Análisis de teorías del significado en educación matemática desde el Enfoque Ontosemiótico[1]

Analyzing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach

Juan D. Godino, María Burgos y María M. Gea
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Resumen

Las nociones de significado y sentido, estrechamente relacionadas con la comprensión, desempeñan un papel esencial en los procesos educativos en general y, por tanto, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, los términos "significado" y "sentido" se utilizan de forma desigual en la teoría del lenguaje, la semiótica, la filosofía y la psicología. Tras describir las principales características de las teorías referencial y pragmática del significado, en este artículo detallamos diversas aproximaciones a la noción de significado, y presentamos la perspectiva que sugiere el Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. Esta propuesta incorpora parcialmente los supuestos semióticos, ontológicos y epistemológicos de tres teorías semióticas generales (de Hjelmslev, Peirce y Wittgenstein), con un enfoque holístico de la noción de objeto, signo y significado, y tiene en cuenta algunas teorías referenciales y operacionales, así como otras teorías cognitivas y socioculturales, sobre el significado. También analizamos cómo se aborda el significado de los objetos matemáticos en tres modelos que tienen impacto en la educación matemática: La posición lógico-realista de Frege, la tripleta conceptual de Vergnaud y el triángulo epistemológico de Steinbring. Al comparar el EOS con estas teorías semióticas específicas, identificamos concordancias y complementariedades entre ellas. Por último, sugerimos algunas implicaciones del enfoque holístico del EOS sobre el significado para el diseño instruccional y la formación del profesorado.

Palabras clave: significado, semiótica, epistemología, educación matemática, ontosemiótica, articulación de teorías.

Abstract

The notions of meaning and sense, which are closely related to understanding, play an essential role in educational processes in general and, therefore, in the teaching and learning of mathematics. However, the terms 'meaning' and 'sense' are unevenly used in the theory of language, semiotics, philosophy and psychology. After describing the main characteristics of the referential and pragmatic theories of meaning, in this article, we detail various approaches to the notion of meaning, and present the perspective suggested by the Onto-semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction. This proposal partially incorporates the semiotic, ontological and epistemological assumptions of three general semiotic theories (by Hjelmslev, Peirce and Wittgenstein), with an holistic approach to the notion of object, sign and meaning, and takes into account some referential and operational theories, as well as other cognitive and socio-cultural theories, about meaning. We also analyse how the meaning of mathematical objects is addressed in three models that have an impact on mathematics education: Frege's logical-realist position, Vergnaud's conceptual triplet and Steinbring's epistemological triangle. In comparing the OSA with these specific semiotic theories, we identify concordances and complementarities between them. We finally suggest some implications for instructional design and teacher education of the OSA holistic approach to the meaning.
Keywords: meaning, semiotics, epistemology, mathematics education, onto-semiotics, networking theories

[1] Versión en español del artículo, Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2019). Analyzing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. The Version of Record of this manuscript has been published and is available in https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0020739X.2021.1896042

1. INTRODUCCIÓN

El término "significado", vinculado al de "comprensión", se utiliza insistentemente en la investigación y la práctica de la educación matemática, ya que es fundamental que los alumnos adquieran el significado de los términos, expresiones y representaciones matemáticas, es decir, que comprendan a qué se refiere el lenguaje matemático en sus diferentes registros. Balacheff alude al significado como palabra clave en la investigación de la enseñanza de las matemáticas: "Un problema pertenece a una problématique de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas si está específicamente relacionado con el significado matemático de los comportamientos de los alumnos en el aula de matemáticas" (Balacheff, 1990, p. 258).

Un problema fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es aclarar la naturaleza, los diferentes tipos y las funciones de los objetos matemáticos, ya que no es posible abordar la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático si antes no se adopta una posición ontológica sobre las matemáticas. Esta aclaración está estrechamente relacionada con la semiótica, ya que el uso de símbolos y todo tipo de representaciones es consustancial a las matemáticas.

La importancia de la semiosis para la educación matemática radica en el uso de los signos; este uso es omnipresente en todas las ramas de las matemáticas. No podía ser de otra manera: los objetos de las matemáticas son ideales, de carácter general, y para representarlos -a los demás y a uno mismo- y trabajar con ellos, es necesario emplear vehículos de signos, que no son los objetos matemáticos en sí mismos, sino que los representan de alguna manera (Presmeg, Radford, Roth y Kadunz, 2018, pp. 2-3).

Los términos significado y sentido se utilizan persistentemente en los documentos curriculares relacionados con la comprensión de las matemáticas. En los Principios y Estándares (NCTM, 2000), el estándar "comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan entre sí" se incluye en todos los grados desde P-K2 hasta 9-12. Está relacionado con el significado de los conceptos y las operaciones (número, numerales, fracción, signo igual, sumar, multiplicar, etc.); los significados y usos de las variables, ecuaciones, inecuaciones, relaciones; el significado de las formas equivalentes de las expresiones, la semejanza, etc. La noción de sentido también juega un papel importante en el NCTM (2000), donde se utiliza como sinónimo de significado, en expresiones como "Desarrollar el sentido de los números enteros"; "Dar sentido a las ideas matemáticas"; "Las matemáticas deben tener sentido para los estudiantes", etc.

Desde un punto de vista más general, el objetivo principal de la psicología cultural, según Bruner (1990), es el estudio de las reglas a las que los seres humanos recurren cuando crean significados en contextos culturales. "Abogué por una renovación y actualización de la revolución original, una revolución inspirada en la convicción de que el concepto central de una psicología humana es el significado y los procesos y transacciones implicados en la construcción de significados". (Bruner, 1990, p. 33). Dummett (1996) también relaciona el significado y la comprensión desde una perspectiva más general:

> "Una teoría del significado es una teoría de la comprensión; es decir, lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es qué es lo que alguien sabe cuando conoce el lenguaje, es decir, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (Dummett, 1996, p. 3).

Otra autora que considera la idea de significado fundamental para la educación matemática es Sierpinska (1990), quien, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión:

> “La comprensión del concepto se concebirá entonces como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la "estructura" del concepto (siendo la "estructura" la red de sentidos de las frases que hemos considerado). Estos significados particulares también tienen que ser captados en actos de comprensión” (Sierpinska, 1990, p. 27).

Sin embargo, el "significado" "es uno de los términos más ambiguos y controvertidos en la teoría del lenguaje" (Ullmann, 1962, p. 62). Por ejemplo, Speaks (2014, p. 1) sugiere que: "El término "teoría del significado" ha figurado, de un modo u otro, en un gran número de disputas filosóficas durante el último siglo. Por desgracia, este término también se ha utilizado para significar un gran número de cosas diferentes". En el texto clásico The meaning of meaning, Ogden y Richards (1923) recogieron nada menos que diecisiete definiciones de significado, a las que se han añadido desde entonces nuevos usos, implícitos o explícitos, aumentando así su ambigüedad. En el caso de la educación matemática, Pimm (1995) también señala la falta de claridad en el uso de los términos comprensión y significado: "Lo que entendemos por 'comprensión' y lo que queremos decir por 'significado' dista mucho de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en cualquier discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

La complejidad de la problemática lingüística semántica aumenta en el caso de las matemáticas, debido a la variedad de registros semióticos (lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, gráficos y tablas, objetos materiales, etc.) utilizados en la práctica matemática. Además, no sólo nos interesa analizar el significado de los elementos lingüísticos matemáticos, sino también el de los diversos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas que realizan las personas al resolver situaciones-problema (lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos). Dichos objetos requieren una interpretación y un uso competente por parte de los profesores e investigadores cuando se interesan por los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El problema de si es posible desarrollar una teoría del significado específica para la educación matemática sigue abierto. Esta teoría debería tener en cuenta tanto las posiciones realistas/referenciales como las pragmáticas/operacionales sobre el significado, y también servir de base para abordar los problemas epistemológicos, semióticos, cognitivos y socioculturales implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El objetivo de este trabajo es sistematizar y profundizar en las características de la teoría del significado propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para el conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007; 2019). También describimos las teorías generales del significado en lingüística, semiótica y filosofía que sirven de base al EOS, en particular las de Hjelmslev (1943), Peirce (1931-58) y Wittgenstein (1953; 1958), así como las concordancias y complementariedades con tres modelos semióticos que tienen cierta incidencia en la educación matemática, Frege (1891; 1892), Vergnaud (1982; 1990) y Steinbring (1997; 2006). De este modo, ofrecemos una primera respuesta al problema de la clarificación y comparación de las teorías semióticas utilizadas en la educación matemática.

Una teoría holística sobre el significado de los objetos matemáticos, como la que propone la EOS, permitiría un análisis detallado de la actividad matemática, al tener en cuenta la pluralidad de objetos implicados en dicha actividad, así como articular las dimensiones epistemológica, semiótica, cognitiva y sociocultural implicadas en la investigación en educación matemática.

En la sección 2, presentamos una síntesis de las teorías generales sobre el significado, con énfasis en tres autores: Hjelmslev, Peirce y Wittgenstein, seleccionados porque la perspectiva ontosemiótica del significado, presentada en la sección 3, toma nociones y supuestos básicos de estos autores. En particular, el EOS interpreta y asume la noción de función semiótica de Hjelmslev, la tríada semiótica de Peirce, la máxima pragmática, y las nociones de significado como uso, juego de lenguaje y forma de vida de Wittgenstein. En la sección 3 presentamos la teoría ontosemiótica, como una aproximación holística a las cuestiones de significado y sentido, así como a las de objeto y signo. Basándonos en una concepción antropológica (Wittgenstein) y pragmatista (Peirce) de las matemáticas, y adoptando el constructo lingüístico de función semiótica (Hjelmslev), elaboramos una ontología y una semiótica que tienen en cuenta las teorías referenciales, operacionales, cognitiva y epistémica/cultural del significado. En la sección 4 describimos tres teorías con un fuerte impacto en la educación matemática: Frege introduce una distinción clave entre sentido y referencia; Vergnaud propone una interpretación cognitiva del significado, y Steinbring enfatiza una interpretación epistemológica del mismo. El objetivo de la sección 5 es iniciar el estudio de las concordancias y complementariedades entre las teorías semióticas consideradas, mostrando el carácter integrador de la perspectiva elaborada en el EOS. Finalmente, en la sección 6 se incluye una síntesis del artículo y algunas implicaciones para la formación de profesores de matemáticas.

2. TEORÍAS DEL SIGNIFICADO

En términos generales hay dos escuelas de pensamiento que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia *analítica* o *referencial*, que intenta apresar la esencia del significado, identificando sus componentes principales, y la tendencia *operacional* o *pragmática*, que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado que por cómo opera, cómo se usan los medios de expresión y comunicación.

2.1. Teorías realistas o analíticas del significado

De acuerdo con Kutschera (1979), las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o referenciales) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales, que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. "Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34).

Una palabra se hace significativa cuando se le asigna un objeto (concepto o proposición) como su significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, consistente en designar (en virtud de unas convenciones) ciertas entidades, por ejemplo:

— El significado de un nombre propio consiste en el objeto o persona que se designa por dicho nombre (por ejemplo, *Granada*).
— Los predicados (por ejemplo, *esto es rojo*; *A es más grande que B*) designan propiedades, relaciones o, en general, atributos.
— Las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, *Madrid es una ciudad*).

