ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 38-1 (2020), 147-164 https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906
Investigaciones didácticas ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico

The role of adidactical situations in mathematical learning. A critical view from the onto-semiotic approach

Juan D. Godino, María Burgos
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Granada, España
jgodino@ugr.es, mariaburgos@ugr.es

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. Pamplona, España
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

RESUMEN • El postulado del aprendizaje por adaptación a un *medio* antagonista asumido por la teoría de situaciones didácticas en matemáticas se corresponde con el papel central que esta teoría atribuye a las situaciones adidácticas (momentos en los que tiene lugar la producción autónoma de conocimientos por parte de los estudiantes). Desde el punto de vista de las teorías socioculturales del aprendizaje se cuestiona la pertinencia de los planteamientos constructivistas cuando se trata del aprendizaje de conocimientos científicos. En este trabajo se justifica la importancia de un modelo didáctico dialógico-colaborativo para las situaciones de primer encuentro con los objetos de conocimiento matemáticos en el que el profesor y los estudiantes trabajan juntos en la resolución de las situaciones-problemas. La justificación de este modelo didáctico está basada en los supuestos epistemológicos, ontológicos, semióticos e instruccionales del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos.

PALABRAS CLAVE: Teoría de situaciones; Constructivismo; Objetivismo; Enfoque ontosemiótico; Articulación de teorías.

ABSTRACT • The theory of didactic situations in mathematics postulates that learning is produced by adaptation to an antagonistic *milieu*, given the central role that this theory assigns to the adidactical situations (moments where the students' autonomous production of knowledge takes place). However, the relevance of constructivist approaches is questioned by sociocultural theories, when referring to learning scientific contents. In this paper, we justify the importance of a dialogical-cooperative didactic model –in which teacher and students work together in the resolution of problems-situations– during the students' first encounter with mathematical objects. This justification is based on the epistemological, ontological, semiotic and instructional assumptions of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction.

KEYWORDS: Theory of didactical situations; Constructivism; Objectivism; Onto-semiotic approach; Networking theories.

Recepción: febrero 2019 • Aceptación: octubre 2019 • Publicación: marzo 2020

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(1), 147-164.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2906

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el problema de la elección de modelos didácticos (constructivismo, objetivismo, modelos mixtos) en educación matemática desde el punto de vista de dos enfoques teóricos internos a la didáctica de las matemáticas, la teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM) (Brousseau, 1986; 1997) y el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Los modelos didácticos constructivistas u objetivistas no son privativos de la TSDM y del EOS. Como se verá en la sección 3, por un lado, las teorías constructivistas se pueden agrupar en una gran familia denominada *Inquiry-Based Education*, que basan su enfoque en el aprendizaje por indagación de los estudiantes, con un apoyo solo subsidiario del docente (Artigue y Blomhøj, 2013). Por otro lado, los enfoques objetivistas sostienen que la eficacia del proceso de estudio está ligada más a la acción docente que al descubrimiento de los estudiantes. Focalizan pues su trabajo en el modelo instruccional directo y transmisivo (Mayer, 2004; Boghossian, 2006). Desde la didáctica de las ciencias, Zhang (2016) explica que la tensión entre estas dos posiciones instruccionales no está en si una u otra es participativa y resulta más o menos guía o apoyo a los estudiantes, sino en si presentan explícitamente las soluciones a los aprendices o dejan que ellos las descubran.

La TSDM asume una teoría constructivista-piagetiana para el aprendizaje matemático y un enfoque positivista-experimental para la didáctica de las matemáticas. Como teoría, su objetivo es identificar y describir «fenómenos didácticos»; como tecnología, cómo construir situaciones de enseñanza que «necesariamente» produzcan los aprendizajes pretendidos.

En este trabajo se analizan las características de la TSDM como una teoría que valora como positivos, y en cierto modo necesarios, determinados principios sobre las matemáticas, su aprendizaje y los comportamientos del profesor, los alumnos y las interacciones con los recursos didácticos. En particular, se examinan los postulados de tipo constructivista piagetianos que asume la TSDM sobre el aprendizaje autónomo del sujeto mediante la interacción con un medio antagonista. Asimismo, se analiza la importancia radical que esta teoría confiere a la implementación y gestión de situaciones *adidácticas* para la adquisición de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos complejos. De hecho, se conciben estas situaciones adidácticas como la herramienta que posibilita la producción autónoma de conocimientos por los propios estudiantes.

Desde el punto de vista del EOS se analiza, en particular, la necesidad defendida por la TSDM de abordar los momentos «críticos del aprendizaje» mediante situaciones adidácticas. El EOS es un marco teórico estrechamente conectado en sus orígenes con la TSDM y otras teorías de la didáctica francesa (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006), pero que se inscribe dentro del paradigma de las aproximaciones socioculturales en educación matemática (Lerman, 2001; Radford, 2008). Los tipos de objetos y procesos que propone el EOS, su naturaleza y función en la realización de las prácticas matemáticas, permiten revelar una cierta debilidad ontológica y semiótica en la TSDM y, en general, en los modelos didácticos constructivistas, para la descripción, análisis y diseño de procesos educativos en ciencias y matemáticas.

Este artículo aborda un problema de diálogo entre dos marcos teóricos usados en educación matemática, al tratar de clarificar y articular algunos supuestos básicos de la TSDM y del EOS. Se inscribe, por lo tanto, dentro del campo de investigación de articulación de teorías (*networking theories*), que está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014).

Se usará la proporcionalidad para contextualizar la discusión, ya que ambos marcos teóricos han realizado investigaciones sobre dicho tema. En el apartado 2 se presenta una síntesis de los supuestos básicos de la TSDM y, en particular, del papel central que se asigna a las llamadas situaciones adidácticas; se describe también la situación didáctica sobre proporcionalidad conocida como «El puzle» y el papel que se asigna al profesor. En el apartado 3 se resume la controversia entre las posiciones objetivistas y constructivistas en el aprendizaje de conocimientos científicos, interpretada también como la tensión entre modelos didácticos transmisivos, centrados en el docente, e indagativos, centrados en el estudiante. Así, abordar el dilema entre indagación y transmisión en el aprendizaje matemático es el objetivo central del artículo, desarrollado en las siguientes secciones.

