ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido

Working together introductory situations of proportional reasoning in primary school. Analysis of a teaching experience centred on the teacher, the student and the content [*]

María Burgos[**]
Juan D. Godino[***]

Resumen

Aunque suele haber un consenso bastante generalizado en educación matemática a favor de los modelos de instrucción de tipo constructivista la cuestión de su pertinencia no deja de ser controvertida. Entre los modelos extremos centrados, bien en el estudiante o en el profesor, se pueden encontrar otros modelos de tipo mixto en los que ambos agentes del proceso educativo tienen papel protagonista, dependiendo del contenido cuyo aprendizaje se pretende y de los conocimientos previos de los estudiantes. En este trabajo se describe y fundamenta la implementación de un modelo instruccional de tipo mixto que contempla una primera fase en la que el profesor adquiere el papel protagonista introduciendo el tema, una segunda fase de trabajo colaborativo entre profesor y alumnos, en la que resuelven conjuntamente una situación-problema, seguida de una tercera fase en la que los alumnos trabajan de manera autónoma. Este modelo ha sido experimentado con alumnos de 5º curso de primaria, siendo su objetivo crearles un primer encuentro con los problemas de proporcionalidad directa. Aunque se trata de un estudio de caso que no permite generalizar los resultados, la evaluación de los aprendizajes logrados permite formular hipótesis sobre la influencia del modelo mixto de instrucción en los aprendizajes de los alumnos, las cuales se pueden contrastar en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares.

Palabras clave: Modelos didácticos. Constructivismo. Razonamiento proporcional. Instrucción matemática.

Abstract

Although there is a fairly generalized consensus in mathematics education in favour of constructivist-type instructional models, their pertinence is controversial. Between the extreme models centred, either on the student or on the teacher, we find other mixed type models, where both educational process agents play a leading role,

[*] Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía), España.
[**] Doctora en Matemáticas por la Universidad de Almería (UAL). Contratada doctora en Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR), Granada, España. dirección postal: Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071. Granada, España. Email: mariaburgos@ugr.es
[***] Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Colaborador Extraordinario. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (UGR), Granada, España. dirección postal: Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071. Granada, España. Email: jgodino@ugr.es

depending on the intended content and the students' previous knowledge. In this article, we describe and base the implementation of a three stages mixed-type instructional model: In a first phase, the teacher acquires the leading role by introducing the theme; in a second phase of collaborative work between teacher and students, they jointly solve a situation-problem, and in a third phase the students work autonomously. This model has been experimented with 5th grade primary school students, with the objective of creating a first encounter with the problems of direct proportionality. Although this is a case study that does not allow to generalize the results, the evaluation of the learning achieved serves to formulate hypotheses about the influence of the instructional mixed model on student learning, which can be tested in new research cycles on this subject and in similar contexts.

Keywords: Didactic models. Constructivism. Proportional reasoning. Mathematical instruction.

1 Introducción

Los modelos constructivistas de aprendizaje, en sus diversas variantes, tienen actualmente una amplia aceptación en educación matemática. "Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de los aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso" (NCTM, 2000, p. 20). Existe una familia de teorías instruccionales denominadas "Inquiry-Based Education" (IBE), "Inquiry-Based Learning" (IBL) y "Problem-Based Learning" (PBL) que postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor. Aunque minoritarias, también existen propuestas que atribuyen un papel central a la transmisión de conocimiento (SWELLER; KIRSCHNER; CLARK, 2007), en particular cuando se trata del aprendizaje de conceptos científicos, los cuales, de acuerdo con Vygotsky (1934), no se desarrollan de la misma manera que los conceptos cotidianos.

Otros autores abogan por un modelo instruccional mixto al considerar que la optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa (GODINO; BATANERO; CAÑADAS; CONTRERAS, 2015; KU; HO; HAU; LAI, 2014; LOBATO, CLARKE; ELLIS, 2005). Esta idea es compartida por la teoría de la objetivación de Radford (2012; 2013) en la que la enseñanza y aprendizaje no se consideran como dos procesos distintos, sino como *labor conjunta*; lo que ocurre en la escuela, enseñanza y aprendizaje, no son dos actividades separadas, una llevada a cabo por un profesor que guía al alumno, la otra por un alumno que hace las cosas por sí y para sí mismo, sino una sola e inseparable actividad.

Las fuentes documentales consultadas sobre experiencias de iniciación al razonamiento proporcional en educación primaria, que incluimos en la sección siguiente, siguen modelos centrados en el estudiante o bien centrados en el profesor. En este trabajo describimos la implementación de un modelo instruccional de tipo mixto, con alumnos de 5º curso de primaria, cuyo objetivo es crearles un primer encuentro con los problemas de proporcionalidad directa e

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

iniciar en ellos el desarrollo del razonamiento proporcional. Aunque se trata de un estudio de caso, con un enfoque interpretativo, que no permite generalizar los resultados, la evaluación de los aprendizajes logrados permite formular hipótesis sobre la influencia del modelo mixto de instrucción en los aprendizajes de los alumnos, las cuales se pueden contrastar en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares. El problema abordado y la metodología aplicada se inscriben, por tanto, en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (DBRC, 2003; KELLY; LESH & BAEK, 2008).

En las siguientes secciones se describen el problema y los antecedentes, el marco teórico utilizado, el método, diseño e implementación de la experiencia de enseñanza-aprendizaje que centra nuestra investigación y por último los resultados obtenidos.

2. Antecedentes y problema de investigación

Miyakawa y Winslow (2009) hacen una comparación de dos modelos ampliamente usados en educación matemática, apoyados en análisis de experiencias de enseñanza de iniciación a la proporcionalidad en el contexto de la semejanza de figuras. Se trata de: (1) El modelo del estudio de lecciones desarrollado en Japón (FERNÁNDEZ; YOSHIDA, 2004; ISODA et al., 2007), que usualmente implica actividades de resolución de problemas abiertos. En este caso la lección analizada gira entorno a la consigna dada a los estudiantes sobre el significado de la expresión “misma forma” realizada con alumnos de sexto grado (11 a 12 años). (2) La ingeniería didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas, orientada a la construcción de una situación fundamental que permita a los estudiantes construir y dar sentido a un conocimiento matemático pretendido. La experiencia seleccionada, por la gran similitud que tiene con la tarea experimentada en Japón, es la situación de la ampliación del puzle de Brousseau (1997).

