también es asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.

<u>Conflictos semióticos Procedimentales:</u>

CPC-10.1: No sabe traducir del lenguaje analítico al gráfico.

CPC-10.2: El alumno no interpreta que todas las condiciones sean para la misma gráfica y dibuja una por apartado, aunque todas están mal.

<u>Otros errores:</u>

E-10.1: No tiene en cuenta alguna condición, hecho que induce a pensar que es una omisión no intencionada.

En la tabla 7.19 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.19. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 10.

CUESTIÓN 10	Lenguaje	C. S. Conceptual	C. S. Proposicional	Acciones	C. S. Procedimental	Otros errores	Valor
Alumno 1							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	„	CSC-10.2					INC.
c)	„	CSC-10.2					INC.
d)	„						CORR.
e)	„	CSC-10.2					INC.
f)	„						CORR.
Alumno 2				Todas dentro del lenguaje gráfico			
a)	Gráfico						CORR.
b)	„						CORR.
c)	„						CORR.
d)	„						CORR.
e)	„						CORR.
f)	„					E-10.1	INC.
Alumno 3							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	„						CORR.
c)	„						CORR.
d)	„						CORR.
e)	„						CORR.
f)	„						CORR.
Alumno 4							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	„						CORR.
c)	„						CORR.
d)	„						CORR.
e)	„						CORR.
f)	„						CORR.
Alumno 5							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	„				CPC-10.1		INC.
c)	„				CPC-10.1		INC.
d)	„						CORR.
e)	„						CORR.
f)	„	CSC-10.1					INC.
Alumno 6							
a)	Gráfico			Todas dentro del			CORR.
b)	„						CORR.
c)	„						CORR.

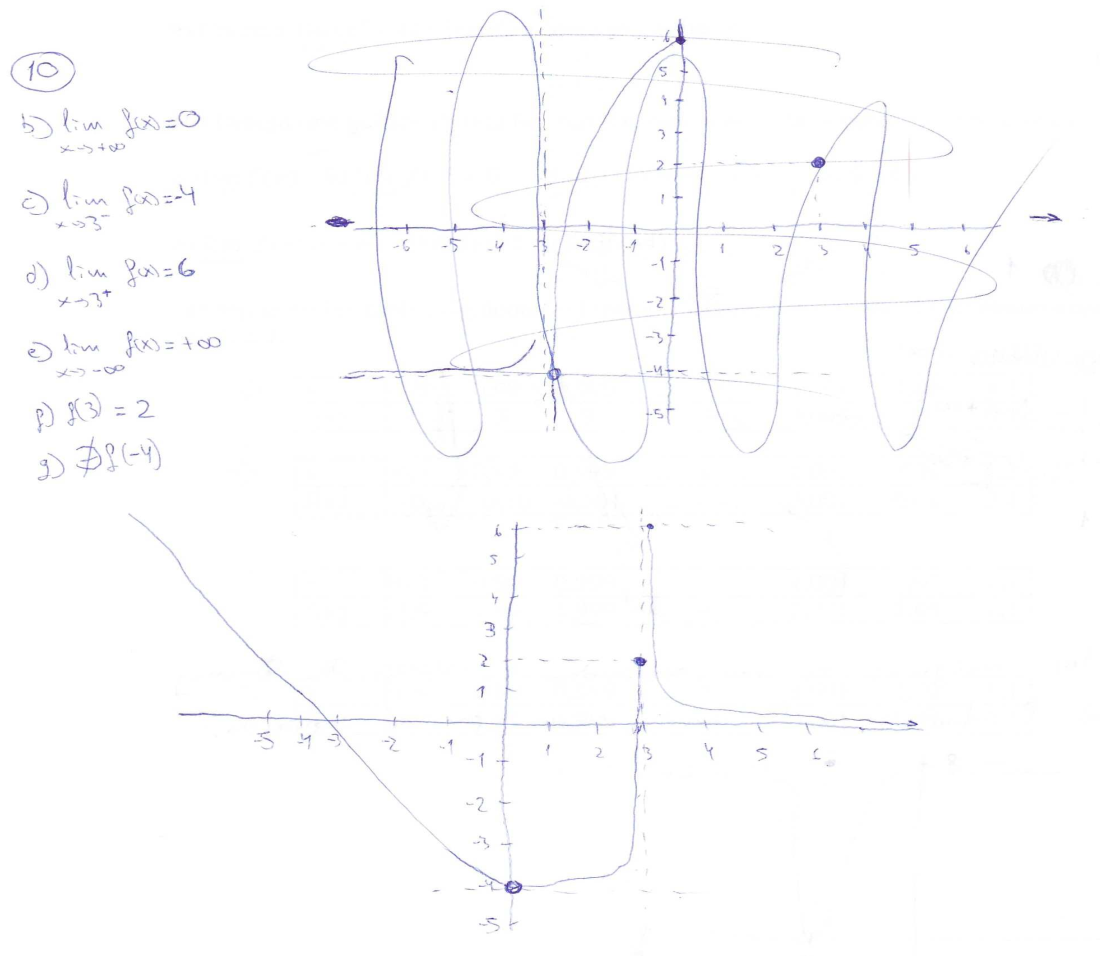
d) e) f)	,, ,, ,,			lenguaje gráfico		E-10.1	CORR. CORR. INC.
Alumno 7 a) b) c) d) e) f)	Gráfico ,, ,, ,, ,, ,,			Todas dentro del lenguaje gráfico		E-10.1	CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. INC.
Alumno 8 a) b) c) d) e) f)	Gráfico ,, ,, ,, ,, ,,	CSC-10.2		Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR. CORR. CORR. CORR. INC. CORR.
Alumno 9 a) b) c) d) e) f)						No acepta devolución	
Alumno 10 a) b) c) d) e) f)	Gráfico ,, ,, ,, ,, ,,	CSC-10.2 CSC-10.2 CSC-10.3		Todas dentro del lenguaje gráfico		E-10.1	CORR. INC. INC. INC. CORR. INC.
Alumno 11 a) b) c) d) e) f)	Gráfico ,, ,, ,, ,, ,,			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 12 a) b) c) d) e) f)	Gráfico ,, ,, ,, ,, ,,			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR. CORR. CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 13 a)	Gráfico			Todas	CPC-10.2		INC.

b)	,,			dentro del lenguaje gráfico	CPC-10.2		INC.
c)	,,				CPC-10.2		INC.
d)	,,				CPC-10.2		INC.
e)	,,				CPC-10.2		INC.
f)	,,				CPC-10.2		INC.
Alumno 14							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	,,	CSC-10.2					INC.
c)	,,						CORR.
d)	,,				CPC-10.1		INC.
e)	,,	CSC-10.1					INC.
f)	,,	CSC-10.1					INC.
Alumno 15							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	,,				CPC-10.1		INC.
c)	,,						CORR.
d)	,,						CORR.
e)	,,						CORR.
f)	,,						CORR.
Alumno 16							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico	CPC-10.1		INC.
b)	,,						CORR.
c)	,,						CORR.
d)	,,				CPC-10.1		INC.
e)	,,				CPC-10.1		INC.
f)	,,				CPC-10.1		INC.
Alumno 17							
a)	Gráfico			Todas dentro del lenguaje gráfico			CORR.
b)	,,						CORR.
c)	,,						CORR.
d)	,,						CORR.
e)	,,						CORR.
f)	,,						CORR.

No aparecen en esta cuestión conflictos semióticos de carácter proposicional y aquéllos que se describen de tipo conceptual y procedimental tienen escasa incidencia en el alumnado; se podría pensar de antemano que la única dificultad que encontrarían los estudiantes sería el saber traducir del lenguaje analítico al gráfico, quizás por falta de práctica, ya que el profesor mostraba más interés en sus clases por traducir del gráfico al analítico.

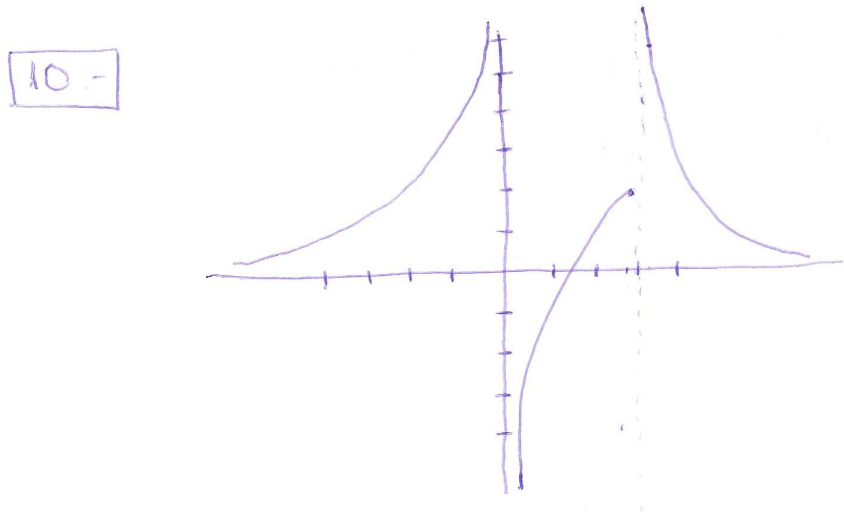
Como se intuía, el único lenguaje movilizado por los alumnos ha sido el gráfico y todas las acciones se han producido dentro de este mismo lenguaje.

A continuación aparece la respuesta del alumno 5, en la que se contemplan algunas de las condiciones de forma fallida:



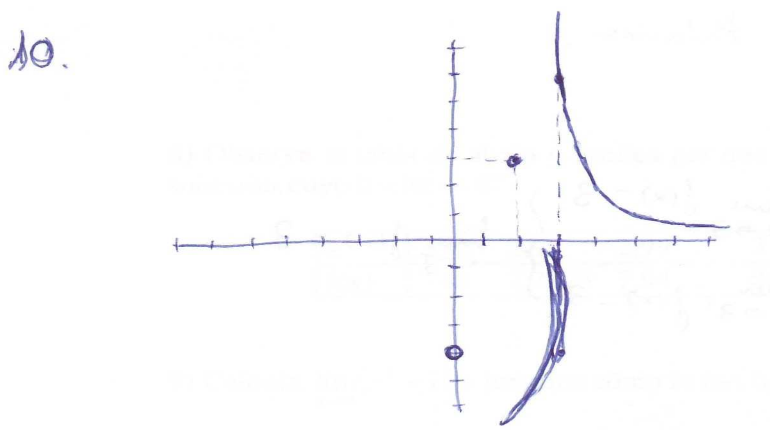
Al no considerarse las condiciones b) y c) el alumno da una respuesta en la que aparece un conflicto semiótico de carácter procedimental, que hemos dado en llamar CPC-10.1: *no sabe traducir del lenguaje analítico al gráfico.* Además, la condición f) no la cumple por el conflicto de carácter conceptual CSC-10.1: *identificar valores de "y" con los de "x".*

Otro caso a destacar es el alumno 10:



En la respuesta se observa cómo este alumno incurre en dos conflictos semióticos de carácter conceptual, el CSC-10.2: *al aparecer límites laterales en x = 3, se presupone que hay una asíntota vertical en x = 3*, y el CSC-10.3: *la existencia de asíntota horizontal cuando* $x \to +\infty$ *le lleva a dar por hecho que también es asíntota horizontal cuando* $x \to -\infty$. Al no contemplar la condición f), pensamos que de forma no intencionada, el alumno comete el error que hemos tipificado como E-10.1: *no tiene en cuenta alguna condición.*

Por último, se muestra la respuesta incorrecta del alumno 14:



Todas las incorrecciones que aquí se han detectado son debidas a conflictos ya analizados: el CPC-10.1, el CSC-10.1 (este conflicto, en concreto, lo comete en dos apartados, el e) y el f)) y el CSC-10.2 (obsérvese la incongruencia de señalar expresamente el apartado c) y, además, colocar una asíntota vertical).

En la tabla siguiente, 7.20, se recogen los conflictos semióticos correspondientes y el porcentaje en que aparecen en los alumnos.

Tabla 7.20. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS					
CONCEPTUALES			PROCEDIMENTALES		OTROS ERRORES
CSC-10.1	CSC-10.2	CSC-10.3	CPC-10.1	CPC-10.2	E-10.1
1’96%	6’86%	0’98%	9’80%	5’88%	3’92%

El objetivo principal de esta cuestión era estudiar en el alumnado el nivel de dominio para traducir del lenguaje analítico al gráfico, ya que aparecen una serie de condiciones en lenguaje analítico que el alumno debe expresar, para una misma función, en lenguaje gráfico. Estimando que se dan seis condiciones para dibujar en una misma gráfica, el nivel de respuestas indica que hay un moderado planteamiento de conflictos semióticos, ya que hubiese sido deseable una menor incidencia de los mismos.

7.2.11. Resultados sobre la cuestión 11:

Fíjate en las tablas siguientes y razona si existe, o no, y por qué, el límite cuando x tiende a 1.

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*...*	*1*	*...*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*3*	*3*	*3*	*...*	*0*	*...*	*0,001*	*0,01*	*0,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*...*	*1*	*...*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*-0,1*	*-0,10*	*-0,001*	*...*	*—*	*...*	*0,001*	*0,01*	*0,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*...*	*1*	*...*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*...*	*4*	*...*	*2,001*	*2,01*	*2,1*

x	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*...*	*1*	*...*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*...*	*—*	*...*	*0,001*	*0,01*	*0,1*

Los diversos conflictos semióticos detectados en los estudiantes se han codificado de la forma siguiente:

<u>Conflicto semiótico Proposicional:</u>

CSP-11.1: El valor del límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto.

<u>Conflicto semiótico Conceptual:</u>

CSC-11.1: Confundir imágenes con valores de “x”.
CSC-11.2: Sostener que el límite no existe porque no existe el valor de la función en el punto.
CSC-11.3: Considera que los límites laterales son distintos, lo que nos hace intuir que no entiende números positivos y negativos muy próximos a 0.

<u>Conflicto semiótico Procedimental:</u>

CPC-11.1: No sabe traducir del lenguaje numérico al natural o gráfico (no sabe traducir las tablas de variación en ningún caso). Parece como si quisiera ayudarse de una gráfica para entender las tablas de variación, pero éstas las hace sin sentido alguno.
CPC-11.2: No tiene en cuenta límites laterales.

En la tabla 7.21 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes respecto de las entidades primarias, conflictos semióticos y errores.

Tabla 7.21. Resumen de respuestas dadas, por alumno, a la cuestión 11.

CUESTIÓN 11	**Lenguaje**	**C. S. Conceptual**	**C. S. Proposicional**	**Acciones**	**C. S. Procedimental**	**Otros errores**	**Valor**
Alumno 1							
1ª tabla	Natural			Todas	CPC-11.2		INC.
2ª tabla	„	CSC-11.1		dentro			INC.
3ª tabla	„			del	CPC-11.2		INC.
4ª tabla	„	CSC-11.1		lenguaje			INC.
				natural			
Alumno 2							
1ª tabla	Natural			Todas			CORR.
2ª tabla	„			dentro			CORR.
3ª tabla	„			del			CORR.
4ª tabla	„			lenguaje			CORR.
				natural			

Alumno 3 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Analítico „ „ „			 Todas dentro del lenguaje analítico			 CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 4 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Analítico „ „ „		 CSP-11.1 CSP-11.1 CSP-11.1 CSP-11.1	 Todas dentro del lenguaje analítico	 CPC-11.2		 INC. INC. INC. INC.
Alumno 5 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla						 No acepta la devolución del problema	 INC. INC. INC. INC
Alumno 6 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „	 CSC-11.2 CSC-11.2	 CSP-11.1 CSP-11.1	 Todas dentro del lenguaje natural			 INC. INC. INC. INC.
Alumno 7 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „			 Todas dentro del lenguaje natural			 CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 8 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „		 CSP-11.1 CSP-11.1 CSP-11.1 CSP-11.1	 Todas dentro del lenguaje natural			 INC. INC. INC. INC.
Alumno 9 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 G + N „ „ „ „ „ „			 G → N	 CPC-11.1 CPC-11.1 CPC-11.1 CPC-11.1		 INC. INC. INC. INC.
Alumno 10 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „	 CSC-11.3		 Todas dentro del lenguaje natural			 CORR. INC. CORR. CORR.
Alumno 11 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Analítico „ „ „			 Todas dentro del lenguaje analítico			 CORR. CORR. CORR. CORR.

Alumno 12 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 A + N „ „ „ „ „ „			 A → N			 CORR. CORR. CORR. CORR.
Alumno 13 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „	 CSC-11.1 CSC-11.2 CSC-11.1 CSC-11.2		 Todas dentro del lenguaje natural			 INC. INC. INC. INC.
Alumno 14 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 A + N „ „ „ „ „ „			 A → N	 CPC-11.1 CPC-11.1 CPC-11.1 CPC-11.1		 INC. INC. INC. INC.
Alumno 15 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 Natural „ „ „	 CSC-11.3	 CSP-11.1	 Todas dentro del lenguaje natural			 CORR. INC. INC. CORR.
Alumno 16 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 N + A „ „			 N → A		 NO CONT. NO CONT.	 CORR. CORR. INC. INC.
Alumno 17 1ª tabla 2ª tabla 3ª tabla 4ª tabla	 N + A „ „ „ „ „ „	 CSC-11.1	 CSP-11.1 CSP-11.1 CSP-11.1	 A → N	 CPC-11.2		 INC. CORR. INC. INC.

Los lenguajes utilizados, siguiendo la línea de la mayoría de las cuestiones, son el analítico y el natural, y las acciones se producen dentro de un mismo lenguaje o entre estos dos lenguajes, aunque un alumno trabaja en lenguaje gráfico, pero sin éxito.

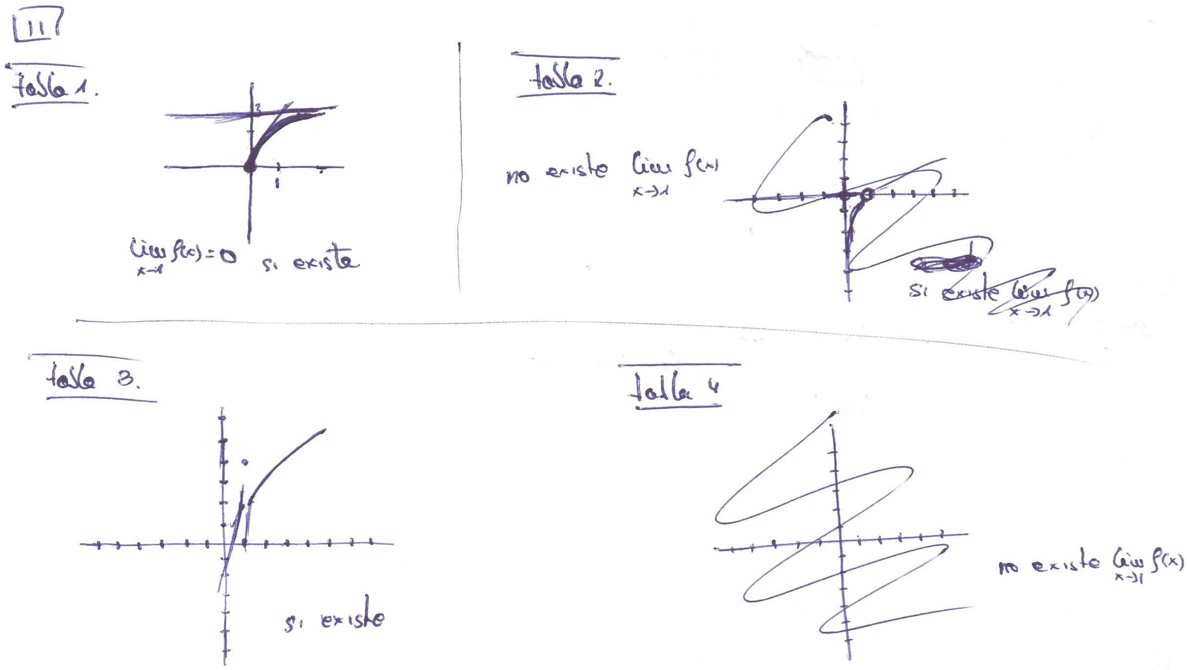
Aparecen conflictos de los tres tipos descritos, aunque, fundamentalmente, se insiste en asignar como valor del límite en un punto el valor de la imagen de la función en ese punto, además de encontrar dificultad en traducir de un lenguaje a otro (en este caso, del numérico al natural o analítico).

A continuación se presentan las producciones del alumno 6, que responde únicamente en lenguaje natural:

$\boxed{11}$ - En la primera tabla si existe el limite cuando x tiende a 1 ya que existe su imagen y por lo tanto tiene que existir su límite.
- En la segunda tabla no existe el límit cuando x tiende a 1 ya que noexiste la imagen
- En la tercera tabla se puede apreciar que existe la imagen de uno y por lo tanto debe de existir su límite.
- En la cuarta gráfica sio existe el límite cuando x tiende a 1 ya que no existe la imagen de este.

Se puede apreciar cómo en las cuatro respuestas se argumenta, como hecho fallido, el que se ha denominado conflicto semiótico proposicional CSP-11.1: *el valor del límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto.* Además, se produce un conflicto semiótico de carácter conceptual, el CSC-11.2: *sostener que el límite no existe porque no existe el valor de la función en el punto.*

Un alumno que responde utilizando los lenguajes natural y gráfico es el número 9. Las acciones van del lenguaje gráfico al natural, pero las realiza de manera incoherente:



En todos los casos, en el alumno se detecta un conflicto semiótico de carácter procedimental del tipo CPC-11.1: *no sabe traducir del lenguaje numérico al natural o gráfico. Parece como si quisiera ayudarse de una gráfica para entender las tablas de variación, pero éstas las hace sin sentido alguno.*

Se presenta un último ejemplo, del alumno 13, que se expresa sólo en lenguaje natural y que, como los anteriores, no responde correctamente:

11 En la primera sí existe porque se mantienen unos valores constantes

En la segunda no porque no ~~[illegible]~~ existe valor para $f(x)$

En la tercera sí existe ~~[illegible]~~ tiene valor $f(x)$ y mantiene la sucesión.