En la sección 4 se describe la posición del EOS sobre la naturaleza compleja y ontosemiótica del conocimiento matemático y se argumenta a favor de un modelo didáctico dialógico-colaborativo, que compagina la transmisión contextualizada de información con la participación del estudiante en los procesos de resolución de situaciones-problema. Asimismo, a partir de la situación de ampliación del puzle, se razona la necesidad de atribuir al profesor roles más protagonistas en el aprendizaje de los estudiantes que los atribuidos por la TSDM. En la sección 5 se describen las características del modelo didáctico dialógico-colaborativo, en coherencia con los supuestos socioculturales del aprendizaje y con el reconocimiento de la complejidad ontosemiótica de los objetos matemáticos, como alternativa al modelo constructivista piagetiano postulado por la TSDM. El trabajo concluye con algunas observaciones finales que sintetizan la mirada crítica del EOS sobre el presupuesto básico de la TSDM acerca del papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático.

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

La TSDM propone un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones. Los aspectos metodológicos de este programa son descritos como *ingeniería didáctica* (Artigue, 2011).

Supuestos básicos

La hipótesis básica de la TSDM es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación. De esta forma, creando ciertas restricciones artificiales, el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. La teoría del aprendizaje que asume la TSDM es constructivista, dado que se interesa en determinar cómo los sujetos construyen y comunican los saberes matemáticos en la resolución de problemas. Los problemas se deben seleccionar de modo que permitan optimizar la dimensión adaptativa del aprendizaje y la autonomía de los estudiantes.

La TSDM asume un fuerte compromiso con la epistemología matemática, como se pone de manifiesto en el significado atribuido a la noción de *situación fundamental*: «una situación que muestra con claridad la razón de ser del conocimiento matemático pretendido» (Artigue y Blomhoj, 2013, p. 803). En estas situaciones fundamentales, se da una circunstancia paradójica; a saber: debe poder ser planteada a los sujetos sin apelar al conocimiento, que es a la vez su razón de ser y objetivo de aprendizaje.

Papel de las situaciones adidácticas

Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento. Las situaciones son específicas de los conocimientos. Para que el alumno construya el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que el alumno ha asumido la responsabilidad matemática en la asunción de la tarea y el profesor ha logrado devolverla.

En las *situaciones adidácticas*, las interacciones entre alumno y medio se describen como una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno. Esta producción es independiente de la intervención explícita del docente en tanto que *detentador del saber*. Así, el sujeto entra en interacción con una situación-problema, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones (retroacciones del medio).

> Hace falta pues que estos estudiantes encuentren condiciones que les provoquen construir una concepción, un «conocimiento» adecuado y original. Además otras condiciones podrán precisar una denominación «nativa», otras finalmente crearán la necesidad de producir pruebas efectivamente convincentes, luego formales… Vendrá entonces el momento de canonizar formalmente estas improvisaciones. Cada decisión o acción del alumno, en estas condiciones, puede ser considerada como «adidáctica», es decir, producida sin haber sido enseñada previa y directamente por un texto o un discurso del profesor. La intención didáctica se expresa por la elección de situaciones, por el respeto de la fase adidáctica y finalmente por la reformulación canónica y la confirmación del valor del saber así establecido (Brousseau, 2016, s. p.).

El concepto de *medio* incluye tanto una situación-problema matemática inicial a la que el sujeto se enfrenta, como un conjunto de relaciones didácticas, por lo tanto, esencialmente relacionadas con las matemáticas. Estas relaciones se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia el medio sobre el que interactúa.

Brousseau identificó varios tipos de situaciones o momentos didácticos que determinan un esquema general de una *secuencia didáctica* para la génesis artificial de un concepto matemático o para dotarlo de sentido:

– Situaciones de *acción*, donde los estudiantes hacen sus primeros intentos para resolver un problema propuesto por el profesor.
– Situaciones de *formulación*, donde los estudiantes enuncian los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor.
– Situaciones de *validación*, donde se deben usar argumentaciones teóricas antes que empíricas.

Dentro de cada una de estas situaciones hay un componente adidáctico, esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en los estudiantes. Se considera que esta parte es esencial para la construcción y comunicación de nuevos conocimientos. Por ello, la función docente principal en estas situaciones es la *devolución*, es decir, el acto por el cual el profesor establece las condiciones para que los estudiantes hagan suya la producción de los nuevos conocimientos. En este sentido, el medio didáctico incluye al docente como gestor del proceso de estudio, no como mero productor o comunicador del saber. En particular, el profesor gestiona momentos de conflicto cognitivo mediante la manipulación consciente e intencional de las *variables didácticas*, con la intención de modificar la estrategia de resolución de los estudiantes y posibilitar el progreso en el conocimiento.

A estos tres tipos de situaciones que tienen un carácter adidáctico (acción, formulación y validación) se añaden las situaciones de *institucionalización*. En ellas los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidos y la atención se centra sobre los hechos *importantes*, los procedimientos, las ideas y la terminología *oficial*. A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección, por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas y los procedimientos aceptados.

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones está fundamentado en la premisa de que todo saber puede ser modelizado por una o varias *situaciones fundamentales*. Así, como didáctica técnica, su objetivo sería la elaboración de un cierto número de situaciones fundamentales relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que permitieran la introducción o dotación de sentido a dichos conceptos.

La situación de ampliación del puzle

La siguiente situación-problema, desarrollada, experimentada y analizada por Brousseau (1997), permite describir bien los elementos centrales de la TSDM. Se pone en juego el concepto de proporcionalidad.

El profesor muestra a los alumnos un puzle cuadrado de 11 cm de lado que permite realizar distintas configuraciones (figura 1). Da las siguientes consignas:

- Debéis recortar en una cartulina un puzle parecido a este (el modelo). Pero lo tenéis que hacer más grande para los niños del parvulario. Este lado, que mide 4 cm en el modelo, deberá medir 7 cm en la reproducción. Pero hay que poder hacer las mismas figuras con el puzle grande que con el modelo.
- Para realizar el puzle grande os dividiréis por grupos. Cada grupo hará una única pieza y las juntaremos todas al final para que encajen.

