Evaluación de la competencia de análisis epistémico de tareas sobre proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria[1]

María Burgos y Juan D. Godino

Universidad de Granada

Resumen

La resolución de problemas de varias maneras, la identificación de los conocimientos que se ponen en juego en cada caso, previsión de dificultades y el enunciado de variantes de los problemas son aspectos fundamentales de la competencia de análisis del conocimiento matemático para la enseñanza. En este trabajo se informa del diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa con futuros profesores de educación primaria para promover el desarrollo de dicha competencia con tareas que ponen en juego razonamiento proporcional y algebraico. La experiencia se ha hecho con una muestra de 88 estudiantes (dos grupos-clase), aplicando un modelo didáctico que incluye trabajo en equipos, institucionalización y evaluación individual de los aprendizajes logrados. El 73,3 % de los estudiantes tuvieron éxito al resolver los problemas, sin embargo, sólo un 27% de éstos lograron resolver los cuatro problemas propuestos por al menos dos procedimientos diferentes. Más de la mitad de los estudiantes identificaron adecuadamente los conocimientos en cada uno de los problemas propuestos y en más de la mitad de las soluciones propuestas, el nivel de algebrización fue asignado correctamente. Sin embargo, menos del 20% de los estudiantes lograron elaborar variantes significativas a los problemas propuestos de forma pertinente. Se concluye que el desarrollo de la competencia de análisis epistémico de tareas que ponen en juego razonamiento proporcional y algebraico requiere una mayor atención en los programas formativos.

Palabras clave: formación de profesores, diseño instruccional, conocimiento didáctico-matemático, análisis epistémico, razonamiento proporcional

Introducción

La relación entre el grado de conocimiento del profesor de matemáticas y el logro de aprendizaje de sus alumnos justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que deben tener los futuros profesores (Shulman, 1986). Así pues, desde la investigación en educación matemática, se hace necesario diseñar e implementar experiencias formativas que permitan caracterizar y promover el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado (Chapman, 2014; English, 2008; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013). Desde diversos enfoques de investigación se han empleado tareas específicas en programas de formación de profesores que contribuyan a lograr este objetivo.

[1] Burgos, M. & Godino, J. D. (2021). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education.* The Version of Record of this manuscript has been published and is available in https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-020-10143-0

Aunque "los profesores de grado medio deberían tener una profunda comprensión de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional y su centralidad en todo el pensamiento matemático" (Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder &Thompson, 1998, p. 144), varias investigaciones indican que tanto los futuros profesores como los que están en servicio tienen dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret & Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara & Poetzl, 2009; Hilton & Hilton, 2018; Rivas, Godino & Castro, 2012). La falta de comprensión del desarrollo del razonamiento proporcional motiva que los profesores se centren a menudo en el aspecto algorítmico recurriendo a argumentos procedimentales para justificar sus estrategias en la resolución de problemas de proporcionalidad (Lamon, 2007; Riley, 2010).

> Estos hallazgos sugieren que para que los profesores puedan promover el razonamiento proporcional de los estudiantes, primero deben tener una sólida comprensión de los diversos elementos y conceptos fundamentales del razonamiento proporcional (conocimiento del contenido), así como un conocimiento pedagógico del contenido que les permita planificar experiencias de aprendizaje eficaces para promover el razonamiento proporcional de sus estudiantes. (Hilton y Hilton, 2018, p.3)

Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo general es analizar, promover y evaluar el desarrollo profesional de los futuros profesores de matemáticas en los conocimientos didácticos y matemáticos relacionados con el razonamiento proporcional. La investigación sobre el razonamiento proporcional, tanto con alumnos como con profesores, suele focalizarse en el enfoque aritmético de la proporcionalidad, que se centra en los conceptos de razón y proporción, así como en las comparaciones multiplicativas de cantidades. En nuestra propuesta para abordar el razonamiento proporcional en la formación del profesorado, pretendemos articular el razonamiento proporcional con el razonamiento algebraico. En consecuencia, analizamos la actividad matemática que se desarrolla en las situaciones de proporcionalidad, teniendo en cuenta los grados de generalización y formalización, así como el cálculo analítico que implica. El estudio de los niveles de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas en las tareas de proporcionalidad, permite a los profesores establecer vínculos entre los diferentes significados (aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional) de la proporcionalidad, tomar conciencia de los progresivos grados de complejidad epistémica y cognitiva asociados a ellos, y planificar el estudio de estos contenidos de la manera más pertinente.

En la siguiente sección describimos los antecedentes y las principales nociones del marco teórico que se usan en el artículo. En la sección “Metodología: Diseño formativo” describimos el enfoque metodológico, incluyendo el contexto y los participantes. Los resultados de la investigación, atendiendo a las cuestiones de investigación planteadas se presentan en la sección “Resultados”. El artículo concluye con el análisis retrospectivo y algunas implicaciones para la formación de profesores.

Antecedentes, marco teórico y cuestiones de investigación

En esta sección, primero resumimos algunas investigaciones dirigidas a desarrollar las competencias matemáticas y didácticas de los profesores, mediante el análisis de tareas y la creación de problemas, que son relevantes para este artículo. A continuación, presentamos las herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, marco teórico y metodológico que sustenta nuestra investigación. Presentamos el modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor desarrollado por el EOS, centrando la atención en la competencia de análisis ontosemiótico. Este modelo sobre el conocimiento de los profesores utiliza las nociones de *significado pragmático* de un objeto matemático y de *configuración de prácticas, objetos y procesos*, incluidas a continuación. La noción de conflicto semiótico introducida por el EOS se utiliza para analizar las dificultades y errores de los futuros profesores de primaria en sus configuraciones ontosemióticas. Además de estas herramientas, en nuestra investigación asumiremos el punto de vista del razonamiento algebraico elemental desarrollado bajo los supuestos del EOS. Los niveles de algebrización proporcionan criterios para distinguir categorías de significado de la proporcionalidad que deben formar parte del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Análisis de tareas y creación de problemas por profesores

Varias investigaciones en educación matemática sugieren la necesidad de apoyar a los futuros profesores para analizar las tareas matemáticas que pueden ser utilizadas en una lección (Boston, 2013; Guberman & Leikin, 2013; Lee, Coomes & Yim, 2017; Stahnke, Schueler & Roesken-Winter, 2016). Los resultados indican que los profesores tienen dificultades para interpretar las tareas e identificar su potencial educativo (Stahnke, et al., 2016), y que las experiencias de los profesores en la resolución de tareas matemáticas desafiantes como aprendices aumentan el conocimiento de los profesores sobre las demandas cognitivas de las tareas matemáticas (Boston, 2013).

Guberman y Leikin (2013) describen una experiencia formativa dirigida a desarrollar el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores a través del uso sistemático de tareas que admiten diferentes métodos de solución basados en la intervención de diferentes representaciones de conceptos matemáticos, propiedades (definiciones o teoremas) o procedimientos, relativos a un determinado contenido matemático. Los resultados mostraron que los futuros profesores progresaron en esta competencia adquiriendo flexibilidad a la hora de conectar problemas con conceptos y propiedades matemáticas.

Lee, et al. (2017) describen una intervención con profesores basada en la resolución de tareas en pequeños grupos y la descripción de las ideas matemáticas que identificaron como (1) más significativas para resolver la tarea y (2) sustentar los procedimientos más representativos. Los autores concluyen que este tipo de actividades refuerzan el aprendizaje de los profesores para reconocer el potencial de las matemáticas involucradas en una tarea determinada.

