

# Teoría de la idoneidad didáctica. Una visión ampliada de la calidad de la instrucción matemática<sup>1</sup>

Juan D. Godino, Carmen Batanero y María Burgos

Universidad de Granada, Granada, España

## Resumen

La caracterización de la calidad de la instrucción y la elaboración de instrumentos de su medida es una cuestión de creciente interés en educación matemática. Usualmente los instrumentos de medida desarrollados evalúan aspectos limitados de las prácticas educativas para poder asignar puntuaciones fiables a las observaciones de las clases y las producciones de los estudiantes. El objetivo de este trabajo es desarrollar un instrumento para el análisis sistemático de las diferentes facetas y componentes que intervienen en un proceso de instrucción matemática, que puedan usar los propios profesores para reflexionar sobre su práctica y tomar decisiones fundamentadas para su mejora progresiva. El instrumento de análisis y reflexión elaborado se basa en la noción de idoneidad didáctica y los supuestos teóricos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se analizan, así mismo, las concordancias y complementariedades con otros instrumentos de medida de la calidad de la instrucción. Se trata de complementar los esfuerzos de la medida cuantitativa de la calidad con otro enfoque cualitativo que pone el foco en la iniciativa y responsabilidad de los profesores cuando han de tomar decisiones sobre sus propias prácticas docentes. Esa actividad docente de reflexión debe estar apoyada en instrumentos específicos que permitan revelar la complejidad de los procesos y la dificultad de lograr el equilibrio entre principios didácticos a veces contrapuestos.

*Palabras clave:* Educación matemática, idoneidad didáctica, calidad de la instrucción, enfoque ontosemiótico.

## 1. Introducción

Diversas investigaciones educativas se han interesado por desarrollar instrumentos de observación y medida de la calidad de la instrucción, bien de características genéricas, específicas de los contenidos, o una combinación de ambas. Charalambous y Praetorius (2018) citan, entre otros, los proyectos, Elementary Mathematics Classroom Observation Form (Thompson y Davis, 2014), Instructional Quality Assessment (IQA, Matsumura et al. 2008), Mathematical Quality of Instruction (MQI, Hill et al., 2011) y Mathematics-Scan (M-Scan, Walkowiak et al., 2014). La mayoría de estos trabajos tratan de ofrecer información válida y fiable a las autoridades educativas para la toma de decisiones sobre los planes de reforma o procesos de acreditación y selección de profesores.

En conclusión, la medición de la instrucción a escala es fundamental para proporcionar información al público sobre la calidad de las escuelas, apoyar una mejor toma de decisiones en los distritos y dirigir la atención hacia una práctica de instrucción excelente (la oportunidad de aprender de los estudiantes) como un resultado deseado en sí mismo para la reforma educativa. (Matsumura et al., 2008, p. 297).

Un rasgo distintivo de los estudios de calidad de la instrucción es la selección de muestras de clases, escuelas, profesores cuyo trabajo es observado, junto con muestras de producciones de los estudiantes, para tratar de relacionar estadísticamente algunas variables de enseñanza con el

---

<sup>1</sup> Godino, J. D., Batanero, C. & Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19(6), em2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>

aprendizaje. Se construyen protocolos de observación de clases y de los trabajos de los estudiantes explicitando criterios para la asignación de puntuaciones por parte de evaluadores externos (Boston, 2012; Hill et al., 2011). De esta manera se ofrecen recomendaciones sobre cómo mejorar la instrucción a nivel de escuelas o distritos.

Usualmente los instrumentos de medida de la calidad de la instrucción evalúan aspectos limitados de las prácticas educativas asociadas empíricamente con el aprendizaje de los estudiantes. Se persigue la viabilidad de los instrumentos y una calidad técnica que garantice un uso fiable a la hora de asignar puntuaciones a las observaciones de las clases y las producciones de los estudiantes. Estos requisitos de las mediciones pueden reducir la generalización de los resultados, ya que no se captan aspectos importantes de la instrucción (por ejemplo, las concepciones erróneas sobre las matemáticas o el papel asignado a los procesos matemáticos).

Aunque la evaluación intencionada de unos pocos aspectos bien elegidos de la instrucción puede proporcionar información útil para la mejora de la instrucción, disponer de un instrumento comprensivo puede ayudar a tomar conciencia de la complejidad de los procesos de educativos e identificar variables significativas. Además, con frecuencia, la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje requiere priorizar unos principios y dejar en un segundo plano otros, teniendo en cuenta las circunstancias específicas del contexto y de los estudiantes. Tomar estas decisiones corresponde esencialmente a los propios profesores, que pueden encontrarse desprovistos de herramientas que los orienten en esta compleja tarea. Por eso, en este trabajo nos proponemos desarrollar un instrumento para el análisis sistemático de las diferentes facetas y componentes que intervienen en un proceso de instrucción, que puedan usar los propios profesores para reflexionar sobre su práctica y tomar decisiones fundamentadas para su mejora progresiva.

El problema, aunque se enmarca en las investigaciones sobre calidad de la instrucción, adopta un punto de vista más amplio, apoyado en la teoría de idoneidad didáctica desarrollada en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino et al., 2007). El problema es relevante ya que como afirma Boston (2012, p. 77), "Medidas alternativas de la calidad de la instrucción son importantes y necesarias porque tienen el potencial de ir más allá de la simple medición de la instrucción y servir como medio para mejorarla". Teniendo en cuenta la gran cantidad de investigaciones que se vienen realizando sobre la calidad de la instrucción y los instrumentos de medida construidos (Bostic et al., 2021; Charalambous y Praetorius, 2018), es necesario estudiar el aporte de la nueva herramienta y sus aplicaciones al campo de la formación de profesores de matemáticas.

En nuestra investigación tratamos de complementar los esfuerzos de la medida cuantitativa de la calidad con un enfoque cualitativo que pone el foco en la iniciativa y responsabilidad de los profesores cuando han de tomar decisiones sobre sus propias prácticas docentes. Esa actividad docente de reflexión debe estar apoyada en instrumentos específicos que permitan revelar la complejidad de los procesos y la dificultad de lograr el equilibrio entre principios didácticos a veces contrapuestos. Los resultados de este trabajo tienen, por tanto, implicaciones en la investigación sobre formación de profesores, en particular, las interesadas por la reflexión del profesor y la toma de decisiones sobre la práctica (Tzur, 2001; Karsenty & Arcavi, 2017).

El artículo se estructura en los siguientes apartados. En primer lugar, incluimos una revisión de la literatura sobre calidad de la instrucción matemática destacando el artículo de Praetorius y Charalambous (2018) por proporcionar un instrumento de medida que sintetiza 12 trabajos relevantes sobre el tema. Seguidamente describimos el marco teórico, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos y la Teoría de la Idoneidad Didáctica, en los que basamos la construcción del instrumento de análisis de la calidad de la instrucción. Después de describir las cuestiones de investigación y el método, la sección de resultados desarrolla el sistema de criterios de idoneidad didáctica para las diferentes facetas y componentes que caracterizan los procesos de

instrucción matemática (Guía de análisis de la idoneidad de procesos de instrucción matemática, GAIPIM, incluido como apéndice). Sigue la sección de discusión en la que identificamos las concordancias y complementariedades de la GAIPIM con el instrumento de medida de la calidad de la instrucción de Praetorius y Charalambous (2018) desarrollado a partir de la articulación de 12 propuestas teórico-metodológicas sobre el estudio de la calidad de la instrucción. Así mismo, para mostrar la potencialidad de la herramienta desarrollada, referimos diversos trabajos donde se han abordado implicaciones del uso de la idoneidad didáctica en la formación de profesores de matemáticas. El artículo finaliza con la sección de limitaciones y conclusiones.

## 2. Calidad de la instrucción matemática como tema de investigación

Berlin y Cohen (2018) indican que no hay consenso sobre la mejor manera de conceptualizar y medir la calidad de la enseñanza de las matemáticas, como pone de manifiesto la proliferación de herramientas específicas de observación en el aula. Dichos protocolos hacen hincapié en diferentes dimensiones de la calidad de la instrucción, lo que puede dificultar la determinación de la herramienta que mejor se adapte a cada objetivo. También plantean el debate entre el uso de escalas diseñadas para medir la calidad de la enseñanza de contenidos académicos generales y las específicas de las matemáticas. Las escalas centradas en contenidos genéricos incluyen las prácticas de retroalimentación del profesor, así como aspectos de la enseñanza que pueden ser pertinentes para diversas materias. En contraste, las escalas específicas de las matemáticas incorporan elementos característicos de la enseñanza de las matemáticas, como el uso de múltiples representaciones del contenido matemático o el tipo de argumentación. Los autores citados sostienen que hay aspectos importantes en el desarrollo de las clases, tales como el apoyo emocional, la organización del aula, el soporte pedagógico y el compromiso de los estudiantes que quedan ocultos, o no se incorporan en los instrumentos específicos, por lo que instrumentos de tipo mixto pueden tener mayor validez para evaluar la calidad de la instrucción. “Estos datos sugieren que las concepciones de la enseñanza de alta calidad en las aulas de matemáticas probablemente deban incluir tanto las prácticas específicas de las asignaturas como las genéricas de los contenidos” (Berlin y Cohen, 2018, p. 378).

### *Algunos marcos específicos de matemáticas*

A continuación, se mencionan algunas propuestas específicas para evaluar la calidad de la instrucción matemática, describiendo con mayor detalle el artículo de síntesis de Praetorius y Charalambous (2018). El marco TRU (Teaching for Robust Understanding) (Schoenfeld, 2013; 2018), pone el énfasis en el tipo de experiencias propuestas a los estudiantes que determinan su aprendizaje. Se utiliza principalmente para diseñar e implementar actividades de desarrollo profesional, como una herramienta que pueden usar los formadores, profesores, o comunidades de aprendizaje profesional con fines de mejora continua. En este modelo se distinguen cinco dimensiones en los procesos instruccionales: Contenido matemático; demanda cognitiva; acceso equitativo al contenido; actividad, autoría e identidad; evaluación formativa. El marco TRU asume principios de una instrucción centrada en el estudiante y considera necesarias y suficientes estas cinco dimensiones para caracterizar los tipos de enseñanza que dan lugar a que los estudiantes sean pensadores y solucionadores de problemas con conocimientos, flexibilidad y recursos.

TRU implica un cambio fundamental de perspectiva, de la centrada en el profesor a la centrada en el estudiante. La pregunta clave no es: “¿Me gusta lo que hace el profesor?”. Es: “¿Cómo se percibe la instrucción, desde el punto de vista del estudiante?”. Las acciones del profesor son muy importantes, por supuesto, pero lo que realmente importa es la forma en que los estudiantes tienen oportunidades significativas de dar sentido al contenido (Schoenfeld, 2018, p. 494).