Por tanto, en las teorías realistas (como las defendidas por Frege, Carnap, o que aparece en los escritos de Wittgenstein del Tractatus) las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). La función semántica de las expresiones consiste simplemente en esa relación convencional, designada como relación nominal.

2.2. Teorías operacionales o pragmáticas del significado

Las dos ideas básicas de la categoría operacional o pragmática de las teorías del significado son las siguientes:

— El significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan.
— No es posible la observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos en una investigación científica del lenguaje es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

El enfoque operacional tiene el mérito de definir el significado en términos contextuales, es decir, puramente empíricos, sin necesidad de recurrir a estados o procesos mentales vagos, intangibles y subjetivos.

Una concepción pragmática u operacional del significado es abiertamente defendida por Wittgenstein (1953) en su obra *Investigaciones filosóficas*. En su formulación, una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa no es preciso, pues, que haya algo que sea el significado de esa palabra, en el sentido de las teorías realistas.

Para algunos autores, las visiones realista y operacional del significado son irreconciliables. Sin embargo, Ullman (1962) sugiere que las teorías pragmáticas (que denomina operacionales o contextuales) son un complemento válido y necesario de las teorías realistas (que denomina referenciales):

> “El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y luego tratarlos con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados surjan de los propios contextos. Una vez completada esta fase, puede pasar con seguridad a la fase "referencial" e intentar formular el significado o los significados así identificados” (Ullmann, 1962, pp. 76-77).

Esta observación de Ullmann es fundamental y sirve de apoyo al modelo de significado propuesto por la EOS (descrito en la sección 3), donde el significado se concibe de forma pragmática, al relacionarse con las prácticas de resolución de problemas y los contextos de uso. Sin embargo, además, dichas prácticas implican palabras, símbolos y diversos tipos de representaciones que se refieren a otros objetos y sistemas; es decir, se pone en juego un significado de tipo referencial.

2.3. Semiótica y filosofía del lenguaje

Debido a que los objetos matemáticos no se pueden aprehender directamente mediante los sentidos, su estatus ontológico requiere el uso de signos, tales como símbolos y diagramas. En consecuencia, la *semiótica*, entendida como el estudio sistemático de la naturaleza, propiedades y tipos de signos, está recibiendo gran atención en la investigación en educación matemática. "La semiótica ha sido una lente teórica fructífera usada por los investigadores interesados por diversas cuestiones de educación matemática en las décadas recientes" (Presmeg, 2014, p. 539).

En nuestro caso, nos hemos interesado particularmente por la teoría del lenguaje del lingüista danés Hjelmslev (1943), al considerar que puede ser de utilidad para describir la actividad matemática y los procesos cognitivos implicados, tanto en la producción, como en la comunicación de los conocimientos matemáticos.

La descripción y análisis de los procesos de instrucción matemática requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes y los acontecimientos que tienen lugar en la interacción didáctica. Para realizar su trabajo, el investigador en didáctica dispone de los textos de planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará fundamentalmente a textos que registran la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes.

Partiendo del texto como dato, la teoría lingüística de Hjelmslev intenta mostrar el camino que lleva a una descripción auto-consecuente y exhaustiva del mismo, por medio de su análisis, cuyo principio básico es que

> "tanto el objeto sometido a examen como sus partes tienen existencia sólo en virtud de las dependencias mutuas; la totalidad del objeto sometido a examen sólo puede definirse por la suma total de dichas dependencias. Así mismo, cada una de las partes puede sólo definirse por las dependencias que le unen a otras coordinadas, al conjunto, y a sus partes del grado próximo, y por la suma de las dependencias que estas partes del grado próximo contraen entre sí" (Hjelmslev 1943, p. 23).

Una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de *función*, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. A los terminales de una función los llama *funtivos*, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros. Esta noción de función está a medio camino entre el lógico-matemático y el etimológico, más próximo en lo formal al primero, pero no idéntico a él.

> "Así podemos decir que una entidad del texto tiene ciertas funciones, y con ello pensar: primero, aproximándonos al significado lógico-matemático, que la entidad tiene dependencias con otras entidades, de tal suerte que ciertas entidades presuponen a otras; y segundo, aproximándonos al significado etimológico, que la entidad funciona de un modo definido, cumple un papel definido, toma una "posición" definida en la cadena" (Hjelmslev, 1943, p. 34).

La función de signo

Para Hjelmslev la lengua es un sistema de signos, y un signo (o expresión de signo) se caracteriza primero y principalmente por ser signo de alguna otra cosa, por lo que se le atribuye un carácter de función. "Un signo funciona, designa, denota; un signo, en contraposición a un no-signo, es el portador de una significación" (Hjelmslev, 1943, p. 43). "Toda entidad, y por tanto todo signo, se define con carácter relativo, no absoluto, y sólo por el lugar que ocupa en el contexto" (Hjelmslev, 1943, p. 45).

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjelmslev como *función de signo* y que Eco (1991, p. 83) presenta como *función semiótica*[2].

2.4. El pragmatismo y la semiótica de Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914) escribió una gran cantidad de trabajos sobre temas diversos relacionados con la filosofía, la matemática y la semiótica, entre otras disciplinas, los cuales están recibiendo una atención especial en los últimos años en diversos campos. En este apartado incluimos algunas ideas que consideramos de especial interés, por ser empleadas como marco teórico en varias investigaciones en educación matemática (Campos, 2010; Otte, 2006; Sáen-Ludlow y Kadunz, 2016).

Pragmatismo
El pragmatismo es una corriente filosófica que surgió a finales del siglo XIX en los Estados Unidos. William James y Charles S. Peirce fueron los principales impulsores de la doctrina, que se caracteriza por la búsqueda de las consecuencias prácticas del pensamiento. El pragmatismo sitúa el criterio de verdad en la eficacia y valor del pensamiento para la vida. Para esta corriente, la comprensión del uso práctico del concepto resulta más importante que su definición conceptual. Para los pragmatistas, la relevancia de los datos surge de la interacción entre los organismos inteligentes y el ambiente, lo que lleva al rechazo de los significados invariables y de las verdades absolutas: las ideas, para el pragmatismo, son sólo provisionales y pueden cambiar a partir de investigaciones futuras. Al establecer el significado de las cosas a partir de sus consecuencias, el pragmatismo suele ser asociado a la practicidad y a la utilidad según el contexto.

La orientación del pragmatismo de Peirce (quien prefería denominar su posición como 'pragmaticismo' para evitar ciertas interpretaciones del pragmatismo) no fue la investigación de qué significan los signos en el seno de la vida social, sino la manera en que un individuo genérico utiliza los signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos y para alcanzar la verdad. "Su teoría del pragmaticismo (es decir, la lógica de la abducción) es la base de su semiótica. Por esta razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta" (Radford, 2006, p. 9).

En el trabajo titulado, *How to make your ideas clear?* defendió su idea pragmaticista de cómo comprender los conceptos con claridad. La *máxima pragmática* es un enunciado de lógica que propuso como recomendación normativa o principio regulativo sobre la manera óptima de 'lograr claridad en la aprehensión'. Peirce enunció la máxima pragmática de diversas maneras a lo largo de los años. Una que nos parece más comprensible es la siguiente:

[2] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO [...]. Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (Eco, 1991, pp. 83-84).

> “402. Parece, por lo tanto, que la regla para alcanzar el tercer grado de claridad en la comprensión es la siguiente: considerar qué efectos, que naturalmente pueden tener una motivación práctica, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de dichos efectos es la totalidad de nuestra concepción del objeto”. (Peirce, 1931-58, CP 5.402)

Según Burch (2014, p. 8) cuando Peirce sugiere que el significado completo de una clara concepción consiste en el conjunto completo de sus efectos prácticos, tiene en mente que una concepción significativa debe tener algún tipo de ‘valor experiencial efectivo’, debe, de alguna manera, estar relacionado con algún tipo de colección de observaciones empíricas posibles bajo condiciones especificables.

La noción de signo

El desarrollo de la teoría de los signos, o semiótica, fue fundamental en la vida intelectual de Peirce pudiéndose distinguir, según Atkin (2010,) tres etapas desde 1860 a 1910, en las que progresivamente la noción de signo y sus diferentes tipos se van enriqueciendo, aunque la estructura básica de los signos y el proceso de significación se mantienen en gran medida.

Para Peirce, el mundo de las apariencias está constituido enteramente de signos, que se refieren a cualidades, relaciones, sucesos, estados, regularidades, hábitos, leyes, etc., que tienen significados o interpretaciones. Un signo es uno de los términos de una tripleta de términos que están indisolublemente conectados uno con otro por una relación triádica esencial que Peirce llama la *relación de signo*. En la definición que dio Peirce de signo en 1897: “algo que está en lugar de algo para alguien en algún sentido o capacidad” (CP 2.228) están explícitos los tres elementos básicos: signo, objeto, interpretante.

El *signo*, en sí mismo, (también llamado *representamen*) es el término que usualmente se dice que representa o significa algo. El *objeto* es lo que ordinariamente se entiende como la *cosa* significada o representada por el signo, aquello para lo que el signo es signo *de*. El *interpretante*[3] viene a ser la comprensión que alcanzamos de alguna relación entre el signo y el objeto, como la traducción o desarrollo del signo original (Atkin, 2010, p. 4). En virtud de la definición de Peirce de la relación de signo, el interpretante debe ser él mismo un signo, y un signo además del mismo objeto que es (o fue) representado por el signo (original). Es decir, el interpretante es un segundo significante del objeto, solo que uno que ahora tiene abiertamente un estatus mental. Pero este segundo signo debe él mismo tener un interpretante, que a su vez es un nuevo, tercer signo del objeto original, y de nuevo es uno con un estatus abiertamente mental. Y así sucesivamente. De esta manera, si hay un signo de cualquier objeto, entonces hay una secuencia de signos del mismo objeto. Por tanto, para cualquier cosa del mundo de las apariencias, puesto que es un signo, comienza una secuencia infinita de interpretantes mentales de un objeto.

La máxima pragmática de Peirce es interpretada y adoptada por la EOS (Sección 3) cuando este marco propone concebir el significado de un concepto matemático en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona (o institución) para responder a un tipo de situaciones-problema. El EOS también

[3] Sáenz-Ludlow y Kadunz (2016, p. 3) representan el signo triádico con la palabra SIGNO (en mayúscula), para distinguirla del componente representamen o signo-vehículo. Indican que comprender el proceso de construcción de significado supone comprender el papel activo de la *Persona interpretante* en la reconstrucción del *Objeto real* de un SIGNO a partir de las claves e indicaciones aportadas por los signo-vehículos los cuales solo indican ciertos aspectos del *Objeto real*.

interpreta la noción de función semiótica tomada de Hjelmslev, y articula esta idea con la tríada semiótica de Peirce y el proceso de semiosis ilimitada.

2.5. Juegos de lenguaje y formas de vida. El lenguaje como herramienta

La concepción realista del significado de las palabras se basa en tratar cada palabra significante como un nombre, idea que informa de la mayor parte de la reflexión sobre la filosofía de las matemáticas y de la psicología. Las expresiones matemáticas tales como '0', '-2'; $\sqrt{-1}$; 'alef subcero', o incluso '+', 'x^4', 'e^x', se toman como nombres de entidades, y la cuestión, *¿qué significan?*, se reduce a, *¿en lugar de qué están*? (Baker y Hacker, 1985).