Además, investigaciones recientes sobre la creación de problemas matemáticos sitúan esta actividad como un medio para mejorar los conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas (Ellerton, 2013; Mallart, Font & Diez, 2018; Milinkovié, 2015; Tichá & Hošpesová, 2013). Desde la perspectiva de las competencias matemáticas, la creación de problemas matemáticos con fines educativos es un gran reto para las capacidades docentes (Tichá & Hošpesová, 2013; Milinkovié, 2015). Según Mallart, Font y Díez (2018) un profesor no solo debe ser capaz de resolver problemas matemáticos, sino también de elegir, modificar y plantear problemas con fines educativos. Esto implica que, los profesores deben desarrollar habilidades de análisis e intervención para valorar los problemas que utilizan, reflexionando sobre la práctica matemática de resolución y creación de problemas, y evaluando los problemas en función de determinados criterios educativos (p. 1467).

Algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico

En esta investigación se aplican diversas herramientas teóricas y resultados del denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento e instrucción matemáticos, desarrollado en diversos trabajos de investigación por Godino y colaboradores (Font, Godino & Gallardo, 2013; Godino, Batanero & Font, 2007).

Modelo de conocimiento y competencia didáctico-matemática

El modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor propuesto por el EOS (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015), interpreta y amplía otros modelos de conocimiento del profesor utilizados en educación matemática, como el modelo MKT (Ball, 2000; Hill, Ball & Schilling, 2008). En el modelo CCDM, se asume que los profesores deben tener un *conocimiento matemático común* respecto al nivel educativo en el que enseñan, y un *conocimiento matemático ampliado* que les permita articularlo con niveles superiores. Además, para cada contenido matemático, el profesor debe tener un *conocimiento didáctico-matemático* de las diferentes facetas que afectan al proceso educativo. Esto permite al profesor, ante una determinada situación matemática, reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego, ser capaz de resolver la tarea utilizando diferentes procedimientos y mostrando distintas justificaciones (faceta epistémica), así como ser competente para modificarla en función de las necesidades de aprendizaje de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

El sistema de categorías para el análisis de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas propuesto por el modelo CCDM está relacionado con el tipo de herramientas de análisis elaboradas en el núcleo del EOS (Pino-Fan, Assis & Castro, 2015, p.1431). En este trabajo, centramos la atención principalmente en la evaluación de la *competencia de análisis epistémico* de los futuros profesores, que les permite identificar los objetos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas necesarias para resolver las situaciones-problema requeridas.

Significado pragmático y configuración ontosemiótica

Desde un punto de vista antropológico y pragmático sobre el conocimiento matemático, el EOS pone el énfasis en las *prácticas matemáticas*, entendidas como acciones realizadas por un sujeto para resolver una situación-problema. Los sistemas de prácticas matemáticas están determinados por diferentes tipos de objetos matemáticos que se clasifican según su función y naturaleza en las siguientes categorías: *lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.), *situaciones-problema* (aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios), *conceptos* (introducidos mediante definiciones); proposiciones (enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y *argumentos* (enunciados necesarios para justificar las proposiciones y validar los procedimientos). Estos objetos no aparecen aislados, sino que están interconectados entre sí formando *configuraciones ontosemióticas* de prácticas, objetos y procesos.

La noción de conflicto semiótico ha sido introducida en el marco del EOS (Godino et al, 2007), como explicación de las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de contenidos matemáticos específicos y, en general, de las dificultades que surgen en la comunicación en el aula. Teniendo en cuenta la relatividad de los sistemas de prácticas y significados respecto a los marcos institucionales, un conflicto semiótico es cualquier disparidad o desajuste de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en una comunicación interactiva. La noción de conflicto semiótico es más general que la de obstáculo, y algo más específica que la de "error" o "dificultad".

Razonamiento algebraico elemental y niveles de algebrización

En este estudio nos centramos en el razonamiento algebraico y proporcional. Asumimos el punto de vista de autores como Kieran (2004) sobre la naturaleza del razonamiento algebraico, que lo identifican como aquel que permite analizar las relaciones entre cantidades, reconocer la estructura de una situación, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar y justificar, probar o hacer predicciones sobre situaciones que involucran objetos matemáticos. Dado que el razonamiento proporcional se entiende como la capacidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y extender esta relación a otro par de cantidades (Lamon, 2007), el razonamiento proporcional se sitúa como precursor del pensamiento algebraico (Lundberg & Kilhamn, 2016).

En el marco del EOS se ha propuesto una caracterización del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) para la Educación Primaria en la que se distinguen tres niveles de razonamiento (Aké, Godino, Gonzato & Wilhelmi, 2013; Gaita & Wilhelmi, 2019; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014), estableciendo criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0) y distinguirla de los niveles progresivos de algebrización. Los niveles de algebrización se relacionan con los aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del razonamiento algebraico: la simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones (niveles proto-algebraicos), el razonamiento guiado sintácticamente y las acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales (nivel algebraico consolidado).

La aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de práctica vinculados a las tareas de proporcionalidad, proporciona criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional. En este sentido, Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) consideran tres significados pragmáticos específicos de la proporcionalidad que se activan en la resolución de tareas que implican la proporcionalidad de magnitudes: significado aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional. El significado aritmético (nivel de algebrización 0) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritmético (multiplicación, división) a determinados valores numéricos; no intervienen objetos ni procesos algebraicos. El significado proto-algebraico se centra en la noción de proporción, por lo que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad y el uso de representaciones diagramáticas de las soluciones puede describirse como proto-algebraico de nivel 1. Además, la resolución de un problema de valor faltante, basado en el uso de razones y proporciones, da lugar al establecimiento de la ecuación proporcional o regla de tres, y a su resolución mediante la multiplicación cruzada. La actividad de algebrización que se realiza en este caso es proto-algebraica de nivel 2, ya que la incógnita está en un solo lado de la ecuación ($Ax = B$). El sentido algebraico-funcional (nivel de algebrización 3) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y las técnicas de resolución basadas en las propiedades de estas funciones.

El reconocimiento del carácter algebraico en las prácticas matemáticas (es decir, el tipo de representaciones utilizadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico puesto en juego en la actividad matemática correspondiente) ayuda al profesor a apreciar la complejidad del razonamiento proporcional, tanto desde el punto de vista epistémico como cognitivo. Creemos que analizar el razonamiento proporcional mediante los niveles de algebrización permite al futuro profesor realizar un análisis microscópico de la actividad matemática, analizando con detalle la red de conceptos, lenguajes, procedimientos y argumentos que están implicados en las diferentes prácticas matemáticas y cómo se relacionan entre sí.

Cuestiones de investigación

El problema de investigación que se aborda en este artículo se centra en la evaluación de los conocimientos y competencias en el análisis de tareas desarrollado por futuros maestros después de una intervención formativa sobre análisis de objetos y procesos matemáticos en la resolución de problemas escolares de proporcionalidad. En particular, planteamos las siguientes cuestiones:

1. ¿Son los futuros maestros capaces de resolver problemas de proporcionalidad por al menos dos procedimientos diferentes que podrían emplear alumnos de primaria?
2. ¿Identifican los futuros maestros los conocimientos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en las soluciones?
3. ¿Son capaces, en base a esta identificación, de asignar niveles de razonamiento algebraico a las diferentes soluciones que elaboran?

4. ¿Pueden los futuros maestros elaborar variantes de los problemas cuya solución esperada involucre cambios en los niveles de razonamiento algebraico?

