SISTEMAS DE PRÁCTICAS Y CONFIGURACIONES DE OBJETOS Y PROCESOS COMO HERRAMIENTAS PARA EL ANÁLISIS SEMIÓTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

(1)Juan D. Godino, (2)Vicenç Font, (3)Miguel R. Wilhelmi y (4)Orlando Lurduy

(1)Universidad de Granada; (2)Universidad de Barcelona; (3)Universidad Pública de Navarra;

(4)Universidad Distrital (Bogotá, Colombia)

RESUMEN

En los enfoques semióticos aplicados en educación matemática se introduce, como medio de describir la actividad matemática, la noción de "sistema semiótico", constituido por los conjuntos de signos, reglas de producción de tales signos y las estructuras de significados subyacentes. Se trata de una noción difusa que necesita una definición operativa a fin de aplicarla como herramienta descriptiva y explicativa de fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo presentamos las nociones de sistema de prácticas y configuración ontosemiótica, que desarrollan y complementan la noción de sistema semiótico. Asimismo, mostraremos en qué sentido estas nociones facilitan la descripción y comprensión de los procesos de construcción y comunicación del conocimiento matemático. Estas nociones las aplicamos al análisis de sistemas semióticos implicados en el estudio de los números naturales, desde el punto de vista institucional y personal.

ABSTRACT

The semiotic approach to mathematics education introduces the notion of "semiotic system" as a tool to describe mathematical activity. It is formed by the set of signs, the production rules of signs and the underline meaning structures. We consider that this is a fuzzy notion that needs an operative definition to facilitate the description and explanation of teaching and learning phenomena. In this paper we present the notions of system of practices and configuration of objects and processes that develop and complement the notion of semiotic system. We also show in what sense these notions facilitate the description and comprehension of building and communicating mathematical knowledge, by applying them to analyze the semiotic system involved in the study of whole numbers, from the institutional and personal viewpoint.

Key words: onto-semiotic approach, object, meaning, mathematics, natural number, learning, semiotic system

1. INTRODUCCIÓN

Ernest (2006) describe los rasgos característicos de la perspectiva semiótica en Educación Matemática resaltando los nuevos "insights" que la "ciencia de los signos" aporta para describir y comprender los procesos de comunicación y de aprendizaje de las matemáticas. Ejemplifica estas aportaciones analizando el significado de los números, el recuento y las operaciones aritméticas

---

[1] *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education* – 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

desde el punto de vista de su desarrollo histórico, las formulaciones matemáticas de dicho contenido y las cuestiones relativas a su aprendizaje. En esta perspectiva teórica se trata de modelizar, dentro de un marco coherente, tanto el papel de los sistemas matemáticos de signos, como las estructuras de significados, las reglas matemáticas y la fenomenología que motiva la actividad matemática.

Por su parte, Godino y cols. (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007) vienen desarrollando el "enfoque ontosemiótico" (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemáticos en el que se adopta como central la noción de "sistema de prácticas". Una práctica matemática es entendida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). La práctica es, por tanto, interpretada en términos de acción reflexiva, situada, intencional y mediada por recursos lingüísticos y materiales. Los sistemas de prácticas se proponen como respuesta a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o la cuestión ontológica, ¿qué es el objeto matemático O?

Tanto la noción de "sistema de prácticas" como la de "sistema semiótico" son útiles para ciertos estudios comparativos de formaciones epistemológicas globales (por ejemplo, los números usados en contextos informales o formales). Pero el análisis de la actividad matemática y los "productos" resultantes de la misma (conceptos, teoremas, teorías,...) necesita una definición operativa de tales sistemas (de prácticas y semiótico). En trabajos recientes realizados en el marco del EOS (Font, Godino y Contreras, 2008; Font y Contreras, 2008) se ha introducido la noción de configuración de objetos y procesos (en su doble versión epistémica o institucional y cognitiva o personal) para hacer operativa la noción de sistema de práctica y permitir análisis más detallados de la actividad matemática. Se trata de la red de objetos intervinientes y emergentes de un sistema de prácticas ligados a la solución de un problema (configuración puntual), o de una clase más o menos amplia de situaciones-problemas (configuración parcial o global)

En este trabajo vamos a mostrar que las nociones de sistemas de prácticas y configuración de objetos y procesos, junto con la noción de función semiótica como entidad relacional que conecta los distintos tipos de objetos que intervienen en los sistemas de prácticas, desarrollan y hacen operativa la noción de *sistema semiótico.*

En la sección 2 presentamos algunas notas características de la perspectiva semiótica. En la sección 3 mostraremos cómo la ontología matemática del EOS puede complementar a la perspectiva semiótica, en particular, la noción de configuración de objetos y procesos permite una definición operativa del constructo "sistema semiótico". En la sección 4 aplicaremos las nociones de sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos para analizar algunos sistemas semióticos puestos en juego en el estudio de los números naturales. En la sección 5 aplicamos dichas nociones al análisis de las respuestas de un alumno a una tarea de recuento y escritura de números mayores que diez, la cual involucra las dificultades de aprendizaje de la decena. Este análisis permite describir la complejidad ontosemiótica de los procesos de aprendizaje de la numeración decimal.

Concluimos con una síntesis y reflexiones finales, resaltando la complementariedad del enfoque ontosemiótico y la perspectiva semiótica en educación matemática y cuáles son a nuestro juicio las aportaciones del enfoque ontosemiótico a la perspectiva semiótica en educación matemática.

2. RASGOS CARACTERÍSTICOS DE LA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

Las razones para utilizar el punto de vista de la semiótica en la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son diversas. La semiótica abarca todos los aspectos de la construcción de signos por el hombre, la lectura e interpretación de los signos a través de los múltiples contextos en que tiene lugar dicho uso. No debe ser, por tanto, extraño el uso de la semiótica para estudiar la actividad matemática, dado el papel esencial del uso de signos en matemáticas y su carácter antropológico (Radford, 2006).

Por "actividad matemática" nos referimos a cualquier proceso de construcción y comunicación de objetos, procesos o significados matemáticos; en particular, aquellos procesos que tienen lugar en un contexto educativo. En consecuencia, parece justificado el estudio de la matemática escolar y su didáctica desde el punto de vista de la ciencia de los signos.

La perspectiva semiótica de la actividad matemática se caracteriza por centrar su atención en los signos y el uso de los signos[2], contrariamente a las perspectivas cognitivistas que fijan la atención, en ocasiones de manera exclusiva, sobre las estructuras y funciones mentales. Dado que el signo supone un acto comunicativo, la perspectiva semiótica abarca de manera conjunta las dimensiones individuales y sociales de la actividad matemática, la enseñanza y el aprendizaje.

> "El foco primario en la perspectiva semiótica es sobre la actividad comunicativa en matemáticas usando signos. Esto implica tanto la recepción y comprensión vía escuchar y leer, y la producción de signos vía hablar y escribir" (Ernest, 2006, 69).