En la cuarta no, porque no tiene valor $f(x)$

En este alumno se desarrollan dos conflictos semióticos de carácter conceptual que se han tipificado como CSC-11.1: *confundir imágenes con valores de "x"*, y como CSC-11.2: *sostener que el límite no existe porque no existe el valor de la función en el punto.*

En la siguiente tabla, 7.22, se recogen los conflictos semióticos tratados según el porcentaje en el que aparecen en los alumnos.

Tabla 7.22. Porcentaje de alumnos que muestran cada tipo de conflicto.

CONFLICTOS SEMIÓTICOS					
PROPOSICIONALES	CONCEPTUALES			PROCEDIMENTALES	
CSP-11.1	CSC-11.1	CSC-11.2	CSC-11.3	CPC-11.1	CPC-11.2
23'53%	7'35%	5'88%	2'94%	11'76%	5'88%

El ítem último del cuestionario muestra un conjunto de cuatro tablas de variación para que, sin ayuda de la gráfica, el alumnado deduzca la existencia, o no, del límite de una función en un punto. Es un tipo de actividad de mayor índice de dificultad en los alumnos, pues el tratamiento gráfico para estas funciones no existe y las tablas de variación numérica son poco frecuentes y más difíciles de entender.

7.3. CONFLICTOS SEMIÓTICOS PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Para cada cuestión se han codificado los conflictos semióticos, pero hay que tener en cuenta que un mismo conflicto semiótico aparece a lo largo de distintas cuestiones con expresiones muy similares.

Así, por ejemplo, el conflicto semiótico *"adjudicar al límite de la función en un punto el valor de la función en dicho punto"* es uno de los más frecuentes y corresponde a los conflictos semióticos CPC-4.2, CSP-6.2, CSC-8.3, CSC-9.1 y CSP-11.1.

Otro conflicto semiótico como es el de *"confusión entre los valores de la variable independiente y la función"* corresponde a los conflictos semióticos CSC-1.3, CSC-3.1 (en sus tres versiones), CSC-4.1, CSC-5.1, CSC-6.3, CSC-7.1, CSC-8.1, CSC-10.1 y CSC-11.1.

A continuación, en la tabla 7.23 se muestra una síntesis del número de veces que aparece cada uno de los distintos conflictos semióticos más relevantes a lo largo del cuestionario (en la tabla, cuando un conflicto se codifica con distintas versiones, sólo aparece una vez).

Tabla 7.23. Frecuencia de los conflictos detectados.

Conflicto semiótico	Códigos del conflicto	Número de veces que aparece el conflicto
Si "x" tiende a $+\infty$, entonces "y" es cada vez mayor.	CSP-1.1;	3
Si "x" tiende a $+\infty$, entonces "f(x)" tiende a $+\infty$. Al igual para $-\infty$.	CSP-1.2; CSP-5.1; CSP-7.3; CSP-7.4	13
Si "x" tiende a $+\infty$, entonces "f(x)" es creciente.	CSP-1.3	3
Si "x" tiende a $+\infty$, entonces la gráfica de "f(x)" se acerca a OX.	CSP-1.4	1
Considerar $\pm\infty$ como un número.	CSC-1.1	2
Identificar "y" con los valores de "x".	CSC-1.3; CSC-3.1; CSC-3.3; CSC-4.1; CSC-5.1; CSC-6.3; CSC-7.1; CSC-8.1; CSC-10.1; CSC-11.1	47
Una función crece indefinidamente cuando ésta tiende a $+\infty$.	CSP-2.1	10
Una función crece indefinidamente si no está acotada.	CSP-2.2	4
Una función crece indefinidamente si es estrictamente creciente.	CSP-2.3; CSP-8.4	3
Si una función crece	CSP-2.4	1

indefinidamente, posee una asíntota vertical.		
Creencia de que el límite no es alcanzable.	CSC-2.1; CSC-8.2	2
El hecho de aproximarse a un número implica no llegar a tocarlo.	CSP-3.1	3
El hecho de aproximarse a un número implica calcular el límite en ese número.	CSC-3.2	4
Relaciona las ideas de aproximación y los límites laterales con la existencia de asíntotas verticales.	CPC-3.1; CSC-10.2	19
Si una función no está definida en un punto no puede tener límite.	CSP-4.1; CSC-9.2; CSC-11.2	6
No reconoce los límites laterales para el cálculo de un límite.	CSC-4.2; CSP-6.1; CSC-6.1; CSC-6.2; CPC-7.3; CSP-8.3; CSC-11.3; CPC-11.2	16
No saber traducir entre lenguajes.	CPC-4.1; CSP-4.2; CSC-5.3; CSP-8.1; CSP-8.2; CPC-10.1; CPC-11.1	24
El límite en un punto es el valor de la función en ese punto.	CPC-4.2; CSP-6.2; CSC-8.3; CSC-9.1; CSP-11.1	38
No reconoce gráficamente asíntotas horizontales y verticales.	CPC-7.1; CPC-7.2	8
Si los límites laterales son infinitos, aunque con distinto signo, el límite es infinito.	CSP-7.1; CSP-7.2	3
La existencia de asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ le lleva a dar por hecho que también es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$	CSC-10.3	1
No justifica la respuesta o lo hace sin sentido alguno.	CSC-1.2; CSC-2.2; CSC-5.2; CPC-7.4; CPC-8.1; CSC-9.3; CPC-9.1; CPC-10.2; CSC-11.2	15

Si se analiza la trayectoria instruccional de las cuatro sesiones, puede establecerse una relación entre los conflictos semióticos que se han ido induciendo en las clases, los que según el cuestionario se pretendían detectar y los que realmente se han detectado.

En la primera sesión ya se destacó que la idea de "tendencia" no había quedado muy clara (1ª sesión, unidad 6) y que, en los ejemplos gráficos analizados, se verificaba que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Esto se corrobora con el planteamiento de las cuestiones 1ª, 5ª y 7ª, donde se esperaba encontrar el conflicto semiótico de que *si la variable independiente tiende a más, o menos, infinito, entonces la función también.* Efectivamente, dicho conflicto ha aparecido en las cuestiones mencionadas y los alumnos lo han reproducido un total de 13 veces.

También, el término "indefinidamente" no se terminó de aclarar en su momento, ya que se dio como transparente (1ª sesión, unidad 9), por lo que era de esperar el conflicto *si "f(x)" crece indefinidamente, entonces crece a más infinito*, de ahí el planteamiento de la 2ª cuestión donde, efectivamente, ha aparecido un total de 10 veces. Otros conflictos semióticos han aparecido relacionados con los términos de "tendencia" e "indefinidamente", pero en un número que no se considera significativo.

A lo largo de las exposiciones del profesor, también se produjo el conflicto semiótico de *identificar los valores de "y" con los de "x"* (1ª sesión, unidades 23 y 53, por ejemplo), de ahí la idea, entre otras, del planteamiento de la 8ª cuestión mediante una tabla de valores donde podría aparecer dicho conflicto. Sorprendentemente, éste ha sido el conflicto que más han repetido los alumnos, pues ha aparecido un total de 47 veces, y no sólo en esta cuestión, sino prácticamente en todas. Merece destacar el hecho de que se trate de un conflicto semiótico no exclusivo del cálculo de límites, sino que se puede corresponder con coordenadas de puntos y funciones elementales.

También surgió en la sesiones otro conflicto semiótico en el que el profesor hizo especial hincapié para que no se incurriera en él: *el límite de una función en un punto es la imagen de la función en dicho punto* (1ª sesión, unidades 44, 51, 59, 79 y 82; 3ª sesión, unidades 19 y 79; 4ª sesión, unidades 9 y 85), conflicto que se esperaba encontrar en las cuestiones 4ª, 8ª, 9ª y 11ª. Como puede observarse en la tabla 7.23, este conflicto también ha aparecido muy frecuentemente (un total de 38 veces) y, además de las cuestiones previstas anteriormente, también ha aparecido en la 6ª cuestión, que no se había previsto.

El cálculo de límites laterales también se mostró dificultoso para los alumnos, de ahí el conflicto de *no reconocer los límites laterales para el cálculo de un límite* (1ª sesión, unidad 85; 3ª sesión, unidad 71; 4ª sesión, unidad 86). Este conflicto se esperaba encontrar en las cuestiones 4ª, 6ª, 7ª, 8ª y 11ª, como, efectivamente, así ha ocurrido, y se ha visto reproducido un total de 16 veces.

Un conflicto que no se había previsto, el de *relacionar las ideas de "aproximación" y el cálculo de límites laterales con la aparición de asíntotas verticales*, se ha visto reproducido por los alumnos en las cuestiones 3ª y 10ª un total de 19 veces, hecho muy significativo dado el número tan alto de veces.

Un hecho a destacar, por lo inesperado, ha sido la alta incidencia del conflicto semiótico de *no saber traducir entre lenguajes*, pues ha surgido en numerosas cuestiones y se ha visto reproducido por los alumnos un total de 24 veces. Se ha detectado cómo al estudiante le plantea gran dificultad traducir entre los lenguajes analítico, gráfico y natural, que son los que más han usado, en detrimento del lenguaje numérico, prácticamente no utilizado por los mismos.

El resto de los conflictos semióticos que se podían prever, y que de hecho han aparecido, se han reproducido un número tan escaso de veces que es irrelevante un comentario más profundo.

Se incluye, a continuación, la tabla 7.24 en la que se refleja el porcentaje de respuestas correctas, por cuestiones, junto con los porcentajes de los tipos de conflictos semióticos que se han ido reseñando por pregunta.

Tabla 7.24. Porcentajes de respuestas correctas, por cuestión, con indicación de los tipos de conflictos aparecidos.

CUESTIÓN	CORRECTA	C.S. CONCEPTUAL	C.S. PROPOSICIONAL	C.S. PROCEDIMENTAL	OTROS ERRORES
Cuestión 1	23.53	29.41	76.47	-	23.53
Cuestión 2	17.65	11.76	76.47	-	-
Cuestión 3	0	88.24	11.76	70.59	-
Cuestión 4	81.37	7.84	1.96	4.90	4.90
Cuestión 5	83.33	11.76	0.98	-	1.96
Cuestión 6	72.55	9.80	7.84	-	3.92

Cuestión 7	70.59	4.41	8.82	11.76	-
Cuestión 8	47.06	17.65	23.53	5.88	-
Cuestión 9	0	94.12	-	5.88	-
Cuestión 10	65.69	9.80	-	15.68	3.92
Cuestión 11	41.18	13.23	23.53	17.64	-

Merece destacar los resultados obtenidos en las cuestiones 3ª y 9ª, con un porcentaje de respuestas incorrectas del 100% y con un alto porcentaje de estudiantes que muestran conflictos semióticos. Son cuestiones relacionadas con la aproximación de la variable independiente a un cierto número y con el cálculo de un límite finito. En ambos casos, los alumnos muestran los dos conflictos semióticos más frecuentes: confundir la variable dependiente con la independiente y asignar como límite de una función en un punto la imagen de este punto. Además, también se muestra en un alto porcentaje el conflicto semiótico procedimental que consiste en relacionar la idea de aproximación a un número con la existencia de una asíntota vertical (obsérvese en la tabla 7.5 que, de los diecisiete alumnos de la clase, hay doce que cometen este conflicto).

La ausencia del registro numérico en este tipo de cuestiones favorece que los estudiantes muestren conflictos semióticos como los descritos. Esto se corresponde con el hecho de que en el significado institucional implementado se utilizó escasamente dicho registro.

Las dos cuestiones con un porcentaje más alto de respuestas correctas son la 4ª y la 5ª, que se corresponden con interpretaciones de funciones dadas por su gráfica y límites de éstas, lo cual está de acuerdo con el significado institucional implementado, ya que incide fundamentalmente sobre estos aspectos. No obstante, los alumnos muestran también conflictos semióticos tales como confundir las dos variables, así como no interpretar correctamente el valor de los límites laterales.

CAPÍTULO 8

LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD

8.1. INTRODUCCIÓN

Una vez descrito el estudio sobre las configuraciones epistémica, interaccional y cognitiva, se analizan diversos criterios de idoneidad con el objetivo de poder aportar datos sobre el proceso de instrucción en la institución de Matemáticas de 1º de Bachillerato.

Como se señala en Godino, Contreras y Font (2006), los profesores de matemáticas se interesan por encontrar respuestas a las preguntas sustantivas que plantea la práctica de la enseñanza: *¿Qué matemáticas enseñar? ¿Cómo enseñar esas matemáticas?*

La Didáctica de las Matemáticas, desde un posicionamiento científico, tiene que reformular estas cuestiones *normativas* "ingenuas" para hacerlas operativas e investigables. Es necesario descomponer el problema en subproblemas y para ello se requiere explicitar modelos sobre la naturaleza de la propia matemática, y modelos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El EOS es una modelización de los conocimientos institucionales y personales de los "objetos matemáticos". Las nociones teóricas que se utilizan constituyen una modelización de la instrucción que permite abordar cuestiones descriptivas y explicativas previas, como las siguientes:

- ¿De qué variables o factores depende la *idoneidad* de un proceso de instrucción matemática?
- ¿Cuáles son los valores o categorías de tales variables?

- ¿Qué unidad de análisis de los procesos de instrucción interesa adoptar para tener en cuenta las interacciones entre las distintas variables?
- ¿Cómo secuenciar en el tiempo las tareas y funciones para optimizar el aprendizaje en unas circunstancias dadas?
- ¿En qué medida es idóneo/eficaz el proceso de instrucción observado? ¿Cómo evaluar la idoneidad de un proceso de instrucción matemática?

La Didáctica de las Matemáticas tiene que afrontar el reto de la ingeniería didáctica, entendida como la disciplina que orienta el diseño, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática.

¿Qué criterios de idoneidad de las configuraciones y trayectorias didácticas se pueden derivar del enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática?

Se introduce la noción de idoneidad (pertinencia, adecuación,…) de un proceso de estudio matemático como herramienta para establecer un puente entre una didáctica descriptiva y una didáctica normativa o técnica.

De los seis criterios de idoneidad que se consideran en el EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Whilhelmi, 2006), en este trabajo se analizan aquellas idoneidades que están relacionadas con las trayectorias estudiadas a lo largo del trabajo. Estas idoneidades son las siguientes:

1. *Idoneidad epistémica:* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva:* expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
3. *Idoneidad interacciona:*, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales

(que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/ implementados.

8.2. IDONEIDAD EPISTÉMICA

Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

Como se señala en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), el análisis de la idoneidad epistémica precisa de la definición previa de un significado de referencia para el proceso de estudio matemático (efectivo o potencial) que se desea analizar. El primer objeto o entidad primaria a tener en cuenta corresponde a las *situaciones-problemas*, las cuales deben, por un lado, ser representativas de las incluidas en el significado de referencia y, por otro lado, permitir contextualizar los conocimientos implementados, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas.

Los *lenguajes* utilizados deben ser una muestra representativa de los identificados en el significado de referencia.

Las definiciones, proposiciones y procedimientos son representativos de los identificados en el significado de referencia y adaptados al nivel, capacidades y recursos disponibles en el marco institucional correspondiente. El proceso incluye momentos en los que se generan y negocian las reglas mejor adaptadas a las circunstancias, existiendo momentos en que operan como herramientas implícitas (Douady, 1986). Tales reglas conceptuales, proposicionales y procedimentales son explicadas y justificadas mediante argumentos representativos y adaptados.

Una idoneidad epistémica positiva del proceso de estudio debe tener en cuenta las conexiones e interacciones entre los elementos mencionados. Los elementos conceptuales, proposicionales y procedimentales deben haber sido contextualizados mediante las situaciones, explicados y justificados con argumentos pertinentes y todos estos elementos soportados mediante recursos expresivos eficaces.

Entidad primaria: Situaciones-problemas

Se muestra, a continuación, una tabla en la que se indican las situaciones implementadas junto con las situaciones de referencia que no se han estudiado en este proceso.

Tabla 8.1. Comparación de situaciones implementadas con las situaciones de referencia.

SITUACIONES IMPLEMENTADAS	SITUACIONES DE REFERENCIA NO ESTUDIADAS
Se analizan, desde un punto de vista gráfico, límites de los tipos: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = k$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = k'$; $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = k$ (asíntotas horizontales); $\lim_{x\to\pm\infty} i(x) = +\infty$	No se estudian, gráficamente, límites del tipo: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Se estudia el $\lim_{x\to5}(x^2-2)$ desde un punto de vista analítico.	Cambio brusco de los límites en el infinito al límite en un punto. Se debería implementar antes un caso gráfico.
Se estudia el $\lim_{x\to5}(x^2-2)$ desde el punto de vista analítico como imagen del punto.	No se estudia gráficamente el límite en un punto del dominio de la función, ni se construyen tablas de variación numérica.
Estudio gráfico del límite en un punto que no pertenece al dominio de la función, aunque sí tiene límite.	
Estudio gráfico del límite en un punto del dominio de la función a partir de los límites laterales, que no coinciden.	No se estudia el caso en el que los límites laterales sí coinciden.
Estudio gráfico del límite en un punto que no está en el dominio de la función y cuyos límites laterales no coinciden.	No se estudia el caso en el que los límites laterales sí coinciden.
Estudio gráfico del límite en un punto en el que no existe uno de los límites laterales.	
Cálculo analítico de límites de funciones	No se implementan tablas de variación

polinómicas en el infinito ($\pm\infty$), jugando con las reglas de los signos.	numérica para analizar los resultados.
Cálculo analítico de límites de funciones racionales en $\pm\infty$, en todas sus variantes de grados del numerador y denominador, relacionando signos del infinito y de los coeficientes principales (indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$).	No se implementan actividades de ejercitación para los alumnos.
Cálculo analítico de límites de funciones irracionales en $\pm\infty$ (indeterminación $\infty-\infty$).	- No se estudian casos no indeterminados como $\infty+\infty$ y $-\infty-\infty$. - Se propone como ejercicio un límite en el que hay que analizar el caso $\infty+\infty$.
Estudio analítico del $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (límite de una función continua en un punto): primero, en general; después, en un caso concreto.	
Límites infinitos de una función en un punto (asíntotas verticales), desde un punto de vista gráfico.	
Límites infinitos de una función en un punto (asíntotas verticales), desde un punto de vista analítico: estudio de $\frac{k}{0}$.	
Gráfica de la función $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ a partir de sus asíntotas.	
Estudio gráfico del límite en un punto en el que no coinciden los límites laterales entre sí ni con la imagen del punto.	No se estudia el caso en el que los límites laterales sí coinciden. Aunque este caso se estudia en la siguiente sesión, creemos que es ahora donde se debería haber estudiado.
Estudio analítico del límite de una función a trozos en un punto, en el que no coinciden los límites laterales.	No se estudia el caso en el que los límites laterales sí coinciden.
Estudio gráfico de una función en el que los límites laterales coinciden entre sí, pero no coinciden con la imagen del punto.	En ningún momento se estudia el caso de coincidencia de los límites laterales con la imagen del punto, desde el punto de vista gráfico.
Estudio de límites en los que aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ en funciones racionales e irracionales: utilización de recursos como descomposición factorial, multiplicación por el conjugado y regla de Ruffini.	No se estudia ningún caso de una función a trozos en la que al calcular uno de los límites laterales aparezca la indeterminación $\frac{0}{0}$.
Relación entre las gráficas de una función y la que resulta al ser simplificada.	
Estudio analítico de una función en el que los límites laterales coinciden entre sí, pero no coinciden con la imagen del punto.	En ningún momento se estudia el caso de coincidencia de los límites laterales con la imagen del punto, desde el punto de vista analítico.
Al finalizar cada sesión se proponen	

actividades y ejercicios (cálculos de límites) para que los alumnos las realicen en su casa, fomentándose así situaciones de ejercitación y aplicación. Estas situaciones son las propuestas en el libro de texto.	

Teniendo en cuenta lo que se obtiene en el análisis efectuado, se da una idoneidad moderada en cuanto a la entidad primaria situación-problema.

Entidad primaria: Lenguaje

Se muestra, a continuación, una tabla de comparación entre los lenguajes implementados y los que no, pero que se consideran pertinentes para el estudio.

Tabla 8.2. Comparación de lenguajes implementados con otros lenguajes pertinentes.

LENGUAJES IMPLEMENTADOS	OTROS LENGUAJES PERTINENTES
Lenguaje gráfico para la presentación de 4 gráficas a estudiar.	
Lenguaje simbólico para el cálculo de los límites en el infinito relacionados con las gráficas propuestas.	
Lenguaje verbal para las explicaciones dadas por los alumnos.	Sería pertinente que los alumnos salieran a la pizarra para expresar simbólicamente sus resultados.
Lenguaje verbal, gráfico y simbólico para la definición de asíntota horizontal: $y = k$ *es asíntota horizontal* $\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$.	
Lenguaje verbal para el cálculo del límite de una función en un punto.	No se expresa simbólicamente este límite.
Lenguaje gráfico para el cálculo del límite de una función en un punto.	Se expresa simbólicamente este límite únicamente para dar el resultado.
Lenguaje gráfico para el cálculo del límite de una función a trozos a partir de sus límites laterales.	Se debería utilizar también lenguaje numérico variacional.
Lenguaje simbólico para el cálculo de los límites laterales.	Se debería utilizar también lenguaje numérico variacional.
Lenguaje verbal en las respuestas de los alumnos.	Sería pertinente que los alumnos salieran a la pizarra para expresar simbólicamente sus resultados.
Lenguaje gráfico para otros casos de límite en un punto de una función a trozos.	
Lenguaje verbal en las respuestas de los alumnos.	Sería pertinente que los alumnos salieran a la pizarra para expresar simbólicamente sus

	resultados.
Lenguaje verbal y simbólico para el cálculo de límites de funciones polinómicas.	Sería pertinente el uso del lenguaje gráfico para analizar el resultado de estos límites.
Lenguaje verbal y simbólico para el cálculo de límites de funciones racionales.	
Lenguaje verbal y simbólico para el cálculo de límites de funciones irracionales.	
Lenguaje gráfico para el estudio del límite de una función en un punto.	
Lenguaje simbólico para el cálculo del límite finito de una función en un punto.	Se debería utilizar también lenguaje numérico variacional.
Lenguaje verbal y simbólico para el cálculo del límite infinito de una función en un punto.	
Lenguaje gráfico, verbal y simbólico para la definición de asíntota vertical: *la recta x = a es asíntota vertical de y = f(x) sii* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	Se debería utilizar también lenguaje numérico variacional.
Lenguaje simbólico para el caso de límites que dan lugar a $\frac{k}{0}$	Se debería utilizar también lenguaje gráfico y numérico variacional.
Lenguaje verbal y gráfico para el caso de una función con dos asíntotas.	Se debería utilizar también lenguaje simbólico.
Lenguaje verbal, simbólico y gráfico para analizar el límite de unas funciones a trozos.	Conociendo de algunas su expresión analítica, se echa en falta el uso del lenguaje numérico variacional.
Lenguaje simbólico y gráfico para casos con la indeterminación $\frac{0}{0}$.	Conociendo la expresión analítica de las funciones, se echa en falta el uso del lenguaje numérico variacional.