Método: Diseño formativo

Enfoque metodológico

El problema de investigación es el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar en futuros maestros de educación primaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico elemental. Por tanto, el marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). Esta interpretación, amplía su concepción tradicional (Artigue, 1989) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly, Lesh, y Baek, 2008), distinguiendo cuatro fases en la investigación: estudio preliminar (en sus distintas facetas epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional), diseño del experimento (selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas atendiendo a los comportamientos esperados de los estudiantes), implementación (observación de las interacciones entre personas y recursos, y evaluación de los aprendizajes logrados), evaluación o análisis retrospectivo (derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación).

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se ha implementado en 2018 con 88 alumnos de tercer curso del Grado de Educación Primaria divididos en dos grupos, uno de 45 y otro de 43 alumnos. Durante sus estudios de grado, los futuros maestros han recibido una formación específica sobre aspectos epistémicos (conocimientos matemáticos), cognitivos (aprendizajes, errores y dificultades), instruccionales (tareas, actividades, materiales y recursos) y curriculares de la enseñanza de las matemáticas. En el momento de desarrollar la experiencia, se espera que los participantes sean capaces de poner en práctica los conocimientos adquiridos, para resolver, diseñar y secuenciar las tareas matemáticas de un contenido específico, en nuestro caso la proporcionalidad.

En este trabajo analizaremos la información recogida a partir de las anotaciones del observador/investigador y las respuestas escritas de los estudiantes a parte de la tarea de evaluación propuesta al final del curso. Dicha tarea fue examinada por el equipo investigador aplicando las técnicas de análisis ontosemiótico (análisis de contenido por medio de los tipos de objetos y procesos establecidos por el EOS).

Implementación

La intervención formativa se desarrolló durante 3 sesiones de dos horas de duración cada una. La primera sesión se centró en las características del razonamiento algebraico elemental, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino et al. (2014). Se perseguía reflexionar y profundizar en la distinción de tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares y la asignación de niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares, algunas de las cuales correspondían a situaciones de proporcionalidad. En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los futuros maestros debían trabajar en equipos para responder a consignas similares a las que se emplearon en la tarea de evaluación (Anexo). En la instrucción previa que han recibido los estudiantes, se les había explicado los distintos elementos que aparecen referidos en las consignas. Además, se les facilitó un ejemplo completamente resuelto del análisis que se esperaba que realizasen. El trabajo inicial en grupo permite a los estudiantes comparar y enriquecer sus propuestas de diversas estrategias para resolver los problemas e identificar las posibles dificultades en las mismas. En la tercera sesión, los estudiantes trabajaron de manera individual las tareas que se incluyen en el Anexo como instrumento de evaluación final. Las diversas consignas planteadas, tanto en las actividades propuestas para trabajar en grupo como aquellas de evaluación final, perseguían desarrollar y diagnosticar tipos concretos de conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos en relación a la proporcionalidad. Resumimos esta información en la Tabla 1.

Tabla 1. Consignas y tipos de conocimiento implicados en los problemas (Anexo)

Consigna	Tipo de conocimiento	Intencionalidad
1. Resolver la tarea Problema 1 (valor faltante)	Común	Identificar conocimiento o carencias sobre proporcionalidad en un problema de valor faltante
Problema 2 (comparación)		Identificar conocimiento sobre razón y proporción en un problema de comparación
Problema 4 (distinción estrategias aditivas y multiplicativas)		Distinguir relaciones aditivas de multiplicativas. Promover la argumentación y justificación matemática
Problema 3 (proporcionalidad inversa)	Ampliado	Comprobar si los futuros maestros identifican situaciones de proporcionalidad inversa
2.Resolver los problemas de varias maneras, incluyendo las estrategias que usarían los alumnos de primaria	Especializado	Promover la flexibilidad de resolución y la capacidad de adaptación al nivel educativo pertinente
3. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas		Desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico en tareas de proporcionalidad
4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones		Profundizar en la faceta epistémica del CCDM analizando RAE en las tareas de proporcionalidad
5. Enunciar tareas relacionadas		Contribuir a la faceta instruccional impulsando la creación-variación de problemas atendiendo a los significados involucrados

Análisis de datos

En las tareas (incluidas en el Anexo), que se han planteado a los estudiantes para maestro de primaria (EPM en adelante) se espera que éstos resuelvan los cuatro problemas sobre proporcionalidad, y que una vez identificados los conocimientos puestos en juego, asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

Previamente, los investigadores resolvieron los problemas propuestos a los futuros profesores, elaborando las soluciones correspondientes a cada nivel algebraico. Para cada solución, realizaron la configuración ontosemiótica asociada, y basándose en los objetos (conceptos, lenguajes, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos involucrados, asignaron el nivel de algebrización correspondiente. A continuación, cada una de las diferentes soluciones propuestas por los estudiantes a los problemas y variantes se clasificaron en correctas o incorrectas, y se dividieron en prácticas elementales para elaborar las correspondientes configuraciones ontosemióticas. Esto sirvió para evaluar el grado de pertinencia de las configuraciones elaboradas por los futuros profesores, para decidir el nivel de algebrización de cada solución propuesta; y finalmente, para determinar el grado de corrección del nivel de algebrización asignado por los EPM.

Estrategias de resolución empleadas. A continuación, describimos las estrategias detectadas en las soluciones dadas por los EPMs a los problemas, asociadas a cada nivel de algebrización (NA). Como hemos mencionado, los niveles de algebrización correspondientes fueron asignados por el equipo de investigación tras analizar los objetos, significados y procesos implicados en la actividad matemática.

Nivel 0 de algebrización. En este nivel se incluyen estrategias de tipo aritmético centradas fundamentalmente en las propiedades aditiva o multiplicativa que satisface la relación de proporcionalidad. En las figuras 1 y 2 incluimos ejemplos de esta estrategia para distintos problemas.

Como 22:2=11 en 11 gramos de barrita habrá 4:2=2 gramos de materia grasa, en 11:2= 5,5 gramos de barrita, habrá 2:2=1 gramo de grasa y en 5,5:5=1,1 gramos de barrita habrá 1:2=0,5 gramos de grasa.

Así, en 100=88+11+1 gramos de barrita habrá 16+2+0,2=18,2 gramos de grasa.

Figura 1. Estrategia aritmética empleada por EPM36 en el problema 1.

Vamos a ver los alumnos que no leen de cada clase.
1º. 60 – 15 = 45 alumnos que no leen en 6º
2º. 40 -12 = 28 alumnos que no leen en 5º
Por lo tanto, se lee más en 5º de Educación Primaria.

Figura 2 Estrategia aritmética (aditiva) errónea empleada por EPM23 en el problema 2.

Nivel 1 de algebrización. En este nivel se consideran las siguientes estrategias: reducción a la unidad (ver figura 3), algoritmo de multiplicación en cruz (desarrollo meramente procedimental, sin expresar la proporción o ecuación obtenida de ella), tabular (basada en la construcción de una tabla donde se recogen y opera sobre los valores de las cantidades de magnitudes proporcionales), comparación de razones.

Reducimos a la unidad para obtener la cantidad de gramos de grasa que contiene un gramo de barrita de cereales. Como una barrita de cereales de 22 gramos contiene 4 gramos de grasa, obtenemos los gramos de grasa que contiene una unidad: 22: 4 = 0.181. Una vez sabemos que 1 gramo de barrita de cereales contiene 0,181 [gramos de grasa] *podemos obtener cuántos gramos de grasa contienen 100 gramos de barrita de cereales multiplicando 0,181×100=18,1 gramos de grasa en 100 gramos de barrita de cereales.*

Figura 3. Estrategia proto-algebraica usada por EPM14 en el problema 1

La estrategia que consiste en obtener y comparar los porcentajes de estudiantes que leen a diario en cada curso, específica del problema 2, corresponde también a este nivel de algebrización (figura 4).

