DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS MEDIANTE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

DEVELOPING THE ONTO-SEMIOTIC ANALYSIS COMPETENCE OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS USING PROPORTIONALITY TASKS

BURGOS, M.[1], GIACOMONE, B.[2], GODINO, J. D.[1] Y NETO, T.[3]

[1] *Universidad de Granada (España);* [2] *Universidad de San Marino;*
[3] *Universidad de Aveiro (Portugal)*

RESUMEN

El reconocimiento de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas matemáticas, así como de los objetos y procesos implicados en las mismas, se considera como una competencia que es necesario desarrollar en el profesor de matemáticas. En este trabajo se describe y analiza una experiencia formativa, con futuros profesores de matemáticas de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia mencionada, usando tareas de proporcionalidad. Se realiza un análisis de las respuestas de uno de los estudiantes a una de las tareas (estudio de caso) usando herramientas teóricas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas, basado en el EOS. Los resultados revelan que el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos por parte

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D. y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

de los futuros profesores no es fácil, indicando la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de nuevas experiencias formativas.

Palabras clave: *formación de profesores, proporcionalidad, competencia, análisis ontosemiótico.*

ABSTRACT

The recognition of the mathematical practices carried out in solving mathematical tasks as well as of the objects and processes involved is considered as a necessary competence that mathematics teacher should develop. In this article, a formative experience with prospective high school mathematics teachers is described and analysed, aimed at developing the aforementioned competence, using proportionality tasks. An analysis of a student's answer to one of the tasks is made (case study) using theoretical tools of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC) of the mathematics teacher, which is based on the OSA. The results reveal the complexity in the recognition of practices, objects, and processes, showing the need to design and implement new educational experiences.

Keywords: *teachers training, proportionality, competence, onto-semiotic analysis.*

1. INTRODUCCIÓN

El profesor de matemáticas debe tener competencia matemática para resolver los problemas que el currículo propone para los niveles educativos en el que el docente desempeña su labor. Pero se reconoce que dicha competencia no es suficiente para lograr una enseñanza idónea. En este sentido, resulta evidente la necesidad de implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado, como un tema fundamental en la agenda de la investigación en educación matemática (Chapman, 2014; English, 2008; Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013).

Entre otros conocimientos y competencias, se requiere que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la solución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza-aprendizaje adecuadas. Esta competencia profesional global de análisis e intervención didáctica involucra, además, conocimientos didáctico-matemáticos específicos cuyo dominio y aplicación debe ser objeto de atención de los programas de formación de profesores. Por ejemplo, el conocimiento matemático en sí mismo capacita a los futuros profesores para la resolución de problemas de proporcionalidad propios de educación secundaria. Sin embargo, se espera que los futuros profesores adquieran el conocimiento didáctico-matemático específico que les permita prever diferentes métodos de resolución para las tareas, reconocer y dominar diferentes niveles de algebrización puestos en juego en las soluciones y desarrollar la capacidad de enunciar problemas relacionados.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) se ha elaborado un modelo de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) (modelo CCDM) que puede servir de base para orientar la formación de profesores de matemáticas. Este modelo amplía y reorganiza las categorías de conocimientos propuestas por otros autores, como el modelo MKT de Ball y cols. (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008). Apoyado en los aportes teóricos del EOS, se vienen experimentando diversas intervenciones formativas con el objetivo de desarrollar en futuros profesores de matemáticas las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas propuestas en el modelo CCDM (véase, por ejemplo, Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016). Más específicamente, como señalan Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2018), se diseñan, implementan y valoran ciclos formativos para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico, tal como se propone en este trabajo, el cual centra la atención en la proporcionalidad, cuyo análisis, en el marco del EOS, se ha iniciado en Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino (2017).

El estudio de las razones, proporciones y la proporcionalidad es un tema importante en el currículo escolar que se inicia en Educación Primaria y se continúa en Secundaria, siendo transversal a diferentes materias (Wilhelmi, 2017). Diversas investigaciones señalan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas y Godino, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; Simon y Blume, 1994; Thomson y Thomson, 1994; Thomson y Thomson, 1996). En particular, los profesores tienden a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (Riley, 2010), y recurren a explicaciones procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de valor faltante en los que se establece una relación de proporcionalidad (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991). Además, con frecuencia, los profesores centran la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional (aplicación de reglas y algoritmos) sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (Lamon, 2007).