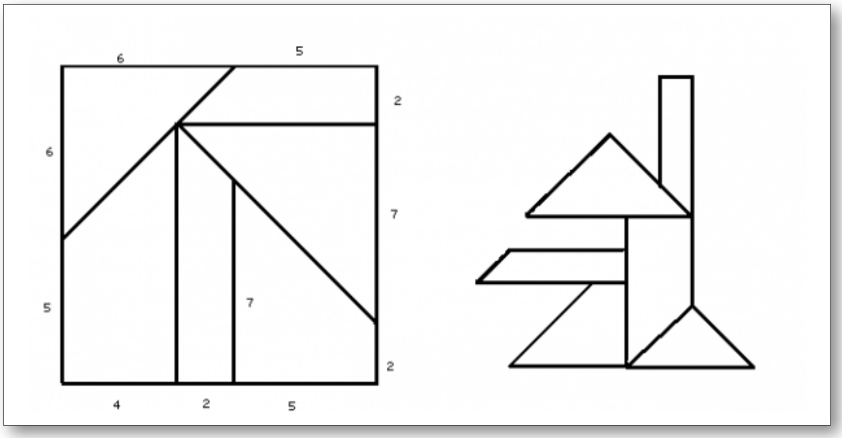

Fig. 1. Situación del puzle.

Brousseau (2004) describe de forma detallada el diseño y la gestión de la situación, así como las condiciones que debe cumplir esta, de la siguiente manera:

a) El conocimiento matemático que se desea obtener debe ser el único medio para resolver el problema.
b) La indicación dada a los alumnos no debe utilizar ninguno de los conocimientos que se quiere que aparezcan. Dicha consigna determina las decisiones permitidas y las situaciones iniciales y finales que conducen a *ganar* o a *perder*.
c) Los alumnos deben poder empezar a actuar con *conocimientos de base* que necesariamente se revelarán inadecuados.
d) Pueden constatar ellos mismos el éxito o fracaso de sus intentos.
e) Sin determinar la solución, estas constataciones son sugerentes, en el sentido de que favorecen las hipótesis, aportan informaciones apropiadas, ni demasiado abiertas ni muy cerradas.
f) Los alumnos pueden rápidamente hacer intentos sucesivos, pero se debe favorecer la anticipación.
g) Entre las soluciones empíricamente aceptables, solo una puede responder a todas las objeciones.

h) Algunos alumnos deben ser capaces de hallar y demostrar la solución en un tiempo razonable en una clase normal y poderla compartir y hacerla comprobar por los demás alumnos.
i) La solución debe prestarse a nuevas utilizaciones y debe provocar el planteamiento de preguntas que vuelven a lanzar el proceso (por ejemplo: ¿todas las ampliaciones del puzle se hacen así?).

Estas características son las que aseguran al alumno una máxima autonomía, lo cual caracteriza a las situaciones adidácticas. El objetivo es hallar, para cada conocimiento –de aquí la proporcionalidad–, situaciones que cumplan el máximo número posible de las condiciones citadas. La situación del puzle es una de las que satisfacen esta lista.

Brousseau aclara que la mayoría de estas situaciones no son modelos para reproducir en clase. Las preguntas, ejercicios, problemas clásicos, etc., aparecen como casos particulares de situaciones, deducidas y simplificadas por razones de *economía* que las hacen más prácticas. Los modelos de situaciones permiten por consiguiente analizar los efectos de estas economías sistemáticas.

Papel del profesor en la TSDM

Como se ha dicho anteriormente, la TSDM sostiene la tesis según la cual en los momentos críticos del aprendizaje se requieren *condiciones adidácticas* que permitan conducir el aprendizaje al saber previsto en los programas (Brousseau, 2016). Así, se precisa que en estos momentos el conocimiento se adquiera por adaptación a un medio antagonista, donde la intervención del docente se limita al control de aula y a actos de devolución previstos para el control del sistema didáctico y la gestión de su funcionamiento. De esta forma, el docente tiene un papel esencial en los momentos de planteamiento y diseño previos a la puesta en marcha de la situación en aula, en los de devolución del problema a los alumnos y en los de institucionalización, una vez que los alumnos hayan tenido la oportunidad de expresar y validar los conocimientos producidos.

Desde los presupuestos sobre el aprendizaje de las teorías socioculturales (Lerman, 2001; Radford, 2008), esta posición del profesor en la TSDM no deja de ser conflictiva. La enseñanza, en tanto proceso de enculturación, plantea la necesidad de conceptualizar teóricamente de manera diferente las interacciones entre el docente, representante del saber cultural, y los alumnos, quienes constituyen con el docente un espacio social de producción de conocimientos.

La consideración de la devolución y la institucionalización como procesos que pueden tener lugar a lo largo del desarrollo de la situación adidáctica parece esencial para resolver los dilemas que plantea la TSDM en la enseñanza en las clases reales. Perrin-Glorian (1993) ya lo anticipó cuando afirmó que

> la institucionalización de los conocimientos comienza para nosotros desde el momento mismo de la devolución, porque ya ahí es necesario que el profesor dé al alumno, si no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; en ese sentido, los procesos de devolución y de institucionalización se imbrican y son, en cierta medida, coexistentes en el tiempo (p. 83).

En publicaciones posteriores de autores que aplican la TSDM encontramos desarrollos que proponen un papel más complejo del profesor en la gestión de las situaciones didácticas. Tal es el caso de Bloch (1999) y Comin (2000), entre otros autores.

Bloch (1999) aborda el problema del papel del profesor en una situación didáctica y las herramientas de las cuales dispone para gestionar la situación. En este artículo esboza un modelo que se apoya en los trabajos sobre el *medio* y las investigaciones sobre *conocimientos y saberes* en la transposición didáctica, poniendo el acento en la actividad matemática conjunta del profesor y el alumno. Aplica su modelo para analizar una sesión de enseñanza de la noción de función con estudiantes del Bachillerato científico. El trabajo de Bloch se sitúa claramente en el cuadro de la TSDM, pero trata de desarrollar esta teoría en una dirección que considera fructífera para el estudio de la contingencia: intenta identificar mejor la función docente en relación con los conocimientos que precisa para gestionar una situación de enseñanza/aprendizaje, incluso en los momentos adidácticos.