Como en el caso anterior, al analizar los resultados obtenidos, se puede concluir que la idoneidad respecto a esta variable es baja.

Entidad primaria: Elementos regulativos

En la tabla siguiente se recogen las definiciones y procedimientos implementados junto con los no implementados.

Tabla 8.3. Comparación entre elementos regulativos.

DEFINICIONES Y PROCEDIMIENTOS IMPLEMENTADOS	DEFINICIONES Y PROCEDIMIENTOS NO IMPLEMENTADOS

	No se da ninguna definición de límite infinito de una función en el infinito.
Definición de asíntota horizontal.	
	No se da la definición de entorno de un punto.
	No se da una definición rigurosa del límite finito de una función en un punto.
Definición de asíntota vertical.	No se da una definición del límite infinito de una función en un punto.
Procedimiento correcto para estudiar gráficamente el cálculo de límites de funciones en infinito o en un punto, sean o no sean a trozos.	
Procedimiento correcto para calcular límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales.	
Procedimiento correcto para salvar las indeterminaciones.	
Procedimiento correcto para estudiar las asíntotas horizontales y verticales.	

La idoneidad que se obtiene, respecto a esta entidad primaria, se puede considerar de tipo medio.

Entidad primaria: Argumentación

En las dos tablas siguientes se recogen los momentos de validación a lo largo de la trayectoria y las argumentaciones no realizadas.

Tabla 8.4. Momentos de validación.

Cálculo de límites en $\pm\infty$ de cuatro funciones representadas gráficamente.
Cálculo del $\lim_{x\to 5}\left(x^2-2\right)$.
Cálculo de los dominios de todas las funciones presentadas a lo largo de las cuatro sesiones.
Cálculo del límite finito de una función en un punto que no pertenece a su dominio, desde un punto de vista gráfico.
Cálculo del límite de tres funciones a partir de sus límites laterales, desde un punto de vista gráfico.
Cálculo de $\lim_{x\to+\infty}\left(x^4+3894x^3\right)$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(x^4+3894x^3\right)$.
Cálculo de $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3+7x+4\right)$.
Cálculo de $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{x^3-x+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{3x^2-x+2}$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6x}{x-5}$.

Cálculo de $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3+7x}{-2x^2+5x+1}$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x}$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x+4}{x^2+1}$.
Cálculo del límite infinito de una función en un punto, desde un punto de vista gráfico.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+3}{x-1}$.
Gráfica de una función de la que se conocen sus asíntotas.
Cálculo del límite de una función a partir de sus límites laterales, desde un punto de vista gráfico.
Dada la función f(x) = $\begin{cases} x^2+1 & x\le 0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases}$, cálculo de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.
Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<4 \\ 3 & si \quad x=4 \\ 2x-6 & si \quad x>4 \end{cases}$, cálculo de $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.
Cálculo de $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-x^2+x-1}{x^3-1}$.

Tabla 8.5. Argumentaciones no realizadas.

El término “indefinidamente” (1ª sesión, unidad 9), que el profesor utiliza de modo transparente, no ha quedado claro y puede inducir al alumno a error cuando, por ejemplo, una función que tiene una asíntota horizontal puede suponerle que tiende a más infinito.
Ante la respuesta de un grupo de alumnos a la pregunta de calcular el límite de una función, conocida su gráfica (1ª sesión, unidad 14), el profesor no la sanciona, es decir, no instituye el saber.
En la 1ª sesión, unidad 18, un alumno responde a la pregunta del profesor y éste no la sanciona, obviando dicha respuesta.
En la 1ª sesión, unidades 35 a 37, el profesor no aprovecha la ocasión de hacer ver a los alumnos que, en relación a los límites en infinito, no tiene por qué cumplirse el que si $x\to+\infty$, entonces se tenga que dar que $f(x)\to+\infty$, y al igual para $-\infty$.
El profesor no estudia una tabla de variación numérica para calcular el límite de una función en un punto (1ª sesión, unidad 51; 3ª sesión, unidad 19), lo que puede dar lugar al conflicto semiótico de que el límite coincide con la imagen del punto.
En la 1ª sesión, unidad 60, el profesor interrumpe el proceso de devolución ante la respuesta errónea de un alumno, obviando dicho comentario sin sancionarlo. Es más, en la unidad 61 parece dejar claro que no ha conseguido el objetivo de que los alumnos entiendan el límite de

una función en un punto sin relacionarlo con la imagen de dicho punto.
El profesor asume la idea de "tendencia" a un número como transparente (1ª sesión, unidad 63), hecho no constatado así por los alumnos. Surgen problemas al no haber institucionalizado el profesor la idea de entorno de un punto (3ª sesión, unidad 38).
Se producen diversas situaciones en las que el profesor hace una pregunta y él mismo responde, para evitar respuestas erróneas en los alumnos, por lo que el profesor valida sin contar con los alumnos (1ª sesión, unidades 67, 83 y 88; 2ª sesión, unidades 15 y 63; 3ª sesión, unidades 24, 27, 52 y 55; 4ª sesión, unidad 90, por ejemplo).
El profesor trata de convencer a los alumnos de que "infinito" no es un número, pero lo trata como si tal fuera (2ª sesión, unidades 5, 7, 9, 17, 25, 26 y 34; 3ª sesión, unidad 31).
En la 3ª sesión, unidad 58, el profesor relaciona el caso de no existir imagen en un punto con la aparición de asíntotas verticales, obviando los casos de las funciones a trozos y de la indeterminación $\frac{0}{0}$, provocando la confusión entre los alumnos.
En la 4ª sesión, unidad 88, el profesor no sanciona la respuesta de una alumna que manifiesta el conflicto semiótico de la función constante: como no hay "x" donde sustituir, no hay límite.

Como puede observarse, para esta entidad primaria, se obtiene una idoneidad epistémica media.

8.3. IDONEIDAD INTERACCIONAL

La idoneidad interaccional mide el grado en que los modos de interacción profesor-estudiante permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

En este apartado se describen los distintos componentes de este tipo de idoneidad, con especificación del descriptor correspondiente y los resultados obtenidos en las sesiones de clase.

Componente: Interacción docente-discente

Descriptor: El profesor hace una presentación adecuada del tema.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

En general, el profesor en el desarrollo de los temas utiliza el siguiente guión didáctico:

- Motivación de los estudiantes.
- Iniciación a las actividades propuestas o pertinentes.

- Utilización del modelo dialógico para desarrollar los aspectos teórico-prácticos.

Sin embargo, en algunas ocasiones, debido a la componente mediacional, el profesor emplea el modelo dogmático o lección magistral.

Todo lo anterior se efectúa a lo largo de los contenidos siguientes:

- Idea intuitiva del límite de una función en el infinito. Estudio gráfico de funciones.
- Límites de funciones en un punto. Estudio gráfico.
- Límites laterales. Estudio gráfico.
- Límites de funciones en el infinito. Estudio analítico:
    a) Funciones polinómicas.
    b) Funciones racionales. Indeterminaciones.
    c) Funciones irracionales. Indeterminaciones.
- Límite de una función continua en un punto.
- Ejemplo de cálculo del límite de una función continua.
- Límites en funciones no continuas.
- Cálculo de asíntotas.
- Límite de una función definida a trozos, gráficamente.
- Límite de una función definida a trozos, analíticamente.
- Nuevas indeterminaciones. Aplicación de la regla de Ruffini para el caso $\frac{0}{0}$.

Descriptor: Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

Salvo en los escasos momentos en que el profesor utiliza la configuración instruccional de la lección magistral, se reconocen y resuelven los conflictos de significado. Los momentos de resolución son los siguientes:

- Juego de preguntas y respuestas para identificar límites en el infinito de funciones dadas por sus gráficas.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función en un punto de forma analítica.

- Aclaración sobre la densidad de $\mathbf{R}$: algunos alumnos dudan sobre el número real anterior o posterior a uno dado.

- Se enfatiza que una función puede no estar definida en un punto y, sin embargo, tener límite en dicho punto.

- El profesor no atiende el comentario de un alumno sobre la existencia de un límite al dar como justificación algo que no tiene nada que ver con la cuestión a tratar. El profesor rompe el proceso de devolución.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función a trozos dada por su gráfica. Dificultad evidente de los alumnos al calcular los límites laterales.

- Ante las dudas reiteradas de un alumno, el profesor lo saca a la pizarra. El alumno se "empeña" en ver que el límite de una función en un punto es la imagen de la función en dicho punto, hecho no cierto en este caso.

- Tras la primera sesión, el profesor reconoce que no ha conseguido explicar gráficamente el cálculo de límites laterales, dadas las dificultades planteadas en las preguntas de los alumnos.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite en el infinito de una función polinómica, analizando los signos del infinito y del coeficiente de mayor grado.

- Al no utilizar tablas numéricas, el profesor induce a los alumnos el conflicto semiótico de que el infinito es un número.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite en el infinito de una función racional: análisis de los grados y de los signos.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular algunos resultados en los que "infinito" está presente. Como no se utilizan tablas de variación numérica, el profesor vuelve a incurrir en el conflicto semiótico antes señalado. Difícil comprensión del concepto por parte de algunos alumnos.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular dominios de funciones irracionales, ya que se constata que la mayoría no lo recuerdan.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función irracional que presenta la indeterminación $\infty - \infty$.

- Juego de preguntas y respuestas para llegar a la definición de límite de una función en un punto.

- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función en un punto desde un punto de vista gráfico.
- Juego de preguntas y respuestas para llegar a la idea de asíntota vertical desde un punto de vista analítico.
- Juego de preguntas y respuestas para calcular asíntotas verticales y horizontales desde un punto de vista analítico.
- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función a trozos en un punto (gráficamente). El profesor interpreta correctamente los silencios mostrados por parte de sus alumnos ante la complejidad del concepto.
- A pesar de los ejemplos, subyace el conflicto semiótico de que existiendo imagen en un punto, debe existir límite en dicho punto. El profesor intenta rebatir esa idea, pero, parece, no lo consigue.
- Juego de preguntas y respuestas para calcular el límite de una función a trozos en un punto (analíticamente).
- Solicitud por parte de algunos alumnos de más ejemplos de funciones a trozos. Los alumnos son conscientes de que deben practicar más.
- Juego de preguntas y respuestas para obtener todas las indeterminaciones conocidas hasta ahora.
- Juego de preguntas y respuestas para dar solución a la indeterminación $\frac{0}{0}$ mediante un ejemplo de función racional. El profesor desarrolla toda la acción al interpretar los silencios de los alumnos a la hora de operar.
- Juego de preguntas y respuestas para intentar analizar la diferencia entre una función y la que resulta al simplificarla.
- Juego de preguntas y respuestas para dar solución a la indeterminación $\frac{0}{0}$ mediante un ejemplo de función irracional. Preguntas de los alumnos sobre cómo simplificar ahora. Se observa que tienen dificultad al multiplicar por el conjugado.
- Juego de preguntas y respuestas para calcular de nuevo el límite de una función a trozos en un punto (analíticamente).
- Juego de preguntas y respuestas para dar solución a la indeterminación $\frac{0}{0}$ mediante un nuevo ejemplo de función racional, viendo la necesidad de descomponer aplicando la

regla de Ruffini. El profesor observa los errores de los alumnos y sus silencios a la hora dar una respuesta.
- A lo largo de todas las sesiones, también se establece un juego de preguntas y respuestas para calcular los dominios de las funciones que se usan en cada caso concreto.

Descriptor: Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

Dado que el uso de la configuración instruccional dialógica es la utilizada por el profesor a lo largo de las sesiones, en general, ha procurado llegar a consensos con base al mejor argumento.

Los momentos de consenso son los siguientes:

- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos acerca del estudio de los límites de funciones, tanto desde el punto de vista gráfico como analítico. El consenso se obtiene mediante un debate dirigido por el docente, aunque, en ocasiones, se produce por asentimiento, bien por los alumnos, bien por el profesor.
- En algunos casos, por ensayo y error, son los alumnos los que llegan a la verdad.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos acerca del cálculo de los dominios de las funciones que va utilizando.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar los límites laterales de una función a trozos en un punto.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar los límites en el infinito de funciones polinómicas.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar los límites en el infinito de funciones racionales.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar los límites en el infinito de funciones irracionales.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar las asíntotas, horizontal y vertical, de una función racional.

- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar el límite de una función en un punto, cuando ésta viene dibujada a trozos.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar el límite de una función en un punto, cuando ésta viene definida a trozos.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos al estudiar el límite de una función irracional que presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$.
- El profesor consensúa las respuestas con los alumnos para aplicar correctamente la regla de Ruffini y descomponer los términos de una función racional.

Descriptor: Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

Los recursos retóricos y argumentativos que utiliza el profesor son los siguientes:

- Corrección de los límites en el infinito de cuatro gráficas: técnica topogenética de cooperación (el profesor y los alumnos construyen el saber); diferenciación topogenética (el profesor hace las preguntas, el alumno responde); técnicas cronogenéticas de control-delimitación (demora o ralentización del saber, afirmación de avance del saber y cambio de fase) y técnica cronogenética de confrontación o cambio cognitivo. Se echa en falta la técnica cronogenética de la determinación del momento propicio para la institucionalización del saber y la de incitación a la contestación.
- Última gráfica de las estudiadas en este apartado: técnica cronogenética de bifurcación o cambio de fase (el profesor comienza hablando de asíntotas y, sin embargo, se dedica a asignar una fórmula a la gráfica dibujada).
- Cálculo del límite de una función en un punto: técnica cronogenética de bifurcación o cambio de fase (el profesor intenta aclarar el entorno de un punto y, sin embargo, pregunta por la densidad de R). Se echa en falta la técnica de determinación del momento propicio para enseñar el entorno de un punto.

Hay un momento en que el profesor entra en el desarrollo de una clase magistral (topogénesis descendente) para luego volver al marco dialógico (topogénesis ascendente).

- Cálculo de límites laterales mediante un ejemplo gráfico: el profesor usa la técnica cronogenética de aceleración (valida e instituye sin contar con los alumnos) para volver, después, al modo dialógico formulando preguntas a los mismos. Tomando conciencia de la poca transparencia de este cálculo, utiliza la técnica cronogenética de ralentización.

Para terminar con esta actividad el profesor utiliza la técnica cronogenética de determinación del momento propicio para hacer ver la no existencia del $\lim_{x \to 0} f(x)$ cuando los límites laterales no coinciden.

- Distinción del valor de la función en un punto y el valor del límite en dicho punto mediante otro ejemplo gráfico: el profesor usa la técnica de aceleración, cambiando a una topogénesis descendente y pasando a la clase magistral.
- Límites de funciones en el infinito: al interrogar sobre esta tarea, el profesor usa la técnica cronogenética de la ralentización de la acción y la técnica topogenética de la cooperación. En este mismo proceso usa la técnica de la bifurcación o cambio de fase al pasar del estudio del dominio de una función al cálculo de límites.
- Cálculo de límites en funciones polinómicas: el profesor utiliza una topogénesis descendente al emplear la enseñanza magistral basándose en la técnica de la aceleración para llegar lo antes posible a la regla del cálculo. Cuando vuelve al modelo dialógico, se echa en falta una técnica cronogenética de confrontación al estudiar los casos que se presentan.
- Cálculo de límites en funciones racionales: el profesor vuelve al proceso dialógico mediante la técnica cronogenética de la ralentización, buscando implicar a los alumnos en el aprendizaje, pero, a continuación, utiliza la clase magistral empleando la técnica de la aceleración. A lo largo del cálculo, también utiliza la técnica de bifurcación para tratar de distinguir las indeterminaciones de las determinaciones.

En algunos casos, el profesor utiliza la técnica cronogenética de confrontación para obtener el resultado deseado.

Fundamentalmente, a lo largo de las resoluciones de estos casos de límites, el profesor ha utilizado la configuración instruccional de referencia dialógica.

- Cálculo de límites de funciones irracionales: el profesor continúa con el proceso dialógico, utilizando la técnica cronogenética de la ralentización. En ocasiones se echa en falta la técnica cronogenética de la confrontación para validar resultados o hacer emerger el saber.
- Definición de límite en un punto: el profesor utiliza una técnica cronogenética de aceleración para llegar rápidamente a la definición.
- Cálculo del límite de una función en un punto: el profesor intenta iniciar el proceso dialógico pero utiliza una técnica cronogenética de aceleración, lo cual es una contradicción.
- Límites en funciones no continuas: el profesor utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación al pasar a estudiar las asíntotas verticales para tratar de explicar la discontinuidad. Elude el modelo dialógico al pasar a la lección magistral.
- Cálculo de asíntotas: al estudiar los límites laterales infinitos, el profesor utiliza la técnica cronogenética de la confrontación por medio de la ralentización.

El profesor sigue usando el modelo de configuración instruccional dialógica, pero se origina un fenómeno didáctico que llamamos "fenómeno del alumno genérico", al interpretar como genérico de la clase la respuesta de un alumno concreto.

En algunas ocasiones, el profesor intenta la devolución del problema mediante el uso de la técnica emocional del "halago bromista".

- Cálculo del límite de una función definida a trozos, gráficamente: al preguntar por cuestiones no relacionadas con este cálculo, el profesor utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación. Además, continúa con el modelo dialógico usando la técnica de ralentización para calcular el límite.
- Cálculo del límite de una función definida a trozos, analíticamente: el profesor utiliza la técnica cronogenética de la bifurcación para realizar un estudio de la gráfica previo al límite.

Para desarrollar esta actividad, el profesor recurre a la técnica topogenética de la cooperación y la mesogenética de enseñanza de la estructura dialógica, para pasar a la lección magistral (topogénesis descendente).

En esta actividad, se echa en falta la técnica cronogenética de la determinación del momento propicio para aclarar a los alumnos que el límite no coincide con el valor de la función en el punto.

- Cálculo del límite de una función racional que presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$: el profesor utiliza la técnica de cambio de fase para relacionar el dominio de una función con el cálculo de límites y el posterior estudio de la continuidad. En el cálculo de este límite se echa en falta la técnica de ralentización para abordar el conflicto semiótico de que el límite es el valor de la función.
- Cálculo del límite de una función irracional que presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$: dada la complicación del ejemplo, el profesor cae en el fenómeno del alumno genérico y se echa en falta la técnica de confrontación entre los alumnos.
- Cálculo del límite de una función a trozos, analíticamente: el profesor utiliza la aceleración, en una topogénesis descendente, pasando de una técnica mesogenética de estructura dialógica a la lección magistral. A lo largo del estudio, se utiliza la aceleración, cuando habría que plantearse la ralentización y dar paso a la confrontación. Como no es así, subyace el fenómeno didáctico del alumno genérico en todo el planteamiento.

Componente: Interacción entre discentes

Descriptor: Momentos en que se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

La configuración instruccional dialógica favorece las interacciones profesor-estudiantes. Sin embargo, las comunicaciones entre éstos aparecen escasamente, dándose únicamente en momentos de corrección del compañero al intentar validar lo propuesto por el profesor.

Estos momentos quedan reflejados de la siguiente forma:

- El profesor pregunta directamente a un alumno por los valores que puede tomar "x" en la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. No sabiendo éste la respuesta, otro alumno contesta por él, produciéndose un fenómeno del alumno genérico propiciado por la situación. Este hecho se produce con relativa frecuencia a lo largo de todas las sesiones.

- El profesor pregunta directamente a un alumno el valor de $\lim_{x \to +\infty} g(x)$, siendo g una función cuya gráfica está dibujada en la pizarra. Como el alumno no contesta, otros alumnos asumen la devolución y responden por él.
- El profesor pregunta directamente a un alumno por qué vale -2 un límite pedido. Como el alumno no lo sabe, otra alumna acepta la devolución y responde en su lugar.
- El profesor pregunta directamente a una alumna por el valor de un límite en una gráfica dibujada en la pizarra y ésta responde erróneamente. El resto de los alumnos trata de convencer a su compañera de que está en un error haciendo una votación, propiciada por el profesor, y viendo que casi todos están en contra de la respuesta dada por ella. La alumna rectifica gracias a sus compañeros.
- La respuesta de un alumno sobre el límite lateral en un punto de una función a trozos es sometida a votación dada la poca aceptación que tiene. Gracias a ello, los compañeros van reflexionando y unos a otros se van convenciendo de que este alumno tiene razón.
- El profesor favorece el diálogo entre los alumnos para que detecten la relación que hay entre tres funciones racionales con vistas a calcular sus límites en $\pm\infty$. Después de un debate, en el que se presentan distintas respuestas, se llega a la conclusión de que es la relación de los grados polinómicos lo que hay que tener en cuenta.
- El profesor pregunta por el resultado de la "*operación*" $\frac{2}{+\infty}$ y son los alumnos los que llegan al resultado correcto, después de distintas intervenciones entre ellos.
- El profesor pregunta por el resultado de unos límites laterales y son los alumnos, mediante diálogo entre ellos, los que instituyen el saber. Incluso, el profesor favorece una votación para ratificar los resultados entre todos.
- Los alumnos establecen un debate para ver qué relación existe entre la función $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ y la función $y = x + 2$. Como no llegan a un consenso, el profesor reconduce los diálogos.
- Ante la pregunta del profesor a una alumna por el $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$, siendo la respuesta correcta, el resto de la clase también opina, queriendo hacerse partícipes de la respuesta.