En este sentido podemos decir que la perspectiva semiótica trasciende los límites de las aproximaciones cognitivas y conductuales de la psicología al adoptar como unidad natural y básica de análisis el signo.

La atención se centra no sobre signos aislados sino sobre los sistemas de signos matemáticos y el contenido, las destrezas y capacidades desarrolladas durante el proceso educativo. Los signos y su uso solo se pueden comprender como partes de sistemas más complejos: *los sistemas semióticos*, los cuales comprenden tres componentes:

- El conjunto de signos (S).
- El conjunto de reglas de producción de signos (R).
- Las relaciones entre los signos y sus significados, encarnados en una estructura de significados subyacentes (M).

Ernest (2006) considera que esta tripleta (S, R, M) no puede ser establecida de manera precisa ya que R es, en el mejor de los casos, un conjunto difuso y los miembros potenciales de M nunca se pueden explicitar como un conjunto bien definido, fijo y bien representado (p. 70). Los sistemas semióticos no son asimilables a estructuras matemáticas formalizadas ya que pierden su significado cuando se aíslan como sistemas puramente estructurales.

> "Los sistemas semióticos implican signos, reglas de uso y producción de signos, y los significados subyacentes. Todos estos elementos dependen de prácticas sociales, y los seres humanos como seres esencialmente usuarios de signos y productores de significados nunca se pueden eliminar de la escena, incluso aunque para algunos fines ponemos en primer plano los signos y las reglas y relegamos a las personas y a los significados" (Ernest, 2006, 72)

Es claro que para Ernest los sistemas semióticos no se reducen a los sistemas de representación semiótica; la actividad matemática no se reduce a la manipulación de símbolos sino que hay un mundo de objetos no lingüísticos que intervienen en la actividad matemática y emergen de dicha actividad. Dado que esa actividad es llevada a cabo por las personas, en el seno de comunidades de prácticas, los objetos emergentes quedan impregnados de "presencia humana". Los sistemas

[2] En el EOS se adopta como unidad primaria de análisis la *práctica*, entendida, como se ha comentado anteriormente, como toda acción o manifestación realizada por una persona (o compartida en el seno de una institución) para resolver problemas, comunicar la solución, justificarla, generalizarla a otros problemas y contextos. De esta descripción se deduce que la práctica incluye el uso del lenguaje, los signos, pero ligados a una intencionalidad (resolver una situación – problema) y a un contexto.

semióticos son relativos a las personas y grupos humanos que los usan y producen; son relativos a los juegos de lenguaje inmersos en formas de vida sociales.

En el caso de los números Ernest (2006) se plantea si éstos se pueden describir en términos de un único sistema semiótico. Considera que no es pertinente esta visión en general para los sistemas semióticos, y en particular para los números y el cálculo aritmético, tanto desde el punto de vista del desarrollo histórico, de los estudios fundacionales de las matemáticas y del desarrollo cognitivo de los sujetos. Aunque existan semejanzas entre los diferentes sistemas de representación y cada versión pueda representar en cierto sentido a la familia de los diversos sistemas semióticos sobre los números, cada una es un producto contingente de su contexto social y tiene una finalidad específica. "Unidad y diversidad coexisten simultáneamente" (Ernest, 2006, 94)

Los significados de los números cambian según los momentos históricos. Los sistemas de numeración de los egipcios, los chinos, los romanos, los sistemas posicionales, etc. tienen diferencias sustanciales, no solo en la apariencia física de los símbolos usados, sino en las reglas de elaboración de los numerales (sistemas aditivos, multiplicativos, irregulares, etc.) y los procedimientos de cálculo. De igual modo hay diferencias sustanciales entre los sistemas numéricos formales elaborados por Frege, Dedekind, Peano, etc., y los sistemas numéricos elaborados en la matemática escolar.

De estos planteamientos se deriva la necesidad de elaborar modelos teóricos que, partiendo de postulados antropológicos para la matemática, ayuden a describir y comprender la pluralidad de significados de los objetos matemáticos, entendidos en su doble vertiente, como entidades socioculturales, y personales o mentales. Las nociones de sistema de prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos y función semiótica que describimos en la siguiente sección se están revelando como herramientas operativas para el análisis de los sistemas semióticos, y en general para el análisis didáctico.

3. LA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA AL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

3.1. Sistemas de prácticas

Podemos relacionar la descripción que hace Ernest de los *sistemas semióticos* con la noción introducida por Godino y Batanero (1998) de "sistema de prácticas operativas y discursivas", junto con la de "configuración de objetos y procesos". Los sistemas de prácticas - que son considerados en el EOS como una de las posibles maneras de entender "el significado del objeto matemático" - son siempre relativos a un contexto o marco institucional (o a una persona individual), además de situados o ligados a la solución de cierta clase de situaciones – problemas. En consecuencia tienen algunas de las características que Ernest atribuye a los sistemas semióticos.

Los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción del carácter personal, o idiosincrásico, de las prácticas (prácticas personales) y del carácter institucional (compartido, social) de tales prácticas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego el sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales). La figura 1 resume los tipos de significados personales y personales introducidos en el EOS.

La interpretación semiótica de las prácticas matemáticas, personales e institucionales, permite describir los procesos de aprendizaje en términos de acoplamiento de significados, como se indica en la parte central de la figura 1. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

Figura 1: Tipos de significados pragmáticos

3.2. Configuraciones de objetos y procesos

La noción de "sistema de prácticas", o la de "sistema semiótico", es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir una tipología de objetos matemáticos.

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios introducida en el EOS responde a esta necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Emergencia de los objetos matemáticos

En el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan (emergen) de las prácticas matemáticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la *configuración* de la Figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69).

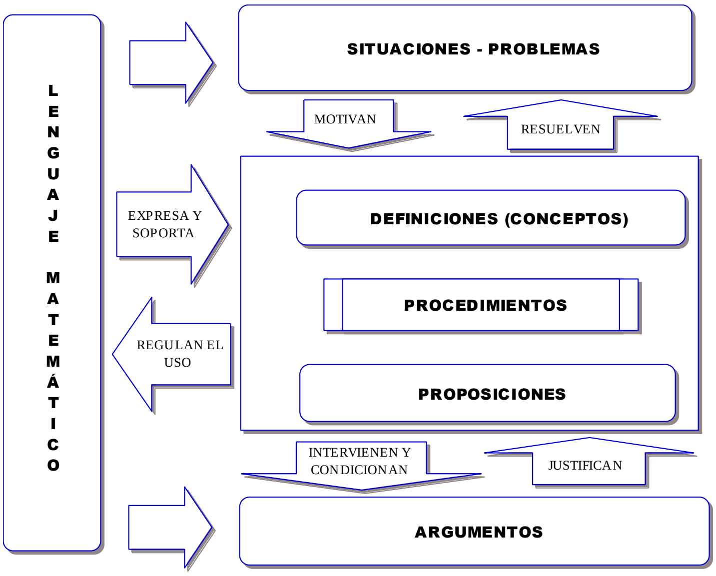


Figura 2. Configuración de objetos primarios

Se propone pues la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática[3]. Las situaciones – problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

[3] Se amplía, así mismo, el "triángulo epistemológico" (Steinbring, 2006) (signo/símbolo, objeto/contexto de referencia, concepto), especialmente al problematizar la noción de concepto e interpretar el "objeto/contexto de referencia" en términos de situaciones – problemas.