La idea principal del primer modelo es organizar una lección alrededor de un “problema abierto” caracterizado por tener múltiples respuestas correctas con el fin de “estimular simultáneamente tanto las actividades creativas de los estudiantes como el pensamiento matemático en la resolución de problemas” (NOHDA, 1991, p. 32). Durante la lección, el profesor debe tratar de ayudar a los estudiantes a formular claramente sus hipótesis y justificaciones, tantas como sea posible. El estilo constructivista del modelo del estudio de lecciones queda bien reflejado en la descripción de la actividad del estudiante: éste debe comprometerse con la situación y expresar múltiples estrategias aceptables, proponiendo varios argumentos que apoyen sus respuestas, sin preguntar al profesor la solución (MIYAKAWA; WINSLOW, 2009, p. 212).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

La situación del puzle es parte de una secuencia de 65 lecciones experimentadas por Guy y Nadine Brousseau sobre fracciones y números decimales que se describe en Brousseau (1997, Capítulo 4). La importancia atribuida a las situaciones adidácticas[1] en la teoría de situaciones, como una fase clave del proceso de estudio, es también una indicación clara del estilo constructivista en el que se apoya este modelo didáctico. El fin es que los estudiantes construyen la única "estrategia ganadora" mediante su interacción con el medio objetivo proporcionado. En este proceso interviene el conocimiento matemático pretendido que los estudiantes deben poner en juego.

Ambos diseños didácticos requieren tipos similares de análisis: preveer las estrategias de los estudiantes, estudiar el tipo de interacción social, buscar el pensamiento independiente de los estudiantes y revisar el diseño en un ciclo experimental. Por tanto, aunque sin duda hay diferencias importantes en el papel que se atribuye al conocimiento matemático[2] y a los objetivos de aprendizaje (MIYAKAWA; WINSLOW, 2009), consideramos que se trata de diseños centrados en el estudiante.

La experiencia de enseñanza que sirve de base al estudio de Silvestre y Ponte (2011) asume la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional. Esta investigación parte de que esa comprensión se desarrolla mediante la resolución de problemas y la realización de tareas desafiantes, de naturaleza exploratoria e investigativa, en el contexto de la interacción social producida en pequeños grupos y la discusión colectiva con todo el curso. "El papel del profesor es fundamental en la propuesta de tareas y en la monitorización del trabajo de los grupos, pero sin quitarles a éstos la responsabilidad por su trabajo" (SILVESTRE; PONTE, 2011, p. 156).

En el trabajo de Bentley y Yates (2017) se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes de 12 años, cuando resolvían problemas que requerían de un razonamiento proporcional (problemas de valor faltante). En uno de los grupos se utilizaron ejemplos resueltos paso a paso de reducción a la unidad, siendo este grupo el que mostró mejores resultados. Los autores concluyen que la instrucción basada en ejemplos resueltos tuvo un gran impacto en la habilidad de los estudiantes para razonar

[1] El concepto de situación adidáctica modeliza una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno, de manera independiente de la mediación docente (Brousseau, 1997).

[2] Debido a las diferencias que hay entre la Teoría de situaciones, en la que básicamente se problematiza la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático, y el Estudio de lecciones en Japón más centrado en la resolución de problemas matemáticos.

proporcionalmente, y defienden que la filosofía subyacente es "mostrar cómo funcionan las cosas". Por tanto, se trata de un modelo de instrucción fuertemente guiada, alejado del constructivismo de las experiencias descritas en Miyakawa y Winslow (2009) y Silvestre y Ponte (2011).

El diseño didáctico que experimentamos en esta investigación difiere sustancialmente de los descritos anteriormente, al situarnos en un punto intermedio entre los modelos centrados en el profesor y los modelos centrados en el estudiante. Asumimos que la optimización del aprendizaje requiere un modelo de instrucción mixto indagativo - transmisivo de enseñanza - aprendizaje que trata de conjugar estos dos modelos: la indagación de situaciones problemas por parte de los estudiantes con la enseñanza explícita de conocimientos en momentos críticos del proceso de estudio por parte del profesor. Por un lado, aceptamos que cuando se trata con información nueva, "se debería mostrar a los aprendices qué hacer y cómo hacerlo" (KIRSCHNER; SWELLER; CLARK, 2006, p. 79). Por otro, compartimos las ideas de Radford: "Para que lo general aparezca en lo singular tanto el estudiante como el profesor deberían trabajar juntos. El profesor y el estudiante tienen que comprometerse en un proceso de objetivación" (RADFORD, 2013, p. 35).

El objetivo de este trabajo es describir e interpretar los resultados de la aplicación de un modelo instruccional de tipo mixto por medio de una experiencia de introducción a la proporcionalidad con alumnos de quinto curso de educación primaria. Se espera obtener conocimientos didácticos originales sobre procesos de aprendizaje de la proporcionalidad bajo un modelo instruccional específico.

3. Marco teórico

La experiencia realizada se inscribe en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (BROWN, 1992; KELLY; LESH; BAEK, 2008), al centrar la atención en el aprendizaje en contexto. Utiliza el diseño y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, tratando que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. Para la investigación basada en el diseño instruccional (DBRC, 2003):

- el desarrollo y la investigación tienen lugar mediante ciclos continuos de diseño, implementación y análisis.
- los fines centrales del diseño de entornos de aprendizaje y el desarrollo de teorías del aprendizaje están entrelazados, de manera que la investigación debe llevar a teorías que

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

puedan ser compartidas con los profesores y diseñadores educativos para comunicarles implicaciones relevantes.

- la investigación debe explicar cómo funcionan los diseños en entornos reales informando sobre las interacciones que refinen nuestra comprensión de las cuestiones de aprendizaje implicadas.

El marco teórico que sirve de base al diseño didáctico está constituido por algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007); en particular se usará la noción de configuración didáctica, hecho didáctico significativo e idoneidad didáctica (GODINO; RIVAS; ARTEAGA; LASA; WILHELMI, 2014).