Por otra parte, Wittgenstein (1953; 1976) argumentó que deberíamos considerar las palabras como herramientas y clarificar sus usos en nuestros *juegos de lenguaje*. Por ejemplo, las palabras numéricas son instrumentos para contar, ordenar y medir, y los fundamentos de la aritmética elemental, esto es, el dominio de la serie de números naturales, se basa en el entrenamiento en el conteo.

Las nociones de "juego de lenguaje" y "formas de vida" son conceptos principales en la filosofía de Wittgenstein. Dado que el significado de las palabras se concibe como el uso que se hace de ellas en diversos contextos el sentido de "juego de lenguaje" hay que buscarlo mediante el uso que hace Wittgenstein de dicha expresión. Así, por ejemplo, la interacción comunicativa que se establece entre un maestro albañil A que pide materiales a su ayudante B se considera como un juego de lenguaje. Los procesos comunicativos mediante los que los niños aprenden su lengua materna son otro ejemplo. En el epígrafe 23 de las *Investigaciones Filosóficas,* Wittgenstein desarrolla esta idea con nuevos ejemplos:

> 23. … La expresión «juego de lenguaje» debe poner de relieve aquí que hablar el lenguaje forma parte de una actividad o de una forma de vida. Ten a la vista la multiplicidad de juegos de lenguaje en estos ejemplos y en otros:
>
> Dar órdenes y actuar siguiendo órdenes — Describir un objeto por su apariencia o por sus medidas— Fabricar un objeto de acuerdo con una descripción (dibujo)— Relatar un suceso — Hacer conjeturas sobre el suceso — Formar y comprobar una hipótesis — Presentar los resultados de un experimento mediante tablas y diagramas— Inventar una historia; y leerla— Actuar en teatro— Cantar a coro— Adivinar acertijos— Hacer un chiste; contarlo— Resolver un problema de aritmética aplicada— Traducir de un lenguaje a otro— Suplicar, agradecer, maldecir, saludar, rezar.

Como explica Marrades (2014), la expresión *forma de vida* aparece siempre en conexión con el lenguaje y, más concretamente, con juegos de lenguaje particulares; además, en la mayoría de los ejemplos, la noción de forma de vida se caracteriza como un modo de actuar que está en la base del uso del lenguaje. Según este autor, el recurso a dicha noción se produce en un ámbito de problemas que conciernen a las condiciones conceptuales de la comprensión del lenguaje. Comprender el sentido de una expresión exige, no sólo apelar a las reglas que rigen su uso, sino también ver dicho uso por referencia a una estructura existencial más amplia, de la cual forma parte el juego de lenguaje:

> "Más concretamente, una forma de vida designa, para Wittgenstein, un entramado fáctico de relaciones entre conducta lingüística, conducta no lingüística y situaciones en el mundo, en cuyo marco se desarrolla un juego de lenguaje. […]

> Las formas de vida son siempre formas sociales de vida, prácticas sociales" (Marrades, 2014, p.146).

Los constructos forma de vida y juego de lenguaje se incorporan a la noción de institución del EOS (sección 3). Una institución o comunidad de prácticas comparte algunos tipos de problemas, formas específicas de abordar estos problemas, así como hábitos, normas, recursos materiales y lingüísticos, lo que equivale a decir que los miembros de la institución comparten formas de vida y juegos de lenguaje. Este es un postulado básico aceptado por cualquier enfoque sociocultural del conocimiento en general y del conocimiento matemático en particular.

En el siguiente apartado, analizamos cómo el EOS se apoya en las nociones de función de signo (Hjelmslev) y de práctica matemática, lo que hace operativa la visión antropológica de la matemática de Wittgenstein y su relatividad respecto a los juegos de lenguaje y las formas de vida. Además, el EOS interpreta la tríada semiótica de Peirce en términos de función o correspondencia entre dos términos, antecedente y consecuente, conectados por un criterio o regla de correspondencia. La máxima pragmática de Peirce se traduce también en el EOS en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, que se utilizan para proponer una conceptualización del significado pragmático de los objetos matemáticos, en contraposición a las visiones mentalistas o idealistas sobre los conceptos matemáticos.

3. SIGNIFICADO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

En el marco del EOS (Godino y Batanero, 1994; Godino, et al., 2007; Godino, et al., 2019) la noción de significado y su relación con las nociones de práctica y objeto desempeña un papel central. Una práctica es "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, para comunicar la solución a otras personas, con el fin de validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998, p. 182).

> "En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática" (Godino y Batanero, 1994, p. 331).

Aunque el objetivo inicial del EOS fue elaborar un modelo teórico que diera respuesta a la cuestión del significado de los conceptos matemáticos, en sucesivos desarrollos, se ha ido ampliando dicho objetivo y aplicándolo a cualquier tipo de objeto que intervenga en las prácticas matemáticas, proponiendo además una categorización para dichos objetos. Se considera que los problemas epistemológicos, cognitivos e instruccionales que debe abordar la educación matemática deben tratar previamente el problema ontológico, esto es, clarificar la naturaleza y tipos de objetos matemáticos cuya enseñanza y aprendizaje se pretende.

En una primera aproximación, el *significado* es aquello que refiere una palabra, un símbolo o cualquier otro medio de expresión, emitida por una persona en un acto comunicativo con otra persona o consigo mismo, que tiene lugar en un contexto determinado. No obstante, con las palabras y símbolos no solo se mencionan o representan cosas, sino que mediante ellos también se *hacen* cosas, es decir, intervienen en prácticas operativas. Con las palabras y símbolos se opera, calcula, de manera que se producen nuevos objetos. Por ejemplo, con los símbolos numéricos 2, 3 y la palabra "suma", siguiendo ciertas reglas acordadas, se produce el resultado 5, así como un nuevo objeto matemático, la proposición de que 2 + 3 es igual a 5, que se acepta como verdadera cuando se deduce de las reglas acordadas.

Surge, por tanto, la cuestión ¿qué papel, además del representacional, desempeña esta palabra, símbolo o expresión en esta práctica operativa? Este es un problema central que tiene que ser abordado por una teoría holística sobre el significado, que tenga en cuenta tanto el uso referencial como el operacional, dar respuesta al significado de expresiones que refieren a conceptos (objetos ideales, abstractos), a cualquier otro tipo de objeto, o no refieren a ningún objeto.

En esta sección trataremos de explicar el uso del significado en el EOS, y su relación con las nociones de práctica y objeto matemático. Contextualizamos la explicación con el ejemplo de una posible demostración de la proposición aritmética elemental 2+3=5 incluida en la Figura 1. Aceptamos que las prácticas 1) a 7) son realizadas por un sujeto epistémico que comparte el juego de lenguaje y la forma de vida de las personas que conocen y son competentes en la axiomática de Peano.

Proposición: 2+3=5

Demostración:

1) Los símbolos, 2, 3 y 5 representan números naturales.
2) Los números naturales son un conjunto de símbolos que satisface los axiomas de Peano, en particular, hay un primer elemento, 1, y está definida una función siguiente (sucesor), $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, inyectiva. En dicho conjunto se define la suma, +, de manera recursiva como: $n + 1 = s(n)$; $n + s(m) = s(n + m)$.
3) En la secuencia, 2 es el sucesor de 1, $2 = s(1) = 1 + 1$, 3 es el sucesor de 2, $3 = s(2) = 2 + 1$, y 5 es el sucesor de 4 que es el siguiente de 3, $5 = s(4) = s\big(s(3)\big)$.
4) El signo = indica la equivalencia de dos expresiones.
5) La expresión 2+3 representa la suma de los números naturales 2 y 3.
6) Teniendo en cuenta la definición de la suma de números naturales y de sucesor $2 + 3 = 2 + s(2) = s(2 + 2) = s\big(2 + s(1)\big) = s\big(s(2 + 1)\big) = s\big(s(3)\big) = s(4) = 5$.
7) Por tanto, las expresiones 2+3 y 5 son equivalentes.

Figura 3. Demostración de una proposición aritmética elemental (2+3=5)

3.1. Prácticas, objetos y significados

En el enunciado de la proposición, 2+3=5, los símbolos 2, 3 y 5 refieren a los números naturales 2, 3 y 5, + se refiere a la operación aritmética de sumar y el símbolo = significa que el resultado de sumar 2 y 3 coincide con el número 5.

Al hacer estas interpretaciones de los símbolos estamos siguiendo unas reglas convenidas en la cultura o comunidad matemática, de manera que si entendemos los números y los símbolos de sumar e igualdad de esa manera necesariamente se debe aceptar que “dos más tres es igual a cinco”.

Desde una perspectiva conceptualista-idealista de las matemáticas se piensa que en la expresión 2+3=5, además de los signos u objetos materiales visibles o audibles, intervienen otros objetos inmateriales no visibles, usualmente considerados como conceptos, en este caso los conceptos de número 2, 3, 5, concepto de suma, concepto de igualdad. Para poder comprender la justificación de la veracidad de la proposición 2+3=5 es necesario explicitar qué se entiende por número natural, en particular qué son los conceptos de 2, 3, 5, suma e igualdad, o lo que es equivalente qué significado se debe atribuir a estos conceptos.

Para no caer en la trampa idealista del platonismo de la que advierte Wittgenstein, en el EOS, al hablar de conceptos y significado de conceptos se asume una interpretación pragmatista de tales entidades. Con dicha finalidad, Godino y Batanero (1994, p. 341) introdujeron las siguientes definiciones de significado:

> DEFINICION 8: Significado de un objeto institucional O_I:
>
> Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado.
>
> DEFINICION 9: Significado de un objeto personal O_p:
>
> Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.

El ejemplo de la proposición 2 + 3 = 5 ayuda a aclarar el alcance de las definiciones 8 y 9 y, por tanto, de los supuestos pragmáticos del EOS. El enunciado *O*: 2 + 3 = 5 es un objeto matemático proposicional que requiere una justificación dentro del juego del lenguaje específico de la axiomática de Peano. Ante la situación-problema consistente en demostrar *O*, el sujeto epistémico/institucional que resuelve el problema responde ¿qué significa *O*? En el EOS, el significado pragmático de *O* es el sistema de prácticas 1) a 7). El problema puede plantearse a un estudiante, que seguramente dará una respuesta diferente. En cualquier caso, el significado pragmático de *O* para el estudiante será el sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza para probar la veracidad de la proposición.

Las prácticas 1) a 7) (Figura 1) constituyen conjuntamente la argumentación que justifica la proposición 2+3=5, en la cual además de entidades lingüísticas y conceptuales interviene una entidad procedimental: la técnica de aplicar recursivamente la definición de suma de números naturales. Mediante las prácticas discursivas y operativas se evocan las reglas que fijan el significado de los conceptos y procedimientos, concluyendo con la práctica discursiva – normativa 7): *Por tanto, las expresiones 2+3 y 5 son equivalentes*.

