DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MATEMATIKA SAILA

Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones

Aitzol Lasa Oyarbide

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones

Memoria presentada por
Aitzol Lasa Oyarbide

Para aspirar al Grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Dirigida por el Doctor
Dr. Miguel R. Wilhelmi
Profesor de Didáctica de las Matemáticas

Departamento de Matemáticas
Matematika Saila

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Esker onak

DBH 2ko ikasleekin jokatzen den Nafarroako matematika olinpiadara 2007an hurbildu nintzen, lehenengo aldiz, irakasle gisa. Garraldako ikasle bat bidali nuen Tuterako Valle del Ebro ikastetxean jokatu zen ediziora. Izugarria iruditu zitzaidan 180 ikasle inguru matematikaren festa batean biltzea, euren borondatez, eta larunbata goiz batean. 13 urteko ikasle batek egiteko beste ezer ez balu bezala.

Artean, ez nituen ezagutzen olinpiadako ohiturak. Azken unera arte ez nintzen ohartu antolatzaileek lepotik helduko nindutela, tribunalera sar nendin frogak zuzentzera. Ez nekien tribunalean ahots goxoz mintzatu zitzaidan unibertsitateko irakasle hura Miguel R. Wilhelmi zenik. Bada, nork esango zidan niri topaketa horren ondoren unibertsitatean amaituko nuela irakasle eta Miguel izango zela nire tesi zuzendaria.

Miguelek pazientzia handia izan du nirekin eta lan honekin. Horregatik, nire eskerrik handienak harentzat dira. Baina bidean izan ditut beste lagun eta adiskide batzuk, eta guztiek ekarri naute puntu honetara. Tesi hau eskaini nahi diet:

- Elhuyar Fundazioko lagunei, haiek irakatsi zidatelako zientzia gai hartuta behar bezala idazten.
- Garraldako Ikastetxeko lankideei, han zaildu nintzelako irakasle. Maisuen eskutik jakin nuen zer zen matematika irakastea.
- Matematika Olinpiadako antolatzaileei, haiek proposatu baitzidaten unibertsitatera sartzea.
- NUPeko Matematika Sailari, 10etako kafeagatik.
- NUPeko eta UEUko ikasleei, haien lepotik garatu ditudalako lan honetan agertzen diren funtsezko ideiak.
- Nazioarteko GeoGebra komunitateari, Cantabria, Bartzelona eta Linzen etxean bezala sentiarazteagatik.

Eduardo izan baitzen Brousseauren seme, Miguel berriz iloba, horrek bihurtzen nau ni haren alabaso.

Zergatik ikasi
ahanztekotz gero
ikasiak oro?

MIRANDE, J. (1950-1966). *Poemak*.

Observaciones

Esta memoria para aspirar al Grado de Doctor en Ciencias se estructura en dos partes. La Parte I describe el estado actual del Marco Teórico empleado, y lo amplía en aspectos relativos al uso del medio material "software de geometría dinámico", ejemplificado en el uso de GeoGebra. La Parte II presenta el diseño y la implementación de una Ingeniería Didáctica de un proceso de estudio de sistemas de ecuaciones (del tipo parábola-recta), sobre este soporte material.

En el desarrollo del trabajo se han utilizado construcciones dinámicas diseñadas con GeoGebra. Estas construcciones se utilizan para ejemplificar los desarrollos teóricos en la Parte I, y para el diseño y la puesta en marcha de la experimentación en la Parte II. En el cuerpo del texto se han incluído, como apoyo a la lectura, capturas de imágenes de estos modelos dinámicos, además de indicaciones sobre su utilización, en los casos pertinentes.

Todas las construcciones dinámicas se han recopilado y se pueden consultar en un Libro GeoGebra. El libro de construcciones completo se puede consultar en el siguiente enlace:

- `http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#`

Las construcciones se organizan en el libro siguiendo el criterio de aparición cronológica. A lo largo del texto, se incluyen en cada capítulo los enlaces particulares a pie de página.

Índice general

Parte I

Marco teórico

Presentación

En la Educación Secundaria, el docente utiliza el software de geometría dinámica en su práctica profesional de forma palpable, aunque minoritaria. La utilización del software GeoGebra es innovadora, pero dista de estar normalizada.

A la hora de identificar los condicionantes de la actividad docente y optimizar los procesos de instrucción, es necesario, en primer lugar, definir las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que participan en la resolución de problemas. Además, los instrumentos utilizados en la actividad matemática determinan el modo en el que se desarrolla la tarea y la forma en la que el estudiante da un significado personal a tales objetos y procesos.

La elección de los instrumentos y la instrucción en su manejo no son un objetivo en sí mismo. Su utilización de debe integrar como un soporte más en las distintas configuraciones geométricas, funcionales y algebraicas, para evitar un posible efecto de *deslizamiento metacognitivo*, en el sentido de la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas.

Así pues, para articular un discurso que ayude a aclarar estos objetivos, hay que seleccionar un marco teórico que permita, por un lado, el análisis de los comportamientos de los estudiantes ante tareas algebraicas asistidas por instrumentos informáticos, y por otro, el diseño de una ingeniería didáctica. Es necesario, además, teorizar la noción clave de *instrumento*.

El Enfoque onsosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos, y la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas, parten de la problematización del saber matemático para diseñar y analizar situaciones de aprendizaje, y ofrecen herramientas para el análisis didáctico. El análisis didáctico de estas situaciones-problema viene dada en términos de configuraciones epistémicas de objetos y procesos, fenómenos didácticos y obstáculos.

GeoGebra cumple la función de instrumento tanto en el desarrollo de demostraciones matemáticas como en la resolución de problemas matemáticos, por lo que es necesario también recurrir a las teorías de la instrumentación en la fundamentación teórica de la noción clave de instrumento.

El instrumento y el medio en el que éste se utiliza condicionan el desarrollo de la tarea a resolver. En particular, GeoGebra permite integrar contenidos algebraicos, de interpretación funcional y representación gráfica en la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Así, el estudiante tiene en sus manos una forma de control sobre sus producciones escritas, al poder contrastar los resultados obtenidos en distintos soportes y sobre distintos enfoques de la matemática involucrada.

Aurkezpena

Bigarren Hezkuntzako irakaslearen jarduera profesionalean, geometria dinamikoko softwareen erabilera bistako errealitatea da, baina gutxitua. Gaur egun, GeoGebra softwarearen erabilera berritzaile da, baina ez dago normalizaturik.

Irakaslearen irakaste-jarduera baldintzatzen duten faktoreak identifikatzerakoan eta instrukzio prozesuak optimizatze aldera, beharrezkoa da, lehenengo eta behin, problemen ebazpenean parte hartzen duten objektuen eta prozesuen konfigurazioak zehaztea. Gainera, jarduera matematikoan erabilitako tresnek baldintzatu egiten dituzte zeregina gauzatzeko modua eta ikasleak objektu eta prozesu horiei ematen dien esanahi pertsonala.

Tresna horien aukeraketa eta horiek erabiltzeko instrukzioa ez dira helburu bat bere baitan. Aldiz, euskarri bat gehiago dira, eta horien erabilera integratu egin behar da konfigurazio geometriko, funtzional eta aljebraikoetan, balizko *irristatze metakognitiboa* saihesteko (Matematikako egoera didaktikoen teoriak zehazten duen modura).

Honela, helburu horiek argitzen lagunduko duen arrazoibidea eraikitzeko, ondokoak baimenduko dituen marko teorikoa aukeratu beharko da, alde batetik, zeregin aljebraikoen aurrean tresna informatikoen laguntzarekin ikasleek dituzten portaerak aztertzea, eta, bestetik, ingeniaritza didaktiko baten diseinua. Horrez gain, *tresna* nozioa giltzarria da eta hura teorizatu beharko da.

Matematika-jakintzaren eta hezkuntzaren ikuspegi ontosemiotikoa eta Matematikako egoera didaktikoen teoria, bi ikuspegi horiek jakintza matematikoaren problema-izaera hartzen dute abiapuntu ikaskuntza egoerak diseinatu eta aztertzeko, eta, horrez gainera, analisi didaktikorako baliabideak eskaintzen dituzte. Egoera-problema horien analisi didaktikoa ondoko elementu hauen arabera egin daiteke, objektu eta prozesu matematikoen konfigurazio epistemikoak, fenomeno didaktikoak eta oztopoak.

GeoGebrak tresna baten funtzioa betetzen du frogapen matematikoen garapenean eta problema matematikoen ebazpenean, eta, honenbestez, beharrezkoa da ere lanabesen teorietara jotzea tresna nozioaren fundamentazio teorikoa egiteko. Bai tresnak, baita hura erabiliko den inguru didaktikoak ere, baldintzatu egiten dute ebatzi beharreko zereginaren garapena. Bereziki, ekuazioen eta inekuazioen ebazpenean, GeoGebrak integratu egiten ditu eduki aljebraikoak, interpretazio funtzionala eta adierazpen grafikoa. Honela, ikasleak esku artean ditu haren idatzizko produkzioak kontrolatzeko baliabideak, hainbat euskarritan lortutiko emaitzen kontrastea egin dezakeelako, matematikaren ikuspuntu anitzen arabera.

Presentation

The use of dynamic geometry software it's a reality in Secondary Schools, even though few teachers use them on their professional tasks. Nowadays, GeoGebra is considered an innovation, but its use is un-normalized.

In order to identify aspects conditioning teaching processes and optimize instruction, configurations of mathematical objects and processes must be defined, involving problem solving. Furthermore, mathematical activity gains it's meaning when used in a contextualized problem, and the instrument used for the solution determines the way the resolution of the task is given and the personal meaning students give to these objects and processes.

The objective is not the election of the instrument and its instruction. In turn, instruction in the management of computational tools has not been integrated to the algebraic, functional and geometric configurations, possibly generating a *metacognitive shift* effect, in terms of Theory of Didactical Situations in Mathematics.

Therefore, a theoretical framework is necessary in order to articulate, in one hand, an analysis on student behaviours when solving algebraic tasks assisted by computer instruments, and, in the other hand, design a didactical engineering. In addition, the notion of *instrument* is fundamental and requires a theoretic approach.

The Ontosemiotic Aproach for Mathematical Knowledge and Instruction and The Theory of Didactical Situations in Mathematics are branches of the epistemological program. The epistemological program designs and analyses learning situations based on the formulation of questions, i.e., considering mathematic knowledge problematic, and provide tools for didactical analysis. The didactic analysis of these problem-situations is given in terms of epistemological configurations of objects and processes, educational phenomena and obstacles.

GeoGebra is an instrument to develop mathematical proofs and problem solving, thus, instrumentation theories are required for the theoretical fundamentation of tools.

The chosen instrument and the environment where it's used determine the evolution of the task. In particular, GeoGebra integrates algebraic, function interpretation and graphic representation notions for solving equations and inequations. Therefore, students have in their hands a way to control their written productions, since provides a way to contrast results in different supports and many mathematical views.

Capítulo 1

Motivación

Breve resumen
Los objetos matemáticos toman significado al ser utilizados y contextualizados. Los instrumentos utilizados determinan el modo en el que se desarrolla la resolución de la actividad matemática. En la Educación Secundaria se privilegia un desarrollo aislado de los contenidos algebraicos, sin el análisis debido a su integración con otras configuraciones geométricas o funcionales. A su vez, la instrucción en el manejo de instrumentos informáticos no se integra con la configuración algebraica, generando muchas veces un efecto de deslizamiento metacognitivo*. Se deben pues definir las configuraciones que participan en los procesos de resolución de ecuaciones, para identificar los condicionantes de la actividad docente y optimizar los procesos de instrucción.*

Laburbilduma
Jarduera matematikoak esanahia hartzen du problemen ebazpenerako testuinguru batean lantzerakoan, eta, gainera, erabilitako tresnak baldintzatuko du zeregina gauzatzeko modua. Aitzitik, Bigarren Hezkuntza tradizionalean eduki aljebraikoak gainerako konfigurazio geometriko eta funtzionalengandik isolaturik irakasten dira. Era berean, tresna informatikoen erabilera ez da konfigurazio aljebraikoarekin integratzen, eta horrek irristatze metakognitiboa *sor lezake. Definitu behar dira, beraz, ekuazioen ebazpenerako prozeduretan parte hartzen duten konfigurazioak, irakaskuntza-jarduera baldintzatzen duten faktoreak identifikatzeko eta instrukzio prozedurak optimizatzeko.*

Short summary
The meaning of mathematical objects depend on the mathematical context where those objects are used. The instrument determines the solution and the process of the task. In contrast, traditional Secondary Education develops algebraic contents isolated from other geometric and functional configurations. In turn, the algebraic configuration does not integrate the instruction and the management of computational tools. This fact possibly generates a metacognitive shift *effect. Therefore, configurations involving equation solving processes must be defines, in order to identify the aspects that condition teaching processes, in order to optimize instruction.*

Las matemáticas son parte de la actividad humana, y como tal toman pleno significado al ser utilizadas en un contexto de modelización o resolución de problemas. Además, a la hora de resolver estos problemas, los conocimientos matemáticos involucrados son multidimensionales y la actividad humana que conllevan es compleja.

> "Existen importantes argumentos por los que la educación científica, al menos en las primeras etapas, no debería estar diferenciada por disciplinas; de la misma forma, si la construcción de las matemáticas ha de estar relacionada con la realidad, el enfoque debe ser igualmente amplio." (Freudenthal, 1973, 135)

La actividad matemática en el aula debe pues tener como telón de fondo esta realidad humana. Por ello, las situaciones de enseñanza y aprendizaje que se diseñan en el contexto escolar deben tomar en cuenta, entre otros aspectos, el pasado escolar de cada alumno y la constante evolución del ambiente en el que se desarrolla la tarea matemática, la cual queda registrada en la *memoria didáctica de la clase*.

> "Se entiende por memoria del sistema a una cierta organización del medio que más adelante permitirá crear un sistema de toma de decisiones." (Centeno, 1995, 154)

En este contexto, el profesor debe realizar la elección de los instrumentos con los que abordará las *prácticas operativas y discursivas* (Godino, Batanero y Font, 2007), y con los que introducirá en el medio didáctico los instrumentos que contribuyan al control de los estudiantes de sus producciones (*feedback*) para la construcción y la comunicación del conocimiento matemático.

> "En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas." (Godino, Batanero y Font, 2007, 128)

La elección de un instrumento se da en parte por razones pragmáticas y por las ventajas técnicas que éste pueda facilitar. Sin embargo, no hay que olvidar otras consideraciones relativas al saber que se pretende trasmitir con dicho instrumento. Es decir, es necesario constatar que su uso es efectivo, y en particular, hay que vigilar que no se incurra en un *deslizamiento metacognitivo*, es decir, el fenómeno por el cual el aprendizaje del instrumento sustituye al aprendizaje del contenido.

> "[El nuevo método de enseñanza] se convierte a su vez en un objeto de enseñanza, en cual está sobrecargado con unas convenciones y un lenguaje específico que se enseña y se explica en cada etapa de la presentación." (Brousseau, 1998, 26–27)

Hoy en día, la elección de un instrumento está fuertemente relacionada con los avances tecnológicos, los cuales, junto con la constante transformación de los objetivos de la enseñanza, modifican el entorno en el que se desarrolla la actividad matemática.

> "La naturaleza dinámica de la comprensión matemática y las correspondientes necesidades de múltiples representaciones sirven como base teórica para la integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra." (Bu, Spector, Haciomeroglu, 2011, 15)

Ahí radica la necesidad del docente de estar en constante contacto con las novedades tecnológicas e instrumentales, para poder valorar su posible uso y potencial implementación en el aula.

Se presenta en este capítulo una introducción a la temática del trabajo, junto con una panorámica de los antecedentes y los propósitos del mismo. Por un lado, la sección 1.1 recoge el origen de la investigación (Lasa, 2011) y resume el estado tecnológico y el entorno social del instrumento GeoGebra. A continuación, la sección 1.2 presenta el estado de la literatura didáctica en relación al instrumento *software dinámico* y al *aprendizaje por modelos dinámicos*. Por último, en la sección 1.3, se presentan las preguntas, los objetivos y las hipótesis de la investigación.

1.1. Antecedentes

Lasa (2011) aborda el papel de la noción de función en la resolución de ecuaciones, realizando en primer lugar un análisis del currículo vigente y de los libros de texto, para posteriormente analizar un proceso de estudio particular en segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Se alcanzan tres conclusiones básicas que sirven de punto de partida para ésta investigación.

En primer lugar, los libros de texto estudiados adelantan sistemáticamente los contenidos algebraicos del currículo de un curso determinado al libro de texto del curso anterior. Por ejemplo, aparecen en segundo curso contenidos fuertemente algebraicos, tales como las ecuaciones de segundo grado y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (figura 1.1), cuando el currículo, en este bloque de contenidos, explicita únicamente el uso del "lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones" (MEC, 2007).

> "Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido." (MEC, 2007, 754)

Este "adelanto" de contenidos tiene su reflejo en la programación de los departamentos de matemáticas de los centros de secundaria, dada la extendida costumbre de tomar como referencia principal el libro de texto para el diseño anual del curso. El adelanto de contenidos algebraicos puede no ser grave dentro de un mismo ciclo, puesto que los objetivos generales se siguen cumpliendo, aún modificando ligeramente la secuencia de introducción de los mismos. Sin embargo, los estudiantes de 2º ESO trabajan las matemáticas a partir de una configuración epistémica fuertemente aritmética, dado que es durante el primer ciclo cuando se inicia la introducción y desarrollo del álgebra formal.

Resuelve por igualación y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 4$, $y = 1$ b) $x = -1$, $y = -2$ c) $x = -2$, $y = 5$ d) Sin solución.

Figura 1.1: Adelanto de contenidos algebraicos, 2º de ESO (Colera, 2009).

En segundo lugar, los contenidos algebraicos en los libros de texto distan mucho de ser transversales, a pesar de que así lo requiere el currículo. En efecto, además de los contenidos denominados "comunes", que hacen referencia, entre otros, a la resolución de problemas y a la expresión verbal de los procesos de resolución, existen cinco bloques de contenidos "temáticos", que hay que integrar en la actividad matemática en el aula.

> "El resto de los contenidos se han distribuido en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad. Es preciso indicar que es sólo una forma de organizarlos. No se trata de crear compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística". (MEC, 2007, 750)

Es decir, los libros de texto presentan los contenidos aritméticos y algebraicos en bloques aislados del resto de contenidos, reproduciendo de forma literal o cronológica lo estipulado en el currículo oficial. Sin embargo, el currículo oficial indica que estos contenidos tienen que ser asistenciales al resto de contenidos de matemáticas, es decir, geometría, análisis de funciones, estadística, etc. No se debería, pues, usar el libro de texto de forma lineal dentro de la asignatura de matemáticas.

En tercer y último lugar, Lasa (2011) realiza también una observación sobre procesos de resolución de ecuaciones. En particular, se fomenta el uso de la representación funcional a la hora asistir la resolución de sistemas de ecuaciones (figura 1.2).

Tal como es habitual, la ampliación de los conjuntos numéricos genera obstáculos a la hora de manipular aritméticamente números negativos. Además, el paso de la aritmética al algebra es también problemático, por la compleja instrucción en el uso de simbología que requiere.

> "Los procedimientos se presentan de forma aislada, con la ingenua premisa de que 'la eficacia en el manejo smbólico aislado posibilitará su maestría en situaciones complejas'. [...] Las técnicas de manipulación algebraica no aparecen como medio de control y de eficacia en situaciones problemáticas, sino que son un objetivo aislado y desarticulado del resto del currículo. " (Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006).

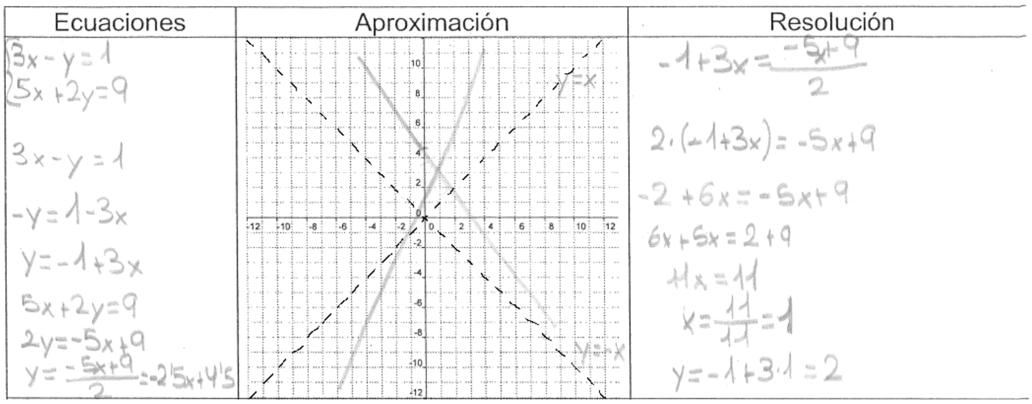


Figura 1.2: Resolución algebraica y funcional de sistemas lineales (Lasa, 2011).

En relación a ésta ausencia de control se observan, además, indicios de *irresponsabilidad matemática*[1]. El alumno no comprueba su producción y deja la responsabilidad de la corrección en manos del profesor, que actúa como un evaluador externo. El libro de texto puede contribuir a generar esta tendencia, al pretender ayudar tanto al alumno como al docente, facilitando soluciones para cada ejercicio (figura 1.1).

La experimentación sugiere que la utilización de representaciones gráficas es beneficiosa. Por un lado, el alumno tiene entre manos una estrategia gráfica de control para poder evaluar sus producciones escritas sin necesidad de un evaluador externo. Por otro lado, los conocimientos adquiridos en las actividades de resolución servirán a futuro, cuando en segundo ciclo estudien a fondo más contenidos funcionales.

En la experimentación propuesta, los estudiantes realizan sus diagramas a mano alzada sobre un soporte de papel. Sin embargo, la representación gráfica de funciones a mano alzada se puede sustituir por el uso graficadoras. A fin de cuentas, la reproducción manual de la gráfica puede ser, por regla general, excesivamente costosa. El instrumento GeoGebra es útil en este contexto, aunque es necesario fundamentar su utilización y contrastar la pertinencia de su uso como asistente de la actividad matemática.

Los instrumentos tecnológicos avanzan a velocidades cada vez mayores, obligados por el constante desarrollo de los mercados económicos, que así lo requieren. Teléfonos móviles, ordenadores, tabletas y pizarras digitales son ejemplos de hardware en constante avance, cada uno con su correspondiente software y potencial aplicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por poner un par de ejemplos, puede ocurrir que cierto modelo de pizarra digital y todo el software que éste lleva implementado queden obsoletos a los 2 años de instalar el hardware en una escuela, o que el material adicional que las editoriales incluyen junto con sus libros de texto (discos compactos, claves de acceso a materiales *on-line*) queden también inoperativos debido a una repentina actualización del sistema operativo sobre el que estos funcionan.

La escuela clásica en general, y los departamentos de matemáticas de secundaria en particular, no pueden modificar su estructura curricular a la velocidad del mercado, siendo necesarios elementos externos que les ayuden a impulsar y regular estas innovaciones con garantías operacionales y el respaldo de profesionales del área. Un ejemplo

[1] *Irresponsabilidad matemática*: fenómeno didáctico por el cual "el alumno tiende a delegar al profesor la responsabilidad de la validez de sus respuestas" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, 60).

determinante en la actualización de la educación matemática a nivel europeo y mundial es el Proyecto GeoGebra (www.geogebra.org).

A principios de 2000, GeoGebra era un software de geometría dinámica de pequeña repercusión, que se habría camino en un entorno donimado por otro software de características similares, Cabri-Géomètre II Plus (figura 1.3).

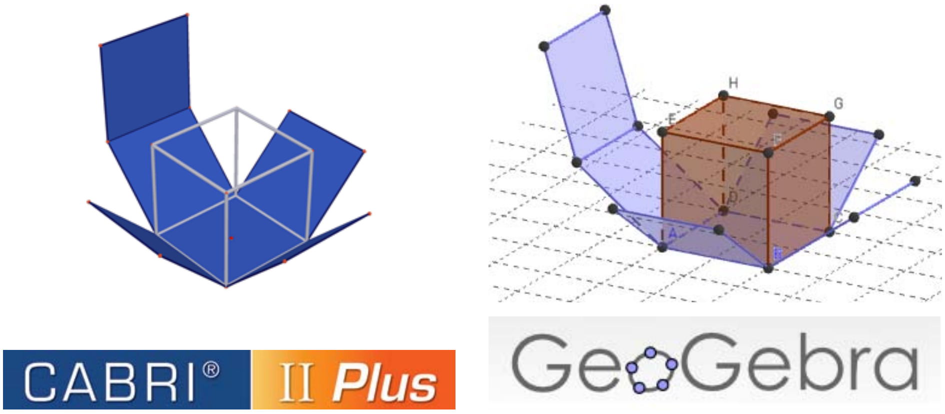


Figura 1.3: *Output* y logotipos de Cabri y GeoGebra (www.cabri.com; www.geogebra.org).

La primera versión de GeoGebra (figura 1.4) fué el resultado de la tesis doctoral de Markus Hohenwarter, actual director del proyecto. Sin embargo, las siguientes versiones complementan las herramientas de geometría básica en el plano con otras para el análisis de funciones, estadística, probabilidad y geometría del espacio (3D). Las últimas versiones dan además al usuario la posibilidad de diseñar guiones sobre lenguaje Java para la creación de *applets*.

El desarrollo de GeoGebra está hoy en día en manos de una red de profesionales que cubre un espectro amplio, desde investigadores en matemáticas, informáticos y programadores en software libre, hasta maestros de Educación Primaria y profesores de Educación Secundaria. Todos ellos trabajan en una estructura internacional constituida por los Institutos GeoGebra.

Estos Institutos se agregan normalmente a una institución de educación superior y promocionan a partir de ella el uso de GeoGebra, a través de cursos de formación de maestros y profesores en activo, conferencias de profesionales de la educación, la creación de fondos de materiales didácticos y la promoción de actividades escolares para el alumnado, entre otras actividades.

A pesar de que el Proyecto GeoGebra constituye un elemento ajeno a la estructura oficial de la escuela, los Intitutos GeoGebra se coordinan a nivel internacional para trabajar a nivel local. Gracias a esta organización, los Institutos han podido incidir en aspectos de la innovación en el uso de tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La innovación educativa es una labor que requiere de tiempo, recursos y apoyo institucional, y sin estos requisitos, se aboca al sistema educativo a recurrir a la "buena voluntad docente", hecho que dificulta su seguimiento y estabilidad, dado que las exigencias en el día a día del docente son muchas y variadas. Sin embargo, la sinergia de individuos y colectivos en este proyecto ha propiciado la creación de diversas iniciativas curriculares, de las cuales el Proyecto Gauss es un claro ejemplo.

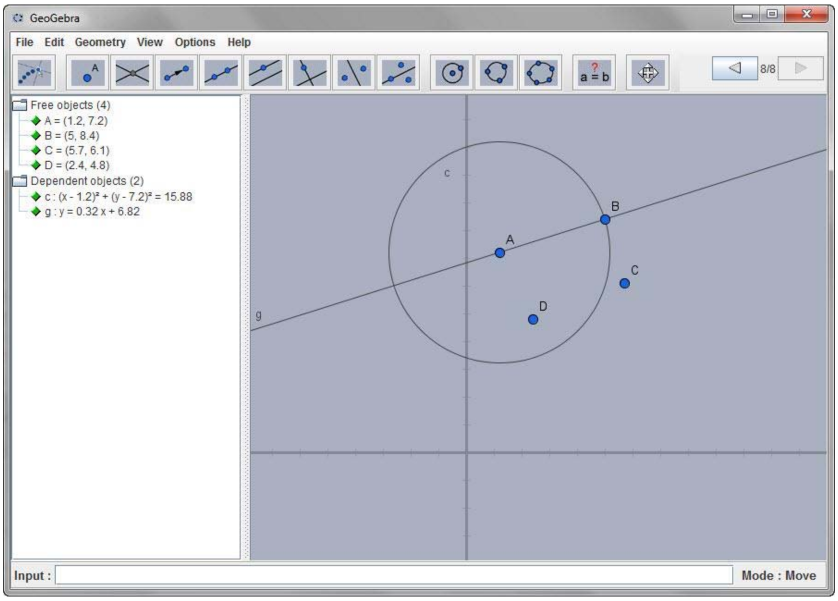


Figura 1.4: Versión 1.0 de GeoGebra (www.geogebra.org).

El Proyecto Gauss, financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, tiene por objetivo realizar un recubrimiento del currículo a través de *applets* basados en tecnología GeoGebra, junto con cuestionarios y guiones para estudiantes y alumnos. Este proyecto ha tenido una amplia aceptación dentro de la comunidad educativa.

Además, la página web de GeoGebra permite almacenar y catalogar materiales y construcciones en formato de libro-GeoGebra. Este formato viene a complementar el libro de texto clásico con una organización de materiales y cuestionarios de trabajo organizados dentro del propio software.

El fondo de documentos y materiales didácticos creados con tecnología GeoGebra es inmenso, y se puede catalogar en diversos enlaces del Proyecto Gauss, GeoGebraTube y páginas web de particulares.

- http://recursostic.educacion.es/gauss/web/
- http://www.geogebratube.org/?lang=eu

Sin embargo, a pesar de que estos materiales permiten diseñar nuevos entornos de aprendizaje, están todavía en fase de experimentación.

Es de suponer que estos nuevos entornos de aprendizaje cambiarán en distintos niveles las asunciones sobre los conocimientos previos y el orden en el que los nuevos conceptos serán introducidos. A la hora de diseñar secuencias basadas en las nuevas tecnologías, es de esperar que algunos *obstáculos didácticos* (Brousseau, 1997) desaparezcan, pero asimismo, es muy probable que nuevos obstáculos emerjan.

A principios de la década de 2000, los expertos en tecnologías y educadores interesados en la aplicación de tecnologías para la educación en las escuelas especulaban sobre el grado en el que los cambios en la tecnología podrían cambiar los contenidos que se pretenden trabajar con ella en la escuela, y pretendían asimismo anticipar las dificultados cognitivas a las que se enfrentarían los alumnos a la hora estudiar esos contenidos.

> "Cuando la tecnología se diseña y se utiliza de forma apropiada, ésta puede apoyar el diseño de nuevos entornos de aprendizaje, los cuales pueden cambiar en varios niveles las creencias que se tienen sobre los conocimientos previos y la secuencia en la cual se introducen los nuevos conceptos. A la hora de diseñar secuencias basadas en nuevas tecnologías, es de esperar que algunas discontinuidades desaparezcan, pero es asimismo muy probable que otros obstáculos nuevos ocupen su lugar." (Yerushalmy, 2005, 37)

Una década más tarde, el uso de tecnologías en el aula es una realidad, pero el grado en el que estas nuevas tecnologías podrían cambiar el currículo con nuevos contenidos continua siendo un reto.

El hecho de emplear *applets* en la enseñanza de las matemáticas en distintas etapas educativas, no implica necesariamente que el currículo se vaya a modificar, basándolo en unas nuevas premisas epistemológicas. Un cambio de premisas de semejante magnitud nos llevaría a tener que plantearnos, ¿cómo cambiará nuestra capacidad para anticipar las dificultades y fortalezas a las que se enfrentarán nuestros alumnos?

En la práctica, las representaciones dinámicas múltiples suponen un gran desafío en cuanto al diseño de la instrucción. Por ello, a la hora de realizar diseños de modelos dinámicos, se deben tener en cuenta una serie de principios (Sessa, 2007) relacionados con el escenario que se quiere crear, para que este sea realista y útil para el diseño de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

Lasa, Sáenz de Cabezón y Wilhelmi (2009) justifican la pertinencia del uso del programa GeoGebra en la formación de maestros basándose fundamentalmente en cinco aspectos íntimamente relacionados, aunque de naturaleza distinta:

- *Perfil profesional.* Los estudiantes de Maestro, futuros profesores, tendrán que ser capaces de afrontar los retos tecnológicos de la actualidad.

- *La formación de Maestro en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior.* El nuevo Grado de Maestro en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior alarga la formación inicial un año (pasa de 3 a 4 años). Este hecho permite la inclusión más sistematizada de nuevos materiales. Las nuevas tecnologías tienen una importancia clave en las nuevas propuestas educativas para la etapa, por lo que su inclusión en la formación inicial en Maestro se hace indiscutible.

- *Free software.* En la formación de Maestro se ha utilizado para la enseñanza de la Geometría y su didáctica el software Cabri-Géomètre II Plus. Este programa no es de libre distribución, lo que dificulta enormemente el trabajo autónomo de los estudiantes fuera de la universidad y su posterior implantación en las escuelas. GeoGebra, aúna las capacidades interactivas de Cabri y facilita su accesibilidad y uso por estudiantes y profesores en todos los niveles educativos.

- *Curricular.* Uno de los objetivos de la Educación Primaria es potenciar el uso de las nuevas tecnologías. Las nuevas tecnologías permiten la adquisición de competencias geométricas que con los medios clásicos son inabordables.

- *Epistemológica.* La manipulación de objetos geométricos con lápiz y papel restringe el tipo de problemas que pueden ser plantados, impidiendo procesos fundamentados en la experimentación (inducción empírica), que conllevarían de otro modo un gasto excesivo de tiempo.

Otra clara ventaja de este software es su disponibilidad en decenas de idiomas. Esto se debe al carácter abierto de su código, gracias al cual cualquier profesional interesado en traducir el programa puede hacerlo de forma libre y gratuita. En España, esta circunstancia se ajusta perfectamente al esquema plurilingüe de las comunidades con más de una lengua oficial en educación. En el sistema educativo de la Comunidad Foral de Navarra esta circunstancia se refiere al uso del castellano y el euskera.

1.2. Aprendizaje por modelos dinámicos

A finales de la década de 1980 comienza la introducción de la informática en el mundo laboral y en el sistema educativo. Por un lado, se genera software profesional en matemáticas, como *Matlab* o *Mathematica*. Estos programas son capaces de realizar complejos cálculos, tanto numéricos como simbólicos, y representaciones en 2D y 3D en un tiempo razonable, y facilitan de esta forma la labor del matemático. Tediosos cálculos y representaciones gráficas son programadas y ejecutadas por el ordenador, y el matemático dispone así de más tiempo para analizar las propiedades o relaciones entre objetos matemáticos. Por otro lado, se ha generado también software diseñado para el sistema educativo.

Algunos de los programas diseñados para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje por medio del ordenador forman la familia denominada *software de geometría dinámica*. Los modelos dinámicos generados por ordenador abarcan disciplinas variadas y no solo se utilizan en matemáticas. Así, existen programas que simulan, por ejemplo, un proceso biológico, o un mercado económico. Algunos se diseñan al estilo de juegos en los que el *estudiante-jugador* resuelve una tarea que le permite "pasar la pantalla", pero en todos ellos se requiere la resolución de un problema (Jong y Joolingen, 2008).

Los programas son variados, pero se pueden inferir características comunes que los clasifican. Jong (2006) describe tres formas fundamentales en las que el estudiante aprende a través de modelos dinámicos.

- El estudiante manipula un modelo existente.
- El estudiante construye un modelo.
- El estudiante utiliza un modelo existente, para la realización de una investigación simulada.

Esta clasificación no se centra en la relación *instrumental* del estudiante con el software. En su lugar, se clasifican los modelos en función del nivel de maestría informática que tiene el estudiante, es decir: en un nivel de usuario *básico*, el estudiante manipula un modelo; mientras que en un nivel de usuario *avanzado*, el estudiante "programa" su propia construcción. Se sobreentiende en esta clasificación, sin técnica ni contraste experimental sistemático, que el nivel de dominio informático del estudiante determina el tipo de tarea matemática que éste es capaz de realizar con el modelo.

Así, cuando *el estudiante manipula un modelo existente*, éste tiene que realizar un estudio preliminar de la situación a partir de un modelo de *orientación*, sobre un tema de estudio principal que está predeterminado. Se solicita al estudiante que *genere una hipótesis*, es decir, que presente una conjetura sobre la proposición planteada en la situación. Una vez planteada la hipótesis, el estudiante utiliza el modelo dinámico existente para validar la veracidad de la conjetura propuesta. Se trata de una *experimentación* en la cual se contrasta la predicción con el modelo. Por último, se solicita al estudiante que reflexione sobre el proceso de resolución seguido y que *evalúe* el modelo dinámico. El estudiante debe, asimismo, plantear nuevas ideas a partir de la validación del experimento, a modo de *conclusión*.

Sin embargo, cuando *el estudiante construye un modelo*, se le solicita que identifique en la fase de *orientación* los objetos y variables que participan en el modelo, para realizar un primer esbozo del mismo. El estudiante debe, a continuación, *especificar* el modelo, es decir, debe plantear las relaciones entre las variables, de forma cuantitativa o cualitativa, para poder realizar operaciones computacionales entre las mismas. El estudiante construye, por tanto, modelos similares a los manipulados. Por último, se *evalúa* el modelo, siguiendo el método científico: se realizan observaciones y se comparan los resultados experimentales con los esperados, es decir, los generados por el modelo.

La tercera forma fundamental de aprendizaje por modelo dinámico, el *modelo de investigación simulada*, viene a ser un modelo híbrido en el cual el estudiante complementa la utilización de un modelo existente con una recogida de datos experimental.

Si el proyecto de investigación tiene que ver con alguna ciencia experimental, se recrea la construcción física necesaria para realizar mediciones de magnitudes reales. Así, por ejemplo, se construye un invernadero para medir cantidades de CO_2, H_2O, o para medir temperaturas o la intensidad de la luz. El estudiante será el encargado de construir un modelo dinámico que explique el funcionamiento del sistema. En matemáticas, un proyecto de investigación podría consistir en la demostración de una proposición.

Ejemplo 1 (Modelo de investigación simulada) *Demuestra que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman un ángulo llano.*

En primer lugar, se solicita al estudiante que genere una serie de triángulos, a partir del modelo dinámico de un triángulo que muestra en todo momento el valor de sus ángulos internos, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *y* $\widehat{C}$. *Se transcriben los valores a una tabla sobre papel y se realiza la suma. La recogida de datos, los cálculos aritméticos y el razonamiento inductivo, llevan al estudiante a conjeturar el resultado. A continuación, el estudiante debe crear un modelo que incluya los valores de los ángulos y que justifique el resultado, es decir,* $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$. *Como alternativa, el estudiante puede manipular un modelo que* ilustra *o* demuestra *la propiedad. El Proyecto Gauss (MEC, 2012) contiene recursos de estas características*[2].

La puesta en marcha de este tipo de proyectos requiere una organización interdisciplinar dentro de la escuela, junto con un ratio apropiado profesor-alumno por clase e infraestructuras apropiadas. Además, resulta clave un adecuado *andamiaje*[3] (Mayer, 2004) en el diseño de la tarea propuesta a los estudiantes, puesto que, de lo contrario, el aprendizaje por modelos dinámicos puede fracasar.

Los procesos descritos (estudio preliminar, generación de hipótesis, experimentación y validación) no ocurren de forma lineal. En todo proceso de aprendizaje, el estudiante pivota sobre las fases que forman la clasificación. Por ejemplo, el estudiante podrá reformular una de sus hipótesis, o plantear una nueva, en función de los casos observados en el proceso experimental, o después de una validación negativa.

[2] Enlace al recurso "ángulos del triángulo", Proyecto Gauss:
`http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales didacticos/primaria.html`

[3] *Scaffolding* o andamiaje: En el modelo sistémico de enseñanza y aprendizaje, constituyen el andamiaje los estados temporales del sistema compuesto por el docente, el estudiante y el medio didáctico.

La construcción de un modelo dinámico es una tarea *a priori* exigente. Lo es para el docente, incluso en los casos en los que éste tenga una formación específica y experiencia en el uso de software. Lo será, en especial, para el estudiante, el cual no tiene por qué tener una instrucción previa en el manejo de instrumentos informáticos. El proceso de modelización es complejo, y los estudiantes pueden fallar en la creación de un modelo adecuado. Este hecho motiva la necesidad de un correcto *andamiaje* en el proceso de creación del modelo, para que el aprendizaje sea efectivo (Bravo, Joolingen y Jong, 2006). Según los autores, el estudiante debería pasar por las siguientes fases a la hora de diseñar un modelo dinámico:

- *Reproducción.* El estudiante reproduce a través de un modelo una situación y adquiere de ese modo conocimiento sobre el tema de estudio.
- *Aplicación.* El estudiante aplica el modelo para inferir información y formular conjeturas sobre el funcionamiento del modelo y realiza predicciones a través de él.
- *Evaluación.* El estudiante evalúa el modelo, decide si es correcto y en qué medida).
- *Creación.* El estudiante crea modelos o partes de modelos.

De las cuatro fases propuestas en este *andamiaje*, las fases intermedias de *aplicación* y *evaluación* son apropiadas y coherentes desde el punto de vista del diseño de una situación de enseñanza (tal como se verá en la sección 3.1). En efecto, la fase de aplicación se puede interpretar en este contexto como *fase de exploración*, en la que, a través de la acción y la formulación, el estudiante realiza conjeturas, toma decisiones y las comunica; mientras que en la fase de evaluación se *valida* el resultado obtenido.

Sin embargo, la primera fase del *andamiaje* es dudosa desde el punto de vista de la comprensión de la consigna y la movilización de los conocimientos propios (estrategia de base). La mera *reproducción* de un modelo ya existente puede tener por objetivo la familiarización con herramientas e instrumentos del software empleado. Sin embargo, afirmar que el estudiante "adquiere conocimiento" a partir de la réplica de un modelo dado, no se ajusta en diseño a una *situación de acción*.

Asimismo, la última fase de *creación* del modelo es compleja y excede el ámbito de la instrucción matemática. A pesar de ser una tarea interesante desde el punto de vista de la integración transversal de contenidos, la *validación* de un resultado matemático no debería pasar necesariamente por el diseño de un modelo por parte del estudiante.

El modelo dinámico añade valor a la fase de validación. Una vez que el estudiante resuelve la tarea y presenta una solución, el modelo dinámico pone a disposición del estudiante un medio de control a esta respuesta. Así, la validación de la respuesta a su tarea es interna.

A modo de conclusión, el modelo dinámico se debe entender como un elemento dentro del *medio didáctico*. El diseño de una situación de enseñanza debe contemplar el uso de software, y a partir de este instrumento, el profesor genera una dialéctica de construcción del conocimiento junto con el estudiante.

En el análisis del funcionamiento del software, no solo es preciso integrar las dimensiones *epistemológica*, *cognitiva* y *de enseñanza*, sino que es preciso observar que las creencias y actitudes del profesor afectan al aprendizaje matemático (Goldin, 2007; Norman, 1983). Según Llinares (2002), las creencias de los instructores juegan un rol importante a la hora de negociar los significados de las nociones matemáticas. En particular, aquella noción que ha sido problemática para el instructor se convierte en plano de interés y estudio para el mismo. Ello marca la relación que el instructor tendrá con la noción, la cual pasa a primer plano.

La evaluación informática

En otro orden de ideas, cabe mencionar el desarrollo clásico que ha tenido la evaluación por medios informáticos. La cuestión de la evaluación en matemáticas se retoma más adelante, en la sección 3.2.1.

Ya en las décadas de 1970 y 1980, se desarrollan los primeros test informáticos, en relación al trabajo de ciertos psicólogos. Estos consideran ventajosa la utilización del ordenador, puesto que se evita de esa forma la interacción del evaluador sobre las respuestas de los evaluados. Además, se libra al evaluador del rutinario y tedioso trabajo de corrección.

Se progresa en el diseño de los test, y a partir de la década de 1980, estos también se utilizan en pruebas de contenido matemático. Sin embargo, a la hora de comparar los resultados sobre el soporte tradicional de papel y el nuevo medio informático, se observa que en las pruebas de contenidos aritméticos el promedio de la puntuación obtenida es algo superior en los test sobre papel que en los realizados en ordenador (Lee y Hopking, 1985). Esto se debe principalmente al hecho de que el medio informático, al contrario de lo que ocurre sobre papel, no permite al alumno repasar y alterar los resultados anteriores. Además, a esto hay que añadir una posible falta de alfabetización informática de quien realiza el test.

Por ello, para evitar estas desviaciones, en todo test realizado por ordenador se debe dar al usuario la opción de repasar ítems anteriores y modificarlos si es necesario (APA, 1986). Se constata que la revisión de los ítems mejora la calificación obtenida, con mayor mejora en aquellos estudiantes con mejores calificaciones.

Estas consideraciones se deben tener en cuenta a la hora de evaluar las producciones de los estudiantes en un soporte informático.

1.3. Preguntas, objetivos e hipótesis

Dentro de los procesos matemáticos, la resolución de ecuaciones tiene un componente algebraico claro. Tanto es así, que en el diseño de la actividad escolar la configuración algebraica domina otras configuraciones de objetos y procesos (capítulo 3), por ejemplo, la geométrica, la funcional o la gráfica. Otras configuraciones, como la aproximación numérica, muy relacionada con el uso de programas informáticos y calculadoras programables, no se contemplan en los currículos oficiales, y tienen, en consecuencia, un reflejo reducido en las prácticas escolares. Es necesario describir las configuraciones de objetos y procesos que participan en los procesos de resolución de ecuaciones.

La elección de un instrumento (sección 2.1) determina el tipo de actividad matemática que se genera. Por ello, es necesario identificar los objetos y procesos matemáticos que pone en juego el estudiante para resolver el tipo de tarea "resolución de ecuaciones". La práctica institucional debe contemplar dichas configuraciones e integrarlas en el proceso de institucionalización del conocimiento. Además, se deben seleccionar las interacciones didácticas idóneas para promover éstos aprendizajes matemáticos, de forma que se optimice el aprendizaje matemático.

La clasificación general de las formas fundamentales en las que el estudiante aprende a través de modelos dinámicos, y la clasificación de las fases por las que pasa un estudiante a la hora de diseñar el modelo dinámico, se describen en función de las capacidades informáticas del usuario: nivel básico (utiliza un modelo) o avanzado (diseña un modelo). Sin embargo, la clasificación de los momentos de utilización de los modelos dinámicos se debería realizar en función del tipo de actividad matemática que se genera con su uso en una situación didáctica (acción, formulación, validación), en función de los soportes materiales que asisten la actividad (material físico, lápiz y papel, software dinámico) y en función de los momentos de la actividad matemática para los que está diseñado: exploración, ilustración, demostración (sección 2.2).

En la descripción del currículo actual (sección 5.4.1) se observa desconexión entre bloques de contenidos, con una mayor presencia del álgebra. Asimismo, la utilización del ordenador en el aula de matemáticas es, por regla general, anecdótica en Educación Secundaria.

En este sentido, cabe realizar preguntas relativas a las dimensiones epistemológica, cognitiva y de enseñanza:

- *Epistemológica.* ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objetos y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? En concreto, ¿cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objetos y procesos algebraicos y funcionales activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver tareas de resolución de ecuaciones? ¿Qué vinculación tienen estas configuraciones con el empleo del software dinámico?

- *Cognitiva.* ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? En concreto, ¿cuáles son las prácticas, objetos y procesos algebraicos y funcionales que pone en juego el estudiante para resolver una tarea de resolución de ecuaciones? ¿Difieren estas prácticas en función del soporte material empleado (lápiz y papel, software de geometría dinámico) en la resolución de la tarea de resolución de ecuaciones?

- *De enseñanza.* ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? A la hora de resolver tareas de resolución de ecuaciones, ¿qué prácticas personales, algebraicas y funcionales, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales en resolución de ecuaciones, y cómo se establecen y pueden ser cambiadas para optimizar el aprendizaje matemático? ¿Qué tipos de problemas y sistemas de prácticas de resolución de ecuaciones se pueden vincular al software dinámico? ¿Qué relación guardan éstas últimas con las configuraciones algebraica y funcional? ¿Cómo se elaboran las configuraciones de objetos y procesos matemáticos en relación al software dinámico? ¿Cómo se valora la idoneidad didáctica del proceso de estudio? ¿Cómo se evalúa la producción matemática de un estudiante, cuando ésta es asistida por un modelo dinámico?

Asímismo, se pueden integrar estas tres dimensiones para formular preguntas que aborden la dimensión didáctica:

- ¿Qué tipos de interacciones didácticas (entre las personas y los recursos) se deberían implementar en los procesos instruccionales que sean idóneas para promover los aprendizajes matemáticos? ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación de un proceso de estudio matemático para mejorar el aprendizaje? La articulación de nociones funcionales y algebraicas, ¿mejora la comprensión de los contenidos de resolución de ecuaciones y facilita su desarrollo? La utilización de modelos dinámicos, ¿mejora los resultados en tareas de resolución de ecuaciones?

La búsqueda de respuestas a éstas cuestiones se puede reformular en forma de objetivos de la investigación. Éstos son:

- Describir los procesos de construcción y comunicación del saber involucrado en los Procesos de estudio de ecuaciones e inecuaciones en secundaria.
- Análizar y desarrollar graficadoras y otros medios materiales: ilusión y control.
- Elaborar una *ingeniería didáctica* para mejorar los Procesos de estudio de ecuaciones e inecuaciones en secundaria.
- Contrastar la hipótesis clásica, "El dominio informático del estudiante determina el tipo de tarea matemática que éste es capaz de realizar".

Las hipótesis de trabajo son:

[H1] Si las nociones funcionales y algebraicas se presentan de forma integrada, entonces se facilita la comprensión de los contenidos de resolución de ecuaciones.

[H2] Si se utilizan modelos dinámicos en tareas de resolución de ecuaciones, entonces los estudiantes mejoran sus resultados.

[H3] Si se ajusta el uso del software en función del tipo de actividad matemática y no en función de la maestría informática, entonces aumenta la eficacia en la ejecución de las técnicas de resolución y se adquiere un significado más flexible de los objetos matemáticos involucrados.

La literatura (Duval, 1995; Bremigan, 2005) trata de forma amplia cómo los cambios de registro afectan en la comprensión del conocimiento matemático, por lo que la primera hipótesis se puede considerar *clásica*. La segunda hipótesis es actual, ya que, a pesar de que el software de geometría dinámica se lleva desarrollando varias décadas, su utilización en los centros de Educación Secundaria es novedosa y no está implantado de manera generalizada. Aún más, en aquellos centros en los que sí se ha implantado, hay una carencia de estudios que discutan los resultados de aprendizaje logrados por los estudiantes.

Capítulo 2

Instrumentación

Breve resumen
En las teorías de la instrumentación se caracteriza la noción de instrumento como aspecto clave para la descripción de la actividad matemática. En particular, GeoGebra cumple la función de instrumento tanto en el desarrollo de demostraciones como en la resolución de problemas matemáticos. El instrumento y el medio en el que éste se utiliza condicionan el desarrollo de la tarea a resolver. En este sentido, GeoGebra permite integrar contenidos algebraicos, de interpretación funcional y representación gráfica en la resolución de ecuaciones e inecuaciones. Así, el estudiante tiene en sus manos una forma de control sobre sus producciones escritas, al poder contrastar los resultados obtenidos en distintos soportes y sobre distintos enfoques en la resolución de una tarea matemática.

Laburbilduma
Zeregin matematikoak ebazterako orduan, lanabesen teoriek berebiziko garrantzia ematen diote tresnaren nozioari. Bereziki, GeoGebrak tresnaren funtzioa betetzen du frogapen matematikoak garatzerako orduan eta problema matematikoak ebazterako orduan. Erabilitako tresnak eta aukeraturiko inguruneak ebatzi beharreko zeregina baldintzatzen dute. Izan ere, GeoGebraren bitartez eduki aljebraikoak, interpretazio funtzionala eta adierazpen grafikoa integra daitezke, ekuazioen eta inekuazioen ebazpenean. Horrela, ikasleak esku artean izango du haren idatzizko produkzioen gaineko kontrola, euskarri ezberdinetan lorturiko emaitzak kontrasta ditzakelako tartean dauden eduki matematiko anitzen bitartez.

Short summary
When resolving mathematical tasks, the notion of instrument is fundamental to instrumentation theories. In particular, GeoGebra is an instrument to develop mathematical proofs and problem solving. The chosen instrument and the environment where is used determine the evolution of the task. Indeed, GeoGebra integrates algebraic, function interpretation and graphic representation notions for solving equations and inequalities. Therefore, students have in their hands a way to control their written productions, since provides a way to contrast results in different supports and many mathematical views.

2.1. Noción de instrumento

La Teoría de la génesis instrumental atribuye un rol de gran importancia a los artefactos usados en la actividad humana a la hora llevar a cabo una tarea (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013). Una *herramienta* o *artefacto* es un objeto producto de la actividad humana, normalmente físico, pero a veces de otro tipo, que se utiliza para desempeñar una tarea de algún tipo. A pesar de su diseño original, un mismo artefacto puede ser utilizado para la realización de distintas tareas en diferentes contextos, en función de las capacidades de quién lo usa. Por lo tanto, si añadimos a un artefacto las destrezas necesarias para desempeñar una tarea determinada por parte de quién lo manipula, este pasa a ser un *instrumento*.

Esta dualidad *artefacto-instrumento*, no se interpreta en términos extremos, si no como dos caras de una misma moneda.

> "Utilizaremos el término artefacto, un término 'neutral' que no especifica ninguna relación particular con el objeto [. . . y] el término instrumento para designar el artefacto en una situación, inscrita en el uso, en una relación instrumental de actuación con un sujeto como medio de acción." (Rabardel, 2002, 39–40)

Una segunda dualidad dentro de las teorías de instrumentación, es la formada por el par *instrumentación-instrumentalización*. Durante la génesis instrumental, se crea una relación bilateral ente usuario y artefacto. La *instrumentalización* describe la forma en la que el sujeto, con sus conocimientos, utiliza el artefacto y de alguna manera "le da forma" para resolver una tarea. De forma dual, la *instrumentación* hace referencia a las posibilidades y restricciones del instrumento, y a cómo estos condicionantes influyen en la resolución de un problema por parte del sujeto (Hoyles y Noss, 2003). A la hora de utilizar GeoGebra en la resolución de ecuaciones, como instrumento que es, el modelo dinámico generará una relación bilateral de este tipo con el estudiante.

Una vez que los alumnos desarrollan una forma estable de resolver un tipo específico de tareas a través de un instrumento, desarrollan un *esquema de acción instrumentada* (Trouche, 2000). Una cuestión crucial, con relación al uso de GeoGebra, es entonces determinar si los estudiantes poseen un tal esquema de acción instrumentada a la hora de resolver las tareas propuestas

Desde el punto de vista de la Teoría de la génesis instrumental, GeoGebra constituye un *artefacto*. El modo en el que se usan los artefactos no es trivial, es decir, el manejo de todo artefacto requiere de una instrucción previa. Así, por ejemplo, el artefacto *lápiz* se convierte en un *instrumento* de escritura mediante el conocimiento del alfabeto y la gramática. De manera similar, gracias a una instrucción y unos conocimientos matemáticos previos, el *artefacto* GeoGebra se convierte asimismo en un *instrumento* para la realización de una determinada tarea matemática (Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013).

En estos términos, cuando un estudiante usa, por ejemplo, la herramienta GeoGebra "intersección de dos objetos" para calcular el punto de corte de dos funciones (*instrumentalización*), los límites del instrumento condicionan las acciones del alumno para la resolución de la tarea y determinan el modo en que éste conceptualizará la resolución de un sistema de ecuaciones, es decir, como un punto en el plano en coordenadas decimales (*instrumentación*).

2.1.1. Control epistemológico e instrumentación con GeoGebra

Una vez planteado el problema matemático, la elección de un instrumento de resolución modifica el esquema de acción de los estudiantes. Es interesante, pues, analizar la instrumentación del artefacto, porque puede ayudar a determinar el modo y el orden de utilización de los soportes físicos en el diseño de una actividad matemática. Se comparan, a continuación, dos esquemas de resolución: en uno, se emplea exclusivamente el soporte de "lápiz y papel", y la técnica utilizada es aritmético-algebraica; en otro, se emplea el soporte "software dinámico", con un predominio de la técnica de resolución gráfica.

En la resolución algebraica de una tarea matemática, en general, no se realiza un análisis previo: la técnica objeto de enseñanza se presenta cristalizada y atomizada, y se justifica la ausencia de este análisis previo atendiendo a criterios temporales: si la situación escolar está "nítidamente diseñada" (se asegura la existencia de soluciones, y estas se encuentran en el campo numérico natural o entero), el análisis previo no tiene justificación. En todo caso, el criterio de existencia para la solución se aplica en un paso intermedio de la resolución, una vez que el estudiante comienza a manipular algebraicamente las ecuaciones. Este criterio no se tiene porqué explicitar, y puede quedar implícito en la argumentación. Una vez finalizada la resolución, el estudiante comprueba la solución obtenida en las ecuaciones iniciales para validar la solución obtenida.

El esquema de acción se ve modificado cuando se asiste la resolución del problema por un modelo dinámico. La construcción dinámica facilita el análisis previo, y la aplicación de un criterio de existencia se realiza al inicio de la resolución: la vista gráfica de la construcción sugiere las circunstancias en las que existe o no solución. Para resolver el problema, se selecciona un conjunto de herramientas del menú informático y se aplican en una secuencia determinada, que invierte el esquema algebraico: se anticipa el objeto final (solución), y se van pensando "hacia atrás", los objetos previos que son necesarios crear para llegar, paso a paso, a este fin (figura 2.1).