En el proyecto *Learning Mathematics for Teaching*<sup>2</sup>, Hill et al. (2008) construyen un instrumento para medir la calidad matemática de la instrucción, indicando que poder medirla de manera más satisfactoria permitiría a los educadores mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la materia. En Hill et al. (2011) se describe el marco conceptual desarrollado para identificar y analizar las características matemáticas del trabajo en la clase, introduciendo el constructo MQI (Mathematical Quality of Instruction) y elaborando una guía de codificación para los distintos criterios. “La calidad matemática de la instrucción se refiere solamente a la naturaleza del contenido matemático disponible para los estudiantes durante la instrucción” (p. 30). El marco del MQI incluye seis constructos y sus escalas correspondientes: Riqueza y desarrollo de las matemáticas; Receptividad a las ideas de los estudiantes; Conexión de las prácticas de clase con las matemáticas; Lenguaje; Equidad y Presencia de errores matemáticos.

Jentsch y Schlesinger (2017) describen otro modelo para medir la calidad de la instrucción en educación matemática que considera tres dimensiones tenidas en cuenta en la investigación reciente sobre la instrucción: gestión de la clase, apoyo al aprendizaje personal y activación cognitiva. Estos autores consideran que las tres dimensiones anteriores tienen un carácter genérico, aplicables a cualquier proceso de instrucción y que es necesario tener en cuenta una cuarta dimensión que refleje aspectos específicos del contenido matemático. Los aspectos que consideran en esa cuarta dimensión son los siguientes: Precisión matemática del profesor; Uso de representaciones; Competencias matemáticas (modelación, resolución de problemas, uso del lenguaje matemático, argumentación y prueba); Aproximación constructiva a los errores matemáticos de los estudiantes; Calidad de ejercicios y tareas; Dotar de sentido; Explicaciones matemáticas del profesor; Ejemplos apropiados y Profundidad en las matemáticas (por ejemplo, generalizaciones).

Praetorius y Charalambous (2018) analizan y sintetizan los aportes realizados en los 12 artículos incluidos en un número especial de la revista ZDM dedicado a la calidad de la instrucción. Cada uno de dichos trabajos describe un marco teórico y herramientas metodológicas para el estudio de la calidad de la instrucción, algunos focalizados en procesos de instrucción matemática, otros aplicables a cualquier contenido o bien con un carácter mixto. Los autores reconocen la naturaleza multidimensional y compleja de la instrucción, lo que explica la existencia de distintos marcos e instrumentos observacionales, tanto genéricos como específicos, para comprender y valorar la calidad de los procesos instruccionales. Así mismo, constatan las diferencias, propósitos, fundamentos teóricos, aspectos instruccionales cubiertos por cada marco, la manera en que hacen operativo y miden la calidad, así como las cuestiones relacionadas con la fiabilidad y validez de las medidas. Para hacer su estudio comparativo elaboran un marco global de aspectos a observar en los procesos instruccionales (ver Tabla 1) considerando dichos aspectos como prácticas docentes que crean oportunidades de aprendizaje de los estudiantes.

Tabla 1. Aspectos para observar y medir la calidad de la instrucción (modelo de Praetorius y Charalambous, 2018, p. 546).

NIVEL I	NIVEL II
I. GESTIÓN DEL AULA Y DEL TIEMPO	1) Gestión del comportamiento
	2) Gestión del tiempo
II. SELECCIÓN Y PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS	1) Selección de contenidos matemáticamente valiosos y apropiados para el desarrollo
	2) Motivación del contenido
	3) Presentación del contenido de forma estructurada
	4) Presentación del contenido de forma matemáticamente precisa y correcta

<sup>2</sup> Disponible en [www.sitemaker.umich.edu/lmt](http://www.sitemaker.umich.edu/lmt)

III. ACTIVACIÓN COGNITIVA	Potencial de activación cognitiva a través de:
	1) (a) la selección por parte del profesor de tareas desafiantes que respondan al nivel cognitivo de los alumnos
	2) (b) uso por parte del profesor de prácticas ricas en matemáticas
	3) Facilitación por parte del profesor de la actividad cognitiva de los alumnos
IV. PRACTICAR	4) El profesor apoya el aprendizaje metacognitivo de los alumnos a partir de tareas de activación cognitiva
	1) El profesor ayuda a los alumnos a consolidar sus conocimientos/habilidades procedimentales
V. EVALUACIÓN (FORMATIVA)	2) El profesor corrige las dificultades y los errores de los alumnos al practicar.
	1) La evaluación está alineada con los objetivos de aprendizaje
	2) El profesor comprueba regularmente la comprensión
	3) El profesor ofrece una retroalimentación de calidad a los estudiantes
VI. APOYO SOCIO-EMOCIONAL	4) El profesor aprovecha la información de la evaluación formativa para orientar los siguientes pasos de la enseñanza
	1) Relaciones profesor-alumno
VII. ASPECTOS INSTRUCTIVOS TRANSVERSALES DESTINADOS A MAXIMIZAR EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS	2) Relaciones alumno-alumno
	1) Formar un entorno que fomente los hábitos productivos (por ejemplo, actividad, autoría/aprendizaje autónomo, identidad, perseverancia)
	2) Diferenciación y adaptación
	3) Potenciar la participación y el compromiso activo de todos los alumnos

En la Tabla 1 se sintetizan las categorías de Nivel I y II de este modelo (Praetorius y Charalambous, 2018), que servirán de base para la revisión y refinamiento del modelo propuesto por la TID. En un Nivel I de categorías, el modelo distingue siete componentes, cada uno de los cuales incluye entre 2 y 4 características observables que forman parte del Nivel II de categorías. En el Apéndice D de dicho artículo se incluyen aspectos de calidad más detallados para algunos de los aspectos de Nivel II, definiendo, por tanto, un nivel III de indicadores en la estructura de la calidad. Por ejemplo, en el aspecto, *Se presenta el contenido de forma matemáticamente precisa y correcta* (Nivel II) se incluyen tres indicadores:

- La presentación de los conceptos y procedimientos es matemáticamente precisa;
- Utilización de un lenguaje y una notación matemática precisos;
- Ausencia de errores matemáticos importantes.

Como se puede observar, tanto los indicadores de Nivel II como de Nivel III se describen en términos observacionales, esto es, como sucesos apreciables en el desarrollo de una lección cuya manifestación se valora como positiva. Es decir, de manera implícita se asume que el “contenido *se debería* presentar de forma matemáticamente precisa y correcta”; o de manera más pormenorizada, “el uso del lenguaje y la notación matemática *deberían ser* precisos”. En consecuencia, vemos que todos estos enunciados se pueden formular como normas o criterios que se deberían seguir en la implementación de las lecciones, o sea, como *juicios de valor* cuya racionalidad es necesario explicitar. En algunos casos, como los citados, la justificación de esas normas parece obvia: la enseñanza no debe difundir errores. Pero el tema de la precisión del contenido matemático requiere algunas matizaciones cuando se asume que los objetos matemáticos pueden tener diversos significados, con distintos grados de generalidad y que pueden ser expresados de maneras más o menos formales, según la edad y formación previa de los estudiantes. Estos supuestos ontológicos, semióticos y cognitivos son rasgos característicos del EOS como se indica en el siguiente apartado.

### 3. Marco teórico

#### 3.1. Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático

El EOS es un sistema teórico modular e inclusivo para la educación matemática que viene desarrollando diversas herramientas para abordar los problemas de investigación que plantea la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino et al., 2007; Godino et al., 2019). En este enfoque se considera pertinente y útil avanzar hacia la construcción de un marco teórico, que permita abordar de manera articulada los problemas epistemológicos, ontológicos, semiótico-cognitivos y educativos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se asume una visión antropológica (Wittgenstein, 1953) y pragmatista (Peirce, 1958) de las matemáticas; por tanto, la actividad de las personas en la resolución de problemas se considera el elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

Para el análisis de las facetas epistémica (contenido) y cognitiva (aprendizaje) de los procesos instruccionales se han introducido en el EOS dos herramientas específicas: *significado*<sup>3</sup> y *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos. En el EOS la noción de práctica matemática, entendida como toda acción que un determinado sujeto realiza para resolver un problema, comunicar y/o generalizar su solución, constituye el punto de partida para analizar la actividad matemática. Consecuentemente, el significado de un objeto matemático se refiere a los sistemas de prácticas operativas y discursivas, que realiza una persona (significado personal), o que son compartidas en el seno de una institución (significado institucional), para resolver una situación-problema (Godino et al., 2007). En las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos matemáticos, de distinta naturaleza y función que se relacionan entre sí formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos (Figura 1). Los objetos matemáticos primarios, situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos matemáticos de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Godino et al., 2007). También se pueden considerar otros procesos más generales (megaprosesos), como los de resolución de problemas, modelización, establecimiento de conexiones entre objetos y significados.

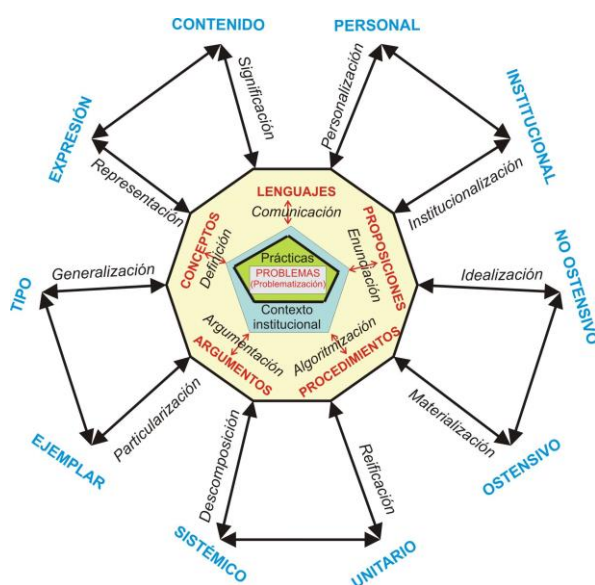


Figura 1. Configuración de prácticas, objetos y procesos (Godino, 2014, p. 23)

<sup>3</sup> En Godino et al. (2021) se describe la visión holística sobre el significado del EOS en la cual, partiendo de teorías semióticas generales (Hjelmslev, 1943; Peirce, 1958; Wittgenstein, 1953) se articulan posiciones pragmáticas y referenciales sobre el significado y el sentido en educación matemática.

Caracterizar los diversos significados de los objetos y sus interrelaciones, tomando conciencia de su pluralidad y relatividad, permite construir un significado global que sirva de referencia para el análisis de los procesos de instrucción matemática.

### 3.2. La noción de idoneidad didáctica y su estructura

El análisis comparativo de los marcos teóricos desarrollados para caracterizar y evaluar la calidad de los procesos de instrucción debe tener en cuenta cuatro aspectos (Charalambous y Praetorius, 2018): 1) el enfoque específico adoptado para desarrollar el marco; 2) el propósito para el que se ha desarrollado (el “por qué”); 3) la conceptualización del marco (el “qué”); y finalmente 4) su operacionalización y medición (el “cómo”). En este apartado describimos estos aspectos para la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, 2013; Breda et al., 2018), en la cual se incluye una manera específica de entender la calidad educativa. La TID adopta un enfoque global u holístico que trata de abarcar las diferentes dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, sus relaciones con otras disciplinas y el contexto ecológico en que tienen lugar.