La investigación de Ben-Chaim et al. (2012) recurre a tareas matemáticas para incentivar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores en relación al razonamiento proporcional. Se plantea que los futuros profesores lean artículos matemáticos y didácticos sobre razón y proporción, contemplando el trabajo en grupo y la discusión de los resultados con toda la clase. Por su parte, Berk y cols. (2009) estudian la capacidad de futuros maestros de emplear múltiples métodos de resolución para abordar problemas así como para elegir el método más eficaz operacionalmente. Los resultados muestran que los futuros maestros son poco flexibles en resolver el mismo problema usando diferentes métodos.

Teniendo en cuenta el papel central que tiene la noción de proporcionalidad en el currículo, y las dificultades que plantea su enseñanza, hemos realizado una experiencia formativa con futuros profesores de educación secundaria, focalizada en este contenido matemático, aplicando las herramientas del modelo CCDM y del modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática desarrollado en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015). Bajo esta perspectiva, el objetivo de este trabajo es informar del diseño, implementación y resultados de una intervención formativa centrando la atención en una competencia específica del modelo CCDM: el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad y el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones. Debido a limitaciones de espacio analizamos con detalle solo una de las tareas propuestas y las respuestas de uno de los estudiantes participantes que reflejan parcialmente los resultados de la investigación.

Por un lado, el análisis ontosemiótico focalizado en la identificación de la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema prototípicas permite desvelar la complejidad ontosemiótica de un objeto como factor explicativo de potenciales conflictos y dificultades de aprendizaje. Por otro lado, el reconocimiento de los niveles de algebrización, basado en la identificación de objetos y procesos algebraicos, permite identificar progresivos estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas. Además, el cambio en alguna de las variables de la tarea puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Mostramos como ejemplo concreto el diseño y análisis a priori de una tarea de proporcionalidad propuesta como parte de una intervención formativa más amplia, con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria, y mostramos algunos resultados obtenidos de su implementación, que reflejan la importancia de proponer este tipo de tareas como recurso para el formador.

2. MARCO TEÓRICO Y MÉTODO

Como hemos indicado, la investigación está basada en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas (modelo CCDM) desarrollado por Godino, Giacomone et al. (2017). Este modelo se apoya en el sistema de herramientas teóricas desarrolladas en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

2.1. Fundamentos teóricos

En Godino (2009) se propuso un sistema de categorías de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas (modelo CDM) a partir de las herramientas teóricas del EOS. En Pino-Fan y Godino (2015) el modelo CDM se revisa y amplia, incorporando a las herramientas de análisis didáctico las nociones de fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis, ampliando también el trabajo de Font, Planas y Godino (2010). En Godino, Giacomone et al. (2017) se realiza una nueva ampliación del modelo CDM al incorporar la noción de competencia de análisis e intervención didáctica, ligada a la aplicación de cinco herramientas básicas propuestas en el EOS. La Figura 1 detalla las cinco subcompetencias que componen la competencia general de análisis e intervención didáctica.

El futuro profesor debe tener los conocimientos necesarios para reconocer, por un lado los diversos significados (entendidos como sistemas de prácticas) del contenido correspondiente y su interconexión, y por otro la diversidad de objetos y procesos implicados (configuración ontosemiótica) para los diversos significados.

Figura 1. Competencia de análisis e intervención didáctica
(Godino, Giacomone et al., 2017, p. 103)

Godino, Giacomone et al. (2017) definen la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas como aquella que le permita al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento permite «prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio» (p. 94).

Por otro lado, en lo que refiere al estudio de la proporcionalidad, un aspecto clave del CCDM es el reconocimiento, por parte de los profesores, de los distintos niveles de algebrización en la solución de tareas matemáticas que ponen en juego dicha noción. Para el caso de la proporcionalidad, en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) se han identificado tres significados pragmáticos específicos de la proporcionalidad ligados a los niveles de algebrización que se ponen en juego en la solución de tareas que involucran la proporcionalidad directa de magnitudes: significado aritmético (nivel 0 de algebrización), proto-algebraico (nivel 1 y 2) y algebraico-funcional. Estos significados se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva.

Creemos que es importante tener en cuenta los diversos significados en el diseño de los procesos de instrucción, dado que estos tienen lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria y secundaria) y en distintas áreas de contenido (Wilhelmi 2017).

2.2. Enfoque metodológico

Dado que el problema de investigación es diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas para desarrollar en los futuros profesores de educación secundaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre un tema específico, el enfoque metodológico sigue las fases propias de las investigaciones de diseño, aplicando como teoría base el EOS, como proponen Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014): estudio preliminar, diseño de la trayectoria didáctica, implementación y análisis retrospectivo.