Comenzamos escribiendo en forma de fracciones las cantidades de estudiantes que leen diariamente entre el número total de estudiantes en cada clase:

$$6^{o}\ curso \rightarrow \frac{cantidad\ de\ estudiantes\ que\ leen\ a\ diario}{cantidad\ total\ de\ estudiantes} = \frac{15}{60}$$

$$5^{o}curso \rightarrow \frac{cantidad\ de\ estudiantes\ que\ leen\ a\ diario}{cantidad\ total\ de\ estudiantes} = \frac{12}{40}$$

Expresamos estos resultados por medio de porcentajes:

$$6^{o}\ curso \rightarrow \frac{15}{60} = 0.25 \rightarrow\ 25\%$$

$$5^{o}\ curso \rightarrow \frac{12}{40} = 0.30 \rightarrow 30\%$$

Para conocer en qué curso los estudiantes leen más diariamente, comparamos los porcentajes. En 5º curso hay un 5% más de estudiantes que leen a diario que en 6º curso.

Figura 4. Estrategia proto-algebraica usada por EPM14 en el problema 2.

Por otro lado, en el problema 4, se pide determinar el número de árboles que han plantado María y Luis conocido el número de árboles que ha plantado Ana. La expresión en lenguaje natural de esta regla general, que lleva a reconocer la relación lineal entre las cantidades de árboles plantadas por Ana y por María y la relación afín entre las cantidades de árboles plantados por Ana y Luis, supone un nivel de algebrización 1 (figura 5).

Cuando Ana planta 4 árboles, María planta 12, que es exactamente el triple de árboles [que planta Ana], *4 × 3 = 12. Por otro lado, cuando Ana planta 4 árboles, Luis planta 8, lo que supone el doble de árboles: 4 × 2 = 8.*
Se establece una relación de proporcionalidad entre los árboles plantados por Ana, María y Luis. En concreto, para saber el número de árboles que planta María conociendo los que Ana ha plantado, multiplicamos los árboles de ésta por 3 y el número de árboles de Luis es igual al de Ana multiplicado por 2.

Figura 5. Solución de nivel 1 de algebrización propuesta por EPM23 al problema 4.

Nivel 2 de algebrización. La solución de un problema por medio de la regla de tres y/o planteamiento de la ecuación proporcional involucra una incógnita y la resolución de una ecuación en la que ésta aparece en un único término de la ecuación. En este sentido, la actividad desarrollada se considera como proto-algebraica de NA 2.

Consideramos la proporción de libros y niños de 6 º de primaria y sacaremos los libros que deberían leer los niños de 5º:

60 alumnos de 6---------15 leen
40 alumnos de 5-------- x leen

Ponemos en forma de fracción 60/40=15/x.

60x=15×40.
x= 15.40/60 = 10

Como en 5 º hay 12 niños que leen a diario, leen más a diario que en 6º.

Figura 6. Estrategia de resolución de nivel 2 propuesta por E31 al problema 2.

En la figura 6, EPM31 considera la relación entre las magnitudes estudiantes en el curso y estudiantes que leen diariamente en el curso. Si la proporción de estudiantes que leen diariamente fuese la misma en el grupo de 5º curso que en el grupo de 6º curso, la regla de tres utilizada permitiría determinar el número de estudiantes que leen diariamente en el grupo de 5º curso. Dado que el valor obtenido es menor que el número real de estudiantes que leen diariamente en el grupo de 5º curso, EPM31 concluye que la proporción de estudiantes que leen diariamente es mayor en 5º curso que en 6º curso.

Nivel 3 de algebrización. Cuando en el problema 4, el número de árboles que han plantado María y Luis conocido el número de árboles que ha plantado Ana, se determina través de la expresión algebraica, el NA que supone sería 3 (figura 7).

Si Ana planta 4 árboles y María planta 12 en el mismo tiempo, la razón de proporcionalidad entre el número de árboles plantados por cada una es $\frac{12}{4} = 3$. *Entonces, si Ana planta* x *árboles, María planta* $f(x) = 3x$ *árboles.* *Cuando Ana ha plantado 4 árboles, Luis ha plantado 8 árboles, por lo tanto Luis planta lo mismo que Ana más 4, esto es, Luis planta* $g(x) = x + 4$ *árboles.*

Figura 7. Solución de nivel 3 de algebrización propuesta por E87 al problema 4.

Grado de corrección de las respuestas de los estudiantes.

Consideramos adecuado valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas o incompletas, por lo que la puntuación otorgada a los ítems fue: 0 puntos si la respuesta es incorrecta o no hay respuesta; 1 punto si la respuesta es parcialmente correcta; 2 puntos si la respuesta es correcta. En el primer problema, se considera que una respuesta es parcialmente correcta si el futuro profesor aproxima por redondeo o truncamiento la cantidad de grasa presente en 100 gramos de la barra de cereales. También se considera parcialmente correcta la respuesta del problema 4 que no incluye la expresión de la regla general para determinar el número de árboles plantados por María y Luis.

Identificación de conocimientos y conflictos semióticos.

En términos del marco teórico del EOS, la identificación de conocimientos supone elaborar la configuración ontosemiótica que caracteriza cada resolución, para lo cual deben dividir cada solución en una secuencia de prácticas elementales y reconocer los tipos de objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) involucrados. Cuando los EPM proponen varias soluciones a los problemas, en el caso de diferente valoración, se puntúa la configuración ontosemiótica más completa para cada problema. Una configuración ontosemiótica se considera:

– *Adecuada*, valorada con 2 puntos, si incluye la secuencia de prácticas elementales y para cada práctica elemental se identifican correctamente los objetos implicados.

– *Poco adecuada*, valorada con 1 punto, si describe la secuencia de prácticas elementales pero no se mencionan todos los objetos implicados o algunos de ellos no son correctos; o si la secuencia de prácticas está incompleta pero los objetos mencionados son correctos.

– En caso contrario, se considera *no adecuada* (0 puntos).

El análisis detallado de las configuraciones ontosemióticas nos ha permitido detectar deficiencias y limitaciones en el reconocimiento de los tipos de objetos matemáticos implicados en la práctica matemática por parte de los futuros profesores. Resumimos los principales conflictos semióticos encontrados como resultado del análisis de las configuraciones de objetos de los futuros profesores, incluyendo algunos ejemplos que ilustran cada categoría. Estas categorías se establecen según la clasificación ontosemiótica de los objetos matemáticos propuesta por el marco del EOS en conceptos, procedimientos, proposiciones o argumentos:

— Conflictos conceptuales:

- No reconocer la relación de proporcionalidad directa o hacerlo de forma inadecuada.

- Confundir el concepto con el procedimiento o el argumento. Por ejemplo, es frecuente encontrar como conceptos "regla de tres", "producto cruzado", "cálculo de porcentajes", "despejar la incógnita" o "razonamiento lógico".

- Considerar como conceptos matemáticos elementos que no lo son, tales como nombres propios de personas (Ana, María) o cosas (árboles).

- Identificar incorrectamente algunos conceptos matemáticos: "razón de semejanza" en lugar de "constante de proporcionalidad" o "relación de semejanza" en lugar de "relación de proporcionalidad directa", o "magnitudes de cantidad".

— Conflictos proposicionales:

- Confundir proposición con intencionalidad. Por ejemplo, EPM68 incluye como proposición "convertir el total de alumnos en porcentajes". A veces aparece incluso en forma interrogativa, como "Proposición: ¿cuánta grasa hay en 100 gramos de producto?" (EPM25).