La *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Dichos significados institucionales son representativos, así mismo, del significado global de referencia<sup>4</sup>.

Con este enunciado se describen las condiciones que debe reunir un proceso instruccional para que se le atribuya el valor de la idoneidad, el cual se liga inicialmente a la optimización o adecuación del acoplamiento entre las actividades de enseñanza y aprendizaje y la implementación de unas matemáticas ricas, teniendo en cuenta los múltiples factores que intervienen en dichos procesos. De aquí se puede pasar a enunciar un criterio (principio) global de idoneidad didáctica:

Se debería conseguir que los estudiantes aprendan las matemáticas que se pretende enseñar, siendo dichas matemáticas representativas del significado global de las mismas y teniendo en cuenta las circunstancias personales, contextuales y temporales.

Esta formulación del criterio global de idoneidad en términos de las herramientas teóricas del EOS incorpora valores sociales de la enseñanza de las matemáticas, como son evitar el fracaso escolar y hacer un uso eficiente de los recursos disponibles.

#### Estructura del constructo idoneidad

En la TID se ha propuesto tener en cuenta las siguientes seis dimensiones o facetas de un proceso instruccional, las cuales definen un Nivel I de análisis:

- *Faceta epistémica*: Significado institucional planificado o implementado para un determinado contenido matemático (problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, lenguaje, argumentos) o alguno de sus diferentes significados parciales.
- *Faceta ecológica*: Relaciones del contenido con otros temas y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan y condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- *Faceta mediacional*: Recursos materiales y tecnológicos disponibles para la enseñanza y posibles formas de utilizarlos, así como el tiempo asignado al estudio.

<sup>4</sup> Versión modificada de la incluida en Godino et al., (2016, p. 2).

- *Faceta interaccional*: Organización del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los alumnos, dirigidas al logro de los objetivos educativos, teniendo en cuenta las dificultades de aprendizaje de los estudiantes y la negociación de significados.
- *Faceta cognitiva*: Niveles de desarrollo, comprensión y competencia matemática de los estudiantes (significados personales), dificultades y errores respecto al contenido pretendido.
- *Faceta afectiva*: Emociones, actitudes, creencias, valores, intereses y necesidades de los estudiantes respecto a los contenidos y al proceso de estudio.

Las acciones y recursos utilizados en las facetas epistémica, ecológica, interaccional y mediacional tienen como objetivo el aprendizaje de los estudiantes, en el cual se contemplan tanto los aspectos cognitivos como afectivos.

Existen interacciones complejas entre las diferentes facetas ya que los procesos educativos-instruccionales acontecen en el seno de sistemas sociales recursivos y abiertos en los que las interacciones entre los elementos se basan en la interpretación y negociación de significados, así como en una compleja trama de valores entrelazados.

Los sistemas sociales suelen ser sistemas semióticos en el sentido de que las interacciones entre los elementos no se basan en la fuerza física sino en el significado y la interpretación. En estos términos, la educación puede caracterizarse como un sistema semiótico recursivo abierto. Es un sistema semiótico porque los intercambios entre profesores y alumnos no son intercambios a nivel de fuerza física sino a nivel de significado. El sistema funciona como un sistema recursivo porque los profesores y los alumnos actúan sobre la base de sus interpretaciones y comprensiones. Los sistemas educativos son generalmente sistemas abiertos porque interactúan con su entorno (aunque en condiciones de reducción de la complejidad) (Biesta, 2010, p. 497).

La noción general de idoneidad didáctica requiere la articulación coherente de seis idoneidades parciales relativas a las facetas descritas. Estas pueden ser refinadas a partir de los componentes que proporcionan las diversas herramientas elaboradas en el EOS. Así, por ejemplo, la idoneidad epistémica refiere al grado en que los significados institucionales del contenido y las configuraciones de objetos y procesos implementados representan al significado global de referencia, teniendo en cuenta las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados. La idoneidad cognitiva refiere al grado en que los objetivos de aprendizaje son un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, y los significados personales logrados concuerdan con los significados institucionales planificados, teniendo en cuenta sus circunstancias personales y contextuales. La optimización conjunta de las idoneidades parciales puede ser conflictiva en un contexto y circunstancias específicas:

lo cual conlleva, primero, tratar los criterios de idoneidad de manera conjunta (y no como criterios independientes como frecuentemente se hace en el caso de la calidad) y, segundo, a cuestionar o relativizar la validez de un determinado criterio en un contexto específico, lo cual lleva a dar pesos relativos diferentes a cada criterio en función del contexto. De esta manera, el peso relativo de cada criterio de idoneidad parcial ya no depende solo de factores externos (la existencia de un consenso previo en la comunidad), sino, en mayor medida, de factores internos (el conflicto que genere el criterio de idoneidad con el contexto y con los otros criterios) (Breda et al., 2018, p. 265).

Un segundo nivel de análisis (Figura 2) vendría determinado por los componentes (en cantidad variable) de cada una de las facetas, siendo algunos aplicables a cualquier disciplina, mientras que otros son específicos de las matemáticas. Para las facetas epistémica y cognitiva es posible y conveniente proponer un Nivel III de análisis distinguiendo subcomponentes determinados por los elementos que caracterizan el conocimiento matemático según el EOS. Cuando el proceso instruccional que se analiza refiere a contenidos específicos, por ejemplo, la probabilidad, es posible definir un Nivel IV de análisis en las facetas epistémica y cognitiva teniendo en cuenta aspectos propios de la enseñanza y aprendizaje de dicho contenido (Beltran-Pellicer et al., 2018).



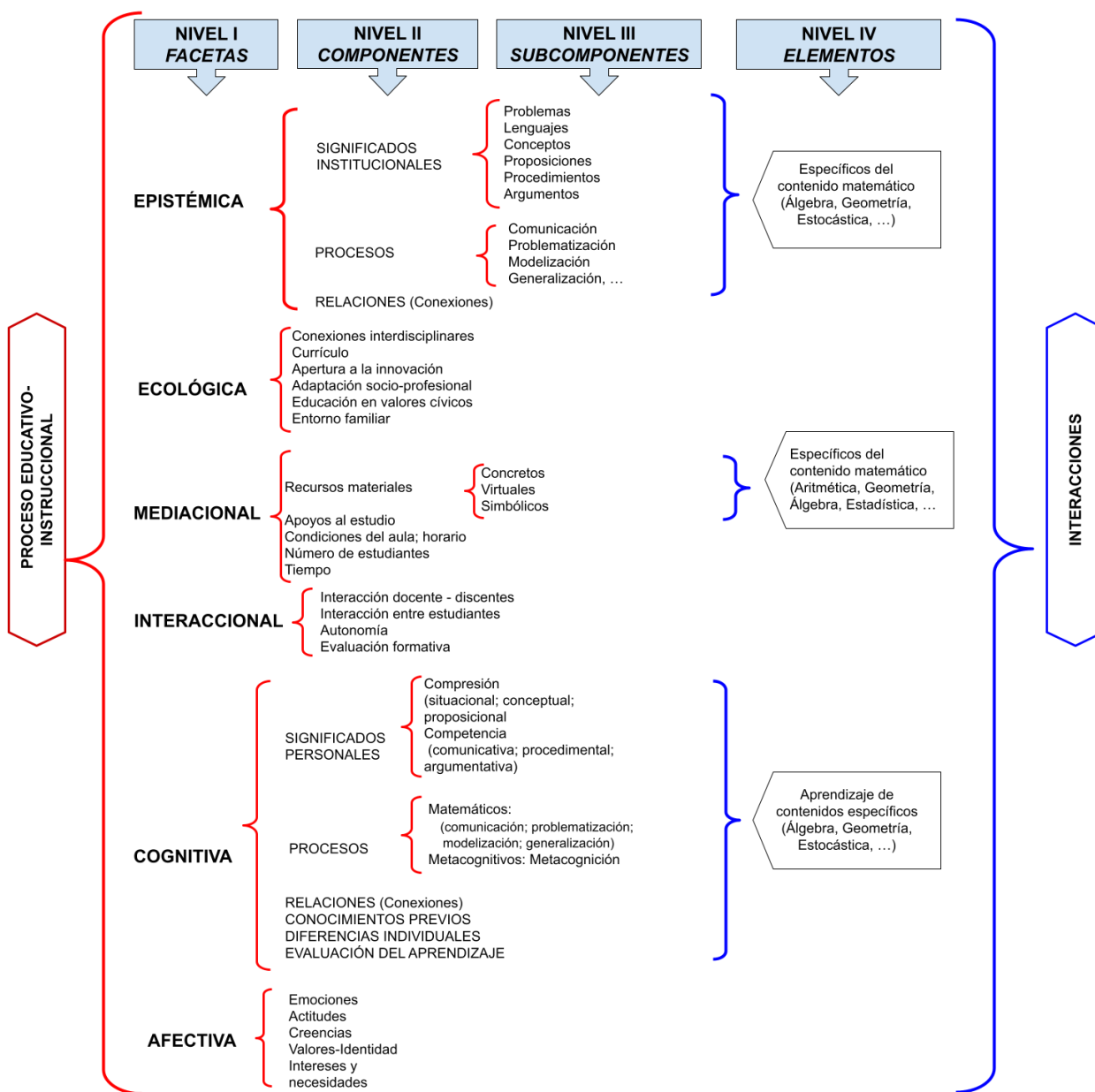


Figura 2. Facetas y componentes de un proceso educativo-instruccional (Godino, Batanero, Burgos y Gea, 2021, modificado)

El sistema de categorías de la Figura 2 se aplica para estructurar los criterios de idoneidad didáctica, como hacemos en la Sección 5. La comparación de la Figura 2 con la Tabla 1 muestra la disparidad de expresiones que se usan para describir la idoneidad didáctica y la calidad de la instrucción. Esta diversidad de expresiones fue observada por Praetorius y Charambolus (2018) al elaborar su propuesta de síntesis de los 12 instrumentos de medida de la calidad instruccional que analizaron. No obstante, se puede observar que los siete aspectos del Nivel I de la Tabla 1 están contemplados de manera más o menos explícita en las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional del modelo TID.

#### 4. Cuestiones de investigación y método

Los estudios sobre calidad de la instrucción tienen como principal objetivo ofrecer información válida y fiable a las autoridades educativas para la toma de decisiones sobre los planes de reforma o procesos de acreditación y selección de profesores. Los instrumentos diseñados a tal fin, se aplican sobre muestras de clases para evaluar la calidad (resultados) del aprendizaje, compararlas y ordenarlas, o

en muestras de profesores para valorar la calidad de la enseñanza (sus conocimientos matemáticos o didácticos), compararlos y ordenarlos. La necesidad de que las decisiones estén fundamentadas impone exigencias respecto a la fiabilidad de las mediciones, lo cual requiere centrar la atención en rasgos objetivamente observables y desarrollar procedimientos rigurosos de valoración.