La consideración de una entidad como primaria no es una cuestión absoluta sino que es relativa, puesto que se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje (marcos institucionales, comunidades de prácticas y contextos de uso) en que participan; tienen también un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.)

Los objetos primarios están relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser *socio-epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Segundo nivel: Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.

- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …).. Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).

- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica[4].

  La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo).* Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general

[4] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1976, 83-84).

(p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica (Otte, 2003, p. 187).

- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios

En la figura 3 se representa las diferentes nociones teóricas que se han descrito sucintamente. En el EOS la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales, lo cual nos lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: personal-institucional, unitario-sistémico, intenso-extensivo, expresión-contenido y ostensivo-no ostensivo.

Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la figura 3. La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes *procesos cognitivos/ epistémicos:* institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos; se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, de procesos cognitivos, metacognitivos, procesos de instrucción, procesos de cambio, procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que la única característica común a muchos de ellos puede ser la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". Por tanto, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los incluidos en la figura 3), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos, puesto que implican procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

Tampoco se consideran en esta selección los procesos metacognitivos necesarios para la realización de las prácticas[5].

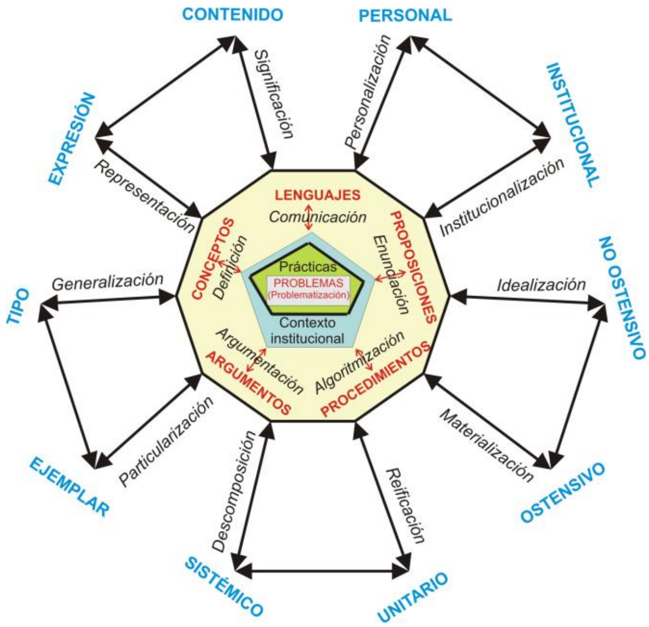


Figura 3: Configuración de objetos y procesos matemáticos

3.3. Los significados como contenidos de funciones semióticas

El objetivo inicial del EOS era dar una respuesta, útil para la educación matemática, a la cuestión, ¿Cuál es el significado de un concepto?, por ejemplo, ¿Qué significa el "concepto de media aritmética"? (Godino y Batanero, 1994). Se propuso una respuesta pragmatista-antropológica: El significado de un concepto (o del cualquier "objeto matemático") es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que un sujeto realiza para resolver un cierto tipo de problemas en las que dicho objeto interviene. Se establece de esta manera una función semiótica entre el objeto y el sistema de prácticas.

La descripción de la actividad matemática requiere el doble lenguaje de las prácticas y de los objetos intervinientes en las mismas: no hay prácticas sin objetos, ni objetos sin prácticas. Estas dos categorías básicas de entidades se complementan con otra entidad relacional: *la función semiótica*, que conecta los objetos que intervienen en las prácticas.

Las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de la manipulación de ostensivos matemáticos, y del pensamiento que la acompaña, característico de las prácticas matemáticas.

[5] En Gusmao (2006) se ha utilizado el enfoque ontosemiótico para estudiar los procesos metacognitivos activados en las prácticas de resolución de problemas.

La figura 3 resume el sistema de objetos y procesos intervinientes y emergentes en las prácticas matemáticas, los cuales pueden participar como expresión, contenido o criterio de funciones semióticas. Se tiene de este modo un instrumento potente para el análisis de la práctica matemática y de los procesos de comunicación y significación implicados.

Entre otras consecuencias la noción de representación queda generalizada de manera radical. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas.

3.4. Relación entre configuraciones y sistemas semióticos

La figura 3 nos ayuda a dar una definición de "sistema semiótico" que consideramos operativa y adaptada al análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje: *es el sistema formado por la configuración de objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración).*

Puesto que los sistemas de prácticas son relativos a las personas que los realizan, y a las instituciones (comunidades, culturas,…) donde se comparten, los sistemas semióticos asociados serán también relativos a las personas y las instituciones. Las prácticas están ligadas a la solución de tipos de situaciones – problema, los cuales pueden tener un carácter puntual, local o global, de donde también resulta que los sistemas semióticos tendrán dichos niveles de generalidad.

Los componentes de un sistema semiótico que Ernest considera son algunos de los elementos contemplados en la configuración de objetos y procesos activados y emergentes de las prácticas matemáticas. En efecto, el conjunto de signos (S) es el componente "lenguaje" de la figura 3 visto desde su naturaleza ostensiva. El conjunto de reglas de producción de signos (R) son, en nuestro caso, las restantes entidades primarias (definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Las relaciones entre los signos y sus significados, encarnados en una estructura de significados subyacentes (M), son tenidas en cuenta en el sistema de objetos y procesos de la configuración contemplados desde el punto de vista de la dualidad expresión – contenido. La figura 3 muestra también las limitaciones del constructo sistema semiótico para el análisis de la complejidad inherente de la actividad matemática.

3.4. Conflictos semióticos y criterios de idoneidad didáctica

La noción de conflicto semiótico se ha introducido como una explicación de los errores, dificultades y obstáculos de los estudiantes para el aprendizaje de un contenido matemático, y en general, en las dificultades surgidas en la comunicación en el aula.
Pero la relatividad de los sistemas de prácticas (y por tanto, de los significados) a los marcos institucionales, y las relaciones ecológicas entre las instituciones (dominancia, subordinación, dependencia), lleva a considerar útil una generalización de la noción de conflicto semiótico. Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

La aproximación semiótica al conocimiento personal e institucional que propone el EOS ha permitido introducir la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático. Se distinguen seis dimensiones en el análisis de tales procesos y se proponen criterios de mayor o menor idoneidad en cada una de dichas dimensiones. Tres de los seis criterios se definen en términos semióticos.