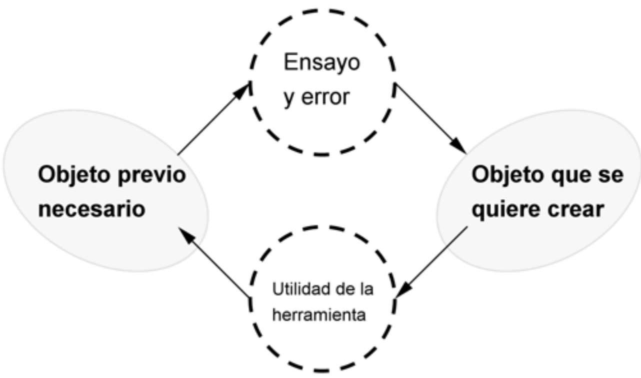


Figura 2.1: Esquema de acción con GeoGebra

Este esquema puede tener tantos pasos como pasos tenga la construcción. Las restricciones de la herramienta GeoGebra determinan su utilidad y la decisión del ususario sobre el objeto previo que es necesario crear. La estrategia de ensayo y error permite en última instancia la definición del objeto que se quiere crear.

Por regla general, la ausencia de tecnificación genera una serie de intentos fallidos, hasta que, por ensayo y error, se obtiene una solución exitosa. En el proceso algebraico, esta circunstancia se traduce en cálculos infructuosos, codificaciones inapropiadas en intensivos algebraicos, o la selección de una fórmula que no resuelve la tarea. En el diseño de la construcción dinámica, es previsible que la falta de tecnificación genere una construcción que no es "mínima" en cuanto al número de objetos informáticos creados en el proceso, con presencia de objetos que no cumplen ninguna función, objetos redundantes, o la utilización consecutiva de varias herramientas en situaciones en las que una sola herramienta solventa la ejecución del paso.

En número de objetos que se pueden crear aumenta en función del número de pasos que requiera el diseño de la construcción dinámica. Así, la búsqueda de una estrategia óptima se vuelve imperante con el aumento de la complejidad en la construcción.

Esta circunstancia se puede ejemplificar en el juego de las Torres de Hanoi. En el juego estándar se disponen tres estacas y n discos de igual grosor pero diferente radio. Los discos se colocan inicialmente sobre una estaca, en orden decreciente. El objetivo consiste en mover todos los discos a otra estaca, respetando dos reglas:

- En cada movimiento se mueve un solo disco.
- Un disco de radio mayor nunca se puede colocar sobre otro de radio menor.

Se puede demostrar, a partir de una regla recursiva, que el número mínimo de movimientos que se requieren para resolver la tarea es de $2^n - 1$. En esta solución, se observa que el número "mínimo" de movimientos aumenta exponencialmente a medida que aumenta el número de discos. Un jugador que se enfrenta al juego con $n = 3$ discos, lo podrá resolver sin conocer la estrategia ganadora, puesto que se requiere un mínimo de $2^3 - 1 = 7$ movimientos. Sin embargo, la ausencia de tecnificación en la resolución del problema no permite resolver ésta con éxito para un valor "grande" de n. Asimismo, el incremento del número de estacas (de 3 a 4) genera un nuevo problema, en el cual la determinación del nuevo número "mínimo" de movimientos requiere complejas estrategias de búsquedas heurísticas (Korf y Felner, 2007). La figura 2.2 muestra todos los posibles estados del juego de las Torres de Hanoi para $n = 3$, junto con el procedimiento para resolver el juego con el mínimo número de pasos, es decir, con 7 pasos.

Volviendo al problema que nos ocupa, cada paso en la construcción del modelo se puede ejecutar con un conjunto de herramientas. Así, el número de las posibles elecciones y aplicaciones de las herramientas aumenta en función del número de pasos que requiere la construcción, y en ausencia de una tecnificación, dificulta la obtención de la construcción mínima.

El modelo dinámico permite aplicar gráficamente, desde un inicio, un criterio de existencia de la solución. Sin embargo, una vez obtenida, ésta no se comprueba por otro procedimiento. Al igual que los estudiantes se fían de los resultados obtenidos en una calculadora, no ponen en duda la solución obtenida en un proceso informático. El resultado lo da la máquina y esta es suficiente garantía.

Así, en el contexto del campo numérico irracional, cuando se solicita la comprobación $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, al estudiante queda satisfecho con la comprobación numérica de su calculadora:

$$\sqrt{18} \quad = \quad 4,24264068\ldots \quad 3\sqrt{2} \quad = \quad 4,24264068\ldots$$

El proceder del estudiante tiene su justificación matemática (Chevallard, 2004), y además, la instrumentación de la calculadora permite al estudiante avanzar en la asig-

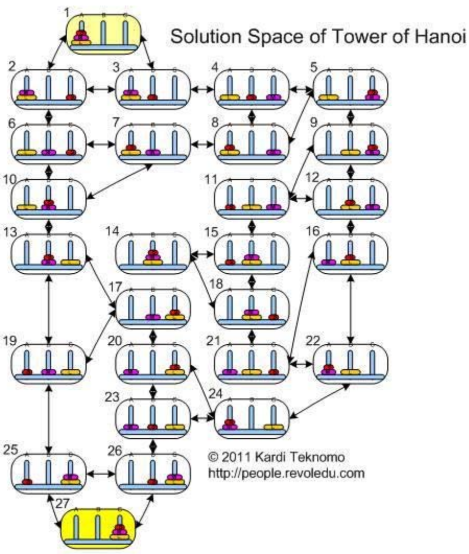


Figura 2.2: Torres de Hanoi (Kardi Teknomo, 2011)

nación de un significado personal al número irracional, tal como se verá en el ejemplo 8 (sección 3.2).

De igual manera, la solución obtenida por un modelo dinámico tampoco se comprueba fuera del contexto del instrumento. Por ello, la *ingeniería didáctica* y en el diseño de la tarea deben garantizar que el resultado obtenido por el estudiante con el instrumento GeoGebra valide efectivamente la solución.

Ejemplo 2 (Instrumentación) *Resuelve la ecuación* $4x^2 - 5x - 6 = 0$.

- *Resolución algebraica.* En un primer paso, se manipula la expresión algebraica, aun sin tener conocimiento de la existencia de la solución. El esquema de resolución dicta la aplicación de la fórmula de segundo grado, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 4 \cdot 6}}{8}$$

  Llegado este punto, se aplica un criterio de existencia: los valores del radicando suman un valor positivo (distinto de cero), luego existen dos soluciones. Si el estudiante sencillamente opera los valores y continúa con la resolución, este paso se ejecuta, pero queda implícito:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8}$$

  De esta expresión se deducen dos soluciones: $x_1 = 16/8 = 2$ y $x_2 = -6/8 = -3/4$, y su veracidad se valida en el enunciado inicial: $4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$, $4 \cdot (-3/4)^2 - 5 \cdot (-3/4) - 6 = 0$.

- *Resolución por modelo dinámico.* La ejecución del ejercicio comienza a partir de la representación gráfica de la parábola (figura 2.3). El criterio de existencia para la solución es ahora funcional y gráfico, en relación a los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas: es decir, si las ramas de la parábola son “hacia arriba” y la parábola tiene un valor negativo, entonces existen dos soluciones distintas. A partir de esta observación previa, la resolución algebraica se ejecuta en previsión de las herramientas disponibles y su utilidad. En este caso, la elección de una única herramienta soluciona el problema: *intersección de dos objetos*. Se pincha sobre la parábola y sobre el eje de abscisas. La primera coordenada de cada punto se debe relacionar con una solución de la ecuación: una es fácilmente reconocible ($B \sim x_1 = 2$), y la otra es estimada ($A \sim x_2 \approx -0,75$).

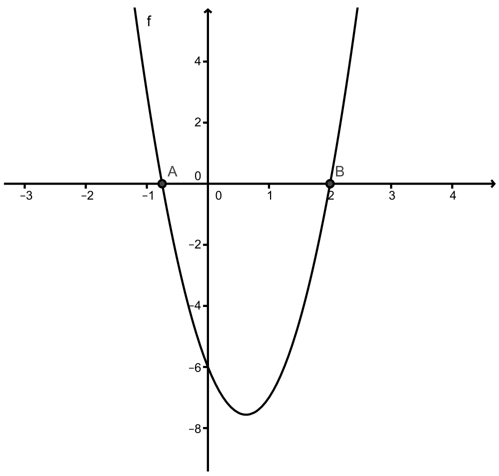


Figura 2.3: Resolución asistida por GeoGebra

En el ejemplo 2, la resolución algebraica teórica muestra la postergación del análisis previo. Atendiendo a un análisis sobre la existencia de soluciones, el estudiante debería comenzar por estudiar los signos en el determinante de la ecuación: $\Delta = b^2 - 4ac$. Sin embargo, el criterio de existencia se aplica “sobre la marcha”. A continuación, se aplica un procedimiento algebraico cristalizado. El esquema de acción consiste en la identificación del tipo de problema y la aplicación de una técnica determinada. La técnica se ha tenido que estudiar y practicar previamente.

La resolución por modelo dinámico enseña al estudiante un nuevo método de control para ser utilizado en el contexto algebraico. La existencia de dos soluciones queda justificada por las siguientes observaciones:

1. La función $y = 4x^2 - 5x - 6$ es una parábola cóncava.

2. El valor de la ordenada en el origen ($y|_{x=0} = -6$) es menor que 0.

Al trabajar sobre el modelo dinámico, es necesaria también una instrucción previa en el manejo de la herramienta y un esquema de acción. La identificación de la solución con la abscisa de un punto no es transparente para un estudiante que se inicia en el álgebra. La elección de la herramienta viene motivada por la identificación de la solución de la ecuación con la intersección de dos curvas en la vista gráfica. El campo numérico empleado pasa de ser racional en la resolución algebraica, a ser decimal en la resolución asistida por el modelo.

El esquema de la figura 2.1 no se ve claramente en el ejemplo 2, porque se requiere de una única herramienta para hallar la solución del problema con la asistencia del modelo dinámico. El ejemplo 3 muestra el proceso de instrumentación – instrumentalización del software de geometría dinámica en un problema de geometría del espacio, en el que la resolución por software dinámico requiere ahora de un buen número de pasos. Además, en los procedimientos algebraicos usuales se emplea la noción de lugar geométrico en la resolución de múltiples tareas geométricas. A diferencia de estos procedimientos cartesianos, las herramientas propias del software dinámico derivan la resolución de la tarea hacia la geometría de regla y compás.

Ejemplo 3 (Instrumentación) *Dados los planos* $\pi_1 : 2x + 2y - z - 1 = 0$ *y* $\pi_2 : x - 2y + 2z - 3 = 0$*, halla las ecuaciones de los planos cuyos puntos equidistan de* π_1 *y* π_2*.*

- *Resolución algebraica.* Llamamos $X(x, y, z)$ a un punto cualquiera del espacio. Planteamos $Distancia[X, \pi_1] = Distancia[X, \pi_2]$. Este planteamineto se traduce a:

  $$\frac{|2x + 2y - z - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|x - 2y + 2z - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}$$

  El anterior planteamiento de lugar geométrico se resuelve a partir de la siguiente ecuación:

  $$|2x + 2y - z - 1| = |x - 2y + 2z - 3|$$

  Es decir, las ecuaciones de los planos que se buscan son $x + 4y - 3z + 2 = 0$ y $3x + z - 4 = 0$. El lugar geométrico que se pide está formado, pues, por dos planos (perpendiculares entre sí, pues el producto escalar de los vectores normales es 0), que se cortan en una recta r que es la misma que la determinada por los planos π_1 y π_2.

- *Resolución por software dinámico.* Al introducir las expresiones de los planos π_1 y π_2 en la barra de entrada del software, se generan los planos a y b. La herramienta *intersección de dos objetos* permite representar la recta de corte, c. Se asigna un punto A a la recta c, por ejemplo, $A(1, 0, 1)$. El software permite ejecutar la tarea como si se tratara de un problema de regla y compás, pero en tres dimensiones. En efecto, existe una herramienta que construye una circunferencia con centro en A, perpendicular al eje c y de radio 1, d. Se calculan los puntos de intersección de la circunferencia con los planos a y b. A continuación, se trazan las mediatrices de los puntos de corte que pasan por A, e y g. Por último, los planos que se buscan son aquellos que contienen, por un lado, las rectas e y c, y por otro, las rectas g y c: la herramienta *plano a partir de dos rectas* se encarga de ello (figura 2.4).

  Los resultados obtenidos están expresados sobre el campo numérico decimal, pero se corresponden con los obtenidos en la *resolución algebraica*:

  $$-0,3x + 1,19y + 0,9z - 0,6 = 0 \sim x + 4y - 3z + 2 = 0$$
  $$-0,9x - 0,3z - 1,19 = 0 \sim 3x + z - 4 = 0$$

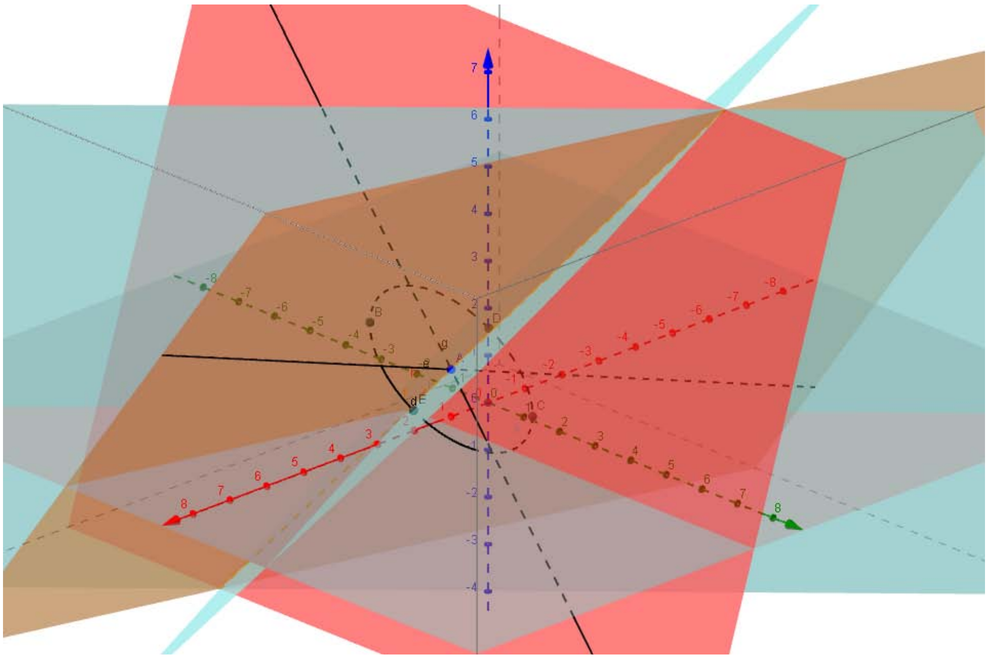


Figura 2.4: Instrumentación de GeoGebra

En el ejemplo 3, al igual que en el ejemplo 2, se omite en la resolución algebraica el análisis previo sobre la existencia de soluciones. Se aplica una técnica cristalizada y la existencia de soluciones queda justificada en el estudio de signos del valor absoluto.

El análisis algebraico previo se podría realizar con el estudio de los vectores directores de los planos π_1 y π_2. En efecto, los vectores directores $\vec{u_1}(2,2,-1)$ y $\vec{u_2}(1,-2,2)$ no son proporcionales. Se deduce de ello la posición relativa de los planos: estos son concurrentes y se cortan en una recta. La vista del plano perpendicular a la recta de corte permite visualizar la situación en un diagrama plano (figura 2.5).

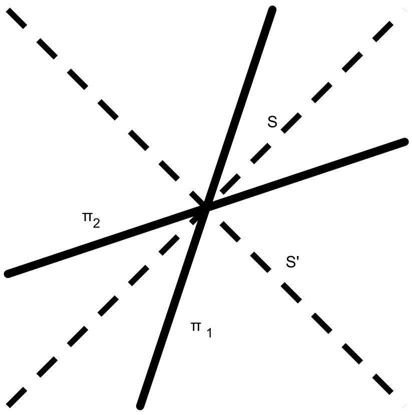


Figura 2.5: Análisis previo en resolución algebraica

El software dinámico permite la ilustración de los planos en la vista gráfica. El análisis previo es inmediato: los planos son concurrentes y existen dos soluciones. El objetivo de la resolución por software dinámico consiste ahora en obtener los elementos previos necesarios para ejecutar la orden de creación de estos planos-solución. A fin de cuentas, un plano se traza a partir de dos rectas, y una recta, a su vez, a partir de dos puntos. Los objetos previos creados (el punto A, y los puntos de corte de la circunferencia perpendicular al eje de los planos) responden a esta necesidad y se crean con la intención de concatenar el uso de las herramientas disponibles hasta llegar al último objeto.

Tal como se describe en la figura 2.1, la estrategia de ensayo y error generará, en un principio, un gran número de objetos (puntos de intersección; rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices) innecesarios desde un punto de vista óptimo (creación de un número "mínimo" de objetos).

El esquema de acción ahora descrito viene determinado por el diseño de las herramientas informáticas en la versión 5.0 de GeoGebra. En efecto, esta versión incluye herramientas 3D que permiten trabajar con regla y compás tanto la geometría plana como la geometría del espacio, y se han puesto a prueba en varios cursos de formación de profesorado de secundaria (Lasa, 2013).

En conclusión, la herramienta empleada influye en la resolución de la tarea, y su elección se debe realizar en términos de responsabilidad matemática, es decir, en relación a los medios de control que ésta pueda aportar. En efecto, la utilización del software facilita el control del proceso de resolución en las fases de análisis previo (existencia de la solución) y control del resultado (comprobación). De esta manera, la relación bilateral entre usuario y artefacto es compleja y el diseño de la actividad debe contemplar distintos momentos y diversidad de soportes. La descripción detallada de las configuraciones que forman los objetos matemáticos que se ponen en funcionamiento en las prácticas operativas y discursivas de resolución de una tarea matemática se describen en el apartado 3.

Asimismo, el empleo de un instrumento dinámico permite abordar la introducción de nociones matemáticas privilegiando el polo *intensivo* (general) ante el polo *extensivo* (particular). Pese a todo, el docente debe gestionar con precaución la visualización de objetos dinámicos, para no incurrir en un fenómeno de *ilusión de la transparencia.*

2.1.2. GeoGebra e *ilusión de la transparencia*

El uso de la pizarra tradicional en la ilustración de contenidos geométricos tiene la limitación obvia de no poder enseñar más que un ejemplo, o unos pocos, de representaciones geométricas en cada sesión. La literatura en didáctica de las matemáticas identifica un buen número de fenómenos que guardan relación con esta presentación ostensiva de objetos estereotipados. En particular, estos ejemplos pueden generar un fenómeno de *ilusión de la transparencia.*

> "Fenómeno por el cual mientras que el profesor interpreta un ejemplo en tanto que modelo o representante de una clase, el estudiante no ve más que dicho ejemplo. Este fenómeno es una muestra de la distancia en la dinámica de construcción y comunicación de las matemáticas en tanto conocimiento científico y en tanto objeto de enseñanza cristalizado y etiquetado en las instituciones escolares. Por ello, es indispensable la determinación de medios que permitan a estudiantes y profesores 'hablar un mismo idioma"'(Lasa y Wilhelmi, 2013, 31).

¿Cómo puede GeoGebra contribuir a la superación de este fenómeno? Es decir, ¿puede GeoGebra reducir la distancia entre la interpretación de un ejemplo como "objeto aislado" y como "representante de una clase"? (Lasa y Wilhelmi, 2013). Resulta esencial contestar a esta cuestión en cualquier proceso de generalización, en el cual participan objetos *intensivos* (generales) y *extensivos* (particulares).

> "Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que denominaremos *objeto intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o generalidad implicada (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011). Mediante el proceso inverso de particularización se obtienen objetos que denominamos *extensivos*, esto es, objetos particulares. El objeto intensivo puede ser visto como la regla que genera los elementos que componen una colección o conjunto, sea finito o infinito. Una colección finita simplemente enumerada no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Entonces el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*." (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

Por lo tanto, la complejidad de los procesos de generalización exige la toma de decisiones específicas que permitan a los estudiantes desarrollar sus conocimientos a partir de elementos particulares hasta la determinación de clases.

La determinación de clases, junto con la búsqueda de patrones y regularidades, es una actividad que guarda estrecha relación con los procesos de demostración matemática. De hecho, un instrumento dinámico permite el estudio de un gran número de casos particulares y la búsqueda de contraejemplos. Con ello, el instrumento se convierte en el gran aliado de la ilustración de propiedades y el razonamiento inductivo, como fase previa al razonamiento puramente deductivo.

2.2. Momentos de uso del instrumento GeoGebra

Tradicionalmente, el matemático profesional muestra resultados matemáticos enlazando entre sí conceptos previos y proposiciones ya demostradas para generar nuevo conocimiento. Los procesos deductivos guían esta forma de proceder y los resultados matemáticos se presentan en una secuencia ordenada y nítidamente estructurada.

Sin embargo, la actividad real de un matemático no sigue esa secuencia precisa. La intuición, la formulación de conjeturas y la búsqueda de contraejemplos son elementos que marcan las idas y venidas de una idea hasta la culminación del resultado en forma de teorema demostrado. Mason, Burton y Stacey (1988) describen la implementación educativa de este esquema de pensamiento en términos de *procesos*, *fases* y *estados*.

En particular, en la educación obligatoria, las argumentaciones inductivas restringen fuertemente los procesos de demostración matemática, y el software es útil precisamente a la hora de asistir esta argumentación inductiva.

Además, desde la década de 1970, se emplea el ordenador y su potencia computacional en el quehacer matemático y la demostración matemática entra en una nueva era, puesto que el ordenador realiza cálculos a una velocidad infinitamente mayor que es ser humano. La objeción que el matemático profesional puede hacer del empleo de máquinas en la demostración matemática, es la imposibilidad material de comprobar *paso-a-paso* la existencia de errores dentro del proceso llevado por la máquina. Desde luego, podrá analizar el programa informático utilizado en la resolución y quedar satisfecho con la ausencia de errores de programación en la secuencia de ejecución, pero el resultado no dejará de ser una "demostración empírica" de la proposición, semejante a un modelo matemático que describe un proceso físico.

El hito de la demostración informática es, sin duda, el Teorema de los cuatro colores (anexo C). El problema, que data del siglo XIX, no fue "demostrado" hasta 1976, cuando Haken y Appel[1] dieron con un argumento de resolución (Barnette, 1983). Esta demostración es todavía hoy fuente de controversia, dado que la última parte del argumento se realiza a partir de un estudio de la casuística por cálculos computacionales.

Por controvertida que pueda ser la utilización de software en la práctica profesional matemática, ésta es una realidad que justifica su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje. De hecho, tanto el currículo como las leyes de educación hacen referencia explícita al software de geometría dinámica y de otro tipo (MEC, 2006). Por ello, se debe estudiar la utilización del software de geometría dinámica en las distintas etapas educativas, en relación a las dimensiones cognitiva, epistémica y de enseñanza.

En la etapa de la Educación Secundaria, Lasa y Wilhemi (2013) describen tres momentos básicos en los que es pertinente el uso de GeoGebra dentro de la actividad matemática. Estos momentos son la *exploración*, la *ilustración* y la *demostración* de una propiedad matemática. En estos tres momentos la dualidad *ejemplar-clase* es esencial, puesto que los objetos geométricos se aceptan entonces como modelos de un tipo particular de situación.

GeoGebra se usa principalmente en la *ilustración* de propiedades a partir de un ejemplo dinámico. Los momentos de *exploración* y *demostración* exceden, en general, su uso principal.

2.2.1. Exploración

Las prácticas operativas y discursivas en la resolución de problemas matemáticos comienzan en un momento de exploración. El software de geometría dinámica permite la construcción de modelos de exploración para la resolución de ejercicios y problemas. Por ejemplo, se construye y estudia una figura geométrica para inferir alguna propiedad hasta el momento desconocida.

Se puede diseñar una figura geométrica que cumpla las restricciones de un enunciado o las condiciones iniciales de un problema. A continuación, el alumno manipula la construcción y deduce propiedades de la misma.

Estas construcciones raramente las hace el alumno. El docente las diseña con anterioridad a la sesión o las selecciona de un fondo de construcciones. El Proyecto Gauss[2] o GeoGebraTube[3] son dos ejemplos de dichos repositorios.

[1]Kenneth I. Appel fallece el 19 de abril de 2013, durante la redacción de este trabajo. En el Anexo C se incluye una síntesis de la demostración de Appel y Haken al Teorema de los Cuatro Colores, además de unas consideraciones adicionales sobre la controversia que genera la utilización del software en la práctica matemática escolar.

[2]Enlace al Proyecto Gauss:
`http://recursostic.educacion.es/gauss/web/`

[3]Enlace a GeoGebraTube:

A continuación se ejemplifica el uso de un modelo de exploración (Lasa y Wilhelmi, 2013). Se propone la resolución de un problema de geometría plana tomado del currículo de Educación Secundaria.

Ejemplo 4 (Momento de exploración) *Dado el triángulo $\widehat{ABC}$, demostrar que $\widehat{A}$ es un ángulo recto si y solo si la longitud de la mediana del vértice A mide la mitad de la longitud del segmento $\overline{BC}$.*

- *Descripción de la construcción.* La construcción representa los elementos del enunciado (el triángulo $\widehat{ABC}$, la mediana $\overline{AA'}$, el segmento que define el punto medio A' del lado a, y el ángulo $\widehat{A}$ que se quiere estudiar) y permite explorar la situación. Para cualquier disposición del triángulo con ángulo $\widehat{A}$ obtuso, la longitud de la mediana es menor que la mitad del segmento $\overline{BC}$, mientras que para cualquier disposición del triángulo con ángulo $\overline{A}$ acutángulo, la longitud de la mediana es mayor que la mitad del segmento $\overline{BC}$.

- *Utilidad.* La construcción ayuda a conjeturar. Además, permite pensar una vía para demostrar la propiedad, muestra los elementos que participan y algunos resultados que pueden servir al propósito de completar la prueba. La figura 2.6 muestra dos momentos de la exploración[4]. Una vez pasado el momento de exploración, la actividad revierte en encontrar un argumento lógico que complete la demostración.

- *Prueba formal.* Se supone, en primer lugar, que el ángulo $\widehat{A}$ es recto, y se deduce de ello $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$. Se divide el ángulo $\widehat{A}$ en dos ángulos que tengan las amplitudes de $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, respectivamente. De esta forma, se generan dos triángulos $\widehat{AA'C}$ y $\widehat{AA'B}$, ambos isósceles, puesto que tienen dos ángulos iguales cada uno. Entonces, los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{A'B}$ y $\overline{A'C}$ son de igual longitud, y se concluye que el punto A' es el punto medio del segmento $\overline{BC}$ (figura 2.7 (a)).

  Se puede invertir el argumento para obtener la implicación inversa. Se supone ahora que los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{A'B}$ y $\overline{A'C}$ son de igual longitud. Es decir, los triángulos $\widehat{AA'B}$ y $\widehat{AA'C}$ son isósceles. Por un lado, $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$, y por otro lado, $2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180°$, de lo que se deduce $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ (figura 2.7 (b)).

A diferencia de estos modelos de exploración, un modelo ilustrativo no está diseñado (en un principio) para que el estudiante manipule la construcción e indague de forma autónoma. En la siguiente sección se describen construcciones ilustrativas cuyo objetivo es el de asistir la labor docente mientras el alumno recibe una lección.

2.2.2. Ilustración

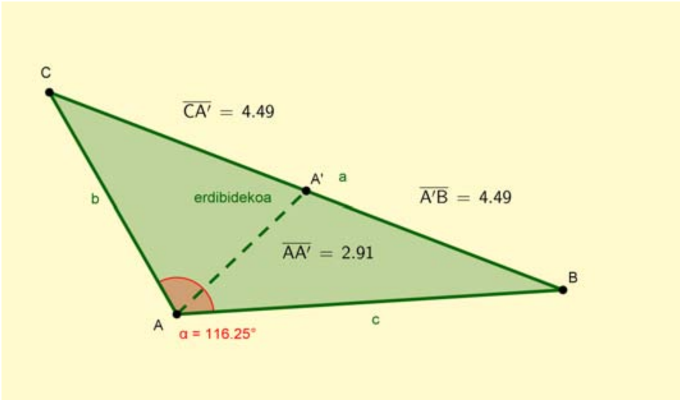
El uso principal que se hace del software de geometría dinámico, en particular, GeoGebra, consiste el mostrar ejemplos de propiedades a partir de casos concretos seleccionados *ad hoc*. De forma más general, el docente presenta al alumno una construcción que muestra la veracidad de una propiedad dada o de un cierto teorema.

Esta construcción sirve de modelo manipulativo y su uso se complementa con la pizarra digital. A diferencia de lo que sucede con la pizarra tradicional, en la cual solo

`www.geogebra.org`

[4]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640273`

a) Momento de exploración: ángulo $\hat{A}$ obtuso



b) Momento de exploración: ángulo $\hat{A}$ agudo

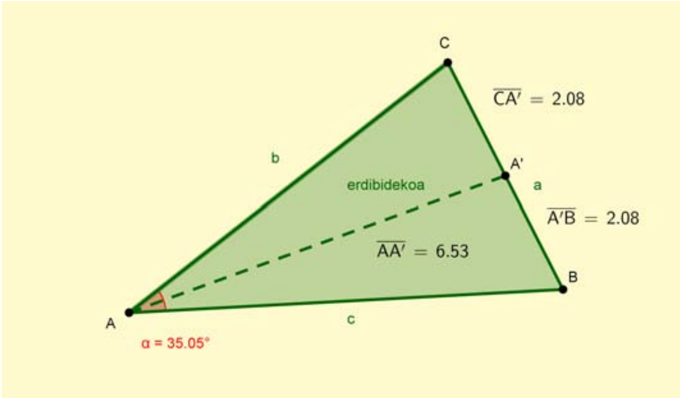
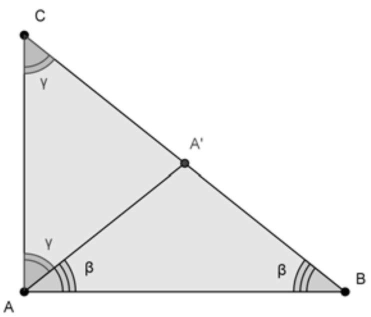
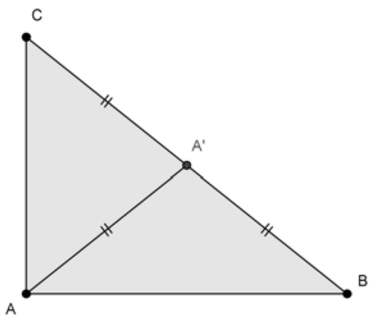


Figura 2.6: Momento de exploración (Lasa y Wilhelmi, 2013)



a) Primera implicación



b) Segunda implicación

Figura 2.7: Demostración de la propiedad se pueden representar unos pocos ejemplos de casos particulares, con la asistencia del software dinámico se puede generar toda una familia de objetos o una completa clase de equivalencia. Se pueden estudiar, por ejemplo, las propiedades de una clase de triángulos, a partir de un modelo dinámico que genera toda la familia.

Este uso principal deberá motivar nuevos ejemplos que mejoren la confianza de los estudiantes en la formulación de conjeturas. Hölz (2001), citado por Burke y Kennedy (2011), constata que en un entorno de geometría dinámica, los estudiantes que observan la veracidad de una conjetura sienten la necesidad de conocer el porqué de la misma. Después de todo, la ilustración de una propiedad no es más que una "imagen" de la misma.

En Educación Secundaria, las restricciones materiales y temporales, junto con las restricciones cognitivas de los estudiantes, pueden traer consigo la decisión didáctica de ignorar la demostración formal de una propiedad y limitar la actividad a una presentación ilustrativa de la misma. De todas formas, existen diferencias entre la construcción ilustrativa y la demostración formal de esas mismas propiedades.

A continuación se ejemplifica el uso de un modelo de ilustración (Lasa y Wilhelmi, 2013). Se ilustra una propiedad geométrica clásica tomada del currículo de Educación Secundaria, el *puente del ganso*.

Ejemplo 5 (Momento de ilustración) *Dado un triángulo* $\widehat{ABC}$*, si la longitud de un lado es menor que la longitud de otro lado, entonces, los ángulos opuestos a esos lados satisfacen la misma desigualdad.*

- *Descripción de la construcción.* La construcción del modelo dinámico explica efectivamente la propiedad descrita. Se visualizan los elementos del enunciado y se clasifican por colores, continuidad de las líneas o marcas en las representaciones de los segmentos y ángulos. Además, aparecen en pantalla cuadros de texto en los que un cambio en la desigualdad de dos ángulos del triángulo provoca, a su vez, un cambio en la desigualdad que cumplen dos longitudes de los lados del triángulo (figura 2.8)[5].

- *Utilidad.* GeoGebra muestra un modelo "numérico" que explica la propiedad y permite el estudio de la casuística y la tipología del triángulo (acutángulo, recto, obtusángulo; equilátero, isósceles, escaleno) sin condicionantes de tiempo o espacio. La propiedad se revela cierta para cualquier tipo de triángulo, y la ausencia de contraejemplos valida el resultado inductivo. Sin embargo, el diseño de la construcción no aporta información útil que justifique la observación, y los elementos en pantalla no ofrecen ninguna pista que permita idear una línea de ataque para probar la veracidad de la afirmación.

- *Prueba formal.* Se quieren comparar los lados a y b del triángulo junto con los respectivos ángulos opuestos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$. En caso de que el triángulo sea equilátero o isósceles con $a = b$, entonces, claramente $\widehat{A} = \widehat{B}$, y viceversa. Por lo tanto, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que el triángulo es isósceles o escaleno con $a < b$. A su vez, se puede reducir el estudio de casos a aquellos que tengan ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ agudos: en efecto, si el triángulo es recto en $\widehat{B}$, a es un cateto del triángulo mientras que b es la hipotenusa, y claramente, $\widehat{A} < \widehat{B}$; además, si

[5] El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640321`

a) Momento de ilustración: $a > b$ y $\hat{A} > \hat{B}$

b) Momento de ilustración: $a < b$ y $\hat{A} < \hat{B}$

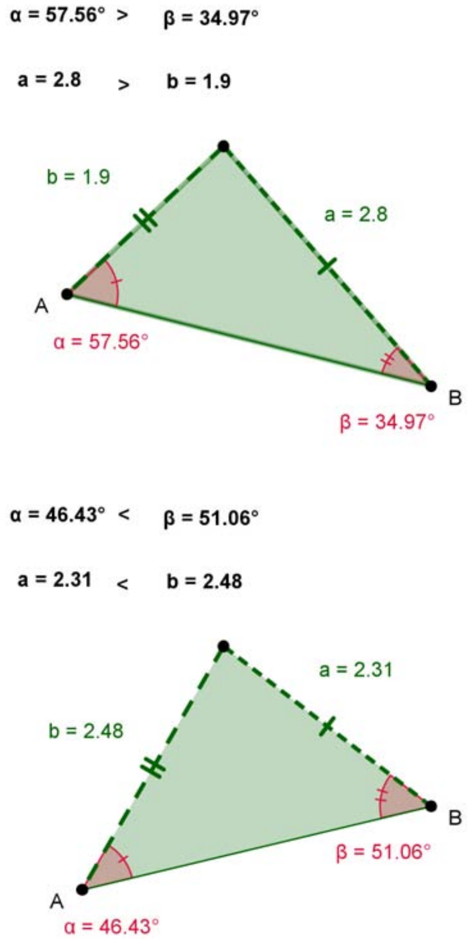


Figura 2.8: Momento de ilustración (Lasa y Wilhelmi, 2013)

el ángulo $\widehat{B}$ es obtuso, necesariamente $\widehat{A} < \widehat{B}$. En el caso objeto de estudio, se dibuja el arco de radio a con centro el vértice C, que interseca b en el punto A'. El triángulo interno $\widehat{A'BC}$ es isósceles, con ángulo iguales A' y B' (el vértice B del triángulo original se corresponde con el vértice B' del triángulo interior). Puesto que $\widehat{B} > \widehat{B'}$, $\widehat{B'} = \widehat{A'}$ y $\widehat{A'} > \widehat{A}$, se obtiene $\widehat{A} < \widehat{B}$ (figura 2.9).

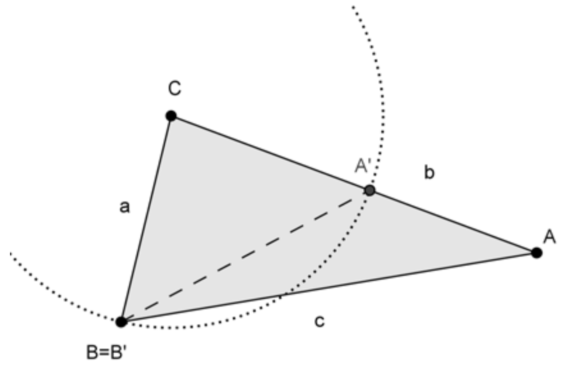


Figura 2.9: Prueba formal: puente del ganso

En resumen, el modelo ilustrativo explica de forma efectiva la propiedad pero no la demuestra, y el proceso deductivo que justifica la propiedad difiere sustancialmente de aquello que se visualiza en pantalla. En la siguiente sección se introduce un modelo demostrativo y se compara uno ilustrativo.

2.2.3. Demostración

El docente tradicional no requiere de más herramientas que una tiza y una pizarra para demostrar, paso a paso, una propiedad geométrica[6]. Sin embargo, la introducción paulatina de pizarras digitales en el aula afecta de forma directa a esta tradición. Asimismo, el software de geometría dinámica complementa el uso de la pizarra digital e incrementa su funcionalidad. Estos nuevos instrumentos promueven el uso de construcciones ilustrativas (la ausencia de contraejemplos y el estudio de un gran número de casos numéricos justifican inductivamente la propiedad) y las demostraciones deductivas se dejan de lado, por ser éstas más costosas. En la sección 2.2.2 se ha argumentado que el modelo ilustrativo no se tiene porqué diseñar en función de los argumentos matemáticos que participan en la demostración. Algunas veces, se tratará de una decisión de enseñanza; otras veces, la divergencia entre las construcciones ilustrativa y demostrativa se puede deber a las restricciones informáticas del instrumento.

Es responsabilidad del docente la selección de las situaciones de aprendizaje. A la hora de realizar esta selección, se deberían utilizar, en una primera fase, construcciones de exploración o ilustración que permitan el desarrollo de argumentos inductivos. Esta fase se caracteriza por la búsqueda de contraejemplos y por un análisis rápido de una gran variedad de casos particulares. De esta manera, la ausencia de contraejemplos permite conjeturar la validez del resultado. A continuación, se debe añadir una segunda

[6]Se trata de la versión docente del dicho: "a diferencia de lo que sucede en otras disciplinas, en matemáticas, además de lápiz y un papel, se necesita una papelera".

fase a la actividad: el desarrollo deductivo de un argumento matemático que dé validez formal a dicho resultado.

La progresión *inductivo-deductivo* tiene la ventaja de motivar la génesis matemática. Esto es así porque los estudiantes prefieren las pruebas pragmáticas a las demostraciones intelectuales (Ballacheff, 1987).

Sin embargo, aquellos estudiantes que asisten la resolución de tareas matemáticas con la asistencia de un modelo dinámico se conforman con una prueba empírica. Esto es así, puesto que el modelo dinámico permite construir una argumentación inductiva sobre la ausencia de contraejemplos y el estudio de un número "suficiente" de casos. Por ello, los estudiantes carecen de experiencia en el desarrollo de pruebas formales y no sienten la necesidad de justificar el proceso que han seguido (Dreyfus, 1999).

GeoGebra[7] presenta un entorno en el que es fácil encontrar contraejemplos. Como consecuencia, la noción de *axioma* se extiende y pocas proposiciones requieren de una prueba formal. Ante la ausencia de contraejemplos en la manipulación del modelo dinámico, la propiedad se considera verdadera (De Villiers, 2004).

En este contexto, diversos autores presentan una serie de clasificaciones para los roles que juega la demostración. Algunos de estos roles son (Dreyfus, 1999):

- La *explicación*. Oración aclarativa que hace inteligible una situación.
- La *argumentación verbal*. Proceso de razonamiento con intención de convencer.
- La *demostración formal*. Demostración matemática.

Otros propósitos de la demostración no se trabajan en el contexto educativo. Este es el caso del rol de la demostración como *sistematización a posteriori*, en el cual se organizan resultados no relaciones como un todo unificado (Villiers, 2004).

A continuación se comparan los usos de modelos ilustrativos y demostrativos, a partir de las construcciones geométricas del incentro y del baricentro (Lasa y Wilhelmi, 2013).

Ejemplo 6 (Momento de demostración) *Las tres bisectrices de un triángulo intersecan en un solo punto llamado incentro.*

- *Descripción de la construcción.* La construcción ilustrativa (figura 2.10) muestra elementos que participan en la demostración de la propiedad[8]. Sin embargo, se añaden otros objetos que son conclusión de la misma. Con el apoyo de cuadros de texto y casillas de control se muestran o se ocultan, según se requiera, las bisectrices y sus intersecciones, la circunferencia inscrita, el radio de la circunferencia hacia cualquier lado del triángulo y tres triángulos inscritos definidos a partir de esos radios/alturas.

  La construcción demostrativa (figura 2.11) solo muestra aquellos elementos que son necesarios para la prueba lógica: dos bisectrices, a partir de las cuales se concluye que la tercera bisectriz corta necesariamente las dos anteriores el mismo punto de corte[9].

[7]Este trabajo se centra en el software GeoGebra, pero existen entornos similares, tales como Sketchpad:
`http://www.keycurriculum.com/`

[8]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640433`

[9]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640529`

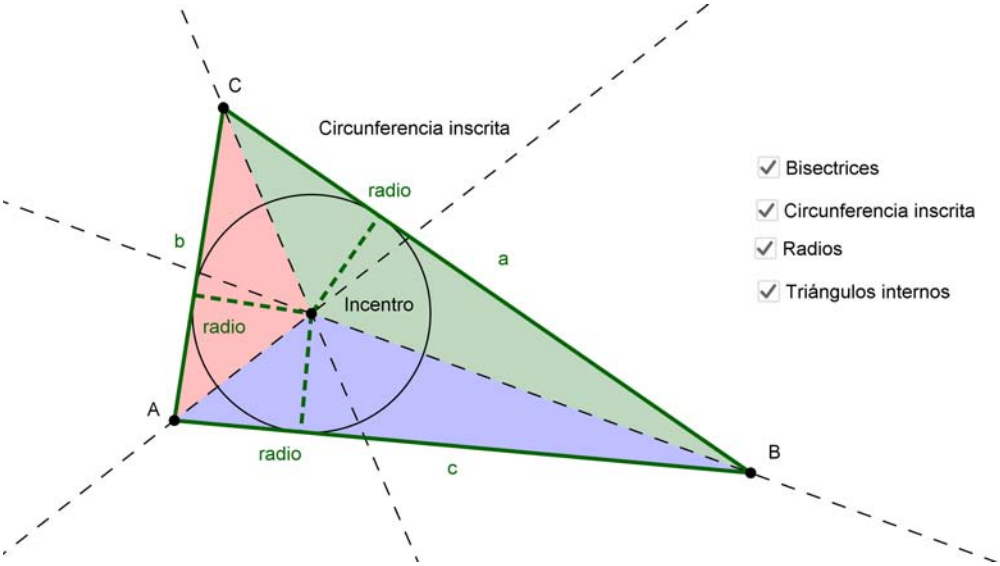


Figura 2.10: Momento de ilustración: incentro (Lasa y Wilhelmi, 2013)

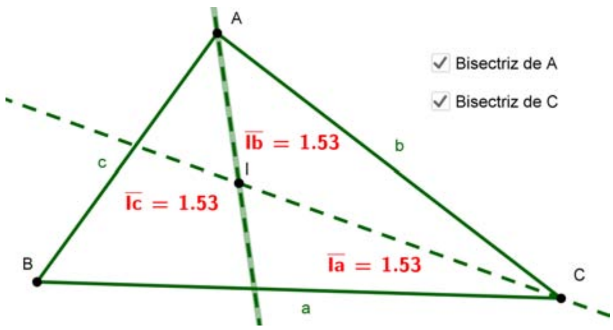


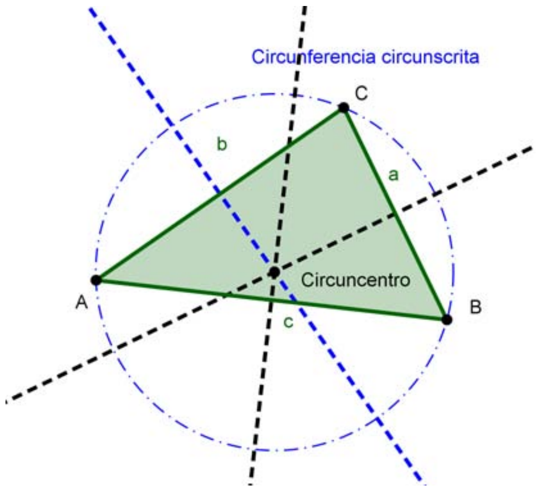
Figura 2.11: Momento de demostración: incentro (Lasa y Wilhelmi, 2013)

- *Utilidad.* La construcción ilustrativa sintetiza varios contenidos relativos al incentro y muestra también la relación entre esos elementos. Sin embargo, la construcción ilustrativa no va de la mano de la prueba formal. La austera construcción demostrativa permite avanzar en el razonamiento deductivo formal.

- *Prueba formal.* La bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ equidista de los lados b y c; a su vez, la bisectriz del ángulo C equidista de los lados a y b; por ello, el punto I de intersección de los segmentos, equidista necesariamente de los lados a y c, y está sobre la bisectriz del ángulo $\widehat{B}$.

Sin entrar en detalles, la situación es similar cuando se comparan las construcciones ilustrativa y demostrativa asociadas al estudio del circuncentro y la circunferencia circunscrita (figura 2.12).

a) Momento de ilustración



b) Momento de demostración

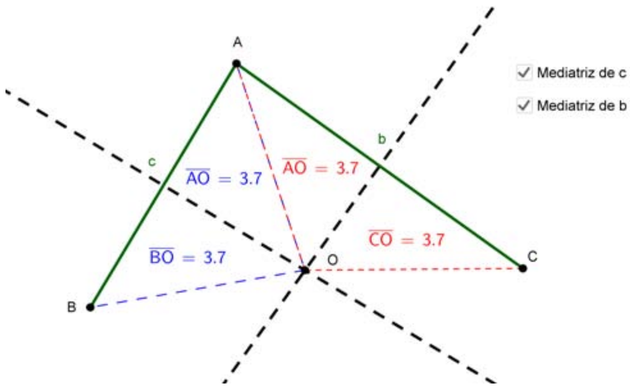


Figura 2.12: Momentos de ilustración y demostración: circuncentro (Lasa y Wilhelmi, 2013)

El último ejemplo de esta sección trata la intersección de las medianas y el baricentro (Lasa y Wilhelmi, 2013).

Ejemplo 7 (Momento de demostración) *Las tres medianas de un triángulo intersecan en un solo punto, llamado baricentro.*

- *Descripción de la construcción.* La construcción ilustrativa[10] (figura 2.13) solamente indica la intersección de las medianas y la proporción de los segmentos formados, es decir, el baricentro corta las medianas en proporción 1 : 2. De hecho, el paso de marcar la mediana de acuerdo a dicha proporción pertenece a la demostración y es uno de los argumentos necesarios para concluir que las tres medianas tienen en efecto un solo punto de corte; no es una conclusión que emerja de la propiedad, tal como se podría pensar cuando se observa la construcción ilustrativa. Este hecho es otra muestra de las posibles divergencias que pueden existir entre modelos ilustrativos y demostrativos. La construcción demostrativa[11] es fundamentalmente distinta (figura 2.14). En esta segunda construcción, un deslizador muestra, en una secuencia de siete pasos, el argumento que justifica la existencia de un solo punto de corte para las tres medianas.

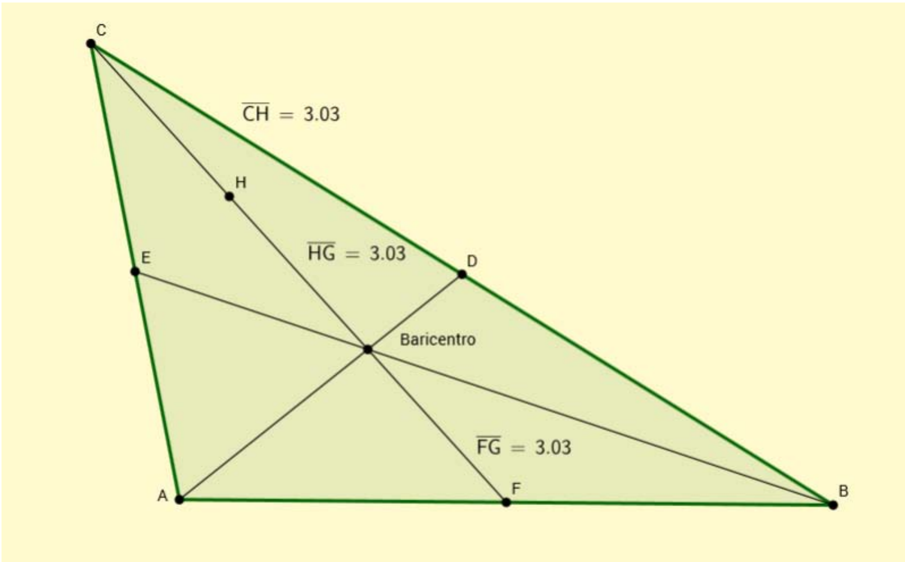


Figura 2.13: Momento de ilustración: baricentro (Lasa y Wilhelmi, 2013)

- *Utilidad.* El estudio de las propiedades del baricentro de un triángulo es un caso extremo de la divergencia que puede existir entre la ilustración y la demostración. De hecho, en la Educación Secundaria, se explica que el baricentro es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo, pero no se demuestra la veracidad de esta afirmación. Se trata de otro ejemplo de una demostración formal que se puede dejar de lado por ser excesivamente costosa.

- *Prueba formal.* Sea A' el punto medio del segmento a; se traza el segmento $\overline{AA'}$ y se divide en tres partes iguales, $\overline{AE} = \overline{EG} = \overline{GA'}$; sea F el punto medio del segmento $\overline{BG}$; por Tales, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{AB} = 2\overline{EF}$; se concluye que $EFA'B'$ es un paralelogramo; G es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo, y por ello, el punto medio de los segmentos $\overline{FB'}$ y $\overline{EA'}$; entonces, G es en efecto el punto de intersección de las medianas.

[10]El modelo dinámico se puede consultar en:
http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640571

[11]El modelo dinámico se puede consultar en:
http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#material/1640621

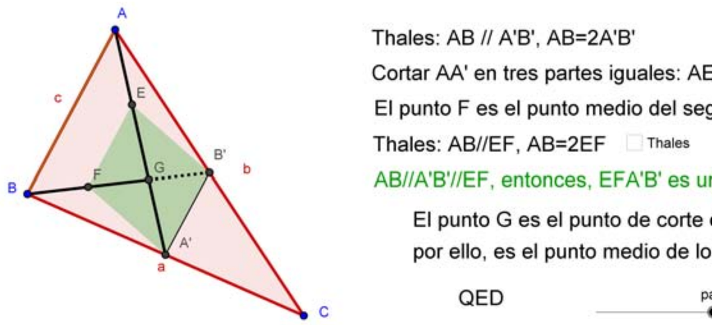


Figura 2.14: Momento de demostración: baricentro (Lasa y Wilhelmi, 2013)

2.2.4. Implicaciones para la enseñanza

La comprensión del enunciado por parte del estudiante es fundamental en la resolución de un problema. Los dibujos y los ideogramas forman parte de los elementos lingüísticos utilizados en la práctica operativa y discursiva.

Se ha visto que, en ocasiones, no hay una relación estricta entre el dibujo propuesto en un libro de texto y la representación a escala de ese mismo dibujo con un software de geometría dinámica.

> "Esto genera la necesidad de estrategias específicas de actuación que ayuden a distinguir el *dibujo* (tamaños relativos y concretos) del *ideograma* (idea representada a través del dibujo), sin suponer que dibujo e ideograma son la misma cosa. Es ilusorio pensar que es natural que los estudiantes vean el ideograma en el dibujo e interpreten el ideograma en términos del dibujo o la cosa representada". (Sáenz de Cabezón, Lasa y Wilhelmi, 2009, p. 22)

GeoGebra se puede utilizar, pues, como una herramienta de dibujo (se crean objetos particulares o *extensivos* con intención de mostrar un ejemplo) o como un modelo dinámico (se diseña una construcción dinámica *intensiva* que cumple las restricciones de un enunciado). A su vez, en el diseño de un modelo dinámico, se deben distinguir los momentos de *ilustración* y *demostración*. Obviar estos aspectos supone, una vez más, un fenómeno de *ilusión de la transparencia*.

El docente tradicional dibuja un diagrama en la pizarra ordinaria e indica sobre él los pasos de un razonamiento lógico. Pero con la introducción del software de geometría dinámica, la propiedad se presenta a través de una construcción dinámica en pantalla o pizarra digital.

La construcción ilustrativa se diseña con ánimo de mostrar un resultado bajo premisas inductivas y puede omitir pasos del razonamiento lógico que justifica la propiedad. Este hecho puede ser intencionado o puede ser consecuencia de las propias herramientas del artefacto informático. En cualquier caso, la propiedad "se ve", y se corre el riesgo de dar por terminada la actividad matemática en este preciso momento de ilustración. El modelo dinámico pasa entonces de ser un medio a ser un objetivo en sí mismo, es decir, se incurre en un *deslizamiento metacognitivo* (Brousseau, 1997): GeoGebra se convierte en fin último del proceso de enseñanza.

La Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (sección 3.1) contiene elementos que permiten encajar los momentos de exploración, ilustración y demostración dentro del diseño de una *situación didáctica*. Por un lado, estos momentos se pueden integrar en la *situación adidáctica*, es decir: se emplea el modelo dinámico con el propósito de explorar los detalles de un problema (fase de *acción*), comunicar un resultado (fase de *formulación*) o demostrar una conjetura (fase de *validación*). Por otro lado, una vez se han cumplido los objetivos de la situación adidáctica, los momentos de ilustración y demostración pueden ser también efectivos en la *institucionalización* del conocimiento.

En todas estas fases y momentos, un modelo de exploración permite explorar los detalles del problema, a través de procesos inductivos y el análisis de casos particulares. Una vez se abre una vía de razonamiento para atacar la demostración del problema, esta se realiza primero a partir del razonamiento inductivo, para, a continuación, completar la demostración formal de la propiedad a partir de argumentos lógicos. La dualidad *elemento-clase* determina el desarrollo de todas estas fases.

2.2.5. Del soporte al medio material

Duval (1995) alerta de como la capacidad de modificación de registros semióticos mejora la comprensión del conocimiento matemático. Así, el soporte material condiciona el significado del objeto matemático, porque dentro del sistema didáctico es parte sustancial del medio antagonista que aporta a la actividad del sujeto retroacciones inteligibles (*feedback*). El soporte se convierte entonces en el *medio material*. Así, se debe progresar en la descripción de las relaciones entre los distintos medios, tales como el papel y el ordenador.

Bremigan (2005) destaca la importancia de que los alumnos realicen sus propias modificaciones en los diagramas de los enunciados presentados sobre papel. Aquellos alumnos que realizan anotaciones y modificaciones sobre el papel, mejoran su rendimiento en la resolución de cuestionarios en análisis matemático. Este mayor rendimiento estaría relacionado con la capacidad espacial del alumno y las conclusiones a las que llega mientras realiza dichas modificaciones.

A pesar de que un *applet* tiene la ventaja de poder manipular un modelo diseñado ex profeso para la resolución de un cierto problema, no se puede dejar de lado la necesidad de que el alumno escriba en papel o realice sus propios diagramas, independientemente de lo que esté sucediendo en la pantalla del ordenador. Este aspecto es central en relación a las hipótesis de trabajo (sección 1.3).

El cambio habido durante la última década, al pasar de la pizarra clásica al uso de ordenadores, pizarras digitales e instrumentos miniaturizados de pantalla táctil, es un campo abierto al estudio que claramente afecta a la concepción que tenemos de la transmisión del conocimiento matemático en la escuela.

No se trata sólo de un cambio instrumental. En la enseñanza matemática clásica se ha enfatizado sobremanera el aspecto procedimental, de tal forma que los estudiantes pueden llevar a cabo tareas sin saber muy bien el porqué de lo que están haciendo, o sin estar seguros de la validez del resultado.

Los programadores, matemáticos y docentes involucrados en el desarrollo de GeoGebra resaltan de forma especial su potencialidad en un entorno de aprendizaje basado en modelos. Defienden con ello que a medida que los estudiantes resuelven problemas a través de modelos dinámicos, construyen también una heurística (Polya, 1945) para la resolución de problemas (Bu y Schoen, 2011). El aprendizaje por modelos permitiría a los estudiantes tener diversas representaciones del problema (lenguaje, simbología algebraica, representación gráfica), que facilita la adquisición de nociones matemáticas. En la sección 3 se enlazan estas cuestiones con las configuraciones de procesos.

Estos desarrolladores encuentran una base didáctica que justifica y abala el diseño informático del *software* dentro de la Teoría de la educación matemática realista (Freudenthal, 1978) y el Aprendizaje a través de modelos (Jong y Joolingen, 2008; Milrad et al., 2003), e incorporan además desarrollos más recientes en el uso de tecnología en la educación matemática, tales como la Teoría de la génesis instrumental.

La utilización de software y la clasificación de los distintos significados de la demostración (sección 2.2) guardan relación con una cuestión clave en el aula de matemáticas: la evaluación. En efecto, la institución educativa obliga a evaluar las heurísticas o los esquemas de acción instrumentada que desarrollan los estudiantes. En general, el docente carece de criterios normativos para decidir cuándo un argumento del estudiante es lo suficientemente minucioso para ser considerado una demostración.

Hace unos años, la situación económica y social del centro educativo y de la familia tenían una influencia directa en el rendimiento de los estudiantes en actividades con ordenador, y este hecho tenía su reflejo en las valoraciones obtenidas por los mismos (Russell, Goldberg y O'Connor, 2003). Indudablemente, en la actualidad, la democratización de la tecnología y el uso extendido de pizarras digitales en el aula pueden diluir esta hipótesis.