En la tesis doctoral de Comin (2000), dirigida por G. Brousseau, se incluye la descripción y el análisis de una propuesta de enseñanza sobre proporcionalidad con niños de CM1 (niños de 9-10 años), en la que se desea que a largo plazo aparezca la función lineal como una abstracción que resume y refleja las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes y se ponga en juego la dialéctica entre las nociones de variable, función y número. Para la elaboración de la unidad «granos y ratones» se realiza el análisis matemático de los objetos que constituyen el entorno de la proporcionalidad (magnitudes, cantidades, razones, proporciones) y que entran progresivamente en el repertorio de los alumnos según una complejidad creciente de su estructura.

En las reflexiones que incorpora Comin tras la experimentación se incluyen ideas que, desde nuestro punto de vista, implican una evolución en el papel asignado a los procesos de institucionalización. La «estructuración del medio» jugó un papel importante en la elaboración de las situaciones, pero también en la interpretación de los fenómenos observados. «La institucionalización aparece como un proceso complejo que no se puede reducir a una sucesión de "fases institucionalizantes" limitadas en el tiempo» (Comin, 2000, p. 8).

En estos trabajos y otros publicados en la década de los noventa, se aprecia pues cierta evolución en la forma en que los procesos de institucionalización y su relación con la dimensión adidáctica son valorados por la TSDM. Así, se percibe una suerte de cambio: una TSDM-1, ligada a Brousseau (1986), cuyas situaciones adidácticas constituyen un postulado central, y una TSDM-2, ligada a los trabajos mencionados, cuya dimensión adidáctica se modula y articula con la dimensión institucional, no solo a nivel macro sino también a nivel microdidáctico, esto es, en la gestión del contrato didáctico en el aula.

Este cambio de perspectiva supone de facto la aceptación de que en la gestión del proceso de estudio se requieren momentos de intervención por parte del docente con relación al saber explícito. Estos momentos no siguen pues los principios constructivistas. En la siguiente sección se aborda la relación entre el objetivismo y el constructivismo, que permite anticipar la necesidad de una perspectiva mixta que contemple la complejidad ontológica y semiótica de conocimiento matemático.

OBJETIVISMO *VERSUS* CONSTRUCTIVISMO

La TSDM, en su primera formulación (Brousseau, 1986), de forma clara se inscribe dentro de la familia de teorías constructivistas denominadas *Inquiry-Based Education*, *Inquiry-Based Learning* y *Problem-Based Learning*, las cuales postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor (Artigue y Blomhøj, 2013). Estas distintas variedades de constructivismo comparten, entre otros, los supuestos de que el aprendizaje es un proceso activo y que, por lo tanto, el conocimiento es construido, en lugar de adquirido de forma innata o pasiva. Así, para lograr un aprendizaje efectivo es necesario plantear a los estudiantes problemas significativos, abiertos y desafiantes (Fox, 2001).

Existen posturas contrapuestas al constructivismo, como es el caso de Mayer (2004), Kirschner, Sweller y Clark (2006), entre otros, que justifican mediante una extensa gama de investigaciones la mayor efectividad de modelos instruccionales en los cuales se atribuye al profesor, y a la transmisión de conocimientos, un papel predominante. Estas posturas se relacionan ya con posturas filosóficas objetivistas (Jonassen, 1991), ya con la instrucción directa o la pedagogía basada en lecciones (Boghossian, 2006).

Sweller, Kirschner y Clark (2007) afirman que la investigación empírica del último medio siglo sobre este problema proporciona una abrumadora y clara evidencia de que una mínima guía durante la instrucción es significativamente menos efectiva y eficiente que una guía específicamente diseñada para apoyar el procesamiento cognitivo necesario para el aprendizaje. Resultados similares se reflejan en el metaanálisis realizado por Alfieri, Brooks, Aldrich y Tenenbaum (2011).

Se pueden aportar varios tipos de razones a favor de aplicar un modelo didáctico basado en la transmisión de conocimientos (objetivismo) frente a los modelos basados en la construcción autónoma (constructivismo). Kirschner et al. (2006) aportan razones cognitivas a favor de un modelo didáctico objetivista/transmisivo:

> Tenemos destreza en un área porque nuestra memoria a largo plazo contiene cantidades enormes de información relativa al área. Esa información nos permite reconocer rápidamente las características de una situación y nos indica, a menudo inconscientemente, qué hacer y cuándo hacerlo (Kirschner et al., 2006, p. 76).

Harris (2012) considera que la metáfora del niño como científico natural, tan duradera y poderosa, es útil cuando se usa para describir cómo los niños dan sentido a las regularidades universales del mundo natural, regularidades que ellos pueden observar por sí mismos, sin importar cuál sea su entorno cultural. Sin embargo, la metáfora es engañosa si se utiliza para explicar de forma comprehensiva y global el desarrollo cognitivo. Los niños nacen en un mundo cultural que media sus encuentros con el mundo físico y biológico. Para acceder a dicho mundo cultural, los niños necesitan un modo de aprendizaje orientado socialmente (aprendizaje mediante la *observación participante*). «El dominio de regularidades normativas requiere aprendizaje cultural» (Harris, 2012, p. 269).

Los presupuestos ontosemióticos, epistemológicos y cognitivos del EOS (Godino et al., 2007) sirven de base para una propuesta educativo-instruccional. Esta propuesta reconoce un papel clave a la transmisión (contextualizada y significativa para el estudiante) de conocimientos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de tener en cuenta la naturaleza cultural/regulativa de los objetos matemáticos implicados en las prácticas matemáticas cuya realización competente por los alumnos se pretende. Esta competencia no se puede entender adquirida si carece de sentido para los estudiantes y, por lo tanto, se requiere que sea inteligible y significativa para ellos. Así, los estudiantes deben ser capaces de utilizar los objetos matemáticos en contextos propios con autonomía. Pero, según el EOS, debido a la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático, esta autonomía no se debe adquirir necesariamente en la génesis del objeto o en la determinación de un sentido a él atribuido; por ejemplo, se puede alcanzar en una práctica matemática de aplicación.