En el marco del EOS, una configuración didáctica es un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea, o situación-problema diseñada e implementada. Incluye las acciones de los estudiantes y las del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea (GODINO et al., 2014). En la interacción didáctica, pueden aparecer *conflictos semióticos*, entendidos como desajustes o discordancias entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Para el análisis del proceso instructivo se emplea la noción de hecho didáctico significativo (HDS) introducida por dichos autores: “Se considera que un hecho didáctico es significativo (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido” (GODINO et al., 2014, p. 174).

Desde el EOS se define la *idoneidad didáctica* como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como adecuado. El logro de una alta idoneidad didáctica supone un balance equilibrado de seis idoneidades parciales en las facetas: epistémica (representatividad de los significados institucionales implementados respecto de un significado de referencia), ecológica (grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla), cognitiva (proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos), afectiva (grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio), interaccional (posibilidad de identificar y resolver los conflictos semióticos que se producen durante el proceso de instrucción) y mediacional (disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales). El lector interesado puede consultar Godino (2013).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

4. Método

El enfoque metodológico que seguiremos en nuestra investigación será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado que se propone desde el EOS (GODINO *et al.* 2014), la cual queda articulada con las investigaciones de diseño instruccional. Distingue cuatro fases en la investigación:

1. Estudio preliminar, que tiene en cuenta las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional.
2. Diseño de la trayectoria didáctica, selección de las tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y de la planificación de intervenciones controladas del docente.
3. Implementación de la trayectoria didáctica; observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.
4. Evaluación o análisis retrospectivo, que se basa en el contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación.

En este trabajo describimos la segunda fase en la sección 5, la implementación en la sección 6 y la última fase en la sección 7.

4.1. Población y muestra

La población sobre la que se centra la investigación son estudiantes de primaria que tienen su primer encuentro con situaciones - problemas que ponen en juego la noción de proporcionalidad. La muestra objeto de estudio está constituida por un grupo de 23 estudiantes (13 niñas y 10 niños) de quinto curso de Educación Primaria (10-11 años de edad), los cuales tenían un nivel normal de desempeño en matemáticas y que habían tenido dificultades ese curso con el tema de fracciones, tal y como había revelado su tutor en una entrevista.

La experiencia se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de educación infantil y primaria durante el curso 2016-2017. La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro escolar y de los docentes del mismo.

4.2. Instrumentos de recogida y análisis de datos

El aprendizaje logrado por los estudiantes fue evaluado con dos situaciones - problema (secciones 4.2.1 y 4.2.2) próximas a las situaciones trabajadas previamente en clase. La primera tarea de evaluación sigue un esquema similar al de la situación introductoria inicial “Laura

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

visita a su tío" (sección 5.1). Se persigue que los alumnos obtengan el valor unitario, experimenten el carácter simétrico de la relación de proporcionalidad y obtengan la regla que genera la clase de soluciones posibles al número de piedrecitas a partir del número de pulseras, o al número de pulseras a partir del número de piedrecitas disponibles, cuando éstas son variables. En la segunda tarea de evaluación, un alumno puede reconocer que, para construir un puzle idéntico, pero de mayor tamaño, la relación entre la distancia en la figura y la distancia en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, y proceder a reducir a la unidad, calculando la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4=1,75. La longitud en el puzle de cartulina, que corresponde a un segmento de longitud k en la figura será $1{,}75 \times k$.

4.2.1. Tarea de evaluación 1: las pulseras

Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.

- *a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.*
- *b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado.*
- *c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?*
- *d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?*
- *e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?*

4.2.2. Tarea de evaluación 2: el puzle

En la figura se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Queremos construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. ¿Sabrías que medida hay que darle a cada lado? Explica cómo lo has obtenido.

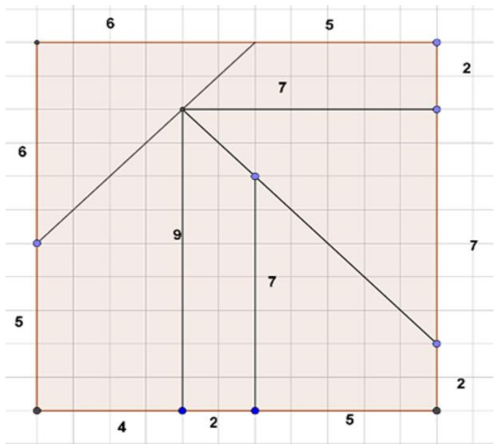


Figura 1- Situación del puzle

5. Diseño de las situaciones introductorias. Análisis a priori

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Las sesiones de clase en las que tuvo lugar la investigación se desarrollaron durante las dos últimas semanas del curso académico, en las que se daba por concluido el desarrollo del temario y de manera general, se encontraban repasando los conocimientos aprendidos durante el curso. De manera previa a las sesiones, los alumnos no habían trabajado con problemas que involucrasen relaciones de proporcionalidad en su significado aritmético. En el primer trimestre, habían tomado un primer contacto con las fracciones, usadas como operador y como relación parte-todo. Dentro del contexto de uso geométrico de la proporcionalidad, habían realizado lectura e interpretación de mapas a escala. Sin embargo, no habían trabajado la reproducción a escala de mapas, por lo que consideramos que no se habían desarrollado actividades, hasta el momento de la investigación, que proporcionasen a los alumnos un concepto intuitivo de proporción, ni sirviesen de soporte en el desarrollo del razonamiento proporcional.

Después de presentar el contexto, la profesora-investigadora facilitó a los alumnos la hoja de trabajo que reproducimos en el siguiente apartado. La actividad está diseñada para estimular la indagación y la discusión por medio de cuestiones dirigidas que sirvan de acercamiento a la proporcionalidad. Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuya comprensión se persigue desarrollar con la tarea.

La primera tarea sigue la recomendación de diversas investigaciones que sugieren un primer acercamiento intuitivo al concepto de proporcionalidad, recurriendo al uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. La segunda tarea está tomada de Mochón (2012).

5.1. Tarea introductoria 1: Laura visita a su tío

Es la fiesta fin de curso y las clases de quinto quieren encargar tartas para celebrarlo. El tío de Laura es pastelero, ¡hace unas tartas deliciosas! Así que Laura ha ido a visitarlo. Esa mañana usó 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. Laura quiere saber cuántas tartas puede elaborar con 6, 2 y 5 litros de leche.