El constructo idoneidad didáctica desarrollado en el marco del EOS propone una visión ampliada sobre la calidad de la instrucción, al tratar de articular las diferentes facetas y componentes. Tiene como principal objetivo servir de apoyo en los procesos de autoevaluación de los profesores sobre su práctica a fin de identificar aspectos de mejora progresiva. El enfoque cuantitativo con el que se abordan usualmente los estudios de la calidad se complementa con una visión interpretativa sobre la optimización local de los procesos educativos. En este artículo nos planteamos la siguiente cuestión de investigación:

¿Cuáles deberían ser las características de un instrumento para el análisis de la calidad de la instrucción que tenga en cuenta las diversas facetas y componentes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

La respuesta a esta cuestión se concreta en la elaboración de una Guía de análisis de la idoneidad de procesos de instrucción matemática (GAIPIM) incluida como apéndice. La discusión sobre su pertinencia y necesidad nos lleva a plantear otra cuestión derivada de la anterior:

¿Cuáles son las concordancias y complementariedades del instrumento GAIPIM con los instrumentos de medida de la calidad?

Dado que se prevé usar la GAIPIM como recurso para la reflexión de los profesores sobre su propia práctica, se abre un programa de investigación focalizado en responder a cuestiones tales como:

¿Cómo contribuye la TID para analizar los registros de la práctica docente y comprender dicha práctica?

¿Qué tipo de acciones formativas se deberían diseñar e implementar para capacitar a los profesores en el uso de GAIPIM?

¿Qué cambios tienen lugar en la práctica docente de los profesores capacitados en el uso de la GAIPIM?

La primera cuestión se aborda de manera teórica aplicando la estructura de facetas y componentes de un proceso instruccional que propone el EOS y la noción de criterio de idoneidad didáctica. La racionalidad de los criterios formulados, entendidos como juicios de valor, se basa en los supuestos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, asumidos en el EOS, y sus concordancias con otras teorías educativas. La segunda cuestión se aborda mediante la selección y análisis de un trabajo representativo de los estudios sobre calidad de la instrucción (Pretorious & Charalambous, 2018) y la comparación de los indicadores de calidad con los criterios de idoneidad didáctica. Aunque las restantes cuestiones no son objeto de investigación de este trabajo, mencionaremos algunas publicaciones con resultados de estudios desarrollados en el marco de la TID sobre su uso en la formación de profesores de matemáticas.

## **5. Resultados. Sistema de criterios de idoneidad didáctica**

En esta sección proponemos el criterio general de idoneidad para las diferentes facetas, justificando su racionalidad en los supuestos del EOS y las concordancias con otras teorías educativas generales o específicas de educación matemática. El sistema completo de criterios de idoneidad didáctica para las facetas y componentes configura el instrumento Guía de Análisis de Procesos de Instrucción Matemática (GAIPIM) incluido como Anexo.

Los criterios de idoneidad deben entenderse como principios que se deberían seguir para que el proceso instruccional se pueda valorar como idóneo en cada una de las diferentes facetas, atendiendo a sus componentes. En otros trabajos previos (Godino, 2013; Breda et al., 2018) se formularon indicadores de idoneidad para dichas componentes, entendidos como rasgos que se deberían observar en un proceso instruccional idóneo. Para poder asignar un mayor o menor grado de idoneidad sería necesario desarrollar rúbricas con reglas de asignación de valores numéricos al grado de cumplimiento de cada indicador. Esta orientación cuantitativa en la valoración de la idoneidad no se ha desarrollado en la TID, ya que el uso prioritario del instrumento GAIPIM (en versiones previas) ha sido principalmente el desarrollo profesional docente, y no la comparación y ordenación de la calidad de muestras representativas de lecciones y profesores.

### **5.1. Criterios relacionados con las características del contenido matemático (faceta epistémica)**

Para la TID, es esencial valorar la calidad del contenido que se enseña y se aprende, por lo que la faceta epistémica tiene un lugar destacado en el nivel I, pero también en los niveles II y III (Figura 2) mostrando la complejidad que supone medir la calidad de los conocimientos matemáticos institucionales.

El criterio general de idoneidad epistémica lo enunciamos en los siguientes términos:

El sistema de significados institucionales parciales del contenido y las configuraciones de objetos y procesos ligadas a cada significado, implementado a lo largo del proceso instruccional, debería estar articulado, ser representativo del significado global de referencia y tener en cuenta las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados.

El contenido matemático implementado debe reunir ciertas características para que al proceso instruccional se le atribuya el valor de idoneidad epistémica, esto es, que sean unas matemáticas ricas, óptimas o adecuadas, lo que sin duda dependerá de las circunstancias contextuales y personales de los estudiantes (faceta ecológica y cognitiva). El modelo ontosemiótico de conocimiento matemático aporta elementos para caracterizar dichas matemáticas, según se desarrolla en los diferentes componentes y subcomponentes de la faceta epistémica (Font et al., 2013). En esta formulación los significados de un contenido (p. e., el concepto de número natural, fracción, derivada, etc.) son entendidos de manera pragmática-antropológica como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas realizadas para la solución de un tipo de situaciones-problemas. Un proceso de instrucción específico tiene lugar en un entorno particular y se realiza en un intervalo de tiempo usualmente acotado, por lo que es inevitable seleccionar algunos de los significados parciales del objeto en cuestión y, por tanto, las configuraciones de objetos y procesos asociadas a los significados seleccionados, pero globalmente (a lo largo de la educación) el conjunto de significados debe ser representativo<sup>5</sup>.

Con esta formulación del criterio general de idoneidad epistémica se acepta que no existen unas únicas “buenas matemáticas”, sino diversas, ya que para cada contenido se pueden identificar diversos significados “correctos” que varían en su generalidad, formalización y en los objetos y procesos

---

<sup>5</sup> El requerimiento de que los significados, objetos y procesos implementados sean representativos del significado institucional previsto implica que no debería haber errores matemáticos en las planificaciones y presentaciones del profesor. Por esta razón no se incluye como un componente de Nivel II la “ausencia de errores” en la faceta epistémica, como sí hacen algunos modelos, por ejemplo, MQI (Hill et al., 2011) y Breda et al., (2018). La ausencia de conflictos epistémicos se contempla como criterios relacionados con los subcomponentes definiciones, proposiciones y procedimientos (Nivel III).

implicados<sup>6</sup>. En consecuencia, la optimización del aprendizaje tiene que ser local, o sea, adaptada al contexto, sujetos y circunstancias.

Teniendo en cuenta la visión antropológica de la matemática asumida en el EOS, esto es, la matemática como actividad de las personas y como sistema de objetos culturales emergentes de la misma, la resolución de problemas se considera fundamental en los procesos instruccionales. Esto queda reflejado en el criterio general y en los criterios ligados a las componentes: significados (contextualización mediante situaciones-problemas comprensibles para los estudiantes), relaciones o conexiones entre significados, objetos (situaciones-problemas) y procesos (problematización).

Los criterios de idoneidad epistémica (Tablas 1A y 1B del Anexo) son concordantes con los principios asumidos por la “Teoría de situaciones didácticas en Matemáticas” (TSDM) (Brousseau, 1997) y también con la “Educación matemática realista” (EMR) (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005), basada en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983; 1991). En estas teorías, como también en propuestas curriculares (como NCTM, 2000), se propone el uso de situaciones - problemas como medio de contextualizar las ideas matemáticas y generarlas a partir de la actividad de resolución, comunicación y generalización de las soluciones. Los principios de actividad y de realidad de la EMR apoyan la consideración de los criterios de idoneidad epistémica. Para Freudenthal (1991) “no hay matemáticas sin matematización”, actividad que puede ser de aplicación a resolver problemas del entorno, o problemas de reorganización del propio conocimiento matemático.

Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica elevada requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión (lo que concuerda con los trabajos de Duval, 1995; 2006), las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como los argumentos asociados a las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones (Hanna y Villiers, 2012). Todos estos procesos que caracterizan unas matemáticas ricas tienen que ser relativizados al contexto, sujetos y circunstancias locales y temporales.

También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático, así como entre los diversos tipos de objetos y procesos. Las matemáticas son un campo de estudio integrado. “En un currículo coherente, las ideas matemáticas están relacionadas y se construyen unas sobre otras” (NCTM, 2000, p.14). Esta posición concuerda con el “Principio de interconexión” de la EMR: Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, ...) no pueden ser tratados como entidades separadas. Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados. Además, la resolución de problemas de contextos ricos con frecuencia significa que es necesario aplicar un amplio rango de herramientas y conocimientos matemáticos.

## **5.2. Criterios incluidos en la faceta ecológica**

La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas y condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. El proceso de instrucción tiene lugar en un contexto educativo que fija unos fines y valores para la educación de los ciudadanos

---

<sup>6</sup> Ejemplos de la reconstrucción del significado global de algunos objetos matemáticos se describen en Batanero y Díaz (2007), Burgos y Godino (2020), Wilhelmi et al. (2007), entre otros trabajos.

y profesionales que se deben respetar. Dichos fines y valores son interpretados y especificados dentro del proyecto educativo del centro o departamento que coordina la acción de los distintos profesores implicados. El docente no trabaja de manera aislada en el aula, sino que forma parte de una comunidad de estudio e indagación que aporta conocimientos útiles sobre prácticas matemáticas y didácticas idóneas que se deberán conocer y tener en cuenta.

Estas consideraciones llevan a formular un criterio general de idoneidad ecológica en los siguientes términos:

El proceso de educativo-instruccional debería estar en concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa.

La educación matemática crítica (Skovsmose, 2012) aporta ideas para lograr que la educación matemática permita a los ciudadanos ser parte activa de una sociedad democrática. Más allá del aprendizaje matemático individual de cada persona, se hace necesario formular reflexiones sobre las consecuencias colectivas de este aprendizaje en la sociedad actual. En la escuela, las prácticas matemáticas pueden ejercer una enorme influencia en dos sentidos totalmente opuestos: por un lado, las matemáticas reducidas a meros cálculos rutinarios pueden reforzar actitudes pasivas y complacientes y, por otro, las matemáticas en su sentido más amplio pueden desarrollar el pensamiento crítico y alternativo.

Como componentes de la faceta ecológica se incluye un aspecto que influye en la riqueza del contenido matemático, como es el caso de las conexiones entre los diversos bloques de contenido y materias disciplinares, que se relaciona también con la idoneidad epistémica, así como otros aspectos de carácter transversal y cuya responsabilidad en la implementación corresponde no solo al profesor, sino también a otros agentes. Tal es el caso del componente currículo que debería contemplar los resultados de la investigación en educación matemática, tener en cuenta la formación social y profesional de los estudiantes y la educación en valores. También se menciona el entorno familiar como un factor condicionante de los aprendizajes. Hay importantes pruebas de investigación sobre la influencia del entorno familiar en el rendimiento educativo. “Sin embargo, en la mayoría de los casos no nos parece deseable alejar a los niños de sus padres simplemente para mejorar sus posibilidades de éxito educativo en algún momento” (Biesta, 2010, p. 501) Esta observación muestra la complejidad de lograr un equilibrio axiológico en los procesos educativos-instruccionales.