Sin embargo, es un error centrar en el medio informático la evaluación de las producciones matemáticas realizadas por los estudiantes. Bremigan (2005) constata que en la resolución de tareas de análisis matemático, resulta beneficiosa la utilización de una representación del problema en soporte físico, en el cual los estudiantes puedan realizar sus propias modificaciones de los diagramas. Por ejemplo, el estudiante puede realizar una modificación del diagrama, dibujando una figura geométrica interna al modelo dinámico sobre papel, y este nuevo elemento introducido por el estudiante puede resultar clave para la correcta resolución del problema.

Incluso, con una maestría suficiente en el uso de las herramientas informáticas, el estudiante también podría realizar esta modificación sobre el propio modelo dinámico (es decir, dentro de la fase de *construcción del modelo*; sección 1.2, p. 15). Sin embargo, en relación al deslizamiento metacognitivo, esta modificación es, la mayoría de las veces, excesivamente costosa para el estudiante, siempre que un simple dibujo a lápiz sobre el diagrama sea suficiente para dar con una solución al problema.

Por ello, se deben integrar en el medio de evaluación distintos soportes, tales como el ordenador (modelo dinámico), el papel (modificación de diagramas y esquemas) y el medio oral (explicación y justificación de los procedimientos utilizados) (Lasa y Wilhelmi, 2013).

Capítulo 3

Modelo didáctico

Breve resumen

El programa epistemológico parte de la problematización del saber matemático, con el fin último de diseñar procesos de estudio idóneos desde el punto de vista epistemológico, cognitivo y de enseñanza. La pertinencia de este programa, compartida, entre otras perspectivas, por la TSDM y el EOS, reside en su mayor poder heurístico, esto es, la capacidad para identificar y describir fenómenos sobre el funcionamiento y control del sistema didáctico. En este capítulo se describe el modelo didáctico de referencia, que articula la TSDM y el EOS.

Laburbilduma

Matematikaren irakaskuntzan, programa epistemologikoak abiapuntu hartzen du jakintza matematikoaren problema-izaera ikaskuntza eta irakaskuntza egoerak diseinatu eta aztertzeko, optimoak izan daitezen ikaskuntzaren, epistemologiaren eta kognizioaren ikuspuntutik. MEDT edo IOS ikerketa-programa honen parte dira, eta haren indar heuristikoa handitzen dute. Honela, sistema didaktikoaren funtzionamendua eta kontrola deskribatzen duten fenomenoak aztertzeko gaitasuna handitzen dute. Kapitulu honetan, MEDT eta IOS artikulatzen dituen erreferentziazko eredu didaktikoa deskribatzen da.

Short summary

The epistemological program designs and analyzes learning situations based on the problematization of mathematical knowledge. TDSM and OSA are theories within this research programs, and increase its heuristic power. Thus, they give tools that increase the capacity to analyze phenomena that describe and control the didactic system. In this chapter, we describe a didactical model which integrates TDSM and OSA.

La actividad matemática que se reproduce en el aula tiene un componente claro de descubrimiento y *reinvención*. El docente ofrece retos y desafíos, junto con guías e indicaciones, que estimulan al estudiante para que éste afronte un objetivo de difícil ejecución. El resultado obtenido no es "nuevo" dentro de la estructura del saber, pero lo es en el contexto del aula: el saber matemático no es transparente y se debe problematizar.

> "Hoy en día, el método de la reinvención parece generalmente aceptado, al menos como principio, aunque fácilmente se puede entender por qué no está muy extendido en la práctica" (Freudenthal, 1973, p. 120)

El *modelo sistémico* integra en uno de sus polos el saber objeto de estudio. Es decir, el *saber* (la matemática), el sujeto *discente* (la cognición) y el sujeto *docente* (lo instruccional) forman un *triángulo didáctico* cuyos vértices forman polos complementarios que modelizan un sistema complejo no reducible a ninguno de sus tres vértices. El didacta se interesa en las interacciones que se dan entre el docente, el estudiante y el saber matemático. La introducción de un modelo tripolar que considera el saber matemático como objeto de estudio (figura 3.1), aumenta el "poder heurístico" de los programas de investigación, plantea nuevos tipos de problemas y genera la aparición de teorías auxiliares. Además, posibilita la explicación de hechos recurrentes observados y permite anticipar fenómenos nuevos. El docente debe estar familiarizado con estas herramientas para diseñar la actividad matemática en base a la *reinvención*.

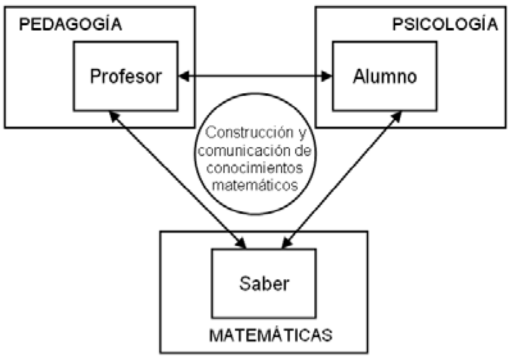


Figura 3.1: Modelo sistémico y problematización del saber (Lacasta y Wilhelmi, 2012).

Previamente, con la introducción del modelo cognitivo, se supera el sistema de enseñanza tradicional basado en la transmisión, y que considera al alumno como una "caja vacía" que es preciso llenar de conocimientos. La consideración del alumno como polo activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ayuda a superar la mera transmisión de conocimientos y la predisposición a una enseñanza dogmática. Además, el diseño curricular en base al modelo cognitivo introduce elementos de psicología genética, cognitiva y del aprendizaje, caracterizando los alumnos según su nivel de desarrollo y posibilitando técnicas de intervención, motivación, tratamiento de la diversidad, etc.

La problematización expresa del saber matemático se concretó en el *programa epistemológico* (Gascón, 1998), y tanto la Teoría de situaciones didácticas en matemáticas (TSDM) (`http://guy-brousseau.com/`) como el Enfoque del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (`http://www.ugr.es/~jgodino/`) forman parte de este programa.

El punto de partida en la TSDM (Brousseau, 1997) es la *situación*, entendida como una escena en la que el triángulo didáctico interacciona, posibilitando el desarrollo de la acción matemática. La *situación* es un modo de estructurar el *medio didáctico*, para que éste forme un nuevo polo que complementa el *modelo sistémico* (figura 3.2). Las aristas del tetraedro representan las interacciones entre los polos del modelo. El profesor diseña la situación para que ésta contextualice un problema matemático, y se lo presenta al alumno. A su vez, el alumno pone en funcionamiento su relación con el saber y se enfrenta a la situación; recibe a su vez retroalimentación tanto de los estados de la situación como por las intervenciones didácticas del profesor. De esta forma, la situación caracteriza los objetos matemáticos que participan en su desarrollo y les da sentido, dentro del *medio didáctico*.

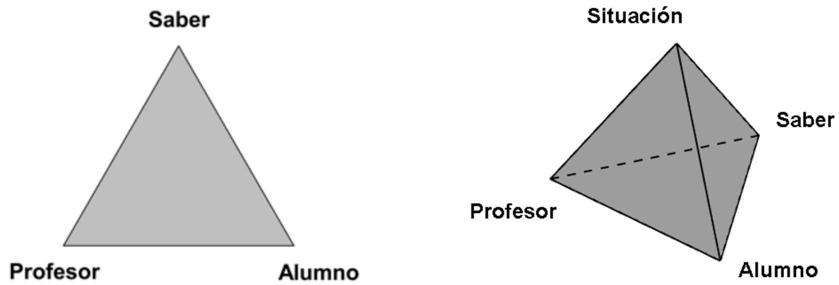


Figura 3.2: Evolución del modelo sistémico.

La distinción entre situaciones *didácticas* y *adidácticas* sirve para modelizar el escenario sistémico de enseñanza y aprendizaje, en términos de *acción*, *formulación* y *validación*. El docente selecciona las *variables didácticas* que determinan la situación en función de las características del *alumno objetivo* y de las restricciones materiales y temporales. La *situación adidáctica* permite dotar de *significado personal* las nociones y procesos que toman parte en la actividad matemática. El significado personal guarda relación con los conocimientos que el estudiante ha movilizado en la resolución de la tarea, es decir, aquellos que ha puesto en práctica de manera funcional.

Una vez finalizada la situación, la labor del docente consiste en identificar aquellos conocimientos mostrados que la institución educativa quiere promover y recordar, y que pasarán a la *memoria didáctica* del aula (Centeno, 1995). La *institucionalización* es el proceso por el cual el docente identifica y selecciona los conocimientos que tienen importancia cultural dentro de la institución educativa. A pesar de no formar parte del diseño de una situación, Brousseau (2007) reconoce que la institucionalización es un elemento clave en el diseño de la actividad matemática, en cuanto permite asumir un objeto de enseñanza, identificarlo y asegurar su reutilización.

> "Nos tomó un tiempo darnos cuenta de que los docentes realmente estaban obligados a [...] dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo sucedido y lo que estaba vinculado al conocimiento en cuestión." (Brousseau, 2007, 27-28)

Con estas herramientas se modeliza el escenario sistémico y se analizan los procesos matemáticos que se pretenden *reproducir* en el aula. A fin de cuentas, las características de los grupos de estudiantes pueden cambiar de un curso a otro, y se debe garantizar que la situación reproduce los procesos objeto de estudio. En particular, la gestión de la situación es especialmente sensible a los *fenómenos didácticos*.

La inadecuada gestión del medio, además de provocar fenómenos didácticos, puede generar *obstáculos didácticos*. A diferencia de los *obstáculos epistemológicos*, los cuales son inevitables desde el punto de vista de la adquisición de conocimiento científico, el origen de un obstáculo didáctico se debe buscar dentro de la propia organización del medio, como por ejemplo, en la selección de un instrumento o en la determinación de una secuencia de aprendizaje.

Los obstáculos son de la misma naturaleza que el saber, y ocupan el lugar de un conocimiento que es útil en la resolución de un problema concreto. El campo de éxito del obstáculo es restringido y no basta con enseñar al sujeto un conocimiento correcto para que éste lo sustituya. De hecho, las nociones de *error* y *obstáculo* están relacionadas y ocupan un lugar dominante en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Wilhelmi, 2009).

> "Desde el punto de vista matemático, tan importante es determinar si una propiedad es verdadera como si es falsa: lo esencial es la certidumbre sobre el valor de verdad (verdadero o falso) de una proposición, no cuál es este valor. Por ello, más allá de la semántica de los términos en el lenguaje natural, es preciso señalar la estrecha relación entre dichos términos en los procesos de estudio de las matemáticas. Tanto a una proposición verdadera como a una proposición falsa, un individuo puede atribuirles un valor de verdad (verdadero-falso) acorde o no a su naturaleza, según si las justificaciones estén o no correctamente establecidas con base en los axiomas de la teoría y en las proposiciones previamente demostradas. Aún más, atribuido el valor de verdad, un individuo puede asignarle un valor de certidumbre (certeza-duda) acorde o no a la naturaleza de la prueba y, por lo tanto, aceptar un error como acierto o viceversa." (Wilhelmi, 2009, 6)

En este sentido, un *obstáculo* se expresa como un *error* con una presencia longitudinal en la actividad matemática y que cometen grupos equiparables de sujetos de forma no aislada o puntual (figura 3.3).

Error	{ Anecdótico			
	No anecdótico	{ No reproducible		
		Reproducible	{ No recurrente	
			Recurrente	→ *obstáculo*
Fracaso				

Figura 3.3: Tipos de errores (Wilhelmi, 2009).

Más adelante, se concretan las nociones teóricas básicas de *significado* y *función semiótica* (Godino y Batanero, 1994). Estas nociones marcan el punto de partida del EOS y se ven completadas con la tipología de *objetos y procesos matemáticos*, junto con su funcionamiento en los procesos de estudio matemáticos según unas características de carácter dual (Godino y Font, 2007). En el EOS, las prácticas operativas y discursivas están en el centro de la actividad matemática. Las matemáticas se entienden como un quehacer humano (en coincidencia con Freudenthal), una respuesta dada a una situación problemática. Así, la noción básica de *práctica matemática* se estudia desde un punto de vista ontológico y semiótico.

> "Toda actuación o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, 334).

A partir de una concepción constructivista piagetiana, las conceptualizaciones matemáticas que dan respuesta a dichas situaciones problemáticas son producto de las acciones de las personas, de forma colectiva en un contexto sociocultural, o de forma individual y psicológica. A pesar de que la TSDM no ha desarrollado explícitamente los mecanismos transpositivos del saber, de manera informal, ha tomado prestado y ha asumido las nociones y los instrumentos de la Teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1992). Tanto en el EOS como en la TSDM, la actividad matemática generada puede ser *institucional* o *personal* (figura 3.4).

TSDM		EOS
Conocimiento	$\leftrightarrow$	Significado personal
Saber	$\leftrightarrow$	Significado institucional

Figura 3.4: Conocimiento y saber matemático.

El análisis cognitivo de ésta práctica matemática se realiza a través de los *sistemas de prácticas* manifestadas ante una clase de situaciones-problemas (Godino, 2002). A su vez, los elementos que emergen de éstos sistemas de prácticas y que dan respuesta a las situaciones problemáticas conforman los *objetos matemáticos* de estudio (figura 3.5).

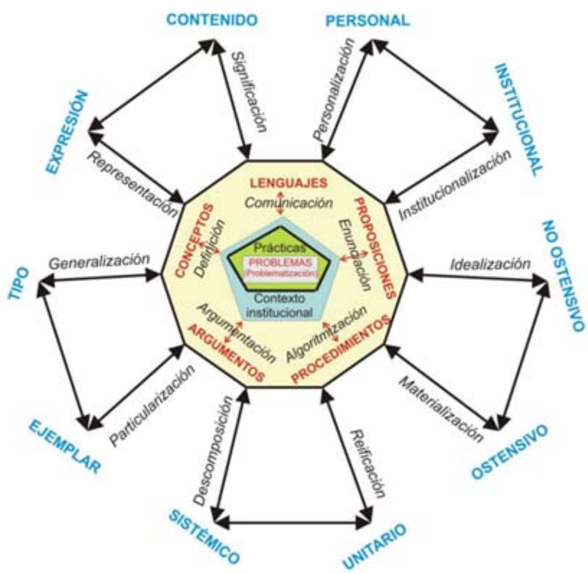


Figura 3.5: Configuración de objetos y procesos (Font et al, 2013).

Los objetos matemáticos no se reducen a los clásicos elementos conceptuales y procedimentales. A partir del modelo epistémico que se propone en el EOS, se analizan las configuraciones que forman las relaciones entre los objetos matemáticos y los procesos de los cuales emergen, tales como la representación, argumentación y generalización, entre otros, sin olvidar el contexto de la situación que motiva la actividad matemática. El lenguaje utilizado en la representación de estos objetos, es a su vez un instrumento de trabajo matemático gracias al cual se describen las situaciones problemáticas y sus soluciones.

No obstante, se deja para más adelante (sección 3.7) la descripción detallada de la ontología de los objetos matemáticos primarios. En primer lugar, se estudia el lugar que ocupa el instrumento, como soporte material y como práctica operativa y discursiva, dentro de su realidad contextual y en relación al medio didáctico.

La actividad matemática se concreta, según el EOS, en la manipulación de objetos matemáticos que tienen múltiples representaciones (Font, Godino, D'Amore, 2007; Font, 2007). Además, estos objetos tienen una realidad contextual, que se concreta en su funcionamiento atendiendo a distintas dualidades (figura 3.6):

- Uso de *extensivos* (particulares) / *intensivos* (genéricos).
- Significado *personal* (cognitivo) / *institucional* (epistemológico).
- Carácter *ostensivo* (material) / no *ostensivo* (ideal).
- *Unitario / sistémico.*
- *Contenido / expresión.*

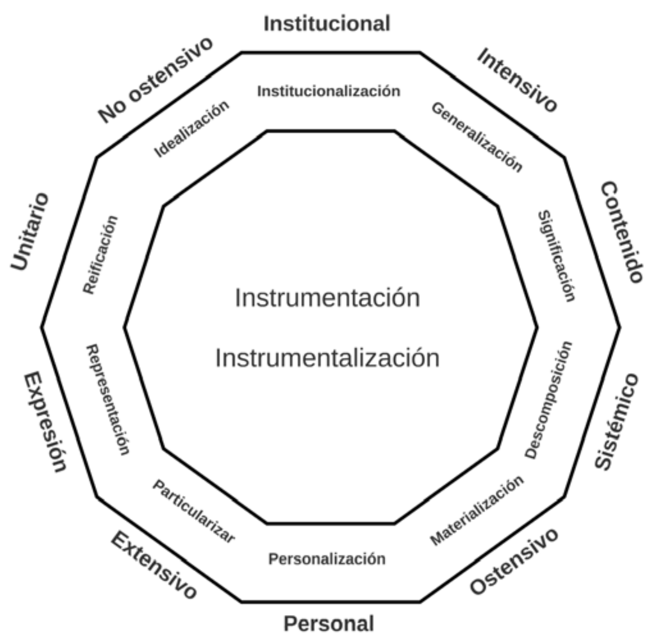


Figura 3.6: El instrumento como práctica dentro del EOS.

Por ello, dentro del modelo ontosemiótico, tanto la instrumentación como la instrumentalización suponen una práctica operativa y discursiva determinada, motivada por una familia de situaciones, y que requiere un lenguaje propio, definiciones, enunciados y argumentos.

En primer lugar, se concreta el lugar que ocupa el instrumento, como soporte material, dentro del medio material y de la situación adidáctica, tal como la describe la TSDM (3.1). A continuación, se procede a la presentación de las dualidades contextuales que concretan el funcionamiento de la instrumentación y la instrumentalización (secciones 3.2, 3.4, 3.6, 3.5, 3.3). Una vez expuestas las dualidades contextuales que concretan el funcionamiento de la práctica operativa y discursiva, se procede a la descripción detallada de la ontología del EOS, es decir, de las características de los objetos primarios que la componen (sección 3.7). Estos objetos primarios se utilizarán, a su vez, en el desarrollo del análisis didáctico y para profundizar en la idoneidad didáctica, prestando especial atención a las idoneidades mediacional y ecológica (sección 3.8). Termina el capítulo con las secciones dedicadas a los obstáculos y a los fenómenos didácticos (secciones 3.9 y 3.10, respectivamente).

3.1. El medio material y la situación adidáctica

El capítulo 2 describe en detalle la noción de *instrumento*, y cómo las teorías de la instrumentación consideran clave ésta noción en el desarrollo de tareas matemáticas (Rabardel, 2002). Cuando el docente selecciona los instrumentos que utilizará en la resolución de una tarea, éstos pasan a formar parte del *medio* (Brousseau, 2007) en el que se desarrolla la actividad matemática. Ésta actividad incluye actividad física variada, comunicación verbal o gestual, y representación iconográfica o escrita.

> "Cuando el profesor prepara su clase, organiza un medio –que incluye las reglas que definen el éxito y el fracaso– llamado *medio material* (aun si no hay objetos concretos). Debe considerar también las interacciones de un sujeto con este medio. A este sujeto simbólico lo llamamos *actor objetivo*. Este par medio-actor constituye la *situación objetiva* que se propone efectivamente al alumno y con la que debe interactuar." (Brousseau, 2007, p. 54)

El medio didáctico se organiza en función de la etapa educativa. Es decir, el desarrollo ontogénico y cognitivo del estudiante determina la actividad matemática susceptible de ser implementada en cada etapa. Así, por ejemplo, en la Educación Primaria, los recursos materiales y la actividad mediante lápiz y papel determinan casi por completo la evolución de los aprendizajes de los niños y el software cumple en la actualidad, en general, una función marginal en el sistema didáctico (Lasa y Wilhelmi, 2013a; Lasa, Sáenz de Cabezón y Wilhelmi, 2009).

Los soportes "lápiz y papel" y "software dinámico" cumplen la función de instrumento en el desarrollo de demostraciones matemáticas y en la resolución de problemas. El particular, los momentos de *exploración*, *ilustración* y *demostración*, que clasifican la actividad matemática cuando ésta se asiste con un modelo dinámico, guardan relación con fases de una *situación adidáctica* (tabla 3.1) y con la posterior *institucionalización.*

Una lectura "horizontal" de la tabla permite una descripción de los momentos de la actividad matemática, en los que es pertinente el uso de un modelo dinámico, en términos de las fases de la situación adidáctica.

En el momento inicial de *exploración* de propiedades, el estudiante selecciona y pone en funcionamiento su estrategia de base, es decir, un procedimiento asimilado que domina y en el cual tiene confianza para el desempeño de la tarea. Las acciones que el

Tabla 3.1: Fases de la situación adidáctica

Momentos de la actividad matemática con GGB	Fases de la situación adidáctica		
	Acción	Formulación	Validación
Exploración	Estrategia de base	Conceptos y teoremas en acto	Pruebas empíricas (en muchos casos por ensayo y error)
Ilustración	Consignas y devolución. Eventualmente, microinstitucionalizaciones en situaciones didácticas con un componente adidáctico esencial (Bloch, 1996)	Formulación explícita de propiedades particulares de casos concretos	Pruebas parciales para comprobar (convencerse a uno mismo) y para convencer (al igual)
Demostración	Interpretación de la respuesta del medio antagonista (feedback)	Formulación explícita de teoremas	Prueba para comprobar (converncerse a uno mismo) y prueba para convencer (al igual)

estudiante realiza en su intento por resolver la tarea caracterizan esta fase. Atendiendo a la estructura del medio didáctico, la acción se apoya en la transcripción de información entre soportes, que facilita la formulación de conceptos y permite la emergencia de teoremas en acto. Por medio de pruebas empíricas, el estudiante valida la pertinencia de las estrategias que ha puesto en funcionamiento. En muchos casos, la validación se da por ensayo y error, y en el contexto del momento de exploración, el modelo dinámico facilita la búsqueda de contraejemplos que permitan validar las decisiones del estudiante.

En el momento de *ilustración*, la ausencia reiterada de contraejemplos permite construir una argumentación inductiva, extraída de determinadas observaciones y de experiencias particulares, que permiten explicar la propiedad. A su vez, el momento de ilustración puede consistir en una acción instruccional dirigida por el docente en respuesta a necesidades puntuales provocadas por condicionantes del medio. En este sentido, el docente ofrece las consignas oportunas y entra en el juego dialéctico de la devolución. Se formulan explícitamente propiedades particulares de casos concretos. La validación de las propiedades deja de ser empírica y se pueden presentar pruebas parciales para comprobar la propiedad en casos particulares. Estas pruebas cumplen una doble función: en primer lugar, el estudiante debe adquirir la confianza suficiente en su procedimiento y se debe convencer a sí mismo; en segundo lugar, la formulación de la prueba debe también permitir convencer a otro estudiante en igualdad de condiciones.

En el momento de *demostración*, se deben completar las pruebas parciales que el estudiante da a las propiedades matemáticas en estudio. Los argumentos formulados evolucionan desde el estudio de casos particulares a la formulación explícita de teoremas y resultados. A la hora de manipular un modelo dinámico, la argumentación inductiva propia del modelo ilustrativo debe dar paso a una argumentación deductiva, que caracteriza el modelo demostrativo. Es decir, se obtienen consecuencias de principios y proposiciones previas, para construir una demostración. Los argumentos formales y la creación de un modelo demostrativo caracterizan este momento.

Asimismo, la misma tabla 3.1 permite una lectura "vertical", tomando como eje las propias fases de la situación adidáctica. A continuación se describen las características de dichas fases y la relación que guardan con el empleo de modelos dinámicos.

La *fase de acción* se caracteriza por la toma de decisiones del estudiante. La interacción del estudiante con la situación adidáctica le permite recibir información del medio al mismo tiempo que actúa sobre el, modificando los estados del medio. Gracias a ese *feedback*, el estudiante crea un modelo implícito de la situación, incluso antes de ser capaz de formularlo.

> "Para un sujeto, *actuar* consiste en elegir directamente los estados del *medio* antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (retroalimentación), a anticipar sus propias acciones futuras." (Brousseau, 2007, p. 24)

De esta forma, el estudiante selecciona su estrategia de base y la pone a prueba en la resolución del problema. A su vez, la cambia o modifica en función de las consignas y de las devoluciones que recibe del juego dialéctico que mantiene con el docente. La utilización del software en esta fase requiere de un momento previo de instrucción, la mayoría de las veces vinculado a la ilustración de algún contenido o de alguna técnica específica. Asimismo, la manipulación de un modelo demostrativo por parte del estudiante tendría el propósito de interpretar la respuesta que recibe del medio antagonista.

En este sentido, el estudiante aprende adaptando sus conocimientos previos en función de la resolución de la tarea, mientras que la enseñanza se gestiona a partir de la *devolución*. Es decir, los actores del sistema didáctico se comunican de forma que el docente “devuelve” la situación al estudiante, junto con las explicaciones o las consignas auxiliares oportunas. Este momento de devolución es especialmente sensible a los fenómenos didácticos (sección 3.10), con los que hay que tener especial cuidado a la hora de gestionar el desarrollo de la actividad en el aula.

En resumen, el estudiante actúa sobre el modelo dinámico que simula la situación problemática de forma autónoma y modifica los estados del medio/modelo dinámico. La modificación de los estados del medio se da en función de las intervenciones del docente (consignas y devolución) y del modelo dinámico: el modelo forma parte del medio didáctico y devuelve de inmediato al estudiante un impulso a cualquiera de sus acciones. El estudiante actúa de acuerdo con las estrategias de base que conoce, y su interacción con el modelo dinámico le debe permitir obtener respuestas parciales a la situación problemática.

En la *fase de formulación*, el estudiante establece de forma progresiva un lenguaje o código, un repertorio de vocabulario y sintaxis, que explica sus acciones y el modelo implícito de acción. Esta fase se caracteriza por la formulación conceptos y teoremas en acto, que posteriormente tendrán que ser validadas. La transcripción de información entre soportes motiva, facilita y característica de cierta forma la fase de formulación. La formulación permite explicitar parcialmente las propiedades de estudio en casos particulares, hasta llegar a formular explícitamente el teorema o el resultado. De esta forma, se explicita el esquema implícito de acción, con la consecutiva manipulación de modelos ilustrativos y demostrativos.

> “La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El medio que exigirá al sujeto usar formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información.” (Brousseau, 2007, p. 25)

Para forzar la comunicación entre los actores, la situación didáctica se debe diseñar de forma que los actores no puedan tener éxito en la resolución, a no ser que la formulación sea efectiva. La ausencia es necesaria, puesto que el aprendizaje requiere de la formulación del conocimiento puesto en juego en la resolución de la tarea.

Por regla general, un modelo dinámico es eficaz en la *fase de acción*, pero no permite por sí solo la formulación eficaz del conocimiento. Precisamente, la utilización de varios soportes materiales y la transcripción de información de un soporte a otro son interesantes porque provocan la formulación del conocimiento matemático.

En las primeras etapas educativas, el docente diseña la situación didáctica para forzar la comunicación entre los estudiantes. Es decir, los estudiantes no podrán tener éxito en la tarea a no ser que la formulación del conocimiento sea efectiva. Por regla general, un modelo dinámico es eficaz en la *fase de acción*, pero no permite por sí solo la formulación eficaz del conocimiento. Es por ello necesaria la utilización de varios soportes materiales y la transcripción de información de un soporte a otro para provocar la requerida formulación del conocimiento matemático.

A lo largo de la *fase de validación*, se construye gradualmente la demostración de un teorema, es decir, la validación del resultado matemático se desarrolla de forma progresiva a lo largo de toda la actividad matemática. En el momento inicial de exploración, la búsqueda de contraejemplos y la formulación de teoremas en acto permiten construir pruebas empíricas, por ensayo y error. Más adelante, la devolución y la formulación de propiedades particulares, junto con la manipulación de un modelo ilustrativo, facilitan la construcción de pruebas parciales y el estudiante debe ser capaz de organizar un discurso para convencer a un compañero, o sí mismo. No obstante, la propiedad no queda completamente justificada hasta que se es capaz de formular una argumentación deductiva. De esta manera, se confirma la veracidad de lo que uno dice dentro de un sistema lógico. La regla implícita descubierta por el estudiante en la resolución del problema, requiere de argumentos intelectuales, sintácticos y pragmáticos para evolucionar en una demostración.

> “[...] La modelización en términos de situación permite distinguir un nuevo tipo de formulación: el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión. Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas.” (Brousseau, 2007, p. 26)

Una situación adidáctica se considera fundamental cuando ésta caracteriza un contenido matemático, siendo la aplicación de este conocimiento suficiente y necesario en la resolución de la tarea. El propósito de la situación fundamental tiene significado para el estudiante incluso fuera del contexto matemático, y por ello, su utilización se da en mayor grado entre los maestros e investigadores en didáctica de las matemáticas en las etapas de Educación Infantil y Primaria.

A diferencia de lo que sucede en la Educación Infantil y Primaria, en la Educación Secundaria las situaciones fundamentales desaparecen casi por completo de las propuestas curriculares. Los libros de texto guardan vestigios estructuralistas, y no se motivan los contenidos matemáticos, que tienen en la etapa un fuerte componente algebraico. La falta de motivación de los contenidos algebraicos y su uso meramente procedimental guardan relación, asimismo, con las creencias del docente, es decir: los contenidos matemáticos de la etapa tienen una función propedéutica, y el estudio anticipado y aislado de un contenido matemático beneficia, supuetamente y a futuro, al estudiante (Lasa, 2011). Estas creencias evitan la presentación de situaciones fundamentales a los estudiantes en esta etapa.

En este sentido, el modo de gestionar la actividad matemática en el aula cambia radicalmente de una etapa a la siguiente: el *contrato didáctico* (Brousseau, 1997) que rige la relación entre el docente y el estudiante en el contexto educativo pasa a ser *fuertemente didáctico* (Brousseau, 2007). El contrato didáctico define cuáles son las funciones, obligaciones y los derechos de cada uno de los actores del medio didáctico. A medida que avanza el conocimiento del estudiante y las tareas propuestas aumentan su dificultad y nivel de exigencia, el contrato pierde vigencia y se rompe, siendo necesaria la negociación de un nuevo contrato que se adecue al contexto modificado. El contrato vigente regula, también, la instrucción previa que el estudiante recibe en el manejo y el control de los instrumentos. El docente transmite al estudiante los objetivos de la tarea a resolver y las reglas de juego, que los recibe a través del código lingüístico.

3.2. Institucionalización del conocimiento

En la TSDM existe una distinción clara entre *conocimiento* y *saber*. Es decir, se distingue entre el conocimiento mostrado por un estudiante en la resolución de una tarea y el saber matemático de referencia. En este sentido, la situación adidáctica, con sus fases de *acción*, *formulación* y *validación*, permite al estudiante poner en funcionamiento sus conocimientos matemáticos. A su vez, es responsabilidad del docente la institucionalización del conocimiento mostrado por el estudiante.

De forma similar, el EOS considera que un objeto matemático concreto tiene un significado dual. Por un lado, estaría el *significado personal*, es decir, aquel que atribuye el estudiante al objeto en la ejecución de una práctica matemática. Por otro lado, ese mismo objeto matemático tiene un *significado institucional*, es decir, el significado que le atribuye la institución educativa, o el propio docente como representante de la misma.

Por ejemplo, en las etapas de Educación Infantil y Primaria, en tareas de recuento, la materialización resulta esencial, ya que los estudiantes cuentan los objetos particulares o sus representaciones ostensivas. Asignan de esta forma significado personal a la combinatoria a partir de tareas de recuento sistemático, donde la eficacia supone la aplicación correcta de principios básicos del conteo (ningún elemento sin contar, ningún elemento se cuenta por más de una vez) (Lasa y Wilhelmi, 2015b). Más adelante, en la Educación Secundaria, la institucionalización contempla la clasificación de situaciones-tipo y el uso de fórmulas algebraicas para el recuento de casos.

En el caso de la combinatoria, la progresión regular se concreta en el paso de la utilización de técnicas explícitas (contar todos los casos) a técnicas implícitas (uso de reglas, cálculos y argumentos). Así, la práctica matemática desemboca en fórmulas y algoritmos. Es entonces cuando la institucionalización de las nociones de *permutación*, *variación* y *combinación*, como instrumentos eficaces de recuento de clases de problemas, es pertinente (Wilhelmi, 2004). Los significados personales sirven de base para la motivación de los significados institucionales, que en muchos casos involucran la determinación de fórmulas que modelizan clases de situaciones.

Por un lado, la respuesta de un estudiante a una prueba de evaluación o la resolución de una tarea, son manifestaciones de un sujeto individual y muestran información sobre sus conocimientos. Por otro lado, los documentos curriculares, los libros de texto o las explicaciones de un profesor ante su clase, ponen en juego objetos institucionales en un contexto normativo o convencional dentro de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Estos dos enfoques guardan una estrecha relación y convergen hacia una misma idea fundamental: la situación adidáctica es el contexto en el que el estudiante asigna un significado personal al objeto matemático; a su vez, el docente es responsable de comparar este significado con el institucional, para comprobar que ha existido en efecto un aprendizaje (figura 3.4).

Volviendo la atención al uso del software dinámico, el estudiante pone en funcionamiento sus conocimientos matemáticos en el momento de exploración, a la vez que asigna un significado personal a los objetos matemáticos que participan en la práctica operativa. En cambio, la institucionalización del conocimiento estaría a caballo entre los momentos de ilustración y demostración. Es en este momento cuando el docente realiza una puesta en común de los conocimientos que se han generado en el aula y los pone en relación con el saber.

Un modelo dinámico ilustrativo juega, además, un papel relevante dentro de la categoría de los contratos *débilmente didácticos* (Brousseau, 2007). En efecto, la “presentación organizada del conjunto de conocimientos a transmitir, posee unas propiedades didácticas intrínsecas". Así, el modelo ilustrativo sirve al propósito de la institucionalización del conocimiento, y ahorra tiempo y esfuerzo a los actores del sistema didáctico. Lasa y Wilhelmi (2015a) ejemplifican este extremo, y sintetizan en una construcción ilustrativa el desarrollo de una histórica conferencia científica de Richard Feynman[1] sobre el movimiento de los planetas.

Dicho esto, hay que aclarar que todo lo expuesto en relación a los contratos débilmente didácticos no tiene validez dentro de la estructura de la situación adidáctica. Los significados institucionales, que en muchos casos involucran la determinación de fórmulas que modelizan clases de situaciones, se deben motivar a partir de los significados personales de los estudiantes. Lasa y Wilhelmi (2015b) ejemplifican este extremo en la resolución de tareas combinatorias.

> "En efecto, una institucionalización precoz del álgebra de la combinatoria, es decir, el uso de intensivos (algoritmos para el recuento de casos ideales) en ausencia de un significado personal asignado al proceso de recuento, parecen ser los responsables de este fracaso. Se deben potenciar, por tanto, las estrategias de resolución de problemas, la enumeración sistemática y el uso de diagramas de árbol, sin el corsé de las fórmulas combinatorias, y libre de ataduras formalistas."

De esta forma, en la enseñanza de un tópico matemático se debe atender a diversos aspectos, tales como el análisis de su campo de uso, la valoración de la eficacia y coste de sus técnicas asociadas, la adquisición de estrategias de control, en muchos casos basadas en métodos aritméticos, y, por último, la articulación de los distintos campos numéricos.

En este sentido, la *transposición didáctica* (Chevallard, 2004) se puede describir como el camino que recorre el saber matemático desde la civilización hasta el sujeto, pasando por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la disciplina, el dominio, el sector y el tema; y viceversa.

Cada instrumento requiere una adecuación en términos de transposición didáctica. Por ejemplo, el uso de calculadoras ha motivado en las últimas décadas la necesidad de fundamentar su uso como herramienta de control en cálculos que involucren el campo numérico irracional.

Un profesor de secundaria pocas veces demostrará a sus estudiantes que $\sqrt{5} - \sqrt{1+\sqrt{3}}$ es irracional. Sin embargo, el estudiante asigna al número irracional un significado personal, que le permite realizar operaciones y controlar las estrategias y técnicas asociadas a su uso. La comprensión aritmética del número decimal le lleva, en muchos

[1] Richard Feynman (1918–1988) fue un físico célebre, entre otras muchas cosas, por su habilidad para dar conferencias científicas. Tenía la capacidad de adecuar sus explicaciones al nivel de maestría en física que tuvieran los participantes de la sala. A su vez, tenía fama de mostrar un gran entusiasmo en sus explicaciones. En el Instituto Caltech donde ejercía Feynman (ahí daba sus clases e investigaba), sus compañeros tenían la sana costumbre de grabar en magnetofón estas conferencias, para poder así transcribirlas en papel y poder utilizarlas a modo de texto, casi literal, con sus estudiantes de grado en física. Como apoyo a la grabación, se tomaban también fotografías de la pizarra donde Feynman desarrollaba sus diagramas. Sin embargo, las fotografías analógicas no siempre se han conservado correctamente. Tampoco se han conseguido guardar los apuntes y las anotaciones de las conferencias que él hacía a mano antes de cada sesión. Lasa y Wilhelmi reconstruyen las figuras de la conferencia, en respueta a la pregunta: ¿y si Feynman hubiera tenido a mano software de geometría dinámica para desarrollar sus conferencias? El modelo dinámico se puede consuntar en:
`http://tube.geogebra.org/book/title/id/nSrLvW0u#chapter/56323`

casos, a manipular el número irracional como un número "con una cantidad arbitraria de cifras decimales no periódicas". En este contexto, la utilización del instrumento "calculadora" le permite manipular números con una precisión, en el peor de los casos, de 10^{-8}.

Ejemplo 8 (Significado personal del número irracional) *Comprueba que* $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *(Chevallard, 2004).*

El estudiante se basa en un análisis por inducción empírica. Es decir, para comprobar la igualdad, realiza una comprobación numérica con su calculadora. El estudiante tiene la certeza de que su técnica funciona, porque funciona en todos los casos escolares (Lakatos, 1983):

$$\sqrt{18} \quad = \quad 4,24264068\ldots \quad 3\sqrt{2} \quad = \quad 4,24264068\ldots$$

La epistemología espontánea del docente puede llevarle a desacreditar el proceder del estudiante ("por muchos decimales que calcules, nunca podrás tener la certeza de que los números son iguales, ¡los irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas!"). Sin embargo, la siguiente micro-ingeniería didáctica, permite justificar el proceder del estudiante y reconocerlo como un conocimiento matemático válido para el control de sus decisiones.

Sean $a\sqrt{b}$ y $\sqrt{c}$ con $a, b, c \in \mathbb{N}$. Suponemos ambos números tienen el mismo desarrollo decimal en n dígitos. Por lo tanto, $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$. Supongamos, además, $a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^n$. Se multiplican ambas expresiones para obtener:

$$(a\sqrt{b} - \sqrt{c})(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) < 10^{-n}10^n \leq 1$$

Es decir, $|a^2b - c| < 1$. Como $|a^2b - c|$ es entero y estrictamente menor que 1, necesariamente debe ser 0 ($|a^2b - c| = 0$). Así, dado que $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$(a\sqrt{b} - \sqrt{c})(a\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 0 \iff a\sqrt{b} - \sqrt{c} = 0$$

De lo que se deduce, $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$.

En el ejemplo anterior, $3\sqrt{2} + \sqrt{18} < 6 + 5 = 11 < 10^2$:

> "Si las expresiones decimales de $3\sqrt{2}$ y $\sqrt{18}$ son iguales en sus dos primeras cifras decimales, entonces representan el mismo número irracional."

En este sentido, la comprobación:

$$\sqrt{18} \quad = \quad 4,24\ldots \quad 3\sqrt{2} \quad = \quad 4,24\ldots$$

es un ejercicio "responsable" de la actividad matemática y supone una acción de control de las acciones.

Los dos procedimientos son en apariencia similares. Sin embargo, se debe distinguir el acto de control de la mera inducción empírica.

La institucionalización del número irracional debe ser, pues, posterior a este tipo de prácticas personales con expresiones numéricas decimales del número irracional, que lo dotan de significado.

3.2.1. Significados de los objetos matemáticos y conflictos semióticos

El objeto personal sirve al sujeto para planificar su práctica matemática, y gracias a él identifica y relaciona situaciones en las que el mismo objeto ayuda a su resolución. De forma progresiva, los sistemas de prácticas se comparten socialmente en el marco de una institución, ligadas a la resolución de un cierto tipo de problemas.

Tanto los significados personales como los institucionales se pueden organizar en sendos esquemas inclusivos (Godino y Font, 1997). En el plano personal, el significado *global* contiene al *declarado*, que a su vez incluye los significados *logrado* y *final*. En paralelo a éste esquema, el significado institucional de *referencia* contiene al *pretendido*, que a su vez incluye el *implementado*.

Un proceso de evaluación se puede describir como análisis de la adaptación entre los significados personales e institucionales (Godino y Batanero, 1994), en base a una serie de acciones (*participación*, *enseñanza*, *acoplamiento*, *aprendizaje* y *apropiación*) que ponen en relación estos dos planos (figura 3.7).

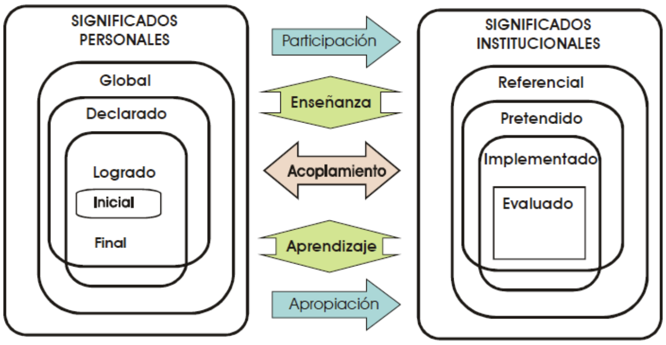


Figura 3.7: Significados personales e institucionales (Godino y Font, 1997).

Al igual que la actividad matemática, la comprensión de un significado es también un proceso social. En esta línea, las dificultades y los errores cometidos en los procesos de resolución se explican en términos de *conflictos semióticos*, es decir, las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas se explican en términos de disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa (Godino, 2002).

Los procesos adaptativos entre los significados personales e institucionales han dado origen clásicamente a la distinción de tres tipo de evaluación (Wilhelmi, Belletich, Lasa y Reina, 2013):

- Inicial o de diagnóstico.
- De proceso o formativa.
- Final o sumativa.

El objetivo de la *evaluación inicial* consiste en la determinación de los conocimientos previos de los estudiantes, la aptitud, la actitud y los condicionantes externos de los mismos. Además, se realiza el análisis de los instrumentos disponibles y se determinan los conocimientos disciplinares y didácticos del docente para hacer evolucionar esos conocimientos previos. Todo ello determina el marco general del acto educativo.

En la *evaluación de proceso* de analizan, junto con la adquisición de los conocimientos, los progresos de los estudiantes, las dificultades con las que han encontrado, los errores recurrentes que se han cometido y sus orígenes. A su vez, se evalúan las decisiones pedagógicas y didácticas del docente, se mide la eficacia de sus intervenciones y se analiza el empleo de los recursos temporales y materiales. En la *evaluación final* se determinan los objetivos de aprendizaje que ha adquirido el estudiante.

> "La evaluación inicial y final representan ambas el análisis de la adecuación entre los *significados personal declarado* e *institucional evaluado*. La evaluación inicial y final se diferencian, además del momento en que se realizan y el tipo de significado personal que sirve de referencia (previo al proceso de estudio o el resultado de éste), en el uso que se hace del análisis sobre la adecuación de significados personales e institucional. Por un lado, la evaluación inicial permite al sistema educativo, casi siempre personalizado en el docente, valorar *a priori* la pertinencia del proceso de estudio planificado o pretendido; por otro lado, la evaluación final es utilizada para establecer un juicio de valor sobre los significados personales logrados y para valorar la eficacia del proceso de estudio implementado." (Wilhelmi et al., 2013, 286)

Los procesos de acoplamiento entre significados personales (declarados) e institucionales (implementados) se analizan en la evaluación formativa. Estos procesos son complejos por naturaleza, y la institución educativa debe diseñar los mecanismos que permitan ejercer una evaluación coherente y justa del proceso de estudio. Los mecanismos de evaluación tienen también como objetivo la clasificación de los estudiantes, es decir, la determinación de la posición relativa que cada estudiante ocupa dentro del grupo, al final del proceso de estudio. Para ello, se recurre a una escala de calificación cualitativa o cuantitativa, que determina el nivel de saber o competencia mostrado por el estudiante. Además, la calificación obtenida permite también prever si el estudiante será capaz de abordar con garantías los contenidos que siguen, y en última instancia, valorar la conveniencia o no de promocionar al estudiante de a un curso superior u otro nivel educativo.

Si el entramado de significados personales e institucionales se simplifica en exceso, puede ocurrir que la evaluación se interprete como una evaluación meramente sumativa, la cual no permite discriminar dos estudiantes con capacidades distintas, ni actuar sobre los contenidos desarrollados.

Ejemplo 9 (Evaluación sumativa) *En un examen con n preguntas, cada pregunta puntúa* $10/n$ *de la calificación obtenida.*

> Un estudiante contesta correctamente las primeras $n/2$ preguntas. Otro estudiante contesta correctamente las $n/2$ siguientes. Ambos estudiantes obtienen la misma calificación a partir de preguntas distintas. Cada estudiante muestra unas habilidades y unos conocimientos diferentes, y el sistema de evaluación no los permite discriminar.
>
> Además, este tipo de evaluación es finalista, de forma que se valora el producto de un proceso de estudio que ha terminado. No se contempla un plan de mejora para el estudiante que no obtenga una calificación satisfactoria.

El criterio de calificación en una evaluación se debe atener a una norma curricular. La evaluación sumativa es común en el sistema educativo, y lo son también los criterios de ejecución máxima.

> "Así, se tiene la ilusión de que las producciones de los estudiantes pueden ser valoradas objetivamente, en términos absolutos, y que la medida que de ellas se realiza es un indicador no sólo de la competencia matemática del sujeto, sino también, y esta presunción es grave, de su inteligencia." (Wilhelmi et al., 2013, 286)

En definitiva, la evaluación consiste en una valoración de la adecuación entre significados personales e institucionales. El criterio de evaluación y la escala de calificaciones deben emanar del currículo y se deben fijar en función del significado institucional de referencia. Sin embargo, la ausencia de un marco de evaluación externo en matemáticas (similar a la utilizada en la enseñanza de las lenguas) dificulta la puesta en marcha de un protocolo de evaluación que se ajuste a la norma. En ausencia de un marco externo, el docente diseña sus propias escalas de calificación con riesgo de que éstas se vean influenciadas por sus creencias.

Según Wilhelmi et al. (2013) algunas de las disfunciones más comunes en la evaluación matemática serían:

- *El uso generalizado de criterios de ejecución máxima.* Se toma como punto de partida una respuesta perfecta, y se sustrae puntuación según el número de errores u omisiones cometidos. Esta creencia del docente evita la aparición de las calificaciones 10 (respuesta perfecta) y 0 (ausencia de respuesta).

- *El uso exclusivo de escalas cuantitativas.* No se toman como referencia los comportamientos mostrados por el estudiante en función de una escala cualitativa (suspenso, aprobado, bien, notable o sobresaliente). En particular, una leve modificación de la calificación cuantitativa puede modificar la posición de un estudiante dentro de las categorías cualitativas.

Estas conclusiones se obtienen en una experimentación realizada por docentes en formación, y evidencian la influencia que tienen las creencias del docente en relación a la práctica matemática. Por ello, se debe potenciar en la formación de nuevos profesores de matemáticas una discusión sobre la pertinencia y el uso de distintos criterios de evaluación y calificación, dado que éstos son especialmente sensibles a las creencias que el docente tiene sobre el "quehacer matemáticos".

3.2.2. Percepción social de la práctica matemática

Los docentes deberían evaluar a sus estudiantes en base a normas que emanan del currículo, en lugar de emplear criterios de ejecución máxima. El empleo del segundo criterio de evaluación, en detrimento del primero, se puede explicar en términos de la percepción social que se tiene de la matemática como disciplina escolar.

Cuando la práctica matemática se evalúa en función de un criterio de ejecución máxima, se genera una primera percepción social de la misma, restringida al contexto escolar. Así, se considera que un estudiante es bueno en matemáticas si cumple los siguientes requisitos:

- Realiza sin equivocaciones largas secuencias de cálculos.
- Aplica de forma eficaz los procedimientos, las heurísticas, las fórmulas y los resultados matemáticos expuestos en clase.

Esta percepción social de la práctica matemática tiene como consecuencia la emergencia puntual en el mercado de franquicias educativas que explotan estos dos aspectos.

Por ejemplo, el ábaco es un material físico estructurado que permite al estudiante realizar múltiples tareas aritméticas. Su uso es, por ello, recomendable en Educación Primaria y en primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. En particular, el uso del ábaco facilita la ejecución de cálculos aritméticos y contribuye a la transcripción de información entre soportes. Todo ello ayuda a construir un significado de las prácticas aritméticas elementales.

Sin embargo, ciertas franquicias educativas (tales como *Aloha Mental Arithmetic*[2] (AMA)) se apropian del instrumento y obtienen con ello rentabilidad económica, sacando provecho de la percepción social de las matemáticas. Para ello, utilizan la siguiente hipótesis no contrastada: "si estudiante realiza rápidamente complejos cálculos aritméticos, mejora su rendimiento académico". En la franquicia AMA, los estudiantes ejecutan cálculos a partir de procedimientos algorítmicos mecanizados y fuera de todo contexto real de aplicación.

El método no presenta un Marco teórico ni una experimentación que avale su proceder: en todo caso, este proceder no tiene cabida en el Marco teórico de este trabajo. Los argumentos que intentan justificar el método se apoyan en vagos "estudios científicos": se sobrentiende que neurológicos, aunque no se expresa tal extremo, ni se explicita uno solo de ellos (figura 3.8). La referencia a estos genéricos "estudios científicos" es cuando menos tendenciosa. La afirmación "entrenar la mente en este período [los primeros ciclos de la vida] asegura el desarrollo de capacidades que serán fundamentales en la etapa adulta" no guarda, *a priori*, relación alguna con el método de la franquicia AMA.

> "Estudios científicos han demostrado que el cerebro no es estático y que las capacidades intelectuales no están fijadas al nacer. Los investigadores han encontrado evidencias de que las experiencias vividas durante los primeros años de vida tienen un efecto directo sobre la capacidad de aprendizaje que el niño mostrará en el futuro.
> La infancia y la adolescencia son las etapas de mayor plasticidad cerebral, es decir, el momento en el que se produce un mayor desarrollo mental y se definen las habilidades de cada persona. Esto es debido a que durante los primeros ciclos de vida se establecen un gran número de conexiones neuronales (sinapsis), fenómeno esencial para el estímulo de la inteligencia. Las conexiones que no se estimulen durante esta etapa, morirán para siempre.
> Por este motivo, entrenar la mente en este período asegura el desarrollo de capacidades que serán fundamentales en la etapa adulta"

Figura 3.8: Percepción social de las matemáticas: franquicias (www.alohaspain.com).

Un segundo modelo de percepción social algo más elaborado, añade a las dos dimensiones anteriores la práctica del matemático profesional. La percepción social atribuye

[2]Información disponible en: `http://www.alohaspain.com/`

al matemático la tarea de encontrar un procedimiento deductivo (demostración) que conecte una estructura matemática previa (definición) con la respuesta a una pregunta que puede ser representada en forma de proposición matemática (teorema). Este modelo de la práctica matemática, que se denota con el nombre de *definición-teorema-demostración*, no acaba de explicar el origen de las preguntas planteadas (Thurston, 2004).

La práctica matemática es más mucho más compleja que este modelo de la percepción social. Incluye aspectos sociológicos y psicológicos, y por eso, los matemáticos tienen a bien verse a sí mismos como aquellos profesionales que construyen mejores formas de pensar.

El lenguaje forma parte esencial de la práctica matemática. Cada matemático es especialista en un área de conocimiento determinado dentro de las matemáticas, y los textos matemáticos deben contener las debidas explicaciones verbales, representaciones gráficas y expresiones simbólicas, además de ejemplos, resúmenes y puestas en común, para que el matemático pueda seguir un argumento determinado o lo pueda, en caso, verificar.

En el campo de la geometría, la visión, el sentido espacial y el sentido cinético son aptitudes que pueden ayudar al matemático a encontrar la respuesta de una cuestión, no abordable a partir de la simple codificación verbal o simbólica.

La lógica y la deducción son, por regla general, procedimientos *a porteriori*, estrategias con las que se construyen argumentaciones una vez que la intuición, la asociación o la metáfora han abierto una vía de resolución a un problema determinado.

Un objeto matemático determinado genera un estímulo particular y el matemático responde en consecuencia, gestionando el tiempo destinado a cada proceso. En este sentido, el software permite avanzar en tareas que de otra forma serían lentas y tediosas.

> “En algunos periodos de mi carrera, he pasado un buen espacio de tiempo explorando preguntas con el ordenador [...] Los estándares de corrección y completitud necesarios para que un programa de ordenador funcione en primera instancia, son varios órdenes de magnitud superior a los estándares que la comunidad matemática tiene para considerar válida una demostración matemática. Sin embargo, un enorme programa informático, incluso cuando éste ha sido escrito y testado cuidadosamente, siempre parece tener errores.” (Thurston, 2004, 169)

En resumen, la evaluación se debe realizar en razón a la norma que emana del currículo. A su vez, la norma debe contemplar las prácticas operativas y discursivas que definen la “práctica matemática” o el “hacer matemático”, que deberá servir al propósito de proyectar una percepción social ajustada a la realidad. En caso contrario, y parafraseando a Beveridge y Turnbull (1989), la enseñanza de las matemáticas puede correr la misma suerte que la enseñanza de las lenguas clásicas en las etapas educativas media y superior. Es decir, la enseñanza de las matemáticas podría dejar de ser un medio para transmitir conocimiento de tipo científico y filosófico. En su lugar, las matemáticas podrían acabar teniendo validez, únicamente, como un medio para entrenar la memoria y como un método para inculcar en el estudiante hábitos de estudio saludables. Es decir, bajo este punto de vista, trabajar las matemáticas sería beneficioso porque (1) ayuda al estudiante a mantener la atención, (2) permite al estudiante realizar procedimientos ordenados y (3) se inculca en el estudiante el valor de ser perseverante en la ejecución de una tarea.

3.3. Construcción del significado personal

En las fases de *acción* y *formulación*, el estudiante utiliza funcionalmente signos variados, que pueden ser, entre otros, expresiones, símbolos, gráficos o diagramas. El uso funcional de los signos en un contexto social los dota de significado, y la construcción del significado personal es congruente con el significado cultural, es decir, el significado institucionalmente reconocido como tal (Berger, 2004). En efecto, la génesis del significado personal ha de ser coherente con el significado cultural de referencia, y precisamente, en la sección 3.2.1 se ha tratado la evaluación como el análisis de la adecuación entre los significados personales e institucionales.

> "El término significado personal se refiere al estado en el que el estudiante cree/siente/piensa (tácita o explicitamente), que ha entendido el significado cultural de un objeto." (Contreras, 2005, 45)

Cada objeto matemático se puede representar de múltiples formas. Así, "el signo llega a transformarse en pensamiento cuando tiende a desvanecerse haciéndose totalmente transparente a las relaciones de determinación y representación mediadas por el" (Contreras, 2005, 48). El sujeto hace uso de la simbología incluso antes de comprender totalmente el significado del signo. Cuando el sujeto aprende a distinguir el objeto independientemente de la representación que éste tenga, se dice que lo *comprende*.

En la actividad matemática, el sujeto establece una relación de dependencia entre *antecedentes* y *consecuentes*. La correspondencia se establece siguiendo un cierto criterio o código, que actúa a modo de regla, hábito o convenio. La relación es de tipo representacional cuando un objeto se pone en lugar de otro, instrumental si un objeto hace uso de otro, o cooperativo si dos o más objetos forman un sistema del que emergen nuevos objetos matemáticos. La manipulación y la comunicación de los signos y de las representaciones ponen en relación estos *antecedentes* y *consecuentes* a partir de la *función semiótica* (Godino y Batanero, 1994).

En este contexto, se considera clave para el aprendizaje la habilidad para traducir información de una representación semiótica a otra, por ejemplo, la identificación de objetos numéricos en el enunciado de un problema aritmético, o la traducción simbólica de una expresión verbal. De hecho, el origen de algunas dificultades de aprendizaje se podría encontrar en la incapacidad de realizar este tipo de transferencias. Según Duval (2000, 67), "por medio de la conversión, vamos hacia el núcleo del aprendizaje de los problemas matemáticos."

La *conversión* que cita Duval se refiere a la representación de un mismo objeto sobre distintos sistemas de representación. Por el contrario, cuando la manipulación de un objeto se realiza dentro de un mismo sistema de representación, se emplea el término *tratamiento*. La noción de *función semiótica* y los términos *conversión* y *tratamiento* modelizan de forma efectiva el uso de modelos dinámicos y prácticas de resolución de problemas.

> "El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan la realización de la práctica que interesa que forme parte del significado global del alumno o no, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios." (Font, Godino y DÁmore, 2007, 16)

El instrumento GeoGebra ofrece un entorno que facilita el *tratamiento* de nociones matemáticas. Así, las distintas ventanas (algebraica, de cálculo simbólico, gráfica, etc.) permiten llevar adelante tareas dentro de un mismo sistema de representación.

Los objetos geométricos, algebraicos, funcionales o de otro tipo, creados con GeoGebra se organizan en un sistema de dependencia o cronología. Cada objeto nuevo requiere de otros objetos previos que sirven de entrada. El único objeto geométrico que no requiere un elemento previo para ser definido es el punto, y esta cualidad dota el sistema de representación de una buena analogía con la construcción axiomática de las definiciones geométricas clásicas.