COMPLEJIDAD ONTOSEMIÓTICA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

El cómo se aprende algo depende de qué se tenga que aprender. Según el EOS el estudiante se debe apropiar de las prácticas matemáticas institucionales y de los objetos y procesos implicados en la resolución de las situaciones-problemas cuyo aprendizaje se pretende.

En un proceso de instrucción, la realización por el alumno de las prácticas matemáticas ligadas a la solución de ciertas tareas problemáticas, operativas y discursivas pone en juego un conglomerado de objetos y procesos cuya naturaleza, desde el punto de vista institucional, es esencialmente normativa (regulativa) (Font, Godino y Gallardo, 2013). En la ontología matemática del EOS, en consonancia con la filosofía de la matemática de Wittgenstein (Bloor, 1983; Wittgenstein, 1953, 1987), los conceptos, las proposiciones y los procedimientos son concebidos como reglas gramaticales de los lenguajes que se usan para describir nuestros mundos. No describen propiedades de unos objetos que tengan algún tipo de existencia independiente de las personas que los construyen o inventan, ni de los lenguajes mediante los cuales se expresan. Desde esta perspectiva, la verdad o necesidad matemática no es más que estar de acuerdo con el resultado de seguir una regla que forma parte de un juego de lenguaje que se pone en funcionamiento en determinadas prácticas sociales. No es un acuerdo de opiniones arbitrarias, es un acuerdo de prácticas sometidas a reglas.

La realización de las prácticas matemáticas supone la intervención de objetos previos para comprender las demandas de la situación-problema y poder implementar una estrategia de partida. Tales objetos, sus reglas y condiciones de aplicación, deben estar disponibles en la memoria de trabajo del sujeto. Aunque sea posible buscar tales conocimientos por uno mismo en el espacio de trabajo, no siempre hay suficiente tiempo o el alumno no lo logra; por ello, el profesor y los compañeros pueden prestar un apoyo inestimable para evitar la frustración y el abandono.

La progresión en el aprendizaje tiene lugar a medida que el sujeto se apropia de los diversos significados, y reconoce y comprende la trama de objetos implicados en estos. La noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos, introducida en el EOS (Font et al., 2013), es una herramienta que permite realizar análisis microscópicos de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal, lo que revela la complejidad del conocimiento y su naturaleza regulativa. Estudios sobre la complejidad sistémica de los objetos matemáticos aplicando herramientas del EOS han sido realizados por, entre otros autores, Rondero y Font (2015) y Monje, Seckel y Breda (2018).

A continuación, ejemplificamos el uso de la herramienta ontosemiótica para el caso del objeto matemático *proporcionalidad*, contextualizado con el ejemplo de la tarea de ampliación del puzle (sección 2.3). Se pretende revelar la complejidad del aprendizaje de este objeto matemático, poniendo en discusión la pertinencia de abordar dicho aprendizaje de forma global mediante un modelo didáctico constructivista, o con un modelo basado en la transmisión de información descontextualizada y carente de significado para el estudiante.

En la figura 2 mostramos una síntesis de los significados de la proporcionalidad haciendo referencia al nivel educativo en el que usualmente se aborda su estudio y el *nivel de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015) que se pone en juego en estos.

Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2012; Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985).