### **5.3. Criterios para la faceta mediacional**

En la faceta mediacional se incluyen recursos de diversos tipos que condicionan y apoyan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Además de los medios materiales concretos y tecnológicos, como calculadoras y ordenadores, se tiene en cuenta los apoyos al estudio (libros de texto, cuadernos de actividades, videos educativos, ...), el número de estudiantes que el docente tiene asignados, el horario en que tienen lugar las clases, las condiciones materiales del aula, así como el tiempo total asignado al estudio y su distribución. Como criterio general de idoneidad mediacional indicamos:

Se debería disponer de los recursos adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En las últimas décadas se ha creado un amplio consenso en educación matemática sobre el uso de materiales manipulativos y recursos virtuales como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje al considerar que permiten “concretizar y visualizar” los conceptos matemáticos. “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes” (NCTM,

2000, p. 24). Esta organización profesional considera, así mismo, que las calculadoras y demás herramientas tecnológicas, como sistemas de cálculo algebraico, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son componentes vitales de una educación matemática de alta calidad.

Pero también hay estudios (por ejemplo, Uttal et al., 1997; McNeil y Jarvin, 2007) que tienen un enfoque más crítico sobre el uso de los manipulativos. Uttal et al. (1997) consideran que la distinción tajante entre formas concretas y simbólicas de expresión matemática no es útil. No hay garantía de que los alumnos establezcan las conexiones necesarias entre los manipulativos y las expresiones matemáticas más tradicionales, ya que en última instancia el manipulativo pretende representar algo diferente, o sea, es también un símbolo.

Un manipulativo concreto puede ser interesante para los niños pequeños, pero esto no es suficiente para que avancen en su conocimiento de las matemáticas o de los conceptos. Para aprender matemáticas a partir de los manipulativos, los niños necesitan percibir y comprender las relaciones entre los manipulativos y otras formas de expresión matemática (Uttal et al., 1997, p. 38).

En el EOS se considera que las relaciones entre las representaciones materiales y visualizaciones (objetos ostensivos) de los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos son complejas, ya que éstos tienen naturaleza regulativa (objetos no ostensivos) y no se deben confundir con ninguna de sus representaciones (Godino et al., 2007; Font et al., 2013). Por ejemplo, el número racional “un tercio” puede ser referido, y participar en las prácticas matemáticas, mediante la expresión simbólica  $1/3$ . También puede ser representado por un diagrama de sectores en el que el disco unidad se divide en tres partes iguales y se aparta una de las porciones, de la que se dice que es un tercio del todo unitario. Pero cualquier fracción equivalente a  $1/3$  también representa al racional un tercio. El progreso en la comprensión matemática requiere, por tanto, distinguir el objeto matemático de cualquiera de sus representaciones ostensivas (sean visuales o manipulativas), las cuales materializan de manera icónica o indexical al objeto matemático.

También es necesario reconocer la distinta eficiencia de las representaciones simbólicas frente a las icónicas e indexicales para los procesos de cálculo, generalización y demostración. La actividad matemática se realiza usualmente con el apoyo de medios de expresión y cálculo cuya naturaleza puede ser tangible o manipulativa (ábaco, geoplano, ...), visual-diagramática (gráficas cartesianas, simuladores probabilísticos, ...), o con medios simbólicos alfanuméricos. Cualquiera de estos medios de expresión está dialécticamente relacionados con objetos matemáticos no-ostensivos. Éstos regulan el desarrollo de las prácticas matemáticas operativas y discursivas, cuya finalidad es dar respuestas a situaciones-problemas intra o extra matemáticas (relacionadas con el entorno físico o social).

De estos postulados ontosemióticos se deriva un criterio de idoneidad específico del uso de recursos materiales en la instrucción matemática:

Se debería distinguir los objetos matemáticos (regulativos, no ostensivos) de sus respectivas representaciones concretas, visuales o simbólicas en las prácticas matemáticas y didácticas.

Por otra parte, hay que tener en cuenta la dialéctica entre las configuraciones de objetos y procesos basadas en el uso de recursos manipulativos-visuales y las configuraciones analíticas, basadas en medios simbólicos de representación. Entre estos dos tipos de configuraciones se establecen relaciones sinérgicas estando con frecuencia entrelazadas en las prácticas matemáticas. Las configuraciones basadas en representaciones concretas y visuales desempeñan un papel clave, no solo en el trabajo matemático escolar, sino en la generación de conjeturas, la inducción y explicación, mientras que las configuraciones analíticas son esenciales en los procesos de generalización, cálculo y justificación (demostración). De aquí se deriva otro criterio específico de idoneidad mediacional:

Se debería articular el uso de configuraciones de objetos y procesos basadas en representaciones alfanuméricas con las basadas en representaciones concretas para potenciar progresivamente los procesos de generalización, cálculo y demostración matemática.

Bartolini y Martignone (2020) proponen distinguir entre manipulativos concretos y virtuales. Los primeros son artefactos físicos que pueden ser manipulados por los estudiantes y ofrecen experiencias tangibles en la actividad matemática escolar, mientras que los segundos son manipulados digitalmente y ofrecen experiencias visuales. Pero los símbolos alfanuméricos, que forman parte de la categoría lenguajes de la faceta epistémica, son también “manipulados”, esto es, son objetos de tratamiento y conversión entre diferentes registros (Duval, 2006). La articulación del uso de estos medios de expresión simbólica con los recursos materiales, como señalan Uttal et al. (1997), nos lleva a considerar la utilidad de distinguir tres subcomponentes en la categoría de recursos materiales: manipulativos concretos, virtuales y simbólicos (Figura 2). Para los tres tipos de recursos existe una gran variedad de dispositivos o artefactos dependiendo de los contenidos matemáticos que se aborden: aritmética (ábaco, regletas, muro de fracciones, ...), geometría (geoplano, geogebra, ...), estadística (simuladores, graficadores, ...), álgebra (balanza algebraica, ...). Estos dispositivos configuran un Nivel IV de análisis para el componente recursos materiales de la faceta mediacional.

#### 5.4. Criterios propuestos en la faceta interaccional

Aunque existe un debate entre el modelo de escuela que transmite conocimientos y la escuela en la que se construyen conocimientos, el resultado parece inclinarse actualmente a favor del segundo. “El marco de aprendizaje constructivista es un fundamento para la matemática de la reforma actual en los grados K-12. Muchos futuros profesores a lo largo de los Estados Unidos están siendo formados en que esta es la manera en la que los estudiantes aprenden mejor” (Andrew, 2007, p. 157). Esta preferencia por los modelos didácticos centrados en el estudiante se puede observar en las orientaciones curriculares de diversos países, que adoptan marcos teóricos de tipo constructivista o socio-constructiva, como se observa en el NCTM:

Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de sus aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso. Cuando son desafiados con tareas elegidas de manera apropiada, los estudiantes adquieren confianza en su habilidad para abordar problemas difíciles, desean resolver las cosas por sí mismos, muestran flexibilidad al explorar ideas matemáticas e intentar vías de solución alternativas, y disposición para perseverar (NCTM, 2000, p. 20).

Así mismo, la investigación educativa atribuye gran importancia al discurso, el diálogo, la conversación en la clase:

La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase. Si aceptamos seriamente que los profesores necesitan oportunidades para aprender a partir de su práctica, el desarrollo de conversaciones matemáticas permite a los profesores aprender continuamente de sus estudiantes. Las conversaciones matemáticas que se centran sobre las ideas de los estudiantes pueden proporcionar a los profesores una ventana sobre el pensamiento de los estudiantes en modos que el trabajo individual de los estudiantes no lo permite (Frankle et al., 2007, p. 237).

Estas tendencias justifican la propuesta en la TID del siguiente criterio general de idoneidad interaccional:

Los patrones de interacción deberían permitir identificar los conflictos semióticos potenciales, poner los medios adecuados para su resolución, favorecer la autonomía progresiva en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas en los estudiantes.

En la Tabla 4 (Anexo) incluimos criterios de idoneidad ligados a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes. Teniendo en cuenta principios de aprendizaje socio-constructivista ampliamente asumidos se valora positivamente la presencia de momentos en que los

estudiantes asumen la responsabilidad del aprendizaje. No obstante, al tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático, en la TID este principio constructivista del aprendizaje se matiza en el sentido marcado por el siguiente criterio interaccional específico (Godino, Burgos y Wilhelmi, 2020):

Se deberían adaptar los modos de interacción profesor-estudiantes teniendo en cuenta los momentos del proceso de estudio, aplicando un formato dialógico-colaborativo en los momentos de primer encuentro con el contenido y atribuyendo autonomía al estudiante en los momentos de ejercitación y aplicación.

La aceptación del principio de autonomía en el aprendizaje es un rasgo esencial de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), en la que las situaciones de acción, comunicación y validación se conciben como momentos adidácticos de los procesos de estudio, esto es, situaciones en las que los alumnos son protagonistas en la construcción de los conocimientos pretendidos. Así mismo, en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR) se asume un principio de interacción, según el cual, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya elaborada, son considerados como participantes activos del proceso de enseñanza - aprendizaje, en el que ellos mismos desarrollan herramientas y comprensiones, y comparten sus experiencias unos con otros. La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación, son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que las aproximaciones informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los métodos formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005, p. 290).

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que se debe dar a los estudiantes una “oportunidad guiada” de "reinventar" las matemáticas. Esto implica que, en la EMR, tanto los profesores como los programas educativos tienen un papel fundamental en cómo los estudiantes adquieren los conocimientos. Ellos dirigen el proceso de aprendizaje, pero no de una manera fija mostrando lo que los estudiantes tienen que aprender. Esto estaría en contradicción con el principio de actividad y daría lugar a comprensiones falsas. Por el contrario, los estudiantes necesitan espacio y herramientas para la construcción de conocimientos matemáticos por sí mismos. Con el fin de alcanzar este estado deseado, los profesores tienen que proporcionar a los alumnos un ambiente de aprendizaje en el que el proceso de construcción pueda surgir.

La toma de decisiones sobre la progresión del estudio, tanto por parte del docente como de los estudiantes, requiere la puesta en práctica de procedimientos de observación y encuesta para una evaluación formativa de los aprendizajes.

### **5.5. Criterios relativos a las características del aprendizaje (faceta cognitiva)**

En el EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación por parte de los estudiantes de los significados institucionales planificados, lo que supone el reconocimiento e interrelación por parte de los estudiantes de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas que los determinan. El acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales previstos o efectivamente implementados se logra mediante su participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Esto lleva a formular el criterio general de idoneidad cognitiva en los siguientes términos:

Los objetivos de aprendizaje deberían suponer un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, teniendo en cuenta sus circunstancias personales y contextuales. Además, los



significados personales logrados por los estudiantes deberían ser concordantes con los significados institucionales planificados. La evaluación de los aprendizajes debería servir para mejorar el proceso instruccional.