Ejemplo 10 (Cronología de una construcción) *Construye un pentágono irregular.*

> El tratamiento de las nociones geométricas se realiza, principalmente, sobre la vista gráfica. Se requieren (a lo sumo) dos herramientas para la construcción del polígono: *punto* y *polígono*.
>
> La herramienta *punto* permite representar cinco puntos en el plano. Por defecto, GeoGebra asigna a los puntos letras mayúsculas en orden alfabético. Estos puntos son los objetos de entrada para las herramientas *segmento* y *polígono*. Así, las expresiones de los puntos y el uso de la herramienta dota de significado al contenido polígono.
>
> La herramienta *polígono* no acepta como entrada los segmentos entre puntos. Sin embargo, para poder cerrar el polígono, se debe pulsar sobre los puntos creados en pantalla, de uno en uno. Toda vez que se pulsa consecutivamente sobre dos puntos, se crea por defecto el segmento que une estos puntos.
>
> La propia herramienta polígono crea puntos nuevos cuando se pulsa sobre espacios "blancos" en la ventana algebraica. Como alternativa, un usuario avanzado puede utilizar la barra de entrada del software para crear, de una vez, todo el polígono (teclea *Polígono[A,B,C,D,E]*). En la figura 3.9, se observa en la vista gráfica la secuencia cronológica de los objetos creados.

El uso de múltiples pantallas puede facilitar algunas prácticas. Por ejemplo, la resolución de problemas de cálculo exige la utilización de un amplio repertorio semiótico, y la representación múltiple de un mismo objeto facilita la construcción del contenido.

Ejemplo 11 (Múltiples representaciones en pantalla) *Halla las raíces de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x$ y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

> Se emplean cuatro ventanas simultáneas (barra de entrada, ventana algebraica, ventana de cálculo simbólico y vista gráfica) y la información se puede transferir de una a otra (figura 3.10).
>
> La ecuación de la función se introduce en la barra de entrada, y las representaciones algebraica y gráfica de la función aparecen en las vistas correspondientes.
>
> En la ventana de cálculo simbólico se realizan las operaciones con la función: cálculo de raíces, derivada, etc. A su vez, todos los objetos creados a partir de estos cálculos tienen su representación en las vistas algebraica y gráfica.

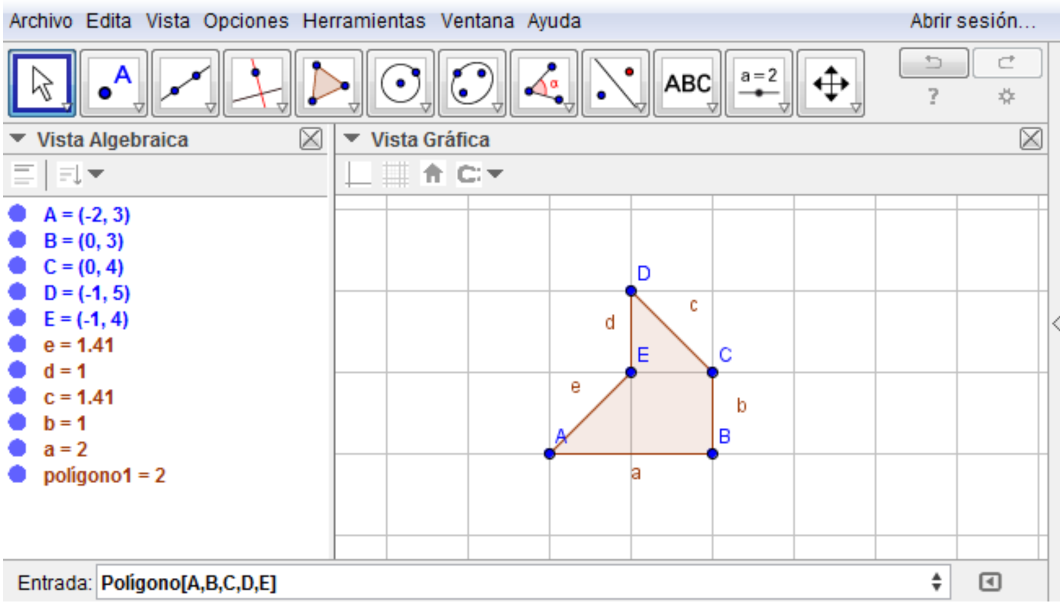


Figura 3.9: Cronología de construcción: pentágono irregular.

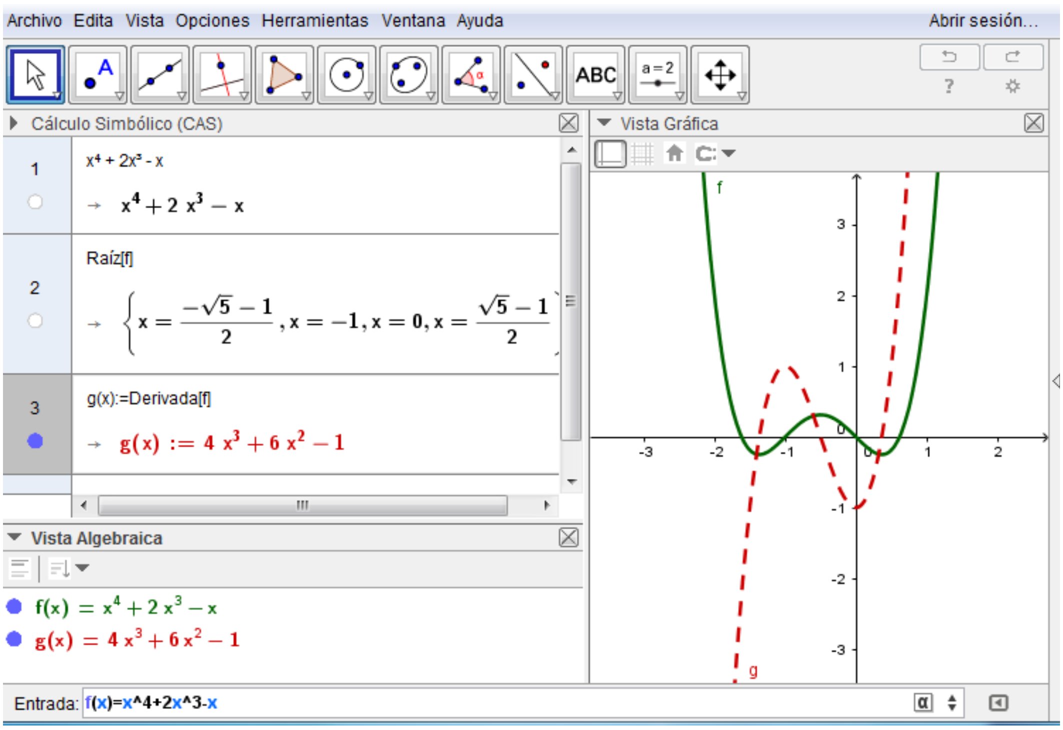


Figura 3.10: Representación múltiple: raíces e intervalos de crecimiento.

La ventana CAS de cálculo simbólico facilita al estudiante la comprobación de cálculos algebraicos. En estos cálculos, se manipulan objetos generales a la vez que se particularizan algunos valores de las variables. Lo mismo ocurre en las prácticas de demostración de propiedades generales. Así, la dualidad expresión/contenido se articula en este tipo de prácticas con la dualidad extensivo/intensivo. En la sección 3.4 se profunciza en esta dualidad y en los *niveles de algebrización* de práctica matemática. El ejemplo 12 ejemplifica este uso.

Ejemplo 12 (Prácticas de resolución) *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *impar mayor que 1. Entonces,* $n^2 \div 8$ *da resto 1.*

> Con la función semiótica se particulariza la expresión general "sea n impar", para obtener impares particulares: 1, 3, 5, etc.
>
> La expresión de los casos particulares permite el estudio de ejemplos (las operaciones $3^2 \div 8$, $5^2 \div 8$, etc., dan resto 1), y se genera un contenido nuevo: ausencia de contraejemplos; la proposición es probablemente verdadera.
>
> El proceso inductivo se debe reformular en términos de una argumentación deductiva. La expresión de los ejemplos particulares se codifica en un contenido intensivo: $n = 2k + 1$, $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
>
> Se vuelve a particularizar el argumento sobre el obejto intensivo. La expresión $4k^2 + 4k$ el múltiplo de 4, y además, $k^2 + k$ es un número par (puesto que k^2 tiene la misma paridad que k). Se deduce de ello que $4k^2 + 4k$ es múltiplo de 8, siendo el término "+1" el signo que representa al resto.

3.4. Uso de intensivos y niveles de algebrización

Dentro del EOS, la dualidad ejemplar-tipo modeliza el uso de elementos genéricos en la actividad matemática (Contreras y cols., 2005). En todo proceso de estudio, el objeto matemático puede jugar un papel *extensivo*, es decir, aparece como ejemplar u objeto particular, o bien puede aparecer como *intesivo* o representante de una clase de objetos.

En este sentido, el uso del modelo dinámico no solo permite analizar un gran número de casos particulares (*fase de validación*: búsqueda de contraejemplos y argumentación inductiva, tabla 3.1). Permite, además, centrar la actividad en propiedades generales de los objetos matemáticos que participan en la situación (Lasa y Wilhelmi, 2013; Lasa, Sáenz de Cabezón y Wilhemi, 2009).

La instrumentación del soporte material utilizado es, pues, una de las prácticas operativas que determinan la actividad matemática escolar. Además, toda actividad matemática requiere de la utilización del número y de representaciones algebraicas en sus distintos niveles. Dentro del EOS, existe una clasificación de los niveles en el uso del álgebra, y esta clasificación permite "calibrar" el uso de extensivos e intensivos algebraicos en la actividad matemática (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gozato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Así, el *nivel* 0 de algebrización se identifica con la ausencia de algebra y con la utilización del número en tareas exclusivamente aritméticas. El *nivel* 3 de algebrización o de consolidación del álgebra, supone la generación de objetos intensivos con los que se opera a través de transformaciones simbólicas. Existen otros niveles de en los que la utilización del álgebra es incipiente (*nivel* 1, se emplean intensivos en tareas estructurales) o intermedia (*nivel* 2, aparecen variables pero no se opera con ellas). La figura 3.11 muestra la estructura de los niveles protoalgebraicos, relativos a los primeros niveles en edades tempranas.

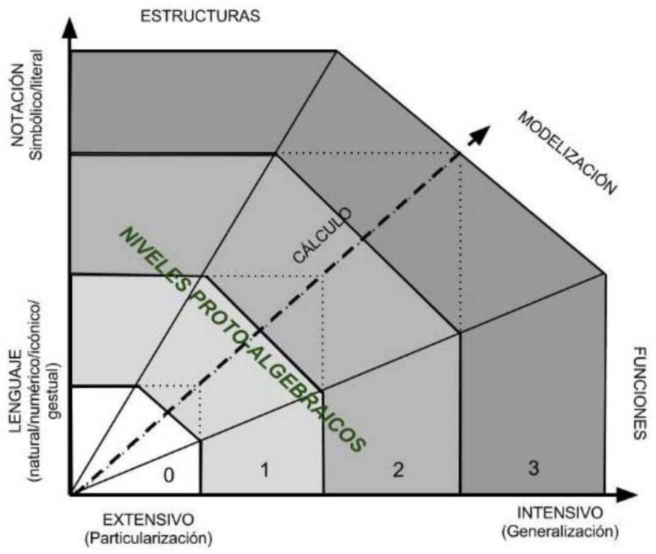


Figura 3.11: Niveles protoalgebraicos (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014, 17).

El soporte material utilizado influye en el tipo de intensivo algebraico que se emplea en la actividad matemáticas. En la etapa de EP, la actividad se centra, sobre todo, en el soporte "lápiz y papel", y en este soporte, se utilizan mayormente objetos numéricos y geométricos extensivos. El *umbral de maestría aritmético* del niño parte, en un primer momento, del *nivel* 0 de *algebrización*. Los niños emplean, en todo caso, el lenguaje natural o codificaciones personales y no estandarizadas para representar intensivos en razonamientos de tipo prealgebraico. En estas condiciones, se emplea el conteo y se aplican operaciones elementales sobre expresiones numéricas. En este contexto, Lasa y Wilhelmi (2014)[3] presentan una experiencia en la que se observa que la integración de los soportes "papel" y "software de geometría dinámica" permite a los niños avanzar en los distintos niveles de algebrización. Con la integración de un modelo dinámico, la actividad matemática permite a los niños progresar en los niveles de algebrización desde una edad temprana (niveles protoalgebraicos 1 y 2).

Las actividades de conteo evolucionan, en la Educación Secundaria, hacia la combinatoria. En este contexto, la dualidad *extensivo/intensivo* explica la evolución de estos procesos de conteo: desde recuentos particulares, normalmente poco numerosos; hasta la identificación de reglas de formación de familias de casos, que involucran procesos de particularización (concreción de la regla en un caso particular) y de generalización (identificación del patrón común de varios recuentos concretos).

La determinación del nivel de algebrización que los estudiantes de ESO muestran en sus producciones escritas, ha demostrado tener también carácter predictivo a la hora de determinar las estrategias de resolución que estos mismos estudiantes ponen en funcio-

[3]La experiencia completa se puede consultar en el anexo A

namiento (Lasa y Wilhelmi, 2015b). Así, participantes en la Olimpiada de Matemáticas de 2º ESO que tienen éxito en la resolución de tareas de recuento combinatorio, muestran un dominio claro del campo numérico racional y del álgebra (demuestran un nivel 3 de algebrización en el resto de problemas de la Olimpiada). Sin embargo, en el problema combinatorio tratado, emplean estrategias aritméticas y de conteo de todos los casos, junto con representaciones analógicas y en ausencia de codificaciones complejas. Es decir, los participantes que dominan el álgebra son asimismo conscientes de las limitaciones de su uso. El costo de la vieja técnica (aritmética) es inferior al de la nueva (algebraica), en relación a la complejidad de la tarea (figura 3.12).

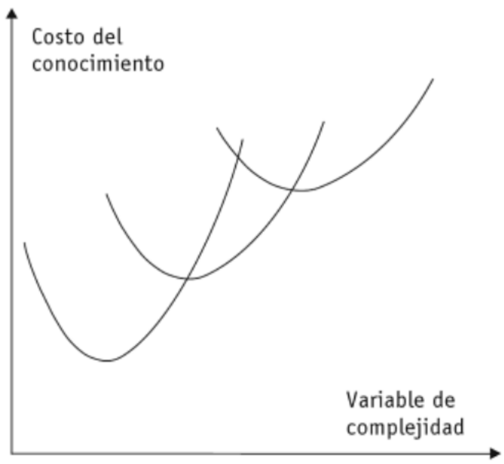


Figura 3.12: Progresión regular de la enseñanza sin saltos informacionales (Brousseau, 2007, 43).

En este mismo contexto, los participantes que utilizan un lenguaje ordinario y demuestran un nivel inferior de uso del algebra (nivel 1 de algebrización en este problema de combinatoria) emplean, de forma errónea, estrategias implícitas de conteo que no han posibilitado la obtención de una respuesta correcta. Este conjunto de participantes trata de resolver el problema con una técnica no consolidada. A pesar de no tener un dominio claro del álgebra, intentan calcular el número de casos favorables a partir de intensivos (operaciones, reglas y argumentos).

Tampoco dan buenos resultados ni el uso de tablas, ni una interpretación global e intuitiva del problema (estos participantes no dividen el problema principal en problemas más pequeños). En contraposición al campo numérico racional, que aparece ligado a las variables que miden la tasa de éxito, el campo numérico natural guarda relación con esta comprensión intuitiva y simplista del problema.

De esta forma, el estudio sugiere que en la enseñanza del álgebra se debe atender a:

- El análisis de su campo de uso.
- La valoración de la eficacia y coste de sus técnicas asociadas.
- La adquisición de estrategias de control, en muchos casos basadas en métodos aritméticos.
- La articulación de los distintos campos numéricos.

Tal como se ha visto en el ejemplo 11, el software GeoGebra dispone de herramientas de cálculo simbólico que permiten progresar la actividad matemática hasta el nivel 3 de consolidación del álgebra. Giménez (2015) propone situaciones de aprendizaje para estudiantes de Bachillerato en los que las ventanas algebraica y de cálculo simbólico tienen un papel relevante en la actividad matemática.

3.5. El soporte material: representaciones ostensivas

En la sección 3.3 se han tratado las representaciones de los objetos matemáticos y la importancia que tienen éstas en la construcción del significado personal. Los significados personales e institucionales, junto con la clasificación de las representaciones en *ostensivas* (materiales) y *no ostensivas* (ideales), clarifican la distinción clásica ente representaciones internas y externas. La representación del elemento genérico es también una cuestión clave en relación a la dualidad *intensivo/extensivo* (sección 3.4).

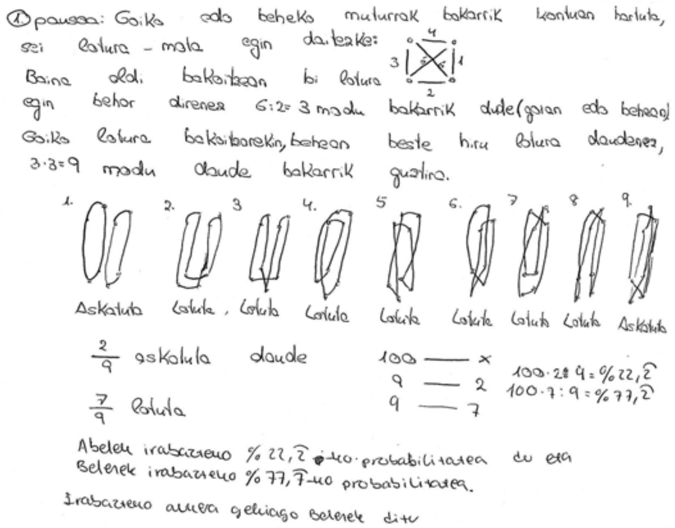
A pesar de que los objetos matemáticos no son perceptibles u ostensibles, todos ellos tienen una representación gráfica, simbólica o de notación, que permite su manipulación ostensible y pública. Además, todo objeto ostensivo, es susceptible de ser pensado e imaginado por un sujeto o estar implícito dentro del discurso matemático, siendo por lo tanto también no ostensivo. La materialización de los objetos matemáticos empleados sobre una variedad de instrumentos (físicos, lápiz y papel, software de geometría dinámico) aparece en contraposición a los objetos matemáticos ideales que se quiere sean adquiridos por los alumnos (dualidad *ostensivo/no ostensivo*).

El desarrollo de las estrategias de recuento, previas al algebra combinatoria, y su evolución en fórmulas sintéticas de recuento de casos, ejemplifica la dualidad ostensivo/no ostensivo. En las primeras etapas, y bien entrado en la educación secundaria obligatoria, los estudiantes cuentas todos los objetos físicos de una colección o sus representaciones gráficas en dos dimensiones, en las tareas de recuento. Es decir, se materializan exhaustivamente todos los casos. Más adelante, se pasa al recuento de situaciones sin el conteo constructivo de todos los casos. En Lasa y Wilhelmi (2015b), se analizan las distintas representaciones ostensivas de estudiantes de 2 ESO, y su relación con las estrategias de conteo aplicadas por los estudiantes y los niveles de algebrización mostrados en la realización. En los ejemplos de resolución se observa como el uso de esquemas, metáforas o agrupaciones permite este proceso de idealización (figura 3.13).

Asimismo, en las primeras etapas, la manipulación de objetos físicos caracteriza la actividad matemática en el aula. En estas etapas, la representación estandarizada de objetos tridimensionales en soportes de dos dimensiones es problemática (representaciones en papel de figuras en tres dimensiones, planos y vistas, etc). El soporte "software de geometría dinámico" aporta a estas representaciones el elemento dinámico: el *arrastre* de un objeto libre o semilibre en un modelo dinámico es una *acción* matemática en la etapa de EI y los primeros cursos de EP, que permite al estudiante la toma de una decisión y su consecuente *feedback* del medio didáctico (Or, 2013, 2015). Lasa y Wilhelmi (2015c) ejemplifican este extremo con una serie de construcciones geométricas que permiten avanzar en la definición de objetos geométricos en el plano, a partir de punto móviles (figura 3.14).

Este ejemplo muestra el potencial del instrumento GeoGebra en la representación de objetos matemáticos y la tensión que ejerce el soporte dinámico sobre los objetos matemáticos representados en las distintas dualidades: la distinción entre construccio-

a) Representación de todos los casos.



b) Codificación en función de una regla o patrón.

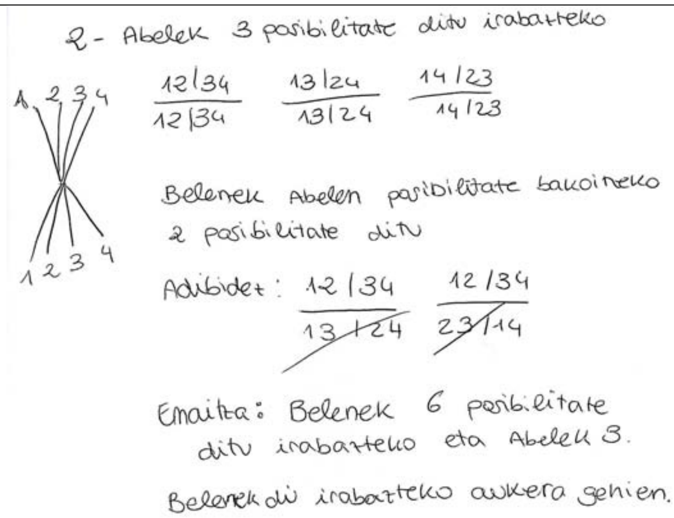


Figura 3.13: Desarrollo de representaciones en tareas de conteo (Lasa y Wilhelmi, 2015b)

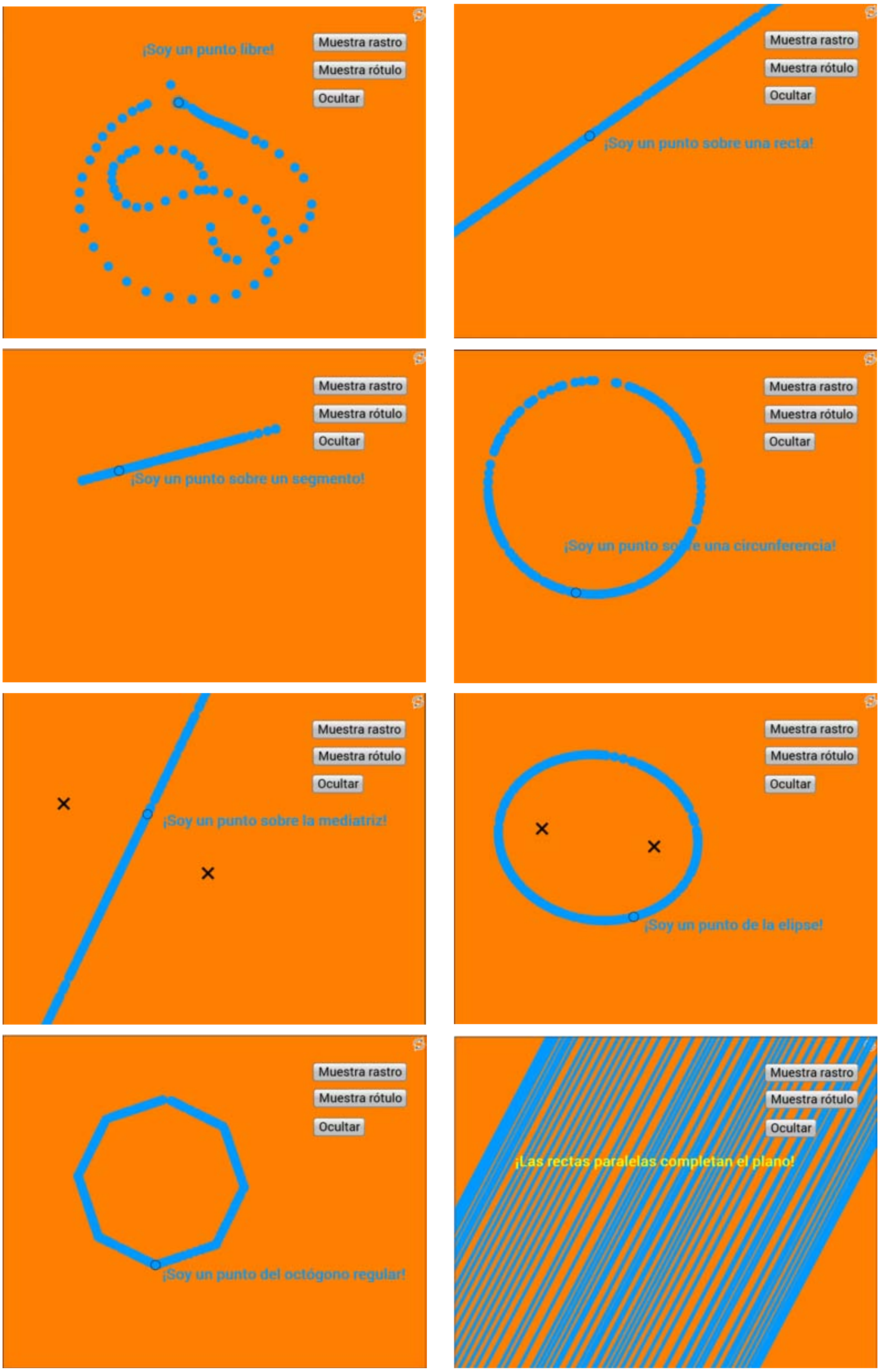


Figura 3.14: Representaciones de objetos geométricos por puntos dinámicos (Lasa y Wilhelmi, 2015c)

nes estáticas (de regla y compás) y modelos dinámicos (construcciones que cumplen las restricciones de un enunciado) permite avanzar en la idealización de los objetos matemáticos. En efecto, en las construcciones estáticas, tanto si éstas se realizan sobre papel (con regla y compás o a mano alzada) como si se representan en una pizarra ordinaria, se enfatiza la representación ostensiva del objeto matemático. No obstante, el modelo dinámico permite avanzar en la idealización del objeto, puesto que permite la representación de toda una clase o familia de objetos. Esta idealización se da en estrecha relación con el uso de intensivos (algebraicos o de otro tipo) y permite un acercamiento a la formulación abstracta de objetos.

3.6. Sistemas de objetos unitarios

Dentro de las prácticas operativas y discursivas, un mismo objeto matemático aparece, por un lado, como entidad unitaria previamente conocida y estudiada de forma aislada, y por otro lado, dentro de un sistema complejo que requiere de un estudio y su clasificación. En el EOS, esta dualidad del objeto matemático toma el nombre de *unitario/sistémico*. Así, por ejemplo, la media, la mediana y la moda son entidades unitarias, que a su vez forman parte del sistema "medidas de centralización" (Godino, 2002).

Por ejemplo, las definiciones tienen un significado concreto y sirven para nombrar una noción determinada. Sin embargo, varias nociones se pueden organizar en sistemas complejos que complementan sus significados y dan como resultado otras definiciones. Junto con las definiciones, también las proposiciones forman, en la estructura cristalizada del saber matemático, una pirámide de conocimientos en los que cada teorema tiene valor en sí mismo, pero forma parte, a su vez, de eslabón o pieza para demostrar resultados más complejos. También las situaciones son susceptibles de ser pensadas desde el punto de vista de la dualidad *unitario/sistémico*. La propia heurística de resolución de problemas contempla, como estrategia básica en la resolución de un problema complejo, la identificación y la resolución de las subsituaciones o los subproblemas que forman el problema original.

En este último contexto, el software dinámico forma parte del medio material con el que se resuelve el problema, o se utiliza como herramienta de exploración para demostrar una propiedad. Una construcción dinámica que modeliza un problema matemático, o las distintas ventanas del software (algebraica, vista gráfica, CAS, etc.) permiten explorar una estructura sistémica de objetos matemáticos separando cada una de ellas de forma unitaria. En los problemas en los que se requiere la articulación de una serie de procedimientos (sistémico), el software facilita el análisis individualizado de cada proceso (unitario). Por ejemplo, los objetos (procesos) unitarios "resolución de una ecuación de segundo grado" y "resolución de un sistema lineal de ecuaciones", permiten articular el sistema (proceso sistémico complejo, formado por un conjunto de subprocesos unitarios simples) "resolución de un sistema e ecuaciones no lineal". El modelo dinámico es, pues, un instrumento que permite la exploración de una tarea compleja, a partir de procesos simples (Lasa y Wilhelmi, 2015c).

Una vez se han expuesto los procesos duales, en la sección 3.7 se procede a la descripción detallada de la ontología del EOS. Esta descripción se realiza en función de objetos matemáticos primarios, es decir, los elementos lingüísticos, las situaciones, las definiciones, las proposiciones, los procedimientos y los argumentos.

3.7. Objetos matemáticos primarios

Los diversos objetos que participan en la actividad matemática son susceptibles de ser catalogados en base a distintos criterios. El EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) propone seis categorías para clasificar las entidades matemáticas, teniendo en cuenta las funciones que desempeñan dentro de la labor matemática (figura 3.15):

- *Elementos lingüisticos.* Forman esta categoría los términos, expresiones, notaciones y gráficos, entre otros elementos, que participan en la redacción de textos matemáticos, junto con otros registros como el oral y el gestual. En particular, toman especial relevancia el lenguaje verbal, gráfico y simbólico.
- *Situaciones - problemas.* Son las tareas que motivan la actividad matemática, como por ejemplo, los ejercicios, problemas abiertos o cerrados, y las aplicaciones de las matemáticas tanto en contextos intramatemáticos como extramatemáticos, entre otros.
- *Conceptos - definición.* Entidades que requieren de una definición, tales como número, punto, recta, media, función, etc.
- *Proposiciones.* Enunciados proposicionales sobre conceptos que requieren de una justificación y que dan atributos a los objetos.
- *Procedimientos.* Un procedimiento está formado por la secuencia de acciones que realiza el sujeto ante una tarea matemática. Estas acciones pueden ser técnicas de cálculo, algoritmos u operaciones.
- *Argumentos.* Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones. Pueden ser deductivas o de otro tipo.

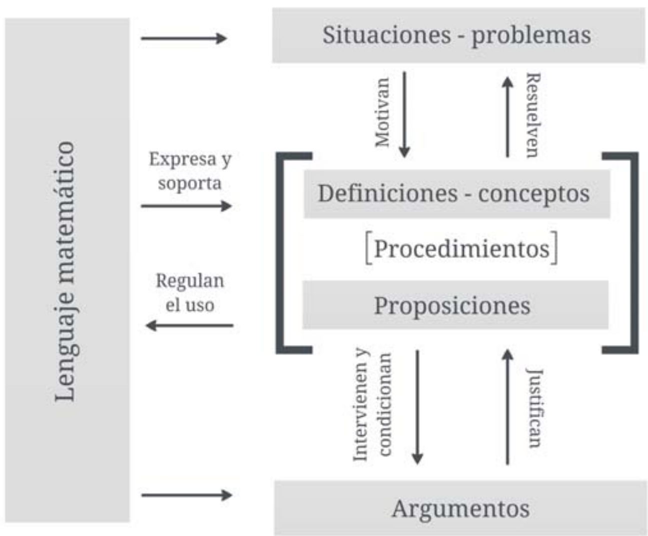


Figura 3.15: Objetos matemáticos primarios (Godino, Batanero y Font, 2007).

La utilización de software de geometría dinámica introduce en el sistema didáctico una terminología específica. Esta terminología, por un lado, explica el propio funcionamiento del software, y por otro lado, es necesaria para describir y argumentar los procedimientos y los resultados obtenidos con el mismo. Por ejemplo, el término *modelo dinámico* se emplea en contraposición a una *construcción estática*, realizada normalmente con regla y compás, y más propia del soporte "lápiz y papel". Cada uno de estos términos describe una categoría de situaciones problemáticas, que requieren distintos procedimientos y argumentos en su tratamiento.

A su vez, la barra de herramientas del software clasifica varios instrumentos dentro de cada familia de objetos, en función de su aplicación concreta. Por ejemplo, existen varias herramientas para la creación del objeto matemático *punto*, en función de su utilidad, es decir: hay puntos libres (puntos nuevos), puntos parcialmente libres (asignados a un segmento, una función o una región del plano) y puntos dependientes (punto medio de un segmento; intersección de dos objetos). El usuario se debe familiarizar con estos elementos lingüísticos para realizar una instrumentación eficaz del software.

En la sección 2.2 se han clasificado los momentos de utilización del software dinámico. Los momentos *exploración*, *ilustración* y *demostración* clasifican a su vez las situaciones y los problemas que motivan el empleo del software.. En el anexo A se ejemplifica una situación en la cual se emplea el modelo dinámico en un momento de *exploración*, una vez que la actividad aritmética y algebraica supera el nivel de maestría de los estudiantes. Se ha justificado en la sección 2.2.5 la conveniencia de integrar distintos soportes en el diseño de estas situaciones.

Una vez institucionalizado el conocimiento matemático, éste se sintetiza en una estructura deductiva, en la que toda nueva definición se basa en definiciones previas o resultados anteriormente demostrados. En la sección 3.3 se ha justificado que GeoGebra ofrece un entorno que facilita el tratamiento de nociones matemáticas, respetando esta construcción cronológica (ejemplo 10).

Cuando el usuario coloca el cursor sobre el icono de una herramienta determinada, emerge una ventana en la que se define la herramienta en términos de su uso. Es decir, se indica qué elementos previamente definidos se necesitan para construir el nuevo objeto. En este sentido, los objetos matemáticos y sus definiciones se construyen en GeoGebra de forma pragmática.

Un procedimiento característico de la práctica matemática sobre un modelo dinámico, es el *arrastre*. Es decir, la construcción geométrica o funcional se diseña de forma que cumple unas restricciones, asociadas al enunciado del problema. El usuario arrastra los objetos libres y parcialmente libres, para estudiar los grados de libertad del modelo dinámico. En el momento de exploración, la técnica del *arrastre* pone en relación los conceptos que participan en la situación, y asiste la articulación de argumentos que justifican la proposición.

En el caso de la *creación* de un modelo o de un *modelo de investigación simulada* (sección 1.2), el estudiante pone además en funcionamiento procedimientos instrumentales para diseñar por sí mismo el modelo (sección 2.1.1).

En los momentos de exploración e ilustración, los argumentos utilizados son, en general, inductivos. La manipulación del modelo dinámico clarifica la ausencia de contraejemplos, y la posibilidad de estudiar muchos casos particulares en un espacio de tiempo razonable permite la articulación de demostraciones inductivas. El modelo demostrativo se diseña con el objetivo de conseguir una argumentación deductiva.

Los *elementos lingüísticos*, las *situaciones*, los *conceptos*, las *proposiciones*, los *procedimientos* y los *argumentos* son los constituyentes primarios de otras organizaciones más complejas, como por ejemplo, los sistemas conceptuales o las teorías.

3.8. Análisis didáctico

Se denomina *configuración didáctica* a la constituida por las interacciones entre alumnos y profesor, en relación a un objeto matemático y usando unos recursos materiales. En este sentido, el EOS modeliza la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático como un proceso multidimensional compuesto por seis subprocesos o dimensiones interconectadas, que, a su vez, están influenciados por unas normas sociales (Godino, Contreras y Font, 2006).

Los significados institucionales y personales componen respectivamente las dimensiones *epistémica* y *cognitiva*. Las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las actividades que éstas posibilitan, y las normas cognitivas permiten conseguir que los sujetos aprendan. Además, la interacción entre profesor y estudiante define la dimensión *interaccional*, y el empleo de recursos y materiales el *mediacional*. Las normas interactivas regulan los modos de interacción entre los intervinientes y las normas mediacionales forman un sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales. Por último, los sentimientos afectivos forman la dimensión *emocional*, y las relaciones con el entorno social, político y económico, entre otros, la dimensión *ecológica*. Entre las normas afectivas están la motivación a través de situaciones matemáticas ricas y dentro del campo de interés de los estudiantes, adaptadas para que el estudiante acepte la responsabilidad de resolverlas, junto con factores condicionantes como la sociedad, la familia o la administración. Las normas ecológicas tienes como objetivo conseguir educar a los estudiantes y comprometerlos con la comunidad y con su futuro ejercicio profesional.

Estas herramientas permiten un análisis didáctico de los procesos de estudio, en sus distintos marcos de implementación: sesión de clase, unidad didáctica, desarrollo de un curso o propuesta curricular (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) definen cinco niveles de análisis didáctico.

1. La ontología propuesta en el Marco teórico propone un análisis de la actividad matemática a partir del análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

2. Para explicar conflictos semióticos potenciales en el proceso de instrucción y para describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas, se elaboran configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

3. A partir de las seis dimensiones de instrucción descritas con anterioridad, se obtienen otras seis *trayectorias*, a partir de cuyos estados se definen configuraciones y trayectorias didácticas.

4. Para valorar la pertinencia de las intervenciones de los profesores y estudiantes, y sugerir cambios en las normas buscando optimizar el aprendizaje, se identifica el sistema de normas que rigen los fenómenos sociales.

5. Por último, se valora la idoneidad didáctica del proceso de estudio, otra vez a partir de las seis dimensiones que conforman los significados. En este sentido, la idonei-

dad didáctica se puede definir como el nivel de adaptación entre los significados personales logrados y los significados institucionales pretendidos.

Para poder valorar la *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio, se requieren indicadores que permitan hacer de puente entre la teoría didáctica y la implementación efectiva de los procesos de enseñanza en el aula. Godino (2011) propone, en este sentido, una serie de indicadores en el marco del EOS, pero que no se ciñen a una única teoría, si no que pertenecen al campo de la Didáctica General o se toman de varias áreas específicas de la didáctica. En particular, el autor cita en numerosas ocasiones el documento de los Principios y Estándares para la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1991). Estos indicadores se resumen en las tablas 3.2 y 3.3.

La noción de *idoneidad didáctica* se articula en relación a las *dimensiones epistémica*, *cognitiva*, *interaccional*, *mediacional*, *afectiva* y *ecológica* (Godino, Batanero y Font, 2007). Un proceso de estudio debe asegurar la proximidad de los significados personales logrados a los significados implementados o pretendidos, es decir, debe garantizar que éstos estén en la zona de desarrollo potencial del estudiante, y sean representativos, tomando como referencia un significado de referencia. El proceso de estudio debe asegurar, además, la identificación *a priori* de conflictos semióticos potenciales y los debe resolver durante el proceso de instrucción, con la implicación emocional del estudiante en el proceso de estudio. Por último, el proceso de estudio se debe ajustar al proyecto educativo del centro, y se deben asegurar medios materiales y temporales suficientes para su correcto desarrollo (figura 3.16).

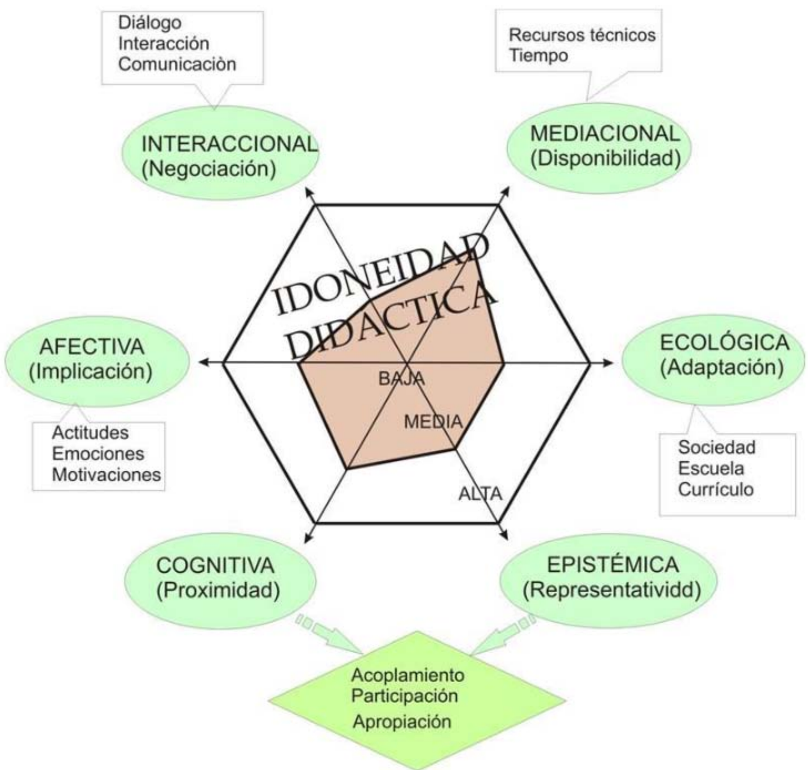


Figura 3.16: Idoneidad didáctica (Godino, 2011).

En la experimentación (capítulos 7) se procede a la implementación del proceso de estudio y a la presentación y discusión de los resultados de la experimentación. Los datos de los resultados se analizan a partir de los métodos estadísticos que se detallan en la *ingeniería didáctica* (capítulo 4). Se utilizan, además, los indicadores de idoneidad de Godino (2011), para valorar el proceso de estudio. La tabla 3.2 recoge los indicadores que se emplean en el estudio cualitativo del análisis *a posteriori* (capítulo 8). Dado que uno de los objetivos es medir la instrumentalización que los estudiantes hacen del modelo dinámico, y la eficacia del momento de exploración con un modelo dinámico, se presta especial atención a los indicadores mediacionales y ecológicos, además de la interacción de la idoneidad temporal con el resto de facetas.

Tabla 3.2: Indicadores de indoneidad didáctica I (Godino, 2011).

Indicadores de idoneidad epistémica
Situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Situaciones de generación de problemas (problematización).
Expresión verbal, gráfica, simbólica; traducciones y conversiones. Lenguaje adecuado a la etapa. Situaciones de expresión matemática e interpretación.
Definiciones y procedimientos adaptados al nivel educativo. Enunciados y procedimientos fundamentales del tema. Situaciones de negociación/generación de proposiciones/procedimientos.
Explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas. Situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí. Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos.
Indicadores de idoneidad cognitiva
Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Los alumnos logran la apropiación de los conocimientos. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión. Los resultados de las evaluaciones se usan para tomar decisiones.
Indicadores de idoneidad afectiva
Las tareas tienen interés para los alumnos. Situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas.
Se promueve la participación, la perseverancia y la responsabilidad. El argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Se promueve la autoestima, evitando el rechazo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

3.9. Obstáculos

En la génesis histórica del conocimiento, un hecho científico se interpreta de una manera particular en una época determinada. Sin embargo, cuando un esquema de conocimiento más elaborado sustituye al anterior, el significado del conocimiento se modifica para adecuarlo al nuevo esquema del saber. El conocimiento se construye,

Tabla 3.3: Indicadores de indoneidad didáctica II (Godino, 2011).

Indicadores de idoneidad interaccional
El profesor hace una presentación adecuada del tema. Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos. Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.
Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Tratan de convencer apoyándose en argumentos matemáticos. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.
Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
Indicadores de idoneidad mediacional
Se usan materiales manipulativos e informáticos. Situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
El número y la distribución de los alumnos es adecuado. El horario del curso es apropiado. El aula y la distribución de los alumnos es adecuada.
El tiempo es suficiente para la enseñanza pretendida. Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad.
Indicadores de idoneidad ecológica
Contenidos, implementación y evaluación en directrices curriculares.
Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. Integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo.
Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional.
Formación en valores democráticos y pensamiento crítico.
Los contenidos se relacionan con otros intra e interdisciplinares.

entonces, en términos de contra-pensamiento, y la noción de *obstáculo epistemológico* es básica para explicar el problema de la adquisición del conocimiento científico.

> "No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la naturaleza transitoria de los fenómenos, ni de implicar una debilidad de los sentidos del ser humano y de la mente humana; sino que es en el acto mismo de conocer íntimamente donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, la lentitud y los problemas [...] conocemos en contra de un conocimiento previo." (Bachelard, 1938, 13)

Al contrario de lo que sucede en las corrientes empiristas y conductistas (donde el error se asocia a la ausencia de un conocimiento, a la falta de determinación o a una respuesta proporcionada al azar), en el contexto constructivista un error puede también representar un conocimiento previo, que tuvo éxito y fue eficaz en un contexto determinado, pero que no ha sido adaptado y entorpece la adquisición de nuevos contenidos.

Este tipo de errores son manifestaciones de un obstáculo y complementan el significado de los conocimientos adquiridos (Bachelard, 1938; Piaget, 1975). Además, sus manifestaciones no son erráticas y se pueden predecir.

Los obstáculos son de la misma naturaleza que el saber, y por ello, es necesario utilizar con ellos las mismas estrategias con las que se gestiona el saber: una situación o un problema, bien seleccionado, a través del cual se motiva la dialéctica entre los actores y el saber.

Un conocimiento particular se considera óptimo en relación a un tipo de tarea, cuando la tarea se resuelve de manera efectiva a partir de ese contenido, sin ser necesario un conocimiento más elaborado. Es decir, en la resolución de esta tarea, el empleo de un conocimiento más sofisticado resulta excesivamente "costoso" para el sujeto. Sin embargo, la tarea evoluciona, y se añaden nuevas variables que dificultan su consecución. El conocimiento previo se puede mantener cierto de forma local; pero, de forma global, pierde el carácter óptimo del que disfrutaba. La progresión regular del conocimiento científico se realiza, pues, en términos de saltos informacionales (figura 3.12).

El obstáculo puede tomar el papel de error de enseñanza, insuficiencia de la materia o dificultad intrínseca del saber. Algunos obstáculos tienen su origen dentro del sistema didáctico, y otros son intrínsecos del saber. Los obstáculos se clasifican, según su origen, en obstáculos *ontogénicos*, *didácticos* y *epistemológicos*:

- *Obstáculos de origen ontogénico.* La epistemología genética suministra evidencias de estadios de desarrollo de los estudiantes con una correspondencia directa en la adquisición de conceptos. Las limitaciones de los estudiantes en un cierto estadio generan por tanto obstáculos ontogénicos. El desarrollo neurofisiológico de los sujetos es responsable de ciertos errores que cometen los alumnos. Por ejemplo, los niños desarrollan la *conservación de las cantidades numéricas* a partir de los 7 años (Piaget, 1975).

- *Obstáculos de origen didáctico.* Piensa el docente que el espíritu científico se desarrolla de forma similar a una lección, que se puede reproducir el saber científico en clase y que se puede hacer comprender una demostración repitiéndola punto por punto. El profesor de ciencias "no comprende que no se comprenda". Sin embargo, el estudiante no adquiere una cultura experimental en el aula, más bien, cambia de conocimiento experimental adecuando sus conocimientos antiguos. En este sentido, los diseños de proyectos y actividades educativas sufren sucesivas modificaciones cada vez que se implementan en aula, tras lo cual se evalúa y ajusta su pertinencia. Un desajuste en la elección del proyecto dentro del sistema educativo puede provocar un obstáculo de origen didáctico.

- *Obstáculos de origen epistemológico.* No hay forma de escapar a los obstáculos que son intrínsecos al saber, es decir, los obstáculos epistemológicos. Esto no quiere decir que se deba amplificar su efecto, ni tampoco que se deban reproducir las condiciones del contexto histórico en el que se superaron.

En la práctica matemática con soporte en un modelo dinámico, se pueden encontrar ejemplos de las tres categorías de obstáculos.

Belaunzaran, Echarri y Elcano (Lasa, 2015) presentan una actividad para introducir la simetría de eje vertical en el aula de 5 años, en donde los niños resuelven puzzles simétricos sobre un modelo dinámico[4]. En esta actividad se observan dos tipos de obstáculos ontogénicos. Por un lado, los niños a estas edades no son capaces de coordinar el uso del ratón con la información que se muestra en pantalla. Por otro lado, existen diferencias en el desarrollo de la actividad, en función de su diseño: los niños realizan con éxito las tareas de composición y descomposición de figuras geométricas, por *arrastre*[5] de sus piezas (en la figura 3.17, los niños arrastran las partes del cuadrado morado asta formar el patrón); sin embargo, no son capaces de reproducir la segunda mitad de una figura poligonal simétrica, cuando sus vértices se colocan sobre una plantilla de cuadrícula (en la figura 3.17, los niños no pueden reproducir la casita verde del patrón).

A partir de la Educación Primaria, la cuadrícula es un instrumento habitual en la práctica matemática del soporte “lápiz y papel”, pero sigue siendo fuente de obstáculos ontogénicos.

En el anexo A se presenta una situación didáctica, diseñada para la Educación Primaria, que tiene por objetivo hacer evolucionar conocimientos geométricos por adaptación a diferentes soportes (Lasa y Wilhelmi, 2014). El uso de una cuadrícula promueve el descubrimiento de figuras rectangulares, pero puede llevar al estudiante a interpretar la unidad de medida como la distancia no perpendicular entre dos líneas paralelas (Dickson, Brown y Gibson, 1991). Este obstáculo tiene su origen en el número irracional, el cual no es accesible para un niño de segundo ciclo de Educación Primaria.

Además, los límites de la cuadrícula llevan al estudiante a desarrollar la tarea de en función de sus restricciones, y conceptualiza la construcción de la figura en términos de vértices en coordenadas discretas y segmentos de longitud unitaria. Tampoco se motiva la posibilidad de fraccionar la unidad para medir objetos que sean menores que la unidad de medida utilizada, dificultando la conmensurabilidad de longitudes.

Lasa y Wilhelmi (2014) identifican también obstáculos de origen didáctico en la Educación Primaria, al introducir a los estudiantes las nociones de perímetro y área. Se constata en este trabajo, que, mientras que los estudiantes de segundo ciclo de EP diferencian las dos nociones, los estudiantes de tercer ciclo de EP las mezclan en algunos casos. La mera reproducción procedimental del cálculo aritmético de perímetros y áreas

[4] El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1640675`

[5] En relación esta técnica de *arrastre*, habitual en los modelo dinámicos diseñados con GeoGebra, Or (2013, 2015) propone que el acto de “arrastre” debe ser considerado, en las primeras etapas educativas, como un “proceso matemático” con un estatus reconocido, en el sentido de que es una *acción* que provoca y promueve en los niños el razonamiento sobre propiedades e *invariables* geométricas.

a) Formación de cuadrados por descomposición: los niños realizan la tarea sin dificultad.

b) Formación de una figura por *arrastre* de vértices: *obstáculo ontogénico*.

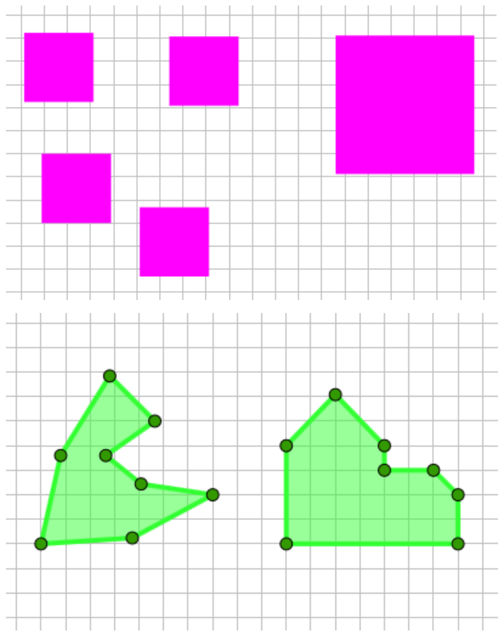


Figura 3.17: Obstáculos ontogénicos (Lasa, 2015).

parece estar en el fondo del obstáculo “equiparación de perímetro y área”, que tiene su origen dentro del propio sistema educativo.

El software de geometría dinámica también permite solventar algunos obstáculos didácticos clásicos. Por ejemplo, en los soportes de papel, la presentación ostensiva y estereotipada de figuras planas genera un obstáculo de origen didáctico en la identificación de formas geométricas. Por restricciones de espacio y por el formato del libro, las figuras poligonales se suelen presentar en posición horizontal, apoyadas sobre la base de mayor longitud, o con dimensiones en proporciones simples (por ejemplo, $1:2$ o $2:3$) y agradables a la vista. de esta forma, el niño puede no identificar una forma geométrica que no se ajuste a la presentación dada.

Así, el software dinámico permite la representación y la manipulación de modelos de figuras planas, entendidas como clases de objetos que cumplen una propiedad. En este sentido, el modelo dinámico facilita la presentación de una figura plana como ejemplar (extensivo) y como elemento genérico de una clase (intensivo). La representación semiótica de las figuras facilita de esta forma la asignación de significados personal e institucional a los objetos geométricos ostensivos.

A partir de Educación Secundaria, se empieza a trabajar la representación gráfica de funciones. Lasa y Wilhelmi (2013) muestran una galería de construcciones dinámicas que presentan toda una familia de funciones y sus propiedades (Teoremas clásicos de funciones continuas y derivables). De esta manera, se evita la representación extensiva de unos pocos ejemplos. El profesor tiene en su mano una galería suficientemente amplia de ejemplos de funciones de un tipo determinado, facilitando la presentación general o intensiva de la familia. En la figura 3.18 se puede ver la captura de imagen de un modelo dinámico para explorar el Teorema de Bolzano, en el que se trabaja sobre una familia de funciones.

Los obstáculos que se puedan encontrar en distintos tipos de situaciones problemas requieren para su superación de distintas estrategias dialécticas entre profesor y estu-

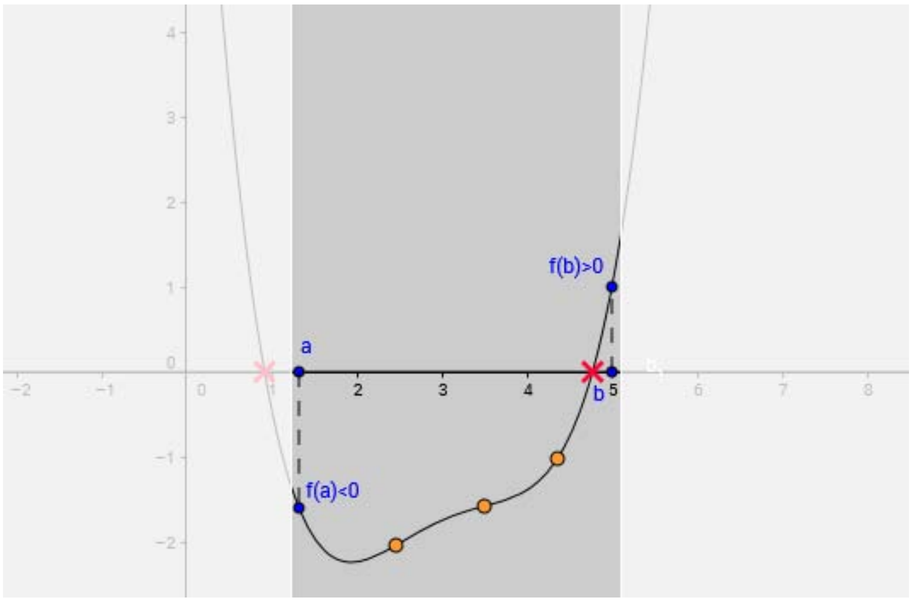


Figura 3.18: Teorema de Bolzano (Lasa y Wilhelmi, 2013).

diante, en las fases de acción, formulación y validación. El salto de la aritmética al álgebra es un contexto típico que genera obstáculos de origen epistemológico. La aritmética generalizada y la ampliación de los conjuntos numéricos choca con la concepción que el estudiante tiene con el conjunto de los números naturales y las propiedades de las operaciones elementales $(+, -, \times, \div)$ en dicho conjunto.

3.10. Fenómenos didácticos

Los fenómenos didácticos guardan relación con la *transposición didáctica* de un conocimiento:

> "La identificación de estos fenómenos se reduce a la construcción de un 'modelo' entre los actores, cara a cara, y de las relaciones y restricciones que los vinculan, demostrando que la interacción de estas restricciones produce efectivamente los efectos y la evolución observada." (Brousseau, 1997, 25)

El objetivo de la Didáctica consiste en analizar, por un lado, qué se ha comunicado, y por otro lado, qué se ha reconstruido en una situación de aprendizaje particular. La identificación de los fenómenos didácticos ocurridos en el proceso de enseñanza, da herramientas para llevar a cabo éste análisis.

La Teoría de situaciones didácticas identifica ciertos fenómenos elementales, algunos de las cuales son el efecto Topaze, el efecto Jourdain y el deslizamiento metacognitivo.

- *Efecto Topaze.* Cuando el estudiante falla una y otra vez en la realización de la misma tarea, el docente puede tomar la decisión de cargar con la mayor parte de la responsabilidad en la ejecución de la tarea. El incremento de esta responsabilidad por parte del docente trae consigo una reducción de la capacidad de producir un aprendizaje a través de la situación (figura 3.19). La disminución en la dificultad de la tarea provoca una mayor tasa de éxito entre los estudiantes, un hecho deseable desde el punto de vista del docente. Sin embargo, el *significado óptimo* del conocimiento que se quiere construir por medio de la situación puede quedar por debajo del *saber objetivo* del acto de enseñanza. En este caso, el acto de enseñanza *colapsa*, y una alta tasa de éxito en la tarea no se traduce en la construcción de conocimiento. Es necesario gestionar esta incertidumbre para dar con un equilibrio en el sistema didáctico.

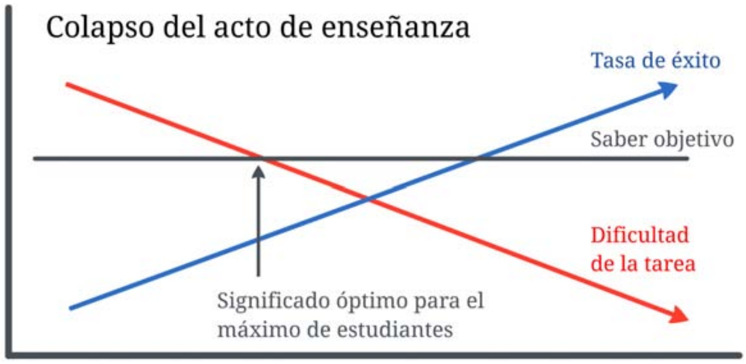


Figura 3.19: Efecto Topaze.