Componente: Autonomía

Descriptor: Momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.

Resultados obtenidos en las sesiones de clase:

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca de los límites en el infinito de cuatro funciones dadas por sus gráficas.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim_{x \to 5}(x^2 - 2)$.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del límite de una función a trozos dada por su gráfica.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca de cómo calcular el dominio de una función.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del límite de una función polinómica en $+\infty$ y $-\infty$, teniendo en cuenta los signos de los coeficientes principales y del infinito.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca de cómo calcular el límite de tres funciones racionales, teniendo en cuenta los signos de los coeficientes principales del numerador, denominador y del infinito correspondiente, además del grado de los polinomios.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del dominio de una función racional.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\right)$.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim_{x \to 2}\frac{2x+4}{x^2+1}$.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca de los límites laterales de una función dibujada en la pizarra y que presenta una asíntota vertical.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim_{x \to 1}\frac{2x+3}{x-1}$.
- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del límite de una función a trozos, definida gráficamente.

- Los alumnos representan gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 0 \\ 2x-1, x>0 \end{cases}$.

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, siendo $f(x)$ la función antes definida.

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

- Los alumnos exploran cómo es la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, comparándola con la gráfica de $f(x)=x+2$.

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, siendo

$$f(x)=\begin{cases} 2, x<4 \\ 3, x=4 \\ 2x-6, x>4 \end{cases}.$$

- Los alumnos exploran cómo es la gráfica de la función anterior.

- Los alumnos responden a las preguntas del profesor acerca del $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^2+x-1}{x^3-1}$

Con los resultados obtenidos en las diversas componentes de la idoneidad interaccional, se puede afirmar que la idoneidad es alta.

8.4. IDONEIDAD COGNITIVA

Se refiere al grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad entre los significados personales logrados y los significados pretendidos/implementados.

Según la definición anterior, para hacer operativa la idoneidad cognitiva hay que establecer dos procesos. Primero se tratarán los conocimientos previos de los estudiantes necesarios para el estudio del tema de límite funcional. En segundo lugar se estudiará la apropiación de los conocimientos implementados por parte de los estudiantes mediante el análisis de las respuestas de éstos al cuestionario propuesto.

Conocimientos previos:

En el significado pretendido-implementado, los estudiantes desarrollaron un tema denominado "Características de las funciones", donde el objetivo fundamental era el conocimiento de las funciones elementales y las características generales de las mismas.

El tratamiento didáctico dado a este tema se basa en un estudio pormenorizado del lenguaje gráfico, con la inclusión de sesenta y un ejemplos gráficos de funciones. Sin embargo, no aparece ningún cuadro de valores numéricos a lo largo de todo el tema, lo cual no permite al alumno las conversiones necesarias entre estos dos tipos de representaciones semióticas. Por ello, se echan en falta numerosas funciones semióticas de expresión, las tablas de valores numéricos, y de contenido, las gráficas.

El tema siguiente corresponde a "Límite y continuidad" y en él hay una primera parte de sucesiones que, por decisión del departamento de Matemáticas, no se incluyó en el significado pretendido-implementado. Este hecho conduce a la ausencia de tablas de valores de las sucesiones, lo cual se echa en falta posteriormente en los apartados correspondientes al límite funcional.

Por tanto, respecto de esta componente de conocimientos previos, se induce una idoneidad cognitiva baja.

Aprendizaje logrado:

Se trata de hacer explícito el grado de aproximación entre el significado evaluado, el cual se ha justificado que es representativo del significado implementado (apartado 6.2.), y el significado logrado por los estudiantes.

Para cada cuestión se ha analizado el porcentaje de estudiantes en los que se observa, al menos, un conflicto semiótico. La tabla siguiente muestra estos porcentajes:

Tabla 8.6. Porcentaje de conflictos semióticos por cuestión.

Ítems	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	C.6	C.7	C.8	C.9	C.10	C.11
%	88.23	82.55	100	29.41	35.29	35.29	52.94	64.71	100	52.94	70.59

Como puede observarse, se trata de porcentajes muy elevados en cuanto a los conflictos semióticos detectados que muestran los alumnos. Por tanto, la idoneidad cognitiva respecto a los aprendizajes logrados puede considerarse baja.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES

9.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se presenta un resumen de las aportaciones y conclusiones obtenidas a lo largo del trabajo, mediante las respuestas a las diferentes hipótesis formuladas en el capítulo 2. Por otra parte, se sugieren posibles líneas de investigación como desarrollo de las propuestas en la Memoria.

9.2. PRIMERA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La primera hipótesis que se formuló fue: "En el desarrollo epistemológico del objeto límite de un función, a lo largo del estudio histórico realizado, se detectan unos significados institucionales a partir de los cuales se han construido los significados institucionales de referencia, de tal forma que, algunos de éstos, pueden identificarse con los significados del manual objeto de estudio (SIP)."

En el capítulo 3 se efectuó un estudio epistemológico-histórico del objeto límite de una función en el que se detectaron cinco configuraciones: geométrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numérica y métrico-analítica. Posteriormente, se analizó la incidencia de éstas en el significado institucional de referencia, llegándose a la conclusión de que, *según los significados correspondientes a las clases en primero de Bachillerato y a la propia experiencia del profesor, el significado institucional de referencia queda dividido en cuatro configuraciones escolares: gráfica, infinitesimal, numérica y métrica-analítica*.

En el capítulo 4 sobre el significado institucional pretendido, en la configuración parcial de límites de funciones en el infinito puede observarse que, *en las unidades de análisis $U_{1.1}$ y $U_{1.2}$, aparecen las configuraciones de referencia gráfica e infinitesimal. Asimismo, en las unidades $U_{3.1}$ y $U_{3.2}$ aparece la configuración de referencia numérica. Por último, en la configuración U_4 aparece, de forma intuitiva, la configuración métrico-analítica*.

Por otra parte, en dicho estudio se realiza una propuesta para tratar de aclarar la configuración métrico-analítica del significado pretendido. También se utiliza el significado numérico con el objeto de dar sentido a la citada configuración.

9.3. SEGUNDA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La segunda hipótesis es: "En el desarrollo epistemológico del objeto límite de una función, a lo largo del estudio histórico realizado, se detectan unos significados institucionales a partir de los cuales se han construido los significados institucionales de referencia, de tal forma que, algunos de éstos, pueden identificarse en el proceso de estudio que se da en la institución primer curso del Bachillerato de Ciencias e Ingeniería, cuando se analizan las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas realizadas en dicha institución (SII)."

En el capítulo 5 se han estudiado las trayectorias epistémica, docente, discente e instruccional, las cuales corresponden al significado institucional implementado. A continuación se han ido haciendo explícitos los diversos significados del límite de una función según las diversas sesiones y configuraciones epistémicas e instruccionales.

Para la primera sesión, *en la configuración epistémica 1, los significados de referencia utilizados son el gráfico y el infinitesimal. En la configuración epistémica 2 los significados de referencia son: gráfico, infinitesimal y numérico. Por último, en la configuración epistémica 3, los significados son el gráfico y el infinitesimal.*

En la segunda sesión, *en las nueve configuraciones epistémicas de que consta dicha sesión, el significado es el infinitesimal.*

En la tercera sesión, *en la configuración epistémica 1, los significados son: el gráfico, el infinitesimal y el métrico-analítico. En la configuración epistémica 2, los significados infinitesimal y numérico. En las cuatro siguientes configuraciones, los significados son el gráfico y el infinitesimal.*

Por último, en la sesión cuarta, *para las tres primeras configuraciones epistémicas, los significados detectados son el gráfico y el infinitesimal. En la configuración 4, el significado es el infinitesimal.*

9.4. TERCERA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La tercera hipótesis es: "En el SIP aparecen unos conflictos semióticos epistémicos de significado que pueden explicar potencialmente algunas dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio del límite de una función."

En el capítulo 4 se estudió el significado institucional pretendido: Concretamente en el apartado 4.2.1. se analizó la configuración parcial "límites de funciones en el infinito", en la que figura la unidad de análisis U_{11}. *En ésta aparece un conflicto semiótico potencial debido a la ausencia de una función semiótica de expresión: una tabla de valores, y de contenido: la gráfica de la función.*

En la unidad de análisis U_{12} se estudió el comportamiento de una función racional para valores de x tendiendo a infinito. *En ésta aparece un conflicto semiótico potencial, similar al anteriormente descrito, que relaciona la tabla de valores con la gráfica de la función.*

En el apartado 4.2.3., de la configuración parcial "límites laterales de una función en un punto", se estudió la unidad de análisis U_{32}. *En ésta aparece un conjunto de funciones semióticas que el texto no realiza y que serían necesarias para la comprensión de los estudiantes.*

Por último, en el apartado 4.2.4. de la configuración parcial "límite de una función en un punto", se estudió la unidad de análisis U_4. *En ésta aparece un conflicto semiótico potencial al faltar una función semiótica que relacione las sucesiones por la derecha y por la izquierda de la variable independiente x con la expresión* $|x-a| \rightarrow 0$. Además, *se ha detectado otro conflicto semiótico potencial al faltar una función semiótica que relacione las sucesiones por la derecha y por la izquierda de la variable dependiente con la expresión* $|f(x) - L| \rightarrow 0$.

9.5. CUARTA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La cuarta hipótesis es: "En el SII aparecen unos conflictos semióticos epistémicos y cognitivos que se relacionan entre sí y que pueden explicar algunas dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio del límite de una función."

En el capítulo 5 se han estudiado las trayectorias epistémicas de las cuatro sesiones de clase analizadas. En la primera sesión se analizaron tres configuraciones epistémicas, las cuales han dado lugar a un *conjunto de conflictos semióticos* que se hacen explícitos según dichas configuraciones.

En la configuración CE1 aparece el conflicto semiótico *"el infinito es un número"*. Observando la trayectoria instruccional, en la unidad de análisis 9 se detecta otro conflicto semiótico *debido a la ausencia de una función semiótica que aclare la expresión "tan grande como se quiera"*. En las unidades 25 y 28, el conflicto semiótico es *"la recta se va a pegar a la asíntota"*. En la unidad 35, se observan dos conflictos semióticos: *"si x tiende a más infinito, entonces f(x) tiende a más infinito"* y *"si x tiende a menos infinito, entonces f(x) tiende a menos infinito"*.

En la configuración CE2 aparece el conflicto semiótico *"si un punto no está en el dominio de definición de la función, entonces no hay límite en ese punto"*. También aparece el conflicto semiótico *"el límite de una función en un punto coincide con la imagen del mismo"*. En la unidad de análisis 44 se detecta el conflicto semiótico antes citado. En las unidades 46 y 47 se observa el conflicto semiótico *"no apreciar la densidad de R"*.

En la configuración CE3 aparecen los conflictos semióticos ya referidos: *“si un punto no está en el dominio de definición de la función, entonces no hay límite en ese punto”* y *“el límite de la función en un punto coincide con la imagen del mismo”*. En las unidades de análisis 82 y 88 también se detecta *“el límite de una función en un punto es el valor de la imagen en dicho punto”*.

En la sesión 2 se han distinguido 9 configuraciones epistémicas. En la CE1, unidad de análisis 1, aparece el conflicto semiótico *“confundir el objeto función con una de sus representaciones semióticas”*.

En la configuración CE3, unidades 5, 7, 9, 16 y 17, aparece el conflicto semiótico *“considerar que infinito es un número”*. En las unidades de análisis 7 y 17 se observa un conflicto semiótico *al faltar una función semiótica que relacione el límite de la función con una tabla de valores*. En la unidad 12 se localiza un conflicto semiótico *por ausencia de una función semiótica que aclare la pregunta del alumno*.

En la configuración CE4, unidad de análisis 24, aparece un conflicto semiótico *al faltar una función semiótica que relacione el límite cuando x tiende a infinito de la función racional con una tabla de valores*. En la unidad 25 se observa el conflicto semiótico *“considerar que infinito es un número”*. En la unidad 30 se aprecia el mismo conflicto semiótico, aunque el profesor trata de dar explicaciones para que los estudiantes lo superen. En la unidad 34 se da un conflicto semiótico *por ausencia de una función semiótica que aclare el término “infinitamente cerca de cero”*.

En la configuración CE5, unidad de análisis 43, aparece un conflicto semiótico *por ausencia de una función semiótica que relacione el límite cuando x tiende a infinito de la función racional, con una tabla de valores*.

En la CE6, unidad 44, también aparece el mismo conflicto semiótico anterior.

En la CE7, unidades 52 y 56, vuelve a manifestarse el mismo conflicto semiótico anterior.

En la CE8, unidad 63, aparece un conflicto semiótico *por ausencia de una función semiótica que relacione el límite cuando x tiende a infinito de una función irracional con una tabla de valores*.

Por último, en la CE9, unidad 64, aparece un conflicto semiótico *por ausencia de una función semiótica que relacione el límite cuando x tiende a infinito de una función irracional, diferencia de raíces, y una tabla de valores*. En la unidad 68 se observa el conflicto semiótico *"considerar que infinito es un número"*, aunque el profesor trata de que los estudiantes lo superen.

La sesión tercera consta de seis configuraciones epistémicas. En la CE1, unidad de análisis 0, aparece el conflicto semiótico *"cuando se estudia el límite en el infinito, entonces aparecen asíntotas"*. En la unidad 4, se observa el conflicto *"si hay límite, entonces la función es continua"*. En la unidad 12 se aprecia el conflicto *"utilizar un objeto matemático sin haber realizado prácticas con el mismo"*. En la unidad 14 se da el conflicto *"no utilizar funciones semióticas para aclarar el término "tan cerca como se quiera""*.

En la CE2, unidades 18, 20 y 24, se aprecia el conflicto semiótico *"el límite de la función cuando x tiende a "a" es f(a)"*.

El CE3, unidad 31, se observa el conflicto *"ausencia de una función semiótica que relacione límites de expresiones izquierda y derecha de un punto, con una tabla de valores"*.

En la CE4, unidad 56, se localiza el conflicto *"ausencia de una función semiótica que relacione la figura con una tabla de valores"*. En la unidad 58 se observa el conflicto semiótico *"cuando no existe f(a), hay asíntotas verticales"*.

Por último, en la CE5, unidad 73, se manifiesta el conflicto semiótico *"el límite es una aproximación y no un valor concreto"*. En la unidad 79 aparecen dos conflictos semióticos: *"si existe f(a), entonces existe límite"* y *"si no existe f(a), entonces no existe límite"*.

La sesión cuarta consta de cuatro configuraciones epistémicas. En la configuración CE1, unidad de análisis 8, aparece el conflicto semiótico *"el valor del límite en un punto es el de la función en dicho punto"*. En las unidades 9 y 19 se observa el mismo conflicto anterior y el profesor trata de que los estudiantes lo superen.

En la CE2, unidad 46, aparece el conflicto semiótico *"ausencia de funciones semióticas para aclarar que la expresión racional en la que aparece* x^2 *no es una parábola"*. En la unidad 50, se observa un conflicto semiótico de *ausencia de funciones semióticas adecuadas para aclarar el término "tan cerca como se quiera"*. En la unidad 57 se aprecia el conflicto *"el cuadrado de una diferencia es la diferencia de los cuadrados"*.

Por último, en la CE3, unidad 85, se observa el conflicto semiótico *"el límite de la función en un punto es el valor de la función en dicho punto"*. En la unidad 88, aparece el conflicto semiótico de la función constante *"no se puede calcular el límite de una función constante porque no hay variable x donde sustituir"*.

9.6. QUINTA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La quinta hipótesis es: "Las trayectorias didácticas detectadas en el proceso de estudio, así como los significados personales logrados por medio del cuestionario aplicado, permiten dar orientaciones de cara a las idoneidades de dicho proceso de estudio."

En el apartado 8.2., de la idoneidad epistémica, se señalan las distintas entidades primarias a tener en cuenta en esta idoneidad: situaciones-problema, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentaciones.

En el estudio de la entidad *situaciones-problema* se han analizado las distintas situaciones implementadas a lo largo del proceso de estudio, comparándolas con las situaciones de referencia no estudiadas.

En la entidad primaria *lenguaje* se han analizado los lenguajes implementados contrastándolos con otros lenguajes pertinentes.

En las entidades primarias *definiciones* y *procedimientos*, se han analizado aquéllos que han sido implementados, contrastándolos con los que no la han sido.

En la entidad primaria *argumentación* se han detectado los momentos de validación, a través del significado institucional implementado, contrastándolos con las argumentaciones no realizadas.

En todas las entidades anteriores se ha tenido en cuenta la información emanada de las trayectorias epistémica, docente, discente e instruccional.

En el apartado 8.3. se ha estudiado la idoneidad interaccional. Para la interacción docente-discente, así como para la interacción entre discentes, se ha utilizado fundamentalmente la trayectoria instruccional.

Para la idoneidad cognitiva se ha recurrido al significado evaluado y al significado personal logrado por los alumnos, tal como se estudia en el capítulo 7.

9.7. SEXTA HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

La sexta hipótesis es: "La aplicación de los criterios de idoneidad al proceso de estudio muestra la dificultad de mantener un equilibrio entre las diversas componentes epistémica, cognitiva, interaccional y mediacional."

Como se ha podido observar a lo largo de los apartados 8.2., 8.3. y 8.4., la idoneidad epistémica es media, la interaccional es alta y la cognitiva es baja. Es decir, aunque un proceso de estudio permita la configuración dialógica como medio de interacción profesor-estudiantes, facilitando el afloramiento de numerosos conflictos semióticos y dificultades en el aprendizaje, sin embargo, la idoneidad cognitiva es baja, esto es, no se solucionan los conflictos semióticos detectados. Es decir, el profesor solamente puede conseguir la superación, por parte de los estudiantes, de sólo algunos conflictos semióticos. La falta de tiempo de enseñanza es un factor a tener muy en cuenta. Además, a una idoneidad interaccional muy alta, que sería lo deseable para tratar de superar todos los conflictos semióticos, corresponde una idoneidad mediacional baja al necesitarse un tiempo muy amplio.

El uso de la técnica cronogenética de la confrontación, que es la que se ha demostrado puede dar resultados positivos en la superación de conflictos semióticos, se opone al tiempo de enseñanza institucional. En efecto, el profesor, ante la necesidad de abordar nuevas cuestiones del temario, utiliza la técnica cronogenética de la aceleración y el fenómeno del alumno genérico como apoyo a su objetivo de acortar el tiempo de enseñanza.

9.8. CONSIDERACIONES FINALES

Se considera interesante concluir el trabajo haciendo explícitas algunas líneas de investigación que puedan ampliar los resultados obtenidos en la Tesis. Así por ejemplo, se pueden realizar nuevos estudios en los que se analicen más casos. Es decir, implicar a más profesores en los procesos de estudio, de tal forma que se puedan establecer perfiles de comportamiento docente en cuanto a las trayectorias estudiadas.

En segundo lugar, pueden realizarse trabajos con la misma problemática que amplíen el conjunto de las trayectorias que aparecen en los trabajos de Godino, Contreras y Font (2006) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006). También interesan estudios en los se profundice en todos los tipos de idoneidades contemplados en los trabajos de investigación anteriormente citados.

Por último, sería interesante ampliar la metodología de investigación (entrevistas personales, vídeos de clase,…), como medio para obtener datos que confirmen los posibles conflictos semióticos potenciales

REFERENCIAS

Antibi, A. (1988). Une présentation posible de la notion de limite á partir des fonctions monotones. *I.RE.M. de Toulouse*. Université P. Sabatier.

Artigue, M. (1989). *Epistemologie et Didactique.* Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathématiques. París: Université París VII.

Artigue, M. (1994). Analysis. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publisher, 167-198.

Artigue, M. (1994), Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* 27-39.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano, 97-140.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2), 231-262.

Asiala, M., Brown, A. y Devries, D.J. (1996). A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*. II Conference Board of the Mathematical Sciencies (CBMS), Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Babault, M.L. et als. (1985). *Mathématiques approche par textes historiques*. M.A.T.H. Nº 61. IREM, Université-Paris VII.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31 (5), 557-578.

Balkar, M. y Tall, D. (1991). Students' Mental Protopypes for Fonctions and Graphs. *Proceedings Fifteenth PME*, 1, 104-111.

Bescós, E. y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología*. Proyecto Exedra. Editorial Oxford Educación.

Bessot, D. et al. (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Comprendre les mathématiques para les textes historiques. Cercle d'histoire des sciences. IREM de basse-Normandie. Ellipses.

Blázquez, M.S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*. 30, 67-82.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y Chevallard. Y. (1989). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Object d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 77-124.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (1), 79-135.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (2), 164-198.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse d'Etat en Sciences. Université Bordeaux I.

Bühler, M. et al. (1990). *Mathématiques approche par textes historiques.* M.A.T.H. Tome 2. Nº 79. IREM, Université-Paris VII.

Cajaraville, J.A. (1996). *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa.* Tesis Doctoral. Universidad de Santiago.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, México. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, M.R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353-369.

Cantoral, R. (2000). *Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis.* Documento interno del CINVESTAV. México.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 7-47.

Cauchy, M.A.L. (1829). *Leçons sur le calcul différentiel.* Á Paris, Chez Debure frères, libraires du roi et de la bibliothèque du roi, 269-295.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Penseé Sauvage. (Edición original, 1985).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recheches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 17 (3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *IV Simposio de la SEIEM*, Huelva.

Contreras, A. (2001). El límite en el bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológico y semiótico. *XVI Congreso del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Huesca (España), 1-32.

Contreras y Sánchez (1997). Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios (1950-1970). *VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Salamanca.