2.3. Contexto, población y muestra

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Han participado en el estudio 33 estudiantes, con un perfil académico variado: solo 12 (33,3 %) tienen el grado de Matemáticas; 15 son ingenieros de caminos o arquitectos (44,1%), 3 son físicos y 3 proceden de otras ingenierías. En cuanto a la experiencia previa de enseñanza de las matemáticas, 19 estudiantes declaran que tienen alguna experiencia de enseñanza en clases particulares; los demás estudiantes no la tienen.

3. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO FORMATIVO

La intervención formativa se ha realizado en 4 sesiones de dos horas y media de duración. Dos de ellas tratan sobre el tópico de visualización, en las que se inicia el desarrollo de la competencia de análisis ontosemióticos de las prácticas matemáticas; otra sesión sobre álgebra en la que se introducen los niveles de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) basados en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, Aké et al., 2014; Godino et al., 2015), y una última sesión en la que se evalúa la competencia de análisis ontosemiótico lograda usando una tarea sobre proporcionalidad, seguida de la discusión de las soluciones. El análisis a priori de dicha tarea y los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes a la misma puede encontrarse en Burgos et al. (2017). Por tanto, la cuarta sesión forma parte del proceso instructivo y no tiene una finalidad meramente evaluativa.

La tercera sesión (un taller de dos horas de duración) estuvo centrada en el desarrollo de conocimientos y competencias para el reconocimiento de niveles de algebrización, considerando tres momentos:

1. Presentación de las características del RAE, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática.
2. Realización de las siguientes actividades en equipos de 2 o 3 de estudiantes:
    - 2.1. Resolver tareas matemáticas (se propusieron 8), propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.
    - 2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta las prácticas, objetos y procesos algebraicos previamente identificados.
    - 2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.
3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

En cada una de las sesiones del curso, se recogieron las respuestas dadas por escrito a tareas específicas, resueltas mediante el trabajo en equipos y entregadas a través de la plataforma Moodle usada en la gestión del curso.

Al finalizar la cuarta sesión, y como trabajo opcional complementario para incrementar la calificación final del curso, se propuso la resolución de 5 tareas que involucran la noción de proporcionalidad. Este trabajo fue realizado por 10 estudiantes de manera individual tras la finalización del curso, reflejando por consiguiente aspectos relevantes de los aprendizajes logrados por dichos estudiantes. Analizamos globalmente las respuestas dadas por estos 10 estudiantes a una de las cinco tareas propuestas en esta cuarta sesión, y con más detalle, las respuestas de un estudiante a las consignas de la tarea. Esta tarea se describe en la siguiente sección.

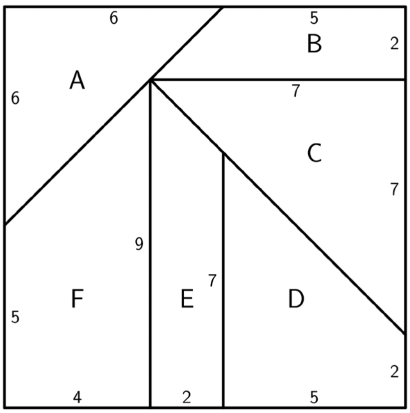
4. ANÁLISIS A PRIORI DE UNA DE LAS TAREAS

En esta sección, y a modo de ejemplo, se analizan las prácticas, objetos y procesos de distintas maneras de resolver uno de los problemas de proporcionalidad propuestos (adaptado de Brousseau, 1997, p. 177). Incluimos la configuración ontosemiótica de una de las soluciones propuestas y una posible variante al problema inicial. Se trata de identificar los tipos de objetos matemáticos y procesos puestos en juego y, por tanto, los conocimientos involucrados en cada caso en una solución esperada o experta del problema, correspondiente a un nivel de algebrización determinado (aritmético, proto-algebraico y algebraico). De esta manera mostramos el tipo de análisis de las tareas matemáticas escolares que esperamos sean capaces de realizar los futuros profesores.

Problema 3 (puzle):

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros.

Se quiere construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. Indicar las medidas de los diferentes lados de las piezas.



Las consignas dadas a los futuros profesores fueron las siguientes:

A) Resolver los problemas incluidos en anexo por al menos dos métodos.

B) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones.

Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver, justificar la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias[1].

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

C) Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se pone en juego en cada caso.

D) Enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles.

Seguidamente incluimos tres soluciones posibles de la tarea del puzle y mostramos en la Tabla 1, a modo de ejemplo, el análisis ontosemiótico de la segunda solución.