Laura, que es una chica muy lista, razona de la siguiente manera para formar una tabla como la mostrada a continuación.

- *Primero, 6 es el doble de 3 (el número de litros de leche que necesitó para 18 tartas). Coloca tú en la tabla el número de tartas que puede hacer con 6 litros de leche.*
- *Luego piensa que 2 litros es la tercera parte de 6 litros. Pon el siguiente número de*

tartas en la tabla.

– *Por último 5 litros de leche son 2 litros más los 3 litros iniciales.*

Termina de llenar la tabla siguiendo estas tres ideas.

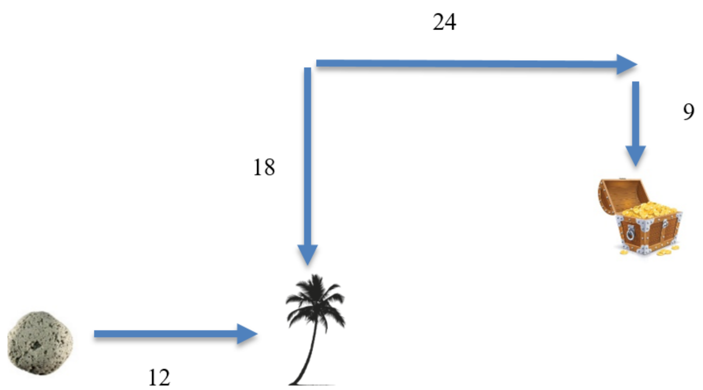
Litros de leche	*3*	*6*	*2*	*5*
Tartas	*18*			

¿Se te ocurre alguna forma distinta a como lo hizo Laura para completar la tabla?

Iniciamos el razonamiento proporcional a través de razones sencillas como doble, mitad y el reconocimiento de la propiedad aditiva de la función de proporcionalidad: para completar la tabla han debido considerar que al duplicar el número de litros de leche se duplican el número de tartas, al dividir por tres el número de litros de leche el número de tartas también queda dividido de igual forma. Además, si una cantidad de litros de leche es la suma de otras dos, el número de tartas que podrá fabricar es la suma del número de tartas que puede hacer con cada cantidad menor de litros de leche.

5.2. Tarea introductoria 2: El Pirata

Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro. El diagrama grabado es el siguiente.



El pirata localiza la piedra y la palmera y al caminar entre ellos, cuenta 30 de sus pasos. Ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

Figura 2- Tarea "el pirata" (MOCHÓN, 2012, p. 144)

El alumno debe cuestionarse la relación entre las medidas del mapa y los pasos del pirata, convenciéndose de que se trata de una situación de proporcionalidad, investigando cómo se ve afectada la cantidad de pasos del pirata, si la correspondiente medida en el mapa se duplica, triplica o demedia.

5.3. Tarea introductoria 3: Laura sigue pensando

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Regresemos a la situación anterior en la que Laura estaba tratando de calcular los litros de leche que necesita su tío para hacer varias tartas. A Laura se le ocurre una idea genial (¡ya hemos dicho que es muy lista!): si puedo calcular el número de tartas que hace mi tío con un solo litro de leche, el cálculo para los otros litros de leche es más fácil. Para esto incluyó el 1 extra en la fila de los litros de leche:

Litros de leche	*3*	*1*	*6*	*2*	*5*
Tartas	*18*				

Ahora, intenta responder a estas preguntas:

a) *Si sabes el número de litros de leche de que dispone el pastelero, ¿de qué forma explicarías a un amigo cuantas tartas puede hacer?*
b) *¿Cuántos litros de leche necesita el pastelero para hacer 4 tartas?*
c) *Si sabes el número de tartas que le han encargado hacer al pastelero, ¿cómo le explicarías al pastelero cuántos litros de leche necesita comprar?*

Después de obtenido el valor unitario, se espera que el alumno responda a la consigna a) como sigue: conocido el número de litros de leche de que dispone el pastelero, y que con 1 litro de leche se pueden hacer 6 tartas, para saber el número de tartas que se pueden elaborar, basta multiplicar por 6. Para responder a la pregunta b) el alumno debe tener en cuenta que la cantidad de litros de leche necesarios se puede obtener dividiendo por 6 la cantidad asociada de tartas. Por tanto, para realizar 4 tartas son precisos $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ litros de leche. Finalmente, en la consigna c) se espera que el alumno generalice esta propiedad y concluya que, si el pastelero sabe el número de tartas, el número de litros de leche que va a necesitar para ello lo puede obtener dividiendo por 6, que es la cantidad de tartas que puede hacer con un litro de leche.

6. Descripción de la implementación

En esta sección se describe la implementación del diseño instruccional, por medio de la noción de configuración didáctica. La dinámica desarrollada a lo largo de las sesiones, persiguió promover la participación de los alumnos en las tareas y motivar y organizar la continua interacción entre la profesora y los alumnos, para potenciar la confianza de los alumnos que se enfrentaban por primera vez a problemas de proporcionalidad, identificar conflictos semióticos potenciales y resolver aquellos que se produjesen durante el proceso de instrucción. Todas las sesiones fueron de hora y media de duración en la franja inmediatamente anterior al recreo.

El tutor del grupo solicitó a la investigadora comenzar por recordar a los estudiantes los conceptos relativos a fracciones. Esta primera sesión de trabajo no estaba prevista y supuso la necesidad de ajustar el tiempo de dedicación a las tareas posteriores. La siguiente sesión sirvió para acercar a los alumnos al contexto geométrico de la proporcionalidad y semejanza, conectando con sus conocimientos previos sobre mapas y planos a escala. Para ello la investigadora había preparado una presentación y usó el proyector y pizarra electrónica presentes en el aula de clase.

A continuación, describimos cómo se desarrollaron las siguientes sesiones, destinadas al trabajo sobre proporcionalidad aritmética y que centran nuestra atención en este trabajo, señalando los los “hechos didácticos significativos” (HDS) en su desarrollo.