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

El sistema de nociones teóricas que componen el EOS se está revelando en diversos trabajos como herramientas potentes para el análisis y la intervención didáctica. En la siguiente sección aplicamos algunas de estas nociones en el análisis de los significados de los números naturales y la descripción de algunos fenómenos relacionados con su aprendizaje en la escuela.

4. ANÁLISIS DE SISTEMAS SEMIÓTICOS INSTITUCIONALES

En esta sección aplicamos la noción de sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos para clarificar los diversos significados de los números naturales.

La naturaleza de los números naturales, y en particular su relación con los conjuntos, es una cuestión que interesa tanto a las matemáticas como a la filosofía de las matemáticas. Pero los números son también herramientas esenciales en nuestra vida cotidiana y profesional, por lo que constituyen un tema de estudio imprescindible en la escuela desde los primeros niveles.

Consideramos necesario distinguir entre los usos prácticos e "informales" de los números (responder cuestiones tales como, ¿cuántos elementos hay? o ¿qué lugar ocupa un objeto?), y los usos "formales" (qué son los números y cómo se construyen los sistemas numéricos); cuestiones estas últimas, relativas a los fundamentos de la matemática como cuerpo organizado de conocimientos. Dentro de estos dos grandes contextos de uso (o marcos institucionales) es posible distinguir diversos momentos históricos en los cuales las cuestiones se abordan con diversos recursos y desde distintas aproximaciones, poniéndose en juego prácticas operativas y discursivas propias. Vistos de manera retrospectiva podemos identificar ciertas invariancias que permiten hablar del "número natural", en singular, pero desde un punto de vista local parece necesario distinguir entre los diversos números naturales que "manejaron" los pueblos primitivos y culturas antiguas (egipcios, romanos, chinos,…)[6], como también entre las prácticas numéricas que se realizan actualmente en la escuela infantil o primaria, y las que realizan los matemáticos logicistas del siglo XIX o las formulaciones axiomáticas hilbertianas.

[6] Rotman (1988) concluye de manera similar en su análisis semiótico de la actividad matemática cuando afirma que los números estudiados por los babilonios, griegos y romanos son diferentes de los estudiados por los matemáticos actuales. No obstante, pensamos que estos números son similares debido a un fenómeno de apropiación regresiva.

> "En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. <<No hay una matemática; hay muchas matemáticas>>." (Spengler, 1918, 96).

Así pues, la comprensión de la naturaleza y significado de los números requiere adoptar una visión antropológica – sociocultural sobre la matemática, como la propuesta, entre otras aproximaciones (Chevallard, 1992; Radford, 2006), por el "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática".

4.1. Características de los sistemas semióticos informales de los números

Para comunicar a otras personas, y como medio de registrar para nosotros mismos en otros momentos, el tamaño o cantidad de elementos de un conjunto de objetos discretos podemos hacerlo usando diferentes recursos y procedimientos:

1) En nuestra cultura occidental actual está generalizado el uso de las "palabras numéricas", uno, dos, tres…, y los símbolos numéricos indoarábigos, 1, 2, 3,… Estas colecciones ilimitadas de palabras y símbolos son las que usan nuestros estudiantes cuando preguntamos, por ejemplo, ¿Cuántos alumnos hay en clase?, y responden "hay noventa y un estudiantes", o, escriben, "91". Para ello han debido aplicar un procedimiento riguroso de conteo, poniendo en correspondencia biyectiva cada alumno de la clase con una y solo una palabra numérica recitadas en un orden establecido, respetando los principios del conteo.

2) Si les pedimos que comuniquen el resultado del recuento sin usar las "palabras o los símbolos numéricos" los alumnos pueden inventar otros medios de expresar el tamaño, numerosidad, número de elementos (o cardinal) del conjunto de alumnos de la clase. Por ejemplo:

- La colección de marcas ///…, o cuadraditos, sobre el papel, tantos como elementos tiene el conjunto.
- Una combinación de símbolos para distintos agrupamientos parciales (* para indicar diez alumnos, / para expresar una unidad).

Como tenemos libertad para inventar símbolos y objetos como medio de expresar el cardinal de los conjuntos, esto es, de responder a la cuestión, ¿cuántos hay?, la colección de sistemas numerales posibles es ilimitada. En principio cualquier colección ilimitada de objetos, cualquiera que sea su naturaleza, se podría usar como un sistema numeral: diversas culturas han usado conjuntos de piedrecitas, o partes del cuerpo humano, etc., como sistemas numerales.

Vemos, por tanto, que los sistemas semióticos informales en los que se usan los números naturales se caracterizan por una problemática específica (describir la numerosidad de las colecciones de cosas), así como por usar recursos lingüísticos, procedimientos, propiedades, conceptos y justificaciones particulares para resolver dichos problemas de índole empírica.

4.2. Características de los sistemas semióticos formales

Las entidades matemáticas que se ponen en juego en las situaciones de cardinación y cálculo aritmético son analizadas de manera formal o estructural en el marco interno de las matemáticas. Para ello los números dejan de ser considerados como medios de expresión de cantidades de magnitudes (números de personas o cosas, papel que cumplen en una situación, etc.) y son interpretados, bien como elementos de una estructura caracterizada según la teoría de conjuntos, bien según los axiomas de Peano[7]. En este contexto de formalización matemática se plantean cuestiones tales como,

- ¿Cómo se deberían definir los números?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas a partir de los axiomas de Peano?
- ¿Cómo se deberían definir las operaciones aritméticas cuando los números naturales son definidos como los cardinales de los conjuntos finitos?
- ¿Qué tipo de estructura algebraica tiene el conjunto N de los naturales dotado de la ley de composición interna adición?

La respuesta a estas cuestiones requiere la elaboración de recursos lingüísticos específicos, técnicas operatorias (recursión, operaciones conjuntistas), conceptos (definiciones conjuntistas de adición y sustracción; definiciones recursivas; definición algebraica de sustracción), propiedades (estructura de semigrupo con elemento neutro para la adición y multiplicación) y argumentaciones (deductivas), en definitiva un sistema de prácticas operativas y discursivas con rasgos o características específicas, adaptadas a la generalidad y rigor del trabajo matemático.

A pesar de las diferencias entre los significados informales-empíricos y formales de los números siempre ha existido una fructífera relación sinérgica entre los mismos: "Los requerimientos prácticos han inducido innovaciones de escritura como el refinamiento de los sistemas de notación posicionales y la introducción de la notación numérica negativa. Los desarrollos conceptuales han sustentado estas innovaciones, asegurando que las reglas de los procedimientos reflejen las estructuras de significados subyacentes, así como desarrollando el conocimiento de otras propiedades" (Ernest, 2006, 80).