Solución 1. Aritmética (nivel 0 de algebrización)

1) Se trata de construir en cartulina un puzle, de manera que el lado que en la figura tiene 4 cm, después tenga 7 cm. Necesitamos conocer las medidas de los lados correspondientes a 2, 5 y 6 cm en la figura (observamos que los lados correspondientes a 7 cm y 9 cm quedarán determinados con las medidas anteriores).
2) En primer lugar, el lado que tenga 2 cm, la mitad de 4 cm, tendrá en cartulina, la mitad de 7 cm, es decir 3,5 cm. Al lado de 6 cm, que es el triple de 2 cm, le corresponderá en cartulina el triple de 3,5 cm, es decir, 3,5 x 3 = 10,5 cm.
3) De la misma manera, a 3 cm en la figura (la mitad de 6 cm) le corresponde en cartulina la mitad de 10,5 cm, esto es, 10,5 ÷ 2 = 5,25 cm.
4) Finalmente, al lado de 5 = 2 + 3 cm en la figura le corresponderán 3,5 + 5,25 = 8,75 cm en el puzle de cartulina.

Solución 2. Proto-algebraica (nivel 1 de algebrización)

1) La relación entre las longitudes de los segmentos en la figura y en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, puesto que se debe construir el mismo puzle pero de mayor tamaño.

[1] Esta tabla fue usada previamente en la fase instructiva.

2) Calculamos la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4 = 1,75.
3) La longitud en el puzle de cartulina, que le corresponde a un segmento de longitud *k* en la figura será 1,75 x *k*

Tabla 1. Configuración ontosemiótica de la solución proto-algebraica (nivel 1 de algebrización)

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
1) La relación entre las longitudes en la figura y en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, puesto que se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa.	*Conceptos:* magnitud, distancia, relación, proporcionalidad directa, escala. *Proposición P1*: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa. *Argumento*: se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño.
2) Calculamos la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4=1,75.	Obtener el valor unitario.	*Conceptos*: escala, valor unitario. *Procedimiento*: reducción a la unidad. *Argumento*: la relación es de proporcionalidad directa.
3) La longitud en el puzle de cartulina, que le corresponde a un segmento de longitud *k* en la figura será 1,75 x *k*	Interpretar el resultado numérico y expresar simbólicamente la solución del problema.	*Concepto:* factor de escala. *Proposición P2*: enunciado de la práctica 3). *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 3), condiciones de proporcionalidad que definen una escala.

Solución 3. Algebraica (nivel 3 de algebrización)

Según Godino et al. (2017), el significado propiamente algebraico (nivel 3) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones (aditiva $f(x + y) = f(x) + f(y)$, y homogénea $f(\alpha x) = \alpha f(\mathrm{x})$).

1) Pretendemos construir un puzle igual al de la figura pero de mayor tamaño. Es decir, si un segmento *s* en la figura tiene el doble, triple,…, de longitud que otro segmento *t* en la figura, en el puzle de cartulina, el segmento *S* correspondiente a *s* tendrá, el doble, triple, etc. de longitud que el segmento *T* correspondiente a *t*. Además si un segmento en la figura es unión de otros dos, en el puzle el segmento asociado también será la unión de los correspondientes en la figura.

2) Teniendo esto en cuenta, la correspondencia que se establece entre las longitudes de los segmentos en la figura (F) y las longitudes de los segmentos en el puzle (P), $f: F \to P$, cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes $f(x + y) = f(x) + F(y)$ y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número $f(\alpha x) = \alpha f(\mathrm{x})$.
3) Por tanto, $f(x) = f(x1) = xf(1)$, es decir, la aplicación $f: F \to P$ es lineal, de la forma: $f(x) = kf(x)$ con $k = f(1)$.
4) El coeficiente k de la función lineal es la constante de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.
5) Aplicando dichas propiedades al caso se tiene:

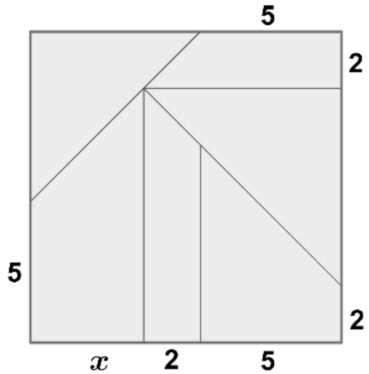
$$f(4) = 7cm;\ 4f(1) = 7cm;\ f(1) = 7/4 = 1{,}75cm$$

6) La longitud en el puzle de cartulina de un segmento de longitud x en la figura, será por tanto $f(\mathrm{x}) = x \text{ x } f(1) = x \text{ x } 1{,}75$

Enunciar y resolver tareas relacionadas

Una respuesta a la cuestión D) planteada en el enunciado de la tarea puede ser la siguiente variante, cuya solución implica un nivel de algebrización 3:

Problema. Se quiere construir un puzle cuadrado igual al de la figura de perímetro 77 cm, de forma que al lado de x cm le corresponda uno de 7 cm. ¿Cuál es la escala?