- Intercambiar proposición y procedimiento. En este caso, los alumnos se refieren a la "comparación" o a los "cálculos aritméticos" como proposiciones.

- Confundir la proposición con el argumento. Por ejemplo, EPM29 indica que "las proposiciones son las justificaciones que hemos dado al problema".

- Incluir proposiciones incompletas. No se entiende que una proposición es una afirmación sobre conceptos. Por ejemplo, el EPM20 incluye como proposición "el número de árboles plantados es directamente proporcional" sin referirse a qué, o "el precio que tiene que pagar cada alumno es directamente proporcional" también sin decir a qué. El estudiante EPM28 incluye como proposición en el problema 2, "Los amigos son proporcionales".

— Conflictos con los argumentos:

- No reconocer más argumentos que los de tipo deductivo o basados en propiedades aritméticas.

- Identificar argumentos erróneos. Por ejemplo, el E20 señala el argumento "continuar con la hipótesis inicial" en cada práctica elemental o el E32 indica como argumentos “usar el sentido común”.

- Confundir argumento con intención o procedimiento. Por ejemplo, el E8 señala como argumento "obtener la cantidad de grasa que hay en 100 gramos de producto". También es habitual encontrar como argumento "regla de tres" o "obtener fracciones con el mismo denominador".

- Basar el argumento en la relación de proporcionalidad directa cuando la relación es de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, el EPM4 indica como argumento en el problema 3: "Argumentos: basados en la propiedad de proporcionalidad directa entre el dinero y los amigos que pagan"

- Confundir argumento con proposición. Por ejemplo, correspondiendo a la práctica elemental "Por lo tanto en 100 gramos de producto hay 18.18 gramos de grasa", el E54 indica como proposición "obtención de resultados" y como argumento asociado "Argumento: tras la realización de todas las operaciones, obtenemos como resultado final, que por cada 100 g de producto tenemos 18.18 gramos de grasa".

Creación de problemas por variación

La creación de problemas, la resolución de los mismos por diversos métodos y el análisis de los conocimientos puestos en juego, son elementos esenciales de las facetas epistémica y cognitiva del modelo CCDM, ya que permiten a los profesores graduar la complejidad de las tareas propuestas a sus alumnos, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización del conocimiento. En la pregunta 4 (ver Apéndice) se pidió a los EPM que crearan nuevos problemas a partir de los iniciales, modificando la información o requerimiento y manteniendo el escenario matemático (situaciones de proporcionalidad), de modo que las variantes propuestas para cada problema, implicasen un cambio en el nivel de algebrización de la actividad matemática involucrada. Esto supone que los EPM deben tener en cuenta las soluciones que han propuesto previamente a los problemas planteados. Además, los EPM deben reflexionar sobre el carácter más o menos algebraico de los objetos y procesos matemáticos que pueden intervenir en la solución de una situación de proporcionalidad, y plantear condiciones en un problema que puedan favorecer su aparición.

Un enunciado significativo (con sentido) se considera como:

– Adecuado, si se obtiene modificando la información o el requerimiento en el problema inicial y se mantiene el contexto (Figura 10).

– Poco adecuado, si se obtiene modificando la información o el requerimiento pero no se mantiene el contexto (Figura 11).

– Inadecuado, si no es una variación del problema inicial (no comparte información, requisito o contexto respecto al problema inicial).

Resultados

Número de soluciones diferentes propuestas

Como señalan Buforn, Llinares y Fernández (2018) es importante promover en los futuros profesores la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas que involucran relaciones de proporcionalidad y desarrollar la comprensión de los componentes conceptuales, proposicionales y argumentativos del razonamiento proporcional. En la tabla 2 resumimos los resultados en relación al número de soluciones distintas propuestas a los problemas.

Salvo un estudiante (EPM14) que no resolvió el problema 4, los demás resolvieron todos los problemas por al menos una forma. Además, este estudiante resolvió los demás problemas por 2 métodos. En los demás casos, cuando decimos, por ejemplo, que 28 EPM resolvieron 2 problemas por 2 métodos, entendemos que 28 EPM resolvieron 2 problemas usando dos estrategias distintas para cada uno, y los otros dos lo resolvieron de una única manera. Además, 73 EPM (82,95%) resolvieron por dos métodos el primer problema, 52 EPM (59,09%) el segundo problema, 57 estudiantes (64,77%) el tercer problema, y 45 estudiantes (51,14%) el cuarto problema.

Tabla 2. Frecuencias (porcentajes) del número de soluciones distintas propuestas

Número de problemas con soluciones múltiples	Frecuencias
Todos los problemas por 2 métodos	24 (27,27%)
3 problemas por 2 métodos	25 (28,41%)
2 problemas por 2 métodos	28 (31,82%)
1 problema por 2 métodos	10 (11,36%)
Todos los problemas por un único método	1 (1,14%)
Total	88 (100%)

Grado de corrección de las respuestas de los estudiantes

Teniendo en cuenta esta valoración y que en cada uno de los problemas los estudiantes debían ofrecer más de una solución distinta, la puntuación máxima que podían obtener en cuanto a la resolución de los problemas es de 16 puntos. La puntuación más baja obtenida es de 2 puntos (1 EPM) y la más alta es de 14 (5 EPM), siendo lo más frecuente obtener 10 puntos (19 EPM, esto es, el 21,65%). Además, un 77,3% de los futuros maestros obtienen 8 o más puntos. La puntuación media se sitúa en 8,87, la mediana en 10 y la desviación típica es de 2,60. En la tabla 3 incluimos las frecuencias relativas y porcentajes del grado de corrección según cada problema.

Tabla 3. Frecuencias relativas y porcentajes en el grado de corrección (n=88)

	Problema			
Grado de corrección	1	2	3	4
No contesta	0 (0)	1 (1,14)	0 (0)	1 (1,14)
Toda solución incorrecta	1 (1,14)	5 (5,68)	2 (2.27)	52 (59,09)
Al menos una solución parcialmente correcta	74 (84,09)	0 (0)	0 (0)	3 (3,41)
Al menos una solución correcta	13 (14,77)	82 (93,18)	86 (97,73)	32 (36,36)
Total	88 (100)	88 (100)	88 (100)	88 (100)

Sólo 13 EPM resolvieron correctamente el problema 1, los demás lo hicieron de forma parcialmente correcta dado que aproximaron la solución a una o dos cifras decimales ignorando el decimal periódico.

Los errores detectados en el problema 2 son de dos tipos: por el uso de una estrategia de tipo aditiva, como en la figura 2 (lo cometieron 8 EPM), o por comparar las razones donde los antecedentes son el número de alumnos de las clases y los consecuentes son el número de alumnos que leen (lo cometieron 7 EPM), como puede verse en la figura 8.

Si de 60 alumnos leen 15, y de 40 alumnos leen 12, dividimos 60:15= 4 y también dividimos 40:12=3,3
Por lo que el resultado es que en 6º curso leen más.

Figura 8. Ejemplo de error cometido por E80 en el problema 2.

En el tercer problema, sólo 3 EPM ofrecieron alguna solución incorrecta (uno por considerar la relación de proporcionalidad directa y dos por cometer errores de tipo aritmético). En este problema, sólo 19 EPM (el 21,59% de los estudiantes) plantearon 2 soluciones siendo alguna distinta de la regla de tres inversa. Esto puede deberse a dos motivos: la falta de capacidad para elaborar estrategias de resolución distintas a ésta en un problema de proporcionalidad inversa, o el desconocimiento (u olvido del requisito en el enunciado) de que tal contenido no es propio de la etapa educativa de primaria (se pospone para secundaria). El problema que tuvo menos éxito en su resolución fue el último, 51 EPM (57,96%) consideraron la relación entre los árboles plantados por Ana y por Luis de proporcionalidad directa, y un estudiante consideró la relación entre los árboles plantados por María y Ana como aditiva.