En la actividad matemática los conceptos, proposiciones y procedimientos pueden participar como entidades *unitarias*, que son descritas mediante una definición o un enunciado que fija la regla de uso de tal objeto: por ejemplo, la definición de número natural dada en la práctica 2) de la demostración (Figura 1). Pero sabemos que es posible encontrar otras definiciones de número natural usando diferentes sistemas axiomáticos, o dependiendo de diferentes contextos o marcos institucionales en que se usan los números. Cada una de tales definiciones pone en juego diferentes prácticas operativas y discursivas involucrando además otros objetos, y por tanto implican un significado pragmático diferente.

En la ontología del EOS, el término "objeto" se utiliza en un sentido amplio para referirse a cualquier entidad que intervenga de algún modo en la práctica matemática y que pueda identificarse como una unidad. El uso de objeto es metafórico, ya que un concepto matemático, suele concebirse como una entidad ideal o abstracta, y no como algo tangible, como una piedra, un dibujo o un manipulativo. Esta idea general de objeto, coherente con la propuesta del interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Cobb y Bauersfeld, 1995), resulta útil a la hora de considerar una tipología de objetos matemáticos, al tener en cuenta sus diferentes roles y naturaleza en la actividad matemática.

Los símbolos, las representaciones materiales externas y los manipulativos, intervienen en la actividad matemática escolar y profesional y, en consecuencia, se consideran objetos matemáticos, porque intervienen en las prácticas matemáticas. Los conceptos de número, fracción, derivada, etc., son objetos matemáticos de naturaleza y función diferentes a las representaciones ostensivas; son objetos no ostensivos, mentales (cuando intervienen en las prácticas personales, o individuales), o institucionales (cuando intervienen en las prácticas socioculturales compartidas). En ambos casos, son objetos que regulan la actividad matemática, mientras que sus representaciones ostensivas apoyan o facilitan la realización de dicha actividad.

Cada tipo de objeto puede ser considerado desde diferentes puntos de vista duales, como se indica en la Figura 2. En particular, un objeto puede ser considerado desde un punto de vista personal (sujeto individual) o institucional (social, compartido), teniendo así, una doble naturaleza, mental/cognitiva, y cultural/epistémica. La dualidad personal-institucional se aplica a las prácticas, los objetos y los significados, lo que nos permite describir los procesos de semiosis (dualidad expresión-contenido) desde el punto de vista cognitivo y cultural.

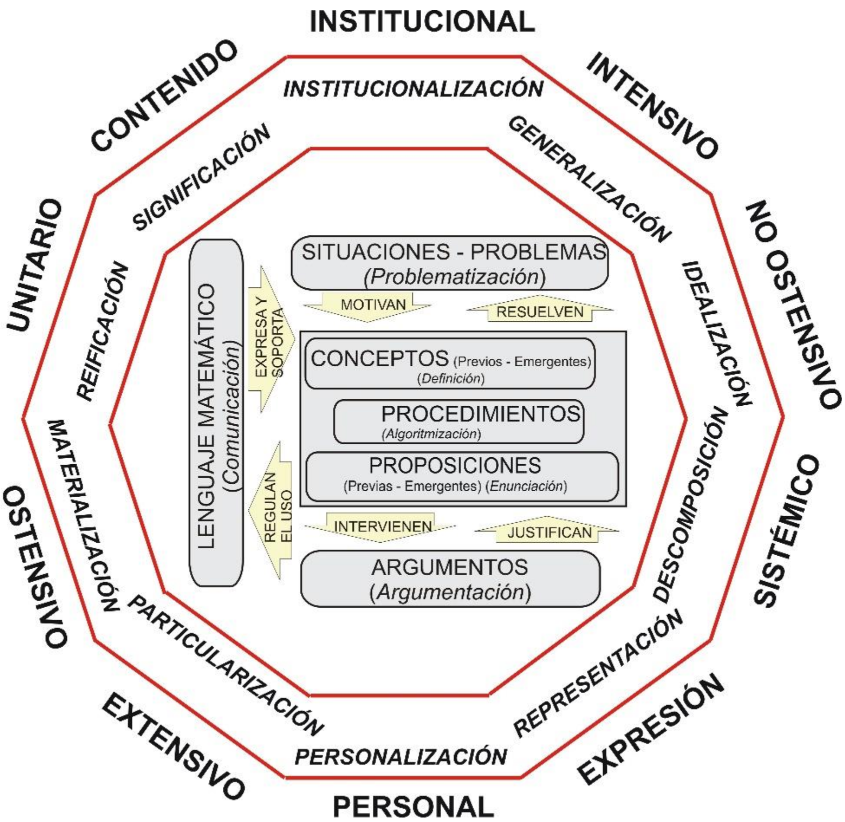

Figura 2. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

No hay objetos sin prácticas, ni prácticas sin objetos. Los conceptos, proposiciones, procedimientos, en su versión unitaria, son entendidos, como propone Wittgenstein, como reglas gramaticales de los lenguajes que se usan en las prácticas operativas y discursivas que se realizan para describir nuestros mundos y actuar ante las situaciones-problemas que nos plantean. Pero además, desde el EOS, se contemplan los objetos matemáticos desde una perspectiva *sistémica*, mediante la cual se identifican y articulan los diversos significados parciales de los mismos[4]. Así mismo, cuando el análisis semiótico se hace

[4] En Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se describen diversos significados de los números naturales desde el punto de vista institucional. Batanero (2005) identifica diversos significados de la probabilidad.

sobre las prácticas que realizan sujetos individuales ante problemas que involucran un determinado objeto (números, probabilidad, etc.) se pueden identificar diversos *significados personales* sobre el mismo.

3.2. Uso e intencionalidad de las prácticas

En las teorías operacionales del significado las palabras, símbolos o expresiones no tienen por qué referir o estar en lugar de otras cosas sino que se usan para *hacer* algo con ellas. Por ejemplo, los numerales son instrumentos para contar, ordenar y medir, y los enunciados sobre números tienen el papel de reglas para el uso de tales palabras. Según esto, 2+3=5 no es una propiedad que establece una relación entre entidades conceptuales, como podría ocurrir con la expresión "los leones son carnívoros", sino que es una regla sobre cómo se deben usar los símbolos 2, 3, 5, +, =, esto es, siempre que se tenga la expresión 2+3 se puede sustituir por 5, y viceversa.

La justificación de las proposiciones matemáticas se hace mediante una secuencia de prácticas operativas y discursivas (como las mostradas en la Figura 4) que tienen una intencionalidad determinada. Cada práctica elemental que se realiza para resolver un problema, que puede ser intramatemático, como la demostración de que 2+3=5, o involucrar un contexto extra matemático, desempeña un papel en el proceso resolutivo. La Tabla 1 resume el uso o *significado operacional/ pragmatista* de las prácticas requeridas en la demostración de la proposición 2+3=5 (Figura 1).

Tabla 1. Uso e intencionalidad de las prácticas para demostrar 2+3=5

Secuencia de prácticas elementales	Uso / intencionalidad
1) Los símbolos, 2, 3 y 5 representan números naturales.	Atribuir significado a los símbolos 2, 3, 5 como números naturales
2) Los números naturales son un conjunto de símbolos que satisface los axiomas de Peano, en particular, hay un primer elemento, 1, y está definida una función siguiente (sucesor), $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, inyectiva. En dicho conjunto se define la suma, +, de manera recursiva como: $n + 1 = s(n)$; $n + s(m) = s(n + m)$.	Evocar las reglas que definen los números naturales y su suma en el marco de una teoría axiomática específica.
3) En la secuencia, 2 es el sucesor de 1, $2 = s(1) = 1 + 1$, 3 es el sucesor de 2, $3 = s(2) = 2 + 1$, y 5 es el sucesor de 4 que es el siguiente de 3, $5 = s(4) = s(s(3))$.	Interpretar el significado de los símbolos 2,3,5 en la teoría axiomática de Peano de los números naturales.
4) El signo = se usa para indicar la equivalencia de dos expresiones.	Evocar el significado de la igualdad de números naturales como equivalencia de dos expresiones.
5) La expresión 2+3 representa la suma de los números naturales 2 y 3.	Interpretar el significado de + como suma de números naturales.
6) Teniendo en cuenta la definición de suma de números naturales y de sucesor $2 + 3 = 2 + s(2) = s(2 + 2) = s(2 + s(1)) = s(s(2 + 1)) = s(s(3)) = s(4) = 5$	Aplicar las reglas que definen la función siguiente (sucesor) y suma de números naturales.
7) Por tanto, las expresiones 2+3 y 5 son equivalentes.	Fijar la nueva regla de uso de los símbolos numéricos (declarar la verdad de la proposición).

3.3. Significado y función semiótica

Entre el símbolo 2 y el concepto de número 2, como también entre el concepto de número natural y el sistema de prácticas operativas y discursivas de donde emerge tal objeto matemático, se establece una relación que el EOS denomina *función semiótica* (tomándolo de Hjelmslev, 1943 y Eco, 1991). La función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto *antecedente* (expresión/ significante) y otro *consecuente* (contenido/ significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o *regla de correspondencia*. Con esta noción se pretende incluir cualquier uso que se dé al significado: el significado es el contenido de una función semiótica.

Cada una de las prácticas elementales que componen el texto de la demostración de la proposición 2+3=5 (Figura 4) tiene una función o rol en el proceso argumentativo por lo que se puede asignar dicho papel como el *significado operacional* de las prácticas (Tabla 1). Pero en la realización de cada práctica, y en la conjunción de todas o una parte de ellas, interviene una trama de objetos (Tabla 2) cuya identificación es necesaria para comprender y gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Tabla 2. Objetos que intervienen en las prácticas para demostrar 2+3=5

Secuencia de prácticas elementales	Objetos intervinientes
1) Los símbolos, 2, 3 y 5 representan números naturales.	Lenguajes: simbólico; natural. Conceptos: números naturales.
2) Los números naturales son un conjunto de símbolos que satisface los axiomas de Peano, en particular, hay un primer elemento, 1, y está definida una función siguiente (sucesor), $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, inyectiva. En dicho conjunto se define la suma, +, de manera recursiva como: $n + 1 = s(n)$; $n + s(m) = s(n + m)$.	Lenguaje: natural, simbólico. Conceptos: número natural; conjunto de símbolos; función siguiente inyectiva, primer elemento; sucesor, suma. Proposiciones: axiomas de Peano.
3) En la secuencia, 2 es el sucesor de 1, $2 = s(1) = 1 + 1$, 3 es el sucesor de 2, $3 = s(2) = 2 + 1$, y 5 es el sucesor de 4 que es el siguiente de 3, $5 = s(4) = s\big(s(3)\big)$.	Lenguajes: natural; simbólico. Conceptos: secuencia; sucesor, suma. Proposición: 2 es el sucesor de 1, 3 es el sucesor de 2 y 5 es el sucesor del sucesor de 3. Argumentos: convención basada en las propiedades de la función siguiente.
4) El signo = se usa para indicar la equivalencia de dos expresiones.	Lenguajes: simbólico; natural. Conceptos: equivalencia de expresiones; igualdad.
5) La expresión 2+3 significa avanzar tres posiciones desde la posición 2.	Lenguajes: natural y simbólico. Conceptos: suma de números naturales.
6) Teniendo en cuenta la definición de suma de números naturales y de sucesor $2 + 3 = 2 + s(2) = s(2 + 2) = s\big(2 + s(1)\big) = s\big(s(2 + 1)\big) = s\big(s(3)\big) = s(4) = 5$	Lenguajes: natural y simbólico. Proposición: 2+3= 5. Procedimiento: operaciones de suma y sucesor. Argumento: deductivo, basado en la definición de suma de números naturales y de la función siguiente.
7) Por tanto, las expresiones 2+3 y 5 son equivalentes.	Lenguajes: natural y simbólico Proposición: enunciado de la práctica 7). Argumento: secuencia deductiva de prácticas 1) a 6)

La *función semiótica* se puede ver como una interpretación del signo Peirceano.