Contreras, A., y Sánchez, C. (1999a). Análisis didáctico de la enseñanza del concepto de límite de una función en textos franceses del siglo XIX. En M. Román (Coord.). *Educar enseñando*. Universidad de Jaén, 67-90.

Contreras, A., Luque, L., Ordóñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (1999b). Una metodología de análisis, en cuanto a los ejemplos que aparecen en los libros de texto, del concepto de límite de una función. Estudio de un manual de primer curso de Universidad. *IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Lugo.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM).* Castellón, 1-21.

Contreras, A. y Sánchez, C. (1998). Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos. *V Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias*, Jaca (Huesca).

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25 (2), 151-186.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2001). Un análisis semiótico de la noción de límite de una función. *V Simposio del Seminario Español de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Almería, 1-27.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2003). Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de teoría de las funciones semióticas. *VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Granada, 189-200.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2007). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *EMA*, 10 (2/3), 413-439.

Cornu, B. (1981). Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite. *Bulletin de L'APMEP*, 335, 627-641.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite.* These de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

Cornu, B. (1985). Les principaux obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM-APMEP*, 55-63.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 153-166.

Cottrill, J., Dubinsky, ED., Nichlos, D. y Schwingendorf, K. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15 (2), 167-192.

D'Amore, B. (1996). Infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un campo fértil para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Epsilon*, nº 36, vol. 12 (3), 341-359.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior,* 5, 281-303.

Deledicq, A. (1994). Les conceptions relatives aux limites. *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France.* M. Artigue, R. Grass, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.). La Pensée Sauvage, editions, 321-327.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7 (1), 5-31.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht. Kluwer A. P., 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 25-41.

Duval, R (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Suisse: Peter Lang, S.A.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.

Duval, R. (2000). Basic Issues for research in athematics Education, Plenary Address. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Tomo I, Editors: Tadao Nakahara and Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), 55-69.

Eco, H. (1979). *Tratado de Semiótica General.* Barcelona: Lumen, 2000.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* PHD. Université de Bordeaux I.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto límite de funciones*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades.* Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2006). La dimensión dual “personal-institucional” y el problema del encaje de los objetos personales del profesorado en el teoría de las funciones semióticas. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 69-104.

García, M. (2003). *Significados institucionales y personales en la enseñanza-aprendizaje del límite de una función.* Memoria de la Labor Investigadora, Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén.

García, M. y Sánchez, C. (2006). Los procesos de instrucción matemática y el límite. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 417-439.

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.

Gascón, J. y Fonseca, C. (2000). Reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas en las Instituciones Didácticas. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Gaud, D. et als. (1998). *Des tangentes aux infiniment petits. Reflexións et travaux pour la classe.* IREM, Université de Poitiers.

Godino, J. D. (1999). *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática.* (Recuperable en URL: http://www.ugr.es/local/semioesp/).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J.D. (2006). Algunos Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 105-121.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en Educación Matemática, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10, [URL:http://www.ex.ace.uk/~PErnest/ pome10/aert7.htm].

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Actas PME* XXI, 2, 313-320.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos.* Documento interno del Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D.; Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, 4 (2), 221-252.

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

González, P.M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza Editorial.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* Madrid: Gredos, 1971.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

Lacroix, S.F. (1806). *Traité élémentaire de calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édititon, À Paris, Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, 1-26.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Moigno, M. (1840). *Leçons de Calcul Différentiel et Calcul Intégral, tome 1er – Calcul différentiel –.* Paris, bachelier, Imprimeur-Libraire de l'ecole polytechnique, XIII-XXXV, 1-73.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), 26-33.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Griten: a semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics,* 22 (2), 14-23.

Robert, A. (1982). *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques.* These de Doctorat d'Etat, Université Paris VII.

Robinet, J. (1983). Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (3), 223-292.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez C. y Contreras A. (1995a). Epistemología del concepto de límite. Análisis de manuales. *VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Madrid.

Sánchez C. y Contreras A. (1995b). Concepciones de los alumnos de COU en torno a la noción de límite de una función. *VII Jornadas de Aprendizaje de la Educación Matemática ("Thales")*, Córdoba.

Sánchez C. y Contreras A. (1996a). Un estudio sobre la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite funcional en los siglos XIX y XX. *ICME 8*, Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1996b). Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX. *ICME 8,* Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1996d). Concepciones y obstáculos de los alumnos de primer curso de Diplomaturas Técnicas en torno a la noción de límite de una función. *ICME 8,* Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1997b). Obstáculos de los alumnos de primer curso de Diplomaturas Técnicas en torno a la noción de límite de una función. *VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM),* Salamanca.

Sánchez C. y Contreras A. (1997c). La relación didáctica profesor-estudiante en la enseñanza del concepto de límite de una función. *RELME-11*, México: Morelia.

Sánchez C. y Contreras A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 73-84.

Sánchez C. y Contreras A. (1997). Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios. (1950-1970). *VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Salamanca.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limits au secondaire. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 21 (1/2), 7-56.

Schneider, M. et als. Groupe AHA, (1999). *Vers l'infini pas à pas*. Bruxelles: De Boeck Wesmael.

Schubring, G. (1985). Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5 (3), 343-385.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author. *For the Learning of Mathematics,* 7 (3), 41-51.

Schubring, G. (1997). *Analysys of Historical Textbooks in Mathematics.* Departamento de Matemática, PUC do Rio de Janeiro.

Sensevy, G., Mercier, A. y Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course á 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (3), 263-304.

Sierpinska, A. (1985a). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1985b). La notion d'obstacle epistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, Leiden.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mthematics,* 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on undertanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36.

Sierpinska, A. (1991). *Some remarks on undertanding in mathematics*. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Study Group. Vancouver.

Sierpinska, A. (1997). *La compréhension en Mathématiques*. Départament De Boeck, Université París.

Sierra, M.; González, M. y López, M. C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 258-276.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mthematics,* 11, 271-284.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*, en D. Tall (Ed.), Dordrecht: Kluwer, A.C.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The role of visualization in the Calculus. En Zimmermann, W. y Cunningams, S. (Ed.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematics Association of America, 105-119.

Tall, D. (1992). Students'Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Quebec, august 1992. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick.

Tall, D. (1994). A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick. Plenary presentation at the Commission Internationale pour l'ètude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques, Toulouse (France).

Tall, D. (1994). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary Lecture at the *Annual Conference of the International Group for the Psicology of Mathematics Education*, Recife, Brasil, July 1995.

Tall, D. (1995). *Didáctica del Análisis y Didáctica de las Funciones (Seminario)*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Tall, D. y Schwarzenberger, R.L.E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and the limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de 1º de B.U.P. *Epsilon*, nº 34, Vol. 12(1), 11-46.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues. *For the Learning of mathematics*, 3 (2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Vinner, S. y Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Wenzelburger, E. (1991). Grafical environment for the construction of fonction concepts. *Proceedings Fifteenth PME*, 1, 332-339.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5 (3), 93-123.

Wilhelmi, M.R., Godino, J.D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77-120.

Willians, S. (1990). The understanding of limit: Three perspectives. *Proceedings of the PME XIV,* 1, 101-108.

Willians, S. (1991). Models of limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), 219-236.

Willians, S. R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (4), 341-367.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica, 1988.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

ANEXO 1:

APARTADOS DEL LÍMITE FUNCIONAL CORRESPONDIENTE AL LIBRO DE TEXTO

6.1. Límites de funciones en el infinito

A partir de la representación gráfica de funciones, es posible estudiar cuál es su comportamiento para valores muy grandes, positivos o negativos, de la variable x.

Consideramos, por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$. Como se observa en su gráfica (figura 9.6), para valores de x muy grandes, es decir, cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a 1, y lo mismo ocurre para valores de x muy pequeños, es decir, cuando x tiende a $-\infty$. Si la función presenta la misma tendencia en ambos extremos de la gráfica, se escribe:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$.

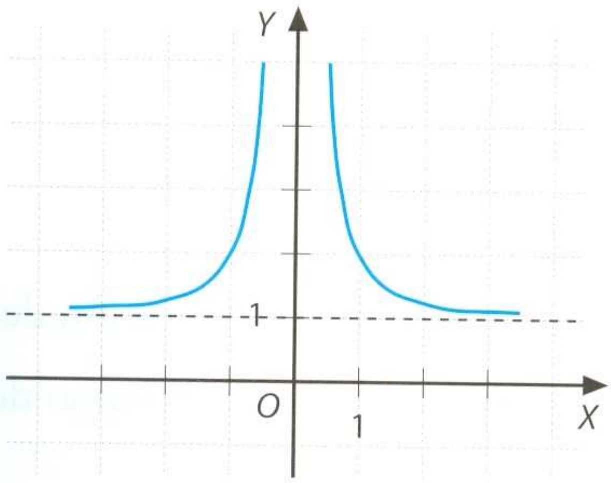


FIGURA 9.6.

6.2. Cálculo de límites de funciones en el infinito

Límites de funciones polinómicas

Las funciones polinómicas tienden a ∞ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. El signo debe determinarse en cada caso:

Por ejemplo, para calcular el límite de la función $-3x^3 - x^2 + 4x - 1$, dado que el término de grado máximo es el que determina la tendencia de la función, se obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^3 - x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (-3x^3) = -(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^3 - x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^3) = -(-\infty) = +\infty$$

Límites de funciones racionales

Las funciones cociente de polinomios presentan una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, se trabaja observando el término de grado máximo de cada uno de los polinomios:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 1}{5x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3}{5x^3} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - x}{-2x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3}{-2x^2} = +\infty$$

Límites de funciones con radicales

En los límites de los siguientes ejemplos aparece la indeterminación del tipo $\infty - \infty$. La forma de resolverla es análoga al caso de las sucesiones.

6.3. Límites laterales de una función en un punto

A continuación, vamos a establecer los límites laterales de una serie de funciones en determinados puntos:

- La figura 9.11 es la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$.

  Si x tiende a $+\infty$, la función crece indefinidamente, lo cual se expresa escribiendo:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$$

  Lo mismo sucede si se estudia el comportamiento de la función si $x \to -\infty$. Pero, ¿cómo se comporta la función cuando x se aproxima a un valor concreto, por ejemplo a 3? Se puede realizar la aproximación tomando valores cercanos a 3 tanto por la derecha como por la izquierda, es decir, para $x > 3$ y para $x < 3$.

  En cualquier caso, las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8:

x	2,90	2,95	2,99	3	3,01	3,05	3,10
$f(x)$	7,41	7,7025	7,94	8	8,0601	8,3025	8,61

  Como se observa en la tabla, los valores leídos de izquierda a derecha hacia $x = 3$ y los leídos de derecha a izquierda hacia $x = 3$, convergen en el valor 8. Por eso se escribe $\lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = 8$. Además, $f(3) = 8$.

- Consideremos ahora la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ (figura 9.12).

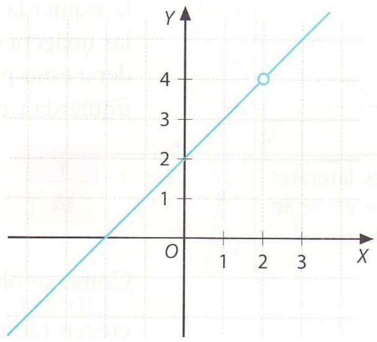


FIGURA 9.12.

Es una función definida en $\mathbb{R} - \{2\}$. Por tanto, se puede escribir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)\,(x-2)}{x - 2} = x + 2 \text{ si } x \neq 2$$

Su representación gráfica coincide con la de la recta $y = x + 2$, pero con un *hueco*, el correspondiente a $f(2)$, que no existe.

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, es posible realizar una aproximación al punto $x = 2$ y observar cómo se comportan las imágenes por f:

x	1,95	1,99	1,999	...	2,001	2,01	2,05
$f(x)$	3,95	3,99	3,999	...	4,001	4,01	4,05

Si nos aproximamos a $x = 2$ tomando valores cada vez más cercanos a 2 por la izquierda, el límite de las imágenes es 4, igual que si lo hacemos por la derecha. Por tanto, se escribe:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

6.4. Límite de una función en un punto

Es importante definir la relación que existe entre el límite de una función, $f(x)$, en un punto a, $\lim_{x \to a} f(x)$, y los límites laterales:

Si existen los dos límites laterales de una función en a, son finitos y coinciden; entonces existe también el límite de la función cuando x tiende a a. Si no es así, la función no tiene límite en $x = a$.

Observa en la figura 9.21 que la función no tiene por qué estar definida en a para que exista su límite. Es más, puede tener un valor diferente al $\lim_{x \to a} f(x)$.

Es posible que la función tienda a infinito cuando x tiende a a: si los dos límites laterales tienen el mismo signo (figura 9.22.a), el límite es infinito con el signo que corresponda, mientras que si los límites laterales son infinitos con distinto signo, el límite es infinito sin signo (figura 9.22.b).

Se dice que un número real, L, es el límite de una función en el punto a si, al tomar valores de x cada vez más próximos a a, sus imágenes correspondientes, $f(x)$, están también más próximas a L (figura 9.23).

Intuitivamente, esto significa que si $|x - a| \to 0$, entonces $|f(x) - L| \to 0$.

Si una función tiene límite en un punto, este es único.

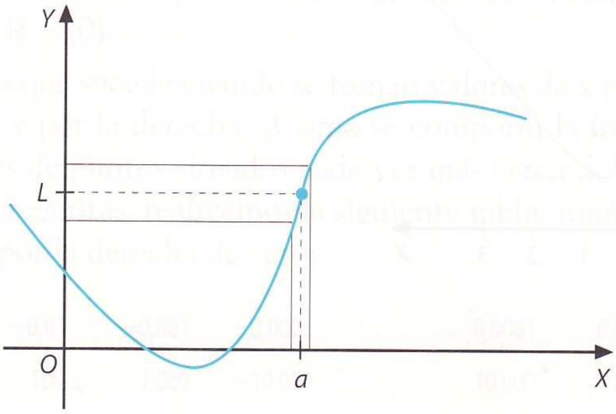


FIGURA 9.23.

Vamos a determinar a continuación el límite de una serie de funciones en varios puntos. Para ello, no partiremos de sus gráficas, sino que de la determinación de la existencia de límite en un punto deduciremos cómo es su gráfica.

ANEXO 2:

TRANSCRIPCIÓN DE LAS SESIONES DE CLASE

TRANSCRIPCIÓN DE LAS CLASES SOBRE LÍMITES

- Curso: 1º de Bachillerato-LOGSE.

- Clase de 17 alumnos/as.

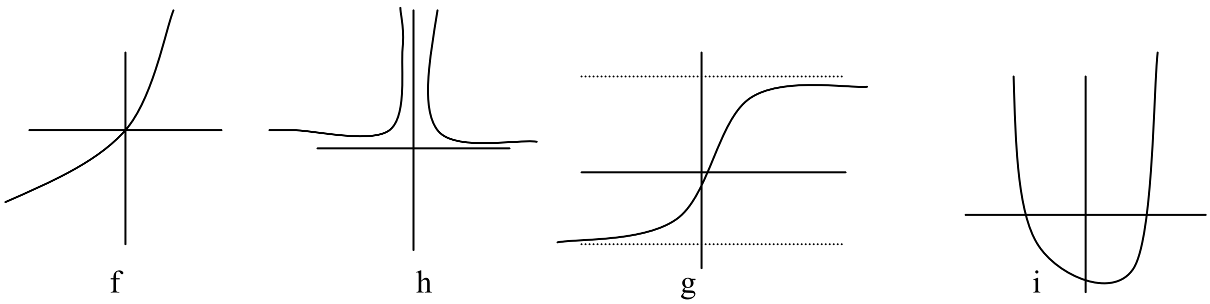
- Entorno: pupitres individuales, colocados dos a dos y situados frente a la pizarra.

PRIMERA SESIÓN

Unidad de análisis 1: Idea intuitiva de límite en el infinito.

La clase comienza con la revisión de 4 gráficas de funciones en las que se pedía el límite de la función representada cuando x tiende a infinito (límites en el infinito).

1. **Profesor**: *¿Tenéis hechos los límites de las 4 funciones de las gráficas (f, g, h, i)?*
2. **Profesor**: [Usando tizas blanca y roja mate, las dibuja en la pizarra]. *¿Éstas son?, ¿os suena la 2ª?*
3. *Alumnos: Sí, los tenemos.*



4. **Profesor:** [Toma y observa la libreta de una alumna].
5. **Profesor:** *¿Cómo puede determinarse?*
6. **Profesor:** *¿Cuánto vale para el caso f?*

[Va señalando las diversas gráficas en la pizarra, haciendo ver la “tendencia”]

7. *Alumna (Yurena): Según la tendencia.*
8. *Alumna (Yurena): Vale $+\infty$ y se expresa:* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
9. **Profesor:** [Se centra en la gráfica f y explica el comportamiento de la gráfica para x tendiendo a más infinito y menos infinito]: *Cuando la gráfica va para infinito, se hace mayor la y..., ¿cuánto? indefinidamente.*

Y el $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$*, ¿qué valores puede tomar la x en este caso?, ¿0,-1?* [Se dirige a un alumno].

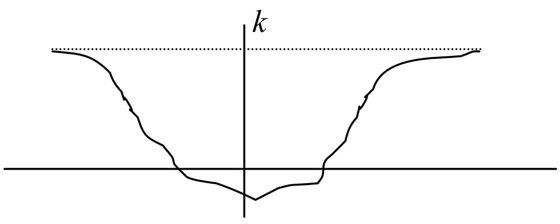
10. *Alumnos:* [El alumno interrogado no contesta y dice que no lo sabe].
11. *Alumnos:* [Otro alumno]: *pues –5000, menos lo que se quiera...*
12. **Profesor:** *Chiquitín, dime el* $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
13. *Alumnos:* [El alumno no contesta].
14. *Alumnos:* Otros alumnos dicen: *¡2!*
15. **Profesor:** *Dime la monotonía.*
16. *Alumno: Creciente.*
17. **Profesor:** *Pero, ¿crece siempre?*
18. *Alumno:* *Sí, porque hay infinitos números decimales. Desde luego, no crece igual que la f.*
19. **Profesor:** *¿Y* $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ *?*
20. *Alumnos: ¡-2!*
21. **Profesor:** *¿Cómo lo interpretas Antonio?*
22. *Alumnos:* [Antonio no contesta, pero una alumna]: *la función toma valores menores que –2.*
23. *Alumnos: Es la x la que interesa.*
24. **Profesor:** *Toma valores muy grandes, pero en valor absoluto, aunque con signo menos. ¿Cómo son estas rectas?* [Señala las asíntotas]. *Se denominan asíntotas horizontales.*

[Define lo que es una asíntota horizontal con la expresión analítica]:

Y = k es una asíntota horizontal $\Longleftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$

"La recta se va a pegar a la función".

Ahora sí que si es más infinito o menos infinito, intervienen las semirrectas. Por ejemplo:



$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$

25. **Profesor (respecto a la gráfica h).** *Veamos, Isabel, ¿cuál es el límite cuando x tiende a más infinito de h(x)?*

26. *Alumna:* [Isabel responde 0, pero no lo explica].

27. **Profesor:** [El profesor lo aclara y heurísticamente llega a 0]. *Y pregunta ¿qué ocurre con la otra rama? (es decir límite cuando x tiende a menos infinito de h(x)).*

28. *Alumna:* [Responde Mª José que es 0]. *Va pegándose al eje X.*

29. **Profesor:** *Hay una asíntota horizontal en y=0.*

30. **Profesor:** *Con h sí podemos aplicar que el límite cuando x tiende a infinito de h(x) es igual a k.*

31. **Profesor:** *Ya vimos que infinito no es un número, pero cuando me acerco a él tengo que especificar si es por la derecha o por la izquierda.*

32. **Profesor (respecto a la gráfica i(x)).** *¿Y con esta gráfica, Lucía, ...? ¿María?*

33. *Alumna:* [María responde que el límite cuando x tiende a más infinito es más infinito].

34. **Profesor**: [Señala la parte de la izquierda de la gráfica]: *¿qué pasa aquí?*

35. *Alumna:* [María responde que el límite cuando x tiende a menos infinito de i es menos infinito].

36. **Profesor:** *¡¡Votos a favor!!* (3 o 4 votos). *¡¡Votos en contra!!* (Todos los demás).

37. *Alumna:* [María rectifica y dice más infinito].

38. **Profesor:** *Podemos intuir lo que es una asíntota. ¿Podemos intuir una función para la parábola?* [El profesor escribe $y = x^2 + ¿$].

39. Alumna: $x^2 \pm 50x$.

40. **Profesor:** *Pasa por el origen y es contradictorio.*

41. *Alumna:* [La alumna rectifica y dice $y=x^2+k$].

42. **Profesor:** *El patrón nuestro es $f(x) = x^2$ con el V (0,0).* [Heurísticamente el profesor los conduce a $y = x^2 – 2$].

Unidad de análisis 2: Límites cuando x →a (finito).

43. **Profesor:** *¿Qué pasará si quiero calcular límite cuando x tiende a 5 de x^2-2?*

44. *Alumna: Sustituyo x por 5.*

45. *Alumno: Se dan valores mayores que 5 o menores que 5.*

46. **Profesor:** *¿No cercanos? ¿Cuál es el número real que hay antes del 5?*

47. *Alumnos:* [Algunos dicen 4’1, 4’9,...].

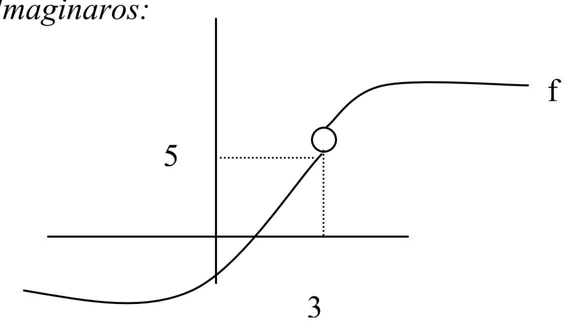
48. *Alumnos:* [Otros alumnos dicen que no se sabe].