En el apartado 2.2 se han descrito los momentos en los que la utilización de GGB es pertinente en la actividad matemática en el aula, uno de los cuales es la *exploración* de propiedades matemáticas a partir de un modelo dinámico, normalmente prediseñado.

Por ejemplo, el profesor puede solicitar a un estudiante de secundaria el estudio de perímetros y áreas de ciertas figuras planas. La ejecución de la tarea requiere cálculos aritméticos y la manipulación de expresiones algebraicas. Ante un hipotético fracaso del estudiante, el profesor opta por diseñar él mismo un modelo dinámico para asistir la construcción de las figuras y los cálculos involucrados, y lo introduce como fase dentro de la actividad, tomando así la responsabilidad de la tarea. El estudiante construye la figura en la pantalla del ordenador y el software realiza los cálculos pertinentes. De esta forma, el estudiante contesta correctamente a las preguntas del profesor y tiene éxito en la tarea, sin llegar a manipular las expresiones algebraicas que eran objeto de estudio. En resumen, el profesor libera de responsabilidad al estudiante y el acto de enseñanza ha colapsado.

Éste fenómeno puede aparecer incluso cuando sea el estudiante el encargado de la construcción de las figuras por medio del software. La construcción de figuras geométricas con software dinámico requiere de la utilización de un número determinado de herramientas del programa junto con conocimientos de geometría plana. Ante una eventual incapacidad de los estudiantes para construir una figura por si mismos, el docente puede tomar la decisión de guiar, paso a paso, los pasos necesarios para la obtención de la figura. De esta forma, el estudiante no toma decisiones, no actua sobre la situación y no utiliza el instrumento de forma autónoma.

- *Efecto Jourdain.* Con el ánimo de incentivar la actividad en el estudiante, el maestro atribuye al significado personal del estudiante un significado institucional del cual carece. De forma intencionada y equívoca, la actividad del estudiante se interpreta como actividad científica, para evitar una discusión abocada al fracaso. Este fenómeno ocurre a menudo dentro de las metodologías de construcción del saber, y es, en realidad, un caso particular del efecto Topaze.

Pongamos el caso de un maestro de Educación Primaria que diseña herramientas predeterminadas con GeoGebra. Las herramientas consisten en iconos de colores que permiten la construcción de formas planas de distintos colores. A continuación, presenta a sus alumnos una construcción dinámica en la cual los alumnos tienen que seleccionar formas geométricas de colores y construir figuras sobre la pantalla de ordenador. El maestro puede animar a los alumnos diciendoles que están clasificando figuras geométricas a partir de un código de colores, a pesar de que los niños solo estén "dibujando".

El malentendido fundamental descrito en el efecto Jourdain también se puede dar, en el aula de secundaria, si el profesor no distingue claramente los momentos de *ilustración* y *demostración* (2.2) de una propiedad. El profesor que pretende demostrar una propiedad geométrica al estudiante, le puede mostrar una construcción que ilustra la propiedad. Para el estudiante, la ausencia de contraejemplos es una evidencia suficiente que verifica la proposición. Si un estudiante se contenta con la mera manipulación del modelo ilustrativo, pero de forma posterior no argumenta la veracidad de la afirmación en discusión, puede recibir por parte del docente un mensaje equivocado: la ejecución de movimientos del ratón sobre el modelo dinámico ilustrativo es suficiente para construir conocimiento.

- *Deslizamiento metacognitivo.* Fenómeno por el cual el instrumento empleado para la enseñanza sustituye como objetivo de aprendizaje al conocimiento matemático pretendido. Un ejemplo clásico de este fenómeno es la inserción de los diagramas de Venn-Euler como objetivo de enseñanza como "sustitución" de la Teoría de conjuntos en la década de 1960, en todas las etapas educativas.

En la sección 2.2 se describe cómo la introducción de software dinámico como instrumento de trabajo en el aula de matemáticas puede generar un fenómeno de *deslizamiento metacognitivo.* En particular, la instrucción en el manejo de GeoGebra puede sustituir la actividad matemática pretendida como objetivo de aprendizaje. En una actividad matemática particular, se puede llegar a la reproducción repetida de la fase de instrucción del instrumento, sin entrar a discutir los conocimientos matemáticos implicados en la tarea. La *creación* (sección 1.2) de un modelo dinámico por parte del estudiante puede también exceder el ámbito de instrucción matemática.

Capítulo 4

Ingeniería didáctica

Breve resumen
Dentro del programa epistemológico y fundamentada en la TSDM y el EOS, la ingeniería didáctica es un método de investigación basado en el diseño, que trata de definir el problema de la acción y los medios de la acción sobre el sistema de enseñanza, mediante el diseño de una didáctica técnica. El empleo de un amplio abanico de métodos estadísticos permite evitar la polarización entre métodos cualitativos y cuantitativos.

Laburbilduma
Programa epistemologikoaren barruan, ingeniaritza didaktikoa diseinuan oinarrituriko ikerketaren adar bat da. Metodologia honek akzioa eta akziorako bitartekoak aztertzen ditu eta didaktika tekniko bat diseinatzea du helburu. Matematikako egoera didaktikoen teorian eta Ikuspuntu ontosemiotikoan oinarritzen da ingeniaritza didaktikoa. Metodo estatistikoen aukeraketa zabal baten bidez saihestuko dira metodo kualitatibo eta kuantitatiboen arteko polarizazioa.

Short summary
Within the epistemological program, didactical engineering is a particular type of design-based research program, which seeks to define the problem of action and the means of action within the educational system, and allow the design of normative didactics. Didactical engineering is based on OSA and TDSM. The use of a wide range of statistical methods avoids polarization between qualitative and quantitative methods.

4.1. Estructura clásica de una ingeniería didáctica

La noción de *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989), como metodología de investigación, tiene su origen a principios de la década de 1980. A pesar de que este nombre hace referencia al quehacer de un científico-ingeniero, el investigador en didáctica de las matemáticas tiene que lidiar con objetos complejos que exceden el ámbito puramente científico. En efecto, la didáctica de las matemáticas se ocupa de "las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza" y "el papel que conviene hacerle tomar a las realizaciones didácticas en clase, dentro de las metodologías de la investigación didáctica" (Artigue, 1995, 34). Se enfatizan de esta forma las producciones para la enseñanza junto con metodologías específicas de investigación. Esta metodología requiere, por un lado, controlar *a priori* tanto el diseño teórico como la puesta en marcha de la propuesta de enseñanza, y por otro lado, comparar *a posteriori* el estudio teórico con las realizaciones efectivas de los estudiantes.

> "Les didacticiens français ont recours à des analyses élaborées préalablement à l'expérimentation en classe. Ce passage de la pensée à l'action a été caractéristique de leur travail durant ces deux décennies. Conjointement au développement de l'ingénierie didactique [...] a été accentué l'usage des études de cas et des analyses *a posteriori* dont la confrontation avec l'analyse *a priori* constitue un moyen de validation de l'hypothèse de recherche [...] La didactique des mathématiques française possède une remarquable unité. Certes les travaux menés par différents didacticiens varient dans leurs centres d'intérêt mais ils paraissent tous relever d'une épistémologie commune et partager la même méthodologie." (Kilpatrick 1994, 89-90)

El esquema de experimentación se basa en las *realizaciones didácticas* en el aula. Es decir, se observan y se analizan, dentro de una propuesta de enseñanza particular, las nociones y los procesos que ponen en funcionamiento los estudiantes. El análisis de las realizaciones busca la obtención de funcionamientos estables dentro del *medio didáctico* (descrito en términos de la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas, TSDM), e incide en la reproducibilidad de las situaciones didácticas.

> La connaissance, l'homme el le milieu étant ce qu'ils sont, il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions 'erronées'(ou vraies localement mais non généralement). Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique de connaître ces conditions et de les utiliser. (Brousseau, 1998, 123).

Los condicionantes que rigen las interacciones entre el sujeto y el medio determinan la elavoración de instrumentos técnicos que tienen un doble propósito: por un lado, el desarrollo teórico-práctico de la didáctica, como instrumento de intervención en los sistemas didácticos; por otro lado, el progreso de la didáctica como disciplina científica, basada en la realización de pruebas de contingencia que validen el diseño de una ingeniería. Se pretende, así, validar las hipótesis formuladas *a priori*, a partir de un contraste de las mismas con los hechos observados *a posteiori*.

La ingeniería didáctica trata de identificar los condicionantes que garantizan la *reproducibilidad* de una situación didáctica, ligada al empleo de estrategias de acción que los sujetos emplean y adaptan en función de las respuestas que les da el medio antagonista. La adaptación de las estrategias de acción del sujeto se controla adecuando las *variables didácticas* del sistema, y el contraste entre los análisis *a priori*y *a posteriori* sirve de validación interna de las conclusiones que se puedan extraer en la ejecución de una secuencia de situaciones. Las observaciones deben permitir la *falsabilidad* de la prueba experimental, y para ello, se precisa en el análisis *a priori*, de la definición teórica de al menos dos patrones de ejecución que representen modos de "hacer" y de "saber hacer" propios de concepciones distintas, que puedan ser observables.

> "La cuestión de la reproducibilidad de las situaciones incide sobre la fiabilidad de las observaciones y, sobre todo, sobre su validez. La fiabilidad presupone una estabilidad en el funcionamiento del sistema didáctico; el contraste repetido entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* permite hacer evolucionar las condiciones del medio (incluidas las intervenciones del profesor) que garanticen la construcción del saber pretendido, de tal manera que la situación devenga reproducible. Es entonces cuando su *validez* puede ser aceptada, puesto que la situación es exitosa y aplicable de manera estable." (Wilhelmi y Lacasta, 2011, 61)

En la figura 4.1 se muestra a la izquierda el esquema genérico de la ingeniería didáctica y a la derecha su desarrollo en la TSDM.

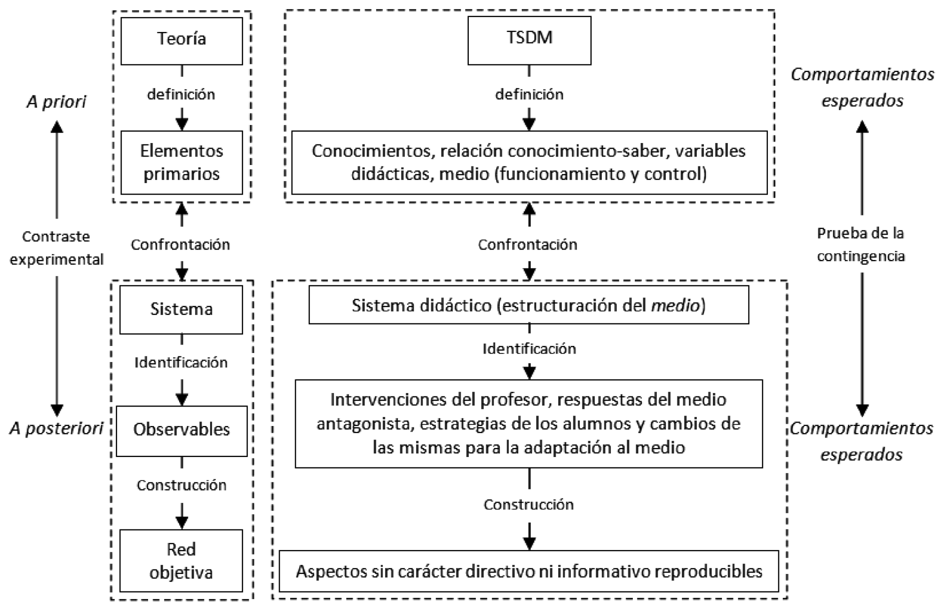


Figura 4.1: Relación entre ID y TSMD. (Wilhelmi y Lacasta, 2011, 62)

Una *ingeniería didáctica* puede tener como objetivo el estudio de un proceso de aprendizaje de una noción determinada (*micro-ingeniería* que elabora una génesis artificial de la noción) o el estudio de un proceso de enseñanza que integre un dominio más amplio (*macro-ingeniería*). En todos ellos, el registro de casos y el estudio de comportamientos observados permite una validación esencialmente interna, la cual caracteriza su funcionamiento metodológico.

Fases de una ingeniería didáctica

La estructura clásica de una *ingeniería didáctica* se articula en las fases de *análisis preliminar*, *concepción y análisis* a priori *de las situaciones didácticas de la ingeniería*, *experimentación*, y por último, *análisis* a posteriori *y evaluación* (Artigue, 1995).

Una ingeniería didáctica se comienza a articular con el análisis preliminar del objeto de estudio. Dentro del estudio preliminar, se realiza un análisis epistemológico de los contenidos de enseñanza, de la enseñanza tradicional, de las concepciones de los estudiantes, del campo de restricciones y de los objetivos específicos de la investigación. Así, el análisis epistemológico se centra en la determinación de *marcos*, en el sentido de Douady (citado por Artigue, 1995), para el desarrollo y funcionamiento dentro del campo matemático objeto de estudio.

Una vez realizado el análisis epistemológico, se analiza la presencia de estos marcos en las propuestas educativas en la enseñanza tradicional, para de esta manera poder identificar aquellos que ocupan un lugar privilegiado dentro del sistema de educativo. Es de esperar que, por motivos históricos, la enseñanza tradicional se centre en un marco determinado, y es preciso estudiar la viabilidad de otro enfoque epistemológico que pueda ser más satisfactorio, junto con las restricciones que se oponen a la extensión de otros marcos.

El campo de restricciones determina donde se va a situar la realización didáctica efectiva, y se clasifica en tres dimensiones: dimensión epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica o de enseñanza. El estudio de las concepciones de los estudiantes guarda relación con la identificación de las dificultades y los obstáculos que determinan su evolución, y por ello, no es casual que las dimensiones del campo de restricciones y los *obstáculos* (Brousseau, 1997) tengan la misma clasificación. El estudio detallado de las concepciones de los estudiantes es una característica del estudio previo, puesto que una idea clara de las dificultades y de los errores más frecuentes permiten a la ingeniería provocar, de manera controlada, la evolución de las concepciones.

> "Los trabajos que el investigador ha realizado como pilares de su ingeniería se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma [...] Los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de 'preliminaresén un primer nivel de elavoración [...] Las exigencias de un análisis preliminar no son las mismas para una investigación cuyo objetivo es la construcción de una génesis artificial del conocimiento en un campo conceptual determinado [...] que para una investigación que [...] pretenda implantar una estrategia global de enseñanza." (Artigue, 1995, 39)

Una vez realizado el análisis previo, en el análisis *a priori*, es decir, la segunda fase de la ingeniería didáctica, el investigador selecciona las variables didácticas sobre las que actúa en la ingeniería. El investigador selecciona, por un lado, las variables *macro-didácticas* o globales, que están ligadas, en general, a la selección de los objetos matemáticos primarios, de los procesos y de los instrumentos con los que se organiza la práctica matemática. Estos aspectos son comunes a una investigación basada en el diseño, y el EOS, tal como se verá en la sección 4.2, ofrece herramientas para la articulación del análisis *a priori*, en las escalas macro y micro-didácticas. En efecto, una vez concretadas las variables globales, el investigador selecciona la variables *micro-didácticas* o locales, es decir, aquellas que están ligadas con la organización del medio didáctico y el diseño de la situación didáctica (Brousseau, 1997).

Por lo tanto, la selección de las variables globales y locales que determinan la situación didáctica se realiza atendiendo a las restricciones que se han identificado en el análisis previo, y la ingeniería didáctica contempla la gestión del medio en términos de la TSDM. La ingeniería didáctica debe garantizar que las variables globales y locales estén en relación unas con otras, y que el diseño, la organización y la gestión de las situaciones didácticas este en correspondencia con los *marcos* teóricos previamente analizados, es decir: el diseño de la situación debe garantizar que el estudiante asigne un significado personal al objeto matemático.

El análisis *a priori* es, pues, un análisis de control del significado personal que los estudiantes ponen en funcionamiento en el desarrollo de la situación didáctica. En las fases acción, formulación y validación, los estudiantes asignan un significado personal a los objetos matemáticos que manipulan, y la ingeniería didáctica debe garantizar que el diseño de la situación permita al estudiante validar internamente su práctica matemática.

Además de la descripción de la situación didáctica y de la articulación del medio didáctico, en el análisis *a priori* se analizan los comportamientos esperados de los estudiantes y las acciones potenciales que estos estarán en disposición de realizar, los conocimientos previos que el alumno debe poseer para enfrentarse a la situación didáctica (entender el propósito de la situación) y resolverla (ganar el juego que el docente le propone), así como el reparto de responsabilidades entre el docente y los estudiantes dentro del medio didáctico (el contrato didáctico particular que rige durante el desarrollo de la situación); en este sentido, la ingeniería didáctica toma prestadas de la TSDM, las nociones de *contrato didáctico* y *fenómeno didáctico* (Brousseau, 1997).

> "El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué [sentido] las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado [...] Este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en junego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*". (Artigue, 1995, 45)

En el análisis *a posteriori*, se utiliza la información registrada durante la fase de *experimentación*, y a partir de esta información, se confrontan las hipótesis previas del análisis *a priori* con las conclusiones obtenidas en el proceso de experimentación. El conjunto de datos se recoge durante la fase de *experimentación*, a partir de observaciones directas del docente, grabaciones en video o audio, producciones escritas de los estudiantes, respuestas a cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, etc.

Por un lado, el análisis *a priori* es fundamentalmente teórico (y en el caso de estudios macro-didácticos, considerablemente extenso), y por otro lado, el análisis *a posteriori* es contingente y se ciñe a los resultados observados. Por todo ello, la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori* genera en algunos casos distorsiones, y la ingeniería didáctica clásica no contempla herramientas propias para la gestión de un proceso de validación externa. Este hecho no invalida la posibilidad de utilizar herramientas estadísticas externas que aporten información a la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*, en una ingeniería didáctica particular. De hecho, en la sección 4.3, se presentan algunos métodos estadísticos, tales como el análisis estadístico implicativo, el análisis de componentes principales, el análisis de factores, o la estadística descriptiva, que posibilitan una validación externa y generalizada, en términos de inferencia estadística. En la validación externa, se miden diferencias significativas en las variables estadísticas, entre un grupo experimental y un grupo de control. Las herramientas de la ingeniería didáctica incorporan, en este caso, la información obtenida en la validación externa en la toma de decisiones de la validación interna del proceso. Se modifican así los valores de las variables *micro* y *macro-didácticas*, para volver a poner en marcha la nueva secuencia de estudio.

Dado que una ingeniería didáctica es un diseño de un proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la fase experimental de la ingeniería queda inevitablemente en manos del docente. Atendiendo a la *memoria didáctica* del aula (Centeno, 1989), el mismo proceso de enseñanza de un mismo objeto matemático puede provocar que los estudiantes, de un grupo a otro, asignen un significado personal al objeto por vías y medios variables. Según el *fenómeno de obsolescencia* (Brousseau, 1997), el docente realiza intervenciones didácticas en el aula para intentar reproducir una *historia didáctica* similar en todos los grupos de estudiantes, en lugar de reproducir las condiciones iniciales que hacen posible una significación correcta por parte de los estudiantes del objeto matemático que es objeto de estudio. Para evitar este fenómeno didáctico, hay que incidir en la relación del docente con el estudiante, y asegurar los medios para que la situación de enseñanza evolucione en función de la validación interna del proceso de estudio, y no en función de la historia de la situación.

Este fenómeno está íntimamente relacionado con las concepciones y las representaciones personales que los docentes tienen sobre las matemáticas, y cómo influyen estas representaciones en la toma de decisiones del docente en la práctica diaria en el aula. Según Artigue (1995), la *epistemología del docente* está formada por su concepción de la naturaleza de las matemáticas, y su concepción de la enseñanza y del aprendizaje. Estas concepciones del docente, junto con las consecuencias que se derivan de ellas a la hora de implementar la práctica educativa, conforman la denominada *representación metacognitiva* del docente sobre las matemáticas. Por ello, las interacciones del docente con el medio didáctico son también objeto de estudio de la ingeniería didáctica, el investigador no las debe contemplar únicamente como un "ruido inevitable en la investigación" (Grenier, 1988), y se debe garantizar la comunicación didáctica entre el investigador y el docente para el correcto desarrollo de la ingeniería didáctica en el proceso de enseñanza.

4.2. Ingeniería didáctica basada en el EOS

La estructura de una *ingeniería didáctica* clásica, fundamentada en los trabajos de Artigue (1995) y Brousseau (1997), se puede asimismo clasificar como un caso particular de una *investigación de diseño instruccional* (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer y Schauble, 2003), puesto que las investigaciones basadas en el diseño contemplan también una fase de diseño, la implementación en contextos de clase y la evaluación interna de resultados. Desarrollos teóricos recientes muestran como una ingeniería didáctica o una investigación basada en el diseño se pueden generalizar y fundamentar en el marco del EOS (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013). En particular, Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014) presentan un desarrollo de ingeniería didáctica basada en el EOS, y lo ejemplifican en un proceso de enseñanza de la estadística. En efecto, en la sección 4.1, se han anticipado alguna similitudes entre las fases de una ingeniería clásica y el aporte que las herramientas del EOS pueden hacer a una ingeniería, consistentes en la introducción de objetos, dualidades y procesos del conocimiento y de la instrucción en matemáticas.

En el marco del EOS, los sistemas de prácticas y las configuraciones de objetos y procesos sirven de herramientas teóricas para el análisis epistemológico y cognitivo de un proceso de enseñanza. Desde el punto de vista institucional, se requiere construir un significado de referencia de las prácticas matemáticas necesarias para resolver un tipo de tarea, es decir, las configuraciones de objetos y procesos que se activan en dichas prácticas. Además del significado institucional de referencia, en el plano personal, se debe realizar un análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos que el estudiante pone en funcionamiento a la hora de resolver la tarea. Para evaluar la competencia del estudiante, su adquisición de conocimiento y su comprensión de los objetos, se analiza la validez de las prácticas personales y su adecuación a la perspectiva institucional.

Junto con las dimensiones institucional y personal, el diseño instruccional debe analizar las normas que condicionan el proceso de estudio y las interacciones didácticas entre los actores del proceso de enseñanza y el medio didáctico. Este análisis tiene por objetivo encontrar aquellas configuraciones didácticas que optimicen el aprendizaje matemático.

El análisis del proceso de estudio debe contemplar, asimismo, la dimensión normativa, caracterizada en las dimensiones (Godino et al., 2009):

- *Epistemológica-ecológica*. Determinación de los significados institucionales en cada fase del proceso es estudio. Interpretación de los significados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos. Descripción del sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.

- *Cognitiva-afectica*. Descripción de los significados personales de los estudiantes durante el proceso de estudio. Interpretación de los significados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos. Análisis de la sensibilidad del proceso a los estados afectivos de los estudiantes.

- *Instruccional*. Análisis de patrones de interacción entre el docente y los estudiantes. Análisis de la negociación de significados entre el docente y los estudiantes. Descripción de los recursos técnicos previstos. Valoración del uso del tiempo.

La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa permite identificar los *hechos didácticos* que han ocurrido en las fases de diseño e instrucción. De esta forma, se pueden analizar las normas y su tipología, la forma en la que estas condicionan la enseñanza y los aprendizajes, y se puede valorar la pertinencia de las intervenciones del docente y de los alumnos. Además, el análisis debe permitir identificar posibles cambios en las normas que permitan un control eficaz del sistema didáctico, para mejorar así su funcionamiento, y garantizar que los significados personales evolucionen hacia los significados institucionales pretendidos. La figura 4.2 resume la estructura de una investigación basada en el EOS.

La estructura de las fases de una investigación varía en función del marco teórico empleado, pero las diferencias en la organización no son significativas, y la diferencia es fundamentalmente terminológica. Así, las fases de estudio en las que se organiza la ingeniería didáctica clásica (preliminar, *a priori*, experimentación y *a posteriori*), las fases de una investigación basada en el diseño (planificación del experimento, experimentación y análisis retrospectivo) y las fases de investigación propuestas en el marco del EOS

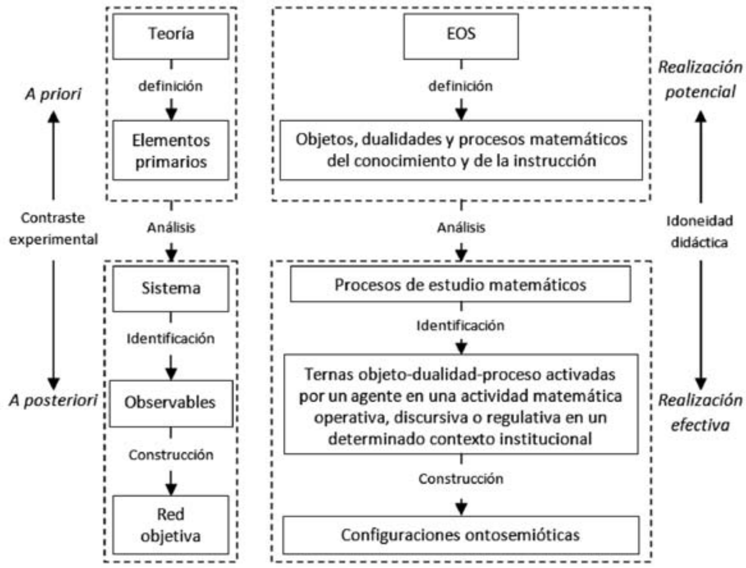


Figura 4.2: Relación entre ID y EOS. (Wilhelmi, 2009)

(estudio preliminar, diseño de la trayectoria didáctica, implementación y evaluación o análisis retrospectivo; Godino et al. (2014)), son en esencia similares.

A diferencia de la ingeniería didáctica, en la cual el contraste entre los análisis *a priori* y *a posteriori* valida internamente las proposiciones y las actuaciones, en la estructura de una investigación de diseño la valoración se realiza, con frecuencia, a partir de criterios de validez externa. Por ello, no es habitual en estos diseños una fase de análisis previo que contemple comportamientos esperados de los estudiantes o la planificación de intervenciones controladas del docente.

En la clasificación de las fases, los términos análisis *a priori*, *experimentación* y análisis *a posteriori* propios de la ingeniería didáctica, se describen en el EOS mediante el *diseño*, *implementación* y *evaluación*, respectivamente. Godino et al. (2014) justifican esta sustitución atendiendo a la naturaleza del término *variable* y su utilización en el contexto de la investigación en didáctica.

> "La ingeniería didáctica realiza un contraste entre los análisis *a priori* y *a posteriori* basado en variables claves en la experimentación que buscan apoyar las hipótesis. El lugar central de la noción de variable quedaba justificada por la aplicación de diversos métodos estadísticos, en detrimento de justificaciones más cualitativas. Sin embargo, es aceptado que en la actualidad que la ingeniería didáctica permite superar la polémica cualitativo-cuantitativo." (Godino et al., 2014, 6)

Por todo ello, en la descripción de las fases en las que Godino et al. (2014) organiza la investigación basada en el EOS, se toma de forma tácita esta nueva terminología, y estas se clasifican en *estudio preliminar*, *diseño de la trayectoria didáctica*, *implementación de la trayectoria didáctica*, y por último, *evaluación o análisis retrospectivo* (tabla 4.1).

Cada una de las fases se diseña o se lleva a cabo teniendo en cuenta las dimensiones epistemológica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional.

Tabla 4.1: Comparación de las fases en una investigación.

Ingeniería didáctica	**Investigación basada en el diseño**	**Enfoque ontosemiótico**
Estudio preliminar	Planificación del experimento	Estudio preliminar
Análisis a priori	*	Diseño de la trayectoria didáctica
Experimentación	Experimentación	Implementación de la trayectoria didáctica
Análisis a posteriori	Análisis retrospectivo	Evaluación o análisis retrospectivo

* En gerenal, ausencia de un análisis previo de comportamientos esperados e intervenciones del docente.

En la primera fase de *estudio preliminar*, se delimita el objetivo y el alcance de la investigación. Para ello, se caracterizan los significados institucionales y personales de referencia, y las relaciones entre ambos. Estos significados de referencia y significados pretendidos en el proceso de instrucción, se elaboran a partir de un análisis de los sistemas de prácticas operativas y discursivas, entendidas como toda actuación o expresión que realiza el estudiante para resolver la situación-problema, comunicar la solución obtenida, o validarla y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). En adición al análisis típico de las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional, se realiza, además, una exploración de posibles interacciones previstas y de la estructuración del medio material. Por tanto, el punto central en la elaboración del significado de referencia será la caracterización de las situaciones – problema que permitan poner en juego los contenidos cuyo aprendizaje se pretende.

En la segunda fase, *diseño de la trayectoria didáctica*, se realiza el análisis *a priori* de una selección de problemas y se fija la secuencia en la que estas se presentarán. Se indican, por un lado, los comportamientos esperados de los estudiantes en su resolución, y por otro lado, se planifican las intervenciones controladas del docente. Las situaciones-problemas de la selección deben ser representativas, desde el punto de vista de la idoneidad epistémica. La representatividad de una situación se mide en relación al significado de referencia, y a las prácticas y a los objetos que se ponen en funcionamiento en su resolución.

La tercera fase consiste en la *implementación del diseño instruccional*. El diseño instruccional de la situación-problema puede estar compuesto por tareas, y cada una de ellas puede consistir asimismo en una subconfiguración.

> "Una configuración didáctica es un segmento de actividad didáctica que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación-problema diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea." (Godino et al., 2014, 7).

A lo largo del análisis del proceso de estudio, pueden ocurrir *hechos didácticos* (Wilhelmi, Font y Godino, 2005) susceptibles de ser analizados. Los hechos didácticos pueden aparecer con cierta regularidad (constituyen un fenómeno en el marco de la teoría) o sin ella (dan pie a teoremas de existencia y a contraejemplos). Un hecho particular puede ser significativo desde el punto de vista del docente, el estudiante o desde un punto de vista institucional.

> "[...] Un hecho didáctico es significativo si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido." (Godino et al., 2014, 7)

La cuarta y última fase la constituye la *evaluación* o *el análisis retrospectivo*. En esta fase se contrasta lo previsto en la fase de diseño con lo observado en la implementación de la trayectoria didáctica. De esta forma, se realiza una reflexión sobre la dimensión normativa, sobre los condicionantes del proceso de instrucción y se discute la *idoneidad didáctica* del diseño. La *idoneidad* de un proceso de estudio mide la adecuación de los significados pretendidos respecto de los significados logrados (Godino, 2003; Godino, y Font, 2005), una vez se han establecido los *criterios de idoneidad* con los que valorar esta distancia. Wilhelmi, Godino y Bencomo (2004) sintetizan los criterios de idoneidad teniendo en cuenta tres dimensiones: *epistemológica*, *cognitiva* e *instruccional*. Se valoran, entre otros aspectos, la adecuación del significado institucional de referencia al mostrado, las restricciones de los recursos materiales y temporales disponibles, y la negociación entre docente y estudiante de los significados personales e institucionales.

4.3. ID y métodos estadísticos

En la sección 4.2 se ha adelantado la justificación del cambio de terminología en el diseño de una trayectoria didáctica. La sustitución de los términos análisis *a priori*, *experimentación* y análisis *a posteriori*, por los más novedosos diseño, implementación y evaluación, respectivamente, responde a un intento por dar respuesta a la utilización de distintos métodos para la validación tanto interna como externa de las trayectorias didácticas. De esta forma, el fundamento metodológico de un contraste en un diseño experimental puede ser estadístico o cualitativo. En este contexto, Wilhelmi y Lacasta (2011) tratan también la polémica cualitativo-cuantitativo en relación a los métodos estadísticos utilizados en el análisis didáctico.

> "La polémica cualitativo-cuantitativo en la que había desembocado la crítica al positivismo y al empirismo radical, coarta los métodos estadísticos utilizables. En concreto, en una perspectiva estrechamente cuantitativa, como ya hemos dicho, se prima excesivamente la estadística inferencial paramétrica, que exige supuestos difícilmente constatables en la mayoría de los casos. Por otro lado, en una perspectiva exclusivamente cualitativa, se descuidan las cuestiones de validez y de contraste de hipótesis. Sin embargo, el contraste entre el análisis *a priori* y *a posteriori* de la ingeniería didáctica permite evitar esta polarización y sus efectos." (Wilhelmi y Lacasta, 2011, 60-61)

La ID como método de investigación permite abrir el abanico de métodos estadísticos sin cortapisas. El análisis multivariante, el *análisis implicativo* (Gras, Suzuki, Guillet y

Spagnolo, 2008), surgido desde la didáctica de las matemáticas, la estadística descriptiva, la estadística inferencial paramétrica y no paramétrica, todo ello encuentra su acomodo y mejor adaptación a las características de los datos recogidos.

En el uso de métodos cuantitativos, destacan la estadística descriptiva o inferencial, y el predominio de variables cuantitativas (Godino et al., 2011). Los datos numéricos se pueden obtener directamente a partir de diseños experimentales, en los que se realiza un contraste pre-test / pos-test sobre una muestra aleatoria, o se puede recurrir a diseños no experimentales, como el análisis de encuestas. Los métodos cualitativos de recogida de datos engloban estudios etnográficos, estudios de casos, entrevistas semiestructuradas que recogen información personal sobre una experiencia, observaciones realizadas sobre un proceso de enseñanza para el estudio de comportamientos, estudios de documentos existentes o el análisis de un discurso. El análisis es interpretativo y el desarrollo de la descripción es narrativo.

Los métodos cuantitativos tienen la ventaja de tener una base teórica que permite la generalización de resultados a una población (siempre y cuando la muestra sea suficientemente grande y aleatoria) y la predicción de hechos cuantificables, además de permitir una manipulación numérica precisa y rápida que deje de lado interpretaciones ambiguas y establezca relaciones plausibles de causa y efecto (Lacasta y Wilhelmi, 2011). Sin embargo, puede haber sesgos, si los investigadores no se ponen de acuerdo en la interpretación de las categorías de las variables estadísticas cualitativas.

Los puristas no ven de buen grado la utilización mixta de métodos cualitativos y cuantitativos (Castro y Godino, 2011). Aun y todo, hay quien considera que el método mixto se debe emplear en toda investigación, de forma universal. Las metodologías mixtas, que combinan métodos cualitativos y cuantitativos, se consideran, por regla general, más costosas, puesto que un único investigador debe conocer el alcance y la pertinencia de cada método, y la investigación puede requerir, por ello, un equipo. Sin embargo, permite aprovechar las fortalezas de los métodos cualitativos y cualitativos, y de métodos adicionales, integrando el uso de la palabra y el número, junto con figuras complementarias. Un ejemplo de investigación basada en una metodología mixta, puede ser aquella en la que se comienza con una encuesta, con el fin de generalizar los resultados a una población, y después, en una segunda fase, se centra en entrevistas abiertas y cualitativas para conocer los puntos de vista detallados de los participantes.

En un nivel superior, los estudios teóricos en didáctica tienen por objetivo la discusión filosófica, y engloban una teoría general, sin recurrir necesariamente a ningún método estadístico particular. De hecho, en el marco de las investigaciones en didáctica de las matemáticas en España, en la última década, los estudios cualitativos de interpretación y de estudio de casos, en los que se realizan descripciones o narraciones de hechos y secuencias en procesos de enseñanza y aprendizaje, destacan sobre los estudios mixtos y cuantitativos (Godino et al., 2011).

En investigaciones realizadas dentro de los marcos teóricos de la TSDM y el EOS, Lasa y Wilhelmi (2015b) y Lacasta, Lasa y Wilhelmi (2012) han complementado los enfoques cualitativo y cuantitativo, integrando en la metodología de sus investigaciones, entre otros métodos, el estudio de casos clínicos, el análisis de los comportamientos esperados y observados, la estadística descriptiva y el análisis estadístico-implicativo. En el análisis *a posteriori* del capítulo 8, se utilizan todas estas herramientas metodológicas, junto con el contraste de proporciones, para obtener información de análisis a partir de los resultados de la experimentación.

Parte II

Ingeniería Didáctica

Presentación

La génesis histórica del saber "resolución de ecuaciones e inecuaciones" da idea del desarrollo que han tenido las nociones y los procesos matemáticos, desde la antigüedad. La antropología de este tópico pone en relevancia que, en ausencia de un lenguaje algebraico, la resolución de ecuaciones se apoya en aspectos numéricos, funcionales y geométricos. Así, el punto de vista histórico permite identificar elementos con los que se avanza en la descripción de las dimensiones epistemológica, cognitiva y de enseñanza del tópico "resolución de ecuaciones e inecuaciones". El desarrollo teórico se utiliza para articular un estudio piloto en el marco universitario de profesores en formación, en el que se introduce el instrumento GeoGebra.

Los resultados del estudio piloto ayudan a enfocar el diseño de la experimentación. Se identifican los contenidos previos y emergentes para implementar un proceso de estudio en 4º ESO en torno a la resolución de un sistema de ecuaciones con una ecuación lineal, con la asistencia de un modelo dinámico. Los niveles de algebrización ayudan a construir un significado de referencia, con el que se concretan el modelo dinámico y el campo numérico.

Los resultados de la experimentación permiten obtener conclusiones en torno a la gestión del tiempo en sesiones en las que se solicita a los estudiantes la exploración de una tarea con la asistencia de un modelo dinámico, la influencia del pensamiento algebraico y del campo numérico de referencia en las propuestas de resolución de los estudiantes, y sobre todo, la influencia que tiene el orden de aplicación de las técnicas empleadas en la ejecución, por parte de los estudiantes, de una tarea de resolución de ecuaciones.

En base a los resultados obtenidos, se puede concluir que el orden de ejecución de la tarea influye en la forma en la que los estudiantes avanzan en sus aprendizajes. Se obtienen, de esta forma, indicaciones y sugerencias para futuras experiencias.

Aurkezpena

Ekuazioen eta inekuazioen ebazpenaren genesi historikoaren baitan, ikus daiteke antzinatetik matematikaren arlo horrek izan duen garapena. Arlo horren antropologiak argi uzten du nola hizkera aljebraikorik ezean, ekuazioen ebazpena oinarritzen den aspektu aritmetiko, funtzional eta geometrikoetan. Honela, ikuspuntu historikoari esker, identifika daitezke zenbait elementu aukera ematen dutenak ekuazioen eta inekuazioen ebazpena aztertzeko dimentsio epistemologiko eta kognitibotik, eta irakaskuntzaren dimentsiotik. Garapen teorikoa erabili da azterketa pilotu bat artikulatzeko, irakasleen trebakuntzaren unibertsitateko markoaren baitan, non GeoGebra instrumentua erabili den.
Azterketa pilotuaren emaitzek aukera ematen dute esperimentazioaren diseinuan aurrera egiteko. Identifikatu dira DBHko 4 mailan ekuazio ez lineal bat daukan sistema bat eredu dinamiko baten laguntzarekin ebazteko beharrezkoak diren aldez aurreko edukiak eta azaleratuko diren edukiak. Aljebra-mailek aukera ematen dute erreferentziazko esanahi bat eraikitzeko, eta horren arabera zehazten dira eredu dinamikoa eta zenbakizko eremua.
Esperimentazioaren emaitzei esker, zenbait ondorio atera daitezke, hala nola: denboraren kudeaketaren inguruan, eredu dinamiko baten laguntzarekin ikasleek zeregin bat esploratu behar dutenean; pentsamendu aljebraikoaren eta erreferentziazko zenbakizko eremuaren eraginari buruz, ikasleen ebazpenetan; eta, batez ere, erabilitako teknikaren aplikazioaren ordenak ikasleen ebazpenean duen eraginaren inguruan, ekuazioen ebazpenerako zeregin batean.
Lorturiko emaitzen arabera, teknikaren ordenak eragina du zereginaren ebazpenean eta ikaslearen ikaskuntzan. Honela, etorkizuneko esperientzietarako indikatzaileak eta aholkuak lortu dira.

Presentation

The historical genesis of the resolution of equations and inequations gives an idea of the development of the topic from ancient civilizations. The anthropology of the topic shows the use of numerical, functional and geometrical aspects, in the absence of algebraic language. Thus, thanks to the historical point of view, we can identify elements to analyze the epistemological, cognitive and educational dimensions of the topic "resolution of equations and inequations". A pilot study is developed and implemented, within the theoretical frame, in the context of a university teacher-training program, whit the instrument GeoGebra.

The results of the pilot study give clues to design and implement an experimental experience with college students (age 15-16). We identify previous and emergent contents to solve a system of equations with a non-linear equation, assisted by a dynamic model. Algebrization levels are useful to construct a reference meaning, design a dynamic model and concrete de numerical domain.

We can obtain some conclusions from the experimental results, such us: time management when students explore a task with a dynamic model; the influence of the algebraic mentality and the numerical domain in the resolution of the task; and, above all, how student resolutions is influenced by the sequence of application of different techniques.

The results indicate how the sequence of application of different techniques influence the resolution of the task. Therefore, we can advise and counsel for future experiences.

Capítulo 5

Estudio previo

Breve resumen

Partiendo de una antropología del saber "ecuaciones e inecuaciones", desde la antigüedad hasta la actualidad, se analizan en este capítulo las dimensiones epistemológica, cognitiva y de enseñanza. La estructura del saber, las dificultados con las que encuentra el estudiante y su encaje curricular se analizan a partir de las herramientas teóricas presentadas en los capítulos 3 y 4.

Laburbilduma

"Ekuazioak eta inekuazioak" jakintzaren antropologiatik abiatuz, antzinatetik gaur arte, kapitulu honetan aztertzen dira dimentsio epistemologiko eta kognitiboa eta irakaskuntzaren dimentsioa. 3 eta 4 kapituluetan aurkezturiko tresna teorikoak erabiliko dira jakintzaren egitura, ikasleak izango dituen zailtasunak eta curriculumarekin izango duen lotura aztertzeko.

Short summary

We begin this chapter with the anthropology of the knowledge "equations and inequations", from ancient civilizations until the present, and we continue presenting the epistemological, cognitive and educational dimensions of the topic. Then, we use the theoretical tools presented in chapters 3 and 4 to describe the structure of the knowledge, the difficulties the student would confront and the curriculum structure.

5.1. Antropología del saber "ecuaciones e inecuaciones"

En las civilizaciones de la antigüedad las tareas matemáticas son menester de escribanos, funcionarios y religiosos. Estas tareas tienen por objetivo la resolución de un problema práctico determinado, por ejemplo, el reparto real de un número de hogazas de pan, o el cálculo de un área de labranza a partir de medidas conocidas. A pesar de que estos problemas son particulares, los textos de la antigüedad recogen procedimientos abstractos que describen la forma de proceder en cada caso. Los procedimientos se ejemplifican con números concretos, pero estos carecen de un contexto real, y su motivación es, sin duda alguna, la descripción de un procedimiento general aplicable a un tipo de problema; es decir, se pretende mostrar la potencia de una determinada técnica de cálculo. En Babilonia, Egipto o China, estos procedimientos se recogen en papiros o tablas de arcilla.

Antes de que la cultura árabe introdujera el lenguaje algebraico, tanto los enunciados como los argumentos para su resolución se representaban de forma verbal y geométrica. Además, antes de que en Grecia se demostrara la existencia de números *no conmensurables* o irracionales, el campo numérico tratado estaba restringido a los racionales. Por ejemplo, en Egipto, solo se emplean fracciones alícuotas, es decir, todo número racional se representa como suma de fracciones unitarias positivas, con la excepción de fracciones particulares comunes, como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Los números negativos, al igual que el cero, no tenían un estatus propio. Se permitía su utilización en cuentas auxiliares y las reglas aritméticas para operar con ellos eran conocidas, pero nunca se empleaban para indicar soluciones.

> "Para la sustracción: si se tienen dos cantidades del mismo signo, se resta una de la otra; si se tienen dos cantidades de distinto signo, se suman una a la otra; si se resta una cantidad positiva del 0, se obtiene una cantidad negativa; si se resta una cantidad negativa del 0, se obtiene una cantidad positiva. Para la adición: si se tienen dos cantidades de distinto signo, se resta una de la otra; si se tienen dos cantidades de igual signo, se suman una a la otra; un positivo y el cero hacen un positivo; un negativo y el cero hacen un negativo." (Katz, 1998, 19)

La ausencia de un lenguaje algebraico consolidado no implica una ausencia de técnicas y procedimientos más o menos estandarizados. Se observa que la técnica de *regula falsi* era ampliamente conocida, y en ocasiones aparece implícita en el argumento del escriba. La técnica de ensayo y error es más primitiva, y consiste en realizar una serie de ensayos, que se validan con posterioridad. El número de ensayos infructuosos puede variar en función de múltiples factores, hasta dar con un ensayo válido. A diferencia de la técnica de ensayo y error, en regula falsi se realiza un único ensayo, y la fortaleza del método consiste en el análisis que se realiza de este primer ensayo, para dar con el resultado del problema en un segundo ensayo definitivo. Además, la técnica *regula falsi* subyace como método auxiliar en otros procedimientos. En ocasiones, *regula falsi* aparece implícito en los pasos iniciales de la resolución de un problema, y el escriba omite su referencia explícita, dando a entender que el uso de esta técnica forma parte de la cultura matemática de la época.

Las reglas para operar con números negativos eran conocidas, pero carecían de un estatus propio. Por ello, otros procedimientos algorítmicos para la resolución de problemas, como el método de "excedente y escases", solo presentan de forma que solo funcionan con cantidades positivas: no funciona para dos excedentes o dos escaseces, a pesar de que una formulación general del algoritmo, ampliado el campo numérico racional, sí lo permite. En la tradición china, las cantidades numéricas se representan en columnas verticales, y por ello, el método de Gauss tiene, en origen, una representación asimismo vertical. La ausencia de una cantidad particular en una entrada de la tabla motiva la aparición del número aditivo neutro, el cero, como equilibrio entre valores sobrantes y carencias, pagos y deudas, repartos y devoluciones, etc. Precisamente, fue la necesidad de redactar textos científicos, fórmulas matemáticas y químicas, la que motivó, a principios del siglo XX, un cambio en la orientación de la escritura tradicional oriental, la cual se occidentaliza.

Otra de las técnicas auxiliares que no es obvia en una primera lectura, que aparece de forma recurrente e implícita en la solución de problemas, y que evidencia el momento de desarrollo de la cultura matemática en las civilizaciones antiguas, es la técnica del *montón*. Se trata de un resultado de proporcionalidad simple unido al uso de la propiedad distributiva.

> “Frecuentemente se encuentra la operación, denominada *xay* (montón), que corresponde a la solución de una ecuación lineal de la forma $a_1x + a_2x + \ldots + a_nx = b$.” (Ríbnicov, 1991, 27)

Las técnicas de resolución de ecuaciones e inecuaciones contemplan el caso compatible determinado, es decir, los problemas tratados son reales, y se espera en ellos un número finito de soluciones. Se pueden encontrar ejemplos que tratan sistemas compatibles indeterminados, pero en todos ellos solo se contempla una solución particular, y no hay ningún registro escrito que considere la existencia de infinitas soluciones.

A continuación se detallan los métodos de resolución de ecuaciones empleados en las civilizaciones de la antigüedad. Para cada método de resolución, se describe en primer lugar el método empleado, y se presentan a continuación algunos ejemplos. Las fuentes provienen de tablas de arcilla y papiros, que llevan el nombre del arqueólogo responsable de la campaña particular en los que se recuperó el soporte físico. Asimismo, todos los ejemplos siguen el mismo esquema de presentación:

- *Enunciado.*
- *Simbología y resolución algebraica actual.*
- *Resolución original.*
- *Objetos matemáticos involucrados.*

La información relativa a los textos históricos se ha tomado del Papiro de Moscú, Papiro Rhind, Jiuzhang Chino, y de tablas babilonias. Las técnicas expuestas se ejemplifican en problemas resueltos, y carecen de justificación alguna en los papiros: las técnicas no se demuestran, y no se relata quién los encontró ni de qué modo. Se trata de una larga lista de problemas-tipo, que sirven de catálogo para los escribas. A pesar de no demostrar ni validad las técnicas, se comprueba su utilidad en casos prácticos, y son una muestra del estado del conocimiento de la ciencia matemática de la época.

5.1.1. Empezar por el final

Esta técnica consiste en aplicar transformaciones aritméticas directas o inversas (en función de la posición del dato en el miembro de la ecuación) a las cantidades conocidas del enunciado del problema. El método resulta útil en la resolución de ecuaciones lineales en una incógnita, cuando el número de operaciones aritméticas directas es elevado. Se emplea, en especial, si la ecuación algebraica que resulta del enunciado es excesivamente larga y contiene un gran número de términos agrupados en distintos niveles o paréntesis. La técnica *empezar por el final* supondría, en una representación algebraica, "pasar" los términos de un miembro a otro de la ecuación, hasta despejar la incógnita, realizando en cada paso el cálculo aritmético inverso.

Ejemplo 13 (Problema del Papiro de Moscú) [1] *Encontrar un número tal que, multiplicado 1 vez y media y sumado 4, de cómo resultado 10.*

- *Simbología y resolución algebraica actual.*

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}rcl} \left(1+\frac{1}{2}\right)x+4 & = & 10 & \Longrightarrow & \frac{3}{2}x+4 & = & 10 \\ \frac{3}{2}x & = & 10-4 & \Longrightarrow & \frac{3}{2}x & = & 6 \\ x & = & 6\frac{2}{3} & \Longrightarrow & x & = & 4 \end{array}$$

- *Resolución original.* Empezar por el final consiste en este caso en aplicar operaciones inversas al resultado "10". El escriba sustrae 4 de 10, y obtiene 6. A continuación, multiplica $\frac{2}{3}$ a 6, dado que $\frac{2}{3}$ es el inverso de $1\frac{1}{2}$, y se obtiene 4.

$$10 \xrightarrow{-4} 6 \xrightarrow{(1+\frac{1}{2})^{-1}} 4$$

- *Objetos matemáticos involucrados.*

  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural. Los números racionales positivos se expresan como la suma de una serie finita de fracciones con numerador unitario; se exceptuan las fracciones propias sencillas, como $\frac{2}{3}$.
  - *Situación-problema.* Situación intramatemática. El problema se presenta en un contexto aritmético-algebraico.
  - *Conceptos-definiciones.* Adición, sustracción y multiplicación de números racionales positivos. Inverso de un racional positivo.
  - *Proposiciones-propiedades.* Igualdad de soluciones en ecuaciones equivalentes.
  - *Procedimientos.* Empezar por el final. La división por un número racional es equivalente a la multiplicación por su inverso: $\frac{a}{r} = ar^{-1}$. Uso de tablas tabuladas para asistir las operaciones aritméticas.

[1] *Papiro de Moscú*: Recuperado en 1883 por Golenishchev, llevó su nombre hasta 1912, año en el que se hace cargo del papiro el Museo de Bellas Artes de Moscú. El papiro contiene una colección de 25 problemas matemáticos, y tiene unas dimensiones de aproximadamente 5,5 m de largo por 8 cm de ancho.

- *Argumentos.* El procedimiento de resolución oculta el cálculo auxiliar del inverso de una fracción: $(1\frac{1}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$. Este conocimiento es obvio para los escribas de la época, que podían consultar estos valores en tabulaciones en tablas de arcilla.

Ejemplo 14 (Problema 31 del Papiro Rhind) [2] *Encontrar una cantidad tal que, sumando a dicha cantidad $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{7}$ de la misma, de como resultado 33.*

- *Simbología y resolución algebraica actual.*

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x & = & 33 \quad \Longrightarrow \quad \frac{97}{42}x \; = \; 33 \\ x & = & 33\frac{42}{97} \quad \Longrightarrow \quad x \; = \; \frac{1386}{97} \end{array}$$

- *Resolución original.* El escriba procede de la siguiente forma. Aplica la operación del *xay* o del *montón*, es decir, suma $1\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{7}$, para obtener $2\frac{1}{4}\frac{1}{20}\frac{1}{105}$, y a continuación, divide 33 por el resultado. Los cálculos auxiliares intermedios y el resultado final se expresan como una combinación de parte entera y serie finita de fracciones positivas con numerador unitario, es decir, $14\frac{1}{4}\frac{1}{26}\frac{1}{5044}$.

$$1\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \;=\; 2\frac{1}{4}\frac{1}{20}\frac{1}{105} \;\longrightarrow\; 33 \div 2\frac{1}{4}\frac{1}{20}\frac{1}{105} \;=\; 14\frac{1}{4}\frac{1}{26}\frac{1}{5044}$$

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural. Los números racionales positivos se expresan como suma de una serie finita de fracciones con numerador unitario; se exceptuan las fracciones propias sencillas, como $\frac{2}{3}$.
  - *Situación-problema.* El problema se presenta en un contexto aritmético-algebraico. Situación intramatemática.
  - *Conceptos-definiciones.* Adición y división de números racionales positivos.
  - *Proposiciones-propiedades.* Propiedad distributiva del producto con respecto de la suma. Igualdad de soluciones en ecuaciones equivalentes.
  - *Procedimientos.* Empezar por el final. Las operaciones aritméticas básicas con números racionales positivos se asisten a partir de tablas con resultados tabulados.
  - *Argumentos.* El procedimiento de resolución ejemplifica el uso de la propiedad distributiva, sin hacer mención explícita a la misma. Es decir, las propiedades de las ecuaciones lineales son un conocimiento obvio para los escribas de la época: $\sum(a_i x) = (\sum a_i)x$. Este conocimiento se emplea de forma natural como cálculo previo a la aplicación del método *empezar por el final.* Una vez resuelto este paso, resulta una operación de cálculo de proporciones. En este paso, a diferencia del escriba del papiro de Moscú (ejemplo 13),

[2] *Papiro Rhind*: Escrito por el escriba Ahmes a mediados del siglo XVI a.C, es una copia de otro original del siglo XIX a.C. El papiro fue adquirido por Henry Rhind en 1858y contiene una colección de 84 problemas matemáticos. Tiene unas dimensiones de aproximadamente $5,5$ m de largo y $0,32$ m de ancho.

el escriba del papiro Rhind utiliza la división para resolver la misma operación. La utilización de una u otra técnica no guarda relación con la magnitud de las cantidades que participan en el enunciado; tampoco tiene relevancia las manipulaciones que requiere la expresión del número racional dentro del procedimiento que resuelve el problema.

5.1.2. Regula falsi

El método de la falsa posición o *regula falsi* consiste en realizar una primera estimación a la solución del problema, y a continuación ajustar esta primera estimación, aplicando resultados de lienalidad. A simple vista, el método de *regula falsi* guarda cierta apariencia con el método de *ensayo y error*, en el cuál se acota la resolución a partir de un número finito de ensayos. Sin embargo, en *regula falsi*, el análisis de la primera aproximación permite obtener la solución en tres fases: (A) Ensayo inicial (*regula falsi*); (B) análisis del ensayo; (A') ensayo definitivo. Esta técnica permite resolver problemas de proporcionalidad simple, y la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, en los que el ajuste de la estimación se realiza aplicando propiedades de linealidad.

Ejemplo 15 (Problema 26 del Papiro Rhind) *Encontrar una cantidad tal que, sumando a dicha cantidad un $\frac{1}{4}$ de la misma, el resultado sea 15.*

- *Simbología y resolución actual.*

$$f(x) = x + \frac{1}{4}x = 15$$

$$\begin{cases} f(4) = 4 + \frac{1}{4}4 = 5 \neq 15 \\ f(a4) = af(4) = a5 = 15 \end{cases}$$

$$a = 15/5 = 3 \Longrightarrow x = 3 \times 4 = 12$$

- *Resolución original.* El enunciado requiere la manipulación de la fracción $\frac{1}{4}$. Por ello, el escriba realiza una estimación previa y asume que la solución al problema es 4 (bien podría ser cualquier múltiplo de 4). Se asume temporalmente que el valor de la cantidad es 4, y partir de este resultado, se obtiene que 4 y un $\frac{1}{4}$ de 4 dan 5. Como 5 no es el resultado buscado, se aplican las propiedades de la función lineal: habría que multiplicar 3 a 5 para obtener 15. Finalmente, se multiplica 3 a 4 y se obtiene 12, la solución al problema.

	Cantidad	Comprobación	Análisis
(A) Ensayo inicial	4	5	$a \times 5 = 15$, $a = 3$
(A') Ensayo definitivo	12	15	correcto

- *Objetos matemáticos involucradas.*
  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
  - *Situación-problema.* El problema se presenta en un contexto aritmético-algebraico. Situación intramatemática.

- *Conceptos-definiciones.* Suma, multiplicación y división de números racionales positivos. Función lineal. Crecimiento y decrecimiento de una función. Proporcionalidad simple.
- *Proposiciones-propiedades.* Propiedades de la función lineal, en el caso particular de una función lineal en una variable, $f(ax) = af(x)$.
- *Procedimientos.* Regula falsi. Obtención del coeficiente de proporcionalidad a, en una expresión lineal $y = ax$, a partir de los valores particulares de las variables x e y.
- *Argumentos.* Se realiza el análisis de un ensayo en *regula falsi.* La discusión del proceso requiere de argumentos funcionales, en relación al incremento proporcional de cantidades.

Ejemplo 16 (Problema del texto VAT8389) [3] *El primero de dos cultivos produce* $\frac{2}{3}$ *de* sila[4] *por cada* sar[5]. *El segundo produce* $\frac{1}{2}$ *de* sila *por cada* sar. *El primer cultivo produjo 500* silas *más que el segundo, y entre los dos cultivos hacían un total de* 1 800 sar. *¿Cuánto mide cada cultivo?*

- *Simbología y resolución actual.*

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \\ g(x,y) = x + y = 1\,800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(900,900) = \frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 = 150 \neq 500 & \Rightarrow \quad 500 - 150 = 350 \\ f(a,a) = af(1,1) = a(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = a\frac{7}{6} = 350 & \Rightarrow \quad a = 350\frac{6}{7} = 300 \end{cases}$$

$$x + a = 900 + 300 = 1\,200 \ ; \quad y - a = 900 - 300 = 600$$

- *Resolución original.* El escriba realiza una estimación inicial de 900 sar para cada cultivo. A continuación calcula $\frac{2}{3}900 - \frac{1}{2}900 = 150$. La diferencia entre el 500 deseado y el 150 obtenido, es de 350. El ensayo inicial no da con la solución, pero permite analizar la situación.