> "Una representación es aquel carácter de una cosa en virtud de la cual, para la producción de un cierto efecto mental, se puede poner en lugar de otra cosa. La cosa que tiene ese carácter la llamo un representamen, el efecto mental, o pensamiento, su interpretante, la cosa en cuyo lugar se pone, su objeto" (Peirce, 1931-58, CP 1.564).

En el EOS, el interpretante Peirceano se concibe como la regla (hábito, norma) de correspondencia entre el representamen y el objeto, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo (significados personales o institucionales). Cuando, por ejemplo, en la práctica 1) se afirma que 2 refiere al "concepto de número natural dos" (Figura 4), estamos siguiendo un convenio (hábito, regla) que se aprende en la comunidad de prácticas matemáticas escolares. Esto es, entre el signo 2 y el concepto *dos* hay un interpretante que no es otra cosa que un convenio cultural seguido por el sujeto que hace la interpretación.

Además, en el EOS se asume que toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de expresión (significante), contenido (significado) o interpretante (regla que relaciona expresión y contenido). Los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De este modo se modeliza cualquier uso que se pueda dar a la palabra significado.

Es decir, la semiótica pragmatista/antropológica asumida por el EOS asume que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas etc.), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, incluso las situaciones-problemas, pueden ser también antecedentes de las funciones semióticas. Tiene sentido y es necesario, preguntarse tanto por el significado del concepto de número, como por el significado de las proposiciones, procedimientos, argumentos, situaciones y representaciones que intervienen en las prácticas numéricas. Los funtivos en la función semiótica también pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales. Se genera de este modo una variedad de tipos de significados que orienta y apoya la realización de análisis ontosemióticos de la actividad matemática a nivel macro y micro, tanto desde el punto de vista epistémico (institucional) como cognitivo (personal) (Font, Godino y Gallardo, 2013).

3.4. Relatividad de las prácticas, objetos y significados

En el EOS se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social), lo que determina una relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, objetos y significados, esto es, se asume una relatividad respecto de los *juegos de lenguaje* y *formas de vida* (Wittgenstein, 1953). Se asume, por tanto una perspectiva sociocultural sobre la semiosis en la que se enfatiza la dimensión social, cultural, e histórica de los signos. “En estas perspectivas los signos son entendidos no como artefactos a los cuales recurren los individuos para representar o presentar el conocimiento, sino como artefactos de comunicación y significación” (Presmeg, et al, 2018, p. 4)

En el ejemplo descrito anteriormente (Figura 1), el contexto de la aritmética modular cambia el significado de 2+3, como también es diferente el significado del concepto de número natural si se cambia la axiomática, o se adopta la construcción conjuntista de los números. El significado de los números es diferente en las distintas comunidades de prácticas formadas por grupos culturales diversos o en distintos momentos históricos.

En consecuencia, un objetivo del análisis didáctico-matemático debe ser caracterizar los diversos significados de los objetos y sus interrelaciones, construyendo de esa manera un *significado global* que sirva de referencia para el análisis de los procesos de instrucción matemática. Este sería un primer nivel de análisis ontosemiótico de la actividad matemática mediante el cual se toma conciencia de la pluralidad y relatividad de los significados de los objetos matemáticos. En este primer nivel se trata de identificar, clasificar y describir los tipos de situaciones-problemas en los que el objeto en cuestión interviene, así como las prácticas matemáticas (operativas y discursivas) mediante las cuales se da respuesta a dichos problemas.

El contexto social, material y biológico (trasfondo ecológico), que sustenta y condiciona la actividad matemática, implica la relatividad de las prácticas, los objetos y significados. Tanto las prácticas como los objetos se pueden contemplar desde distintas polaridades (operativas-discursivas; unitarios-sistémicos, etc.). Además, tales prácticas son relativas a los diferentes marcos institucionales y contextos de uso del objeto.

Para la educación en general y para la educación matemática en particular, es necesaria una teoría holística del significado que incluya la dualidad personal-institucional para los significados. Se requiere tanto una semiótica cognitiva como una semiótica epistémica/cultural: los significados se establecen entre personas individuales, en prácticas discursivas y operativas; pero también entre una persona y el conocimiento cultural cuyo aprendizaje se pretende. En la cultura matemática los términos, símbolos, conceptos, etc., tienen un significado cristalizado, socialmente compartido, formado en un proceso histórico-cultural, que es el resultado de múltiples prácticas discursivas y operativas entre sujetos individuales, mediadas por el uso de diferentes lenguajes y artefactos. Este enfoque es coherente con la semiótica cultural propuesta por Radford (2006) para el significado de los conceptos matemáticos: "los objetos matemáticos son formas conceptuales de actividad histórica, social y culturalmente encarnada, reflexiva y mediada" (Radford, 2006, p. 59).

Desde el punto de vista de la educación, los significados no deben reducirse a objetos mentales, ni a objetos culturales; es necesario atribuirles una doble naturaleza personal e institucional, para dar cuenta de la relación dialéctica que se establece entre ellos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

4.5. Algunos ejemplos

La construcción del conjunto de números naturales N y su aritmética está en la base de las matemáticas que todo educador debe conocer. La construcción formal de N basada en la teoría de la correspondencia uno a uno de los conjuntos define las operaciones aritméticas de forma diferente a cuando N se construye a partir de los axiomas de Peano. Estos son dos posibles significados parciales de los números naturales y su aritmética, pero no son los únicos. Cada significado parcial de los números naturales es un sistema semiótico, caracterizado por una configuración concreta de prácticas operativas y discursivas. El significado global de los números (figura 3) está constituido por la articulación de los diferentes subsistemas que determinan cada significado parcial.

> "En términos de aprendizaje, sin embargo, los significados son relativos, no absolutos. Hay grados de significados; grados de lo que puede denominarse extensión, exactitud, profundidad, complejidad; y el crecimiento de los significados puede tener lugar en cualquiera de estas dimensiones. En relativamente pocos aspectos de la vida, en relativamente pocos aspectos del currículo escolar (incluida la aritmética), pretendemos llevar los significados a algo parecido a su máximo desarrollo. Además, sea cual sea el grado de significado que queremos que tengan los niños, no podemos engendrarlo todo de una vez. En cambio, nos detenemos en diferentes niveles con diferentes conceptos; ahora apuntamos a este nivel de significado, más tarde a un nivel más alto, y así sucesivamente" (Brownell, 1947, p. 257)

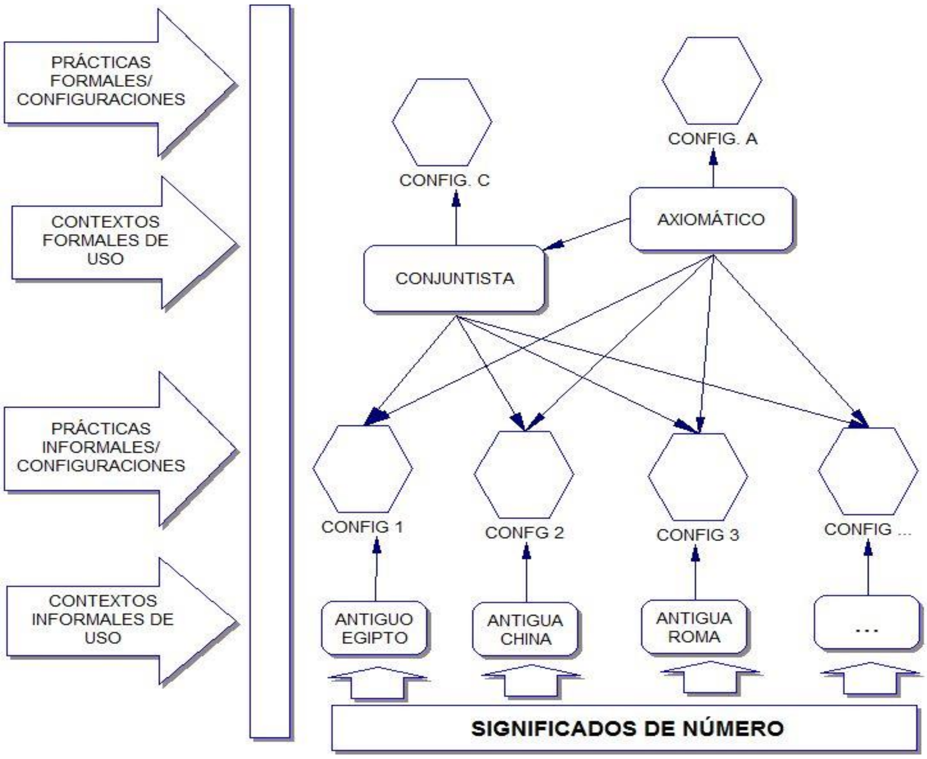

Figura 3. Pluralidad de significados del número natural (Godino et al., 2011, p. 252)

La identificación de los distintos significados parciales de un objeto matemático y su articulación debe ser, por tanto, una fase del análisis ontosemiótico de la actividad matemática. Este análisis ayuda a formular hipótesis sobre los puntos críticos de la interacción entre los distintos agentes en los que puede haber vacíos de significado o disparidad de interpretaciones que requieren procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de instrucción.

Batanero y Díaz (2007) aplican las nociones teóricas del EOS para analizar el surgimiento histórico de la probabilidad y sus diferentes significados actuales (intuitivo, clásico, frecuencial, de propensión, lógico, subjetivo y axiomático). Además, describen la actividad matemática como una cadena de funciones semióticas y utilizan la idea de conflicto semiótico para dar una explicación alternativa a algunos errores probabilísticos generalizados.

Font y Contreras (2008) aplican la noción de función semiótica y la ontología matemática del EOS para analizar los procesos de generalización y particularización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Utilizando el análisis de la definición de derivada de una función en un libro de texto de secundaria como contexto de reflexión estos autores abordan los siguientes problemas:

- La delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de materialización e idealización;
- La elaboración de una tipología de procesos de generalización;
- El papel que juega el elemento genérico en la relación particular-general;
- La relación de los procesos de generalización con otros procesos matemáticos.

Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2009) aplican el EOS para analizar la noción matemática de diferentes sistemas de coordenadas, así como algunas situaciones y acciones de estudiantes universitarios relacionadas con estos sistemas de coordenadas en el contexto del cálculo multivariante. Los autores identifican los objetos que emergen de la actividad matemática y hacen un primer intento de describir una red epistémica para esta actividad. En otro trabajo, Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak (2012) abordan diferentes sistemas de coordenadas a través del proceso de cambio de base, tal y como se desarrolla en el contexto del álgebra lineal, así como la relación de semejanza entre las matrices que representan una misma transformación lineal respecto a diferentes bases.