49. **Profesor:** *¿Dónde van a parar las imágenes?*

50. *Alumno: Cerca de 23, que es la imagen del 5.* [Antes ha habido fallos y por ensayo y error llegan a la verdad].

51. **Profesor:** *Luego límite cuando x tiende a 5 de x^2-2 es igual a 23. Cuando me acerco a 5, las imágenes se acercan a 23. Pero esto no siempre ocurre.*

Imaginaros:



52. **Profesor:** *¿Dominio de f?* [Él mismo contesta que es $\Re - \{3\}$].

53. **Profesor:** *¿Y f(3)? No caigáis en la trampa de decir 5, porque no está en el dominio y no puede haber imagen. Pero no nos preocupa f(3), pero sí el acercarme a 3 lo más que pueda y antes del 3.*

54. **Profesor:** *Ojo, ¿dónde están las imágenes? No tengo ahora fórmula.*

55. *Alumnos*: C*erca del 5.*

56. **Profesor:** *¿Y si ahora me acerco a 3 por la derecha, dónde están sus imágenes?*

57. *Alumnos: Por encima del 5.*

58. **Profesor:** [Analiza lo dicho hasta ahora. Tiza amarilla]. *Sí podemos decir límite cuando x tiende a tres de f(x)*.

59. *Alumnos: Pero si no existe f(3).*

60. *Alumno* (Jaime): *Pero la asíntota tampoco lo toca.*

61. **Profesor:** *Luego es curioso pero* $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$. *No está definida en 3 pero sí existe su límite. Ahora existe ese límite sin tener la expresión analítica y sin tener f(3).*

62. **Profesor:** [Los conduce heurísticamente a los límites laterales, con lo cual llegamos a una nueva unidad de análisis].

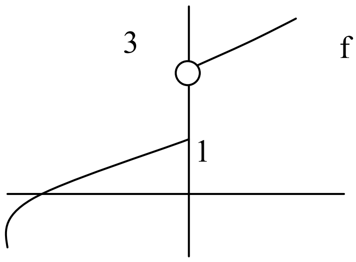
Unidad de análisis 3: Límites laterales.

63. **Profesor:** *Límite cuando x tiende a 3 por la izquierda y aclara la expresión de 3 por la izquierda, será igual a 5. Y límite cuando x tiende a 3 por la derecha será igual a 5.*

[Aclara los valores cercanos a 3].

Pues bien, cuando existen los límites laterales y los dos coinciden, se escribe $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = 5$

64. **Profesor:** *Situación que se nos puede presentar:*



65. **Profesor:** No *todas las funciones son parabolitas. Lo primero que interesa es ver si el Dom (f) = R.*

66. *Alumnos:* [Algunos caen en los valores 1 y 3, dudan, hasta que admiten que el Dom (f) es R].

67. **Profesor:** *¿Y la imagen de 0?, vale 1.*

68. **Profesor:** *Ahora vamos a investigar* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

69. *Alumnos: Hay que ver a la derecha y a la izquierda.*

70. **Profesor:** *Eso hay que verlo, esta función tiene dos comportamientos, derecha e izquierda, luego es necesario calcular:* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

71. *Alumno* (Francisco José): *Por la izquierda es menos infinito.*

72. *Alumno:* [Otro alumno dice que es 1].

73. **Profesor:** *Votos a favor. Nada. Ahora 3, ahora 4.*

74. *Alumno* (Julio): *Es menos infinito.*

75. **Profesor:** *Estamos en 0.*

76. *Alumno* (Julio): *¡Ah!, es 1.*

77. **Profesor:** *Votos en contra de 1. Ninguno*. [Aclara]. *Si tomo valores cerca de 0 por la izquierda, las imágenes se me pegan a 1.*

78. **Profesor:** *¿Y límite cuando x tiende a 0 por la derecha?*

79. *Alumno (*Emilio): [Duda algo]. *Es 3. Se acercan a 3, pero no llega a tocarlo.*

80. **Profesor:** *¿Y cuánto me acerco? ¡Todo lo que quiera!*

81. *Alumno:* [Duda y dice 1. El profesor lo saca a la pizarra].

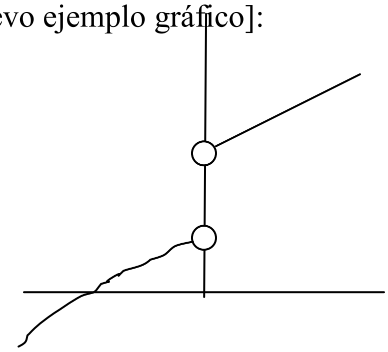
82. **Profesor:** [Pone un valor de x. Pero, aunque el profesor intenta aclarar, el 1 sigue siendo una barrera para este alumno].

83. **Profesor:** *Fijaos, está definida en 0, pero los límites laterales existen, pero son distintos. El límite cuando x tiende a cero por la izquierda de f(x) es 1. El límite cuando x tiende a cero por la derecha de f(x) es 3. ¿Cuál es el límite cuando x tiende a 0 de f(x)?*

84. *Alumnos: No se puede saber. No hay. Pero, si tiene dos*. [Distintas intervenciones].

85. **Profesor:** *Antes vimos que existían los límites laterales para x tendiendo a 3 de f(x) y eran 5. Aclaro que, ahora, no existe el límite cuando x tiende a 0 de f(x).*

86. **Profesor:** *Distinguiremos el valor de la función y el valor del límite*. [Pone un nuevo ejemplo gráfico]:

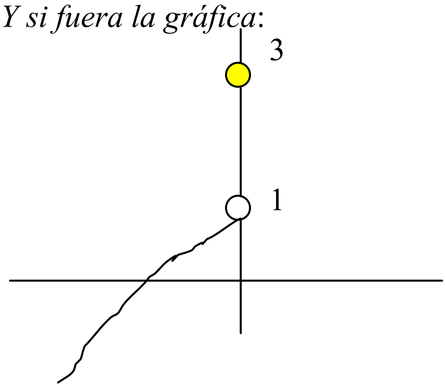


¿Qué pasa ahora? ¿Y el Dom (f)?

87. *Alumnos: Es R menos el 0.*

88. **Profesor:** *¿Y el límite? No cambia. Luego, corroboramos la idea de que el valor de la función en el punto puede no influir en el límite.*

89. *Alumno: ¿Y si fuera la gráfica*:



?

90. **Profesor:** *Mª Lucía, ¿cuánto vale f(0)?*

91. *Alumna* (Mª Lucía): *No tiene imagen*.

92. **Profesor:** *¿Por qué?*

93. *Alumna* (Mª Lucía): *Porque el Dominio llega hasta el 0*.

94. **Profesor**: *Luego, no existe* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. *No hay nada. ¿Y a la izquierda hay límite?*

95. *Alumnos: Es 1.*

96. *Alumno: Pues, yo creo que es 3 porque el 3 entra y el 1 no entra en el rango.*

97. **Profesor:** [Aclara otra vez]. *Miraos el apartado 6.3*.

SEGUNDA SESIÓN

Unidad de análisis 1: **Se continúa con lo último del día anterior**.

1. **Profesor:** *¿Qué tal lo de ayer? ¿Se va viendo cómo intuitivamente funcionan los límites? Hoy toca cálculo. Hay dos puntos de vista: con gráfica, sin tener la función (la forma analítica es la función), y otra teniendo la función.*

Unidad de análisis 2: **Límites de funciones en el infinito**.

2. **Profesor:** *Vimos los apartados 6.1 y 6.3 juntos, pero hoy vemos el 6.2. Comenzaremos por x tendiendo a* $\pm\infty$*, y después lo haremos en un punto. ¿Recordáis cómo hicimos el dominio? ¿Cómo clasificamos el dominio?*
3. *Alumnos: Según el tipo de función.*
4. **Profesor:** *Porque cada función tiene una forma y condiciona el cálculo del límite.*

Unidad de análisis 3: Funciones polinómicas.

5. **Profesor:** *Un riesgo, el infinito no es un número, pero en algunos casos lo trataremos como un número: ya que* $\infty+3=\infty$*;* $2-\infty=-\infty$. [Lo dice verbalmente]. *Jugaremos con esa idea, pero que no es un número, porque, por ejemplo,* $2.\infty=\infty$ *y* $\infty^2=\infty$. *Es una ampliación de R un poco extraña.*
6. **Profesor:** $\lim_{x\to+\infty} p(x)=\lim_{x\to+\infty}(\text{monomio de mayor grado})$. *Quien manda es el monomio de mayor grado.*
7. **Profesor:** *Sea f(x) =* $x^4+3894.\ x^3$ *. Manda el cuatro por muy grande que sea el 3894. Trabajamos con resultados intuitivos. ¿Qué ocurre?* $\lim_{x\to+\infty}(x^4+3894x^3)=\lim_{x\to+\infty}x^4$ *Fijaos que utilizo el infinito como si fuera un número. ¿Cuánto dará?*
8. *Alumnos:* $+\infty$.
9. **Profesor:** *Pero fijaos que* $\lim_{x\to-\infty}(x^4+3894x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^4$. *El signo menos juega con la potencia, por lo que infinito es como si fuera un número, ¿qué da?*
10. *Alumnos:* $+\infty$.
11. **Profesor :** *Luego,* $\lim_{x\to-\infty}(x^4+3894x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty$.

12. *Alumno: Si no hay signo en infinito, ¿cuál es, el de mayor potencia?*

13. **Profesor:** *Sí, jugamos con los términos y con los signos. Si tengo:*

$\lim_{x\to+\infty}(2x^3+7x+4)=\lim_{x\to+\infty}(2x^3)$, *¿Podéis interpretar lo que vale?*

14. *Alumna:* $+\infty$.

15. **Profesor:** *¿Qué ocurre* $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+7x+4)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ *?*

16. *Alumno: Pues que dará menos infinito.*

17. **Profesor:** *Se intuye, ¿verdad? ¿Qué ocurre si fuera –2x³? Que el juego de signos actúa y sería más infinito. Por esto la gente utiliza el infinito como si fuera un número.*

Unidad de análisis 4: Funciones racionales f(x) = p(x)/q(x), cociente de polinomios.

18. **Profesor:** *Ponemos tres ejemplos que serán el punto de partida:*

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{x^3-x+1}$ *; b)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6x}{3x^2-x+2}$ *; c)* $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6x}{x-5}$

19. **Profesor:** *¿Con qué he jugado con estos ejemplos? ¿Qué observáis?*

20. *Alumnos: Responden mal, hay confusión.*

21. *Alumno: El grado.*

22. **Profesor:** *Hay como tres posibilidades:*

- *grado (numerador) > grado (denominador)*
- *grado (numerador) = grado (denominador)*
- *grado (numerador) < grado (denominador)*

23. *Alumno: ¿Por qué insiste en estas tres posibilidades?*

24. **Profesor:** *Porque "mandan" los grados de los polinomios. Y, además, sigue mandado el monomio de mayor grado. Pero hay un problema: llegamos a una cosa extraña (escribe con rojo mate)* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *no es una operación. Lo lógico es decir 1, pero no.* [Los alumnos se ríen]. *Es algo de lo que no sabemos el resultado. Cada vez me puede salir una cosa distinta. Se llama una indeterminación. No está determinado lo que vale.*

25. **Profesor:** *Para que veáis la diferencia entre la indeterminación y otros casos:*

$\frac{+\infty}{+5}=+\infty$ *y* $\frac{+\infty}{-5}=-\infty$, *es decir,* $\frac{+\infty}{n}=\pm\infty$ *(según el signo de n), luego es un resultado fijo.*

26. **Profesor:** *Vamos a demostrar que en los tres ejemplos a, b y c habrá una indeterminación. A ver si me intuís esta operación:* $\frac{2}{+\infty}$.
27. *Alumnos: Más infinito.*
28. **Profesor:** *Mal.*
29. *Alumno*: *Se acerca a cero por la parte positiva.*
30. **Profesor:** *Esto no es un número, sólo sale en el límite.*
31. *Alumnos: Cero.*
32. **Profesor:** *¿2/1000, 2/88000000,..., qué les ocurre?*
33. *Alumnos: Se acercan a cero.*
34. **Profesor**: [Insiste]. *Infinitamente cerca de 0, y escribe* $\frac{18}{+\infty}=0$ *y* $\frac{1000000}{+\infty}=0$
35. *Alumno: ¿Con n dividido entre menos infinito también será cero?*
36. **Profesor:** *Votos a favor.*
37. *Alumnos:* [Todos menos Yurena, que no lo entiende].
38. **Profesor***: ¿Tú no te acercas todo lo que quieras a 0?* [El profesor utiliza la tabla de valores de modo verbal].
39. **Profesor:** *Vuelve sobre el cociente* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. *Es muy cachondo, cada caso sale distinto. Del resultado no sé nada, siempre mandan los monomios de mayor grado.*

Unidad de análisis 5: Solución del apartado a).

40. **Profesor:** *Siempre mandan los monomios de mayor grado.* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ *=0* [0 lo dicen los alumnos].
41. **Profesor:** *Esta propiedad se puede generalizar, cuando gr(denominador) es mayor que gr(numerador), el límite es igual a 0.*
42. *Alumno: ¿Puedo poner directamente 0?*
43. **Profesor:** *Claro que sí.*

Unidad de análisis 6: **Solución del apartado b).**

44. **Profesor:** $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ [El resultado lo dicen los alumnos].

45. **Profesor:** *Regla de aplicación del caso b: si gr(num)=gr(den), el límite es el cociente de los coeficientes…*

46. **Profesor***: ¿Qué coeficientes, cómo se llamaban?*

47. *Alumnos: No lo saben.*

48. **Profesor:** *¿Es que nadie se acuerda? Prin ci pa les.*

Unidad de análisis 7: Solución del apartado c).

49. **Profesor:** *¿Intuís lo que ocurre?*

50. *Alumnos: Sí.*

51. **Profesor:** [Escribe]. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}2x$, *por tanto...*

52. *Alumnos: Más infinito.*

53. **Profesor:** *Generalización, cuando gr(num)>gr(den), entonces es* $\pm\infty$. *Será más ó menos, según el signo del coeficiente principal de los polinomios del numerador y denominador.* [Poco claro para los alumnos].

54. **Profesor:** [Escribe $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+7x}{-2x^2+5x+1}$] *¿Qué es, más infinito, menos infinito, o cero?*

[Polémica fuerte].

55. **Profesor:** *Debido a que al dividir los coeficientes de mayor grado queda al final el 2x en el caso c), y el coeficiente del denominador era 1, éste no se tuvo en cuenta y por eso dio más infinito, pero, ¿y en este nuevo caso?*

56. Alumna (Yurena): Más infinito.

57. **Profesor***: ¿Y si hubiera sido el numerador de segundo grado y el denominador de tercero?*

58. Alumno (Julio)*: Sería cero.*

Unidad de análisis 8: Funciones Irracionales.

59. **Profesor:** *Que tanto nos gustan y tiene una raíz muy graciosa. En principio no deben ofrecer ninguna complicación, porque tienen un comportamiento como hasta ahora. Lo único es que a veces se presentan ocasiones en las que el límite no tiene sentido, sobre todo con los índices pares de las raíces. Por ejemplo, f(x)=* $\sqrt{1+x}$. *¿Cuál es su dominio?*

60. *Alumnos:* [Ninguno lo sabe excepto Mª Lucía, que dice]: *intervalo desde –1 hasta infinito*.

61. **Profesor:** *¿El –1 entra?*

62. *Alumna: Sí, en general.*

63. **Profesor:** *Hay que cuidar mucho estos casos, porque* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x}=+\infty$. *Es fácil ver que es infinito, pero imaginaros* $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+x}$. *Como véis no existe. Le daré un pescozón al que me haga la pregunta, ¿por qué? Porque no hay función. ¿Cuál es la imagen de –5? No existe.* [El profesor tacha el límite anterior].

Unidad de análisis 9: Tipos de indeterminaciones con raíces.

64. **Profesor:** *Imaginaros* $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$. *Yo hago los límites de la primera y segunda raíz y los resto. Si fuera 8 – 5 = 3, pero aquí es más infinito en los dos casos: luego* $(+\infty)-(+\infty)$. *¿Qué operación surge?*

65. **Profesor:** $(+\infty)-(+\infty)$ *INDETERMINACIÓN (en rojo fuerte).* [Como la gente se queda extrañada, dice ahora]: *ojo, ¿y* $(-\infty)+(+\infty)$ *?*

66. *Alumnos: Indeterminación.*

67. **Profesor:** *Estas indeterminaciones lo son porque no sabemos lo que valen estas expresiones.*

68. **Profesor:** *Pensad que más infinito y menos infinito no son números, luego no tiene por qué dar 0. En estos casos vamos a recordar una de las técnicas que ya tenemos: al racionalizar ¿qué se hacía?*

69. *Alumnos: Multiplicar por el conjugado del denominador.*

70. **Profesor***: Luego* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$

71. *Alumnos:* [Algunos dicen que hay que simplificar, con lo que se volvería a lo mismo].

72. **Profesor:** *¿Por qué lo hago? Para poder operar. ¿Qué operación puedo hacer? Más por menos.*

73. *Alumno: 1+x-x.*

74. **Profesor:** [Aclara y los alumnos ven que el numerador es 1].

75. **Profesor:** *Para mañana perseveráis sobre lo que vale* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ *. Ahora una invitación: página 222, el 14 y el 15. Página 225, el 17. Solamente.* [Cada ejercicio tiene muchos apartados y al darse cuenta los alumnos se produce una cierta algarabía].

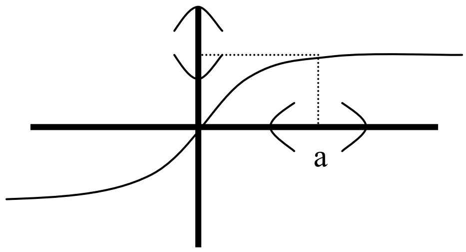
TERCERA SESIÓN

Unidad de análisis 1: Límite de una función continua en un punto

0. **Profesor:** *Hasta ahora hemos visto el límite en el infinito, lo que nos ha llevado a una idea agradable de asíntotas.*

1. **Profesor**: *Hoy vemos el límite en un punto. Dada y= f(x) hay que hallar* $\lim_{x \to a} f(x)$.

2. **Profesor:** *Veremos una idea intuitiva, a ver gráficamente en qué deriva. Un esquema:*



3. **Profesor**: *El valor es...*

4. *Alumnos*: *f(a)*

5. **Profesor**: *¿Qué ocurre con una serie de valores muy próximos tanto a la derecha como a la izquierda? Las imágenes, ¿qué pasa con ellas?*

6. *Alumnos: Se acercan a f(a).*

7. **Profesor**: [Da valores separados por una centésima, una milésima... y dice]: *Las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera.*

8. **Profesor**: *¿Cuál es la diferencia de los valores con a?*

9. *Alumno (Luis)*: *Infinitamente pequeña.*

10. **Profesor**: *Una forma de decir "estar muy cerca" es ésa: x-a* $\longrightarrow$ *0 implica f(x)-L...*

11. *Alumnos*: [Dudan en lo que les pasa a las imágenes. No lo ven. Dicen f(a), uno sólo dice 0].

12. **Profesor**: *Si tomo valores de x tan cerca de a como yo quiera, las imágenes estarán tan cerca de f(a) como yo quiera, pero pueden estar antes o después.*

13. **Profesor**: *Si x es más pequeño que a, x-a será negativa. Pero si tomo valor absoluto:*

    $|x-a| \to 0 \implies |f(x)-L| \to 0$. *Ya da igual.*

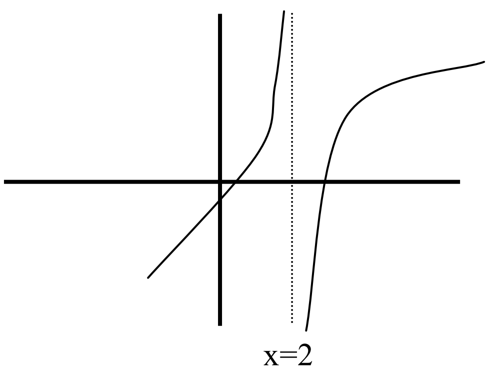
14. **Profesor**: *El límite de f(x) es un valor L, cuando se verifica: en un entorno de a con todos los valores de x de ese entorno, ¿qué les pasa a sus imágenes? Pues que f(x) estará en un entorno de L.*

Unidad de análisis 2: Ejemplo del cálculo del límite de una función continua

15. **Profesor**: *¿Cómo se plasma en el cálculo* $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+1}$*?, que es lo suficientemente complicada como para no intuir la gráfica.*
16. **Profesor**: *Por cierto, ¿cuál es el dominio?*
17. *Alumna*: *R, porque el denominador no puede hacerse 0.*
18. **Profesor**: *Imaginaos que me dicen* $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+4}{x^2+1}$.
19. **Profesor**: *¿Cómo empezarías instruyendo ese límite?*
20. *Alumna*: *Sustituyo el 2 en la función.... bueno yo me entiendo.*
21. **Profesor**: *Esta función, ¿tiene algún problema en el 2? No, luego puedo visualizar lo que ocurre en un entorno del 2. Saco con una foto donde es igual a 2, ahí está claro que hay un valor clave, f (2).*
22. **Profesor**: *Pero, ¿vosotros creéis que los valores muy próximos a 2 se pegarán a alguien?*
23. *Alumna*: *A la imagen del 2. Explica, por ejemplo, 1'9999, 2'00001, sus imágenes se acercarán y estarán lo más próximas posibles a f (2).*
24. **Profesor**: *Luego todo se reduce a calcular las imágenes. El límite será 8/5 y no hay más que hacer.*

Unidad de análisis 3: Límites en funciones no continuas.