  En la fase de análisis, el escriba argumenta que cada aumento en 1 unidad de la variable x y cada disminución en 1 unidad de la variable y produce un aumento en la "función" $f(x,y) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y$, equivalente a $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ unidades. Por lo tanto, se requiere resolver la ecuación $\frac{7}{6}s = 350$ para conocer el número de incrementos s que son necesarios para llegar a la solución correcta, dando como resultado $s = 300$.

  Esta información permite realizar un ensayo definitivo: sumando 300 a 900 se obtiene $x = 1200$, y restando 300 de 900 se obtiene $y = 600$, la solución correcta al sistema.

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.

[3]VAT8389: Se trata del código con el que el Museo del Antiguo Cercano Oriente en Berlín guarda la tabla de arcilla que contiene el problema.
[4]*Sila*: Medida de capacidad equivalente a 0,84 litros.
[5]*Sar*: Medida de área equivalente a 36 m^2, aproximadamente.

	Cantidades	Comprobación	Análisis
(A) Ensayo inicial	(900, 900)	150	500 - 150 = 350
			$350 \times \frac{7}{6} = 300$
(A') Ensayo definitivo	(1200, 600)	500	correcto

- *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto productivo.
- *Conceptos-definiciones.* Suma, resta, multiplicación y división de números racionales positivos. Inverso de un racional positivo. Función lineal en varias variables. Crecimiento y decrecimiento de una función. Proporcionalidad simple. Magnitudes de área y capacidad.
- *Proposiciones-propiedades.* Propiedades de la función lineal, en el caso de una función lineal en dos variables, $f(ax, ay) = af(x, y)$.
- *Procedimientos.* Regula falsi. Obtención del coeficiente de proporcionalidad a, en una expresión lineal $z = af(x, y)$, a partir de valores particulares de las variables x, y y z.
- *Argumentos.* Se realiza el análisis de un ensayo en *regula falsi.* La discusión del proceso requiere de argumentos funcionales, en relación al incremento proporcional de cantidades.

5.1.3. Método de "excedente y escasez"

Al igual que *regula falsi*, el método de "excedente y escasez" permite también la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, aplicando propiedades lineales a una estimación previa del sistema. A diferencia de *regula falsi*, el método requiere de dos estimaciones iniciales, en lugar de una. La solución correcta se obtiene al "pivotar" la solución sobre las dos estimaciones previas. El procedimiento es, por tanto, algorítmico, y los cálculos realizados sobre dos estimaciones evitan la fase de análisis del ensayo inicial.

Al igual que en los método anteriores, en este procedimiento se trabaja únicamente con valores positivos. Por ello, para que el método funcione, es necesario un "excedente" y una "escasez", una "pertenencia" y una "deuda", etc.

Ejemplo 17 (Problema 17 del capítulo 7, Jiuzhang) [6] *El precio de 1 acre de buena tierra es 300 piezas de oro. El precio de 7 acres de mala tierra es de 500 piezas de oro. Un agricultor compra 100 acres de tierra y paga por ello* 10 000 *piezas de oro. ¿Cuánta tierra buena y mala compró?*

- *Simbología y resolución actual.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y) = x + y & = & 100 \\ g(x,y) = 300x + \frac{500}{7}y & = & 10\,000 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x_1,y_1) = g(20,80) = 11\,714\frac{2}{7} \;\Rightarrow\; b_1 = 11\,714\frac{2}{7} - 10\,000 = 1\,714\frac{2}{7} \\ g(x_2,y_2) = g(10,90) = 9\,428\frac{4}{7} \;\Rightarrow\; b_2 = 9\,428\frac{4}{7} - 10\,000 = -571\frac{3}{7} \end{array} \right.$$

[6] *Jiuzhang suanshu*: "Nueve capítulos del arte matemático", escrito por Liu Hui en el siglo III; el original dataría de comienzos de nuestra era.

$$x = \frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{b_2 - b_1} = \frac{20 \times (-571\frac{3}{7}) - 80 \times 1\,714\frac{2}{7}}{-571\frac{3}{7} - 1\,714\frac{2}{7}} = 12\frac{1}{2}$$

$$y = 100 - x \;\Rightarrow y = 100 - 12\frac{1}{2} = 87\frac{1}{2}$$

- *Resolución original.* Se realizan dos estimaciones iniciales. Sugoniendo que se compraran 20 acres de tierra buena y 80 de tierra mala ($x_1 = 20$, $y_1 = 80$), el excedente sería de $1\,714\frac{2}{7}$. A su vez, en caso de haber camprado 10 acres de tierra buena y 90 de tierra mala ($x_2 = 10$, $y_2 = 90$), la escasez es de $571\frac{3}{7}$. El escriba presenta de forma intencionada dos estimaciones alternas: una con excedente y otra con escasez, dado que la técnica que emplea está restringida al campo numérico de los racionales positivos.

  En la fase de análisis, el escriba compara el resultado de la función con las cantidades estimadas y el valor desconocido de la solución. La diferencia entre el primer valor aproximado ($x_1 = 20$) y el valor de la solución (x) conlleva un cambio en la "función" $f(x, y) = 300x + \frac{500}{7}y$ de $b_1 = 1\,714\frac{2}{7}$, mientras que una diferencia entre el valor aproximado $x_2 = 10$ y el valor correcto x trae consigo un cambio negativo en la función de $b_2 = 571\frac{3}{7}$. La linealidad implica igualdad en los ratios de cada pareja de cambios, de los cuales se obtiene la siguiente proporción:

$$\frac{20 - x}{1\,714\frac{2}{7}} = \frac{x - 10}{571\frac{3}{7}}$$

  O de forma general,

$$\frac{x_1 - x}{b_1} = \frac{x_2 - x}{b_2}$$

  Tras despejar la incógnita, se obtiene la solución deseada para x,

$$x = \frac{b_1 x_2 + b_2 x_1}{b_1 + b_2}$$

  El resultado, $12\frac{1}{2}$ acres, corresponde a la cantidad de tierra buena. La cantidad de tierra mala, $87\frac{1}{2}$, se obtiene de forma inmediata.

  En la resolución original, la secuencia de manipulaciones ariméticas supone, de facto, el uso del valor absoluto. Las cantidades "excedente" (b_1) y "escasez" (b_2) son valores numéricos mayores que 0, y el escriba se deshace del signo. Una ampliación del campo numérico al conjunto de los números racionales (b_1, $b_2 \in \mathbb{Q}$) implica el uso de valores absolutos:

$$\frac{20 - x}{|1\,714\frac{2}{7}|} = \frac{x - 10}{|-571\frac{3}{7}|} \;;\; \frac{x_1 - x}{|b_1|} = \frac{x - x_2}{|b_2|} \;;\; x = \frac{|b_1| x_2 + |b_2| x_1}{|b_1| + |b_2|}$$

  Sin embargo, al ampliar el conjunto numérico de referencia, la técnica también funciona si se toman dos "excedentes" o dos "escaseses". En este caso, una modificación de las expresiones hace innecesario el uso de valores absolutos, y se llega a la expresión general:

$$\frac{20-x}{1\,714\frac{2}{7}} = \frac{-10+x}{-571\frac{3}{7}} \; ; \; \frac{x_1-x}{b_1} = \frac{x_2-x}{b_2} \; ; \; x = \frac{x_1b_2 - x_2b_1}{b_2-b_1}$$

En ellas, se observa que al ampliar el conjunto numérico de referencia, los valores absolutos dejan de ser necesarios. La técnica también funciona, en este caso general, si se toman "dos excedentes" o "dos escaseces".

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
  - *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto productivo. Problema económico de reparto de áreas.
  - *Contenidos-definiciones.* Suma, resta, multiplicación y división de números racionales positivos. Valor absoluto. Función lineal. Creciciento y decrecimiento de una función. Proporcionalidad simple. Razón de proporcionalidad.
  - *Proposiciones-propiedades.* Propiedades de la función lineal, en el caso de una función lineal en dos variables.
  - *Procedimientos.* Algoritmo del método de excedente y escasez. Ensayo inicial con el método de *regula falsi*. Obtención de una proporción, a partir de una igualdad en los ratios de parejas de cambios en una función lineal. Regla del pivote.
  - *Argumentos.* La argumentación se basa en dos estimaciones previas sobre las que se "pivota" para obtener la solución. El algoritmo general, que funciona en el campo de los números racionales, se modifica a partir del valor absoluto, para restrinjir su uso al campo numérico positivo. Esta modificación implica, a su vez, la necesidad de tener un "excedente" y una "escasez", necesariamente.

5.1.4. Reparto proporcional y reparto en progresión aritmética

En la antigüedad, los repartos de bienes o los pagos por servicios prestados se distribuyen según castas o niveles sociales. Tanto en la estructura militar como en la sociedad civil, un reparto entre n sujetos se realiza en términos de una proporción simple entre números naturales o en términos de una progresión aritmética finita.

El primer procedimiento requiere el reparto de una cantidad C en n cantidades que respetan la proporción $a_1 : a_2 : \ldots : a_n$. En el segundo procedimiento, una cantidad C se reparte entre n personas, de forma que la diferencia d entre cantidades consecutivas es constante, es decir, las cantidades que forman la sucesión finita $\{a_1, \ldots, a_n\}$ respetan la progresión aritmética $a_k = a_0 + d \times k$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ y $\sum_{k=1}^{n} a_k = C$.

Ejemplo 18 (Problema 1 del capítulo 3 del Jiuzhang) *Hallar la forma de repartir 5 ciervos entre 5 oficiales siguiendo la proporción* $5:4:3:2:1$.

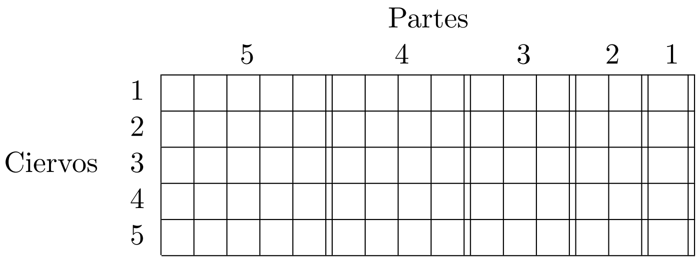
- *Simbología y resolución actual.*

  Total de partes a repartir: $5+4+3+2+1 = 15$.

  Fracción correspondiente a cada oficial: $\frac{5}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{15}$.

  En el reparto de 5 unidades entre los 5 oficiales, cada oficial recibe, respectivamente: $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.

- *Resolución original.* El primer lugar, el autor suma los cinco términos de la proporción y obtiene 15. En este primer paso, se está utilizando implícitamente el método de *regula falsi*, es decir: si hubiera 15 ciervos a repartir, cada oficial obtendría una cantidad entera positiva de ciervos. A continuación, en la fase de análisis del ensayo inicial, el escriba multiplica cada uno de los números de la proporción por 5 ciervos y divide por 15. De esta manera, en el ensayo definitivo, se obtienen los valores solución del problema: el oficial más importante obtiene $1\frac{2}{3}$ de ciervo, el segundo $1\frac{1}{3}$, el tercero 1, el cuarto $\frac{2}{3}$ y el quinto $\frac{1}{3}$.



- *Objetos matemáticos involucrados.*

  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
  - *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto social. Problema de reparto proporcional.
  - *Contenidos-definiciones.* Suma y multiplicación de números racionales positivos. Proporcionalidad simple. Razón de proporcionalidad.
  - *Proposiciones-propiedades.*
  - *Procedimientos.* Método de *regula falsi.* Obtención de las fracciones que generan un reparto proporcional.
  - *Argumentos.* El escriba utiliza, como estrategia implícita de base, el método de *regula falsi*, sin llegar a explicitar su uso. Este comportamiento del escriba indica que el procedimiento se considera obvio para el lector del Jiuzhang, y que no se requiere consumir espacio y tiempo en su explicación.

Ejemplo 19 (Problema 64 del Papiro Rhind) *Hallar el modo de repartir*[7] *10 hekats de cebada entre 10 personas, de forma que la diferencia entre las cantidades de hekats de cebada obtenidas por cada uno de ellos respecto de su vecino sea de* $\frac{1}{8}$.

- *Simbología y resolución actual.* Hallar $\{a_1, \ldots, a_{10}\}$, de forma que $a_k = a_0 + \frac{k}{8}$, $\forall k \in \{1, \ldots, 10\}$ y $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$. En primer lugar, la suma de los 10 términos a_k da como resultado 10 unidades:

[7]Se sobreentiende en el enunciado que el reparto se realiza en progresión aritmética, dado que en otros enunciados anteriores del papiro así se explica

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{10} a_k &= \textstyle\sum_{k=1}^{10}(a_0 + \frac{k}{8}) \\ &= 10a_0 + \tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{k=1}^{10} k \\ &= 10a_0 + \tfrac{1}{8}\tfrac{10\times 11}{2} \\ &= 10a_0 + \tfrac{10\times 11}{16} \qquad = 10\end{aligned}$$

Se despeja el elemento a_0 de la sucesión.

$$a_0 = \frac{10 - \frac{10\times 11}{16}}{10} = \frac{5}{16}$$

Y se suma le suma, un total de 10 veces, la diferencia de $\frac{1}{8}$, hasta obtener la lista de los 10 términos.

$$\{\frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, 1\frac{1}{16}, 1\frac{3}{16}, 1\frac{5}{16}, 1\frac{7}{16}, 1\frac{9}{16}\}$$

- *Resolución original.* El escriba comienza su argumento a partir de la cantidad media repartida, la cual corresponde a 1 hekat. En este primer paso, es está utilizando implícitamente el método de *regula falsi*, es decir: el sumatorio del enunciado consta de 10 sumandos, los cuales, a su vez, dan una suma de 10 unidades; por ello, el cálculo es equivalente a la determinación de un promedio unitario.

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \Longleftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{10} a_k}{10} = 1$$

En la fase de análisis del primer ensayo, el escriba argumenta de la siguiente forma: la mayor cantidad repartida se halla sumando a esta cantidad media $\frac{1}{8}$ veces la mitad de diferencias que quedan por encima de la misma; como la cantidad de diferencias es 9, es decir, un valor impar, lo que hace el escriba es añadir la mitad de una diferencia (es decir, $\frac{1}{16}$) un total de 9 veces.

$$a_{10} = \bar{x} + 9 \times \frac{1}{16} = 1 + 9 \times \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

Se obtiene, así, 1 y $\frac{9}{16}$, la cantidad mayor repartida. Termina el argumento restando 9 veces $\frac{1}{8}$ de esta cantidad mayor, obteniendo de esta forma cada una de las cantidades del reparto.

$$\{1\frac{9}{16}, 1\frac{7}{16}, 1\frac{5}{16}, 1\frac{3}{16}, 1\frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \frac{13}{16}, \frac{11}{16}, \frac{9}{16}, \frac{7}{16}\}$$

- *Objetos matemáticos involucrados.*
    - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.

- *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto social. Problema de reparto en progresión aritmética.
- *Contenidos-definiciones.* Suma y resta de números racionales positivos. Media aritmética. Progresión aritmética.
- *Proposiciones-propiedades.* Propiedades de la media aritmética unitaria, $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = 1$.
- *Procedimientos.* Método de *regula falsi*. Obtención de cantidades desconocidas a partir de la media aritmética, con sumandos en diferencias finitas.
- *Argumentos.* El escriba utiliza, como estrategia implícita de base, el método de *regula falsi*, sin llegar a explicitar su uso. El procedimiento descrito por es escriba es efectivo, únicamente, cuando el número de sumandos del sumatorio es igual a su suma, es decir, cuando el promedio de los valores del sumatorio es igual a 1.

5.1.5. Método de Gauss

El método de Gauss es hoy en día el algoritmo estándar para la resolución de un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas, y se conoce desde la antigüedad. El método consiste en hallar un sistema equivalente triangular, al cual se aplica el método de sustitución hacia atrás. A pesar de que el fundamento del método no ha sufrido cambio alguno desde la antigüedad, si ha variado su escritura. En efecto, la lecto escritura tradicional china es vertical, y así se ha mantenido hasta finales del siglo XIX. En el sistema tradicional, las ecuaciones se organizan en sentido vertical, siguiendo el esquema de las tablas aritméticas para la adición.

$$\begin{array}{cccc}
a_{11}x_1 & a_{21}x_1 & \dots & a_{m1}x_1 \\
a_{12}x_2 & a_{22}x_2 & \dots & a_{m2}x_2 \\
\dots & & & \\
a_{1n}x_n & a_{2n}x_n & \dots & a_{mn}x_n \\
b_1 & b_2 & \dots & b_m
\end{array}$$

En este siglo, el auge de las relaciones económicas con oriente propicia la aparición de diccionarios entre lenguas occidentales y orientales. Por ejemplo, Pierre d'Incarbille "compone un diccionario chino-frances de 1 362 páginas" (O'Neill, 2001, 2363). En la redacción de estos textos, se deja de lado la escritura tradicional vertical de los ideogramas, y la escritura se occidentaliza convirtiendo los ideogramas al sentido horizontal. El sistema de ecuaciones pasa a tener una orientación horizontal.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\dots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Esta tendencia toma fuerza a principios del siglo XX, y queda asentada con la publicación de la revista china *Science*, la primera publicación china con escritura en alineación horizontal con reconocimiento social y amplia expansión. En la figura 5.1 se puede ver la portada del primer ejemplar de la revista. En su editorial, se justifica la entonces atípica decisión en los siguientes términos:

> "This magazine is printed so that it goes sideways from the top left, and is marked with Western punctuation. This is to make the insertion of mathematical, physical and chemical formulae convenient, not for the sake of novelty-hunting. We ask our readers to excuse us." (Science, 1915)

La necesidad de redactar textos científicos inteligibles es, pues, uno de los factores que motivó la occidentalización de la escritura tradicional china. Sin embargo, en la escritura original de los sistemas de ecuaciones, los escribas organizan los valores en columnas verticales, manteniendo así la coherencia con el uso de tablas aritméticas, pizarras, etc. Esta escritura no requiere del uso de los símbolos de adición e igualdad.

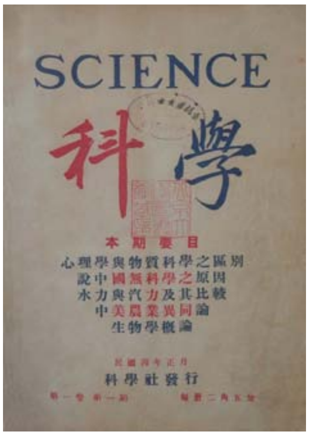


Figura 5.1: Portada del primer ejemplar de la revista Science (www.sciencemagchina.cn/).

Ejemplo 20 (Problema 1 del capítulo 8 del Jiuzhang) *Hay tres clases de grano. Tres fardos del primer tipo, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero hacen 34 medidas. Finalmente, una del primero, dos del segundo y tres del tercero hacen 26 medidas. ¿Qué cantidad de grano contiene cada uno de los fardos?*

- *Simbología y resolución actual.*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 34 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 26 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ & & 5y & + & z & = & 24 \\ & & 4y & + & 8z & = & 39 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 39 \\ & & 5y & + & z & = & 24 \\ & & & & 36z & = & 99 \end{array}\right.$$

$$z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4} \to y = 24 - 10\frac{3}{4} = 16\frac{1}{2} \to x = 39 - 32\frac{1}{2} = 23$$

- *Resolución original.* El escriba organiza los datos del enunciado en columnas verticales consecutivas, sin utilizar simbología adicional (signos de operaciones arimtéticas, igualdad, parentesis). Se utiliza, una vez más, el lenguaje natural en la descripción del procedimiento: "con la primera clase en la columna de la derecha, se multiplica y se desprecia la columna central", es decir: se multiplica la columna central por 3 y se sustrae el correspondiente múltiplo, en este caso 2, de forma que el primer término de la columna central sea 0. A continuación, se repite la operación con la columna de la izquierda, en palabras del escriba: "con lo que queda en la segunda clase de la columna central, despreciar directamente". Esta forma de proceder se repite con la segunda fila de las columnas izquierda y central.

1	2	3	1	0	3	0	0	3	0	0	3
2	3	2	2	5	2	4	5	2	0	5	2
3	1	1	3	1	1	8	1	1	36	1	1
26	34	39	26	24	39	39	24	39	99	24	39

  El último diagrama de la derecha es equivalente al sistema triangular de la resolución actual, en orientación vertical. Por último, el escriba obtiene los resultados usando la técnica de sustitución hacia atrás, empezando por $z = \frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$, y siguiendo con $y = 24 - 10\frac{3}{4} = 16\frac{1}{2}$, $x = 39 - 32\frac{1}{2} = 23$.

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.*
    - *Verbal.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural. El término *clase* hace referencia a la variable, atendiendo a la magnitud que representan: clase de grano. Cada ecuación se identifica con el término *columna*. La acción de reducir una ecuación del sistema por combinación lineal se indica con el término *despreciar*.
    - *Simbólico.* La representación de los datos es matricial. El cero se representa de forma implícita como la ausencia de una cantidad en la tabla.
  - *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto económico. Problema de reparto lineal.
  - *Contenidos-definiciones.* Suma, resta, multiplicación y división de números racionales positivos. Sistema de ecuaciones lineales. Solución de un sistema lineal. Sistemas equivalentes. Sistema triangular. Combinación lineal de ecuaciones. El número cero.
  - *Proposiciones-propiedades.* Propiedades lineales de los sistemas de ecuaciones.
  - *Procedimientos.* Triangulación de una matriz por el método de Gauss. Resolución de un sistema triangular por sustitución hacia atrás.
  - *Argumentos.* El escriba utiliza argumentos deductivos aplicando propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales.

5.1.6. Método geométrico

La manipulación del teorema de Pitágoras y la búsqueda de relaciones entre el perímetro y el área de figuras rectangulares conduce muchas veces a sistemas de ecuaciones cuadráticas. Estas ecuaciones de segundo grado se pueden resolver por procedimientos geométricos, al representar las cantidades longitudes de segmentos en las figuras geométricas. La interpretación de las ecuaciones no es funcional, y por ello, solo se contemplan coeficientes y soluciones positivas.

Ejemplo 21 (Ecuación de segundo grado) *Se suma al cuadrado de una cantidad un múltiplo de esa misma cantidad, de forma que la suma dé como resultado una cantidad dada. Hallar dicha cantidad.*

- *Simbología y resolución actual.*

  La ecuación $x^2 + bx = c$, con $b, c \in \mathbb{R}^+$ se resuelve en la actualidad a partir de la fórmula de segundo grado. El procedimiento estandar amplía el campo numérico al conjunto de los números reales, y se obtienen dos soluciones.

$$x^2 + bx + c = 0 \quad b, c \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} - \frac{b}{2}$$

- *Resolución original.* El enunciado del problema se representa gráficamente en la figura 5.2. El rectángulo rayado de dimensiones $b \times xb$ se corta por la mitad de su base de longitud b. La mitad cortada es un rectángulo de dimensiones $\frac{b}{2} \times bx$, que se desplaza y coloca debajo del cuadrado opaco de lado x, en la parte inferior de la figura.

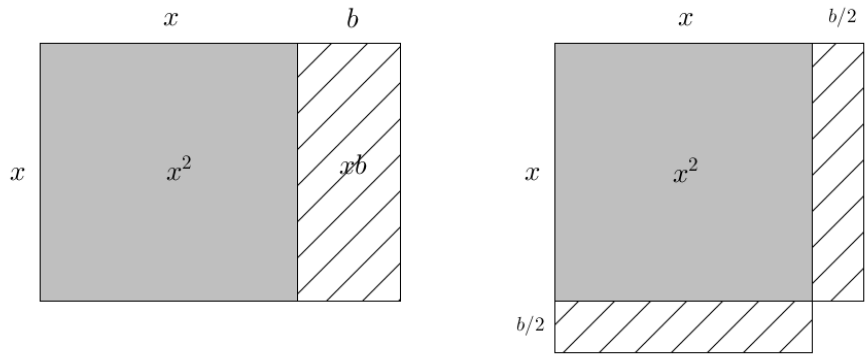


Figura 5.2: Versión geométrica de la fórmula $x^2 + bx = c$ (Katz, 1998, 38).

Se añade a la figura un cuadrado de lado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, hasta completar un nuevo cuadrado de lado $x + \frac{b}{2}$. El área del cuadrádo mayor es $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, y su lado,

$$\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

La cantidad x que se requiere es, por lo tanto, la diferencia entre la longitud del lado del cuadrado mayor y $\frac{b}{2}$, es decir,

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

Una vez más, el procedimiento se presenta restringido al campo numérico positivo, y permite obtener una solución de las dos posibles. La segunda solución queda descartada al no ser considerada como una *cantidad*.

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.*
    - *Verbal.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
    - *Simbólico.* El discurso natural de la resolución hace referencia a un diagrama que representa geometricamente los términos de la ecuación.
  - *Situación-problema.* El problema se presenta en un contexto geométrico. Situación intramatemática.
  - *Conceptos-definiciones.* Suma, resta, multiplicación, división, potencia cuadrada y radical cuadrado de un número racional positivo. Perímetro y área de una figura poligonal plana: rectángulos y cuadrados. Isometrías en el plano: traslación, simetría y giro.
  - *Proposiciones-propiedades.* Fórmulas para el cálculo del perímetro y del área de un rectángulo y un cuadrado.
  - *Procedimientos.* Composición y descomposición de figuras poligonales planas. Obtención de figuras equivalentes. Procedimientos para el cálculo de perimetros y áreas.
  - *Argumentos.* Argumentos geométricos deductivos.

Ejemplo 22 (Sistema de ecuaciones cuadráticas) *Hallar las dimensiones de un rectángulo para que su perímetro y su área correspondan a unas cantidades dadas.*

- *Simbología y resolución actual.*

  Un sistema de dos ecuaciones en dos variables, con una ecuación no lineal, se resuelve en la actualidad a partir del método de sustitución. El procedimiento estandar amplía el campo numérico al conjunto de los números reales, y se obtienen dos parejas de soluciones.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x+y & = & b & b \in \mathbb{R} \\ xy & = & c & c \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

  Se aplica el método de sustitución para obtener una ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned} x = \tfrac{c}{y} \Rightarrow \ & \tfrac{c}{y} + y = b \\ \Rightarrow \ & \tfrac{c+y^2}{y} = b \\ \Rightarrow \ & c + y^2 = by \Rightarrow \ y^2 - by + c = 0 \end{aligned}$$

  A continuación, se obtiene el valor de y en la fórmula de segundo grado:

$$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Y se substituye para obtener, racionalizando la fracción, el valor de $x = c/y$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}} \times \frac{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}}{\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}} \\ &= \frac{c\left(\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \\ &= \frac{c\left(\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}\right)}{c} \\ &= \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \end{aligned}$$

- *Resolución original.* El enunciado del problema se representa gráficamente en la figura 5.3. Las cantidades desconocidas se identifican con las longitudes de los segmentos en el esquema geométrico, por lo que x, y, b y $c > 0$. Esta restricción del campo numérico implica la existencia de una única solución.

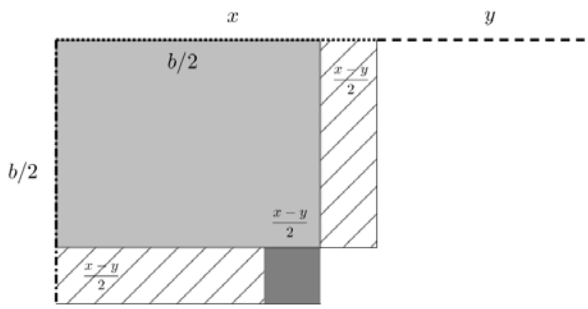


Figura 5.3: Versión geométrica del sistema $x + y = b$, $xy = c$ (Katz, 1998, 37).

Se construye una tabla de valores, en la cuál se relaciona el perímetro de la figura con el área, a través de una variable auxiliar z, que indica el cambio realizado en relación a la longitud y el ancho de la figura,

$$x = \frac{b}{2} + z, \quad y = \frac{b}{2} - z$$

El área de la figura se calcula entonces con la siguiente fórmula,

$$c = \left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{b}{2} - z\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - z^2$$

Es decir,

$$z = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

A partir de lo cuál se obtiene la solución deseada,

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad , \quad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Tal como se ha adelantado al principio del argumento, la restricción del campo numérico implica unicidad en la solución.

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.*
    - *Verbal.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
    - *Simbólico.* El discurso natural de la resolución hace referencia a un diagrama que representa geométricamente los términos de la ecuación.
  - *Situación-problema.* El problema se presenta en un contexto geométrico. Situación intramatemática.
  - *Conceptos-definiciones.* suma, resta, multiplicación, división, potencia cuadrada y radical cuadrado de un número racional positivo. Perímetro y área de una figura poligonal plana: rectángulos y cuadrados. Isometrías en el plano: traslación, simetría y giro. Función lineal. Incremento de una función. Variable auxiliar.
  - *Proposiciones-propiedades.* Fórmulas para el cálculo del perímetro y del área de un rectángulo y un cuadrado.
  - *Procedimientos.* Composición y descomposición de figuras poligonales planas. Obtención de figuras equivalentes. Procedimientos para el cálculo de perímetros y áreas. *Regula falsi*: uso de una variable auxiliar para medir el incremento en el valor de una variable.
  - *Argumentos.* Argumentos geométricos deductivos. Argumentos funcionales con variables auxiliares, en los que se intuye un uso incipiente del incremento infinitesimal, previo al cálculo de funciones derivables.

5.1.7. Resolución por congruencias

En la antigua China, los maestros eran instruidos en la resolución de ecuaciones diofánticas. Existen manuales en los que se enumeran ecuaciones de este tipo, y los maestros los debían saber resolver utilizando congruencias.

Ejemplo 23 (Problema del Zhang Quijian suanjing) *Un gallo cuesta 5 monedas, una gallina 3, y 3 polluelos 1 moneda. Se compran 100 aves con 100 monedas. ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos hay?*

- *Simbología y resolución actual.*

  Del enunciado se obtiene un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, con tres incognitas y dos ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & + & 3y & + & \frac{1}{3}z & = & 100 \\ x & + & y & + & z & = & 100 \end{array}\right.$$

  Se obtiene, por el método de Gauss, un sistema equivalente triangular (se suma 5 veces la segunda ecuación de -1 veces la primera).

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & \frac{14}{3}z & = & 400 \\ x & + & y & + & z & = & 100 \end{array}\right.$$

  A continuación, se procede a resolver el sistema. Los espacios vectoriales resultantes se representan en función del parámetro $z = \lambda$.

$$x = -100 + \frac{4}{3}\lambda \ ; \ y = 200 - \frac{7}{3}\lambda \ ; \ z = \lambda$$

  Teniendo en cuenta que los valores han de ser enteros no negativos, la primera solución al sistema se obtiene con el valor $\lambda = 75$. Con incrementos consecutivos, de tres en tres, se obtienen todos los resultados. Existen cuatro 3-tuplas (x, y, z) que dan una solución con valores enteros no negativos de gallos (x), gallinas (y) y polluelos (z).

λ	(x, y, z)
75	$(0, 25, 75)$
78	$(4, 18, 78)$
81	$(8, 11, 81)$
84	$(12, 4, 84)$

- *Resolución original.* El maestro Zhang propone, como primera solución, la combinación con menor número de gallos, formada por la tupla $(4, 18, 78)$. En el texto no se explicita como se llega a esta solución, pero en ejemplos anteriores se ha visto la regularidad con la que se utilizan, en la época, los métodos de *regula falsi* o *empezar por el final*. En este caso se ha empleado, problablemente, alguna de estas técnicas.

  A continuación, se procede a la reconstrucción de una hipotética resolución por el método de *regula falsi*. En primer lugar, es evidente que $z = \dot{3}$, y además, z debe ser un valor suficientemente grande que, a su vez, no sobrepase la cota superior de 100 aves. Por todo ello, el ensayo inicial se podría plantear con $z = 99$ polluelos, o de forma equivalente, un "gasto en polluelos" de 33 monedas. La propuesta inicial, con 1 gallina y 99 polluelos, $(0, 1, 99)$, da como resultado un gasto de 36 monedas, y no alcanza la cuantía económica del enunciado. Se analiza la hipótesis inicial, y se observa que un cambio de 3 polluelos por 3 gallinas, $(0, +3, -3)$, produce un incremento en el precio de 8 monedas. La diferencia entre el precio del enunciado y el precio obtenido por *regula falsi*, es de 64 monedas, y cada sustitución de 3 gallinas por 3 polluelos, proboca un incremento en el precio de 8 monedas. Entonces, para llegar a las 100 monedas, se han tenido que realizar 8 sustituciones de 3 gallinas, es decir, un incremento de 24 gallinas, y la equivalente reducción en 24 polluelos. Se obtiene, de esta forma, la solución canónica $(0, 25, 75)$.

	Cantidades	Comprobación
(A) Ensayo inicial	$(0, 1, 99)$	$1 \times 3 + 99 \div 3 = 36 \neq 100$
(B) Análisis	$(0, +3, -3)$	Incremento de $+8$
		$100 - 36 = 64$, $64 \div 8 = 8$
		8 incrementos de 3 gallinas, 24
(A') Ensayo definitivo	$(0, 25, 75)$	$25 \times 3 + 75 \div 3 = 100$

De esta forma, por *regula falsi*, se obtiene la primera tupla del resultado. A partir de este momento, el razonamiento debe evolucionar, y se deben analizar las consecuencias de otras transformaciones, como por ejemplo, $(+1, -1, 0)$, $(+3, 0, -3)$, etc.

Volviendo a la resolución del texto, hay que observar que el maestro no contempla la solución con "0 gallos": a pesar de que esta solución tiene sentido en el contexto real de la situación, el campo numérico del procedimiento matemático no contempla el 0. A partir de la primera solución aceptada, $(4, 18, 78)$, el maestro Zhang propone una regla para hallar todas las posibles soluciones: "un incremento de 4 gallos, un decremento de 7 gallinas y un incremento de 3 polluelos". Con esta regla se obtienen las demás soluciones: $(8, 11, 81)$ y $(12, 4, 84)$. Esto es equivalente a resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 6x + z & \equiv & 3 & \pmod{9} \\ 9y + z & \equiv & 0 & \pmod{15} \\ z & \equiv & 0 & \pmod{3} \end{array} \right.$$

- *Objetos matemáticos involucrados.*
  - *Lenguaje.* El enunciado y la resolución se expresan en lenguaje natural.
  - *Situación-problema.* Situación extramatemática de contexto económico.
  - *Conceptos-definiciones.* Suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Multiplos y divisores. División euclídea con resto cero. Congruencias. Ecuación diofántica. Sistema compatible indeterminado.
  - *Proposiciones-propiedades.* Propiedades de divisibilidad de los números naturales y propiedades del resto euclídeo.
  - *Procedimientos.* Posiblemente, *regula falsi* como procedimiento auxiliar. Búsqueda de equilibrios en igualdades con múltiplos y divisores.
  - *Argumentos.* Argumentación inductiva. Obtención de una regla general a partir del estudio de casos particulares. Obtención de todas las soluciones de un sistema compatible indeterminado, a partir de una solución particular.

5.1.8. Síntesis de objetos matemáticos

Los métodos expuestos forman parte de la antropología del saber "resolución de ecuaciones e inecuaciones". Se ha seguido una clasificación por *tipos de procesos*, pero conviene, en este momento, realizar una puesta en común de los objetos matemáticos que mayormente aparecen en estos procesos.

En ausencia del lenguaje algebraico moderno, los enunciados y su resolución se expresan en lenguaje natural. Los números representan *cantidades*, tanto enteras como fraccionarias, y los números racionales positivos constituyen el campo numérico de referencia. Además, los racionales positivos se representan como suma de una serie finita de fracciones con numerador unitario, con la excepción de fracciones propias sencillas.

Siguiendo con el campo numérico, el único procedimiento expuesto en el que se utiliza implícitamente el cero es el método de Gauss. La escritura del método se realiza sobre columnas verticales, en forma de tablas aditivas, y es el único contexto expuesto en el que se contempla la ausencia de una cantidad (el resultado de *despreciar* una columna), sin llegar a explicitar un símbolo a esta carencia de cantidades. En el método de Gauss, además del lenguaje natural, se emplea una representación gráfica matricial, en forma de columnas de datos, junto con cierta terminología que se requiere para describir el sistema: *clase*, *columna*, *despreciar*, etc. Además de la representación matricial, otros enunciados tienen como base una estructura geométrica plana, en la que los datos del enunciado y su manipulación aritmética se representan gráficamente como longitudes de segmentos y áreas de polígonos rectangulares.

Los procedimientos generales se ejemplifican en situaciones particulares con números concretos, que sirven para mostrar el potencial de una técnica determinada y se aplicabilidad en clases de situaciones similares. Las situaciones pueden ser intramatemáticas (se contextualizan en problemas aritmético-algebraicos o geométricos) o extramatemáticas (los problemas pertenecen a contextos prácticos productivos, económicos, o de reparto de bienes y áreas).

Los conceptos y las definiciones numéricas presentes en las propuestas históricas hacen referencia a las operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) sobre el conjunto de los números racionales positivos. De entre estas operaciones, la sustracción es la única operación que no es cerrada en el conjunto numérico de referencia. Por ello, se omiten en los textos las manipulaciones intermedias de cantidades negativas, y nunca se expresan como solución de una ecuación. Por ejemplo, algunos algoritmos se modifican para integrar el uso implícito del valor absoluto. Por el contrario, en algunos textos, el escriba hace una referencia explícita al inverso de un racional, dando a entender que la división sí se contempla como una operación válida y cerrada en el conjunto numérico.

Los conceptos propios de la resolución de ecuaciones hacen referencia a sistemas de ecuaciones, soluciones de un sistema, sistemas compatibles determinados e indeterminados, sistema equivalente, sistema triangular y combinación lineal de ecuaciones. En algunos casos, el campo numérico se restringe a los naturales, y aparecen, por tanto, ecuaciones diofánticas y congruencias. Además, a pesar de no disponer de una escritura algebraica sintética, se emplean con regularidad variables independientes, dependientes y auxiliares, y se utilizan conceptos funcionales de crecimiento, proporcionalidad y magnitud.

Se emplean también otros conceptos aritméticos, como media aritmética, progresión aritmética, múltiplo y divisor. Aquellos problemas en los que aparecen potencias y radicales, se contextualizan en un esquema geométrico, y aparecen en relación a longitudes y áreas de figuras poligonales planas (rectángulos y cuadrados). Cada transformación en una ecuación tiene su reflejo en una isometría sobre el esquema geométrico (traslación, simetría o giro de una parte del esquema).

La propiedad distributiva del producto con respecto de la suma es conocida. Se deducen, además, propiedades numéricas de objetos aritméticos, como la media aritmética unitaria o la divisibilidad y el resto euclideo. Se conocen y se aplican las propiedades de equivalencia de las soluciones en ecuaciones y sistemas de ecuaciones equivalentes. También son conocidas las propiedades de la función lineal, en una y varias variables. En los problemas de contexto geométrico, se emplean fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas de rectángulos y cuadrados.

Las operaciones aritméticas se asisten con tablas de operaciones tabuladas y se sustituye, en algunos casos, la división de fracciones por la multiplicación del inverso. En algunos procedimientos, como el método de Gauss, el procedimiento es algorítmico y cerrado, es decir, se busca un sistema triangular y se resuelve por sustitución hacia atrás. Otros procedimientos, como empezar por el final o regula falsi, constituyen métodos en sí mismos, pero tienen también un carácter asistencial como paso previo en procesos de resolución más complejos.

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales se basa, en muchos casos, en la obtención del coeficiente de proporcionalidad en una expresión funcional lineal, a partir de un análisis de valores particulares que toman las variables del sistema, o a partir de pivotar los ratios de parejas de cambios en una función lineal (método "excedente y escasez"). En los problemas de reparto proporcional, los procedimientos buscan una forma de obtener las fracciones o las diferencias finitas que generan el reparto. Por último, en los problemas de contexto geométrico, los procedimientos de resolución se basan en la composición y descomposición de figuras poligonales planas, la obtención de figuras equivalentes por aplicación de isometrías y los procedimientos de cálculo de perímetros y áreas.

En los textos matemáticos de la antigüedad, el espacio disponible para la redacción del problema es escaso y se utiliza la escritura natural con ausencia de representaciones gráficas o geométricas. Por ello, algunos pasos de la argumentación quedan ocultos. Aquellos pasos que el escriba considera obvios (en la cultura matemática de la época) no se explicitan. De esta forma, si un resultado nuevo se apoya en un resultado previamente justificado, éste se omite de la argumentación del problema. En los métodos *regula falsi* y "excedente y escasez", la argumentación del problema se realiza, sobre todo, en las fases de análisis del ensayo inicial.

Cabe destacar que en los procesos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el razonamiento se basa en justificaciones de tipo funcional, con el empleo de variables auxiliares, siempre que estas sean necesarias, y la discusión se basa en la determinación de los incrementos necesarios para obtener la solución definitiva a partir de un ensayo inicial. Se intuye en estos argumentos un uso incipiente del incremento infinitesimal, previo al cálculo de funciones derivables.

En todos los procedimientos, los algoritmos empleados se adecúan a las restricciones del campo numérico. Por ello, el valor absoluto aparece de forma implícita en los argumentos de resolución, para evitar la aparición de cantidades negativas. A diferencia de los métodos aritméticos y algebraicos, en los que la argumentación es fundamentalmente inductiva (se obtiene una regla general, a partir de un valor inicial), en las resoluciones geométricas, los argumentos son principalmente deductivos, y la solución se deduce de las propiedades del esquema geométrico.

En conclusión, en la génesis histórica del objeto matemático "resolución de ecuaciones", un sistema en el que aparecen dos cantidades desconocidas (sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, con dos incógnitas y en dos variables) se resuelve por un procedimiento funcional: se emplea un método inductivo, por ejemplo, regula falsi, y el análisis del primer ensayo se realiza en términos de incrementos de las variables independientes, dependientes o auxiliares. Esto es así incluso cuando la resolución se asiste con de un esquema geométrico (a priori, una figura con representación estática; pero dinámica en la mente y en la argumentación del escriba). Así, se podría pensar que la interpretación histórica de un sistema de ecuaciones como un ente dinámico se pierde con la introducción del lenguaje algebraico formal y su uso abusivo en el sistema educativo. En ese caso, el software y los modelos dinámicos podrían devolver el estatus dinámico a los sistemas de ecuaciones, no tanto en el sentido clásico de asistir el análisis de los incrementos de una variable, si no en un proceso de generalización en el que una ecuación particular forma parte de una familia o clase de ecuaciones.

5.2. Dimensión epistemológica

El análisis de la génesis histórica de los métodos de resolución de ecuaciones en la antigüedad, permite identificar los objetos matemáticos primarios que intervienen en sus prácticas operativas y discursivas. Estas prácticas se han caracterizado, históricamente, por el uso principal del lenguaje natural (con ausencia general de simbología), por estar contextualizados en situaciones-problemas que ponen a prueba el potencial de una técnica (intramatemáticos) o exponen métodos para resolver problemas económicos o geométricos en situaciones sociales (extramatemáticos), en los que los conceptos y las definiciones que se utilizan están implícitos en el argumento del escriba, y por estar basados en propiedades y procedimientos principalmente aritmético-funcionales, que se apoyan en un esquema geométrico.

Los objetos matemáticos primarios que participan en las prácticas operativas y discursivas en la resolución de ecuaciones en la actualidad, varían con respecto a la resolución histórica en varios aspectos. Por ejemplo, se utiliza una codificación simbólica fuertemente algebraica, en detrimento de la hegemonía del lenguaje natural. Las ecuaciones se traducen del lenguaje natural al algebraico, y los sistemas de ecuaciones evolucionan, a su vez, al lenguaje algebraico matricial. Las representaciones gráficas también varían. Los esquemas geométricos de geometría plana dejan lugar a representaciones funcionales en ejes de coordenadas cartesianas. El empleo de las nociones funcionales aparece ahora ligada a una representación gráfica de las ecuaciones, pero la resolución se realiza por técnicas algebraicas, en lugar de los métodos de *regula falsi* utilizados en la literatura antigua, basados en argumentos funcionales sobre "incrementos" de variables auxiliares.

Así pues, atendiendo tanto a los métodos históricos como a los actuales, los objetos matemáticos primarios (lingüísticos, situaciones, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) que aparecen en la resolución de ecuaciones se pueden organizar de la siguiente manera:

- *Elementos lingüísticos.*
  - *Verbal.* Aritméticos: Número natural, número entero, número fraccionario, número decimal, igualdad, suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz cuadrada; algebraicos: coeficiente, término independiente, incógnita, monomio de primer grado, ecuación de primer grado, ecuación de segundo grado; álgebra de matrices: matriz, determinante, matriz inversa, matriz identidad; geométricas: punto, recta, plano, segmento, polígono, vértice, distancia, lugar

geométrico, vector; funcional: variable independiente, variable dependiente, incremento, decremento.

- *Gráfico*. Diagrama ordinal para la representación de cantidades numéricas y magnitudes; representaciones de cantidades numéricas por diagramas lineales, por áreas y por representaciones discretas; diagramas geométricos para la representación de cantidades desconocidas; eje cartesiano para la representación de figuras geométricas y funciones; representación matricial de sistemas de ecuaciones.

- *Simbólico*. Representación pre-algebraica de un valor desconocido en un cálculo aritmético; uso de códigos personales para representar cantidades desconocidas y variables; representación algebraica de ecuaciones; representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales; simbología geométrica para la codificación de longitudes de segmentos, amplitudes de ángulos y vectores.

- *Situaciones*. Situaciones aritméticas aditivas y multiplicativas de incremento y decremento con sumando o factor desconocido; situaciones de reparto; transcripción de enunciados literales a lenguaje algebraico; transcripción de enunciados algebraicos a lenguaje literal; resolución de un enunciado algebraico; discusión de un sistema algebraico; transcripción de enunciados literales a lenguaje matricial; transcripción de enunciados algebraicos a lenguaje matricial; resolución de un enunciado matricial; cálculo de un determinante; cálculo de la matriz inversa; discusión de un sistema matricial; búsqueda de un valor desconocido en un esquema geométrico; búsqueda de una relación entre cantidades desconocidas en un esquema geométrico; búsqueda de la ecuación de un objeto desconocido en un esquema geométrico; búsqueda de la representación algebraica de un lugar geométrico.

- *Conceptos*. Conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, reales, imaginarios); operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, potencia, radical); media aritmética; operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potencia, radical); estructura de grupo abeliano y de anillo con unidad, matriz, determinante, rango, dependencia e independencia lineal, proporcionalidad simple; punto, recta, plano, polígono, cónica, lugar geométrico, distancia.

- *Proposiciones*. Teorema de Pitágoras; teorema de Tales; propiedades de la proporcionalidad simple, propiedades de la función lineal y de los sistemas de ecuaciones lineales; existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación cuadrática; existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales; existencia de la matriz inversa; paralelismo, perpendicularidad y colinealidad puntual; relaciones trigonométricas, relaciones entre ángulos y vectores.

- *Procedimientos*. Empezar por el final, *regula falsi*, excedente y escasez; obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas; despeje de incógnitas y manipulaciones en expresiones algebraicas; factorización polinómica, búsqueda de un factor común; método de igualación, método de sustitución, método de reducción; uso de igualdades notables; ecuación de segundo grado; búsqueda de un sistema equivalente triangular, método de Gauss; regla del pivote, regla de Cramer, cálculo de un determinante por menores complementarios.

- *Argumentos.* Ensayo y error; procesos de particularización y generalización, generalización de propiedades aritméticas a partir de ejemplos particulares, presentación de ejemplos (extensivos) de propiedades generales, procesos inductivos de búsqueda de patrones (intensivos); presentación de contraejemplos; procesos deductivos a partir de definiciones y proposiciones, demostración directa y reducción al absurdo.

Esta configuración general y clásica se puede desglosar en configuraciones en distintos contextos (aritmético, algebraico, matricial, geometría plana, geometría analítica, o funcional, entre otros). Además, hay que añadir a estas configuraciones los objetos matemáticos primarios que aporta el empleo de software dinámico. A continuación se ejemplifica cómo la configuración general influye en las prácticas operativas y discursivas. Se presentan distintas resoluciones a un mismo problema, tomando como referencia el *nivel* de *algebrización* mostrado en cada una de las resoluciones. El enunciado del problema es el siguiente:

"Dos números suman 72 y difieren en 36 unidades. ¿Qué números son?"

5.2.1. Resolución aritmético-algebraica

La articulación de los objetos matemáticos primarios en torno a una resolución aritmética se caracteriza en el uso de lenguaje natural y simbología pre-algebraica. Normalmente, la simbología pre-algebraica viene asociada al uso de códigos personales en la representación de cantidades desconocidas. La información numérica así codificada se puede representar gráficamente en diagramas, que pueden ser lineales, de áreas o discretos. Esta información numérica puede estar vinculada a una magnitud determinada, y la naturaleza de la magnitud que es objeto de estudio influye en la conveniencia de emplear una u otra representación gráfica.

Las situaciones que caracterizan y ejemplifican el uso de resoluciones aritméticas propias del *nivel* 0 de algebrización, se clasifican atendiendo a las características aditivas y multiplicativas de las operaciones que se requieren en su resolución (sección 5.3). Se genera así una tipología de situaciones en las que el número puede representar un *estado*, una *transformación* o una *comparación*, y a su vez, la operación aritmética toma un significado caracteriza, por ejemplo, un incremento, una disminución o un reparto.

Se emplean los campos numéricos natural, entero o racional, y las representaciones de números se operan a partir de operaciones aritméticas fundamentales. La alternancia del lenguaje natural y las representaciones de cálculos numéricos, hacen que éstas aparezcan de forma aislada, sin una continuidad en su desarrollo.

Se emplean técnicas y procedimientos de base aritmética, tales como empezar por el final, *regula falsi* o excedente y escasez, y proposiciones fundamentales, como por ejemplo el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, o resultados de proporcionalidad simple y linealidad.

Así, la resolución aritmética se caracteriza por el uso de extensivos. Los elementos particulares que aparecen en la manipulación de cálculos aritméticos se articulan en procesos de argumentación inductivos, que permiten analizar regularidades, y obtener reglas o patrones. Se avanza, de esta manera, en el uso de elementos intensivos y hacia el *nivel de algebrización* incipiente.

Ejemplo 24 (Resolución aritmética) *Dado que la suma de ambos números da como resultado 72 unidades, y su diferencia es de 36 unidades, el primer número que se* *requiere es el promedio de ambas cantidades, y el segundo, la diferencia entre la cantidad promediada y el valor mayor (o valor menor), es decir,*

$$\frac{72+36}{2} \pm \frac{72-36}{2}$$

Graficamente, la resolución aritmética de la tarea se representa sobre un diagrama lineal. La relación de orden queda patente en la representación del promedio y las diferencias de los números (figura 5.4).

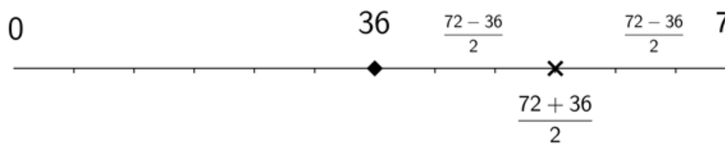


Figura 5.4: Representación del promedio $(72+36)/2$ y la diferencia entre 72 y 36.

Los elementos lingüísticos empleados en el ejemplo 24 incluyen una representación lineal del conjunto ordenado de números naturales. Alternativamente, una resolución aritmética puede contener lenguaje gráfico y simbólico de geometría plana. En este caso, una construcción geométrica pone en relación los valores numéricos conocidos y desconocidos del enunciado, en función de objetos geométricos: punto, segmento, recta, polígono, área, etc. La tarea consiste en la búsqueda de un valor desconocido dentro del diagrama geométrico. Aparecen los conceptos de distancia y valor absoluto, y en consecuencia, el campo numérico se restringe a los números positivos, puesto que los valores numéricos se representan a partir de cantidades positivas.

Ejemplo 25 (Resolución por geometría plana) *Se toma como referencia un segmento a de 72 unidades de longitud, y se coloca sobre él otro segmento b de 36 unidades de longitud, de forma que coincidan en uno de sus extremos. El primer valor desconocido (x) debe ocupar la totalidad del segmento b, más la mitad de la diferencia entre los segmentos a y b, es decir, es la suma de la longitud del segmentos b y la mitad de la diferencia de las longitudes de a y b; visto de otro modo, la distancia entre el extremo izquierdo del segmento b y la mitad de la distancia entre los extremos derechos de b y a. El espacio que resta, corresponde al segundo valor desconocido (y) (figura 5.5). Es decir, $a-b=72-36=36$, $36/2=18$ (valor de y) y $36+18=54$ (valor de x).*

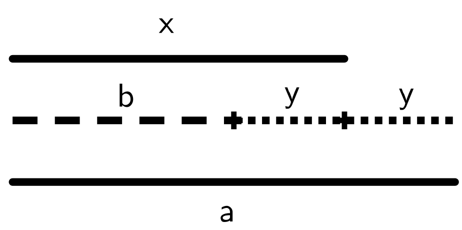


Figura 5.5: Representación geométrica $x+y=a$, $x-y=b$.

En el ejemplo 24, aparecen valores numéricos particulares, es decir, los objetos numéricos son extensivos. Más adelante, en el ejemplo 25, la información numérica se codifica con el nombre de un objeto geométrico, es decir, aparecen elementos intensivos. Los objetos numéricos intensivos modelizan el resultado general de la situación; así, una sustitución algebraica en la argumentación del ejemplo 24 permite obtener un patrón o una regla en el resultado. En general, si a y b representan respectivamente la suma y la resta de los números buscados, se obtiene la solución general,

$$\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}$$

La progresiva introducción de códigos e intensivos permite así avanzar en los niveles de algebrización, entendidos como situaciones generales o modelos de situaciones aritméticas generalizadas.

5.2.2. Resolución analítico-funcional

Una vez se consolida el uso de intensivos y la manipulación de símbolos (*nivel 3 de algebrización*), los enunciados literales se traducen a lenguaje algebraico. Los elementos lingüísticos pasan a ser fundamentalmente simbólicos, se identifican las variables en el enunciado, se asignan coeficientes a las variables y se organizan en monomios, formando ecuaciones de primer o segundo grado.

Aun y todo, el discurso de la resolución y el tipo de argumentación empleado pueden variar, desde una argumentación geométrica (analítica) basada en el uso de lugares geométricos y la representación gráfica en el eje de coordenadas cartesianas, hasta una argumentación funcional, en la que se ponen en relación variables independientes y dependientes.

El campo numérico de referencia se amplía al conjunto de los números reales, y esta ampliación implica la utilización de un sistema de representación continuo. Las operaciones aritméticas elementales se realizan sobre expresiones generalizadas, y ello implica, a su vez, la adaptación de los procesos operativos para incluir la factorización o la búsqueda de un factor común en polinomios, transformaciones para despejar incógnitas, etc. La generalización del lenguaje empleado y el uso de códigos provocan la tecnificación de los procedimientos de resolución. Así, algunos métodos se estandarizan y dan como resultado procedimientos algorítmicos, por ejemplo, los métodos de igualación, sustitución o reducción, o la aplicación de la fórmula de la ecuación de segundo grado.

Ejemplo 26 (Resolución analítica) *Los valores numéricos desconocidos del enunciado se codifican como x e y. A continuación, se plantea el sistema de ecuaciones en función de estas variables,*

$$\begin{cases} x+y &= 72 \\ x-y &= 36 \end{cases}$$

Cada ecuación representa el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen una de las condiciones del enunciado. En el eje de coordenadas cartesianas, el lugar geométrico de cada ecuación representa una recta (figura 5.6). El sistema se puede resolver por medio de multiples transformaciones elementales. Por ejemplo, por medio de método de reducción, se suman ambas expresiones para obtener la ecuación equivalente, $2x = 108$, es decir, $x = 54$. A continuación, se restan ambas expresiones, $2y = 32$, es decir, $y = 18$.

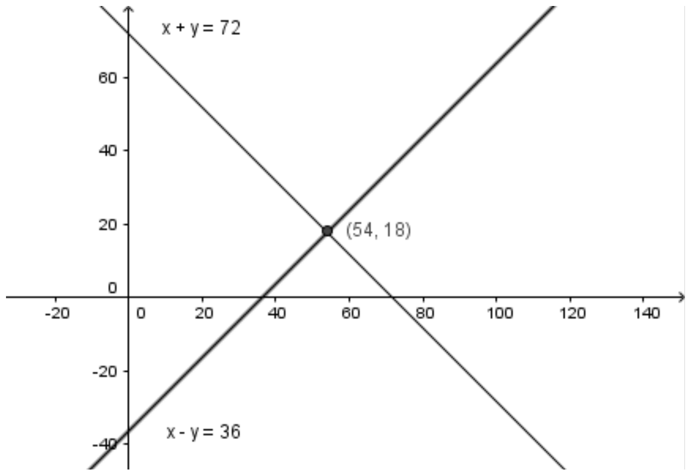


Figura 5.6: Representación por lugar geométrico del sistema $x + y = 72$, $x - y = 36$.