Solución (Nivel 3 de algebrización).

1) Dado que el puzle es cuadrado y el lado de la figura tiene de longitud $2 + 5 + x = 7 + x$ cm, sabemos que su perímetro será $4(7 + x) = 28 + 4x$ centímetros.
2) Al lado de x centímetros le corresponde uno de 7 cm. Dado que la relación es de proporcionalidad directa:

$$x \to 7$$
$$28 + 4x \to 7$$

3) En toda relación de proporcionalidad directa, las razones de las cantidades que se corresponden son iguales:

$$x = \frac{28 + 4x}{77}$$

4) De aquí, $77x = 7(28 + 4x) \Leftrightarrow 11x = 28 + 4x \Leftrightarrow 7\,x = 28 \Leftrightarrow x = \frac{28}{7} \Leftrightarrow x = 4$
5) Por tanto, la escala es 4:7.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado informaremos de manera detallada de la respuesta de uno de los estudiantes, como un estudio de caso, haciendo mención también al conjunto de respuestas de los 10 estudiantes que respondieron a la tarea analizada.

5.1. Estudio de un caso

En la consigna A) se pedía que resolviese la tarea por al menos dos métodos. Como vemos en la Figura 2, el estudiante E7 ofrece dos soluciones al problema.

En la primera solución dada, el estudiante recurre al procedimiento de la regla de tres, tantas veces como longitudes necesita averiguar para construir el puzle en cartulina. Este desarrollo se aplica en la resolución de un problema de proporcionalidad, en el cual se conocen tres de los cuatro valores que determinan la proporción y se precisa calcular el cuarto. El estudiante no se preocupa por argumentar la pertinencia del procedimiento seguido, es decir, no fundamenta el algoritmo en base a la correspondencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes, distancia en la figura y distancia en el puzle. Por otro lado, en la solución no aparece explícito el procedimiento seguido para despejar y obtener el valor de las distintas incógnitas.

Figura 2. Soluciones propuestas por el estudiante E7

1º Usando la regla de 3 identificamos todas las longitudes distintas que aparecen en la figura.

$$\begin{array}{ccccc} 4 \rightarrow 7 & 4 \rightarrow 7 & 4 \rightarrow 7 & 4 \rightarrow 7 & 4 \rightarrow 7 \\ 6 \rightarrow x & 5 \rightarrow y & 2 \rightarrow z & 7 \rightarrow a & 9 \rightarrow b \end{array}$$

x=10,5 y =8,75 z=3,5 a=12,25 b=15,75

21 Usando el concepto de escala y razón: r = 7/4 = 1,75 vamos a construir un elemento 1,75 veces mayor al anterior. Ahora a cada elemento lo multiplicamos por la razón obteniendo as' el resultado final:

6 x 1,75 = 10,5; 5 x 1,75 = 8,75; 2 x 1,75= 3,5;

7 x 1,75 = 12,25; 9 x 1,75 = 15,75

En la segunda solución dada, el estudiante obtiene el factor de escala que le permite pasar de las longitudes en la figura a las longitudes del puzle en cartulina, indicando que «a cada elemento lo multiplicamos por la razón». El uso del término razón, en lugar de factor de proporcionalidad nos lleva a pensar que este estudiante no reconoce la riqueza y complejidad de los conceptos de razón y proporcionalidad (Freudenthal, 1983, cap. 6).

En la Tabla 2, aparece la respuesta dada por el estudiante a la consigna B). Debía identificar los conocimientos puestos en juego en las soluciones que había presentado en la consigna anterior, enumerando la secuencia de prácticas y completando la tabla con el uso e intencionalidad de las unidades elementales de prácticas y los objetos referidos en las mismas.

Tabla 2. Configuración ontosemiótica elaborada por el estudiante E7

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)
Solución 1. 1º Identificar cada uno de las medidas de los elementos 2º Usar la regla de 3.	La intención es formar parejas de fracciones equivalentes entre sí, con tres datos y una incógnita.	*Conceptos*: regla de 3, equivalencia. *Proposiciones*: cuando existen una relación de proporcionalidad se usa la regla de 3 para el cálculo de un cuarto elemento que se desconoce. *Procedimientos*: la incógnita se calcula multiplicando en cruz y dividiendo por el número que queda. *Argumentación*: todas las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales, tal y como propone el enunciado.
Solución 2. 1º Calcular la razón de semejanza que existe entre los dos datos iniciales del problema. 2º Multiplicar cada elemento por la razón de semejanza.	La intención de este método es usar la razón de semejanza como objeto de elementos que son proporcionales, ya que se quiere crear un objeto de mayores dimensiones que siga la misma proporción.	*Conceptos*: razón de semejanza, equivalencia, proporcionalidad. *Proposiciones*: elementos que son proporcionales siguen una misma razón de semejanza. *Procedimientos*: multiplicar a cada elemento por la razón de semejanza. *Argumentación*: todas las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales tal y como propone el enunciado.