6.1. Configuración didáctica 1: Introducción

Se presentaron a los estudiantes diversas situaciones cotidianas en las que la relación entre cantidades de dos magnitudes es de proporcionalidad directa. El precio pagado por distintas cantidades de un artículo, la distancia recorrida por un coche a velocidad constante y el tiempo,… En estas situaciones, aparecen dos series de números, que se representaron en la pizarra por medio de tablas (análogas a las que se incluyeron en la hoja de trabajo), de forma que los estudiantes podían reconocer la existencia de cierto número (la razón de proporcionalidad) que les permitía escribir cada valor de la segunda serie como producto por dicho número de los valores correspondiente de la primera serie.

Se les introdujo también algunas situaciones de no proporcionalidad, en las que los alumnos debían decidir si lo eran o no y por qué. Por ejemplo, la edad y la altura de un niño. Consideramos un HDS que, en este momento, algunos alumnos intervinieron para completar una tabla, asumiendo que la relación entre tales magnitudes era de proporcionalidad, para descubrir después que no podía serlo a la luz de resultados que chocaban con su experiencia y sentido común.

Después de presentar el contexto, la profesora-investigadora facilitó a los alumnos la hoja de trabajo que detallamos en la sección anterior. Los alumnos estaban organizados por parejas, siguiendo con la distribución habitual para trabajar en el aula con su profesor.

6.2. Configuración didáctica 2: Laura visita a su tío

La primera tarea, “Laura visita a su tío” estaba diseñada para estimular la indagación y la discusión por medio de cuestiones dirigidas que sirvieran de acercamiento a la proporcionalidad. La resolución de esta tarea se llevó a cabo en gran grupo: los alumnos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

intervenían para completar la tabla, argumentando en cada momento la respuesta y discutiendo con los compañeros la estrategia seguida. Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuyo conocimiento y comprensión se perseguían desarrollar con la tarea.

Para responder a la pregunta *¿Se te ocurre alguna forma distinta a como lo hizo Laura para completar la tabla?*, un alumno (Nico) identifica que para calcular las tartas que se pueden hacer con 2 litros de leche, se pueden calcular los ⅔ de las tartas que se hacen con 3 litros de leche, es decir, ⅔ de 18.

6.3. Configuración didáctica 3: El pirata

La tarea sobre el pirata, no es tan dirigida como la primera, y plantea mayor variedad de estrategias que se pone de manifiesto en la puesta en común en clase. En esta ocasión se les dejó a los alumnos un tiempo para realizarla de manera individual en clase, aunque podían discutir con su compañero. Después se completó en la pizarra, incluyendo sus aportaciones, la tabla que relacionaba las distintas medidas en el mapa con los pasos del pirata correspondientes.

Consideramos como HDS la mayor dificultad presente en esta tarea frente a la anterior, debido a la constante de proporcionalidad no entera. Algunos alumnos pusieron de manifiesto esta dificultad a la hora de determinar el número de pasos del pirata correspondientes a la medida 9 en el mapa. Sin embargo, fueron los propios estudiantes los que resolvieron las dudas de sus compañeros sin que la profesora-investigadora tuviera que intervenir más que como moderadora.

6.4. Configuración didáctica 4: Laura sigue pensando

Esta tarea se desarrolló en gran grupo: los alumnos intervenían justificando en cada momento su respuesta o poniendo en duda la de los compañeros. El procedimiento de reducción a la unidad y la identificación en la tabla de la constante de proporcionalidad no supuso ninguna dificultad para los alumnos. De hecho, algunos de ellos, lo habían puesto en práctica de forma intuitiva en la primera parte de la tarea "Laura visita a su tío" para completar la tabla.

La respuesta a la primera consigna (*si sabes el número de litros de leche de que dispone el pastelero, ¿de qué forma explicarías a un amigo cuantas tartas puede hacer?)* fue unánime por parte de los alumnos que intervinieron: "multiplicando por 6, que son las tartas que se pueden hacer con un litro de leche".

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

Sin embargo, en el caso de la segunda tarea *(¿cuántos litros de leche necesita el pastelero para hacer 4 tartas?)* se hizo más necesaria la intervención de la profesora-investigadora para dirigir la discusión y acompañar argumentos con representaciones gráficas en la pizarra. Un estudiante, Nico, interviene: “son 2/3 de litro”. A la pregunta de la investigadora en relación a cómo lo ha obtenido, explica: “como 4 son los 2/3 de 6, para hacer 4 tartas necesitaré 2/3 de litro de leche”. Algunos compañeros tuvieron dificultades para entender el argumento de Nico y la investigadora procedió a dibujar en la pizarra 6 tartas e identificar, siguiendo las instrucciones de Nico, que “si 1 litro de leche es necesario para las 6 tartas entonces cada 2 tartas necesito 1/3 de litro. Por tanto, 4 tartas son 2/3 de litro de leche.”

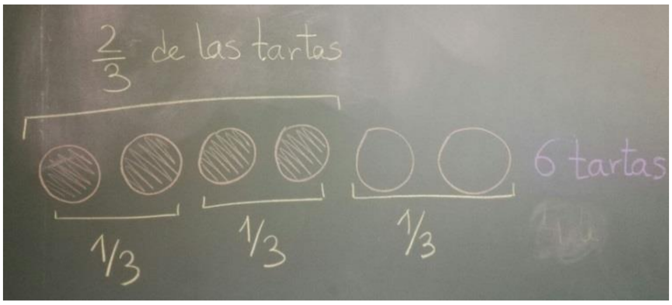


Figura 3-Imagen de pizarra con las tartas

Consideramos aquí dos HDS: por un lado, que gran parte de los alumnos hubieran recurrido de manera intuitiva y natural a la obtención del valor unitario y por otro que la relación inversa (obtener los litros de leche a partir del número de tartas) suponga una mayor complejidad.

7. Resultados y discusión

Para evaluar el grado de aprendizaje logrado por los estudiantes, aplicando el instrumento descrito en la sección 3.2, hemos definido dos variables cuantitativas y cuatro variables cualitativas. Las variables cuantitativas refieren al grado de corrección de la respuesta y al grado de corrección de las explicaciones dadas por los estudiantes en las tareas de evaluación. En ambos casos se ha asignado una puntuación de 0, 1, o 2 puntos si la respuesta es incorrecta, parcialmente correcta o correcta, respectivamente. Las variables cualitativas refieren a la presencia en la práctica matemática de determinados tipos de objetos como son procedimientos, argumentos, tipos de lenguaje y representaciones, así como el grado de generalidad de los objetos emergentes en las prácticas realizadas.