El proceso de resolución descrito en el ejemplo 26 se puede generalizar, para obtener un modelo de resolución para el tipo de tarea. Sin embargo, a diferencia del ejemplo 24, el procedimiento general implica, esta vez, el uso de parámetros que codifican los valores de la suma y la diferencia de las coordenadas cartesianas de los puntos del plano. Se obtienen, así, familias de lugares geométricos y se avanza en los *niveles de algebrización*, hasta alcanzar un *nivel* 4. La codificación del sistema de ecuaciones que resulta es,

$$\begin{cases} x + y &= a \\ x - y &= b \end{cases}$$

La manipulación algebraica requiere, por un lado, las operaciones con los monomios formados por las variables x e y, y por otro lado, las operaciones con los parámetros a y b que generan las familias de lugares geométricos. Por el método de reducción, al sumar y restar ambas expresiones se obtiene, respectivamente,

$$x = \frac{a+b}{2} \quad , \quad y = \frac{a-b}{2}$$

El sistema de lineal de ecuaciones se representa en simbología funcional sobre el eje de coordenadas cartesianas (figura 5.7).

Como alternativa a la resolución analítica, el sistema se puede resolver a partir de una interpretación funcional.

Ejemplo 27 (Resolución funcional) *Los valores numéricos desconocidos del enunciado se identifican y se codifican como variable independiente, x, y variable dependiente, y. A continuación, se plantea el sistema de ecuaciones en función de variables,*

$$\begin{cases} y &= -x + 72 \\ y &= x - 36 \end{cases}$$

Cada ecuación representa una función lineal en el plano de coordenadas cartesianas. El coeficiente de la variable independiente determina la pendiente de la recta, y el término independiente la ordenada en el origen. Así, la primera recta es paralela al eje auxiliar $y = -x$ y corta el eje de ordenadas en el punto $(0, 72)$. La segunda recta es paralela al eje

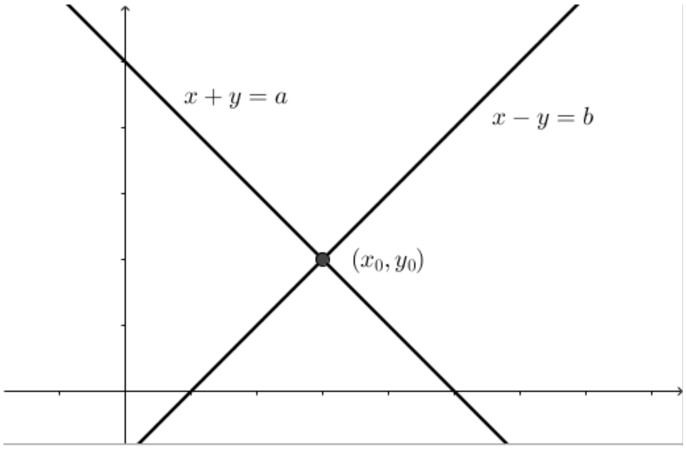


Figura 5.7: Representación tipo del sistema $x + y = a$, $x - y = b$.

auxiliar $y = x$ *y corta el eje de ordenadas en el punto* $(0, -36)$ *(figura 5.8). El sistema se puede resolver por medio de múltiples transformaciones elementales. Por ejemplo, por medio del método de igualación, se igualan las expresiones equivalentes a partir de la variable* y*, es decir,* $-x + 72 = x - 36$*. La ecuación de primer grado en una variable se resuelve para obtener el valor* $x = 54$*. A continuación, se substituye el valor de* x *en la segunda expresión, para obtener el valor* $y = 18$*.*

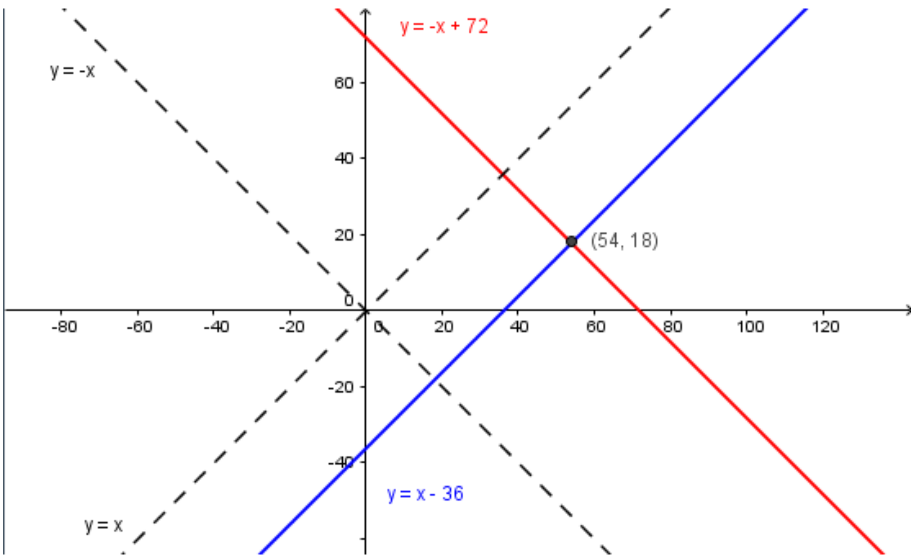


Figura 5.8: Representación funcional del sistema $y = -x + 72$, $y = x - 36$.

El proceso de resolución descrito en el ejemplo 27 se puede generalizar, para obtener un modelo de resolución para el tipo de tarea. El eje de coordenadas cartesianas se complementa con un eje auxiliar formado por las rectas $y = x$ e $y = -x$. De esta forma, cada cuadrante se divide, a su vez, en dos formas triangulares, formando ocho sectores en el plano. La representación de una recta se ejecuta, de esta forma, en dos pasos. En primer lugar, se compara el signo y el valor de la pendiente con los valores de los ejes auxiliares, para decidir su pendiente. En segundo lugar, se marca el valor de la ordenada en el origen, y se hace pasar la recta por ese punto (figura 5.9).

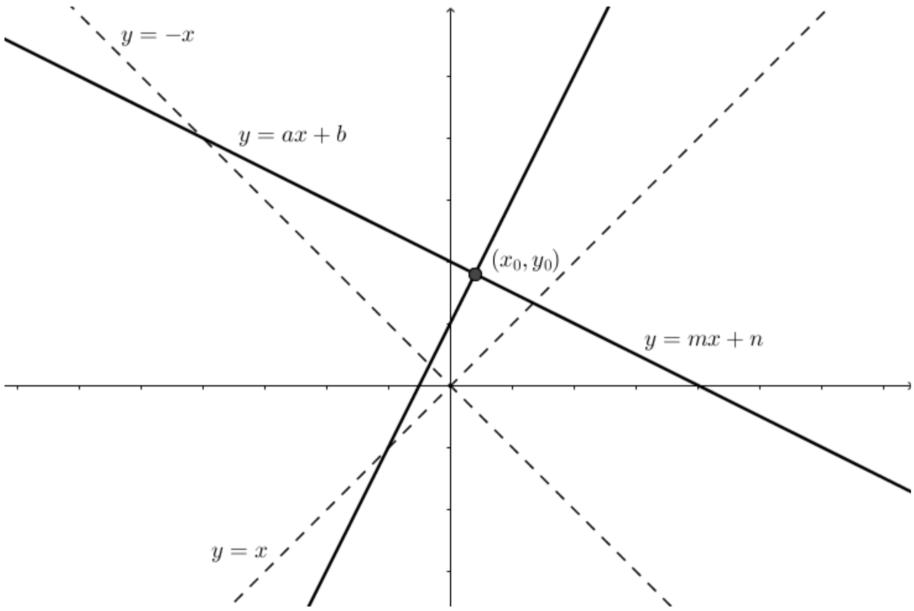


Figura 5.9: Representación funcional del sistema $y = mx + n$, $y = ax + b$.

5.2.3. Resolución matricial

En la sección anterior, la generalización de un sistema de ecuaciones genera valores parametrizados, no necesariamente vinculados a las variables de la ecuación. Un parámetro puede tener diversos significados, en dependencia de su uso o de su función: *registro numérico*, *cantidad cambiante*, *generalizador* o *incógnita* (Godino et al., 2015). Todos estos significados y sus usos, son indicativos del *nivel* 4 *de algebrización*.

Por ejemplo, cuando un parámetro sustituye a un coeficiente en una expresión algebraica, el parámetro genera una familia de funciones o de ecuaciones. En otro contexto, las matrices son también objetos matemáticos sujetos a la manipulación de parámetros. En efecto, una matriz no es un mero objeto aritmético: los valores numéricos de la matriz tienen un valor relativo, determinado por la posición que éste ocupa dentro de una disposición ordenada, y las propiedades y las operaciones con matrices requieren un *nivel de algebrización* que excede el *nivel* 3 *de consolidación del algebra*.

La resolución por matrices tiene elementos lingüísticos (verbales, gráficos y simbólicos) propios, que organizan la información del enunciado en celdas de datos. La solución se obtiene, asimismo, por medio de propiedades y procedimientos diferenciados: estudio de la existencia de soluciones por medio de la obtención de un determinante y el rango de una matriz; cálculo de la matriz inversa por medio de un sistema equivalente triangular, método de Gauss, regla del pivote, regla de Cramer, cálculo de menores complementarios, etc.

Ejemplo 28 (Resolución matricial) *La traducción del sistema de ecuaciones a lenguaje matricial da como resultado la matríz A de coeficientes, y la matríz ampliada $A|B$. Estas son, respectivamente,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 36 \end{array}\right)$$

El cálculo del determinante de la matríz A permite comparar los rangos de las matrices A y $A|B$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

El vector $(1, 1, 72)$ no es combinación lineal de $(1, -1, 36)$, por lo que $r(A) = r(A|B) = 2$. El sistema es compatible determinado. La matríz inversa de A es,

$$A^{-1} = \frac{(A^t)^*}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Y se obtiene la solución del sistema,

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 72 + \frac{1}{2} \cdot 36 \\ \frac{1}{2} \cdot 72 - \frac{1}{2} \cdot 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 18 \end{pmatrix}$$

5.2.4. Restricciones del campo numérico

Mendiola (2005) realiza un análisis del campo de restricciones, en relación al tópico de estudio "resolución de sistemas de ecuaciones lineales", en Educación Secundaria. El autor resalta la importancia del conjunto numérico de referencia, dado que en la resolución de ecuaciones, la existencia de soluciones depende, entre otros aspectos, del campo numérico o dominio empleado ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Establecer si un sistema tiene o no solución depende del conjunto numérico de referencia. Así, por ejemplo, el número de soluciones de la ecuación en coeficientes enteros $3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$, depende del campo numérico empleado (tabla 5.1).

Tabla 5.1: Soluciones en función del campo numérico.

Ecuación: $3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$		
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{C}$
$x_1 = -1$	$x_1 = -1$	$x_1 = -1$
	$x_2 = 1/3$	$x_2 = 1/3$
		$x_3 = i$
		$x_4 = -i$

Tal como se ha visto en las secciones 5.1 y 5.2, las tareas de resolución de ecuaciones se pueden resolver por configuraciones que no implican necesariamente una codificación algebraica. La resolución de un sistema se puede realizar por técnicas aritméticas, empleando lenguaje natural, y apoyando la argumentación sobre un esquema geométrico. Sin embargo, el campo numérico de referencia supone una restricción epistemológica de primer orden, independientemente de la técnica y del lenguaje empleados en la resolución.

5.3. Dimensión cognitiva

Las situaciones-problema son el punto de partida de la actividad matemática en toda área de conocimiento dentro de las matemáticas. En particular, las situaciones-problema son también el contexto que caracteriza la resolución de ecuaciones, puesto que hay que identificar el conjunto de situaciones que permite modelizar la práctica matemática a partir de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. En la sección dedicada a la dimensión epistemológica (5.2), se ha descrito una configuración de objetos primarios que se pone en funcionamiento en la resolución de tareas de resolución de ecuaciones. Asimismo, se han descrito y caracterizado algunas formas de resolución, dentro de una clasificación por niveles de algebrización. El punto de partida de las distintas configuraciones de resolución de ecuaciones la conforma una configuración epistémicas aritmética, que relaciona el número el empleo del número, perteneciente a sus diversos conjuntos, con las operaciones aritméticas básicas y los procesos de particularización y generación de extensivos.

Las situaciones aritméticas básicas se pueden clasificar en situaciones aditivas y multiplicativas, y la forma en la que el sujeto se enfrenta a estas situaciones determina su desarrollo cognitivo, es decir: el sujeto es un "sujeto en situación" (Vergnaud, 1998). Se amplía de esta forma la teoría piagetiana de las operaciones lógicas y de las estructuras generales del pensamiento, introduciendo en el análisis cognitivo las nociones de *conocimiento* y *situación*. Así, una noción (N) concreta queda determinado por:

- Un conjunto de situaciones (S) que le da sentido.
- Un conjunto de invariantes operatorios (I) usados por el sujeto para analizar y dominar las situaciones.
- Un conjunto de representaciones simbólicas (R) usados para representar el conjunto de invariantes, y por extensión, las situaciones.

Moreira, Caballero y Vergnaud (2009) representan la relación anterior por medio de la 3-tupla $N = (S, I, R)$. Se utiliza aquí el término "situación" en el sentido de "tarea" o "combinación de tareas", y difiere por tanto de la idea de "situación didáctica" presentada en el marco de la TSDM (capítulo 3), que tiene una visión sistémica. Además, se sustituye aquí de forma intencionada el término "concepto" por el de "noción": el primero evoca la formación de una opinión o la determinación de una imagen mental sobre una idea o un pensamiento; mientras que el segundo se refiere al conocimiento elemental que un sujeto tiene de algo.

El conjunto de invariantes operatorios es, junto con los esquemas de resolución, uno de los ingredientes esenciales en la práctica matemática. Los invariantes operatorios se clasifican en "nociones en acción" y "teoremas en acción", es decir, respectivamente, categorías de pensamiento y proposiciones consideradas pertinentes en el contexto de la situación propuesta. Cerrando la 3-tupla, tanto los invariantes operatorios como las nociones requieren de representaciones simbólicas ostensivas que faciliten su manipulación y su articulación dentro de un campo de conocimiento determinado.

Tomando como punto de partida una configuración aritmética de la resolución de ecuaciones, es conveniente profundizar en las estructuras aditivas, es decir, el conjunto de situaciones cuyo dominio requiere una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. A continuación, se presentan algunos ejemplos, tomados de Vergnaud (1998, 174).

Ejemplo 29 (Situaciones aditivas) *En las situaciones aditivas el número se puede interpretar como número cardinal, ganancia o pérdida, aumento o disminución, transformación o estado, estado inicial o final, transformación positiva o negativa, y adición o sustracción.*

1. *"Juanita tenía 7 canicas, ella jugó y ganó 5 canicas, ¿Cuántas canicas tiene ahora?" El 7 es un número natural (estado), mientras que el 5 indica una ganancia o aumento (transformación positiva). Se desconoce el estado final.*

2. *"Pablo tenía 12 canicas, él jugó y perdió 5 canicas, ¿cuántas canicas tiene ahora?" El 12 es un número natural (estado), mientras que el 5 indica una pérdida o disminución (transformación negativa). Se desconoce el estado final.*

3. *"Hans tenía 9 canicas, él jugó con Ruth, ahora tiene 14 canicas, ¿qué sucedió durante el juego?" El 9 y el 14 son números naturales (estados), y se desconoce la transformación positiva realizada (sustracción).*

4. *"Ruth jugó a las canicas con Hans y perdió 5 canicas; ahora tiene 7 canicas, ¿cuántas tenía antes de jugar?" El 7 es un número natural (estado), mientras que el 5 indica una pérdida o disminución (transformación negativa); se trata de una adición.*

Cada una de las situaciones $1-4$ del ejemplo 29 se resuelve a partir de un procedimiento aditivo relacionado con una *noción en acción* determinada. De entre ellas, la situación aditiva 4 se presupone la más compleja para los niños de siete u ocho años, que se inician en la aritmética, puesto que requiere de razonamiento inverso (deducción y resolución hacia atrás). Es necesario, pues, un estudio de las estructuras aditivas y multiplicativas para identificar las potenciales dificultades a las que se enfrenta el alumno en una configuración aritmética.

A medida que el niño avanza en su desarrollo cognitivo, las situaciones aritméticas evolucionan hacia la introducción de otras nociones y operaciones. Las situaciones que modelizan los distintos significados de las operaciones multiplicación y división, se pueden introducir a partir de los 9-10 años. Además, las estructuras multiplicativas permiten la modelización de invariantes operatorios y esquemas de acción que más adelante, en la Educación Secundaria, servirán se conocimiento previo para el estudio de las propiedades lineales en ecuaciones y en expresiones funcionales. A continuación, se presenta un ejemplo en que participan invariantes operatorios (teoremas en acción), tomados de Vergnaud (1998, 167).

Ejemplo 30 (Situaciones multiplicativas) *En las situaciones multiplicativas participan conceptos e invariantes operatorios que caracterizan el campo conceptual de las estructuras multiplicativas: función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división.*

Se propone a un niño de 13 *años el siguiente problema, "el consumo de harina para diez personas es, en promedio,* $3,5$ *Kg. por semana, ¿cuál es la cantidad de harina de harina necesaria para cincuenta personas, durante* 28 *días?"*

*El niño responde de la siguiente forma, "*5 *veces más personas,* 4 *veces más al día, esto es* 20 *veces más harina; luego,* $3,5 \times 20 = 70$ *Kg."*

La respuesta dada por el niño presupone el siguiente teorema implícito en su pensamiento, $f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2f(x_1, x_2)$*, donde la aplicación* f *indica el consumo; es decir,* $f(5 \times 10, 4 \times 7) = 5 \times 4\ f(10, 7)$*.*

También se podría expresar por la relación proporcional $C = K \times P \times D$ *donde* C *es el consumo,* P *el número de personas,* D *el número de días y* K *el consumo por persona y día, es decir,* $C = 5 \times 4 \times 3,5$*.*

Los análisis de las estructuras aditivas y multiplicativas, son ejemplos que permiten constatar cómo que el desarrollo cognitivo del estudiante avanza en relación a un conjunto de situaciones, conceptos, invariantes operatorios y esquemas. El conjunto de situaciones sirve de referencia y permite asociar un significado personal a las nociones, el sujeto se sitúa así en el polo de sujeto en acción, en el núcleo de la asignación de significado a la noción, en función de la práctica operativa y discursiva. El significado que el sujeto da a las nociones permite la acomodación de los invariantes operatorios que permiten, a su vez, resolver las tareas matemáticas. Las situaciones permiten, también, desarrollar esquemas de resolución, los cuales, junto con los invariantes operatorios, son los ingredientes esenciales del desarrollo cognitivo.

La interacción entre el esquema de acción y las situaciones, es la fuente primaria de las representaciones simbólicas. Los invariantes operatorios contienen cierta representación simbólica, requieren de representaciones ostensivas para su manipulación, y a su vez, la noción que subyace es el significante de la representación. En este sentido, un campo del conocimiento está formado por un conjunto de situaciones, que requiere el dominio de una serie de nociones, y que requieren a su vez el uso de representaciones simbólicas.

La práctica matemática se ejecuta, en este sentido, atendiendo a estos ingredientes esenciales, es decir, con la aplicación de esquemas e invariantes operatorios. Los esquemas se ejecutan atendiendo a las metas que tiene el sujeto, las anticipaciones que es capaz de realizar sobre el conjunto de situaciones, las reglas de acción que es capaz de aplicar y las inferencias que es capaz de realizar. Tal como se ha adelantado al principio de esta misma sección, los invariantes operatorios son proposiciones que se tienen por válidas dentro de un campo del conocimiento (teorema en acción), categorías que son pertinentes dentro del campo conceptual (nociones en acción) y la relación dialéctica entre ellos.

En cada etapa educativa, el estudiante descubre y desarrolla un buen número de nociones en acción. Cabe destacar los de grandeza y magnitud, valor unitario, razón y fracción, función y variable, tasa constante, dependencia e independencia, cociente y producto de dimensiones. Asimismo, el teorema en acción más importante es, según Vergnaud (1994), la propiedad isomórfica de la función lineal,

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$$

junto con la propiedad invertible del coeficiente constante de la función,

$$f(x) = ax \Rightarrow x = \frac{1}{a}f(x)$$

Estos conceptos y teoremas en acción no se explicitan y no son, en este sentido, verdaderos conceptos científicos ni teoremas demostrados.

5.4. Dimensión de enseñanza

Los contenidos matemáticos que contempla el currículo de Educación Secundaria (MEC, 2007) se agrupan en 5 bloques de contenidos, con la siguiente estructura: aritmética, algebra, geometría, funciones elementales, estadística y probabilidad. Por regla general, la estructura de estos bloques de contenidos se repite tanto en los currículos de las Comunidades Autónomas (DEGN, 2007) como en las unidades didácticas en los libros de texto. Por razones pragmáticas, en los Departamentos de Matemáticas en los centros educativos de secundaria, las programaciones didácticas se estructuran de forma lineal, y siguen normalmente esta misma secuencia (Lasa, 2011).

En la estructura curricular, el contenido matemático *resolución de ecuaciones* pertenece al bloque algebraico, y por ello, su estudio se realiza a partir de una configuración epistémica algebraica. La resolución algebraica de sistemas de ecuaciones se apoya en algunos casos en técnicas gráficas. Sin embargo, los contenidos funcionales se programan con posterioridad a la resolución de ecuaciones, y no hay una enseñanza específica de técnicas de resolución gráfica que vayan más allá de la representación, punto-por-punto, de dos expresiones algebraicas y de la obtención del punto de corte de las curvas, obtenidas por esta unión de segmentos entre puntos. En ausencia de una instrucción precisa en el campo funcional, en estos casos, la resolución gráfica puede no ser *transparente* para el estudiante.

El currículo de matemáticas contempla el uso de tecnologías en el aula (calculadoras, hoja de cálculo o software dinámico), por lo que otras técnicas de resolución de ecuaciones, como por ejemplo, la aproximación numérica por ordenador, tendrían teóricamente cabida en una programación de centro. Sin embargo, las técnicas no-algebraicas de resolución de ecuaciones están ausentes de la práctica diaria.

Las directivas ministeriales y los programas institucionales de enseñanza estructuran, controlan y evalúan los procesos de enseñanza en el sistema educativo, pero no están exentos del fenómeno de *obsolescencia* (Brousseau, 1998). Las modificaciones periódicas que sufren estos textos necesariamente genéricos y excesivamente abiertos, no suelen traer consigo una renovación de las situaciones de enseñanza que presentan los libros de texto, los cuales, de una edición a la siguiente, solamente cambian pequeños matices, o actualizan el diseño del grafismo. Con independencia del marco legal en el que se desarrolla el proceso educativo, el trabajo y la responsabilidad en el aula de matemáticas se debe repartir entre docente y estudiante, de acuerdo con un *contrato didáctico* adaptado a las condiciones institucionales y que esté en construcción efectiva (Brousseau, 1998).

En las siguientes secciones, se realiza un análisis del objeto matemático "resolución de ecuaciones" en el currículo vigente y en los libros de texto. El análisis se fundamenta en el seguimiento longitudinal de tres descriptores utilizados por Lasa (2011):

[C1] Obtención de valores numéricos sencillos en fórmulas.

[C2] Uso de tecnologías.

[C3] Resolución de ecuaciones.

La sección finaliza con un estudio piloto sobre resolución de ecuaciones e inecuaciones asistida por modelos dinámicos. En él, profesores de matemáticas de secundaria en formación resuelven tareas de resolución de ecuaciones e inecuaciones, con el objetivo de identificar y analizar los comportamientos en la resolución, en función del momento de utilización del software.

5.4.1. La resolución de ecuaciones en el currículo vigente

Los contenidos en "resolución de ecuaciones" aparecen en distintos bloques de contenidos a lo largo del currículo educativo (MEC, 2007) en la Educación Secundaria, y también lo hacen, evidentemente, los descriptores utilizados en el seguimiento de este contenido a lo largo del currículo.

El descriptor $C1$ (obtención de valores numéricos sencillos en fórmulas) tiene un carácter prealgebraico (tabla 5.2). Enlaza la incipiente manipulación de símbolos algebraicos (nivel 1 de algebrización) con los conocimientos aritméticos previos que el niño ha adquirido en la etapa de Educación Primaria. Su presencia es, por ello, más fuerte en tercer ciclo de Educación Primaria y en primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.

La introducción de contenidos algebraicos avanzados en segundo ciclo de ESO (relativos al descriptor $C3$) hace que este descriptor desaparezca a partir de 3º curso de ESO. Por ejemplo, el bloque 4 de contenidos del currículo de Educación Primaria, gráficos y parámetros estadísticos trata la obtención de valores en representaciones funcionales. En primer ciclo de ESO, además del bloque 3 de contenidos algebraicos, otros puntos currículo también guardan relación con la resolución de ecuaciones: por un lado, el bloque 2 de números cita las estrategias aritméticas necesarias para el cálculo de cantidades; por otro lado, el bloque 4 de contenidos geométricos contiene la manipulación de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras planas.

Tabla 5.2: C1: obtención de valores numéricos sencillos en fórmulas (MEC, 2007).

Curso	Contenidos relativos al descriptor C1
5-6 EP	Gráficos y parámetros estadísticos: disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.
1 ESO	Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. Estimación y cálculo de perímetros de figuras. Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación.
2 ESO	Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.

El descriptor $C2$ (uso de tecnologías) hace referencia a la utilización de instrumentos informáticos para asistir la resolución de ecuaciones (tabla 5.3). Identifica contenidos transversales en las etapas de EP y ESO, pero desaparece del currículo en Bachillerato.

En Educación Primaria, se citan explícitamente el uso de calculadora y del ordenador, tanto en el bloque 1 de estrategias de cálculo, como en el bloque 4 de tratamiento de la información. Se considera conveniente el uso de la calculadora para estimar valores y para calcular expresiones complejas. Asimismo, el ordenador se debería utilizar en la comprensión de contenidos funcionales. También en toda la etapa de ESO, el uso de herramientas tecnológicas debe facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, debe apoyar las representaciones funcionales y debe facilitar la comprensión de propiedades geométricas. El descriptor $C2$ de uso tecnologías agrupa una serie de contenidos cuya redacción es intencionadamente ambigua.

Tabla 5.3: C2: uso de tecnologías (MEC, 2007).

Curso	Contenidos relativos al descriptor C2
5-6 EP	Estrategias de cálculo: utilización de la calculadora en la resolución de problemas, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. Carácter aleatorio de algunas experiencias: confianza en las propias posibilidades e interés por utilizar las herramientas tecnológicas en la comprensión de los contenidos funcionales.
ESO	Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

El descriptor $C3$ (resolución de ecuaciones) recoge el desarrollo de los contenidos específicos en la resolución de ecuaciones, desde el empleo de estrategias de cálculo numérico hasta el álgebra de matrices (tabla 5.4). La presencia de este descriptor es ininterrumpida a lo largo de todas las etapas educativas, y su presencia aumenta a partir de segundo ciclo de ESO. El descriptor $C3$, además, avanza en los niveles de algebrización hasta llegar a los niveles 2 y 3.

A pesar de que en el currículo de Educación Primaria no existe un bloque específico de contenidos algebraicos, los contenidos prealgebraicos y de resolución de ecuaciones se pueden identificar en otros bloques de contenidos. Por ejemplo, en el bloque 1 de números y operaciones se citan las estrategias de cálculo, tales como la utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores. En el bloque 3 se concretan los contenidos de geometría, la situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros, aparecen aquí en sistema de coordenadas cartesianas y la descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos y giros.

En primer curso de ESO, los contenidos de resolución de ecuaciones se organizan también, principalmente, dentro del contexto aritmético. Se introducen por primera vez el conjunto de los números y las operaciones con números negativos. En segundo curso de ESO, se introducen formalmente las ecuaciones de primer grado, las transformaciones algebraicas que mantienen invariantes las soluciones de una ecuación, y los contextos de uso y las tipologías de problemas en las que se estos contenidos se ponen en funcionamiento.

A partir de tercer curso de ESO, además de las ecuaciones de primer grado, los contenidos de resolución de ecuaciones introducen las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones. En cuarto curso, las modalidades A y B de la asignatura de matemáticas tienen carácter distinto. En la modalidad A, los contenidos de matemáticas presentan una estructura de carácter terminal: no contempla nuevos contenidos y afianza los que ya se han trabajado en cursos previos. La estructura de contenidos de la modalidad B es propedéutica, y contempla nuevos contenidos, como por ejemplo la resolución de inecuaciones.

En general, en Bachillerato, se introduce la configuración de álgebra de matrices. Por un lado, en la modalidad de Ciencias y Tecnología, se trabaja la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales; por otro lado, en la modalidad de Ciencias Sociales, se trabaja el método de Gauss.

El currículo contempla una colección de procedimientos para la resolución de ecuaciones, junto con los conceptos y elementos lingüísticos que los acompañan, y se motivan a partir de una variedad de situaciones intramatemáticas. Se discuten a continuación las presencias y las ausencias de los descriptores del saber matemático "resolución de ecuaciones".

En relación a la configuración aritmética, se tratan, por ejemplo, procedimientos de tanteo y estimación a partir de situaciones de cálculo mental. Además de los procedimientos de cálculo aritmético, el currículo de ESO contempla, sobre todo, la configuración algebraica: una clasificación de estructuras de ecuaciones que se resuelven a partir de fórmulas y algoritmos. La configuración algebraica basada en la manipulación por transposición de elementos se complementa, en Bachillerato, con teoremas clásicos de análisis matemático, que permiten una configuración funcional de la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, el Teorema de Bolzano permitiría la presentación de situaciones que implementen métodos numéricos y computacionales de resolución.

A pesar de que el descriptor $C1$ desaparece del currículo a partir de segundo ciclo de ESO, los contenidos relativos a la obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas continúa implícito en las siguientes etapas. Por ejemplo, en el Bachillerato de modalidad en ciencia y tecnología, algunas materias de disciplinas científicas trabajan la resolución de ecuaciones no lineales: en electricidad, física, química y tecnología industrial.

El descriptor $C3$ recoge los contenidos y procedimientos propios de la resolución de ecuaciones en todas las etapas educativas: métodos por transposición de elementos, fórmula de segundo grado, algoritmo de Ruffini, etc. Los procedimientos y los algoritmos se trabajan, por regla general, sobre el conjunto de los números racionales, con una clara preferencia al conjunto de los números enteros. Las técnicas de cálculo mental tienen también una presencia longitudinal ininterrumpida en todas las etapas, y se utilizan para resolver ecuaciones sencillas para el nivel algebraico pretendido. Cuando las ecuaciones exceden el nivel algebraico pretendido, se fomentan los procedimientos de tanteo o falsa posición.

El descriptor $C3$ identifica en la etapa de Bachillerato contenidos funcionales que permiten la articulación de procedimientos numéricos de resolución de ecuaciones (teorema de Bolzano, técnica del valor medio, etc.), pero no explicita ningún procedimiento concreto. En particular, y en relación al descriptor $C2$, en el currículo de Bachillerato no se explicita el uso del ordenador, y desaparecen por tanto del currículo las referencias a la resolución numérica de ecuaciones, a la aproximación numérica de raíces, etc. El descriptor $C2$ identifica claramente los procesos de tanteo utilizando la calculadora en la resolución de ecuaciones complejas, y la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales en el plano.

5.4.2. Coherencia entre currículum y libros de texto

En la sección 5.4.1 se ha explicado la estructura del currículo a partir de tres descriptores que identifican contenidos relativos a la resolución de ecuaciones (tablas 5.2, 5.3 y 5.4). Estos contenidos curriculares se concretan, en un segundo nivel, en las programaciones de centro y en las propuestas de unidades didácticas en los libros de texto. En esta sección se discute cómo se realiza esta concreción de contenidos en los libros de texto, atendiendo a dos aspectos básicos: por un lado, se trata de averiguar si existe una correspondencia entre los contenidos en ambas fuentes; por otro lado, se trata de deter-

Tabla 5.4: C3: resolución de ecuaciones (MEC, 2007).

Curso	Contenidos relativos al descriptor C3
5-6 EP	Estrategias de cálculo: utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores. La situación en el plano y en el espacio, distancias, ángulos y giros: sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos y giros.
1 ESO	Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores comunes a varios números. Aplicaciones de la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas. Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios. Reconocimiento y conceptualización en contextos reales.
2 ESO	Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.
3 ESO	Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
4 ESO A	Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayoerror o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.
4 ESO B	Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.
Bachiller 1 CT	Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas. Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.
Bachiller 2 CT	Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Bachiller 1 CCSS	Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.
Bachiller 2 CCSS	Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.

minar si la actividad matemática que se deduce de los ejercicios, problemas y cuestiones del libro de texto favorece el desarrollo de las capacidades mencionadas en el currículo.

En el currículo de Educación Primaria (MEC, 2006), no existe un bloque de contenidos específico de álgebra o pre-algebra: los contenidos algebraicos, pre-algebraicos y la resolución de ecuaciones no se citan expresamente en el documento. Aun así, los libros de texto (Vicens Vives, 2003) contienen ejercicios en los que:

- Dado un resultado, se requiere el cálculo mental para hallar un sumando o factor desconocido.
- Aparece simbología pre-algebraica.
- Se requiere se la transposición de elementos en su resolución.
- Se requiere la aplicación de la relación de orden para hallar valores (la simbología aparecerá más adelante en la resolución de inecuaciones).

La propia naturaleza del currículo en Primaria favorece el trabajo integrado de nociones y la interconexión entre contenidos matemáticos. Nociones que formalmente se clasifican en distintas áreas de las matemáticas, no forman en esta etapa grupos estancos de contenidos. Esta forma de proceder se pierde más adelante en ESO. Los contenidos de resolución de ecuaciones se estiman a través de criterios de evaluación aritméticos (uso correcto de operaciones, cálculo mental) y criterios de evaluación de tratamiento de la información (uso de tablas, gráficos, información en distintos soportes).

El Real Decreto es un documento de mínimos, en el cual se enumeran los conocimientos y competencias que un alumno debe demostrar al finalizar la etapa. Los libros de texto pueden exceder esos contenidos, añadir unos nuevos o incluir aquellos de cursos posteriores, siempre y cuando se trabajen los mínimos correspondientes. En los libros de texto estudiados por Lasa (2011), se observa en todos ellos el adelanto sistemático de contenidos. Por ejemplo, en el bloque de geometría de los libros de texto de primaria, se requiere el cálculo de áreas mediante fórmulas y uso de intensivos algebraicos, propios del primer curso de ESO. Por el contrario, hay una ausencia clara de ejercicios de identificación y clasificación de formas geométricas planas, más propios de la etapa.

Una vez se avanza a la etapa de ESO, Lasa (2011) observa una posible incoherencia del currículo en relación al cálculo de potencias y raíces. La introducción de estas operaciones encuentra una justificación en el cálculo de perímetro, área y volumen. Los ejercicios de aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes son usuales en los libros de texto de ESO. Sin embargo, en algunos libros de texto, se pueden encontrar ejercicios en los que se requiere de los estudiantes la obtención de una variable en función de otra, por manipulación de factores en las fórmulas algebraicas para el cálculo de áreas y volúmenes: las ecuaciones de segundo y tercer grado se estudian, en realidad, en cursos posteriores.

A diferencia del currículo de Educación Primaria, en la etapa de Educación Secundaria los contenidos matemáticos se organizan en compartimentos estancos (MEC, 2007a) con un predominio claro del bloque de contenidos algebraicos, inexistente en la etapa anterior. La estructura del Decreto provoca que los libros de texto de secundaria se organicen a su imagen y semejanza, en capítulos estancos. A su vez, un docente que toma el libro de texto como referencia única para la organización de la actividad matemática en el aula, estructura su día a día con actividades que carecen de integración con otros bloques de contenidos. En definitiva, la estructura de un texto de ámbito legal puede provocar un fenómeno didáctico en el ámbito de la organización de las enseñanzas en el aula (Lasa, 2011). Por ejemplo, en los libros de texto se pierde de vista la relación que existe entre los contenidos de resolución de ecuaciones en el bloque de álgebra, y los contenidos de representación gráfica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones en el bloque de funciones. No se ha podido encontrar ningún libro de texto que presente estos contenidos de forma integrada.

Lasa (2011) identifica el fenómeno de *adelanto sistemático de contenidos* en la etapa de secundaria, y ejemplifica en la siguiente secuencia la inclusión en cada libro de contenidos de resolución de ecuaciones propios del curso siguiente (Anaya, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d):

- En primer curso se incluyen ejercicios de resolución de ecuaciones de primer grado; se trata de un contenido de mínimos de segundo curso.
- En segundo curso se incluyen ejercicios de resolución de ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales; se trata de contenidos de mínimos propios de tercer curso.
- En tercer curso se incluyen ejercicios de resolución de ecuaciones exponenciales, ecuaciones con radicales y ecuaciones polinómicas, a resolver por técnicas de tanteo, junto con fracciones algebraicas; se trata de contenidos algebraicos y funcionales propios de cuarto curso.
- En cuarto curso (modelo B) aparecen ecuaciones polinómicas, con especial atención a las bicuadradas, ecuaciones con fracciones algebraicas, ecuaciones con radicales, sistemas de ecuaciones no-lineales, inecuaciones y sistemas de inecuaciones; estos contenidos sí son coherentes con el currículo.

En definitiva, el Decreto tiene carácter de *mínimos* y los libros de texto no omiten ningún contenido propio del nivel. El hecho de incluir ejercicios de niveles posteriores tiene plena coherencia curricular, y puede ayudar a atender la diversidad en el aula. Sin embargo, cuando el Departamento de matemáticas de un Centro particular define los contenidos mínimos de su programación en referencia única al libro de texto, está modificando de forma alarmante la estructura de los contenidos.

Las situaciones que contextualizan la resolución de ecuaciones presentan en todos los cursos de ESO una estructura similar: ejercicios aislados en los que se quiere la identificación del tipo de ecuación y la aplicación de una técnica determinada. Los problemas que requieren el planteamiento y la posterior resolución de un sistema de ecuaciones lineales, casi no varía de enunciado o grado de dificultad: se trata en su mayoría de ecuaciones con múltiplos, fracciones o porcentajes.

La ausencia de una situación adidáctica fundamental o de una situación-problema extramatemático, hace que la introducción de tareas de resolución no tenga una fase previa de exploración (Mendiola, 2005). El objeto matemático "resolución de ecuaciones" se presenta de manera ostensiva, presentando un ejemplo de resolución por cada método. A continuación, se ejercita la técnica con una batería de ejercicios muy similares unos con otros: mismo campo numérico, etc. Por el funcionamiento del sistema de enseñanza, los métodos de resolución se presentan de forma atomizada, sin integrar las técnicas dentro de una teoría general, sin presentar aspectos comunes a dichas técnicas y sin deducir unas técnicas de otras (por ejemplo, los métodos de sustitución, igualación y reducción dan origen a la regla del pivote, que no es sino un paso previo al estudio de determinantes).

5.4.3. La noción de igualdad

En el estudio y análisis de currículo y de los libros de texto, se observan ciertas divergencias entre las configuraciones de los objetos primarios en los procedimientos de resolución de ecuaciones descritos en la sección 5.2 y las estructura de los libros de texto. En los libros de texto analizados, las situaciones-problema que se presentan a los estudiantes son en su mayoría catálogos de tipos de ecuaciones, y no siguen las indicaciones epistémicas que se dan en la sección en torno a los procedimientos de resolución de ecuaciones.

Al comenzar la Educación Secundaria, y partiendo de un *nivel* 0 de *algebrización*, la resolución aritmética sirve de estrategia de base para realizar nuevos aprendizajes, atendiendo a la memoria didáctica y la experiencia acumulada por el estudiante en la etapa de Educación Primaria. A medida que el estudiante avanza en la utilización de intensivos, adquiere técnicas algebraicas más avanzadas y complejas. Ocasionalmente, el intento del estudiante de resolver aritméticamente el problema puede constituir un *obstáculo epistemológico*, que impedirá descubrir un método de resolución algebraico. Por ejemplo, en la sección 5.4.1 se ha constatado la tendencia en las propuestas educativas y en los libros de texto a emplear coeficientes enteros y soluciones enteras en sus propuestas, con ánimo de facilitar la resolución en las primeras fases del aprendizaje algebraico. Este tipo de decisiones no hacen más que reforzar este obstáculo epistemológico, generando además un *obstáculo didáctico*, puesto que el estudiante no tendrá necesidad de cambiar de configuración epistémica hasta que sus conocimientos previos sean insuficientes para obtener la solución del nuevo sistema, ampliando, por ejemplo, el campo numérico de la situación al conjunto de los números racionales.

Además del empleo de un campo numérico determinado, la resolución de ecuaciones lleva también consigo la manipulación del signo de igualdad en distintos contextos. Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) realizan una clasificación de las definiciones de la noción de igualdad, explicitando los sistemas de prácticas matemáticas y el contexto matemático de uso para cada uno de los significados, y ponen de manifiesto que "las instituciones escolares aceptan (irreflexivamente) que los estudiantes tienen la capacidad de adaptar [la] definición formal de la noción de igualdad a los diferentes contextos de uso" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 82), generando, de esta manera, un fenómeno de *ilusión de la transparencia*.

La definición de igualdad varía en función del contexto matemático de referencia, y a su vez, cada definición condiciona las prácticas operativas y discursivas. Estas definiciones se clasifican en función de los modelos de sistemas de prácticas a los que están vinculados.

En el contexto topológico, dos números reales son iguales cuando la distancia entre ambos es cero (*igualdad métrica*) o cuando el conjunto al que pertenecen es conexo (*igualdad conectiva*). A su vez, el sistema de prácticas métrico-conectivo guarda relación con el analítico, en el cual dos números reales son iguales si uno de ellos está dentro de todo entorno abierto centrado en el segundo (*igualdad como proceso de paso al límite*) o si las imágenes de ambos números a través de una función inyectiva son iguales (*igualdad funcional*).

En el contexto de resolución de ecuaciones, dos números son iguales siempre que sean solución de la misma ecuación (*igualdad algebraica*); se obvian en esta definición las ecuaciones con múltiples soluciones. Esta es la definición algebraica que se emplea de forma implícita a partir de la Educación Secundaria. Por un lado, su utilización supone una ruptura con el significado que tiene la igualdad en el contexto aritmético, en el que dos números reales son iguales si representan una misma clase (igualdad como equivalencia) o si cumplen la propiedad antisimétrica (*igualdad de orden*) (figura 5.10). Por otro lado, en las configuraciones aritmético-algebraicas, es común el uso de representaciones geométricas (planas o analíticas) que enriquecen el lenguaje empleado en la práctica operativa, y se valen del eje de coordenadas cartesianas para la representación de variables y funciones. La representación algebraica de una ecuación, junto con el significado algebraico de la igualdad, se encuentran, dentro de la cronología de la organización curricular, en medio de los contextos de uso “aritmético” y “funcional” de las expresiones y las igualdades de resolución de ecuaciones, a pesar de que estas nociones no forman un continuo. La génesis histórica avala esta circunstancia, ya que en la sección 5.1 se ha observado que los argumentos aritméticos y funcionales aparecen en relación, aun sin la aparición de un lenguaje simbólico algebraico.

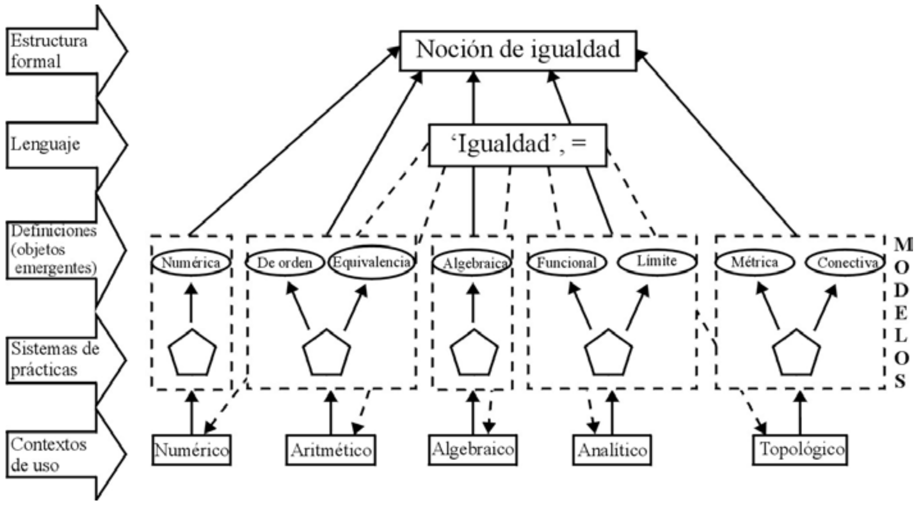


Figura 5.10: Significados asociados a la igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 92).

Existe la creencia de que los sistemas de prácticas aritmético, algebraico y funcional forman una cadena de aprendizaje, en la que cada configuración genera condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la siguiente configuración (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). Se debe evitar, por tanto, este fenómeno de *linealidad*, y se deben potenciar, en su lugar, instrumentos para adaptar la enseñanza integrada de la aritmética, el álgebra y el análisis. Es decir, el álgebra no se debe entender solo como una aritmética generalizada, y la enseñanza del álgebra no se debe limitar a la manipulación simbólica de expresiones con letras. En este sentido, el uso de graficadores (Wilhelmi, 2003) y de software dinámico debe jugar un papel central en la introducción de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, para desplazar así el foco de interés de los análisis formales (manipulaciones simbólicas) hacia la comunicación y construcción de conocimientos de forma intuitiva, gráfica y numérica, ateniendo a la *dimensión tecnológica* (Artigue, 1998). Asimismo, se debe evitar este punto de vista reduccionista en el tratamiento del análisis, que no se debe ver únicamente como un álgebra de funciones. Este punto de vista genera, a su vez, un fenómeno *reduccionista* del álgebra.

“El análisis de la noción de igualdad es una muestra de que la enseñanza

> atomizada y lineal de la aritmética, el álgebra y el análisis (en este orden) no contribuye al aprendizaje de estas obras matemáticas; es necesaria una concepción triangular que permita, en cada problema concreto, la interacción de aproximaciones numéricas, algebraicas y analíticas para la obtención de una solución." (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 112-113)

No existe, pues, una gradación en los modelos expuestos para la noción de igualdad, ni una necesidad que obligue a postergar uno de ellos en beneficio de otro. En su lugar, se debe promover la articulación de los distintos modelos para la noción de igualdad, ya que este tránsito facilita al estudiante la comprensión de la propia noción, y su utilización en contextos en los que se requiere apliar la propiedad transitiva, no solo en el contexto numérico, sino también en el contexto de la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la Educación Secundaria, la acción de despejar una variable determinada en una expresión algebraica, requiere de un enorme de esfuerzo de comprensión por parte de un estudiante (Mendiola, 2005).

> "Para un alumno que acaba de aprender a resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, despejar una incógnita representa el método natural para encontrar el valor numérico de x, pero ahora, despejar una incógnita tiene por objeto encontrar una relación entre variables" (Mendiola, 2005, 92).

$$ax + by = c \Rightarrow x = \frac{c - by}{a}$$

Emplear configuraciones algebraicas en la resolución de ecuaciones implica también aceptar la doble naturaleza *herramienta-objeto* (Douady, 1986) de los sistemas de ecuaciones. Así como en la antigüedad el número negativo se utiliza como artilugio de cálculo, pero carece de un estatus propio como objeto matemático (sección 5.1), atendiendo a la configuración aritmética, el estudiante acepta la técnica de resolución como *herramienta* para obtener un valor numérico, pero no como objeto matemático en sí mismo, rechazando así la dualidad herramienta-objeto de los sistemas de ecuaciones lineales.

En la siguiente sección se presenta una experimentación realizada en el marco del Máster en Formación en Profesorado, con el objetico de evaluar el uso de software dinámico como instrumento en la fase previa de exploración.

5.4.4. Estudio piloto: GeoGebra en un momento de exploración

Se discute en esta sección la respuesta dada por estudiantes de Máster en Formación en Profesorado en Secundaria (MFPS), a la hora de asistir mediante modelos dinámicos la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones con GeoGebra. El diseño y el objetivo de la experimentación consisten en la identificación del momento apropiado para la utilización del software. En concreto, se observa como la intuición puede inducir una inadecuada utilización del modelo dinámico, siendo por tanto indispensable una instrucción previa en el manejo y en los objetivos del mismo.

Muestra

Es intencional y está formada por 17 estudiantes del MFPS. La experimentación se realizó durante los cursos 2011/2012 (9 estudiantes) y 2012/2013 (6 estudiantes). En su mayor parte, se trata de ingenieros o licenciados en ciencias, con experiencia en el manejo de otros software matemáticos, los cuales han recibido una instrucción previa dentro del Máster en el uso de GGB. Se ha constatado que esta tipología de estudiantes se familiariza rápidamente con GGB, como se discutió en el Primer congreso internacional de GGB, celebrado en Linz en 2009.

El origen y tamaño de la muestra determina el tipo de resultados y su discusión, que buscan la coherencia interna antes que la inferencia estadística. La validez interna se sigue del contraste entre lo esperado y lo observado, en el marco de una investigación basada en un método de ingeniería didáctica, entendida esta en sentido extenso (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi, 2013).

Cuestionario

Se propone a los estudiantes dos tareas de desarrollo de conocimientos matemáticos previamente adquiridos: la discusión de un sistema de dos ecuaciones y dos variables ($T1$), y la discusión de un sistema de inecuaciones no lineal ($T2$). Los estudiantes conocen sobradamente procedimientos para la resolución de la tarea $T1$ y, por lo tanto, el foco de atención es exclusivamente el uso de GGB. En cambio, los estudiantes, si bien tienen una formación previa que les permite afrontar con ciertas garantías la tarea $T2$, no disponen en su bagaje cultural de actividades relacionadas en contextos de aplicación estandarizados. Por lo tanto, el envite que tienen ante sí los estudiantes es tanto la puesta en marcha de procedimientos matemáticos que hasta ahora les son ajenos, como de uso del instrumento. En ambos casos la discusión se realiza en función de dos parámetros (tabla 5.5).

Tabla 5.5: Descripción de la tarea.

Tarea $T1$	Tarea $T2$
Realiza la discusión del siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores que tomen los parámetros a y b: $$\left\{\begin{array}{l} ax+3y=3 \\ 2x-by=7 \end{array}\right.$$	Realiza la discusión del siguiente sitema de inecuaciones no lineales según los valores que tomen los parámetros a y b: $$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2\leq a \\ x-y\geq b \end{array}\right.$$

Los estudiantes emplean dos métodos de resolución. Por un lado, resuelven la tarea por *métodos algebraicos* (MA) sobre papel, de la forma tradicional. Por otro lado, se les pide que diseñen un *modelo dinámico* (MD) que les asista en el análisis de la tarea (las figuras 5.11 y 5.12 muestran algunas disposiciones de los *applet* diseñados por los estudiantes), y una plantilla a tres columnas (tabla 5.6) para transcribir los resultados obtenidos.

Existen dos cuestionarios, A y B, en los cuales se invierte la secuencia de resolución. El objetivo es contrastar si el orden de utilización de los medios materiales condiciona las respuestas. En el cuestionario A, los estudiantes primero resuelven la tarea $T1$ por métodos algebraicos y, a continuación, se les pide que realicen la discusión por el modelo dinámico (secuencia $MA-MD$); en este mismo cuestionario, la tarea $T2$ se resuelve primero por el análisis del modelo dinámico, para después realizar la resolución algebraica (secuencia $MD - MA$). En el cuestionario B, se invierte el orden: $MD - MA$ para $T1$, y $MA - MD$ para $T2$.

Tabla 5.6: Plantilla para la resolución por Modelo Dinámico

Caso	Representación gráfica	Resolución algebraica

Comportamientos esperados

Atendiendo a la memoria didáctica de la clase, se espera un mejor comportamiento en la tarea $T1$ que en $T2$. Asimismo, se espera que el orden de los métodos MA y MD influya en el tipo de respuesta que den los estudiantes. El estudio previo a través de MD debe dar mejores resultados, dado que ofrece al estudiante un modelo de manipulación a la hora de abordar la casuística planteada. Por último, la plantilla facilitada a los estudiantes debe permitir una mejor organización de la información, al integrar los puntos de vista algebraico y funcional del problema (Lasa, 2011). Esto debe permitir al estudiante un control de sus producciones.

Resultados del estudio piloto

La tabla 5.7 resume los resultados obtenidos para $T1$. Se observa que estos resultados son mejores en el cuestionario A, para todos los segmentos de la muestra.

Tabla 5.7: Resultados de la tarea $T1$, por cuestionario y año.

	2012			2013			Cuestionarios		
Respuesta	A	B	Total	A	B	Total	A	B	Total
Correcta	3	2	5	3	1	4	6	3	9
Incompleta	1	0	1	0	1	1	1	1	2
Incorrecta	2	3	5	0	1	1	2	4	6
Total	6	5	11	3	3	6	9	8	17

Se resume en la tabla 5.8 los comportamientos observados en el cuestionario A, para $T1$, y en la figura 5.13 se muestra una resolución-tipo dada por un estudiante. A cada tipo se resolución MA le corresponde un uso de MD. La solución correcta y completa (con solución para el caso compatible determinado (CD) en función de los parámetros) se dio por técnicas matriciales, y se corresponde en el MD con una comprobación de la casuística obtenida.

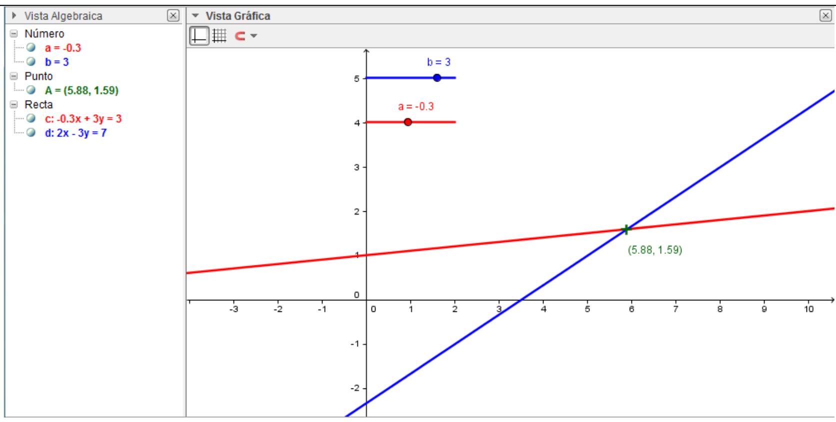
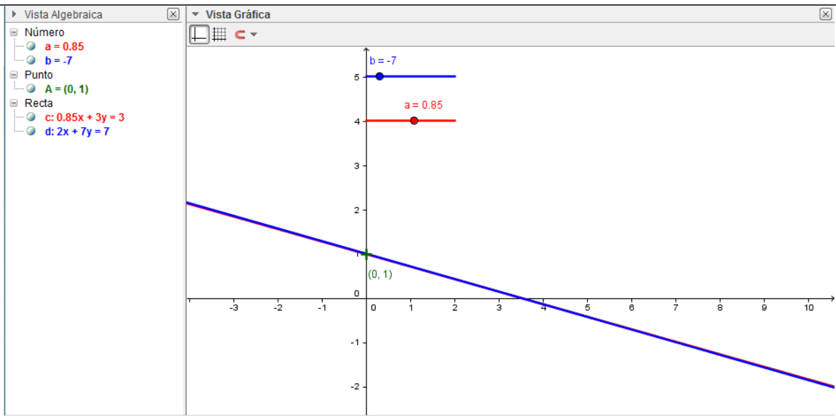
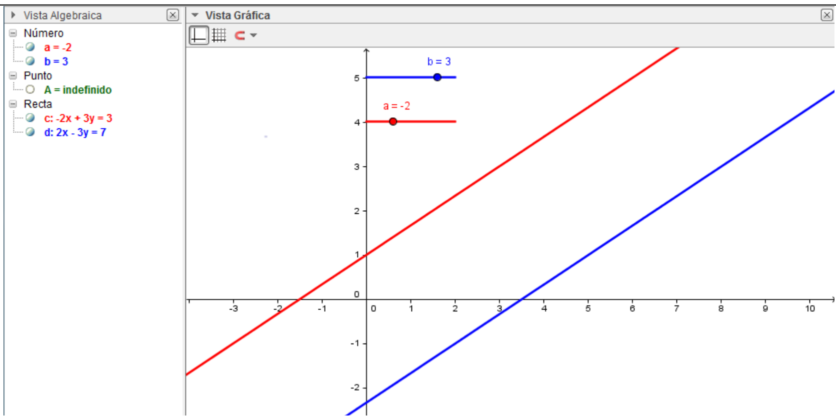
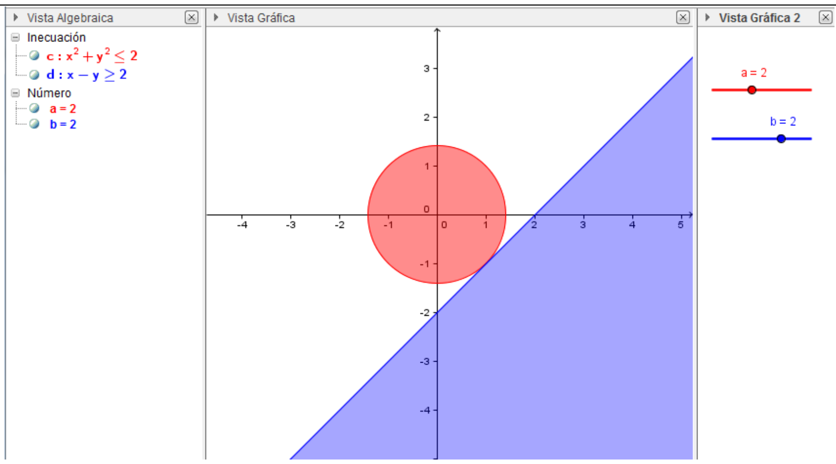
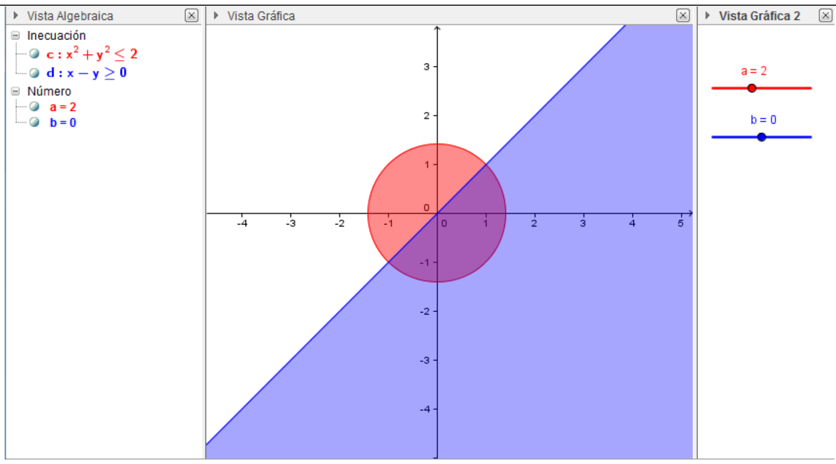
Compatible determinado ($ab \neq -6$)	
Compatible indeterminado ($ab = -6$, $b = -7$)	
Incompatible ($ab = -6$, $b \neq -7$)	

Figura 5.11: Disposiciones del *applet* en la tarea $T1$

Compatible determinado ($2a = b^2$)



Compatible indeterminado ($2a > b^2$)



Incompatible ($2a < b^2$)

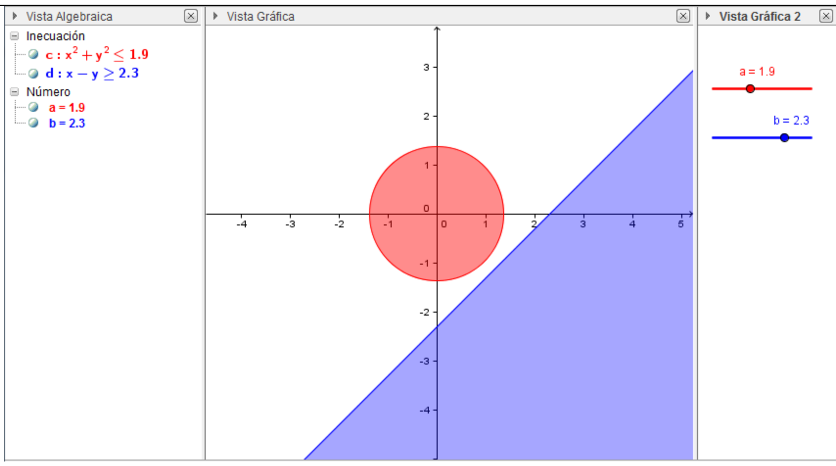


Figura 5.12: Disposiciones del *applet* en la tarea $T2$

La solución correcta, pero incompleta (sin solución para el caso CD), se dio por técnicas de geometría analítica o el método de igualación, y estos estudiantes utilizan el MD para ejemplificar lo observado en la resolución algebraica. A aquellos estudiantes que no realizaron un análisis algebraico correcto del problema, el modelo dinámico no les ayudó a encontrar una solución.