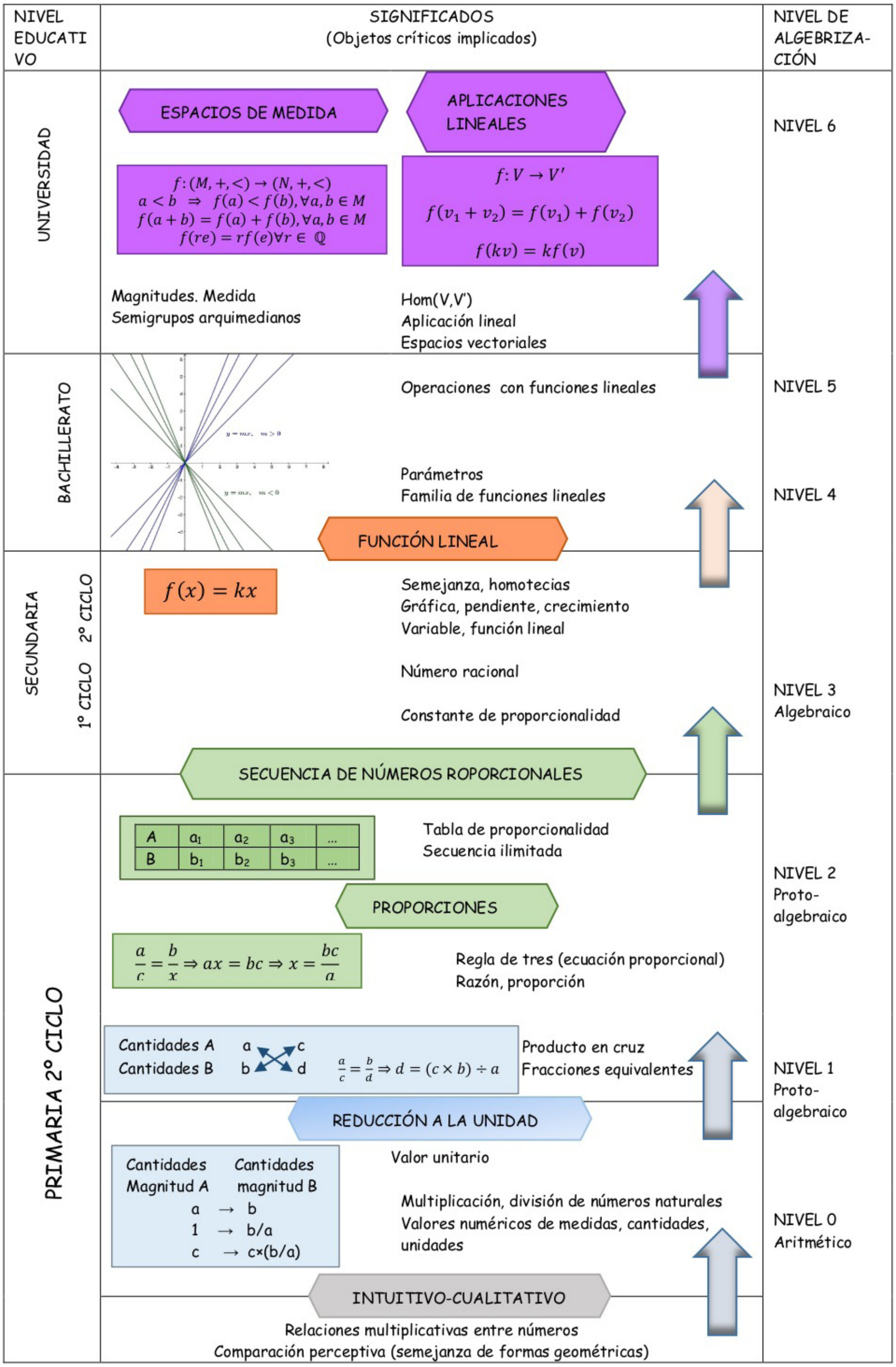

Fig. 2. Universo de significados de la proporcionalidad.

En la situación de ampliación del puzle, el profesor trata de que los niños lleguen, a través de ensayos y discusiones que duran varios días, a la siguiente solución aritmética, que involucra el significado de la proporcionalidad ligado al método de reducción a la unidad:

Distancia en el modelo → Distancia en el puzle

4 → 7
1 → 7/4 = 1,75
5 → 1,75 × 5 = 8,75
6 → 1,75 × 6 = 10,50
7 → 1,75 × 7 = 12,25
9 → 1,75 × 9 = 15,75

El estudio de la proporcionalidad deberá proseguir en otros momentos hasta que los alumnos comprendan la generalización del procedimiento para magnitudes y cantidades diferentes:

Cantidad de magnitud A → Cantidad de magnitud B

$$a \to b$$
$$1 \to \frac{b}{a}$$
$$x \to \frac{b}{a}x$$

El procedimiento aritmético debe evolucionar hacia un procedimiento algebraico-funcional si se desea avanzar en la capacitación matemática de los estudiantes.

Ahora mostraremos una posible solución algebraico-funcional experta para el problema del puzle que involucra el nivel 3 de algebrización según el modelo de Godino et al. (2015).

Pretendemos construir un puzle igual que el de la figura, pero de mayor tamaño. Es decir, si un segmento en el modelo es unión de otros dos, en el puzle el segmento asociado también será la unión de los correspondientes en la figura. Además, si la longitud de un segmento s en la figura se multiplica por un número, la longitud del segmento S correspondiente a s quedará multiplicada por el mismo número.

Por lo tanto, la correspondencia que se establece entre las distancias de los segmentos en el modelo (M) y las distancias de los segmentos en el puzle real (P), $f: F \to P$, es lineal, $f(x) = kx$.

El coeficiente k de la función lineal es la constante de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.

Aplicando las propiedades de la función lineal: $k = k \cdot 1 = f(1)$, y en nuestro caso:

$$f(4) = 7;\ 4f(1) = 7;\ f(1) = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

La longitud en el puzle de cartulina de un segmento de longitud x en el modelo será, por tanto, $f(x) = 1{,}75x\ cm$.

Esta secuencia de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la solución algebraico-funcional involucra una trama de objetos matemáticos (tabla 1) cuya naturaleza es esencialmente regulativa y que son el resultado de un dilatado proceso de elaboración en el seno de la comunidad de prácticas matemáticas.

Tabla 1.
Objetos matemáticos implicados en la solución algebraico-funcional de la situación del puzle

Tipos de objetos	*Objetos*
Lenguajes	– *Simbólico*: función como correspondencia entre dos conjuntos numéricos ($f: F \to P$); valor de una función *f* en un punto *x* (*f*(*x*)); función lineal de constante de proporcionalidad *k* ($f(x) = kx$). – *Numérico*: fracciones, decimales. – *Natural-matemático*: función lineal, coeficiente, segmento, distancia, multiplicación, unión, proporcionalidad directa, magnitud.
Conceptos	– Magnitud; cantidad; medida; valor numérico de las medidas; suma de cantidades, producto por un escalar. – Secuencia ilimitada de cantidades y números; correspondencia funcional; proporcionalidad directa; tanto por uno; coeficiente de proporcionalidad.
Procedimientos	– Traducción de expresiones del lenguaje natural al simbólico. – Cálculo del coeficiente de proporcionalidad basado en las condiciones de definición de la función lineal. – Cálculo del valor faltante basado en las condiciones de definición de la función lineal.
Proposiciones	– La correspondencia $f: M \to P$ es aditiva y homogénea.
Argumentos	– Convenciones pragmáticas. – Reconocimiento de las propiedades de una función lineal.

No parece pertinente pretender que el estudiante reconstruya de manera autónoma esta trama de conocimientos que la cultura matemática ha ido decantando como adecuados para dar respuesta ante las situaciones de proporcionalidad. Tampoco se puede considerar pertinente la aplicación de un modelo basado en la presentación de las definiciones de los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos sin que esa información tenga significado para los estudiantes.

MODELO DIDÁCTICO DIALÓGICO-COLABORATIVO

Como hemos mencionado en la sección anterior, los problemas ontológicos y semióticos sobre la naturaleza del conocimiento matemático son centrales en el EOS, al considerarlos determinantes del problema educativo-instruccional, esto es, el relativo a la enseñanza y al aprendizaje.

En Godino, Contreras y Font (2006) se desarrollan algunas herramientas teóricas para el análisis de los procesos de instrucción matemática teniendo en cuenta el modelo ontosemiótico previamente desarrollado. En particular, las nociones de *configuración didáctica* e *idoneidad didáctica* sirven de base para definir un modelo didáctico mixto que articula la indagación y la transmisión de conocimientos según describimos en esta sección.