4.3. Pluralidad de números y significados

La figura 4 representa la pluralidad (sin buscar la exhaustividad) de significados informales y formales de los números naturales. Las situaciones de cardinación han sido abordadas por diversas culturas mediante prácticas e instrumentos diferentes, dando lugar a "números" diferentes. Estas diversas configuraciones numéricas son articuladas en nuevos contextos de uso formales dando lugar a distintas construcciones numéricas[8].

Es importante resaltar que las prácticas informales no tienen una existencia meramente "histórica". Coexisten en el tiempo con la formalización científica en las prácticas usuales de las escuelas y determinan el progreso de los significados personales. No son un "mal menor", sino hitos necesarios en el desarrollo cognitivo de los niños y consustanciales a los procesos de transposición didáctica.

Los números, la aritmética, es la respuesta social al problema de comunicar el tamaño o numerosidad de los conjuntos, de ordenar una colección de objetos y de analizar procesos iterativos-recurrentes. Pero cada pueblo, cada forma de vida comenzó dando su propia respuesta a este problema. En principio cada sociedad, cultura, etapa histórica, tiene sus propios números, y su propia aritmética asociada, distinguible según la configuración de objetos y procesos que la caracteriza. En cada configuración existen objetos organizados de manera recursiva, con un primer elemento, y un siguiente determinado de manera unívoca para cada elemento. Estas organizaciones son las que

[7] La caracterización de los números naturales según la teoría de conjuntos o según la axiomática de Peano no agotan las formalizaciones del número natural. Por ejemplo, Bedoya (2003) introduce y relaciona de manera sucinta las axiomáticas de Peano, Pierce y Lawvere (según la teoría de categorías). Oostra (2008) analiza de manera más extensa el artículo On the Logic of Number de Peirce, afirmando que Peirce desarrolló una presentación axiomática para N antes que Peano.

[8] En la figura 4 el contexto "conjuntista" refiere a las construcciones de N basadas en la coordinabilidad de conjuntos, mientras que "axiomático" a las basadas en los axiomas de Peano (u otros equivalentes).

permiten solucionar los problemas genéricos de la cuantificación, la ordenación, la iteración y la codificación.

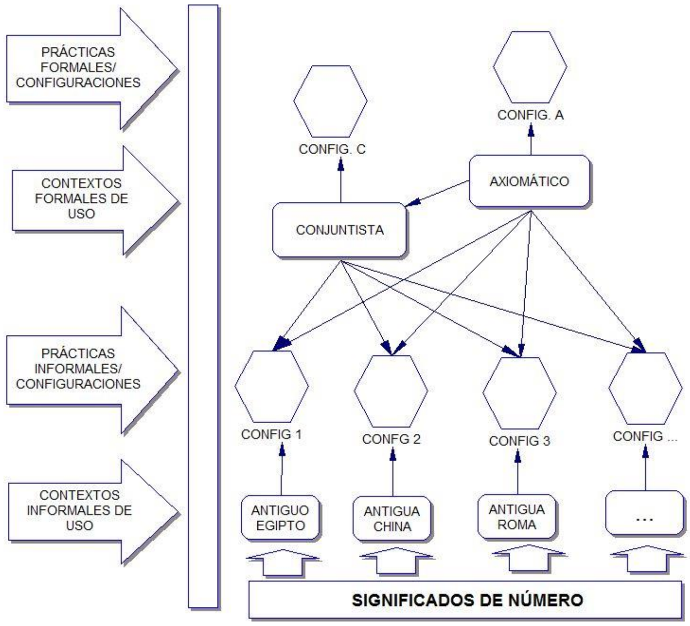


Figura 4: Pluralidad de significados de los números

Desde un punto de vista del aprendizaje, esto es, de la construcción de significados personales, los números aparecen inicialmente en formas repetitivas de expresión (///.., uno, dos,…), ligadas a gestos y movimientos corporales (señalar, apartar, caminar,…), en definitiva en representaciones actuativas.

En este proceso de desarrollo inicial del número una noción clave es la de “siguiente” (inmediato sucesor). Otro principio central es la correspondencia uno a uno en el emparejamiento de signos a objetos. El aprendizaje del sistema morfosintáctico de los números naturales y del recuento supone que el alumno sea capaz de participar en ciertas prácticas sociales, y en particular que pueda enunciar o producir signos numéricos de manera pertinente. La apropiación de estos significados de una manera creativa requiere varios años de intenso aprendizaje y supone, no solo el uso de los números para la solución de problemas prácticos y competencia en diferentes sistemas de cálculo y representación, sino también conocimiento de propiedades y relaciones numéricas que justifican los procedimientos y aplicaciones prácticas.

4.4. ¿Qué son los números naturales?

¿Qué son realmente los números, si llamamos números tanto a ‘1, 2, 3…’, como a ‘uno, dos, tres,…’, como a ‘one, two, three,…’, etc.? (Ferreirós, 1998, 52). Esta cuestión es sin duda de difícil respuesta, si tenemos en cuenta las fuertes controversias que se plantearon entre autores de la talla de Frege, Russell, Peano, Dedekind, etc., a propósito de las diferentes formulaciones del número natural. Según Russell, con el fin de proporcionar al concepto de número con alguna extensión, que sea real, tenemos que comprender “el número como el número de una cantidad” y proporcionar una aplicación para el concepto así definido demostrando la existencia de conjuntos de cardinalidad arbitraria (Otte, 2003, 222). De esta manera la intuición aritmética se sustituye por una intuición conjuntista, lo que no deja de ser conflictivo.

Para Frege los números son objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis de los naturales se desarrolló de acuerdo con esa idea. Por el contrario, Dedekind se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de números naturales (Ferreirós, 1998, 52).

El trabajo de Benacerraf (1983) ha dado argumentos de peso para cuestionar las visiones conjuntistas de los números naturales. Benacerraf concluye que los números no pueden ser conjuntos, o conjuntos de conjuntos, ya que existen muy diferentes presentaciones del significado y referencia de las palabras numéricas en términos de la teoría de conjuntos. El número 3 no es ni más ni menos que aquel que es precedido por 2 y 1 (y, en su caso, el 0), y seguido por 4, 5, etc. O, de manera más precisa, es un objeto que está precedido por dos (o tres) objetos en un orden preestablecido y seguido por infinitos también ordenados, de tal manera que dos elementos definidos como "contiguos" lo serán siempre. Con otras palabras, cualquier objeto puede desempeñar el papel de 3; esto es, cualquier objeto puede ser el tercer elemento en alguna progresión (preestablecida de manera arbitraria). Lo que es peculiar a 3 es que él define ese papel - no por ser un paradigma de ningún objeto que lo juegue, sino por representar la relación que cualquier tercer miembro de una progresión guarda con el resto de la progresión.