4. TEORÍAS DEL SIGNIFICADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La clarificación de las nociones de significado y sentido es un tema de interés para la educación matemática y se aborda desde diferentes perspectivas. En esta sección, describimos sintéticamente tres teorías semióticas orientadas específicamente al conocimiento matemático: La teoría lógico-semántica de Frege, la perspectiva cognitiva de Vergnaud y el enfoque epistemológico de Steinbring. Frege es un autor clásico que plantea la distinción entre sentido y referencia, que es un punto de partida para el triángulo epistemológico de Steinbring, un modelo desarrollado desde una posición explícita de la educación matemática. Vergnaud es el representante de las teorías del significado desde la perspectiva psicológica constructivista. En estas tres teorías hay un interés por relacionar la cuestión del significado de los términos y expresiones con el problema ontológico sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, que es una cuestión central en el EOS. En la sección 5, analizamos algunas concordancias y complementariedades entre estas teorías semióticas y el EOS.

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje, hay unos presupuestos ontológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

4.1. Sentido y referencia en Frege

Distintos modelos triangulares se han propuesto para tratar con el problema de las relaciones entre los símbolos y los significados. Uno de ellos es el introducido por Frege (1892) en el artículo *Sobre sentido y referencia*.

> "Así pues, resulta natural pensar que en un signo (nombre, unión de palabras, signos escritos) está unido además de lo designado, lo que se podría llamar la referencia del signo, lo que me gustaría llamar el sentido del signo, donde está contenido el modo de presentación" (Frege, 1892, p.85).

Por ejemplo, sean, a, b, c los segmentos que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos. El punto de intersección de *a* y *b* es el mismo punto que el de intersección de *b* y c (baricentro). Así que tenemos diferentes designaciones para el mismo punto, y estos nombres ("punto de intersección de a y b" y "punto de intersección de b y c") indican al mismo tiempo el modo de presentación, y es por ello por lo que la proposición contiene conocimiento efectivo. Ambas expresiones tienen la misma referencia pero diferentes sentidos.

Al signo le corresponde un sentido determinado y a éste, a su vez, una referencia determinada, mientras que a una referencia (a un objeto) no le pertenece sólo un signo, ni tampoco un solo sentido. El mismo sentido tiene distintas expresiones en distintos lenguajes; puede ocurrir que una expresión tenga sentido pero no una referencia. Por ejemplo, "la expresión "la serie que converge más lentamente" tiene un sentido pero se sabe que no tiene referente, ya que para cada serie convergente, se puede encontrar otra serie que converge pero más lentamente. Al captar un sentido, no se está seguro de que haya un referente" (Frege, 1892 p. 87).

Frege considera que hay que distinguir entre la referencia y el sentido de un signo respecto de la representación que se asocia a los mismos; la representación es algo interno a cada sujeto. Si la referencia de un signo es un objeto perceptible, entonces la representación que alguien tiene de él es una imagen originada a partir de recuerdos de impresiones sensoriales que ha tenido y de actividades, tanto internas como externas, que ha ejercitado. No siempre, ni siquiera en la misma persona, la misma representación está ligada con el mismo sentido. La representación es subjetiva: la representación de uno no es la del otro.

> "El sentido de una expresión se supone que consiste en la manera en que determinamos su referencia: pero ocurre que, con frecuencia, no hay una única manera de determinar la referencia de una expresión, sino que diferentes personas pueden determinarla de diferentes modos, e incluso que lo que se toma en una ocasión como un modo aceptable de determinarlo puede después ser abandonado al no coincidir con los otros. Si es así, entonces lo que es objetivo sobre el empleo de una expresión, lo que es compartido por todos los hablantes de la lengua, es después de todo su referencia" (Dummett, 1973, p. 102).

Inicialmente, la teoría del sentido y la referencia fue desarrollada para el caso de los nombres propios: "La referencia de un nombre propio es el objeto mismo que designamos por medio de él; la representación que tenemos en este caso es completamente subjetiva; entre ambos está el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero que tampoco es el objeto mismo" (Frege, 1892, p. 213).

Seguidamente Frege amplía la teoría del sentido y referencia para las oraciones asertóricas, enunciados que afirman como verdadero o falso un juicio, y para los nombres comunes o conceptos. "Toda oración asertórica, en la que importe la referencia de sus palabras, ha de concebirse por lo tanto como un nombre propio, y su referencia, en el caso de que la tenga, es lo verdadero o lo falso" (Frege, 1892, p. 216).

Frege distingue entre objeto y concepto. La noción de concepto en lógica, que es el punto de vista que interesa a Frege, está estrechamente relacionado con la de función, para la que propone la definición, "por función de *x* se ha de entender una expresión de cálculo que contenga *x*, una fórmula que encierra la letra *x*" (Frege, 1891, p. 138). Y para la noción de concepto afirma: "un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad" (Frege, 1891, p. 146); los valores que se dan al argumento de la función son los objetos que caen bajo el concepto. En lógica, "podemos designar como extensión de un concepto al recorrido de una función cuyo valor para todo argumento es un valor de verdad" (Frege, 1891, p. 146).

Sobre la noción de objeto Frege afirma: "objeto es todo lo que no es función, cuya expresión no conlleva, por lo tanto, un lugar vacío" (Frege, 1891, p. 147). Los recorridos de funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son. Así mismo, las extensiones de conceptos son también objetos, aunque los conceptos mismos no lo son.

El modelo lógico-semántico de Frege distingue si un signo se refiere a un objeto o a un concepto, bajo una determinada modalidad o significado (signo, sentido, referencia). Se trata de un primer paso para aceptar que un concepto admite una pluralidad de posibles interpretaciones, usos o significados parciales. Sólo hay un objeto/concepto, pero este objeto puede ser visto desde diferentes perspectivas: por ejemplo, el baricentro puede estar vinculado a las medianas *a*, *b* de un triángulo o a *b* y *c*.

Aunque la filosofía de las matemáticas de Frege es indudablemente realista -platonista- al asumir que un objeto matemático tiene una existencia propia e independiente, su teoría del sentido y la referencia de los signos, palabras y expresiones, abre una ventana al relativismo de las posiciones psicológicas y antropológicas. Una palabra designa o se refiere a un objeto o a un concepto, pero siempre va acompañada de un pensamiento, de un sentido o de una forma específica de ver el objeto o el concepto en el contexto en el que se produce la comunicación. Estos sentidos se consideran de forma intersubjetiva y, en consecuencia, se puede plantear el problema de identificar y caracterizar el posible universo de sentidos atribuibles al objeto.

4.2. La tripleta conceptual de Vergnaud

Vergnaud (1982) considera que es un desafío científico promover el estudio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas como un campo propio bien definido, no reducible a las matemáticas, psicología, lingüística, sociología u otras ciencias. Esto requiere el análisis de los diferentes contenidos matemáticos, en su especificidad, y el estudio empírico de su enseñanza y aprendizaje, de manera que se tenga en cuenta tanto el crecimiento del conocimiento a largo plazo en los niños y adolescentes, como el cambio de concepciones a corto plazo ante las nuevas situaciones que se encuentren. Con dicho fin ha elaborado la teoría de los campos conceptuales en la que propone una definición de concepto útil para abordar el estudio del desarrollo evolutivo del conocimiento matemático. "Por lo tanto, desde el punto de vista del desarrollo, un concepto es en conjunto: un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios (contenidos en esquemas), y un conjunto de representaciones lingüísticas y simbólicas" (Vergnaud, 2009, p.94).

Considera que un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza (Vergnaud, 1990, p.133). A través de las situaciones y de los problemas que se resuelven es como un concepto adquiere sentido para el niño. El estudio que hace Vergnaud del desarrollo y el funcionamiento de un concepto, en el curso del aprendizaje o durante su utilización, le lleva a considerar necesario distinguir tres planos o componentes, la tripleta (S, I, G), como constituyentes de un concepto C, donde,

> S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia).
>
> I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado)
>
> G: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

No hay en general biyección entre significante y significado, ni entre invariante y situación. No se puede por tanto reducir el significado ni al significante, ni a la situación. La noción de sentido es entendida como una relación del sujeto a las situaciones y al significante. “Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante lo que constituye el sentido de esta situación o de este significante para este sujeto” (Vergnaud, 1990, p. 158). Por ejemplo, el sentido de la adición para un sujeto es el conjunto de esquemas que puede poner en obra para tratar las situaciones a las cuales el sujeto llega a estar confrontado, y que implican la idea de adición; es también el conjunto de esquemas que puede poner en juego para operar sobre los símbolos (numéricos, algebraicos, gráficos o lingüísticos) que representa la adición.

Vergnaud (1982; 1990) va un paso más allá que Frege en la problematización del concepto matemático al abordar el problema del aprendizaje y la enseñanza: el concepto mismo es una entidad compleja y sistémica formada por la interacción entre tres tipos de objetos: los sistemas de representación, las situaciones problemáticas y las invariantes operatorios.

4.3. El triángulo epistemológico

Steinbring (1997; 2006) hace una interpretación del triángulo de Frege y del propuesto por Ogden y Richards (1923), adoptando una perspectiva epistemológica que ayude a comprender los procesos de interpretación, comunicación y construcción de significados que tienen lugar en la clase de matemáticas.

El triángulo epistemológico que propone incluye los tres elementos (Figura 4): el signo o símbolo, el objeto o contexto de referencia, el concepto, entendido este último como concepto matemático ideal o abstracto.

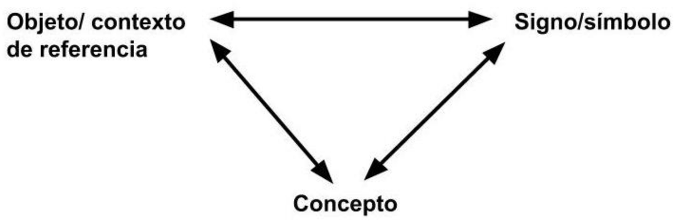

Figura 4. El triángulo epistemológico (Steinbring, 2006, p. 135)

Mediante el triángulo epistemológico, se modeliza una mediación semiótica (representacional) donde "los vínculos entre los vértices del triángulo epistemológico no se definen de manera explícita e invariable, más bien forman un sistema equilibrado donde se apoyan mutuamente. En el sucesivo desarrollo del conocimiento, las interpretaciones de los sistemas de signos y los contextos de referencia que les acompañan serán modificados" (Steinbring, 1997, p 52).

Atribuye dos funciones a los signos matemáticos:

1) Una función semiótica: el papel de los signos matemáticos como "algo que se pone en lugar de otra cosa".
2) Una función epistemológica: el papel de los signos matemáticos en la constitución epistemológica del conocimiento matemático (Steinbring, 2006, p. 134)

Para comprender el modelo semiótico-epistemológico sobre el conocimiento matemático de Steinbring es necesario clarificar la naturaleza de los vértices del triángulo. Se asume que "El verdadero objeto matemático, esto es el concepto matemático, no puede ser identificado con sus representaciones" (Steinbring, 2006, p.137). Pero entonces, ¿qué son los conceptos matemáticos? ¿Qué son los objetos/contextos de referencia?