25. **Profesor**: *Ahora bien, hay situaciones que no controlamos por este método. ¿Recordáis las asíntotas horizontales? Ahora vamos a introducir las verticales:*



26. **Profesor**: *Vamos a plasmar esta idea. Si quiero calcular el límite cuando x tiende a 2, la f(x) se comporta de forma distinta por la derecha que a la izquierda.*

27. **Profesor**: *Luego,* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

28. **Profesor**: *¿Qué ocurre? Con valores todo lo cercanos a 2 como yo quiera, las imágenes se van...*

29. *Alumnos*: *A más infinito en el primer caso*.

30. **Profesor**: *¿Y por la derecha?*

31. *Alumnos*: *Las imágenes se van a menos infinito*.

32. **Profesor**: *Esta es la idea de asíntota vertical. Podemos dar una definición: "la recta x=a es asíntota vertical de y = f(x) sii* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *y esto es válido también para límites laterales, porque en muchos casos todo lo tendremos que reducir a los límites laterales.*

33. **Profesor**: *Vamos a hacer una síntesis con las asíntotas:*
Horizontales: x tiende a infinito; f(x) tiende a un número real.
Verticales: x tiende a un número real; f(x) tiende a infinito. Como veis es al contrario.

Unidad de análisis 4: Asíntotas con la expresión analítica de f(x)

34. **Profesor**: *¿Qué ocurre cuando no tenga la imagen gráfica, sino las fórmulas? Vamos a entender una indeterminación nueva.*

35. **Profesor**: *INDETERMINACIÓN: k/0*. [Lo escribe en azul].

36. **Profesor**: *De ésta sabemos que sólo admite dos posibilidades: más infinito, menos infinito. El trabajo de la determinación está acotado. Vamos a poner un ejemplo agradable:* $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ *, de la cual vamos a calcular:* $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{x-1}$. *En un principio, puedo tener la osadía de sustituir, y ¿qué ocurre? 5/0, pero el 1 no está en el dominio, luego me confirma que esto vale más o menos infinito, con lo que tengo una asíntota vertical.*

37. **Profesor**: *Por tanto, tengo que desdoblar en límites laterales:* $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x+3}{x-1}$ *y* $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x+3}{x-1}$. *¿Cuánto vale x tendiendo a 1 por la izquierda? Tomemos un número cercano.*

38. *Alumna*: *Uno negativo.*

39. *Alumno*: *No, 0'9.*

40. **Profesor**: *Sustituimos, ¿qué signos?*

41. *Alumnos*: *Numerador positivo y denominador negativo*.

42. **Profesor**: *Luego, ¿el cociente?*

43. *Alumnos*: *Negativo.*

44. **Profesor**: $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x+3}{x-1}$ *es...*

45. *Alumnos*: *Menos infinito*.

46. **Profesor**: *Tened cuidado con esta idea. Son valores en un entorno cercano, porque si nos separamos caemos en el error. Hay que acercarse al entorno, ahí es donde se ve el efecto de más y menos infinito, si me separo demasiado me puede salir mal.*

47. **Profesor**: *¿Y éste:* $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$*, hermosas?*

48. **Profesor**: *Pensáis en 1'1, el numerador positivo y denominador positivo implica positivo. ¿Hacia dónde va a ir ahora?*

49. *Alumnos*: *A más infinito*.

50. **Profesor**: *Otro detallito, ¿podemos ya decir que tiene una asíntota vertical?*

51. *Alumnos*: *Sí.*

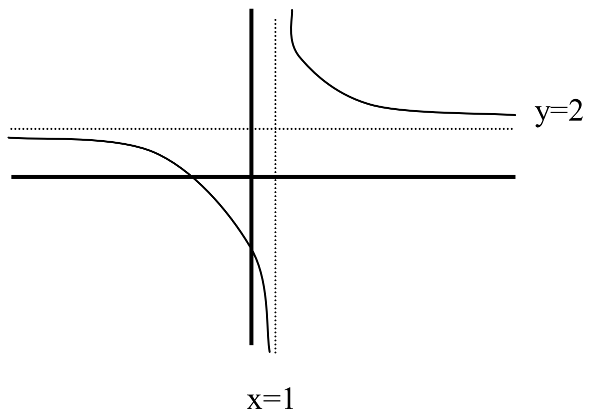
52. **Profesor**: *La asíntota vertical es x = 1.*

53. **Profesor**: *¿Y para la asíntota horizontal, qué hacíamos? Calcular el límite cuando x tiende a infinito. ¿Alguien se atreve?*

54. *Alumnos*: *2.*

55. **Profesor**: *Asíntota horizontal y = 2.*

56. **Profesor**: *Fijaos cómo con el conocimiento de las asíntotas podemos fácilmente encontrar la gráfica de la función. El 1 es como si fuera un tabique negro. Podría hacerse una pequeña tabla de valores, luego sería la gráfica:*

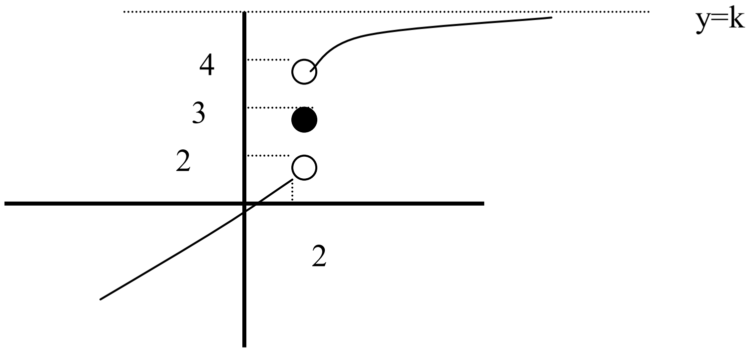


57. **Profesor**: *¿Vista? En este tipo de funciones, donde colocar las asíntotas es fácil, la gráfica puede hacerse fácilmente.*

58. **Profesor**: *En el* $\lim_{x \to a} f(x)$ *cuando no hay problemas en a es f(a), y cuando no existe f(a) surge lo de las asíntotas verticales.*

Unidad de análisis 5: Límite de una función definida a trozos, gráficamente

59. **Profesor**: *Primero vamos a analizar la idea gráficamente y luego sin usar la gráfica, analíticamente.*



60. **Profesor**: *Dominio de f es R. ¿Y f (2)?*

61. *Alumnos*: *3.*

62. **Profesor**: *¿Y el recorrido?*

63. *Alumnos*: $(-\infty,2) \cup \{3\} \cup (4,k)$.

64. **Profesor**: *Antes del 2 y después, la f(x) se comporta de distinta manera. Si me coloco antes, estoy en un trozo y si voy después estoy en otro.*

65. **Profesor**: *Esta idea me lleva*:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

66. **Profesor**: *¿Para x tendiendo a 2 por la izquierda?*

67. *Alumnos*: *2, porque las imágenes se acercan a 2.*

68. **Profesor**: *Votos a favor.*

69. *Alumnos*: *Todos.*

70. **Profesor**: *¿Y para x tendiendo a 2 por la derecha?*

71. Emilio: *Se aproxima mucho al 4.*

72. **Profesor**: *Votos a favor.*

73. *Alumnos*: *Todos*.

74. **Profesor**: *Entonces, quiero* $\lim_{x \to 2} f(x)$.

75. *Alumna (*Yurena*)*: [Duda, balbucea, se calla].

76. **Profesor**: *¿Chari?*

77. *Alumna (*Chari*)*: *No tiene, porque no coinciden los límites laterales*.

78. **Profesor**: *Fijaos qué cosa más curiosa, existen los límites laterales y no existe el límite. Esto es así porque la idea de límite es en el entorno. No hay nada que hacer, o se corresponde la idea con el entorno, o no hay límite.*

79. *Alumnos*: [Surgen comentarios en los que parece ser que algunos creen que existiendo f(a) entonces hay límite].

[Observador: Subyace un conflicto semiótico: "existe f(a) implica existe limite" y "no existe f(a) implica no existe limite"].

80. **Profesor**: *Puede que la imagen de 2 fuese 4, pero no cambia nada. A la hora del límite, el valor de f(a) es el que menos cuenta.*

Unidad de análisis 6: Límite de una función definida a trozos, analíticamente

81. **Profesor**: *Bueno, veamos. f(x)* = $\begin{cases} x^2+1 & x \le 0 \\ 2x-1 & x > 0 \end{cases}$. *Dos trozos perfectamente conocidos. ¿Uno es...?*

82. *Alumnos*: *Parábola*.

83. **Profesor**: *¿Otro?*

84. *Alumnos*: *Recta.*

85. **Profesor**: *¿Dominio?*

86. *Alumnos*: *R*.

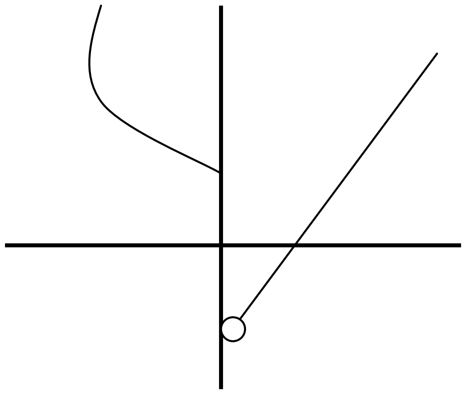
87. **Profesor**: *Vamos a hacer la gráfica: antes del límite podemos hacer la gráfica, damos 45 segundos.* [Algún alumno mira para atrás. Comentarios del profesor conforme observa resultados].

88. **Profesor**: *Procurad que no se haga de noche.*

89. *Alumna (Mª José)*: *Bien.*

90. **Profesor**: *Hay dos que la tienen la recta va bien, bien Emilio, bien Antonio. Yurena, esto no, piensa en una parábola sola.*

91. **Profesor**: *Vamos a ver, vértice de la parábola (0,1) que está en la rama.*



92. **Profesor**: *Le doy 0 aunque no entre, pero empieza inmediatamente después del 0.*

93. **Profesor**: *Para mañana, calcular:* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +4} f(x)$; $\lim_{x \to -2} f(x)$

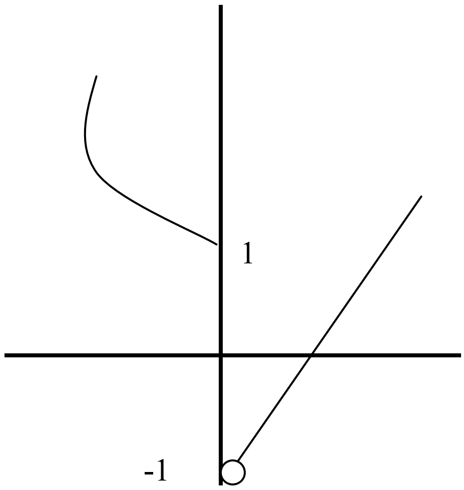
94. **Profesor**: *Ahora la guindilla: ¿*$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$*. ¿De acuerdo? Tomad algo que ya nos vamos.*

CUARTA SESIÓN

Unidad de análisis 1: **Resolución del ejercicio del día anterior.**

1. **Profesor:** *Bueno, vamos con esta emoción. ¿Qué tal la gráfica de ayer? ¿Hemos entendido bien los límites laterales? Teníamos una función muy agradable:* $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si\ x\leq 0 \\ 2x-1, & si\ x>0 \end{cases}$

2. **Profesor:** *Recordad siempre las características de cada uno de los trozos.*



3. **Profesor:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ *¿Cuánto vale, Antonio?*

4. *Alumno* (Antonio): *Más infinito*.

5. **Profesor:** *¿Y* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$*?*

6. *Alumno* (Antonio): *Más infinito*.

7. **Profesor:** *¿Y* $\lim\limits_{x\to+4} f(x)=$*?*

8. *Alumnos: Se sustituye 4 en la función y da 7.*

9. **Profesor:** *En la rama correspondiente, tanto por la derecha como por la izquierda se me va a pegar a 7, ¿y* $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=$*?*

10. *Alumnos: Respuestas correctas.*

11. **Profesor:** *Por último, ¿* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$*?*

12. **Profesor:** *Hay un cambio de definición de la función, es decir, ¿* $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$*?*

13. *Alumnos: 1.*

14. **Profesor:** *¿Y* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = ?$

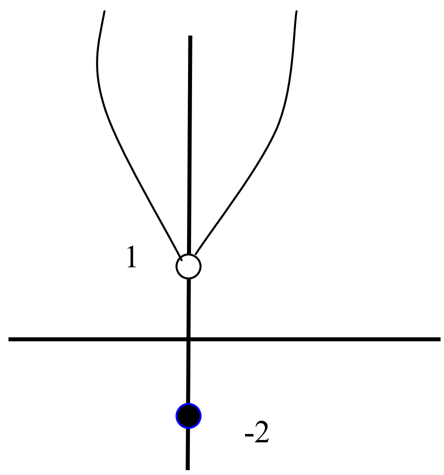
15. *Alumnos: -1.*

16. **Profesor:** *¿Lo veis todos? Todas las imágenes se van a agrupar en el +1 y luego en el –1. ¿Existe límite, entonces, para x tendiendo a 0?*

17. *Alumnos: No existe límite.*

18. *Alumno* (Jaime*): ¿Siempre que no haya dominio ocurre esto?*

19. **Profesor:** *Veamos lo que dice Jaime.*



20. **Profesor:** *El dominio de f es R. ¿f (0) =?*

21. *Alumnos: -2.*

22. **Profesor:** *¿Y* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

23. *Alumno* (Luis): *Vale 1.*

24. **Profesor:** *Lo tendríamos que plantear con laterales, pero en la figura se ve que ambos son iguales, luego sí es 1.*

25. **Profesor:** *Debemos de actuar independientemente de lo que pase en el punto.*

Unidad de análisis 2: Indeterminaciones.

26. **Profesor:** *Queda un poco para terminar todo este bloque, veamos una indeterminación muy importante*. [El profesor escribe INDETERMINACIÓN (en rojo mate)]. *¿Cuántas indeterminaciones conocemos?*

27. *Alumnos: k/0.*

28. **Profesor:** *Ésa es una especial que vale* $\pm\infty$.

29. *Alumnos:* $\infty - \infty; \frac{\infty}{\infty}; 1^{\infty}$.

30. **Profesor:** *Hoy veremos 0/0. Se practica mucho, pues surgen muchos casos al calcular* $\lim_{x \to a} f(x)$.

31. **Profesor:** *Un ejemplo:* $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ [con tiza naranja].

32. **Profesor:** *¿Y el dominio cuál es?*

33. *Alumnos:* $\Re - \{2\}$.

34. **Profesor:** *Pero el que 2 no pertenezca al dominio no tiene que ver con que calculemos el límite. A veces puedo sustituir, pero es un atrevimiento, en este caso aparece 0/0. ¿Alguien puede imaginar un recurso?*

35. *Alumnos: No saben.*

36. **Profesor:** *Hay que simplificar.* [El profesor escribe entre corchetes SIMPLIFICAR en tiza amarillo mate].

37. **Profesor:** *Si sale 0/0 es porque el 2 es una raíz, por lo que habrá factores comunes y se podrá simplificar, ¿cómo? , descomponiendo en factores. Tendré que recordar: ecuación de 2º grado, Ruffini, sacar factor común, productos notables,...*

38. **Profesor:** *En este caso* $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

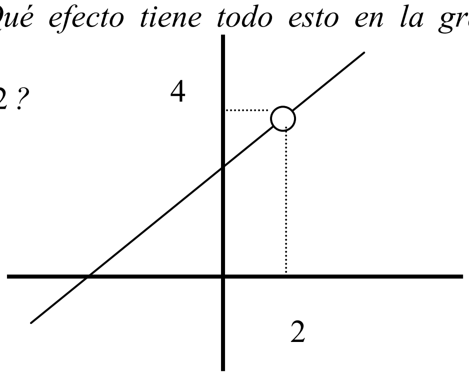
39. **Profesor:** *¿El numerador?*

40. *Alumnos: Más por menos.*

41. **Profesor:** *Un término cuyo cuadrado es x^2 es x, un término cuyo cuadrado es 4, es 2. Entonces al factorizar puedo simplificar: ¿* $\lim_{x \to 2}(x+2)$ *?*

42. *Alumnos: 4.*

43. **Profesor:** *¿Qué efecto tiene todo esto en la gráfica?, ¿cómo se interpreta que* $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ *?*



44. **Profesor:** *x + 2 es $(x^2$-4)/(x-2).*

45. *Alumnos:* Pero hay una parábola.

46. *Otros alumnos: No, es lo mismo*.

47. *Alumnos: ¿Y el dominio?*

48. **Profesor:** $Dom(f) = \Re - \{2\}$. *En cambio en x + 2, el dominio es R.* [El profesor se va a la figura y dice]: *¿qué problemas tengo para que salga esto?*

49. *Alumnos: El agujero*.

50. **Profesor:** *Son dos funciones iguales, excepto en x = 2, sin embargo, si analizamos en f(x) el límite, sí se confirma lo que hemos trabajado, que utilizando los valores de las imágenes del entorno, se pegan a 4. Entonces como recurso en 0/0 se extraen raíces comunes en numerador y denominador y se simplifica.*

51. *Alumna* (Lucía): *¿Y si no se puede?*

52. **Profesor:** *Pues a veces no está tan claro:* $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. *Si sustituimos x por 2 nos aparece la indeterminación 0/0. Ojo, la raíz de 4 puede ser +2 o –2. ¿Qué pasa aquí?*

53. *Alumna* (Lucía): *Sería +2, porque si no, no sería una función.*

54. **Profesor:** *Debemos tomar la raíz con signo positivo, así es como la entendemos cuando no tiene el signo delante.*

55. *Alumna* (Lucía): *Ahora no puedo simplificar fácilmente*.

56. **Profesor:** *¿Qué hacer?*

57. *Alumnos: Elevar al cuadrado*.

58. *Alumna* (Lucía): *El de abajo... los dos por el conjugado*.

59. **Profesor:** *Los conjugados andaban por ahí, en complejos, en infinito menos infinito. Luego* $\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2).(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2).(\sqrt{x+2}+2)}$, *¿vale?, ¿de acuerdo? Operarme, ya sabemos que no conviene operar los denominadores...* [El profesor va mirando la actividad de los alumnos]. *En el numerador hay que operar y resolver, no volver a lo anterior.*

60. *Alumno* (Antonio): [Lo hace mal].

61. **Profesor:** *¿Ya, Antoñico?... ¿Y luego en los exámenes,...? ¿Qué queda en el numerador?*

62. *Alumno* (Antonio): *x-2.*

63. **Profesor:** *Para el que no lo haya visto:*

$$\left(\sqrt{x+2}-2\right).\left(\sqrt{x+2}+2\right)=x+2-4=x-2\,.$$

Luego, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2).\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$*, se simplifica* [El profesor tacha x – 2 en ambos términos]. *¿Y el numerador, cuánto vale?*

64. *Alumnos: 1.*

65. **Profesor:** *A ver si me dices el límite, Lucía.*

66. *Alumna* (Lucía): *1/4.*

67. *Alumnos: Sí.*

68. *Alumno* (Jaime): *0.*

69. **Profesor:** *Cuidado con hacer x tender a infinito, que entonces es un despiste, y saldría* $\frac{1}{+\infty}=0$*. ¿Cuánto vale, hermosos?*

70. *Alumnos: 1/4, casi todos*.

71. **Profesor:** *¿Qué pasa si no se pueden descomponer los polinomios? Alguna herramienta habrá que buscar*. [El profesor explica lo que podría salir para otros valores].

Unidad de análisis 3: Función analítica a trozos.

72. **Profesor:** *Ahora, sin pensar en la gráfica, veamos cómo atacar una función a trozos.*

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<4 \\ 3 & si \quad x=4 \\ 2x-6 & si \quad x>4 \end{cases}$$

73. **Profesor:** *¿Dominio?*

74. *Alumnos: R.*

75. **Profesor:** *Vamos a intentar* $\lim_{x\to 4} f(x)$*. Sólo con la expresión analítica de la función, después la dibujamos.*

76. **Profesor:** *Venga, vamos a contar hasta 20 y lo hacéis. Si hay,..., si no hay,... y si hay cuánto vale,...*

77. **Profesor:** *Ya tenemos una base. Recordad todo lo que hemos hecho para el cálculo de límites laterales y esto nos ayudará a resolver este problema.*

78. **Profesor:** *¿Jaime?*

79. *Alumno* (Jaime): [Dice 2].

80. *Alumna* (Lucía): [También dice 2, pero lo ha hecho sin la gráfica].

81. **Profesor:** *¿Luis?, ¿Antonio?*

82. *Alumnos* (Luis, Antonio y otros): *2*.

83. **Profesor:** *¿Imagen del 4?*

84. *Alumnos: 3*.

85. **Profesor:** *¿Entonces?*

86. *Alumna* (Lucía): *Por la izquierda y por la derecha*.

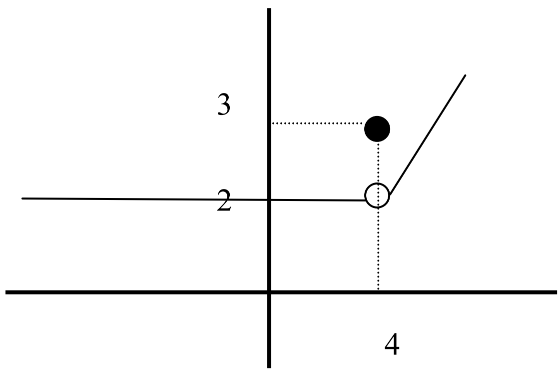
87. **Profesor:** *¿Sólo a la derecha, Sara?*

88. *Alumna* (Sara): *Como no hay x,... entonces no hay límite*.

[<u>Observador</u>: conflicto semiótico de la función constante].

89. **Profesor:** *Surge un problema, independientemente del f(4), tengo una rama a la derecha del 4 y otra a la izquierda de 4, luego...* $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2$*, por ser trozo de función constante, y* $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$*. Por tanto* $\lim_{x \to 4} f(x)$ *=2, independientemente de que f (4) sea 3*.

90. **Profesor:** *¿Qué planteamiento tendríamos para dibujar la gráfica?*



91. **Profesor:** *Luego fijaos cuál será la imagen gráfica de esta función. ¿Todo bien?*

92. *Alumnos: Asentimiento general*.