> "Por tanto, los números no son objetos en absoluto, porque al dar las propiedades (necesarias y suficientes) de los números simplemente caracterizamos una estructura abstracta - y la distinción está en el hecho de que los 'elementos' de la estructura no tienen ningunas propiedades distintas de las que relacionan unos con otros 'elementos' de la misma estructura" (Benacerraf, 1983, 291).

Una vez que tomamos conciencia de que, además de los símbolos indoarábigos, 1, 2, 3,…, podemos usar una infinita variedad de "objetos" (perceptibles, manipulables o mentales) para expresar el tamaño de las colecciones finitas de otros objetos debe resultar conflictivo decir que los números naturales son, 1, 2, 3… Desde una perspectiva filosófica y matemática formal, la solución coherente consistirá en asumir que un número natural es un elemento de cualquier sistema numeral y el conjunto de los números naturales es la clase de sistemas numerales, no un sistema numeral particular. Ahora bien, como todo sistema numeral viene caracterizado por una estructura u organización recursiva específica (los axiomas de Peano, por ejemplo) también podemos decir que el conjunto de números naturales se caracteriza por la estructura de cualquier sistema numeral. Cada número particular será un elemento de dicho sistema.

5. ANÁLISIS DE SISTEMAS SEMIÓTICOS PERSONALES

Las herramientas teóricas introducidas en el EOS, sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos, se pueden utilizar para describir y comprender los sistemas semióticos formados por las respuestas dadas por los alumnos a tareas matemáticas específicas.

En este apartado ilustramos este uso para analizar las respuestas dadas por un niño de primer curso de primaria a una tarea de recuento y escritura de números mayores que diez en el sistema de numeración decimal (figura 4).

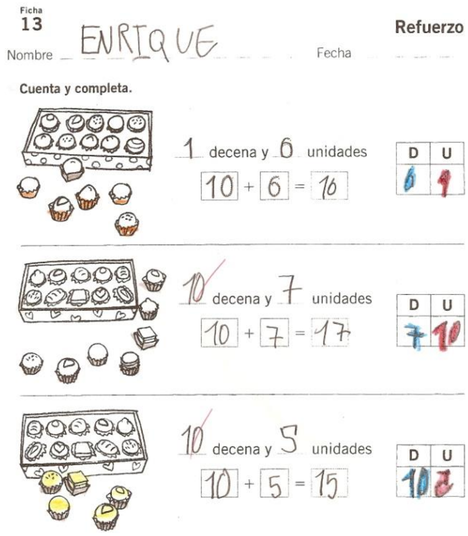


Figura 4: Recuento y escritura de números mayores que diez

La ficha de trabajo pide contar el número de bombones representados en varias figuras y da una pauta para escribir la respuesta en la primera tarea (1 decena viene escrito, y el 6 de las unidades se da con trazos de puntos sobre el que el niño debe escribir el 6). Sobre la ficha de trabajo se observa que la maestra ha marcado con un trazo rojo el cero de la decena que el niño ha escrito.

5.1. Sistema de prácticas matemáticas institucionales y personales

La práctica esperada por el profesor (como representante de la institución) se compone de las siguientes acciones**:**

- Leer y comprender la tarea
- Contar el número de bombones representados en el dibujo;
- Escribir el resultado de los recuentos de tres formas diferentes:
    - Lenguaje natural, 1 decena y el número de unidades correspondiente, escritos en los lugares fijados.
    - Como suma del cardinal de dos subcolecciones (bombones dentro y fuera de una caja).
    - Identificar la decena y las unidades del resultado y escribidlas en una tabla *ad hoc.*

D	U

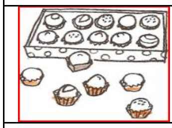
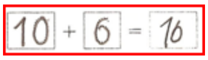
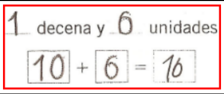
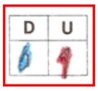
En este caso entendemos por práctica del alumno la lectura de la tarea y su resolución.
La ficha de trabajo muestra un ejemplo incompleto, ya que se trata de una ficha de “refuerzo” y el niño ya ha realizado actividades similares previamente.
El niño cuenta bien, pero muestra dificultades con la identificación de la decena y las unidades. El significado personal parece no diferenciar cifra y número, a pesar de distinguir entre el valor relativo y absoluto de las cifras (1 decena son 10 unidades). Con otras palabras, la práctica operativa (correcta) no tiene correlato con la práctica discursiva. Esta inconsistencia no puede valorarse únicamente en términos dicotómicos “el alumno sabe-no sabe”.

Completar la tabla D-U se basa en la presunción institucional de que es “inmediata” la identificación en la escritura del número como “agregación de símbolos” y la interpretación de estos según el lenguaje tabular.

5.2. Procesos de significación y representación

A continuación incluimos un análisis detallado de los diversos objetos que intervienen en el enunciado y solución esperada de la tarea, y los significados dados a dichos objetos. Usamos la noción de “función semiótica”, relación entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado), la cual viene establecida por el sujeto que realiza el proceso de significación al aplicar un criterio o regla de correspondencia[9]. Clasificamos la trama de funciones semióticas en cuatro grupos, según los tipos de objetos que intervienen como expresión o antecedente: objetos lingüísticos, conceptos, procedimientos y proposiciones. Las acciones de los sujetos están en el núcleo de los criterios-regla que determinan la relación expresión-contenido, esto es, son consustanciales a la naturaleza relacional de las matemáticas y a las funciones semióticas que permiten la descripción de la actividad matemática. Los argumentos intervienen como justificación de procedimientos y proposiciones. Este análisis permite comprender las dificultades de Enrique en términos de la complejidad ontosemiótica de la tarea.

Interpretación de elementos lingüísticos

EXPRESIÓN (Significante)	CONTENIDO (Significado)	CRITERIO/REGLA
Cuenta	- Problema, ¿cuántos bombones hay dibujados en la figura? - Procedimiento de contar - Concepto de cardinal, número de elementos de las colecciones dadas	-Para hallar “cuántos hay” hay que contar; - Para contar hay que aplicar la técnica de contar
	- Colección de objetos a contar dividida en dos subcolecciones (dentro y fuera)	- Cardinal de la unión es la suma de los cardinales de los subconjuntos disjuntos
Completa	- Escribe el resultado de contar en los espacios vacíos, según la muestra dada, siguiendo las reglas del sistema de numeración decimal posicional.	- Reglas de escritura: separa decena y unidades; adición en línea; escritura tabular
1 decena y 6 unidades	- Conceptos de decena y unidad; 1 decena refiere a la cantidad de bombones de la caja; 6 unidades a la cantidad de bombones fuera de la caja.	- Reglas conceptuales - Principio de agrupamiento decimal
	- Operación de sumar - Conceptos de adición, sumandos y resultado (suma) - Expresión polinómica de un número; descomposición de un número en unidades y decenas.	- Regla procedimental de sumar; - Reglas conceptuales - Reglas representacionales
	1 decena y 6 unidades se escribe también como 10 + 6; y también como 16	- Regla representacional
	- U, refiere a Unidad; D, a Decena. - En la casilla de la derecha cada digito tiene su propio valor; en la casilla de la izquierda cada dígito vale una decena.	- Reglas representacionales - Principio de valor posicional de las cifras

La primera viñeta establece la regla institucional a seguir: Cuando se tiene un conjunto con diez objetos se dice que formar una decena, y se escribe 1; el resto de objetos que no llegan a diez se llaman unidades, y se escribe su cifra, 6, en la posición de la derecha.