El valor idoneidad cognitiva se atribuye a un proceso instruccional como un rasgo graduable ligado al logro de unos objetivos de aprendizaje que demandan un esfuerzo alcanzable y acordes con unas matemáticas ricas y adaptadas a las circunstancias personales y contextuales. Este enunciado del criterio general de idoneidad cognitiva está inspirado en el concepto de zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1934), por lo que los objetivos de aprendizaje deben implicar el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas valiosas que impliquen un esfuerzo alcanzable con el apoyo del profesor y los compañeros, teniendo en cuenta los conocimientos previos y capacidades individuales (principio de equidad). Se asume un aprendizaje relacional y con comprensión de los significados institucionales. La evaluación de los aprendizajes logrados debería tener en cuenta las características personales de los estudiantes y los distintos niveles de comprensión y competencia que pueden alcanzar. En la Tabla 5B (Anexo) se formulan criterios específicos para los componentes de la faceta cognitiva: establecimiento de relaciones o conexiones por parte de los estudiantes, competencia para implementar procesos matemáticos y metacognitivos, consideración de conocimientos previos y diferencias individuales.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) sobre la enseñanza de las matemáticas tienen relación con la idoneidad cognitiva. El principio de igualdad indica, “La excelencia en la educación matemática requiere igualdad, grandes expectativas y un fuerte apoyo para todos los estudiantes”. Se exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas, y que sean incluidos contenidos motivadores para promover el acceso y el logro de todos los estudiantes. El principio de aprendizaje asume que “Los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de sus experiencias y conocimientos previos”. Así mismo, el principio de evaluación afirma que, “La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas relevantes y proveer de información útil tanto a profesores como estudiantes”.

## 5.6. Criterios incluidos en la faceta afectiva

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente sus conocimientos para dar una respuesta al problema, sino también moviliza emociones, actitudes, creencias y valores que condicionan en mayor o menor grado su respuesta. Los procesos afectivos son usualmente considerados como entidades psicológicas, que describen estados o rasgos mentales más o menos estables, o disposiciones para la acción de los sujetos. Pero, desde el punto de vista didáctico el logro de unos estados afectivos que interaccionen positivamente con el dominio cognitivo tiene que ser objeto de consideración por parte de las autoridades educativas y, en particular, por el profesor (Gómez-Chacón, 2000) cuyo trabajo queda condicionado por normas institucionales de carácter afectivo.

La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés, motivación, autoestima y disposición de los estudiantes. Las creencias sobre las matemáticas y el estudio de las mismas también influyen en el aprendizaje y, por tanto, es necesario tenerlas en cuenta. El criterio general de idoneidad afectiva se formula en los siguientes términos:

El proceso de instrucción debería lograr el mayor grado posible de implicación del alumnado (interés, motivación, autoestima) y tener en cuenta sus creencias sobre las matemáticas y su aprendizaje.

El valor idoneidad afectiva se atribuye a un proceso instruccional como una característica graduable dependiente de rasgos del ámbito de las emociones, creencias y actitudes que se promueven y manifiestan en el mismo. En la Tabla 6 (Anexo) se formulan criterios de idoneidad particulares para los distintos componentes de esta faceta, los cuales no son exclusivos de la instrucción matemática, esto es, tienen un carácter general. Estos criterios concuerdan con principios asumidos por diversas investigaciones que se han realizado acerca de las interacciones entre los dominios cognitivo y afectivo en el aprendizaje matemático (Beltrán-Pellicer & Godino, 2020; Gómez-Chacón, 2000; McLeod, 1992).

### **5.7. Interacciones entre facetas**

En los apartados anteriores se han descrito criterios de idoneidad para las seis facetas que intervienen en un proceso instruccional. Como se indica en la Figura 2, dichas facetas no se deben considerar como factores independientes, ya que de hecho se producen interacciones entre las mismas. Así, por ejemplo, el uso de un recurso tecnológico puede determinar que se puedan abordar determinados tipos de problemas y las configuraciones de objetos y procesos correspondientes, lo cual conlleva nuevas formas de representación, argumentación, generalización, etc. También se pueden ver afectadas las formas de interacción entre el profesor y los estudiantes, el interés y motivación, y en definitiva los aprendizajes.

En Godino (2013, p. 127) se incluyen algunos criterios de idoneidad relativos a interacciones entre facetas, formulados en términos de indicadores, no como juicios de valor. Por ejemplo, una interacción entre la faceta epistémica y ecológica se formula como, “El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo”. Este indicador se puede formular como criterio: “El currículo debería proponer el estudio de problemas ...”, el cual a su vez está suponiendo un valor atribuible en mayor o menor medida al proceso instruccional: se valora como un rasgo positivo que el currículo proponga el estudio de problemas de ámbitos variados. El mismo planteamiento se puede hacer con los restantes indicadores de interacciones entre facetas.

## **6. Discusión**

Para analizar las diferencias entre los modelos de idoneidad y calidad de la instrucción hemos elaborado una tabla en la cual hemos proyectado los elementos instruccionales que considera el modelo de calidad elaborado por Praetorius y Charalambous (2018) (Tabla 1) sobre la estructura de facetas, componentes y subcomponentes del modelo de la idoneidad (Figura 2). También hemos considerado la información del Apéndice D del artículo de Praetorius y Charalambous en el que se amplían los descriptores de la calidad hasta el nivel III de los subcomponentes. Seguidamente indicamos las concordancias encontradas.

### **6.1. Comparación de los elementos instruccionales de la idoneidad y la calidad**

En el modelo de calidad de la instrucción se incluyen aspectos que tienen que ver con la faceta epistémica, aunque mezclados con otros. Así para el componente “Selección y presentación de contenidos” (Nivel I) se incluye el indicador “Selección de contenidos matemáticamente valiosos y apropiados para el desarrollo” (Nivel II). La ausencia de conflictos epistémicos o errores en el contenido se menciona con el indicador “Se presenta el contenido de forma matemáticamente precisa y correcta” (Nivel II). Sin embargo, también en la “Activación cognitiva” (Nivel I), se incluye el indicador “Uso de prácticas ricas en matemáticas por parte del profesor” (Nivel II). Este aspecto (que se corresponden con varios de los criterios de la Tabla 1B en Anexo), se desarrolla en el Apéndice D de este artículo con los indicadores de Nivel III siguientes, que hacen referencia a aspectos de la faceta epistémica: “Vinculación y conexión de representaciones/conceptos”; “Explicaciones y

justificaciones”; “Múltiples soluciones y enfoques”; “Patrones y generalizaciones”; “Resolución de problemas y modelización”; “Pruebas”.

No hemos encontrado indicadores de la calidad que se correspondan con la faceta ecológica que propone la TID, dado que usualmente el foco de atención de los estudios sobre calidad de la instrucción son los comportamientos en el seno del aula de clase. Este es un rasgo distintivo entre la aproximación de la noción de idoneidad didáctica respecto a la calidad de la instrucción: el entorno educativo como factor de condicionamiento y apoyo de la actividad instruccional.

Encontramos algunos indicadores relacionados con la faceta mediacional, que forman parte de la “Gestión del aula y del tiempo”, concretamente, la organización del espacio físico y los recursos, y la asignación adecuada del tiempo a los distintos elementos de la lección en función de los principales objetivos de aprendizaje.

En relación con la faceta interaccional se describen los tipos de patrones de interacción que se consideran preferibles en el modelo de Praetorius y Charalambous (2018) para promover los aprendizajes en varios componentes de los aspectos: “Presentación de contenidos” (de forma motivada, estructurada, precisa y correcta); “Activación cognitiva” (facilitación por parte del profesor de la actividad cognitiva y metacognitiva de los estudiantes); “Evaluación formativa” (el profesor comprueba regularmente la comprensión; retroalimentación para los estudiantes); “Aspectos instructivos transversales” (potenciar la participación y el compromiso activo de todos los alumnos). Se observa un cierto compromiso hacia la enseñanza centrada en el estudiante sin olvidar el papel del profesor en la presentación de los contenidos.

El modelo de Praetorius y Charalambous incluye diferentes aspectos relacionados con la faceta cognitiva, principalmente en la “Activación cognitiva” (Nivel I), que se concreta con indicadores (Nivel II) en relación al desafío y garantía de logro por parte de los estudiantes, así como la inclusión de tareas metacognitivas. También en “Practicar” (Nivel I), se contempla el soporte a los estudiantes en la consolidación de conocimientos y habilidades procedimentales, así como en la corrección de sus errores. La evaluación de los aprendizajes es contemplada en una faceta de Nivel I con el título de “Evaluación (formativa)”, mientras que en el caso de la TID se ha incluido como Evaluación de los aprendizajes, que incluye también aspectos de evaluación sumativa, a fin de tener en cuenta el grado de logro de los aprendizajes planificados. La atención a los conocimientos previos y diferencias individuales en la TID aparece considerada en el modelo de Praetorius y Charalambous (2018) por medio de la “diferenciación y adaptación” del componente “Aspectos instructivos transversales” destinados a maximizar el aprendizaje de los estudiantes.

Se incluye el aspecto “Apoyo socio-emocional”, con dos componentes (nivel II), relaciones profesor-alumno y relaciones alumno-alumno. En el Apéndice D de dicho artículo se detallan de la siguiente forma:

- “Relaciones profesor-alumno (por ejemplo, respeto mutuo, trato justo, cortesía, interés por la situación personal de los alumnos, capacidad de respuesta)”
- “Relaciones alumno-alumno (p. ej., respeto, competencia positiva, ausencia de competencia negativa, los alumnos no son negativos/sarcásticos entre sí)”

Se incluye también en la faceta de “Selección y presentación de contenido” un aspecto sobre “Motivación del contenido”. Otros aspectos de la afectividad están incluidos en la faceta de “Aspectos instructivos transversales”, como “Formar un entorno que fomente los hábitos productivos” (por ejemplo, agencia, autoría/aprendizaje autónomo, identidad, perseverancia).

En la Tabla 6 (Anexo) se incluye un mayor detalle de componentes relacionados con la faceta afectiva, en particular las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.

Aunque la aproximación cuantitativa en los estudios sobre la calidad de la instrucción está justificada en procesos de acreditación, evaluación y selección de profesores, o como herramienta para indagar relaciones cuantitativas entre variables instruccionales y los aprendizajes, el enfoque interpretativo y holístico de la TID puede ayudar a identificar limitaciones o sesgos en los instrumentos de medida de la calidad. La TID aporta una visión ampliada de los estudios sobre calidad de la instrucción matemática, mediante la cual se enfatiza una aproximación interpretativa de la trama de valores que se ponen en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos. Se pone de manifiesto la complejidad de optimizar dichos procesos, ya que es necesario lograr un equilibrio en la implementación de principios relativos a las diferentes facetas y componentes implicados, los cuales tienen un fuerte componente local, incluso puntual. Ese *equilibrio axiológico* tiene que ser gestionado por el profesor, ponderando la importancia relativa de cada aspecto según las circunstancias de las personas implicadas y los condicionamientos del contexto.