Tipo de estrategia de solución y reconocimiento del nivel de algebrización

Desglosamos en la Tabla 4 las frecuencias obtenidas en los distintos tipos de solución de estrategias en función de su nivel de algebrización (NA) y el grado de acierto en la identificación correcta de dicho nivel. El reconocimiento por parte de los profesores de los diferentes NA en la resolución de tareas matemáticas, en particular, en aquellas situaciones que ponen en juego la noción de proporcionalidad, se considera un aspecto clave del modelo CCDM sobre este contenido. El reconocimiento de los objetos y procesos característicos del razonamiento algebraico elemental permite identificar etapas progresivas en el razonamiento proporcional, comprender su complejidad semiótica y explicar las dificultades de aprendizaje.

Tabla 4. Frecuencias en los tipos de solución y grado de corrección del NA para cada estrategia

Problema	Tipo de soluciones	Frecuencia	NA	Identificación correcta de NA
1	Aritmética	25	0	12
	Reducción a la unidad	45	1	19
	Multiplicación en cruz	48	1	16
	Ecuación proporcional	42	2	25
	Total	160		72 (45%)
2	Aritmética	13	0	11
	Diagramática	5	0	3
	Comparación de razones	51	1	18
	Comparación de porcentajes	51	1	15
	Reducción a la unidad	6	1	2
	Ecuación proporcional	13	2	11
	Total	139		69 (43,16%)
3	Aritmética	86	0	60
	Ecuación proporcional	53	2	34
	Total	139		94 (69,11%)
4	Aritmética	16	0	9
	Aritmética+regla general	43	1	18
	Tabular	4	1	3
	Reducción a la unidad	9	1	2
	Multiplicación en cruz	7	1	2
	Ecuación proporcional	37	2	28
	Algebraica-funcional	5	3	1
	Total	121		55 (45,45%)

De manera global, se analizaron un total de 559 soluciones. De éstas, en 290 (51,87%) el nivel de algebrización fue el correcto. Como se puede observar en la Tabla 4, el tipo de estrategia más empleada por los EPM corresponde al nivel 1 de algebrización (un 47,23% de las soluciones). De las 264 soluciones correspondientes a este nivel, 95 (es decir, un 35,98%) fueron identificadas correctamente. Las estrategias aritméticas (nivel 0 de algebrización) suponen un total de 145 soluciones (25,94%), de las que fueron identificadas apropiadamente 95 (es decir, en el 65,52% de las ocasiones). Los estudiantes emplearon en menor medida las estrategias de nivel 2 de algebrización, sin embargo, de las 145 soluciones (25,94%) correspondientes a este nivel, 98 (esto es, el 67,59%) acertaron en el nivel de algebrización. Las estrategias de tipo algebraico (nivel 3 de algebrización) sólo se contemplan de forma minoritaria en el último problema.

El problema 1 fue resuelto utilizando dos estrategias diferentes por 73 (82,95%) EPM. Las estrategias combinadas más frecuentes fueron la reducción a la unidad junto con la multiplicación cruzada (23 de 73), y la reducción a la unidad conjuntamente con la ecuación proporcional (22 de 73). Por su parte, el segundo problema 2 fue resuelto por 53 (60,23%) EPM; las combinaciones de estrategias más frecuentes fueron en este caso la comparación de cocientes y la comparación de porcentajes (24 de los 53), y la comparación de porcentajes combinada con estrategias de tipo aditivo (11 de los 53). Asimismo, 51 EPM (57,95%) utilizaron dos estrategias diferentes en el problema 3: 36 de ellos utilizaron estrategias aritméticas combinadas con la regla de tres inversa. Por último, el problema 4 fue resuelto mediante dos estrategias diferentes por 44 estudiantes (50%). De ellos, 23 utilizaron estrategias aritméticas junto con la ecuación proporcional, formulando la regla general en lenguaje natural. Las estrategias de tipo algebraico-funcional sólo aparecieron en este problema (5 casos), combinadas con otras de tipo aritmético o de reducción a la unidad.

Aquellos EPM que no reconocieron correctamente el NA 0, le asignaron NA 1, haciendo referencia a la presencia de “una relación de proporcionalidad” o a un “significado relacional del signo igual”. Por otro lado, los futuros maestros que no identificaron apropiadamente el nivel 1 se debió a que asignaron nivel 0 en las estrategias de reducción a la unidad (ignorando el mayor grado de generalidad que supone la declaración del valor unitario) o bien valoraron como proto-algebraica de nivel 2 las técnicas de multiplicación en cruz, a pesar de no establecer ninguna ecuación proporcional y de que los símbolos literales que intervienen refieran a objetos intensivos reconocidos y no se opere con ellos. Finalmente, aquellos estudiantes que no identificaron correctamente el nivel 2 de algebrización, asignaron a las soluciones que llevaban a plantear una ecuación proporcional (regla de tres directa o indirecta) nivel 1 de algebrización. Estos estudiantes sólo consideran dos grados aritmético (0) o algebraico (1), en función de la ausencia o presencia de incógnitas, independientemente del tratamiento que se haga con ellas.

Identificación de conocimientos y conflictos

Siguiendo los criterios de valoración de las configuraciones ontosemióticas elaboradas por los futuros profesores, la puntuación máxima que se podría obtener en cuanto a la elaboración de configuraciones es de 8 puntos (también se valora con 0 puntos cuando las configuraciones no se realizaron). La tabla 5 muestra las frecuencias de respuestas en cada una de estas categorías. Como observamos, más de la mitad de los EPM realizaron una configuración medianamente relevante en cada uno de los problemas planteados. Sin embargo, analizando globalmente las respuestas, existe una gran dispersión en los resultados: los valores más frecuentes en la puntuación (sobre 8) son 0 en el 32,95% de los casos, y 4 en el 31,82% de ellos. La mediana es 4 y el valor máximo obtenido, de 7 puntos, sólo lo obtuvieron 2 de los 88 futuros profesores.

Tabla 5. Frecuencias absolutas (y porcentajes) de grados de pertinencia en las configuraciones ontosemióticas

Pertinencia en la configuración	Problema 1	2	3	4
No contesta	3 (3,41)	3 (3,41)	3 (3,41)	3 (3,41)
0	30 (34,09)	39 (44,32)	32 (36,36)	37 (42,05)
1	46 (52,27)	44 (50)	49 (55,68)	46 (52,27)
2	9 (10,23)	2 (2,27)	4 (4,55)	2 (2,27)
Total	88 (100)	88 (100)	88 (100)	88 (100)

De los 88 EPM, 48 (un 54,54%) mostraron algún tipo de conflicto de tipo conceptual, 54 (61,36%) manifestaron algún conflicto de tipo proposicional y 64 (72,72%) de tipo argumentativo. En la tabla 6 desglosamos las frecuencias asociadas a los distintos tipos de conflictos descritos anteriormente.