El estudiante no enumera las distintas prácticas elementales, sino que incluye en la columna destinada a tal fin, el uso de éstas, lo que muestra una confusión entre la práctica matemática y el significado atribuido a ésta. En la primera solución propuesta, el estudiante asigna a la técnica de la regla de tres la intención de «formar parejas de fracciones equivalentes entre sí, con tres datos y una incógnita». En cierta medida, esto esconde el significado de la regla de tres: la equivalencia de razones permite encontrar uno de los términos de una proporción conocidos los otros tres. En una igualdad de razones (proporción) los productos en cruz son iguales, de manera que si el término desconocido es un extremo se obtendrá multiplicando los términos medios de la proporción y dividiendo el resultado por el otro extremo.

Como objetos referidos figura «regla de tres» como concepto. Así mismo, bajo la denominación de proposición «cuando existen una relación de proporcionalidad se usa la regla de tres para el cálculo de un cuarto elemento que se desconoce» establece una relación causa-efecto entre situación de proporcionalidad y procedimiento de regla de tres para resolverla. El procedimiento «la incógnita se calcula multiplicando en cruz y dividiendo por el número que queda», refiere a la igualdad de los productos cruzados en una proporción, estando la incógnita en un extremo de la misma.

Un argumento es un enunciado requerido para justificar una proposición o explicar un procedimiento. El argumento «todos las magnitudes obtenidas son mayores a las iniciales tal y como propone el enunciado» no deja de ser un pensamiento cualitativo que pretende justificar la corrección de la solución.

La segunda solución propuesta por el estudiante recae en la semejanza entre la figura del puzle y el puzle que debe construirse en cartulina. Establece que «la intención de este método es usar la razón de semejanza como objeto de elementos que son proporcionales», ya que se quiere crear un objeto de mayores dimensiones que siga la misma proporción. El uso que hace el estudiante de los términos razón de semejanza y proporción es confuso. Esta confusión se manifiesta también cuando identifica la proposición «elementos que son proporcionales siguen una misma razón de semejanza». Nuevamente el argumento hace referencia a un tratamiento informal cualitativo de la relación de proporcionalidad entre ambas figuras.

A continuación, el estudiante debía identificar el nivel de algebrización de las soluciones que había propuesto, teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en ellas, así como las posibles dificultades que se podrían observar en la resolución del problema usando las distintas estrategias seguidas. En la Figura 3 se incluye la respuesta del estudiante a esta consigna.

Figura 3. Niveles de algebrización identificados por el estudiante E7

En ambos casos el nivel de algebrización es 1, ya que se usa el significado relacional de la igualdad y se usan variables como incógnitas.

El estudiante identifica apropiadamente el nivel de algebrización en la segunda solución, aunque la justificación es incorrecta (en este caso no hay un uso de símbolos literales como incógnitas) pero no así en la primera, que correspondería a un nivel 2 de algebrización. Probablemente, la confusión proceda del hecho de vincular nivel 1 de algebrización a un procedimiento de resolución por regla de tres, debido al uso degenerado del algoritmo, donde no se hace mención a la serie de números proporcionales implicada ni a la igualdad de razones correspondientes que lleva a la resolución de una ecuación del tipo Ax = B. El estudiante hace referencia al uso de «variables como incógnitas» para decidir (junto al significado relacional de la igualdad) que la actividad desarrollada en la solución es proto-algebraica de nivel 1.

Por último, el estudiante debía enunciar y resolver variantes del problema cuya solución implicase cambios en los significados puestos en juego. La Figura 4 incluye la tarea (solo propone una) del estudiante E7.

Figura 4. Variante propuesta por el estudiante E7

Partiendo del mismo ejercicio, calcular la magnitud que tendrían que tener cada uno de los elementos de la figura para que la relación de áreas fuera de 25/16.