## **6.2. Implicaciones de la TID para la formación de profesores de matemáticas**

Diversos trabajos empíricos se han realizado empleando los criterios de idoneidad didáctica para analizar las prácticas de enseñanza y de diseño de lecciones en el contexto de cursos de formación de profesores de matemáticas (Breda et al., 2017; Garcés et al., 2021). Estas investigaciones, revelan la utilidad de la TID para reconocer que los juicios de valor emitidos por los profesores en formación sobre la calidad de sus prácticas se corresponden con los criterios en algunas de las facetas, pero no mencionan las facetas de manera sistemática. Por esa razón se han diseñado experiencias para que los profesores conozcan y se apropien de la herramienta idoneidad, ya que ello les permitirá una reflexión más profunda, argumentada y sistemática (Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Hummes, Font y Breda, 2019). El instrumento GAIPIM se puede aplicar al análisis de procesos de instrucción de otros profesores en el contexto de acciones formativas específicas, en procesos de autoformación por equipos docentes que participan en procesos de investigación-acción, o en el análisis de materiales curriculares, como libros de texto (Castillo & Burgos, 2022) y videos educativos (Beltrán-Pellicer et al, 2018).

## **7. Limitaciones y futuras investigaciones**

El Instrumento GAIPIM se ha formulado como un sistema de criterios o principios didácticos cuya aplicación permitiría atribuir idoneidad a un proceso de instrucción matemática. Se trata de juicios de valor cuya racionalidad o fundamentación se ha explicitado en la sección 5. Sin embargo, se considera necesario profundizar aún más en las concordancias y complementariedades con otras teorías educativas y modelos de medición de la calidad. Será necesario identificar los principios educativos que subyacen a los indicadores y rúbricas de los instrumentos de medición de la calidad, y compararlos con los propuestos en la TID.

Aunque el uso principal de GAIPIM sea como instrumento de análisis y reflexión por los propios profesores, razón por la cual se ha formulado en términos de criterios didácticos, queda pendiente la elaboración de indicadores empíricos y rúbricas que permitan asignar valoraciones cuantitativas a la idoneidad en circunstancias en que ello fuera posible y de utilidad. Por ejemplo, para comparar con el instrumento desarrollado por Praetorius & Charalambous (2018) (Tabla 1), sería necesario realizar un estudio documental de la bibliografía que estos autores utilizaron para fundamentar los indicadores que proponen. Cada uno de los 12 modelos de evaluación de la calidad instruccional que utilizaron para construir su instrumento de síntesis se basa en un conjunto de fundamentos teóricos que hacen referencia a 11 aspectos: (1) investigación sobre eficacia educativa, (2) teorías/conceptualizaciones del aprendizaje, (3) teorías/conceptualizaciones de la enseñanza, (4) investigación en educación matemática, (5) investigación sobre el discurso en el aula, (6) triángulo instruccional, (7)

conceptualizaciones del conocimiento docente, (8) teorías/ conceptualizaciones motivacionales, (9) conceptualizaciones del potencial de la tarea, (10) teorías/conceptualizaciones socio-interactivas y (11) teorías/conceptualizaciones del desarrollo. Esta diversidad de aspectos teóricos considerados en los estudios sobre la calidad de la instrucción indica la complejidad del campo. Remitimos al lector a Praetorius & Charalamous (2018) para profundizar en la metodología seguida por estos autores en su estudio comparativo.

Teniendo en cuenta la gran cantidad de investigaciones que se vienen realizando sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, como estadística, geometría, álgebra, etc., sería posible y necesario desarrollar versiones de GAIPIM específicas de dichos contenidos.

## 8. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) como una herramienta para el análisis de los procesos de instrucción matemática y como ayuda para reflexión de los profesores sobre su propia práctica. Así mismo, se ha comparado la noción de idoneidad con la de calidad de la instrucción mostrándose que tienen objetivos relacionados, pero diferentes.

En la TID se asume una visión amplia de los procesos instruccionales, no limitada a la enseñanza (actividad docente) y aprendizaje (actividad discente), sino que tiene en cuenta también el contexto y los demás agentes educativos implicados. Se propone una estructura para el sistema de criterios de idoneidad en la que se distinguen cuatro niveles de aspectos, lo que revela la complejidad de la medida de los constructos idoneidad y calidad de la instrucción. Esto lleva a una aproximación interpretativa orientada a la elaboración de la Guía de Análisis de la Idoneidad de Procesos de Instrucción Matemática (GAIPIM) (incluida como Anexo), que puede servir de apoyo en el desarrollo profesional docente.

Los fundamentos y herramientas teóricas del EOS han permitido identificar aspectos de las facetas epistémica, cognitiva y mediacional correspondientes a los niveles II y III de la estructura de los criterios de idoneidad, así como formular dichos criterios, lo que ayuda a explicitar su racionalidad y a establecer conexiones con otros modelos. La noción de significado (pragmático y referencial) de los objetos matemáticos, su relatividad respecto de los contextos de uso y marcos institucionales, así como el reconocimiento de los tipos de objetos y procesos implicados en los distintos significados, aportan aspectos esenciales para caracterizar lo que se puede entender por unas “buenas matemáticas” (punto de vista institucional), y un “buen aprendizaje” (punto de vista personal). La aplicación de los supuestos del EOS desvela, además, la complejidad de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas, lo cual debe tener su reflejo en los tipos de formatos de interacción en el aula, especialmente cuando se trata del primer encuentro de los estudiantes con un contenido nuevo.

La perspectiva holística adoptada por la TID parte de asumir que para optimizar un proceso educativo-instruccionales no basta implementar una buena enseñanza; también es necesario valorar como buenos el aprendizaje, el contenido, los estudiantes, los padres, los agentes curriculares y el entorno. Medir el grado de idoneidad de tantos factores es tan complejo y costoso que posiblemente explica el hecho de que los instrumentos de medida de la calidad de la instrucción se centren en aspectos parciales. El constructo idoneidad pretende abordar esta complejidad identificando las diversas facetas y componentes, formulando criterios de idoneidad que orienten el trabajo de los agentes educativos implicados.

## Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco del Proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033 y en el seno del Grupo FQM-126 del PAI (Junta de Andalucía, España. Agradecemos los comentarios y sugerencias de A. Breda, P. Beltrán-Pellicer y M. R. Wilhelmi a una versión previa de este trabajo.

## Referencias

- Andrew, L. (2007). Comparison of teacher educators' instructional methods with the constructivist ideal. *The Teacher Educator*, 42(3), 157-184. <https://doi.org/10.1080/08878730709555401>
- Bartolini M.G. y Martignone F. (2020). Manipulatives in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_93](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93)
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In J.P Van Bendegen & K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-128). Springer.
- Berlin, R. y Cohen, J. (2018). Understanding instructional quality through a relational lens. *ZDM Mathematics Education*, 50, 367–379. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0940-6>.
- Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, 50(1), 1-20.
- Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación*, 30 (4), 633-662. <https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651>.
- Biesta, G. J. J. (2010). Why 'What Works' Still Won't Work: From Evidence-Based Education to Value-Based Education. *Studies in Philosophy and Education*, 29, 491–503. DOI 10.1007/s11217-010-9191-x
- Bostic, J., Lesseig, K., Sherman, M. y Boston, M. (2021). Classroom observation and mathematics education research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24, 5–31. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09445-0>
- Boston, M. D. (2012). Assessing instructional quality in mathematics. *Elementary School Journal*, 113, 76–104. <http://dx.doi.org/10.1086/666387>
- Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13 (6), 1893-1918. DOI 10.12973/eurasia.2017.01207a.
- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32 (60), 255 – 278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). The issue of didactical suitability in mathematics educational videos: experience of analysis with prospective primary school teachers. *Revista Española de Pedagogía*, 78 (275), 27-49. doi: <https://doi.org/10.22550>
- Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM*, 18, 1-20.

- Castillo, M. J. y Burgos, M. (2022). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analyzing textbooks lessons. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), em2121.
- Charalambous, C. Y., y Praetorius, A. K. (2018). Studying instructional quality in mathematics through different lenses: In search of common ground. *ZDM Mathematics Education*, 50, 355–366. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0914-8>
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. SUNY
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124.
- Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F.K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). NCTM & IAP.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. China Lectures. Springer Science & Business Media.
- Garcés, W., Font, V. & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Perú: a case study. *Acta Scientiae*, 23(3), 1–33. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389>
- Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, e172011. <https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. [http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis\\_EOS\\_2abril2016.pdf](http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf)
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M., & Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, 3, e202107. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202107>
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042>

- Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 38 (1), 147-164.
- Gómez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 149–168.
- Hanna, G. y Villiers, M. de (Eds) (2012). *Proof and proving in mathematics education*. The 19th ICMI Study. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129->
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, Ch. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L. y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511, <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Hill, H. C., Ball, D., Bass, H., et al. (2011). Measuring the mathematical quality of instruction: Learning mathematics for teaching project. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 25-47. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9140-1>.
- Hjelmslev, L. (1943). *Prolegomena to a theory of language*. The University of Wisconsin Press, 1969.
- Hummes, V., Font, V. y Breda, A. (2019). Combined use of the Lesson Study and the criteria of Didactical Suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. *Acta Scientiae*, 21 (1), 64-82.
- Jentsch, A. y Schlesinger, L. (2017). (2017). Measuring instructional quality in mathematics education. *CERME 10*, Feb2017, Dublin, Ireland. hal-01949106.
- Karsenty, R. y Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: a framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, 433–455. DOI 10.1007/s10857-017-9379-x
- Matsumura, L. C., Garnier, H., Slater, S. C., y Boston, M. (2008). Toward measuring instructional interactions ‘at scale.’. *Educational Assessment*, 13(4), 267–300. <https://doi.org/10.1080/10627190802602541>
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-598). New York: Macmillan.
- McNeil, N. M. y Jarvin, L. (2007). When theory don’t add up: disentangling the manipulatives debate. *Theory into Practice*, 46(4), 309–316.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Peirce, C. S. (1931-58). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols., C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Harvard University Press.
- Praetorius, A. K. y Charalambous, C.Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. *ZDM Mathematics Education* 50, 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM-The International Journal Of Mathematics Education*, 45, 607–621. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1>.



- Schoenfeld, A. (2018). Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework. *ZDM Mathematics Education*, 50, 491–506. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0908-y>.
- Skovsmose, O. (2012). *An invitation to critical mathematics education*. Springer Science & Business Media.
- Thompson, C. J., y Davis, S. B. (2014). Classroom observation data and instruction in primary mathematics education: Improving design and rigour. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 301–323. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0099>.
- Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4, 259–283.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V. y Deloache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM*, 37 (4), 287-306.
- Vygotsky, L. S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica-Grijalbo.
- Walkowiak, T. A., Berry, R. Q., Meyer, J. P., Rimm-Kaufman, S. E., y Ottmar, E. R. (2014). Introducing an observational measure of standards-based mathematics teaching practices: Evidence of validity and score reliability. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 109–128. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9499-x>.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77 – 120.
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. The MacMillan Company.