La aplicación del triángulo epistemológico al concepto de probabilidad (Figura 5) permite comprender las características de este modelo teórico sobre el conocimiento matemático.

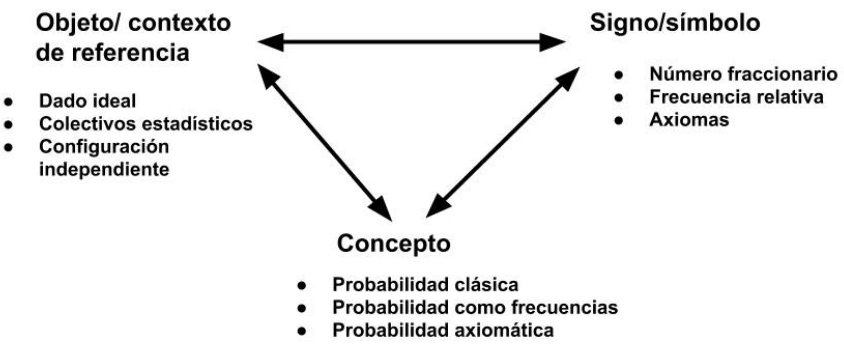

Figura 5. Triángulo epistemológico aplicado al concepto de probabilidad (Steinbring, 1997, p. 53)

Se puede observar que dentro de la categoría de *signo/símbolo* se incluyen expresiones diversas (número fraccionario, frecuencia relativa, axiomas). Dentro de la categoría de *objetos/contexto de referencia* se incluyen situaciones problemáticas donde se aplica la probabilidad, como la determinación de si un dado es o no sesgado (ideal), la recopilación de colecciones de datos estadísticos para determinar la probabilidad, y el cálculo de probabilidades en configuraciones de sucesos independientes. Dentro de la categoría *concepto,* incluye diversos significados o sentidos del concepto de probabilidad: probabilidad clásica, probabilidad en sentido frecuencial y probabilidad axiomática.

Es decir, aunque no se menciona de manera explícita se está asumiendo que el concepto de probabilidad tiene diferentes significados, dependiendo de los tipos de contextos o situaciones-problemas donde interviene y que tales situaciones y significados involucran diferentes sistemas de representación, aunque la referencia a los axiomas es muy vaga. Posiblemente quiera decir, la expresión simbólica de los axiomas, puesto que los axiomas en sí mismos no son representaciones sino propiedades de la probabilidad que la ligan con otros objetos matemáticos, como la unión o intersección de sucesos.

> "El triángulo epistemológico es un modelo para hacer accesible el conocimiento matemático invisible con respecto a su carácter estructural, para describir sus particularidades y también para analizar los procesos interactivos de construcción del conocimiento matemático - por lo tanto relaciones invisibles que son expresadas en contextos y actividades ejemplares" (Steinbring, 2006, p. 144).

El triángulo epistemológico de Steinbring sugiere implícitamente, que el concepto, los signos/símbolos de referencia y los objetos/configuración de referencia, incluyen una variedad de estructuras generales (varias construcciones de probabilidad, número natural, etc.). Las relaciones recíprocas de las estructuras conceptuales con los sistemas de representación y los diferentes contextos y situaciones de uso deben tenerse en cuenta para organizar y explicar la generación del conocimiento matemático, es decir, la epistemología del concepto. En este modelo se adopta una perspectiva sistémica, tanto para la estructura de los conceptos como para los sistemas de símbolos y los contextos. Frege atribuye varios sentidos al concepto matemático, mientras que para Steinbring estos sentidos se relacionan recíprocamente con diversos sistemas simbólicos y contextos.

5. CONCORDANCIAS Y COMPLEMENTARIEDADES ENTRE TEORÍAS SEMIÓTICAS

La cuestión del uso de los términos significado y sentido por parte de los distintos autores y disciplinas está ligada a la noción de objeto y, en el caso de las matemáticas, a la naturaleza de los objetos abstractos. Por lo tanto, la semiótica está esencialmente ligada a la ontología, a los distintos tipos de objetos a los que se refieren los signos y a las diversas modalidades en las que los objetos pueden participar en la comunicación y la interpretación. Las respuestas a la cuestión del significado de Frege, Vergnaud y Steinbring difieren sustancialmente en la naturaleza de los objetos referidos o representados por los signos, aunque los tres modelos son triádicos. En Frege se asume una posición platónica, trascendentalista, sobre la referencia (el objeto referido). El baricentro, por ejemplo, es único aunque puede representarse de diferentes maneras y cada una de ellas proporciona un significado distinto. En cierto modo, los modelos de Vergnaud y Steinbring responden de forma similar a la pregunta de qué representa, por ejemplo, la palabra "número": representa el concepto (ideal, abstracto) de número; pero para la pregunta de qué significa el número, o qué es el número la respuesta es diferente: un sistema heterogéneo formado por tres componentes (triplete): situaciones, invariantes, representaciones (Vergnaud); el triplete signo, objeto, concepto (Steinbring).

En el EOS encontramos diferencias relevantes en la respuesta que se da a la cuestión sobre el significado de un concepto matemático, al considerar que estos objetos no se pueden desligar de las prácticas matemáticas, al asumir la perspectiva antropológica para las matemáticas, esto es, concebir la matemática como actividad humana. Además, sobre los objetos y las prácticas se puede adoptar una perspectiva institucional (prácticas sociales o compartidas), o personal (prácticas idiosincrásicas de un sujeto) y también una perspectiva sistémica y unitaria.

Cuando un objeto interviene de manera unitaria, la respuesta sobre qué es su significado sería una de sus posibles definiciones (reglas que definen de manera intensional el concepto). Cuando interviene el objeto de manera sistémica, la respuesta a dicha pregunta sería el sistema de prácticas operativas y discursivas en que dicho objeto interviene de manera crítica, incluyendo por tanto una de las posibles definiciones, junto con las situaciones, lenguajes, propiedades y argumentaciones implicadas (significado parcial). También es necesario en el análisis epistemológico y didáctico de un objeto matemático tener en cuenta la diversidad de significados parciales que puede tener un objeto y la articulación de los mismos en un *significado global*, como se puede ver en Batanero y Díaz (2007) para la probabilidad o en Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) para la igualdad de números reales.

En la posición ontosemiótica se avanza en la progresiva complejificación del concepto matemático al conectarlo primeramente con la actividad de las personas, mediada por los artefactos lingüísticos y materiales puestos en juego en la resolución de situaciones - problemas específicos. Seguidamente se constata que cada sentido, o significado parcial, está ligado a una regla específica (concepto-definición) de uso de los elementos lingüísticos ante una clase de situaciones (contextos, fenómenos) y a otros objetos procedimentales, proposicionales y argumentativos. Finalmente, los diversos sentidos-significados parciales se organizan en un significado holístico formado por la trama de sentidos y los objetos que les acompañan (Figura 6).

El EOS también tiene en cuenta el uso del significado en su interpretación funcional u operacional, esto es, como el uso que se hace de los objetos en las diversas prácticas. Así, por ejemplo, los símbolos numéricos no sólo refieren a los conceptos correspondientes, son también instrumentos para contar, numerar, ordenar, etc.

Como se indica en la Figura 6 en la perspectiva ontosemiótica sobre el conocimiento matemático se considera útil complementar la tríada semiótica (expresión, contenido, criterio) con la tríada pragmatista (práctica, objeto, significado), con el fin de articular el análisis antropológico de la actividad matemática con el análisis de los textos que reflejan dicha actividad. También se sugiere en la figura 6 que los significados parciales de la probabilidad (intuitivo, clásico, subjetivo, frecuencial, lógico, propensión y axiomático) reflejan distintos sentidos (Frege) y también la composición del concepto de probabilidad (Steinbring). Cada significado parcial se puede analizar en términos de configuraciones ontosemióticas formadas por seis componentes (problemas, lenguajes, conceptos/regla, proposiciones, procedimientos y argumentos), las cuales amplían la tripleta conceptual de Vergnaud.

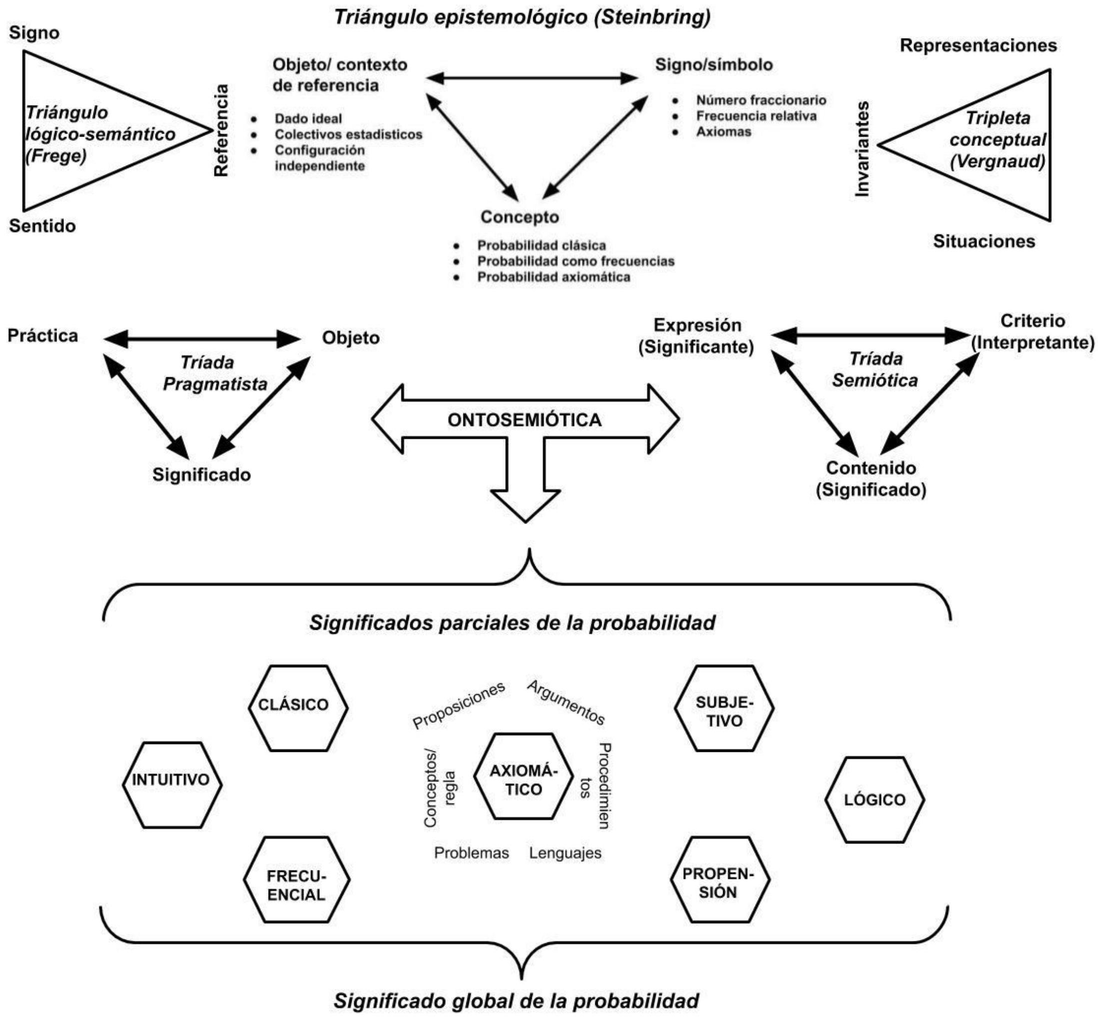

Figura 6. Del triángulo epistemológico a la trama de configuraciones ontosemióticas

6. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

El objetivo de este trabajo ha sido presentar una síntesis de la teoría del significado que se ha elaborado desde la perspectiva del EOS, la cual está permitiendo abrir un nuevo campo de reflexión sobre lo que podría llamarse perspectiva *ontosemiótica*, en la que el estudio de los signos debe hacerse conjuntamente con el análisis de los objetos referidos por los signos, su naturaleza y función. Se han mostrado las fuentes sobre las que se apoya la ontosemiótica y su intento de compaginar teorías realistas y operacionales sobre el significado, cuando el problema se aborda desde el contexto de construcción y difusión del conocimiento matemático, esto es, el contexto de la educación.