Tabla 6. Conflictos detectados en las configuraciones ontosemióticas y frecuencias (n=88)

Conflictos		Frecuencias (%)
Conceptuales	Relación de proporcionalidad directa	12 (13,64)
	Confunde concepto con procedimiento o argumento	36 (40,91)
	Considera elementos que no son conceptos matemáticos	8 (9,09)
	Identifica incorrectamente algunos conceptos matemáticos	5 (5,68)
Proposicionales	Confunde proposición con intencionalidad	32 (36,36)
	Mezcla proposición y procedimiento	21 (23,86)
	Confunde proposición con argumento	10 (11,36)
	Incluye proposiciones incompletas	7 (7,95)
Argumentales	Solo reconoce como argumentos los aritméticos	15 (17,05)
	Identifica argumentos que son erróneos	20 (22,73)
	Confunde argumento con intensión o procedimiento	40 (45,46)
	Argumentos basados en proporcionalidad directa cuando se trata de una inversa	3 (3,41)
	Confunde argumento con proposición	10 (11,36)

Como vemos, dentro de los conflictos de tipo conceptual, el más frecuente es confundir concepto con procedimiento (frecuentemente, “regla de tres”) o argumento (“deducción”). Más de la tercera parte de los EPM, interpretan una proposición como la intención que se persigue con la práctica. Entre los conflictos de tipo argumental, destaca fundamentalmente considerar argumento como intención o procedimiento.

Enunciado de variantes del problema

En general, los futuros maestros tuvieron dificultades para elaborar variantes del problema inicial. En su intento de conseguir un determinado nivel de algebrización, sacrifican la significatividad del enunciado, de manera que en gran medida, la tarea que proponían estaba mal planteada: la solución estaba implícita en el enunciado, carecía de sentido o bien la información que facilitaba el enunciado no permitía responder a la pregunta. Tal es el caso del enunciado propuesto por EPM72 que incluimos como ejemplo en la figura 9.

> *En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. Si en clase de 5º hay 40 alumnos, ¿cuántos leerán? ¿En qué curso se lee más?*

Figura 9. Ejemplo de variante mal planteada propuesta por EPM72 al problema 2.

En la Tabla 7 resumimos la información relativa a la pertinencia de los enunciados de las variantes propuestas por los estudiantes.

Para cada variante, el nivel de algebrización asociado debía ser distinto a los empleados en la primera consigna del trabajo. Como vimos en la sección 4 (tabla 4) el tipo de estrategias más empleadas por los futuros maestros al resolver los problemas fueron las correspondientes al nivel 1 de algebrización, en los problemas 1, 2 y 4, y las de nivel 0 en el problema 3. En menor medida emplearon estrategias propias de un nivel 2. Por este motivo, los estudiantes recurrieron con mayor frecuencia a variantes que implicasen un nivel 0 (figura 11) en los problemas 1, 2 y 4, y a variantes de nivel 2 o nivel 3 (figura 10) en el problema 3.

Tabla 7. Frecuencias (porcentajes) según grados de pertinencia de los enunciados de las variantes del problema (n=88)

Enunciado propuesto	Problema			
	1	2	3	4
No contesta	17 (19,32)	29 (32,95)	30 (39,09)	34 (38,64)
Mal planteado	7 (7,95)	18 (20,45)	6 (6,82)	11 (12,5)
Nada pertinente	30 (39,09)	8 (9,09)	21 (23,86)	15 (17,04)
Poco pertinente	18 (20,45)	18 (20,45)	13 (14,77)	16 (18,18)
Pertinente	16 (18,18)	15 (17,05)	18 (20,45)	12 (13,64)

Si nos fijamos en los niveles de algebrización asignados por los estudiantes únicamente a las variantes de los problemas correctamente planteados, observamos que les ha resultado difícil elaborar enunciados que motivasen un cambio del nivel de algebrización (Figuras 10 y 11).

Variante: "Un grupo de 5 amigas han comprado un regalo de cumpleaños para otra amiga. Posteriormente se unen 4 amigas más, por lo que finalmente acaban pagando 1,4 euros menos por persona. ¿Cuánto vale el regalo?"

Solución: Se plantea una igualdad en que aparece el símbolo literal a ambos lados de los términos, por lo que se puede asignar un nivel 3. La expresión para la resolución sería $5(x+1,4) = (5+4)x$ que requiere de agrupamiento y despeje de la incógnita.

Figura 10. Variante pertinente (NA 3) propuesta por EPM51 al problema 3.

Variante: "En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿Cuántos alumnos no leen un libro a diario en cada curso?"

Solución (nivel 0 de algebrización). Para resolver esta actividad, lo que hacemos es realizar dos restas. En la primera, para averiguar el número de alumnos que no leen un libro a diario en 6º curso de primaria, realizamos la siguiente operación: 60-15=45 alumnos que no leen un libro a diario. En el caso de 5º curso de primaria, de nuevo realizamos otra operación: 40-12=28 alumnos no leen un libro a diario.

Figura 11. Enunciado poco pertinente (NA 0) propuesto por EPM57 (modifica requerimiento pero no mantiene entorno) al problema 2.

Tabla 8. Frecuencias absolutas (porcentajes) según grado de corrección en el nivel de algebrización (NA) asignado a enunciados pertinentes.

NA en variante propuesto	Problema			
	1	2	3	4
No contesta	17 (26,56)	17 (33,33)	22 (42,31)	20 (46,51)
Incorrecto	7 (10,94)	7 (13,73)	6 (11,54)	8 (18,60)
Correcto. No cambia NA	27 (42,19)	19 (37,25)	13 (25)	5 (11,63)
Correcto. Cambia NA	13 (20,31)	8 (15,69)	11 (21,15)	10 (23,26)
Total	64 (100)	51(100)	52 (100)	43 (100)

Como observamos en la tabla 8, sólo entre un 15,69 % (problema 2) y un 23,26 % (problema 4) de los NA asignados a las variantes son correctos y efectivamente suponen un cambio con aquellos empleados por los estudiantes al resolver el problema inicial. Entendemos que la dificultad es mayor cuando los estudiantes emplearon dos estrategias con niveles de algebrización distintos en la primera consigna.

Síntesis e implicaciones

La mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento de la proporcionalidad por parte de los profesores sugieren que éstos deben reconocer que el desarrollo del razonamiento proporcional es mucho más que la capacidad de resolver correctamente problemas de proporcionalidad de valores faltantes. Pensamos que la identificación de las diferentes estrategias de solución de un problema de proporcionalidad, el reconocimiento de los objetos matemáticos puestos en juego en cada caso, y el análisis del carácter algebraico de las prácticas matemáticas implicadas en sus resoluciones, permiten al profesor comprender su complejidad semiótica y explicar las dificultades de aprendizaje. Así, nuestra investigación articula un problema de formación inicial del profesorado que implica el razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico elemental (álgebra temprana).

En este artículo hemos informado sobre el diseño, la implementación y los resultados de una intervención con futuros profesores de educación primaria centrada en el desarrollo de la competencia de análisis de los conocimientos puestos en juego en la resolución de tareas que implican razonamiento proporcional. Esta competencia se interpreta como la capacidad de: resolver los problemas por diferentes métodos, dividir la resolución de problemas en prácticas elementales, identificar los conceptos, proposiciones, procedimientos y la argumentación de estos objetos, reconocer diferentes niveles de algebrización de las prácticas matemáticas y elaborar nuevos problemas por variación de un enunciado dado.

Coincidimos con Guberman y Leikin (2013) en que al tratar con tareas que admiten diferentes métodos de solución basados en la intervención de diferentes objetos matemáticos, los maestros desarrollaron sus conocimientos y habilidades en la materia. Sin embargo, como síntesis de los resultados obtenidos en relación a la solución de los cuatro problemas propuestos por al menos dos métodos, y el reconocimiento de los niveles de algebrización en estas soluciones, observamos que un alto porcentaje de los futuros maestros que participaron ha tenido dificultades para responder a esta tarea. En línea con la investigación de Berk et al. (2009), quienes demostraron que los futuros maestros no son flexibles para resolver el mismo problema usando diferentes estrategias, un alto porcentaje de los futuros maestros tuvo dificultades para resolver por al menos dos métodos los cuatro problemas propuestos.