Unidad de análisis 4: Se insiste en 0/0, pero con necesidad de aplicar Ruffini.

93. **Profesor:** *Veamos el ejemplo* $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$. *¿Por qué éste? Porque es necesario recordar cálculos de tiempos pasados. Aquí la ayuda gráfica no me sirve. ¿Cuál es el dominio de f?*

94. *Alumnos: R.*

95. **Profesor:** *¿R? El 1 anula al denominador...*

96. *Alumnos: Sí.*

97. **Profesor:** *Luego, ¿1 está en el dominio?*

98. *Alumnos: El dominio es R menos 1.*

99. **Profesor:** *¿Hay alguna indeterminación?*

100. *Alumnos: 0/0.*

101. **Profesor:** *¿Todos lo veis? Efectivamente al sustituir 1 sale 0/0. El numerador y denominador son expresiones conocidas, ¿cómo operamos?*

102. *Alumnos: Sacando factor común.*

103. **Profesor:** *¿Cómo? Habrá que descomponer en factores, ¿qué hago?*

104. *Alumna* (Lucía): *Ruffini.*

105. **Profesor:** *Vamos a descomponer ayudándonos con la regla de Ruffini. Lo bueno es que tengo el valor de 1 y ése me interesa. Haced Ruffini...* [El profesor observa los resultados de los alumnos]. *Con huecos, sin huecos,...*

106. **Profesor:** *Antoñico, aquí os lo habéis comido.*

107. *Alumnos: Seis alumnos se comen lugares.*

108. **Profesor:** *Hay que hacerlo bien. Ya sabéis que al descomponer el polinomio tiene que salir bien. A veces sale 0 y está mal. No hay modo entonces de validar. No metáis la gamba.*

109. *Alumna* (Lucía): *La segunda no sale con 1.*

110. **Profesor:** *Pero, ¿interesa descomponer totalmente? No, sólo que haya un valor común. Sólo si persiste la indeterminación habría que seguir.*

111. **Profesor:** *¿Lucía?* [Nadie contesta].

112. *Alumno* (Luis): *Sale 0.*

113. **Profesor:** *¿Que te sale 0? ¿Jaime?* [Observa el profesor]. *A Jaime le da 1, a ti infinito, a ver si a cada uno le da un resultado distinto. Hasta ahora nada, yo no sé lo que da, pero lo hacemos y quizá lo sepa.*

[El profesor hace Ruffini].

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1).(x^3+x^2+1)}{(x-1).(x^2+x+1)}=\frac{3}{3}=1$$

[El profesor tacha el x – 1]

114. **Profesor:** [Da las explicaciones oportunas hasta llegar a la solución 1]. ¿Visto? ¿Sí o no?

115. **Profesor:** *De la página 229, el 19*. [Se propone este ejercicio y los alumnos lo solucionan].

116. **Profesor:** *Y luego a la parte emocionante: página 238, del 20, los 6 primeros apartados; el 21 al completo, y del 22, los 5 primeros apartados. Enhorabuena y adiós.*

ANEXO 3:

CUESTIONARIO

CUESTIONARIO SOBRE EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

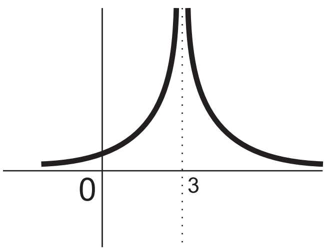
1) ¿Qué significa la expresión "*x* tiende a +∞"? *Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

2) ¿Qué entiendes por la expresión "una función crece indefinidamente"? *Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

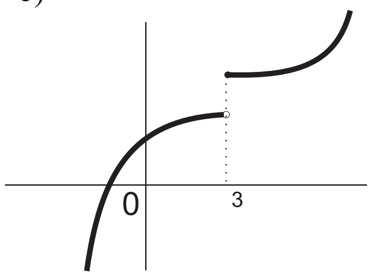
3) ¿Qué entiendes por la expresión "*x* se aproxima a 3"? *Responde aclarando con ejemplos y detallando tus respuestas.*

4) Estudia, para cada una de las siguientes gráficas, si existe, o no, f(3); y si existe, o no, el límite cuando x tiende a 3 de f(x), especificando el valor de sus límites laterales:

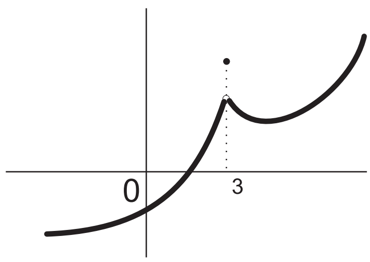
a)



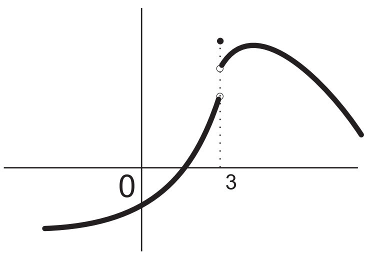
b)



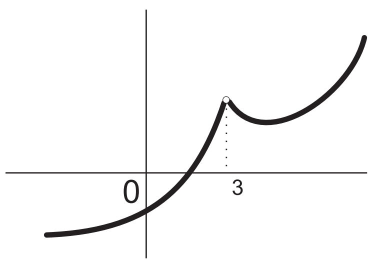
c)



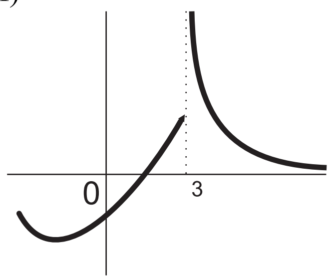
d)



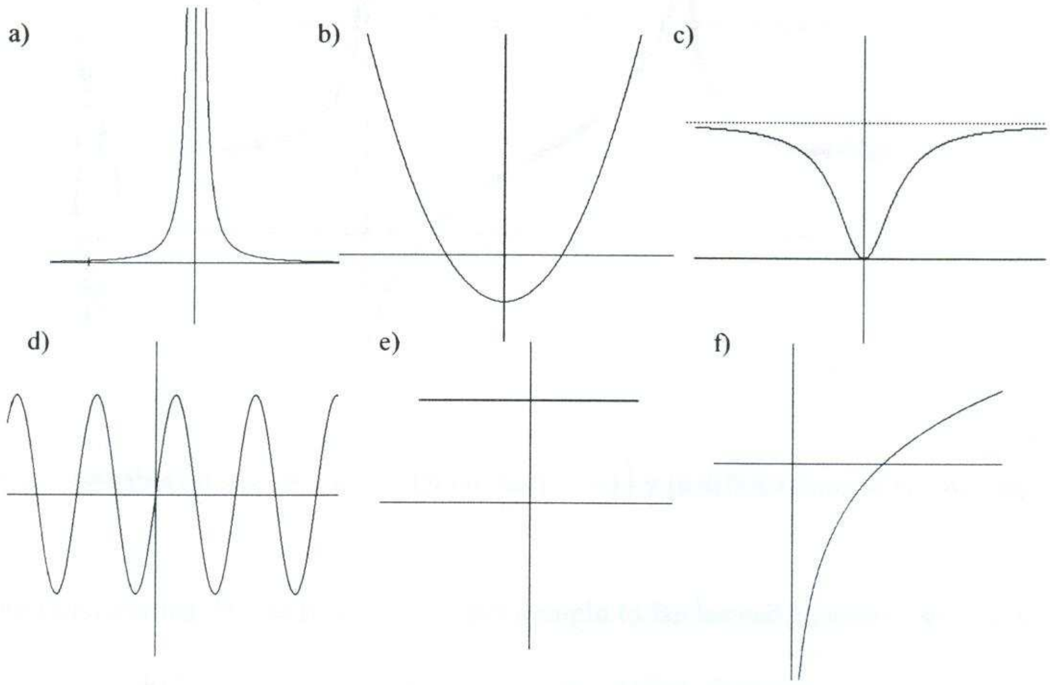
e)



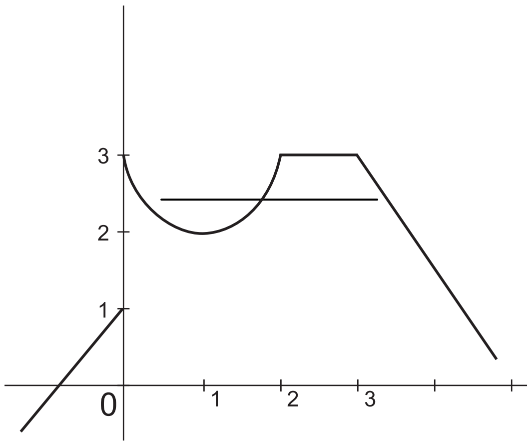
f)



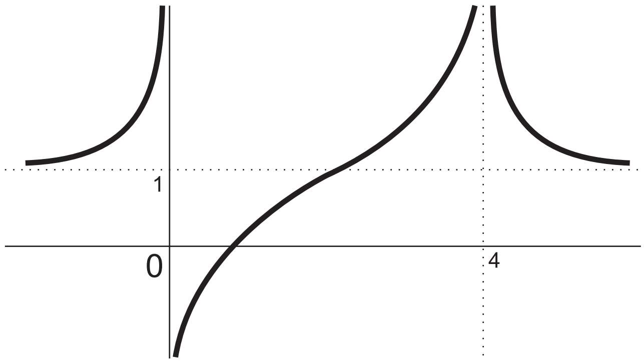
5) ¿Cuáles de las funciones, cuyas representaciones gráficas son las de la figura de abajo, crees que verifican $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$? Explica, una a una, los motivos de decisión.



6) Hallar los límites en los puntos x=0; x=2 y x=3 para la función cuya gráfica es:



7) Hallar los límites para: - ∞ ; 0 ; 4 y + ∞, para la función cuya gráfica es:



8) Observa la tabla de abajo y explica por qué crees que "las imágenes conforman una sucesión cuyo límite es 8".

x	2,90	2,95	2,99	...	3	...	3,01	3,05	3,10
f(x)	7,41	7,7025	7,94	...	8	...	8,0601	8,3025	8,61

9) Calcula $\lim_{x\to 2}\left(x^2-1\right)$ y justifica cómo lo has hecho.

10) Dibuja una gráfica de una función f(x) que cumpla las siguientes condiciones.

$$a)\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad b)\lim_{x\to 3^-} f(x)=-4 \quad c)\lim_{x\to 3^+} f(x)=6$$
$$d)\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad e) f(3)=2 \quad f)\nexists f(-4)$$

11) Fíjate en las tablas siguientes y razona si existe, o no, y por qué el límite cuando x tiende a 1.

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	3	3	3	...	0	...	0,001	0,01	0,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	-0,1	-0,10	-0,001	...	—	...	0,001	0,01	0,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	...	4	...	2,001	2,01	2,1

x	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	...	—	...	0,001	0,01	0,1

REFERENCIAS

Antibi, A. (1988). Une présentation posible de la notion de limite á partir des fonctions monotones. *I.RE.M. de Toulouse*. Université P. Sabatier.

Artigue, M. (1989). *Epistemologie et Didactique.* Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathématiques. París: Université París VII.

Artigue, M. (1994). Analysis. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publisher, 167-198.

Artigue, M. (1994), Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* 27-39.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, Bogotá, Grupo Editorial Iberoamericano, 97-140.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2), 231-262.

Asiala, M., Brown, A. y Devries, D.J. (1996). A Framework for research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En Jim Kaput, Alan H. Schoenfeld, Ed. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education*. II Conference Board of the Mathematical Sciencies (CBMS), Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Babault, M.L. et als. (1985). *Mathématiques approche par textes historiques*. M.A.T.H. Nº 61. IREM, Université-Paris VII.

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31 (5), 557-578.

Balkar, M. y Tall, D. (1991). Students' Mental Protopypes for Fonctions and Graphs. *Proceedings Fifteenth PME*, 1, 104-111.

Bescós, E. y Pena, Z. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología*. Proyecto Exedra. Editorial Oxford Educación.

Bessot, D. et al. (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Comprendre les mathématiques para les textes historiques. Cercle d'histoire des sciences. IREM de basse-Normandie. Ellipses.

Blázquez, M.S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*. 30, 67-82.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y Chevallard. Y. (1989). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Object d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (1), 77-124.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23 (1), 79-135.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (2), 164-198.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse d'Etat en Sciences. Université Bordeaux I.

Bühler, M. et al. (1990). *Mathématiques approche par textes historiques.* M.A.T.H. Tome 2. Nº 79. IREM, Université-Paris VII.

Cajaraville, J.A. (1996). *Evaluación del significado del Cálculo Diferencial para estudiantes preuniversitarios. Su evolución como consecuencia de una Ingeniería Didáctica alternativa.* Tesis Doctoral. Universidad de Santiago.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, México. Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, M.R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353-369.

Cantoral, R. (2000). *Pensamiento matemático avanzado: Una revisión de los enfoques a la investigación sobre Didáctica del Análisis.* Documento interno del CINVESTAV. México.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15 (1), 7-47.

Cauchy, M.A.L. (1829). *Leçons sur le calcul différentiel.* Á Paris, Chez Debure frères, libraires du roi et de la bibliothèque du roi, 269-295.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Penseé Sauvage. (Edición original, 1985).

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recheches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématique*, 17 (3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *IV Simposio de la SEIEM*, Huelva.

Contreras, A. (2001). El límite en el bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológico y semiótico. *XVI Congreso del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Huesca (España), 1-32.

Contreras y Sánchez (1997). Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios (1950-1970). *VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Salamanca.

Contreras, A., y Sánchez, C. (1999a). Análisis didáctico de la enseñanza del concepto de límite de una función en textos franceses del siglo XIX. En M. Román (Coord.). *Educar enseñando*. Universidad de Jaén, 67-90.

Contreras, A., Luque, L., Ordóñez, L., Ortega, M. y Sánchez, C. (1999b). Una metodología de análisis, en cuanto a los ejemplos que aparecen en los libros de texto, del concepto de límite de una función. Estudio de un manual de primer curso de Universidad. *IX Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Lugo.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *XVIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM).* Castellón, 1-21.

Contreras, A. y Sánchez, C. (1998). Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos. *V Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias*, Jaca (Huesca).

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25 (2), 151-186.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2001). Un análisis semiótico de la noción de límite de una función. *V Simposio del Seminario Español de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Almería, 1-27.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2003). Investigación acerca de la enseñanza del límite en el marco de teoría de las funciones semióticas. *VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Granada, 189-200.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2007). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *EMA*, 10 (2/3), 413-439.

Cornu, B. (1981). Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de limite. *Bulletin de L'APMEP*, 335, 627-641.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite.* These de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

Cornu, B. (1985). Les principaux obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM-APMEP*, 55-63.

Cornu, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 153-166.

Cottrill, J., Dubinsky, ED., Nichlos, D. y Schwingendorf, K. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15 (2), 167-192.

D'Amore, B. (1996). Infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un campo fértil para la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Epsilon*, nº 36, vol. 12 (3), 341-359.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of Mathematical Behavior,* 5, 281-303.

Deledicq, A. (1994). Les conceptions relatives aux limites. *Vingt ans de didactique des Mathématiques en France.* M. Artigue, R. Grass, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.). La Pensée Sauvage, editions, 321-327.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 7 (1), 5-31.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht. Kluwer A. P., 95-123.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 25-41.

Duval, R (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Suisse: Peter Lang, S.A.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en Didactique des Mathematiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (3), 349-382.

Duval, R. (2000). Basic Issues for research in athematics Education, Plenary Address. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Tomo I, Editors: Tadao Nakahara and Masataka Koyama, Hiroshima University (Japan), 55-69.

Eco, H. (1979). *Tratado de Semiótica General.* Barcelona: Lumen, 2000.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* PHD. Université de Bordeaux I.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto límite de funciones*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques aplicacions a les derivades.* Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2006). La dimensión dual "personal-institucional" y el problema del encaje de los objetos personales del profesorado en el teoría de las funciones semióticas. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 69-104.

García, M. (2003). *Significados institucionales y personales en la enseñanza-aprendizaje del límite de una función.* Memoria de la Labor Investigadora, Departamento de Didáctica de las Ciencias. Universidad de Jaén.

García, M. y Sánchez, C. (2006). Los procesos de instrucción matemática y el límite. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 417-439.

Gascón, J. (1998). Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-34.

Gascón, J. y Fonseca, C. (2000). Reconstrucción de las Organizaciones Matemáticas en las Instituciones Didácticas. *XIV Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Cangas de Marazzo (Pontevedra).

Gaud, D. et als. (1998). *Des tangentes aux infiniment petits. Reflexións et travaux pour la classe.* IREM, Université de Poitiers.

Godino, J. D. (1999). *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática.* (Recuperable en URL: http://www.ugr.es/local/semioesp/).

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J.D. (2006). Algunos Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 105-121.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Una aproximación semiótica y antropológica a la investigación en Educación Matemática, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 10, [URL:http://www.ex.ace.uk/~PErnest/ pome10/aert7.htm].

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Actas PME* XXI, 2, 313-320.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos.* Documento interno del Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D.; Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, 4 (2), 221-252.

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

González, P.M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza Editorial.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje,* Madrid: Gredos, 1971.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad.

Lacroix, S.F. (1806). *Traité élémentaire de calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édititon, À Paris, Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, 1-26.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Moigno, M. (1840). *Leçons de Calcul Différentiel et Calcul Intégral, tome 1er – Calcul différentiel –.* Paris, bachelier, Imprimeur-Libraire de l'ecole polytechnique, XIII-XXXV, 1-73.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical, and the Teaching of Mathematics. Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17 (1), 26-33.

Radford, L. (2002). The Seen, the Spoken and the Griten: a semiotic Approach to the Problem of Objectification of Mathematical Knowledge. *For the Learning of Mathematics,* 22 (2), 14-23.

Robert, A. (1982). *L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. Divers articles de Mathématiques.* These de Doctorat d'Etat, Université Paris VII.

Robinet, J. (1983). Une experience d'ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (3), 223-292.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Sánchez C. y Contreras A. (1995a). Epistemología del concepto de límite. Análisis de manuales. *VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Madrid.

Sánchez C. y Contreras A. (1995b). Concepciones de los alumnos de COU en torno a la noción de límite de una función. *VII Jornadas de Aprendizaje de la Educación Matemática ("Thales")*, Córdoba.

Sánchez C. y Contreras A. (1996a). Un estudio sobre la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite funcional en los siglos XIX y XX. *ICME 8*, Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1996b). Un estudio sobre la noción de límite de una función a través del análisis de manuales de los siglos XIX y XX. *ICME 8,* Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1996d). Concepciones y obstáculos de los alumnos de primer curso de Diplomaturas Técnicas en torno a la noción de límite de una función. *ICME 8,* Sevilla.

Sánchez C. y Contreras A. (1997b). Obstáculos de los alumnos de primer curso de Diplomaturas Técnicas en torno a la noción de límite de una función. *VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM),* Salamanca.

Sánchez C. y Contreras A. (1997c). La relación didáctica profesor-estudiante en la enseñanza del concepto de límite de una función. *RELME-11*, México: Morelia.

Sánchez C. y Contreras A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento dado al concepto de límite de una función: Una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), 73-84.

Sánchez C. y Contreras A. (1997). Evolución del concepto de límite de una función, respecto a su introducción, en manuales universitarios. (1950-1970). *VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Salamanca.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limits au secondaire. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 21 (1/2), 7-56.

Schneider, M. et als. Groupe AHA, (1999). *Vers l'infini pas à pas*. Bruxelles: De Boeck Wesmael.

Schubring, G. (1985). Essais sur l'histoire de l'enseignement des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 5 (3), 343-385.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as texbook Author. *For the Learning of Mathematics,* 7 (3), 41-51.

Schubring, G. (1997). *Analysys of Historical Textbooks in Mathematics.* Departamento de Matemática, PUC do Rio de Janeiro.

Sensevy, G., Mercier, A. y Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course á 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20 (3), 263-304.

Sierpinska, A. (1985a). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6 (1), 5-67.

Sierpinska, A. (1985b). La notion d'obstacle epistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, Leiden.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mthematics,* 18, 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on undertanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 24-36.

Sierpinska, A. (1991). *Some remarks on undertanding in mathematics*. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Study Group. Vancouver.

Sierpinska, A. (1997). *La compréhension en Mathématiques*. Départament De Boeck, Université París.

Sierra, M.; González, M. y López, M. C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), 463-476.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 258-276.

Tall, D. (1980). The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mthematics,* 11, 271-284.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*, en D. Tall (Ed.), Dordrecht: Kluwer, A.C.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The role of visualization in the Calculus. En Zimmermann, W. y Cunningams, S. (Ed.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematics Association of America, 105-119.

Tall, D. (1992). Students'Difficulties in Calculus. Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Quebec, august 1992. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick.

Tall, D. (1994). A versatile theory of visualisation and symbolisation in Mathematics. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick. Plenary presentation at the Commission Internationale pour l'ètude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques, Toulouse (France).

Tall, D. (1994). Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Education Research Centre,* University of Warwick.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary Lecture at the *Annual Conference of the International Group for the Psicology of Mathematics Education*, Recife, Brasil, July 1995.

Tall, D. (1995). *Didáctica del Análisis y Didáctica de las Funciones (Seminario)*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Tall, D. y Schwarzenberger, R.L.E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and the limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44-49.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de 1º de B.U.P. *Epsilon*, nº 34, Vol. 12(1), 11-46.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theorical and metodological issues. *For the Learning of mathematics*, 3 (2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Vinner, S. y Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics whit particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Wenzelburger, E. (1991). Grafical environment for the construction of fonction concepts. *Proceedings Fifteenth PME*, 1, 332-339.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo diferencial e integral. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática*, 5 (3), 93-123.

Wilhelmi, M.R., Godino, J.D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77-120.

Willians, S. (1990). The understanding of limit: Three perspectives. *Proceedings of the PME XIV,* 1, 101-108.

Willians, S. (1991). Models of limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), 219-236.

Willians, S. R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32 (4), 341-367.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica, 1988.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.