El texto presenta tres modos de expresión diferentes para un mismo hecho matemático: “1 decena y 6 unidades”; “10 + 6 = 16”; y el registro tabular-simbólico que recuerda el valor posicional de cada dígito. Estas tres expresiones matemáticas están además representando una situación concreta del

[9] En coherencia con la perspectiva semiótica adoptada en EOS presentamos una caracterización triádica de los datos analizados y sistematizados en la representación matricial de tres columnas.

mundo cotidiano: el cardinal del conjunto unión de dos subconjuntos de bombones mostrado mediante iconos. El resultado de la modelización de la situación, 16 bombones, queda implícito; sólo se expresa el valor numérico de la medida, 16.

El alumno debe entender el significado (proceso de significación) de cada uno de los elementos lingüísticos del texto y, sobre todo, debe comprender el texto globalmente. La realización de la tarea por el niño muestra sus dificultades en las reglas de escritura del sistema de numeración decimal para el caso más elemental, como es la escritura de la decena como una unidad de segundo orden. El alumno no ve una decena, sino diez unidades. El significado de los símbolos D (decena) y U (unidades) no parece evidente para este alumno.

Interpretación de los conceptos

EXPRESIÓN (Significante)	CONTENIDO (Significado)	CRITERIO/REGLA:
Número de elementos	- Tamaño de las tres colecciones de bombones agrupados en decenas y unidades: dieciséis, diecisiete, quince.	Definición implícita
Decena	- Colección de diez bombones considerada como una unidad (caja completa) - Segunda posición en la escritura posicional decimal	- La decena como contenedor. - Algoritmo de escritura de números de dos cifras.
Unidad	- Objetos no incluidos en el agrupamiento decimal - Primera posición en la escritura posicional decimal	- La unidad como elementos "sobrantes" - Algoritmo de escritura de números de dos cifras.
Adición	- Reunir bombones dentro y fuera de la caja; seguir contando	Orden estable de la serie numérica.
Igualdad	- Resultado de la operación de sumar	La operación y su resultado se relacionan con el signo "="

El niño cuenta bien el número de objetos dentro de la caja y sabe que diez se escribe 10, pero no entiende el papel (significado) que tienen el 0 y el 1 en dicha escritura.

Las respuestas de Enrique a las tareas pedidas muestran fundamentalmente la complejidad de la noción de unidad (de primer orden) y decena (unidades de segundo orden): una colección de diez unidades (bombones) deben ser vistos de manera unitaria como una nueva unidad, y no como diez unidades. Asimismo, la muestra de la actividad no permite determinar cuál es el significado atribuido por el niño a la regla "para sumar a 10 un número de una cifra, basta sustituir el 0 (del 10) por dicha cifra". De hecho, puesto que ante la pregunta "cuántas decenas hay", Enrique pone "10", la anterior puede que represente para este niño un mero juego de símbolos, sin referencia a la decena como "agrupamiento de unidades".

Interpretación de los procedimientos

Los procedimientos y las proposiciones suponen un "nivel superior" de conexión matemática. Este hecho, dentro del EOS, se concreta en que los criterios-regla de las funciones semióticas en las que estos elementos participan precisan de elementos argumentativos que justifiquen su uso y hagan coherente el discurso en el que se insertan.

PROCEDIMIENTO (Antecedente)	USO (Consecuente)	CRITERIO/REGLA (Justificación)
Técnica de recuento del número de elementos de una colección	Se usa para hallar el tamaño, o número de elementos de dentro y fuera de la caja	Se cumplen las condiciones de aplicación (colección discreta de objetos)
Expresión de los números en el sistema posicional, separando unidades (U) y decenas (D)	Escritura de 16, 17 y 15	Se trata de números mayores que la base y se dispone de algoritmo de escritura de

		estos números
Operación de sumar	Se usa para hallar el total de bombones, dentro y fuera de la caja	Se cumple la condición "colecciones disjuntas"

Enrique cuenta bien las colecciones de objetos mostradas, pero comete errores en el procedimiento para la escritura posicional de los números.

Interpretación de las proposiciones

PROPOSICIÓN (Antecedente)	USO (Consecuente)	CRITERIO/REGLA (Justificación)
Principios del conteo: número cardinal coincide con el número ordinal del último elemento contado,…	Se usan en el procedimiento de contar las colecciones dadas	Se cumplen las condiciones de aplicación (colección discreta de objetos)
Cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos es la suma de los cardinales de cada conjunto	Se usa para hallar el total (16, 17, 15)	Se cumplen las condiciones (colecciones disjuntas)
Hay 16 (17, 15) bombones.	Son las respuestas a las cuestiones planteadas	Comprobación empírica (hay 10 objetos en la caja y 7 fuera, luego escribo 10 y 7 según el modelo)

Enrique aplica bien los principios del conteo ya que halla bien los números de bombones.

5.3. Procesos de generalización y particularización

En este ejercicio, implícitamente se pretende utilizar los bombones como objetos genéricos, es decir se pretende que el alumno resuelva (para el primer problema) que 10 objetos + 6 objetos son 16 objetos. Con los tres ejercicios seguidos se pretende que conozca que, si se juntan una decena de objetos con un número de objetos inferior a diez, el resultado es un número de objetos igual a 1 seguido del número que representa las unidades. También se pretende que el alumno se apropie de la regla general de los sistemas de numeración posicional para números de dos cifras: "Diez unidades simples o de primer orden forman una unidad de orden superior y se escribe a la izquierda como una unidad del orden superior". Se observa en la respuesta del alumno que no comprende dicha regla.