El grado de corrección de las soluciones dadas varía entre los problemas, siendo el problema cuatro bastante conflictivo ya que más de la mitad de las soluciones dadas eran incorrectas. Estos resultados coinciden con los de investigaciones anteriores que muestran las dificultades de los futuros profesores para distinguir las situaciones proporcionales de las no proporcionales, lo que lleva a un uso excesivo de la linealidad (Buforn, et al., 2018; Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaff, 2008).

Identificar los conocimientos y el nivel de algebrización involucrados en las prácticas matemáticas necesarias para resolver las situaciones-problema requeridas, permite al profesor anticipar potenciales y efectivos conflictos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los alumnos e identificar los objetos (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) y procesos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos adecuados de los procesos instruccionales (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, & Pino-Fan, 2019). Esta ha sido una habilidad difícil de desarrollar en nuestra intervención.

Hemos identificado categorías de conflictos que se refieren al reconocimiento de conceptos, proposiciones y argumentos relacionados con el razonamiento proporcional y su impacto en la muestra de futuros profesores. En línea con los resultados de Burgos, et al. (2018), los futuros profesores de primaria suelen considerar la regla de tres como un concepto o confundir proposición con intencionalidad en lugar de una afirmación sobre conceptos que necesita justificación o prueba. El objeto matemático argumento es el menos identificado, y cuando lo es, no suele aludir a la justificación de una proposición o procedimiento, sino a la intención o a la descripción de la práctica. La enseñanza de un contenido matemático, como la proporcionalidad, puede verse comprometida si los profesores no reconocen la naturaleza y el papel de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas asociadas al campo de problemas que las caracteriza: la situación-problema es el origen de la actividad; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que conectan los conceptos dados por las definiciones; los lenguajes son la parte ostensiva de conceptos, proposiciones y procedimientos que a su vez intervienen en la elaboración de los argumentos..

Además de resolver problemas de matemáticas, un profesor debe ser competente para elegir, modificar y plantear problemas con fines educativos específicos (Tichá & Hošpesová, 2013). Los futuros profesores, que han participado en nuestra investigación, han mostrado dificultades para elaborar variantes significativas a los enunciados propuestos. La creación de nuevos problemas a partir de las situaciones dadas, de manera que su estrategia de solución implique un cambio en el nivel de algebrización asociado (es decir, el grado de generalidad de los objetos, el tratamiento que se aplica a estos objetos, así como los tipos de lenguajes utilizados) ha sido una fuerte limitación. Los futuros profesores encuentran entre los elementos que definen un problema (información, requisito, contexto y entorno matemático) restricciones que condicionan sus posibles estrategias de resolución. Un porcentaje relativamente alto de los participantes no ha respondido a esta demanda. En general, los enunciados propuestos se alejan demasiado del problema original, no son significativos o el contexto no es proporcional. Si nos fijamos sólo en las variantes correctamente planteadas de los problemas, observamos que a los futuros profesores les ha resultado más difícil elaborar enunciados que motivar un cambio del nivel de algebrización. Así, por ejemplo, el estudiante EPM86 afirmó "con este enunciado no he podido resolverlo más que con la regla de tres inversa", en relación con el problema 3.

Las limitaciones encontradas por los EPM que han participado en nuestra investigación sugieren la necesidad de desarrollar nuevas acciones formativas específicas dedicadas a:

1. Reconocer el carácter algebraico de las prácticas matemáticas en nuevas tareas en otros contextos como el geométrico o el probabilístico, en los que la proporcionalidad adquiere significados propios de dichos ámbitos. Esto ofrecerá a los EPM nuevos ámbitos para analizar prácticas, objetos y procesos, y reflexionar sobre los grados de generalidad, formalización y transformaciones implicados.

2. Crear problemas por variación de los elementos dados. Como hemos visto, fue difícil elaborar nuevos enunciados significativos.

3. Reflexionar sobre el tipo de situaciones-problema que obligan a una actividad matemática propia de un determinado nivel de algebrización y crear problemas para ello.

Reconocimientos: Investigación realizada como parte del proyecto de investigación, PID2019-105601GB-I00 / AEI /10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España)

Referencias

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 1-8. Kiel, Germany: PME.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281-308.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. & Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. & Petzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11 (3), 113-135.

Buforn, A. & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional, *BOLEMA*, 28 (48), 21-41.

Buforn, A., Llinares, S. & Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23,* 229-251.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. & Godino, J. D. (2018). *Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analyzing proportionality tasks. Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Burgos, M. & Godino, J. D. (2018) Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers, *Proceedings of EDULEARN18 Conference* (p. 2483-2491). Palma de Mallorca, Spain.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. In J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87-101.

English, L. D. (2008) Setting an agenda for international research in mathematics education. In *Handbook of international research in mathematics education,* 2nd Edition (p. 3-19). New York & London: Taylor and Francis (Routledge).

Gaita, R., & Wilhelmi, M.R. (2019) Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. Bolema, *33*(63), 269-289.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2): 127-135

Godino, J D., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31* (57), 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A. (2015). Algebraic reasoning levels in primary and secondary education. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 426-432). Prague, Czech Republic.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 33-56.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Hilton, A. & Hilton, G. (2018). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education.* Published online: 28 March 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. & Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667)**.** Charlotte, NC: NCTM.

Lee, H. S., Coomes, J., & Yim, J. (2017). Teachers' conceptions of prior knowledge and the potential of a task in teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1-23.

Lundberg, A. L., & Kilhamn, C. (2016). Transposition of knowledge: Encountering proportionality in an algebra task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1–21. doi:10.1007/s10763-016-9781-3.

Mallart, A., Font, V. & Diez, J. (2018). Case study on mathematics pre-service teachers' difficulties in problem posing, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1465–1481.

Milinkovié, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In J. Cai, N. Ellerton, & F.M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 47-70). New York: Springer.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor [An expanded view of teachers' didactic–mathematical knowledge]. *PARADIGMA, 36*(1), 87–109.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275–296). New York, NY: Routledge.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. In P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University

Rivas, M., Godino J. D. & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26* (42B), 559-588.

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. In S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn & J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (pp. 13-27). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishing.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 153-172.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.
Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 127-155.
Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48*(1-2), 1-27.
Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.
Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). "The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity", *Journal for Research in Mathematics Education*, 39 (3), 311-342.

APÉNDICE. Tarea de evaluación final

1. Resuelve los problemas que aparecen al final, propias de primaria, de al menos dos formas distintas, teniendo en cuenta aquellas estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

2. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completa la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

3. Asigna *de forma justificada* niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones que has dado en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

4. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

Relación de problemas

Problema 1. Si una barrita de cereales de 22 gramos contiene 4 gramos de materia grasa, ¿cuánta materia grasa hay en 100 gramos de producto?

Problema 2. En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?

Problema 3. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5, 40 euros. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo. ¿Cuántos euros deben poner ahora cada uno? Explica cómo lo has obtenido.

Problema 4. Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento "Repoblamos". Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes.

Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8.

Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles.

a) ¿Cuántos habrá plantado María? Explica cómo lo has averiguado.

b) ¿Cuántos habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.

c) Pasado un tiempo, si sabes el número de árboles que ha plantado Ana, ¿cómo podrías saber el número de árboles que ha plantado María? ¿Y el número de árboles que ha plantado Luis? Explica tu respuesta.