De manera global, el 87% de los alumnos realizaron exitosamente las tareas. En una escala sobre 10, el valor mínimo obtenido en el grado de corrección fue de 3,33 y el máximo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

de 8,88. La puntuación mediana fue de 7,22; el recorrido intercuartílico 3,33 y la media aritmética fue de 6,61.

Por otro lado, los alumnos tuvieron más dificultades para realizar apropiadamente la tarea del puzle que la de las pulseras. El porcentaje de respuestas correctas (parcial o totalmente) a los distintos ítems de la tarea de las pulseras es como mínimo del 69,56% (en el último apartado) y superior al 95% en las prácticas operativas (alcanza el 100% en el primer ítem). Para la tarea del puzle el porcentaje de respuestas correctas (parcial o totalmente) es del 69,56% y el de justificaciones apropiadas del 56,52%. En la tabla 1 aparecen los valores, mínimo, máximo, media y desviación típica para cada una de las tareas.

Tabla 1- Estadísticos sobre puntuaciones en escala 0-10 en las tareas del puzle y las pulseras

	Mínimo	**Máximo**	**Media**	**Desviación típica**
Pulseras	3,57	9,29	7,21	1,49
Puzzle	0,00	10,00	4,57	3,59
Total	2,78	8,89	6,62	1,80

La estrategia de resolución más seguida fue la obtención del valor unitario, en ambas tareas. En el caso de la tarea del puzle, algunos estudiantes usaron un procedimiento de resolución que calificamos de mixto, ya que combinan estrategias aditivas con reducción a la unidad (ver ejemplo de esta estrategia en la figura 6).

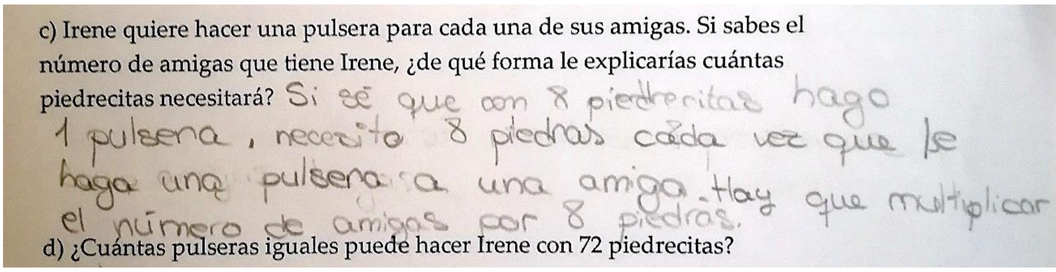
Los tipos de registros usados de forma mayoritaria son el natural y numérico de manera conjunta. El registro diagramático o tabular tiene una presencia importante en las producciones de los alumnos: un mínimo de 8,7% (ítem b) y máximo de 15,79% (ítem e) lo usaron en la tarea de las pulseras, mientras que un 90% de los alumnos lo usaron en la tarea del puzle (ver figuras 6 y 7). En este sentido, mencionamos que diversos autores sostienen que el uso de tablas para organizar los datos del problema ayuda a los alumnos a comprender la conservación de las relaciones internas entre los datos de una serie y la permanencia de las relaciones externas entre los datos de series proporcionales (STREEFLAND, 1985).

Identificamos tres categorías de argumentación en las producciones de los alumnos: 1) informal, aquellas del tipo “multiplicando”, “dividiendo” o que recurren a un caso particular; 2) de orientación aritmética, cuando incluyen la operación aritmética sin identificar su significado; 3) formal; basada en la relación de proporcionalidad o valor unitario. La justificación que acompañaba a las prácticas operativas de la tarea de las pulseras fue mayoritariamente de orientación aritmética, mientras que, en el caso de las prácticas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

discursivas, así como en la tarea del puzle, la justificación predominante se puede considerar de tipo formal.

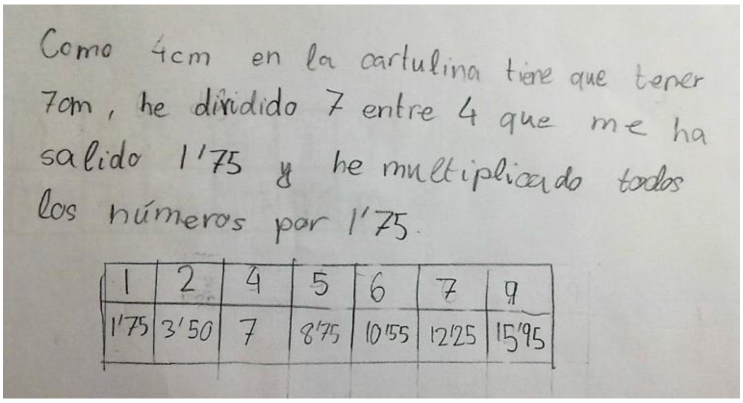
Alrededor del 90% de los alumnos lograron expresar la regla general que relacionaba el número de pulseras con el número de piedrecitas (ver figuras 4 y 7), frente al 55% de alumnos que consiguieron declarar la relación entre las medidas de la maqueta y el puzle en cartulina (ver figura 5).



c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará? Si sé que con 8 piedrecitas hago 1 pulsera, necesito 8 piedras cada vez que le haga una pulsera a una amiga. Hay que multiplicar el número de amigas por 8 piedras.

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

Figura 4- Respuesta de una alumna basada en el significado del valor unitario.



Como 4cm en la cartulina tiene que tener 7cm, he dividido 7 entre 4 que me ha salido 1'75 y he multiplicado todos los números por 1'75.

1	2	4	5	6	7	9
1'75	3'50	7	8'75	10'55	12'25	15'95

Figura 5-Respuesta de una alumna a la tarea del puzle donde identifica la constante de proporcionalidad.

La diferencia de grado de éxito obtenido entre ambas tareas, muestra que los alumnos tuvieron mayor dificultad para identificar la constante de proporcionalidad en el problema de proporcionalidad geométrica frente al problema de proporcionalidad aritmética.