**Anexo:****Guía de Análisis de la Idoneidad de Procesos de Instrucción Matemática (GAIPIM)****Tabla 1A. Criterios de idoneidad para la faceta epistémica y sus componentes**

Criterio general de la faceta epistémica	Criterios específicos según componentes
El sistema de significados institucionales parciales del contenido y las configuraciones de objetos y procesos ligadas a cada significado, implementado a lo largo del proceso instruccional, debería estar articulado, ser representativo del significado global de referencia y tener en cuenta las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados.	<b>Significados</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Seleccionar los significados parciales cuyo estudio se adapta a las circunstancias contextuales y personales de los estudiantes, contextualizándolos mediante situaciones-problemas comprensibles para los mismos.</li> <li>– Tener en cuenta una muestra representativa de los objetos primarios implicados en la actividad matemática (situaciones, lenguajes, conceptos y propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los significados parciales del contenido.</li> </ul>
	<b>Relaciones (conexiones)</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Relacionar entre sí los significados parciales estudiados y los objetos que intervienen en las prácticas correspondientes, así como con el contenido de otros temas que el estudiante ya conoce.</li> </ul>
	<b>Procesos</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Tener en cuenta la diversidad de procesos de los cuales emergen los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas (problematización, representación, definición, generalización, modelización, ...).</li> </ul>

**Tabla 1B. Criterios de idoneidad para subcomponentes del Nivel III de la faceta epistémica**

Para que el proceso instruccional tenga alta idoneidad epistémica el diseño de las tareas debería tener las siguientes características:

Subcomponente	Criterios específicos
Situaciones-problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Presentar una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación y generación de problemas (problematización)</li> </ul>
Lenguajes	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Usar una muestra representativa de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos.</li> <li>– Adecuar el nivel del lenguaje a los niños a que se dirige.</li> <li>– Proponer situaciones de expresión matemática e interpretación</li> </ul>
Reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Proponer definiciones y procedimientos claros, correctos y adaptados al nivel educativo al que se dirigen.</li> <li>– Presentar correctamente los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.</li> <li>– Proponer situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.</li> </ul>
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Proponer explicaciones, comprobaciones y demostraciones correctas y adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.</li> <li>– Promover situaciones donde el alumno tenga que argumentar.</li> </ul>

**Tabla 2. Criterios de idoneidad para la faceta ecológica y sus componentes**

Criterio general de la faceta ecológica	Criterios específicos según componentes
El proceso de instrucción debería estar en	<b>Conexiones intra e interdisciplinares</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Relacionar los contenidos con otros contenidos intra e interdisciplinares.</li> </ul>
	<b>Currículo</b>

<p>concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Proponer el estudio progresivo y articulado de los diversos significados parciales de los contenidos matemáticos en los distintos niveles educativos, graduando la generalidad y formalización con los que se aborda el estudio de dichos significados.</li> </ul>
	<p><b>Apertura hacia innovación didáctica</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Introducir innovaciones que estén basadas en la investigación y buenas prácticas reconocidas.</li> <li>– Integrar el uso de las nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.</li> </ul>
	<p><b>Adaptación socio-profesional y cultural</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Procurar que el proceso educativo-instruccional en su conjunto contribuye a la formación socio profesional de los estudiantes.</li> </ul>
	<p><b>Educación en valores cívicos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Incluir en el diseño e implementación del proceso educativo-instruccional la formación de los estudiantes en valores democráticos y el pensamiento crítico.</li> </ul>
	<p><b>Entorno familiar</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Estimular y apoyar, en la medida de lo posible, el aprendizaje del estudiante fuera de la escuela y su desarrollo como persona.</li> </ul>

**Tabla 3. Criterios de idoneidad para la faceta mediacional y sus componentes**

Criterio general de la faceta mediacional	Criterios específicos según componentes
<p>Se debería disponer de los recursos adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje.</p>	<p><b>Recursos materiales (Concretos, virtuales y simbólicos)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Distinguir los objetos matemáticos (regulativos, no ostensivos) de sus respectivas representaciones concretas, visuales o simbólicas en las prácticas matemáticas y didácticas.</li> <li>– Articular el uso de configuraciones de objetos y procesos basadas en representaciones alfanuméricas con las basadas en representaciones concretas para potenciar progresivamente los procesos de generalización, cálculo y demostración matemática.</li> </ul>
	<p><b>Apoyos al estudio (libros de texto, cuadernos de ejercicios, videos educativos, ...)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Hacer un uso crítico y reflexivo de materiales curriculares (libros de texto o cuadernos de actividades en formato físico o virtual, etc.) o vídeos educativos, decidiendo cuándo y cómo usarlos como apoyo al proceso de estudio.</li> </ul>
	<p><b>Número de estudiantes, horario y condiciones del aula</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Optimizar el número de estudiantes para dar una atención personalizada.</li> <li>– Adecuar el aula y la distribución de los estudiantes para facilitar las interacciones.</li> <li>– Procurar un horario de sesiones de clase que favorezca la atención y compromiso de los estudiantes.</li> </ul>
	<p><b>Tiempo (De enseñanza colectiva/ tutorización; tiempo de aprendizaje)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Asignar un tiempo (presencial y no presencial) adecuado para la enseñanza pretendida.</li> <li>– Asignar un tiempo adecuado a los contenidos más importantes del tema y a los que presentan más dificultad de comprensión.</li> </ul>

**Tabla 4. Criterios de idoneidad para la faceta interaccional y sus componentes**

Criterio general de la faceta interaccional	Criterios específicos según componentes
<p>Los patrones de interacción deberían permitir identificar los conflictos semióticos potenciales, poner los medios adecuados para su resolución, favorecer la autonomía progresiva en el aprendizaje y el desarrollo</p>	<p><b>Interacciones docente-discente</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Adaptar los modos de interacción teniendo en cuenta los momentos del proceso de estudio, aplicando un formato dialógico-colaborativo en los momentos de primer encuentro con el contenido y atribuyendo autonomía al estudiante en los momentos de ejercitación y aplicación.</li> <li>– Hacer una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no hablar demasiado rápido, enfatizar los conceptos clave del tema, etc.)</li> <li>– Reconocer y resolver los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)</li> </ul>

de competencias comunicativas en los estudiantes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Buscar llegar a consensos con base al mejor argumento.</li> <li>- Usar diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes.</li> <li>- Facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.</li> <li>- Potenciar la participación y el compromiso activo de todos los estudiantes.</li> </ul>
	<p><b>Interacciones entre estudiantes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Favorecer el diálogo y comunicación entre los estudiantes.</li> <li>- Favorecer la inclusión en el grupo y evitar la exclusión.</li> </ul>
	<p><b>Autonomía</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Contemplar momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)</li> </ul>
	<p><b>Evaluación formativa</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Observar de manera sistemática el progreso cognitivo de los alumnos y usar la información obtenida para tomar decisiones sobre el desarrollo de la instrucción.</li> </ul>

**Tabla 5A. Criterios de idoneidad para la faceta cognitiva y sus componentes**

Criterio general de la faceta cognitiva	Criterios específicos según componentes
Los objetivos de aprendizaje deberían suponer un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, teniendo en cuenta sus circunstancias personales y contextuales. Además, los significados personales logrados por los estudiantes deberían ser concordantes con los significados institucionales planificados. La evaluación de los aprendizajes debería servir para mejorar el proceso instruccional.	<p><b>Significados personales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover la comprensión de las situaciones-problemas, representaciones, conceptos y propiedades.</li> <li>- Desarrollar la competencia comunicativa, procedimental y argumentativa</li> </ul>
	<p><b>Relaciones (conexiones)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover que el aprendizaje sea de tipo relacional, de modo que los estudiantes sean capaces de comprender y relacionar los distintos significados incluidos en el proceso de enseñanza y los objetos implicados.</li> </ul>
	<p><b>Procesos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover el desarrollo de la competencia del estudiante para implementar procesos matemáticos específicos del contenido (modelización, generalización, planteamiento y resolución de problemas, prueba, representación, ...) y procesos metacognitivos (reflexión sobre los propios procesos de pensamiento matemático).</li> </ul>
	<p><b>Conocimientos previos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Tener en cuenta los conocimientos previos que tienen los estudiantes para abordar el estudio del contenido pretendido.</li> </ul>
	<p><b>Diferencias individuales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Apoyar el aprendizaje de los estudiantes teniendo en cuenta sus diferencias individuales en los conocimientos previos, estilos de aprendizaje y niveles de comprensión y competencia.</li> </ul>
	<p><b>Evaluación de los aprendizajes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprobar regularmente el progreso de los aprendizajes para tomar decisiones instruccionales de mejora (evaluación formativa).</li> </ul>

**Tabla 5B. Criterios de idoneidad para subcomponentes de Nivel III de la faceta cognitiva**

Subcomponente	Criterios específicos
Comprensión situacional	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover y evaluar la resolución correcta de situaciones-problemas y tareas de aprendizaje que supongan un reto alcanzable para los estudiantes.</li> </ul>
Competencia comunicativa	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover y evaluar la competencia comunicativa con diferentes modos de expresión matemática correcta.</li> </ul>
Comprensión conceptual y proposicional; Competencia procedimental	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Promover y evaluar la comprensión conceptual y proposicional correcta</li> <li>- Promover y evaluar la competencia procedimental correcta</li> </ul>

Competencia argumentativa	– Promover y evaluar la competencia argumentativa
---------------------------	---

**Tabla 6. Criterios de idoneidad para la faceta afectiva y sus componentes**

<b>Criterio general de la faceta afectiva</b>	<b>Criterios específicos según componentes</b>
El proceso de instrucción debería lograr el mayor grado posible de implicación del alumnado (interés, motivación, autoestima) y tener en cuenta sus creencias sobre las matemáticas y su aprendizaje.	<b>Emociones</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Planificar situaciones para la identificación y discusión de las emociones a fin de evitar el rechazo, la fobia o miedo a las matemáticas.</li> <li>– Resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.</li> </ul>
	<b>Actitudes</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Promover que el estudiante asuma su responsabilidad en el aprendizaje, esforzándose en la realización de las tareas con perseverancia, tanto las que requieren indagación personal como de recepción y retención de conocimientos.</li> <li>– Favorecer la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.</li> </ul>
	<b>Creencias</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Identificar las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza que puedan condicionar los aprendizajes y tenerlas en cuenta en el proceso instruccional.</li> </ul>
	<b>Valores-identidad</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Promover la autoestima para que los estudiantes se sientan capaces de aportar conjeturas y soluciones a los problemas planteados, apoyándose en argumentos matemáticos para convencer a los demás de la validez de sus afirmaciones, construyendo de este modo una identidad matemática positiva.</li> </ul>
	<b>Intereses y necesidades</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Proponer tareas que se sean de interés para los alumnos y que estén a su alcance.</li> <li>– Proponer situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.</li> </ul>