5.4. Procesos de idealización y materialización

En esta tarea hay un proceso de idealización implícito ya que, después de contar, de lo único que tenemos evidencia empírica es que 10 bombones + 6 bombones son 16 bombones. Se trata de la operación física de añadir objetos. Ahora bien, al escribir los números, los bombones desaparecen y se concluye que 10 + 6 es 16, es decir hemos pasado de una operación con objetos físicos a una operación matemática con números. Este proceso de idealización se combina con el de generalización descrito anteriormente,

Bombones → Objetos cualesquiera → Números

El concepto de decena se materializa primero con una caja que contiene diez bombones y después mediante tres notaciones diferentes: 1 decena, 10, "segunda posición a la izquierda" en la escritura de los números. Así mismo, la idea de unidad se materializa primero en un bombón y el número de unidades como un conjunto de bombones "sin contenedor", dicho número también se materializa en la notación "6" y en la casilla de la derecha en la tabla que descompone el número en decenas y unidades. La suma se materializa con el hecho de que hay dos colecciones disjuntas (los bombones de la caja y los de fuera).

5.5. Procesos de reificación y descomposición

El proceso de reificación de la decena se pretende conseguir primero por la presentación de la colección de objetos a contar descompuesta en dos subconjuntos: la caja de diez bombones, y el resto fuera de la caja. Mientras que para la decena se pretende poner en funcionamiento el esquema contenedor-contenido para que los alumnos entiendan los diez bombones como una unidad de orden superior, dicho esquema se excluye explícitamente en el caso de las unidades. Dicha reificación se refuerza posteriormente con la escritura "1 decena…." y por el uso de la tabla que descompone el número en decenas y unidades.
El principal conflicto que se observa en la respuesta de Enrique se refiere a que no concibe los 10 objetos como una unidad (de orden superior), escribe un 10 en lugar de un 1 en la casilla de la izquierda que descompone el número en decenas y unidades. La escritura 10 asignada a una colección de diez objetos no es interpretada por Enrique en términos de 0 unidades de primer orden y 1 de segundo orden. Este hecho nos permite afirmar que este alumno no reifica los diez bombones en una decena de bombones

6. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo hemos mostrado que las nociones de sistema de prácticas, configuración de objetos y procesos, función semiótica y conflicto semiótico permiten niveles de análisis detallados de la actividad matemática y en consecuencia nuevas explicaciones de fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje. Es posible formular criterios de idoneidad epistémica, cognitiva e interaccional en términos semióticos, lo que refuerza la pertinencia de las perspectivas semióticas en educación matemática.

En el caso de los números y la aritmética que hemos analizado la aproximación ontosemiótica permite describir los elementos que caracterizan los diversos significados institucionales de los números (entendidos como pares de prácticas y configuraciones de objetos y procesos), y explicar los conflictos de aprendizaje en términos de la complejidad de los objetos y significados puestos en juego.

El análisis de la respuesta del niño a la tarea escolar de escritura de números mayores que diez ha permitido el estudio sistemático y estructurado de las reglas implicadas en el uso de los números: reglas de índole lingüística, conceptual, procedimental, proposicional y argumentativa, así como los procesos de generalización, idealización y reificación implicados. La dualidad personal - institucional focaliza el análisis desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, identificando los conflictos entre los significados que construye el niño y los significados institucionales pretendidos. El análisis mostrado ayuda a tomar conciencia de la complejidad de los conocimientos implicados y de la dificultad para el logro de una competencia operativa y discursiva sobre los números naturales.

El énfasis en los aspectos ontológicos que propone el EOS, se muestra compatible con los supuestos antropológicos y socio-constructivistas que se toman como postulados de partida. El objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas, se puede considerar como único y con un significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). Pero, en cada subconjunto de prácticas, la configuración de objetos y procesos en las que se "presenta" el objeto en cuestión es diferente, y, por tanto, se posibilitan prácticas diferentes. Los sistemas de prácticas se pueden parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas, posibilitadas por una determinada configuración de objetos y procesos, permitiendo la distinción entre significado y sentido (Font y Ramos, 2005): los sentidos pueden ser interpretados como significados parciales. Se trata de un punto de vista relacionado con el sostenido por Ernest (1998, p. 261) cuando considera que el constructivismo social adopta una aproximación a los objetos matemáticos que puede ser descrita como nominalista, al considerarlos como objetos de naturaleza lingüístico / conceptual.

En el EOS, en contraposición a la posición realista tradicional sobre la naturaleza y estatus ontológico último de los objetos matemáticos - que los sitúa en el mundo abstracto e intangible de las Formas (Platón) o el Mundo 3 (Popper), o bien directamente en el mundo empírico (Maddy, 1992) - los situamos en los juegos de lenguaje y el espacio cultural de las matemáticas. La introducción de las dualidades incluidas en la Figura 3 (personal – institucional, ostensiva – no ostensiva, personal – institucional, extensivo – intensivo) y el análisis de cómo se manifiestan en el discurso matemático profesional y escolar permiten explicar cómo los juegos de lenguajes inducen a atribuir un cierto tipo de existencia a los objetos matemáticos.

Se trata de una posición concordante con la sostenida por el constructivismo social, el cual adopta la noción wittgensteiniana de significado de los signos como dados por sus usos en prácticas discursivas. De este modo, "Sin embargo, los objetos matemáticos no son eliminados por esta postura. Las explicaciones psicológicas y sociológicas, así como semióticas y culturales, de los objetos matemáticos dan cuenta de su presencia subjetiva y objetiva, su potencia y fuerza" (Ernest, 1998, 261).

Reconocimiento:
Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

REFERENCIAS

Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S. & Cifarelli, V. C. (Eds). (2003). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing.* Otawa: Legas.

Bedoya, L. M. (2003). *Peano, Lawvere, Peirce: tres axiomatizaciones de los números naturales,* Trabajo de Grado en Matemáticas. Universidad del Tolima: Ibagué, Colombia. Disponible en:

www.unav.es/gep/TesisDoctorales/Axiomatizaciones.pdf [2 mayo 2009].

Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En, P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics.* Selected reading, 2nd edition (pp.272–294). Cambridge: Cambridge University Press.

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1), 73-112.

Dedekind, R. (1888). *¿Qué son y para qué sirven los números?* [Traducción e introducción de José Ferreirós]. Madrid: Alianza Editorial, 1998.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: State University of New York.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Study in Mathematics* 61, 67-101.

Ferreirós, J. (1998). *Introducción al libro, ¿Qué son y para qué sirven los números? de R. Dedekind.* Madrid: Alianza Editorial.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. En, L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3): 237-284.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2): 127-135

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Maddy, P. (1990). Realisme in mathematics. Oxford, Clarendon Press.

Otte, M. (2003). Complementarity, sets and numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 203–228.

Oostra. A. (2008). *Acerca del artículo On the Logic of Number, de Charles S. Peirce*. Disponible en:

www.unav.es/gep/Articulos/AcercaDeLogicOfNumber-Boletin.pdf [2 mayo 2009].

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39–65.

Rotman, B. (1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica*, 72 (1/2), 1-35.

Spengler, O. (1918). *La decadencia de Occidente*. Madrid: Espasa Calpe, 1958.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 133-162.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2 (2), 72-90.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.