Primero identificamos que la relación pedida corresponde a k2 = 25/16 por lo tanto la razón de semejanza que tienen que tener los lados es de k = 5/4. Por lo tanto, como se ha procedido en el ejercicio anterior se procede a calcular los otros elementos:

6x1,25 = 7,5; 5x1,25 = 6,25; 2x1,25= 2,5; 7x1,25 = 8,75; 9x1,25 = 11,25; 4x1,25 =5

El enunciado propuesto por el estudiante pide determinar las medidas del puzle en cartulina teniendo en cuenta que la razón entre las áreas del puzle y la maqueta es 25/16. Así, cuando el estudiante dice «magnitud» debería decir medida, y donde dice «relación de áreas» debería decir razón de áreas. En la solución el estudiante obtiene la razón entre los lados a partir de la razón entre las áreas, calculando la raíz cuadrada de los términos de ésta. A partir de aquí concluye que se procede como en la segunda solución propuesta al problema inicial. No incluye el nivel de algebrización que le asigna a esta nueva tarea, que sigue siendo proto-algebraica de nivel 1, es decir, el estudiante no ha conseguido proponer un enunciado alternativo con un nivel de algebrización distinto al de las soluciones previas.

5.2. Respuestas de otros estudiantes

De los 10 estudiantes que hicieron las tareas complementarias, dos alumnos no resolvieron la tarea del puzle y de los que la realizaron, uno no respondió a los ítems B), C) y D).

Los procedimientos más frecuentes de solución a la tarea son el de regla de tres y el de obtención del factor de escala o constante de proporcionalidad, el cual permite pasar de la maqueta al puzle en cartulina. Los alumnos que identificaron el nivel de algebrización en la solución por regla de tres, le asignaron nivel 1, en lugar de nivel 2, como sería apropiado, en virtud de los criterios establecidos en Godino, Aké et al. (2014). Al igual que ocurría con el estudiante E7, el uso degenerado de la regla de tres, lleva a los estudiantes a atribuir un nivel erróneo (como afirma un estudiante «le corresponde un nivel 1 de algebrización, pues los datos desconocidos los representamos por diferentes letras, pero no se resuelven ecuaciones de la forma $Ax=B$, ni se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión». Además de éstas, se propone una solución del tipo funcional (Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017) a la que asigna incorrectamente un nivel 4 de algebrización, argumentando para ello que «al aparecer y manejar una función donde no se manipulan ni se opera con los parámetros, el nivel de algebrización es el 4». Llama la atención la solución propuesta por otro alumno en base a la semejanza entre los puzles (maqueta y real), haciendo un uso inapropiado del teorema de Thales.

De manera general, las respuestas que los futuros profesores dieron a la tarea del puzle ponen de manifiesto ciertas dificultades para realizar la secuenciación de prácticas elementales, diferenciar las prácticas de sus usos e intencionalidad, y para distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) referidos en ellas. En algunos estudiantes se aprecia confusión con el significado del objeto primario concepto. Por ejemplo, es frecuente que regla de tres aparezca como concepto en la configuración. Otros objetos identificados erróneamente como conceptos son «rectas semejantes», «Teorema de Thales».

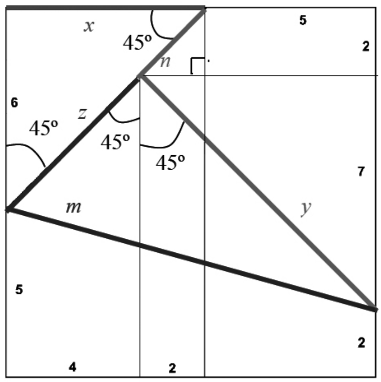
Los futuros profesores son frecuentemente imprecisos con la noción de proposición. A veces es interpretada como premisa o argumento en lugar de un enunciado sobre conceptos que necesita justificación o prueba. Así, es habitual encontrar en las configuraciones «identificar una proporción» o «establecer una regla de tres con una incógnita» como proposiciones. El objeto menos identificado es argumento. Además, cuando es referido lo es de forma incorrecta, no alude a justificación de una proposición o procedimiento, sino a la descripción de la práctica referida. Por ejemplo, un único estudiante hace referencia a «relaciones de proporcionalidad en el procedimiento empleado como argumento».

Por último, para responder adecuadamente a la consigna D) es importante que los futuros profesores hayan identificado previamente los objetos matemáticos en la solución de un problema y establezcan apropiadamente las relaciones entre ellos. En este sentido, observamos que los estudiantes tienen dificultades para elaborar de forma pertinente problemas que supongan una variación respecto del enunciado inicial. Los enunciados propuestos se alejan demasiado del contexto original, son poco significativos o la tarea que proponen no es de proporcionalidad. Interpretan que introducir nuevas variables, coeficientes, etc. incrementa el nivel de algebrización. Por ejemplo, el alumno que propone la solución algebraico-funcional, responde a la última consigna afirmando que «cambiaríamos el nivel de algebrización si en lugar de usar una proporción 4:7, ampliamos la figura de manera que a cada longitud le correspondiera su doble (es decir, la razón no es una fracción)». Otro futuro profesor propone la tarea que aparece en la Figura 5 como variante a la situación inicial:

Figura 5. Variante propuesta por el estudiante E4 a la tarea del puzle

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle.

Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Determina la longitud de los lados desconocidos x, y, z, m y n usando los ángulos dados y el teorema de Pitágoras.



El contexto de dicho problema ya no es el de proporcionalidad. La solución que desarrolla se basa en la aplicación sucesiva del Teorema de Pitágoras, a la que el estudiante asigna incorrectamente nivel 3 de algebrización —«asociamos a esta tarea un nivel 3 de algebrización pues aparecen ecuaciones con variables y se realizan operaciones con ellas».

6. REFLEXIONES FINALES

Para terminar, volvemos a enfatizar nuestro motivo para este capítulo. Las últimas décadas han visto una proliferación de nuevas teorías dentro de la investigación en educación matemática, y esto conduce a una preocupación por establecer más vínculos entre los distintos modelos teóricos y las herramientas que proporcionan, en particular, para propósitos de diseño. A lo largo de este trabajo, hemos planteado la necesidad de desarrollar en los profesores de matemáticas una competencia específica, relativa al análisis de las prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de tareas matemáticas. Otros autores han abordado este tema desde otras perspectivas teóricas, por ejemplo, Fernández, Llinares y Valls (2012; 2013), Buforn, Llinares y Fernández (2018), usando también tareas relacionadas con la proporcionalidad. Los resultados de estas investigaciones, revelan limitaciones en la comprensión de los significados de los conceptos matemáticos de los futuros profesores a pesar de que conocieran y emplearan los procedimientos vinculados correctamente, proponiendo como objetivo potenciar en los programas de estudio la comprensión conceptual de las matemáticas escolares en los alumnos. Como señalan estos autores, es importante promover en los futuros profesores la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas que involucran relaciones de proporcionalidad.

El análisis que nosotros realizamos está apoyado en la herramienta configuración ontosemiótica del EOS, al considerar que permite un nivel de análisis más microscópico y sistemático de la actividad matemática. Se considera que el profesor de matemáticas debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, interpretando los significados en términos de sistemas de prácticas, lo cual facilita la consideración de dichos sistemas como nuevos objetos de análisis y reflexión. Además, la identificación de los objetos y procesos implicados en la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, permitirá al profesor comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización necesarios y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

El foco de atención de este trabajo ha sido el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas, particularizado a una tarea de proporcionalidad. Los resultados nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados. Este reconocimiento se considera, no obstante como clave para que los profesores estén capacitados para la implementación de procesos de estudio de las matemáticas que promuevan la competencia matemática de los estudiantes.

Observamos que la acción formativa implementada ha mejorado la competencia de los futuros docentes (comparándola con los resultados de Burgos et al., 2017) para identificar los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, así como también para reconocer de manera pertinente los distintos niveles de algebrización puestos en juego. También se observa mejora en la formulación de variantes pertinentes de un problema dado, y en el reconocimiento del papel que el procedimiento empleado, el lenguaje y el grado de generalidad, tienen en dicho proceso.

El estudio de caso descrito como ejemplo de diseño formativo ha revelado, no obstante, las dificultades que tienen los futuros profesores para apropiarse de la herramienta teórica configuración ontosemiótica. Esperamos que este capítulo motive la realización de nuevas experimentaciones, empleando más tiempo para iniciar discusiones prolongadas con los futuros profesores y lograr un nivel adecuado de la competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo PAI, FQM 126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L, Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(3), 113-135.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluver.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23,* 229-251.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham, y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research trends in mathematics teacher education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York, NY: Routledge.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM-Mathematics Education, 44*, 747-759.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM*, (13), 39-61.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 89-105.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-25.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1109-1132.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En, F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87-109.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime, 19*(1), 71-98.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edn., pp. 275-296). New York, NY: Routledge.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). Ithaca, NY: SUNY Press.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University.

Rivas, M. y Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere, 14*(48), 189-205.

Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588.

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. En S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn y J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (pp. 13-27). Rotterdam, The Netherlands: Sense

Simon, M. y Blume, G. (1994). Mathematical modelling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 183-197.

Thomson, P. W. y Thomson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 279-303.

Thomson, A. G. y Thomson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2-24.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html