Una configuración didáctica es cualquier segmento de actividad matemática en un proceso de enseñanza y aprendizaje que queda comprendido entre el inicio y el final de una tarea (situación-problema). Así, cada segmento incluye tanto las acciones de los estudiantes y del profesor como los medios usados para abordar la tarea. La secuencia de configuraciones didácticas constituye una *trayectoria didáctica*. Por su parte, la idoneidad didáctica se define como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y los recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino et al., 2007).

En el EOS se asume que el aprendizaje de un objeto matemático O (contenido de enseñanza) consiste en la apropiación por parte del sujeto de las prácticas institucionales. Estas prácticas son entendidas como el resultado del proceso histórico de generación de los diversos significados del objeto que se han establecido como pertinentes para resolver una clase de situaciones-problemas en las que el objeto O tiene una función esencial. Esa apropiación tiene lugar mediante la participación en dichas prácticas institucionales, las cuales son actualizadas por el profesor como experto representante de la institución. El alumno no aprende de manera autónoma, adaptándose a un medio antagonista adidáctico, sino participando con el profesor y otros aprendices en la *labor conjunta* que es necesario realizar, apoyada en unos instrumentos dados por la cultura, para responder a determinadas cuestiones de índole matemática (figura 3).

Desde un modelo didáctico dialógico-colaborativo en el que docente y estudiantes trabajan juntos en la solución de problemas que ponen en juego un conocimiento O de manera crítica, el primer encuentro debería apoyarse en una intervención experta del docente. El proceso de enseñanza-aprendizaje podría lograr de este modo mayor idoneidad epistémica y ecológica (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Cuando las reglas y las circunstancias de aplicación que caracterizan O sean comprendidas, se puede tender hacia niveles mayores de idoneidad cognitiva y afectiva proponiendo profundizar en el estudio de O (situaciones de ejercitación y aplicación) mediante configuraciones didácticas que atribuyan progresivamente y de forma controlada mayor autonomía al estudiante. Burgos y Godino (2018) describen una experiencia de enseñanza con alumnos de 5.º curso de Educación Primaria siguiendo este modelo didáctico, con el objetivo de crearles un primer encuentro con los problemas de proporcionalidad directa.

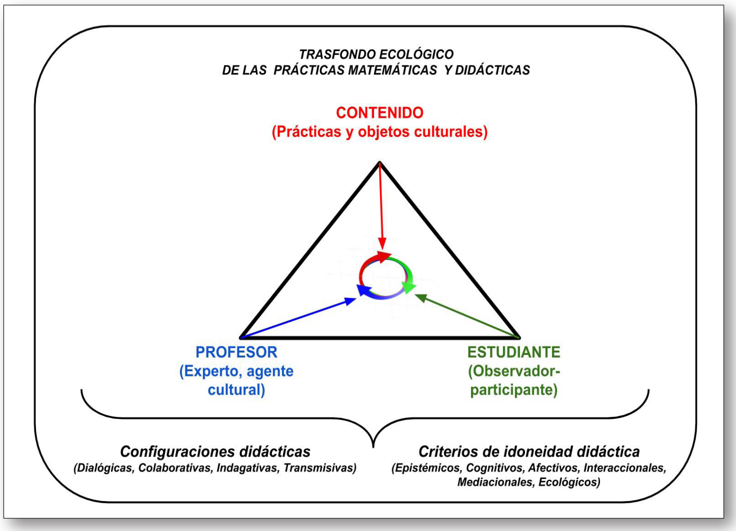

Fig. 3. Modelo didáctico dialógico-colaborativo.

El profesor de matemáticas es un experto que debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, tanto los informales como los formales, y sus interconexiones. Pero incluso para cada significado parcial del objeto y la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan es necesario que el profesor conozca la trama de objetos y procesos implicados, con el fin de gestionar los necesarios momentos de transmisión contextualizada de conocimientos, comprender la progresión de los aprendizajes y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

La herramienta configuración didáctica ayuda a comprender la dinámica y complejidad de las interacciones entre el contenido, el docente, los discentes y el medio. La optimización del aprendizaje puede tener lugar localmente mediante un modelo mixto que articula la transmisión de conocimientos, la indagación y la colaboración, modelo gestionado mediante criterios de idoneidad didáctica (Godino et al., 2007; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) interpretados y adaptados al contexto por el profesor.

OBSERVACIONES FINALES

Desde las perspectivas socioculturales en educación matemática, Radford (2011) concluye que la interpretación que hace la TSDM de la adaptación como motor de la cognición aparece como insuficiente: la adaptación no puede plantearse en términos de ciertos mecanismos universales, intrínsecos al saber matemático. Dicho de otra forma, la lógica de las matemáticas es insuficiente para explicar la producción y el aprendizaje de estas. El pensamiento matemático está siempre enmarcado por la racionalidad de la cultura en la que este se desarrolla, transcendiendo así la esfera de la acción matemática.

En el marco del EOS interpretamos esta insuficiencia de la adaptación en términos diferentes. La pluralidad de significados de los objetos matemáticos, ligados a distintos contextos de uso y comunidades de prácticas diversas, cada uno de dichos significados involucrando configuraciones ontosemióticas específicas, hace difícil, si no imposible, que el sujeto las pueda reconstruir de manera autónoma y adidáctica. Además, parece innecesaria tal proeza cuando el trabajo que se ha de realizar puede hacerse de manera conjunta, colaborativamente, compartiendo recursos instrumentales y cognitivos disponibles en la comunidad de prácticas. La autonomía y la creatividad en la solución de problemas pueden constituir un objetivo alcanzable progresivamente, aunque ese privilegio puede que esté reservado a una minoría.

En este trabajo hemos complementado los argumentos cognitivos de Kirschner, Sweller y Clark (2006) a favor de modelos basados en la transmisión de conocimientos, para el caso del aprendizaje matemático, con razones de índole ontosemiótica, sobre todo en los momentos de «primer encuentro» del estudiante con el contenido pretendido: lo que tienen que aprender los estudiantes son, en una gran dosis, reglas epistémicas/culturales, las circunstancias de su aplicación y las condiciones requeridas para una aplicación pertinente. El aprendiz parte de reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos) conocidas y produce otras que deben ser compartidas y compatibles con las ya establecidas en la cultura matemática. Tales reglas (conocimientos) tienen que ser almacenadas en la memoria a largo plazo del sujeto y puestas a funcionar en el momento oportuno en la memoria a corto plazo.