Según afirman Miyakawa y Winslow (2009), "parece deducirse de los experimentos previos realizados por Brousseau y colegas que, a pesar de la cuidada preparación en las lecciones previas, los estudiantes tienden de manera espontánea a construir las piezas mayores añadiendo 3 cm a todos los lados conocidos (ya que 7 cm es 3 cm más que 4 cm)." En nuestro estudio, no hemos encontrado evidencias de este tipo de respuestas por parte de los alumnos, posiblemente porque la realización de esta tarea estuvo precedida de otras introductorias sobre proporcionalidad aritmética, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades aditiva y homogénea de la función de proporcionalidad.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

No obstante, dado que se trata de un estudio de caso la confirmación de este resultado queda planteada como hipótesis para nuevos ciclos de experimentación.

Algunos investigadores consideran que la existencia de pequeñas diferencias en las cantidades que determinan las relaciones dadas en los problemas propicia que los alumnos recurran a estrategias aditivas (KAPUT; WEST, 1994). Otras investigaciones sugieren que los alumnos tienen mayores dificultades en resolver problemas de proporcionalidad cuando las relaciones entre los datos no son enteras. Intentar evitar las fracciones conduce a los alumnos al uso de estrategias incorrectas (KARPLUS; PULOS; STAGE, 1983). En la tarea del puzle, algunos alumnos de nuestra muestra identificaron el valor unitario después de haber realizado ciertas operaciones aritméticas (dividir por dos de forma sucesiva). En otras ocasiones, como muestra la respuesta recogida en la figura 6 recurrían a una estrategia aditiva para determinar las medidas, sumando el valor unitario tantas veces como fuese preciso.

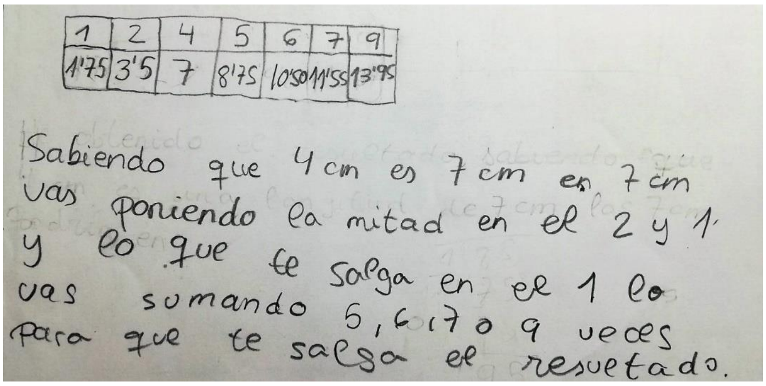


Figura 6-Estrategia de tipo mixto en la tarea del puzle

La relación de proporcionalidad entre magnitudes o series de números es una relación simétrica, pero la constante de proporcionalidad depende del orden en que las magnitudes o series de números sean consideradas. Algunas investigaciones (DUPUIS; PLUVINAGE, 1981; BEZUK, 1986) sostienen que el orden en que se presentan los datos en un problema de valor faltante, determina el grado de dificultad en su resolución, de manera que, a los ítems d) y e) se les presupone una mayor dificultad que a los apartados a), b) y c). Podemos considerar que, tras la instrucción específica implementada, los alumnos han superado la dificultad del razonamiento inverso en una relación de proporcionalidad (manifestada en la tarea introductoria de las tartas), reconociendo la simetría de la relación. Así, un 86,95%, no tuvieron dificultades en responder adecuadamente cuando se preguntaba de manera inversa por las pulseras y no por el número de piedras. Sin embargo, explicar de forma correcta esta relación recíproca supuso mayor dificultad. En la figura 7 se muestra un ejemplo de respuesta dada por un alumno a este ítem.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

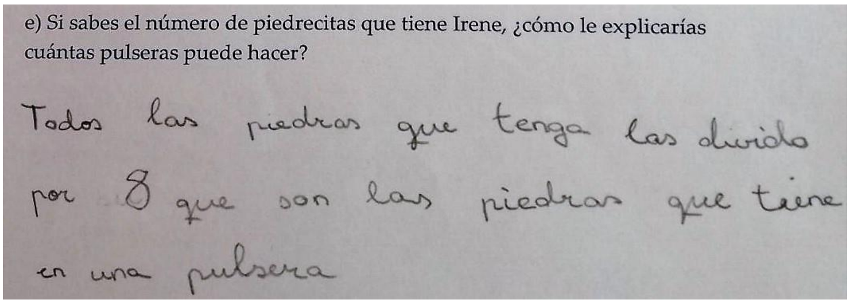


Figura 7-Respuesta de un alumno donde obtiene la regla para determinar el número de pulseras a partir del número de piedras.

El análisis de los datos ha permitido identificar algunos HDS en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado. Dichos HDS tienen una cierta incidencia en la muestra de sujetos y, por tanto, pueden ser indicativos de la manifestación de *fenómenos didácticos*, es decir, hechos didácticos que implican una cierta regularidad:

1) Los alumnos han realizado un uso prioritario de la estrategia de reducción a la unidad en la resolución de las tareas.
2) El registro tabular ha sido recurrente.
3) Tras la instrucción los alumnos han superado la dificultad del razonamiento inverso en una relación de proporcionalidad (manifestada en la tarea introductoria de las tartas), reconociendo la simetría de la relación.
4) El problema de proporcionalidad geométrica tiene una mayor dificultad conceptual y operativa (factor de proporcionalidad fraccionario).
5) Comenzar con tareas de proporcionalidad aritmética ha evitado el uso de estrategias incorrectas reconocidas en investigaciones previas en la tarea del puzle.

Como hemos indicado anteriormente, dado el carácter de estudio de caso de nuestra investigación, los resultados 1) a 5) indicados deben ser tomados como hipótesis a contrastar en nuevos ciclos de experimentación.

8. Reflexiones finales

Según Lamon (2007) el razonamiento proporcional supone tanto la habilidad de reconocer una relación multiplicativa entre dos cantidades como la capacidad de extender dicha relación a otros pares de cantidades.

Es importante desarrollar prácticas docentes que estimulen el desarrollo de potenciales esquemas de razonamiento proporcional antes de acabar la etapa de educación primaria. Como

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

señalan Miyakawa y Winsløw (2009, p. 203) "mientras que el tratamiento algebraico puede ayudar a trivializar nociones y problemas relativos a proporcionalidad para estudiantes de secundaria, normalmente se tiene que evitar en una primera aproximación en educación primaria. Y esto se añade al reto de construir primeros encuentros con el razonamiento proporcional en este nivel". El papel del profesor en este proceso, sin duda es de vital importancia.