En este trabajo se han considerado las concordancias y complementariedades del EOS con otros modelos sobre el significado aplicables al conocimiento matemático, en un intento de iniciar la articulación de varias teorías (Bikner-Ahsbahs and Prediger, 2014). Este estudio de clarificación, contrastación y articulación de teorías del significado apenas se ha iniciado en este trabajo, por lo que serán necesarios nuevos desarrollos, profundizando en el análisis realizado y ampliando a otros autores.

Aunque el problema del significado es de interés para diversas disciplinas y campos de indagación (filosofía, lingüística, psicología, semiótica, etc.) consideramos que el campo de la educación, y en particular la educación matemática, aporta una perspectiva rica para abordar este problema. La perspectiva ontosemiótica propone que el problema de los signos y su interpretación no se deberían desligar del problema ontológico, entendido en términos de indagación sobre la naturaleza y tipos de entidades referidas por los signos, como también sobre el papel instrumental desempeñado por los mismos en la actividad de construcción y comunicación del conocimiento. Además, la solución del problema ontosemiótico implica nuevas maneras de abordar el problema epistemológico sobre el origen y evolución del conocimiento, sin duda esencial para abordar el problema educativo-instruccional (Godino, et al., 2019).

En el EOS no hay objetos sin prácticas, que son hechas por personas, y los objetos (conceptos, proposiciones, representaciones, etc.) tienen una doble "realidad", personal (mental, cognitiva), e institucional (cultural, compartida). De este modo, el EOS trata de articular la problemática cognitiva con la epistemológica (entendida desde una perspectiva antropológica y, por tanto, histórico-cultural) en el aprendizaje de las matemáticas. En los documentos curriculares se utilizan los términos significado y sentido de manera informal, sin especificar realmente qué se entiende por significado o sentido. En algunos casos se enfatiza una visión mental/ cognitiva del significado, mientras que en otros se refuerza una visión epistémica/cultural, cuando el diseño y análisis de los procesos de instrucción matemática requieren articular ambas perspectivas. En consecuencia, creemos que la elaboración de una teoría holística del significado que tenga en cuenta también las nociones de sentido y comprensión es muy útil para la investigación y la práctica educativa. Esta teoría es aplicable en el análisis de los objetos matemáticos tanto a nivel macro (como cuando se habla de desarrollar en los alumnos el "sentido numérico"), como a nivel micro (en afirmaciones del tipo "los alumnos no comprenden el significado del concepto de fracción, del teorema de Pitágoras, del gráfico de sectores, etc.)". En el análisis macroscópico de cualquier objeto matemático es necesario tener en cuenta los distintos significados parciales y planificar el aprendizaje de cada uno de ellos, así como su articulación progresiva. Además, en la resolución de situaciones-problema, en los procesos de demostración, representación, generalización, etc., el profesorado debe tener en cuenta la configuración de objetos y significados que los alumnos deben conocer, interpretar y comprender.

La investigación de diseño instruccional o ingeniería didáctica (Artigue, 1989; 2009) establece las fases de estudio previo, diseño, implementación y análisis retrospectivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En la primera fase se realiza un análisis epistemológico de los contenidos de enseñanza, con el fin de contar con criterios fundamentados para diseñar las tareas de aprendizaje en la segunda fase. Las herramientas teóricas del EOS, en particular la noción de significado parcial y su articulación con el significado global, junto con las categorías de objetos y procesos implicados en las prácticas (Figura 2) pueden apoyar estas fases del diseño instruccional. En cuanto a las fases de implementación y análisis retrospectivo, la noción de idoneidad didáctica ofrece una pauta para apoyar la reflexión sobre la práctica docente (Esqué & Breda, 2020; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya, & Bustamante, 2019).

La visión ontosemiótica sobre el significado de los objetos matemáticos tiene implicaciones para la formación de profesores ya que puede ayudar a tomar consciencia de la complejidad del conocimiento y, por tanto, de la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

> "Los profesores con seguridad necesitan el conocimiento del contenido matemático y conocimiento didáctico; y dentro del conocimiento del contenido didáctico, también necesitan conocimiento epistemológico, de forma que sean capaces de evaluar las restricciones epistemológicas del conocimiento matemático en los diferentes contextos sociales de enseñanza, aprendizaje y comunicación matemática" (Steinbring, 1998, p. 160).

En este sentido, el profesor de matemáticas debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, así como la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas, con el fin de poder planificar la enseñanza, gestionar las interacciones en el aula, comprender las dificultades y evaluar los niveles de aprendizaje de los estudiantes.

La noción de idoneidad didáctica se ha desarrollado en el marco del EOS (Godino et al, 2007; Breda, Font, & Pino-Fan, 2018) para proporcionar criterios que deben cumplir los procesos de instrucción matemática para optimizar el aprendizaje, teniendo en cuenta las restricciones del contexto. Con este objetivo, es necesario considerar el conocimiento aportado por la investigación didáctica sobre las facetas epistémicas, cognitivas, afectivas, interaccionales, mediacionales y ecológicas implicadas en los procesos de instrucción. Además, la visión pragmática de los significados institucionales y personales del EOS proporciona un elemento esencial para evaluar la idoneidad epistémica y cognitiva de los procesos de instrucción matemática. Por un lado, para lograr una alta idoneidad epistémica los significados planificados o implementados deben representar el significado global del objeto matemático estudiado. Por otro lado, un nivel adecuado de idoneidad cognitiva requiere que los significados personales construidos por los estudiantes concuerden con los significados institucionales planificados o implementados (Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, & Breda, 2018), y que los estudiantes sean capaces de establecer conexiones entre los diferentes significados y objetos involucrados.

Esta aproximación pragmática al significado puede servir para analizar la representatividad de los significados previstos para un objeto matemático dado por el currículo de un nivel educativo concreto en un país determinado (Pino-Fan, Parra-Urrea, & Castro, 2019; Burgos & Godino, 2020) o en los libros de texto (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, & Godino, 2020). Además, presentar a los alumnos una muestra representativa de los significados parciales de los objetos matemáticos les permite desarrollar su competencia de resolución de problemas, según los diferentes contextos en los que se utilizan estos objetos.

La noción de idoneidad didáctica está siendo ampliamente utilizada como herramienta para analizar las secuencias didácticas diseñadas e implementadas por los profesores, con el fin de lograr una adecuada enseñanza de las matemáticas (Breda, 2020; Morales &

Font, 2019; Sousa, Silva Gusmão, Font, & Lando, 2020). También se emplea para organizar programas de formación centrados en la reflexión sobre la práctica docente (Esqué & Breda, 2020; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya, & Bustamante, 2019). El constructo de idoneidad didáctica facilita la reflexión sistemática de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y sobre los factores que intervienen en su estudio.

RECONOCIMIENTOS
Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/5011000110), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

REFERENCIAS

Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.),

Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from NORMA08 (pp. 7-16). Rotterdam: Sense Publishers.

Atkin, A. (2010). Peirce’s theory of sign. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/peirce-semiotics/

Balacheff, N. (1990). Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 259-272.

Baker G. P. & Hacker P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations.* Basil Blackwell.

Batanero, C. & Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In J.P Van Bendegen & K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-128). Springer.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Berlin: Springer.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* University of California Press.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal, 47*(5), 256-265.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Harvard University Press.

Burch, R. (2014). Charles Sanders Peirce. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* http://plato.stanford.edu/entries/peirce/

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema, 34*(66), 40-68.

Burgos, M. & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18*, 1-20.

Campos, D. G. (2010). Peirce's philosophy of mathematical education: fostering reasoning abilities for mathematical inquiry. *Studies in Philosophy and Education, 29*(5), 421-439. DOI: 10.1007/s11217-010-9188-5.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Lawrence Erlbaum Associates

Dummett, M. A. E. (1973). *Frege. Philosophy of Language.* Harper & Row, Publishers.

Dummett, M.A.E. (1996). *The seas of language*. Clarendon Press.

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Lumen, 1979.

Esqué, D. & Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-12

Frege, G. (1891). Function and concept. In B. McGuinness (Ed.), *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy* (pp. 137-156). Basil Blackwell, 1984.

Frege, G. (1892). Sense and reference. *The Philosophical Review, 57* (3) (May, 1948), 209-230.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265

Kutschera, F. von (1975). *Philosophy of language.* D. Reidel Publishing Comp.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegomena to a theory of language*. The University of Wisconsin Press, 1969.

Marrades, J. (2014). Sobre la noción de 'forma de vida' en Wittgenstein. *Agora, 33*(1), 139-152. http://dx.doi.org/10.15304/ag.33.1.1873

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 139–160.

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., Vidakovic, D. & Elstak, I. (2012) Vectors, change of basis and matrix representation: onto-semiotic approach in the analysis of creating meaning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43* (1), 11-32.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., & Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones, 6*(2), 142-162.

Morales, Y. & Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa, 45*, 1-20.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Ogden, C. K. & Richards, I.A. (1923). *El significado del significado.* Paidos, 1984.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 11-38

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols. C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks (Eds.). Harvard University Press.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* Routledge.

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., & Breda (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education. 16*(6), 1091–1113.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220.

Presmeg, N. (2014). Semiotic in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 538-542). Springer.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2018). (Eds.). *Signs of signification. Semiotics in Mathematics Education Research.* Springer.

Radford, L. (2001). On the relevance of semiotics in mathematics education. Paper presented to the *Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference*, The Netherlands, University of Utrecht, July 12-17, 2001. Available from http://www.luisradford.ca/pub/91_On_the_relevance.pdf

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39-65.

Sáenz-Ludlow, A. & Kadunz, G. (2016). *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts*. Sense Publishers.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Sousa, J. R. de, Silva Gusmão, T.C.R., Font, V., & Lando, J. C. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Acta Scientiae, 22*(4), 98-120.

Speaks, J. (2014). Theories of meaning. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/meaning/

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics 32*, 49-92.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education 1*, 157-189.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? - An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Aguilar, 1978.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31-41.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(2,3), 133-170.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83–94.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* Basil Blackwell Ltd, 1958.

Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the foundations of mathematics.* The M.I.T. Press, 1967.