Reconocemos que las situaciones adidácticas no excluyen las interacciones entre pares en los momentos exploratorios, y sobre todo en las situaciones de comunicación y validación, incorporando de este modo aspectos claves de teorías socioculturales del aprendizaje. Nuestra posición crítica se refiere básicamente al papel asignado al profesor en dichas situaciones cuando los estudiantes tienen su primer encuentro con los nuevos conocimientos.

La enseñanza de las matemáticas debe partir y centrarse en el uso de situaciones-problemas como una estrategia para dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas y para propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos, es decir, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Font et al., 2013) que deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos han de ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia matemática.

RECONOCIMIENTOS

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfieri, L., Brooks P. J., Aldrich, N. J. y Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 1-18. https://doi.org/10.1037/a0021017

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM. Mathematics Education*, *45*, 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Berlín: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 135-194.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. Londres: The Macmillan Press. https://doi.org/10.1007/978-1-349-17273-3_5

Boghossian, P. (2006). Behaviorism, constructivism, and Socratic pedagogy. *Educational Philosophy and Theory*, *38*(6), 713-722. https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2006.00226.x

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Brousseau, G. (2004). Investigaciones en educación matemática. https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/brusseau-investigaciones-matemc3a1ticas.pdf

Brousseau, G. (2016). Petite histoire du concept «adidactique». http://guy-brousseau.com/3326/rp-2016-4-petite-histoire-du-concept-adidactique/

Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema*, *33*(63), 389-410. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Histoire et perspectives sur les mathématiques* [math.HO]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Fox, R. (2001). Constructivism examined. *Oxford Review of Education*, *27*(1), 23-35. https://doi.org/10.1080/03054980125310

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-x

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Harris, P. L. (2012). The child as anthropologist. *Infancia y Aprendizaje*, *35*(3), 259-277. https://doi.org/10.1174/021037012802238920

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? *Educacional Technology Research & Development*, *39*(3), 5-14. https://doi.org/10.1007/bf02296434

Kirschner P. A., Sweller J. y Clark R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, *41*(2), 75-86. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 87-113. https://doi.org/10.1023/a:1014031004832

Mayer R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, *59*(1), 14-19. https://doi.org/10.1037/0003-066x.59.1.14

Monje, Y., Seckel, M. J. y Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el curriculum y textos escolares chilenos. *Bolema*, *32*(61), 480-502. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a09

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions Didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes «faibles», *Recherches en Didactique des mathématiques*, *13* (1.2), 5-118.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. https://www.researchgate.net/publication/253274896

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez y R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent. Intervenció, innovació, investigació* (pp. 33-49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Sweller J., Kirschner P. A. y Clark R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, *42*(2), 115-121. https://doi.org/10.1080/00461520701263426

Tournaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204. https://doi.org/10.1007/bf02400937

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Obtenido de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. Nueva York: The MacMillan Company. https://doi.org/10.4324/9781912282036

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Zhang, L. (2016). Is inquiry-based science teaching worth the effort? Some thoughts worth considering. *Science Education*, *25*, 897-915. https://doi.org/10.1007/s11191-016-9856-0

The role of adidactical situations in mathematical learning. A critical view from the onto-semiotic approach

Juan D. Godino, María Burgos
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Granada, España
jgodino@ugr.es, mariaburgos@ugr.es

Miguel R. Wilhelmi
Departamento de Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. Pamplona, España
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

In this paper we analyze the main characteristics of the didactic situations theory in mathematics (DSTM), which is a framework that values some principles about mathematics, its learning, the behaviors of teachers, students and their interactions as positive, and in some way, necessary. In particular, the DSTM assumes Piagetian constructivism postulates about the subject's autonomous learning through interaction with an antagonistic *milieu*, which are here examined. Likewise, the importance of the implementation and management of *adidactical* situations for the acquisition of notions, processes and meanings of mathematical knowledge is also analyzed. In fact, these adidactical situations are conceived as the tool that makes the students' autonomous production of knowledge possible.

Nevertheless, the relevance of constructivist approaches in the learning of scientific contents is questioned by some cognitive and sociocultural theories. Objectivist approaches suggest that the effectiveness of the instructional process is linked to teaching actions, with a direct and transmissive model, rather than to the students' own discovery. Cognitive reasons are provided in favor of knowledge transmission, such as the limitations of an individual's short-term memory as well as socio-cultural aspects that favor dialogue and collaboration in learning.

In this paper, we justify the importance of a dialogical-collaborative didactical model during the students' first encounter with new mathematical objects, in which the teacher and the students work together in the resolution of problems-situations. The justification of this mixed didactical model is based on the epistemological, ontological, semiotic and instructional assumptions of the onto-semiotic approach (OSA) to mathematical knowledge and instruction. A problem/situation involving the notion of proportionality is used to contextualize the application of the *onto-semiotic configuration* tool. By means of this tool, the complexity of the learning process is thus revealed, by discussing the pertinence of addressing the learning both through a constructivist didactic model and a model based on the transmission of decontextualized and meaningless information to the student.

Consequently, a dialogical-collaborative didactical model is here proposed in which teachers and students work together to solve problems that put some specific knowledge O at stake in a critical way. First encounter with objects should rely on the teacher's expertise. When rules and circumstances of application that characterize objects are understood, it is possible to attain higher levels of cognitive and affective suitability, delving into the study of that object (exercise and application situations) through *didactical configurations* that make students progressively more autonomous. The OSA didactic configuration tool helps understand the dynamics and complexity of the interactions between the content, the teacher, students and the setting. The learning optimization can take place locally through a mixed didactical model that articulates the transmission of knowledge, inquiry and collaboration, a model which is managed according to the criteria of *didactical suitability* and interpreted and adapted to the learning context by the teacher.