Como hemos mencionado en la introducción, pensamos que optimizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático precisa de un modelo de instrucción mixto indagativo - transmisivo de enseñanza – aprendizaje en el que tanto el estudiante como el profesor desempeñen roles protagonistas. En nuestro caso, la profesora-investigadora comenzó presentando las nociones básicas de proporcionalidad, vinculadas a la semejanza y las escalas, que les eran familiares a los alumnos. En la configuración didáctica 1, reconocemos una situación introductoria del contenido con el que los estudiantes tienen su primer encuentro. El profesor debe presentar la información precisa para que los estudiantes comprendan el contexto, predominando un formato transmisivo y dialógico.

Las tareas correspondientes a las situaciones introductorias, pretendían incorporar a los estudiantes en el proceso de introducción a la proporcionalidad, "trabajando juntos". El diseño requería de los estudiantes que, por un lado prestaran atención a sus compañeros, valorando la validez de sus respuestas y constrastando con sus propias soluciones. En las configuraciones didácticas 2, 3 y 4 predomina el aspecto indagativo y cooperativo. Los alumnos trabajaban sobre la hoja de trabajo de forma colaborativa y la profesora-investigadora podía intervenir para orientar, recordar la información necesaria y dirigir la discusión en gran grupo.

Por último, las situaciones de evaluación mediante las que se obtiene la información sistemática sobre el grado de logro de los aprendizajes, corresponden a momentos netamente indagativos, en los que el estudiante responde de manera personal a las tareas propuestas representativas del contenido pretendido.

En este artículo hemos descrito el modelo didáctico experimentado y los resultados obtenidos en términos de los aprendizajes de los alumnos, destacando algunos hechos didácticos significativos. Puesto que se trata de un estudio de caso con un solo grupo y un enfoque de investigación descriptiva-interpretativa, no se puede concluir que los aprendizajes sean consecuencia exclusiva del modelo instruccional implementado. Sería necesario contrastar estos resultados en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares. No obstante, a la luz de los resultados logrados, creemos que este modelo de colaboración entre el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/

profesor y los estudiantes, en relación a la situación-problema que se pretende resolver y el contenido matemático puesto en juego, consigue altos niveles de idoneidad en sus facetas interaccional, cognitiva y afectiva. Un apropiado grado de diálogo, interacción y comunicación ha permitido:

- detectar estrategias intuitivas, naturales y aquellas que los alumnos desarrollan con poca guía por parte del profesor (uso recurrente del registro tabular, estrategia de reducción a la unidad)
- aumentar el grado de implicación e interés del alumnado.
- identificar conflictos semióticos (mayor dificultad cuando la constante de proporcionalidad no es entera o al trabajar con la relación inversa) y resolverlos.

Referencias

BEN-CHAIM, D., KERET, Y. Y ILANY, B. S. **Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education**. Rotterdam: Sense Publisher, 2012.

BENTLEY, B., AND YATES, G. Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. **Cogent Education** 4: 1297213, 2017. Disponible en https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1297213

BROUSSEAU, G. **The theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer, 1997.

BROWN, A. L. Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. **The Journal of the Learning Sciences**, v. 2, n. 2, p. 141-178, 1992.

DBRC (The Design Based Research Collective). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 5-8, 2003.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, v. 11, p. 111-132, 2013.

GODINO, J. D. BATANERO, C., & FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D., BATANERO, C., CAÑADAS, G. R. Y CONTRERAS, J. M. Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias experimentales. Versión revisada y ampliada de la comunicación presentada en la **Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education**. CEME9, Prague, Czech Republic, 4-8 February 2015. (Versión en inglés publicada en, **Acta Scientiae,** v. 18, n. 4, Edição Especial, 2016.)

GODINO, J. D., CONTRERAS, A., & FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathematiques**, v. 26, n. 1, p. 39-88, 2006.

GODINO, J. D., RIVAS, H., ARTEAGA, P., LASA, A. Y WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 34, n. 2/3, p. 167-200, 2014.

HUDSON, P., MILLER, S. P., & BUTLER, F. Adapting and merging explicit instruction within reform based mathematics classrooms. **American Secondary Education**, v. 35, n. 1, p. 19-32, 2006.

JONASSEN, D. H. Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? **Educacional Technology Research & Development**, v. 39, n. 3, p. 5-14, 1991.

KELLY, A. E., LESH, R. A. & BAEK, J. Y. (Eds.) **Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching**. New York, NY: Routledge, 2008.

KIRSCHNER, P. A., SWELLER, J., & CLARK, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. **Educational Psychologist**, 41 (2), 75-86.

KU, K.Y. I., HO, I. T., HAU, K. T. & LAI, E. C. M. Integrating direct and inquiry-based instruction in the teaching of critical thinking: an intervention study. **Instructional Science**, v. 42, p. 251-269, 2014.

LAMON, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. En Lester. F. K. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007, v. 1, p. 629-667.

LOBATO, J., CLARKE, D. & ELLIS, A. B. Initiating and eliciting in theaching: a reformulation of telling. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 2, p. 101-136, 2005.

MIYAKAWA, T. & WINSLØW, C. Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". **Educational Studies in Mathematics**, v. 72, p. 199–218, 2009.

RADFORD, L. Education and the illusions of emancipation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 80, p. 101–118, 2012.

RADFORD, L. Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 1, p. 7-44, 2013.

SILVESTRE, A. I. Y PONTE, J. P. Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. **Revista Educación y Pedagogía**, v. 23, n. 59, p. 137-158, 2011.

STREEFLAND, L. Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (Towards… a theory) Part II: The outline of the long term learning process. **Educational Studies in Mathematics**, *v.* 16, n. 1, p.75-94, 1985.

SWELLER, J., KIRSCHNER, P. A., & CLARK, R. E. Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, v. 42, n. 2, p. 115-121, 2007.

TOURNIAIRE, F. Y PULOS, S. Proportional reasoning: A review of the literature. **Educational Studies in Mathematics**, v. 16, p. 181-204, 1985.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamiento y lenguaje**. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.