La tabla 5.9 sintetiza los comportamientos para el cuestionario B. De forma similar al caso anterior, una discusión correcta y completa por MD, implica una comprobación matricial mediante el MA. Sin embargo, tal y como se puede ver en la figura 5.14, una discusión incompleta o incorrecta por MD, conlleva el estudio de casos irrelevantes de los parámetros (casos igual, menor o mayor que 0; posición relativa de las rectas según los ángulos formados), los cuales son considerados también en la resolución mediante el MA.

Tabla 5.8: Comportamientos de la tarea $T1$, cuestionario A

Método Algebraico	Modelo Dinámico	Instrumentación GGB
Discusión correcta Parametrización del caso CD Técnica matricial Método de reducción	Comprobación exhaustiva de la casuística obtenida	Utiliza el *applet* como sistema de control
Discusión correcta Sin parametrización del caso CD Método de igualación Geometría analítica	Ejemplifica los resultados, dando valores particulares a los parámetros	Utiliza el *applet* para mostrar ejemplos de la casuística
Discusión incorrecta	Sin realizar, incorrecto	El *applet* no aporta ningún apoyo

Tabla 5.9: Comportamientos de la tarea $T1$, cuestionario B

Método Algebraico	Modelo Dinámico	Instrumentación GGB
Discusión correcta Método de reducción Método de igualación Geometría analítica	Comprobación matricial y por rangos	Utiliza el *applet* para la transcripción de la representación gráfica
Discusión incompleta o incorrecta Estudio de casos irrelevantes	Análisis algebraico basado en casos irrelevantes	La incorrecta utilización del *applet* lleva a una discusión anómala

A diferencia de lo observado en $T1$, los resultados en $T2$ son homogéneos para todos los grupos, y el orden en el que se desarrolla la tarea no parece influir en los resultados obtenidos, tal como se puede observar en la tabla 5.10.

Aún y todo, se pueden identificar algunos de los comportamientos antes señalados. En el cuestionario A, por ejemplo, los estudiantes que identifican correctamente la casuística por el MD, desarrollan correctamente la discusión por el MA, pero los que desvían su atención a disposiciones irrelevantes del applet, resuelven también incorrectamente la tarea mediante el MA, excepto en un caso aislado. Asimismo, en el cuestionario B, los que resuelven correctamente por el MA, ejemplifican con valores particulares de los parámetros la casuística obtenida por MD; mientras que aquellos que resuelven de forma incompleta por el MA (encuentran condiciones necesarias de la solución, pero no

Tabla 5.10: Resultados de la tarea $T2$, por cuestionario y año

	2012			2013			Cuestionarios		
Respuesta	A	B	Total	A	B	Total	A	B	Total
Correcta	3	1	4	1	1	2	4	2	6
Incompleta	1	2	3	1	1	2	2	3	5
Incorrecta	2	2	4	1	1	2	3	3	6
Total	6	5	11	3	3	6	9	8	17

la parametrizan), son capaces de mejorar esa solución inicial por el MD, puesto que detallan mejor los casos.

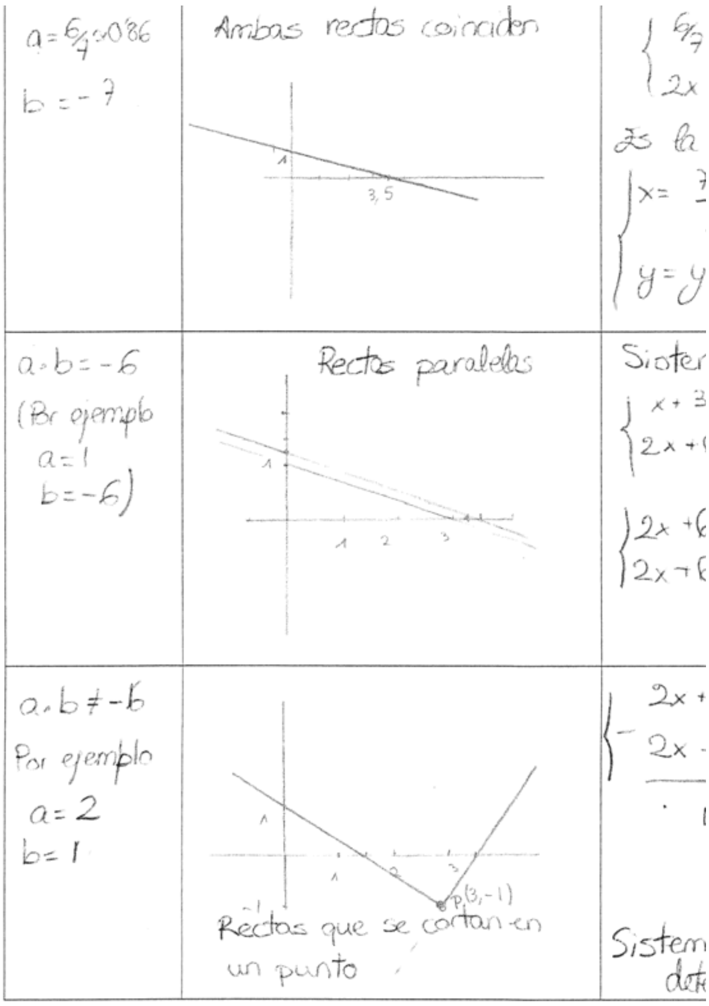
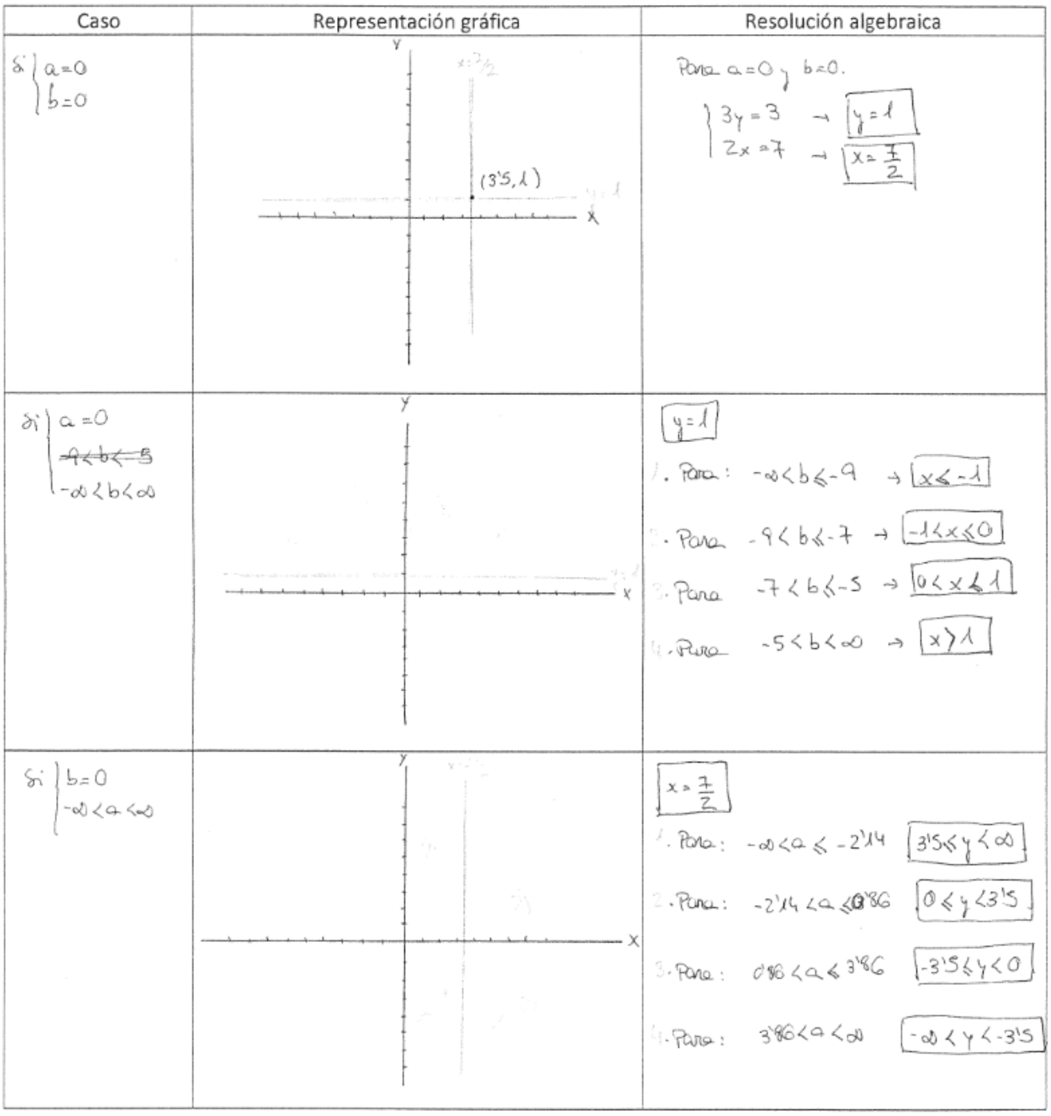


Figura 5.13: Resolución esperada.



Caso	Representación gráfica	Resolución algebraica
Si $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$	Y, X, $x=7/2$, $y=1$, $(3'5, 1)$	Para $a=0$ y $b=0$. $\begin{cases} 3y=3 \rightarrow \boxed{y=1} \\ 2x=7 \rightarrow \boxed{x=\frac{7}{2}} \end{cases}$
Si $\begin{cases} a=0 \\ \cancel{-9<b<-5} \\ -\infty<b<\infty \end{cases}$	Y, X, $y=1$	$\boxed{y=1}$ 1. Para: $-\infty<b\leq-9 \rightarrow \boxed{x\leq-1}$ 2. Para $-9<b\leq-7 \rightarrow \boxed{-1<x\leq0}$ 3. Para $-7<b\leq-5 \rightarrow \boxed{0<x\leq1}$ 4. Para $-5<b<\infty \rightarrow \boxed{x>1}$
Si $\begin{cases} b=0 \\ -\infty<a<\infty \end{cases}$	Y, X, $x=7/2$	$\boxed{x=\frac{7}{2}}$ 1. Para: $-\infty<a\leq-2'14$ $\boxed{3'5\leq y<\infty}$ 2. Para: $-2'14<a\leq0'86$ $\boxed{0\leq y<3'5}$ 3. Para: $0'86<a\leq3'86$ $\boxed{-3'5\leq y<0}$ 4. Para: $3'86<a<\infty$ $\boxed{-\infty<y<-3'5}$

Figura 5.14: Resolución atípica.

Breve discusión de los resultados

La utilización del modelo dinámico influye en la resolución de la tarea. Es apropiado utilizar el modelo dinámico como apoyo a la resolución algebraica, para visualizar los resultados numéricos, controlar la producción realizada, y dar así validez a la resolución obtenida. Sin embargo, los estudiantes no muestran un *esquema de acción instrumentada* en el empleo del modelo dinámico.

Los estudiantes realizan mejor la tarea $T1$ al apoyar la resolución algebraica con la utilización de un modelo dinámico con el cual validar el resultado. Parece correcto plantear un esquema de resolución $MA - MD$ para este tipo de tareas, visto que la falta de un esquema de acción puede llevar al estudiante a no abordar convenientemente el estudio mediante el modelo dinámico.

En la tarea $T2$, el modelo dinámico permite estudiar las condiciones necesarias para que exista solución, pero sin un planteamiento estrictamente algebraico, no es posible hallar esta solución.

En definitiva, las pruebas experimentales no apoyan la conjetura de que el modelo dinámico facilita *per se* el acceso a nuevas tareas complejas. En la introducción de una actividad, el modelo dinámico actúa de distractor: el estudiante centra su actividad en aspectos del modelo irrelevantes para la discusión del sistema. Es decir, el modelo dinámico facilita la resolución y mejora el resultado obtenido siempre y cuando el estudiante esté instruido en la resolución de la tarea. Es necesario por tanto incidir en este aspecto en la formación de profesores; a saber: la necesidad de que los estudiantes desarrollen un esquema de acción previo a la instrumentación eficaz del artefacto.

Hacia el diseño de la propuesta

En el estudio previo expuesto en este capítulo se ponen las bases sobre las que se organiza el análisis a priori de la ingeniería didáctica. En particular, uno de los objetivos de la experimentación consiste en contrastar que los resultados observados en este trabajo se dan también en alumnos de Educación Secundaria, en tareas similares de introducción y desarrollo.

Es decir, atendiendo al medio material empleado, la secuencia de resolución $MA - MD$, la cual se observa más conveniente para estudiantes de máster, ¿es también la más apropiada para alumnos de secundaria? La plantilla de resolución a tres columnas utilizada en el estudio piloto, la cual da buenos resultados en grupos de estudiantes de 2º ESO en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Lasa, 2011), ¿es también un soporte adecuado en segundo ciclo de ESO?

En el capítulo de análisis *a priori*, se progresa en el diseño de un método de resolución de ecuaciones que integra los puntos de vista algebraico y funcional, con la asistencia de software dinámico. En el diseño de la propuesta, se integran, una vez más, soportes físicos e informáticos, de forma que los estudiantes registren sus producciones en una diversidad de soportes, para que ello facilite instrumentos de control de su producción matemática.

Capítulo 6

Análisis *a priori*

Breve resumen
En este capítulo se realiza el diseño de la fase experimental que se implementa en el capítulo 7. El diseño se fundamenta en el marco teórico de la parte I y toma como punto de partida el estudio previo del capítulo 5. Se describen los aspectos institucionales, personales y normativos del diseño, y se presenta el cuestionario que se implementará en la fase de experimentación.

Laburbilduma
Kapitulu honetan, 7 kapituluan gauzatuko den esperimentazioaren diseinua egiten da. Diseinuak oinarri hartzen du I zatiko marko teorikoa eta abiapuntu hartzen du 5 kapituluko aldez aurreko azterketa. Diseinuaren aspektu instituzional, pertsonal eta normatiboak azalduko dira, eta esperimentazioan erabiliko den galdetegiaren aurkezpena egingo da.

Short summary
In this chapter, we present the design of the experimental experience for chapter 7. The design is based on the theoretical frame of part I and the starting point is the previous analysis from chapter 5. We would explain the institutional, personal and normative aspects of the design, and we would present the questionnaire for the experimental experience.

En el estudio previo se ha realizado una introducción del objeto matemático "resolución de ecuaciones", atendiendo a las dimensiones histórica, epistemológica, cognitiva y de enseñanza. La antropología del saber permite afirmar que, ya en la antigüedad, los métodos aritméticos de resolución de ecuaciones se apoyan en las nociones funcionales de incremento y proporcionalidad lineal, aun sin tener a mano una representación simbólica estrictamente algebraica de la ecuación. En su lugar, la representación simbólica y gráfica de la ecuación se realiza a partir de un esquema geométrico de una o varias dimensiones, en función del número de variables y ecuaciones.

El análisis de la dimensión epistemológica confirma la posibilidad de configurar objetos matemáticos numéricos y funcionales para asistir la resolución de sistemas de ecuaciones. De forma paralela, la representación simbólica en lenguaje algebraico de un enunciado, en sus distintos niveles de algebrización, evoluciona atendiendo al tipo de intensivos que participan en el enunciado, y a su función contextual y uso. Asimismo, el lenguaje algebraico forma parte de la codificación, independientemente de las nociones, proposiciones, procesos y argumentos que se utilicen en la resolución.

En la dimensión cognitiva, se ha enfatizado cómo el sujeto adquiere conocimientos en relación con un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios y un conjunto de representaciones simbólicas. No hay que obviar, por tanto, el papel de las representaciones algebraicas en la resolución de ecuaciones, puesto que el uso de esquemas de resolución y la aplicación de invariantes operatorios por parte del sujeto en acción se ejecuta, en gran medida, en la manipulación de dichas representaciones. Sin embargo, el análisis de la dimensión de enseñanza pone en evidencia la atomización existente en los procesos de estudio de ecuaciones e inecuaciones en el currículo y en los libros de texto, donde los procedimientos algebraicos de resolución se estudian de forma aislada, sin contextualización adicional en otras configuraciones (aritméticas, geométricas o funcionales).

Todas estas consideraciones del estudio previo conforman el punto de partida de una micro-ingeniería didáctica que tiene por objetivo el diseño de una situación didáctica, es decir, la elaboración de una génesis artificial de la noción *resolución de sistemas de ecuaciones no-lineales*. En particular, se tratará un sistema de ecuaciones con una ecuación lineal (recta) y una ecuación cuadrática (parábola). En este capítulo se describe la situación de enseñanza, atendiendo a los aspectos institucionales, personales y normativos del proceso de estudio.

Se construye en primer lugar un significado de referencia de la noción, y se detallan las configuraciones de objetos y procesos que se activan en dichas prácticas. Para ello, se realiza una selección de las variables macro-didácticas que definen el proceso de estudio, es decir: se seleccionan los objetos matemáticos primarios, los procesos y los instrumentos con los que se organiza la práctica matemática.

En la dimensión cognitiva, se analizan los conocimientos previos y los comportamientos esperados de los estudiantes, es decir, los objetos y procesos personales que se espera movilice el estudiante, y se detallan los términos del contrato didáctico.

Por último, estas dimensiones (epistemológica, cognitiva e institucional) se articulan, proponiéndose un análisis de la dimensión didáctica: variables macro-didácticas, contingentes y de forma más genérica, los aspectos normativos del proceso de estudio. Estas variables detallan las decisiones que se toman en la organización del medio didáctico y en el diseño de la situación didáctica, la cual tiene que guardar coherencia entre las variables macro y micro-didácticas, y debe garantizar la adquisición de significado personal por parte del estudiante.

6.1. Aspectos institucionales

El objetivo de ésta micro-ingeniería didáctica es la elaboración de una situación didáctica, es decir, una génesis artificial, de la noción *resolución de ecuaciones no lineales*, ejemplificada en el caso de una ecuación lineal (recta) y una ecuación cuadrática (parábola).

La elección de estas nociones se justifica a continuación retomando el análisis del currículo vigente del capítulo 5. En la sección 5.4 se realiza un análisis del currículo vigente y de los libros de texto, desde el tercer ciclo de Educación Primaria (EP) hasta el Bachillerato, pasando por la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El análisis se basa en el seguimiento de tres descriptores que identifican en el currículo los contenidos relativos al tópico *resolución de ecuaciones*.

La ingeniería didáctica está diseñada para 4º ESO, modalidad B, de enfoque científico-tecnológico. La tabla 6.1 sintetiza los contenidos de resolución de ecuaciones de los descriptores C2 y C3 (tablas 5.2, 5.3 y 5.4); el descriptor C1, "obtención de valores numéricos sencillos en fórmulas", desaparece del currículo en el primer ciclo de ESO.

Tabla 6.1: Resolución de ecuaciones en 4º ESO B (MEC, 2007).

Descriptor	Contenidos relacionados
C2	Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.
C3	Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

Los estudiantes han trabajado a lo largo de 3º ESO la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita, y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Además, se ha trabajado la transcripción a lenguaje algebraico de enunciados de problemas y su resolución. Estos conocimientos previos deben permitir avanzar a la consecución del objetivo de esta ingeniería didáctica, es decir, que los estudiantes sean capaces de rescatar estos conocimientos para resolver un sistema de ecuaciones "mixto", en la que participan expresiones algebraicas que se han trabajado de forma unitaria.

Evidentemente, el proceso de sistematización de objetos unitarios (sección 3.6) no es obvio para el estudiante. En el planteamiento de un sistema de ecuaciones no lineal, los objetos unitarios "ecuación de primer grado en una incógnita", "ecuación de segundo grado en una incógnita" y "sistema de ecuaciones lineales en dos incógnitas" forman un sistema de objetos. El diseño de la situación tiene por objetivo la articulación de estos procesos unitarios en un proceso sistémico complejo (tabla 6.2).

Además, los objetivos del estudio guardan relación con la progresión y el avance del estudiante en los *niveles de algebrización* en la práctica matemática. Así, las prácticas

Tabla 6.2: Contenidos previos y emergentes en 4º ESO (MEC, 2007).

Contenidos previos	Contenidos emergentes
Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.	Articulación de un proceso de resolución sistémico a partir de los procesos unitarios "ecuación de primer grado en una incógnita", "ecuación de segundo grado en una incógnita" y "sistema de ecuaciones lineales en dos incógnitas". Instrumentación de un modelo dinámico en la resolución del sistema no-lineal.

operativas y discursivas que se solicitan al estudiante en 3º ESO, se caracterizan por estar vinculadas al *nivel* 3 de *algebrización*. En efecto, la estructura básica de las expresiones algebraicas en la resolución de ecuaciones de primer grado y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es del tipo $a_1x \pm b_1 = a_2x \pm b_2$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ toman valores concretos, para $i \in \{1, 2\}$. A su vez, la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado implica la manipulación de expresiones funcionales y ecuaciones en las que aparecen parámetros de forma incipiente, aunque no se llegue a operar con estos valores generalizados. Por ejemplo, las expresiones de tipo $y = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$ o $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$, pertenecen al ámbito del *nivel* 4 de *algebrización*, por la maestría que se requiere en la manipulación algebraica de variables y parámetros, y por el tipo de discurso que se requiere articular en el análisis de las mismas, en relación a familias de funciones y ecuaciones (tabla 6.3).

Tabla 6.3: Progresión de contenidos relativos a los niveles 3 y 4 de algebrización.

	Nivel 3	Nivel 4
Ecuaciones de primer grado	$a_1x \pm b_1 = a_2x \pm b_2$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$ valores concretos	$mx + n = 0$ $y = mx + n$ $n, m \in \mathbb{R}$ parámetros
Ecuaciones de segundo grado	$x^2 = a$ $a \in \mathbb{R}^+$ valor concreto	$ax^2 + bx + c = 0$ $y = ax^2 + bx + c$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ parámetros
Sistemas de ecuaciones lineales	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2\}$ valores concretos	$y = a_1x + b_1$ $y = a_2x + b_2$ $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2\}$ parámetros

6.1.1. Construcción de un significado de referencia

En el estudio previo (sección 5.2), se han presentado algunas técnicas históricas de resolución de ecuaciones, y a continuación, se han sistematizado en una clasificación por tipos de resolución, dentro de una configuración de objetos primarios. Se retoma la antropología en esta sección para configurar los objetos primarios y los procesos que participan en la secuencia de aprendizaje de la ingeniería didáctica, poniendo el foco en el uso del software de geometría dinámica.

En efecto, el software de geometría dinámica permite, por un lado, el *tratamiento* y la *conversión* de objetos matemáticos (sección 3.3), y facilita la construcción de significados personales, poniendo en relación antecedentes y consecuentes a partir de la función semiótica. Las nociones y los procesos que participan en un enunciado del problema tienen diversas representaciones en el soporte material "software de geometría dinámico". Por otro lado, el software dinámico permite el diseño de modelos dinámicos adecuados al *nivel de algebrización* del estudiante. Así, para un mismo problema, se presenta un modelo dinámico acorde con el nivel del estudiante.

A continuación, se presentan cuatro ejemplos de modelos dinámicos, que se ajustan, respectivamente, a los *niveles de algebrización* $1-4$. Todos los ejemplos se han diseñado para dar respuesta al problema-guía de la página 130, dando así continuidad al discurso del estudio previo. Se retoma el enunciado:

"Dos números suman 72 y difieren en 36 unidades. ¿Qué números son?"

Una vez justificado el desarrollo de los modelos dinámicos, al final de esta sección, se formula la tarea que se presentará a los estudiantes en la fase experimental. Por coherencia con la sección 2.2, la descripción de cada ejemplo sigue la misma estructura de tres apartados: *descripción de la construcción*, *utilidad* y *resolución formal*.

Ejemplo 31 (Resolución aritmética, nivel 1) *Modelo dinámico de exploración para asistir la resolución sobre un* nivel *1 de* algebrización.

- *Descripción de la construcción.* Las abscisas de dos puntos semilibres sobre el semieje positivo, enfatizados de distinto color (rojo y azul), representan los valores numéricos "menor" y "mayor" del enunciado[1] (figura 6.1). Asimismo, un tercer punto, de color negro y marcado en "aspa", indica la suma de ambos valores; por último, la diferencia de los valores se indica con flechas, entre ambos valores, también en color negro. Todos los puntos están definidos sobre una semirecta, con origen el punto $(0, 0)$. La captura de puntos en la vista gráfica se ajusta a la cuadrícula, de forma que las coordenadas de los puntos solo pueden tomar valores enteros. El modelo dinámico realiza los cálculos pertinentes para facilitar al usuario la suma y la resta de ambas cantidades. Se explicita una codificación para los nombres de las variables, en forma de texto sobre la vista gráfica, pero no se opera con estos valores algebraicamente. En su lugar, en el modelo dinámico, se utiliza lenguaje natural y simbología pre-algebraica, asociada a la representación gráfica de la secuencia numérica ordenada. Todo ello permite el uso del modelo dinámico en un contexto algebraico de un *nivel* 1 de *algebrización*.

[1] El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1318657`

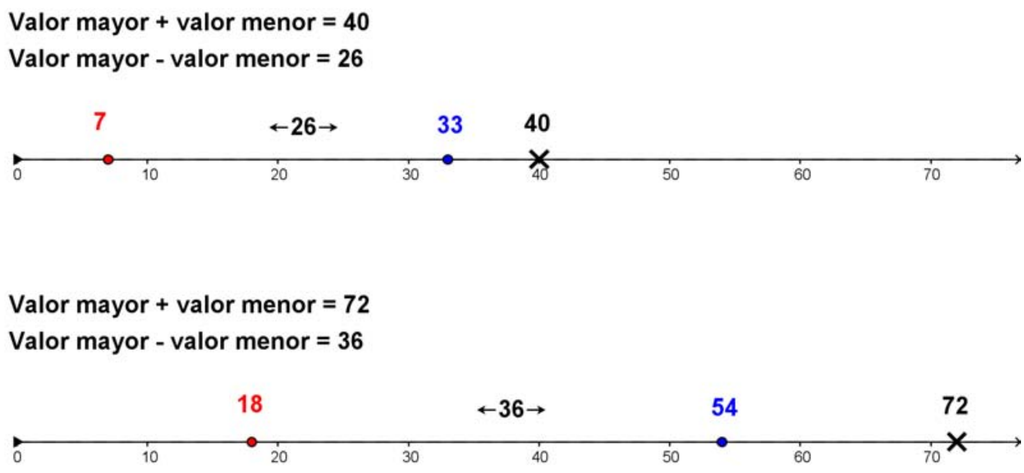


Figura 6.1: Resolución aritmética, nivel algebraico incipiente.

- *Utilidad.* El estudiante debe ajustar los valores menor y mayor para obtener el equilibrio del enunciado. La estrategia de base es el "ensayo y error", y el modelo permite la exploración de la situación. Toda vez que el estudiante intente ajustar, de forma consecutiva, los dos valores a las dos operaciones (por ejemplo, ajustando la suma con la manipulación de un valor, y ajustando la resta con la manipulación del segundo valor) la segunda manipulación cambia otra vez el primer resultado. El modelo facilita la obtención de una pareja de valores iniciales que cumpla la primera ecuación. A continuación, por aproximaciones sucesivas, se ajusta el resultado, trasladando la pareja de puntos hasta su posición correcta. Para ello, se requiere estimar el módulo de la traslación.

- *Resolución formal.* La estrategia de base de "ensayo y error" debe facilitar la manipulación del modelo en el momento de exploración. La información que el modelo presenta en la vista gráfica (diferencia y suma de valores, distancias y puntos que representan el promedio y suma) permite avanzar hacia una estrategia no recursiva (aritmética). En esta nueva estrategia, la resolución pasa por el uso de la media aritmética y las propiedades de orden de los números naturales (ejemplo 24). El modelo dinámico permite explorar la situación y avanzar desde el "ensayo y error" hacia un procedimiento aritmético.

En resumen, el modelo dinámico permite la manipulación ágil del método de "ensayo y error". Una vez finalizado el momento de exploración, estas técnicas de tanteo y la información mostrada en la vista gráfica del modelo dinámico deben permitir la emergencia de técnicas aritméticas, basadas en el uso del promedio.

Al avanzar de un *nivel* 1 a un *nivel* 2 de *algebrización*, las variables se codifican a partir de símbolos algebraicos, a pesar de que no se opera con ellas. Se reconocen, además, fórmulas y ecuaciones como entes globales, a pesar de que las operaciones y las manipulaciones sobre estos objetos intensivos son aritméticas. En este nivel, se pueden diseñar modelos dinámicos que permitan la manipulación numérica de objetos algebraicos intensivos.

Ejemplo 32 (Resolución analítico funcional, nivel 2) *Modelo dinámico de exploración para asistir la resolución sobre un* nivel *2 de* algebrización.

- *Descripción de la construcción.* La vista gráfica representa los ejes de coordenadas cartesianas, junto con los ejes auxiliares de coordenadas $y = x$ e $y = -x$. Otras dos rectas, $x + y = a$ y $x - y = b$, son paralelas respectivamente a los ejes auxiliares, y modelizan la suma y la resta de los valores de las variables independiente y dependiente. Las rectas se pueden trasladar, de forma que mantienen la orientación paralela al eje auxiliar al que corresponden, realizando la acción de "pulsar y arrastre" con el ratón. A su vez, en la vista gráfica, aparece la información algebraica relativa a las ecuaciones y al punto de corte[2] (figura 6.2).

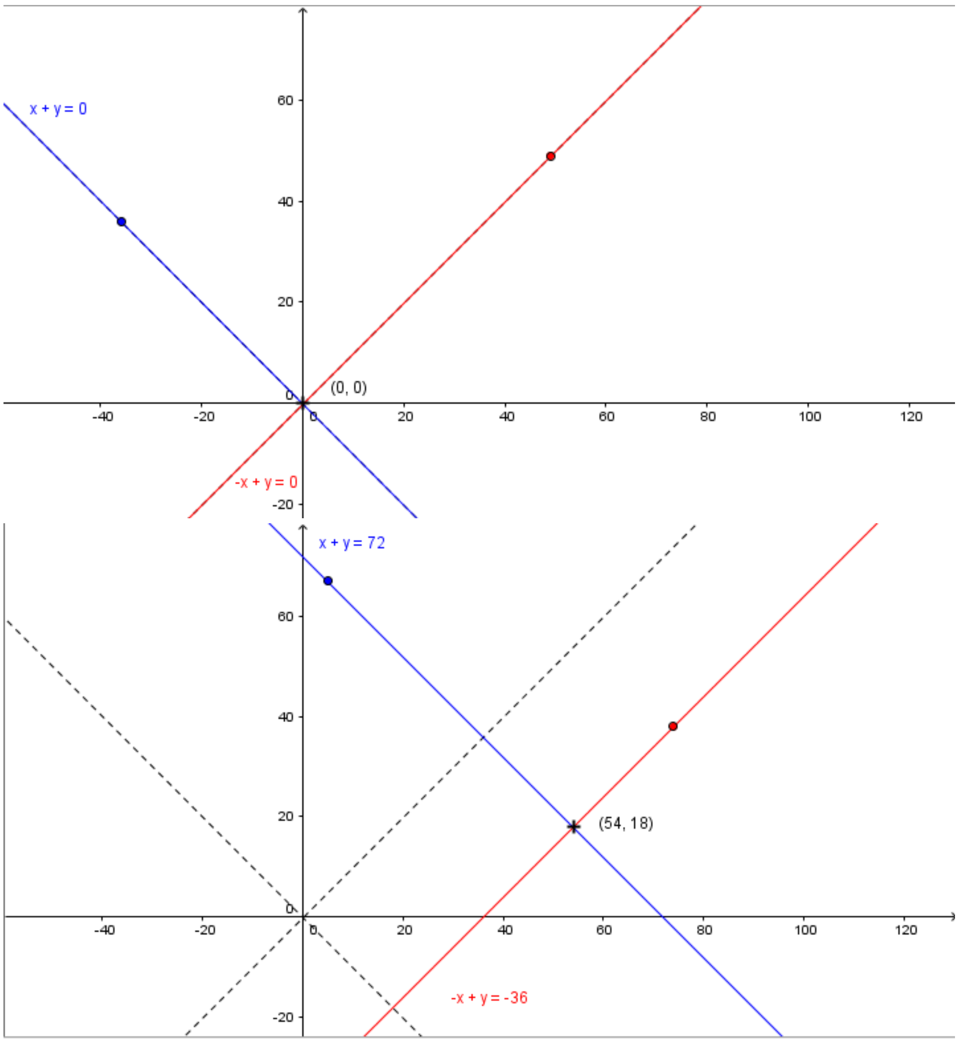


Figura 6.2: Resolución analítico funcional, nivel algebraico intermedio.

La captura de puntos en la vista gráfica se ajusta a la cuadrícula, de forma que las coordenadas de los puntos solo pueden tomar valores enteros. El modelo dinámico representa las ecuaciones algebraica y analíticamente. La codificación es algebraica

[2]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1325129`

y las variables toman nombres simbólicos, pero el modelo no permite operar con estos valores. De esta forma, se reconoce la generalidad de la ecuación, pero no se opera con ella. Por ello, el modelo es apto para un *nivel* 2 de *algebrización*.

- *Utilidad.* En la posición inicial del modelo dinámico, las rectas/ecuaciones del sistema están sobre los ejes de coordenadas auxiliares. El estudiante "pulsa y arrastra" la recta, hasta lograr una de las ecuaciones del sistema.

- *Resolución formal.* El modelo dinámico permite explorar la situación y avanzar en el significado del lenguaje simbólico algebraico.

El modelo dinámico del ejemplo 32 es una muestra de como el medio material modifica el tipo de lenguaje propio de cada *nivel de algebrización*. Es decir, la representación gráfica es previa, en cierto sentido, a la manipulación analítica, cuando el desarrollo escolar clásico, propio del soporte de papel, invierte el orden (de lo analítico a lo gráfico).

A diferencia del *nivel* 2 de *algebrización*, en el *nivel* 3 se realizan operaciones (siembre de forma analítica) con las variables, las indeterminadas y las incógnitas que aparecen en ecuaciones y funciones particulares. Así, un modelo dinámico apropiado a este contexto puede contemplar el uso de la ventana algebraica y la ventana de cálculo simbólico (CAS). A su vez, las operaciones que se realizan sobre la vista CAS tienen su reflejo en la gráfica.

Ejemplo 33 (Resolución analítico funcional, nivel 3) *Modelo dinámico de exploración para asistir la resolución sobre un* nivel *3 de* algebrización*.*

- *Descripción de la construcción.* Un modelo dinámico apropiado para estudiantes de un nivel de algebrización consolidado, permite implementar en su diseño la ventana CAS de cálculo simbólico. Así, tres ventanas del software permanecen activas durante la ejecución de la tarea: la vista gráfica, la vista algebraica y la ventana de cálculo simbólico[3] (figura 6.3). En la vista gráfica, se muestran, además de los ejes de coordenadas cartesianas, los ejes de coordenadas auxiliares $y = x$ e $y = -x$.

- *Utilidad.* El estudiante tiene a su disposición un modelo dinámico para el cálculo simbólico de expresiones algebraicas. Además, el estudiante dispone de herramientas para realizar un seguimiento gráfico de las operaciones realizadas.

- *Resolución formal.* El estado inicial del modelo dinámico muestra los ejes de coordenadas auxiliares en la vista gráfica y los representa en la vista algebraica. El estudiante introduce las ecuaciones en la ventana de cálculo simbólico, y a continuación, aplica el método de reducción. Cada nueva expresión obtenida después de una operación determinada, se representa, a su vez, en la vista gráfica y en la vista algebraica. Las nuevas ecuaciones tienen su propio nombre, y además, el uso de colores permite identificar fácilmente cada una de ellas. En la vista gráfica, las operaciones algebraicas tienen su reflejo en las "operaciones con rectas". El punto de corte representa la solución del sistema.

[3]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1333249`

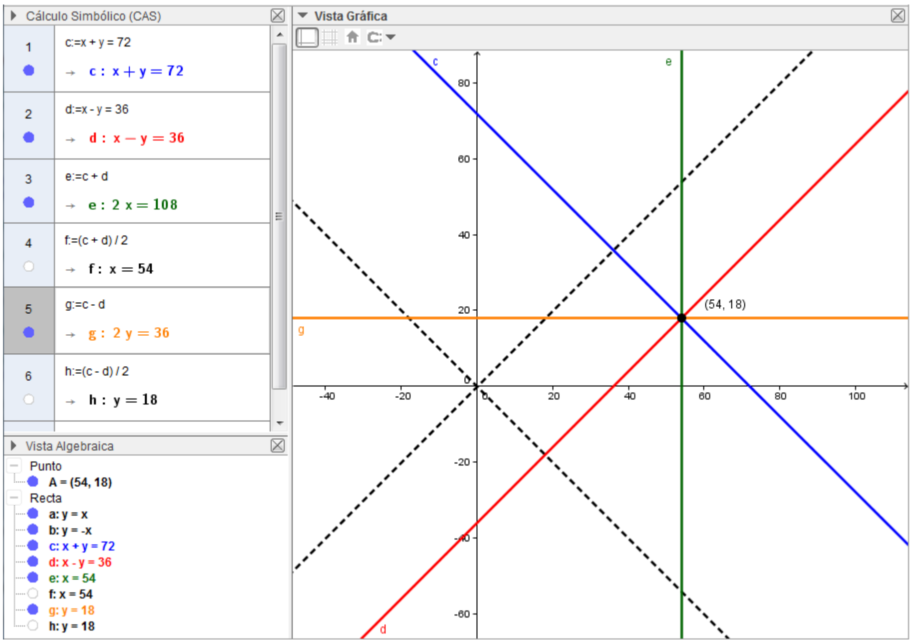


Figura 6.3: Resolución analítico funcional, nivel algebraico consolidado.

La generalización de las expresiones particulares de ecuaciones y funciones requiere del empleo de parámetros que generen familias de estas expresiones. En la educación secundaria, normalmente, estos parámetros toman el nombre de coeficientes. Un modelo dinámico diseñado a partir de "deslizadores", es apropiado para un *nivel* 4 de *algebrización*, en el que los parámetros se "usan", pero no se llega a operar con ellos, y no se requiere una maestría en la manipulación de expresiones mixtas en las que participen variables y parámetros.

Ejemplo 34 (Resolución analítico funcional, nivel 4) *Modelo dinámico de exploración para asistir la resolución sobre un* nivel *4 de* algebrización.

- *Descripción de la construcción.* En los ejemplos 31, 32 y 33, el modelo dinámico incide en los aspectos numéricos y algebraicos de la resolución, facilita la exploración de la situación y agiliza cálculos aritméticos y simbólicos. A diferencia de estos ejemplos, la construcción dinámica permite ahora generalizar la familia de ecuaciones a partir de parámetros[4] (figura 6.4). Para ello, se definen cuatro deslizadores, m, n, a y b, de forma que cada deslizador permita manipular un parámetro del sistema. El modelo presenta como referencia el eje de coordenadas cartesianas sin escala de valores, y los ejes auxiliares $y = x$ e $y = -x$.

- *Utilidad.* El objetivo del modelo dinámico no es agilizar los cálculos aritméticos y algebraicos. En su lugar, la construcción facilita la comprensión del significado y de la influencia de cada parámetro en la disposición gráfica de las ecuaciones. Se compara, para ello, la posición relativa de cada función con la posición de los ejes auxiliares. La omisión de la escala de valores en el eje de coordenadas cartesianas es por ello intencionada.

[4]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1333819`

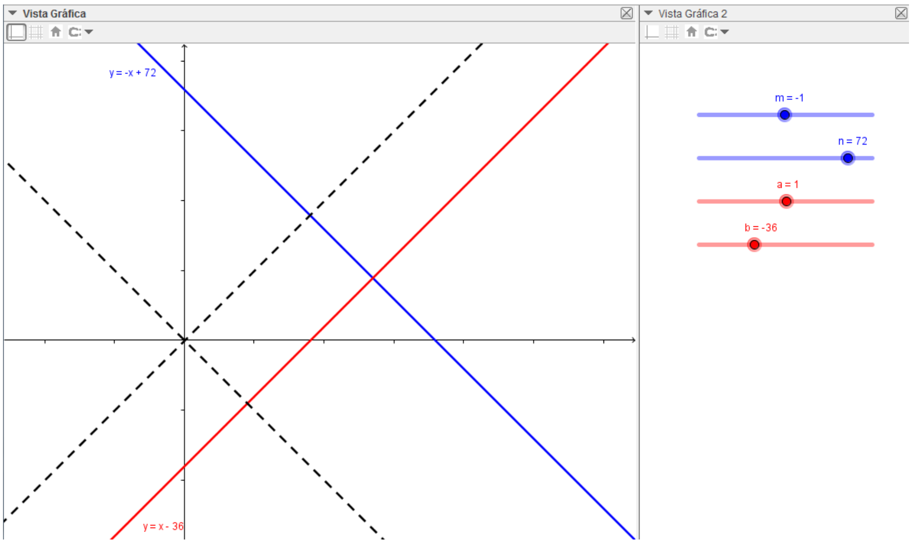


Figura 6.4: Resolución analítico funcional, uso incipiente de parámetros.

- *Resolución formal.* En el momento de exploración, el estudiante manipula un deslizador a cada vez, para representar los valores particulares de cada parámetro. La posición relativa de cada recta respecto de los ejes de coordenadas cartesianas y auxiliares, permite asignar al punto de corte de las ecuaciones uno de los ocho "octantes" del plano. El modelo dinámico no facilita información numérica, pero permite anticipar el resultado: los valores de las incógnitas x e y son positivas, con $x > y$.

El diseño de la experimentación se lleva a cabo con estudiantes de 4º ESO B (modalidad científico tecnológico). Atendiendo a los objetivos del currículo, los estudiantes de esta etapa educativa deben poder realizar tareas matemáticas en los *niveles* 3 y 4 de *algebrización*. En efecto, el modelo dinámico del ejemplo 34, permite un uso "incipiente" de parámetros, y no requiere operaciones con ellos. Según Godino et al. (2015), las funciones y las ecuaciones con parámetros son estructuras complejas, superiores al *nivel* 3, en las que se debe discriminar el dominio de la función (D) y el rango del función paramétrica (un subconjunto de $\mathbb{R}$). Es decir, una ecuación lineal de primer grado es un elemento del conjunto:

$$F_D = \{f_{(n,m)}(x) = nx + m \mid n, m \in \mathbb{R}\ ,\ x \in D\}$$

De forma similar, una ecuación cuadrática es un elemento particular del conjunto:

$$G_D = \{g_{(a,b,c)}(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ x \in D\}$$

Los conocimientos previos de los estudiantes contemplan la función lineal y la función cuadrática, y a su vez, es pertinente la caracterización de estas nociones en términos de casos particulares de la familia de funciones lineales y cuadráticas, atendiendo a los parámetros n y m, y a,b y c. Todo ello justifica la siguiente propuesta de modelo dinámico para la puesta en marcha de la experimentación.

6.1.2. Concreción del modelo dinámico

- *Descripción de la construcción.* El modelo dinámico[5] (figura 6.5) representa, sobre el plano de coordenadas cartesianas, las construcciones paramétricas de una recta ($y = mx + n$) y una parábola ($y = ax^2 + bx + c$). Dos conjuntos de deslizadores permiten manipular la disposición de la recta (parámetros m y n) y la disposición de la parábola (a, b y c). Los ejes de coordenadas no están escaladas; en su lugar, el modelo dinámico dispone de una casilla de control para mostrar los ejes auxiliares $y = x$ e $y = -x$.

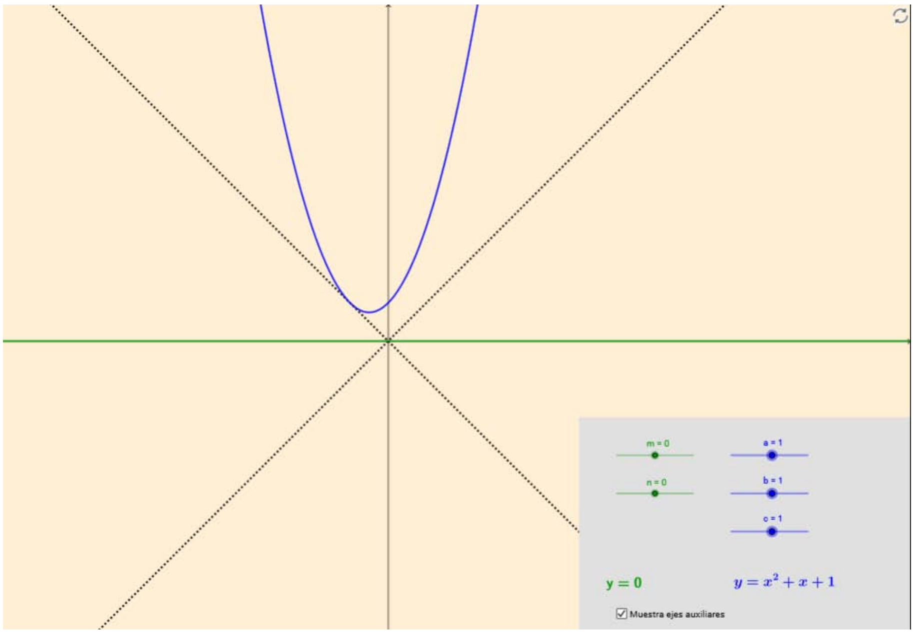


Figura 6.5: Modelo dinámico de la experimentación.

- *Utilidad.* El estudiante manipula los deslizadores para representar la situación gráficamente en la pantalla. El modelo dinámico representa los puntos de corte de las curvas, pero no da sus coordenadas. En su lugar, la instrumentación de los ejes de coordenadas auxiliares permite estimar el signo y la magnitud relativa de los valores-solución. Así, la construcción sirve de instrumento de control de una resolución algebraica sobre papel.

- *Resolución formal.* El estudiante recibe un sistema de ecuaciones no-lineales, en escritura implícita. Una vez recibe el enunciado de la tarea, se solicita al estudiante que escriba la ecuación en su forma explícita, y que represente el sistema de ecuaciones en el modelo dinámico. A continuación, el estudiante debe resolver el sistema, aplicando el método de igualación y la ecuación de segundo grado. El uso del método de igualación se justifica por el paso previo del estudiante, al escribir las ecuaciones en su forma explícita. Por último, el estudiante debe cotejar el resultado numérico obtenido con la representación gráfica.

[5]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/58606`

La "incipiente" manipulación de parámetros hace que este modelo sea apto para un nivel 4 de algebrización. Aun y todo, el nivel de algebrización no es la única variable didáctica que actúa sobre la tarea. Los parámetros que participan en las funciones, es decir, los coeficientes de las ecuaciones, pueden pertenecer a distintos campos numéricos. Así, los estudiantes no resuelven de igual manera un sistema en el que los coeficientes, los cálculos intermedios y el resultado pertenecen al conjunto de los números enteros, que otro en el cual aparecen números racionales en alguna de las fases de resolución.

El campo numérico de los valores que aparecen en la ecuación explícita, durante las manipulaciones del método de igualación, en la expresión de la ecuación de 2^o grado y en las soluciones, dependen de los valores iniciales de los parámetros.

Restricciones del modelo dinámico

La construcción dinámica que se presenta en esta sección es un modelo dinámico entre muchos posibles. En él, toman relevancia los parámetros/deslizadores que particularizan la familia de curvas a una situación concreta: el estudiante selecciona un objeto particular (extensivo) de una familia de objetos (intensivo). La omisión de la escala y la inserción, en su lugar, de los ejes de coordenadas auxiliares, es intencionada. El diseño responde pues al objetivo de manipular un modelo que incluya únicamente representaciones ostensivas de los elementos pertinentes para ejercer un control gráfico (cartesiano) sobre la resolución algebraica del sistema.

El control gráfico de la resolución se puede ejercer por otros medios, que complementan la representación puramente cartesiana de los puntos-solución. Así, el estudio de la parábola permite desarrollos interesantes que contemplan elementos de simetría vertical. Por ejemplo, la siguiente manipulación de la ecuación de la parábola:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

permite identificar los siguientes elementos en el gráfico:

1. El punto x_0 donde se alcanza máximo o mínimo:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

2. El extremo E de la función (máximo o mínimo):

$$E = a\left(\frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

3. Además, la parábola es simétrica respecto al eje vertical:

$$x = x_0$$

El resultado de simetría se obtiene al comparar dos valores , x y x', que distan la misma distancia del punto extremo de la parábola. La abscisa x_0 debe ser, necesariamente, el promedio de ambos valores:

$$x_0 = \frac{x - x'}{2}$$

La recta $x = x_0$, es, en efecto, el eje de simetría vertical de la parábola. En la ecuación de la parábola, a partir de los valores x y x', se obtiene la misma ordenada:

$$\begin{cases} x^2 + b/ax + c/a = y \\ x'^2 + b/ax' + c/a = y \end{cases}$$

Por el método de reducción, se restan ambas expresiones y se iguala a 0:

$$x^2 - x'^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x' + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0$$

El término independiente c/a se anula, se agrupan los sumando con coeficiente b/a y se aplica la igualdad notable $x^2 - x'^2 = (x + x')(x - x')$:

$$(x + x')(x - x') + b/a(x - x') = 0$$

El factor común $x - x'$ es despreciable, por lo que se elimina de la ecuación. El término independiente b/a pasa al miembro derecho de la igualdad, y se dividen los dos miembros por 2, para obtener la expresión definitiva:

$$x_0 = \frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Una vez se obtiene el valor de x_0, se sustituye en la ecuación de la parábola para obtener el correspondiente valor extremo de la ordenada:

$$\begin{aligned} E &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left((\tfrac{-b}{2a})^2 + \tfrac{b}{a}\tfrac{-b}{2a} + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\tfrac{b^2}{4a} - \tfrac{-b^2}{2a} + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\tfrac{b^2-2b^2}{4a} + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\tfrac{-b^2}{4a} + \tfrac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

Este desarrollo de las propiedades de la parábola permite implementar técnicas de control sobre las producciones de los estudiantes, a la vez que se trabajan definiciones, propiedades y procedimientos que incluyen la resolución de ecuaciones, y además, dejan en evidencia las relaciones internas de múltiples objetos matemáticos. Sin embargo, este no es el uso convencional de las matemáticas en los centros educativos. Por ello, este tipo de desarrollos están ausentes en el diseño de la experimentación, y no aparecen en los modelos analítico y dinámico. Además, uno de los objetivos de la experimentación es analizar la influencia del orden de ejecución de una tarea de resolución de ecuaciones, en los usos convencionales en la institución educativa, en los términos del estudio piloto (orden de ejecución MA–MD o MD–MA, en la sección 5.4.4).

En la figura 6.6 se muestra una imagen de un modelo dinámico[6] diseñado con el objetivo de trabajar los aspectos de parábola desarrollados en esta sección.

[6]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/1551611`

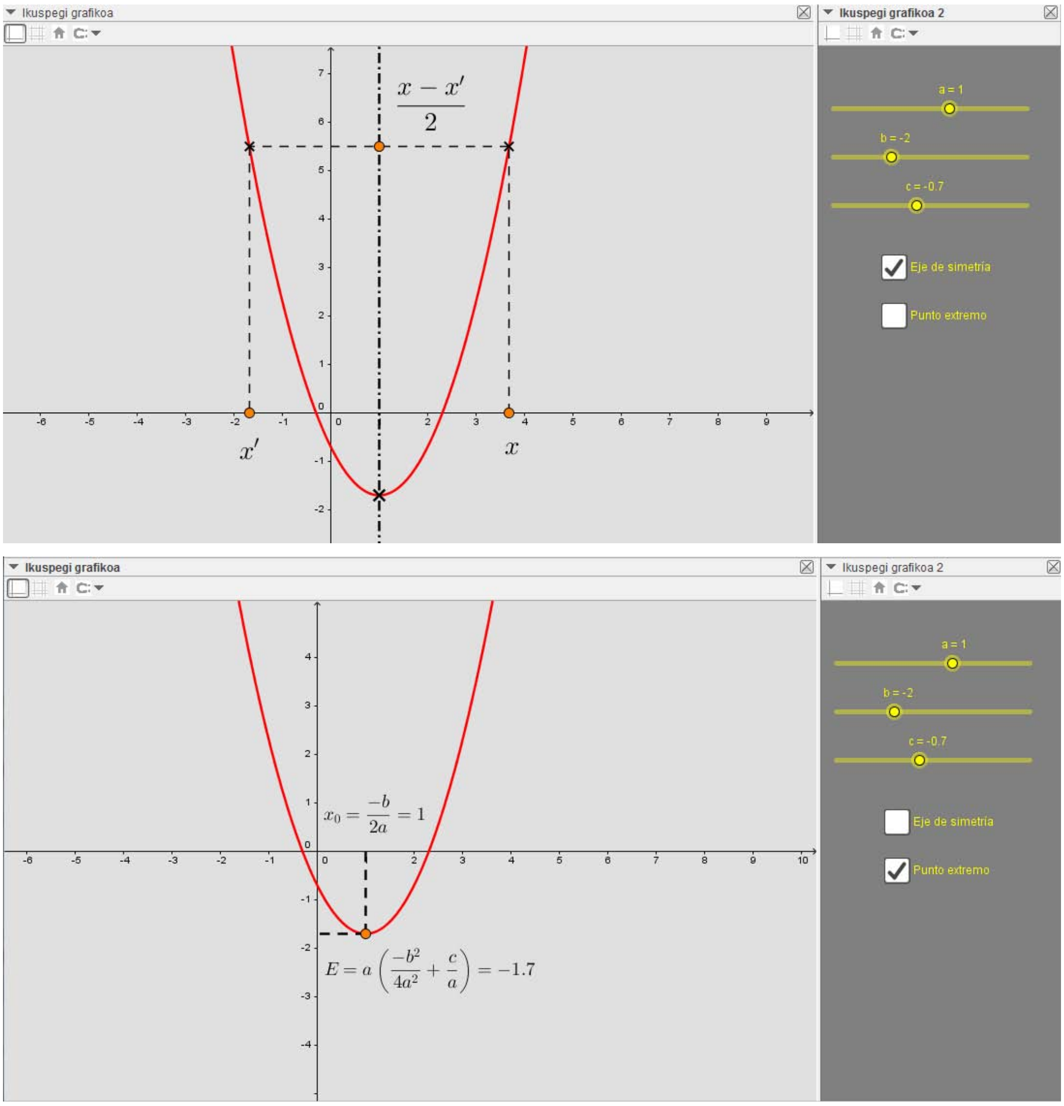


Figura 6.6: Modelo dinámico de control sobre propiedades de la parábola.

6.1.3. Concreción del campo numérico

La elección del campo numérico al que pertenecen los coeficientes y las soluciones de la ecuación (sección 5.2.4), determina la complejidad matemática de la tarea (dimensión epistemológica), y en consecuencia, las dificultades a las que se enfrentarán los estudiantes que resuelvan la tarea (dimensión cognitiva). En los ejemplos 35, 36, 37, 38 y 39, se concretan, respectivamente, las tareas T1, T2, T3, T4 y T5 de la experimentación, en función del campo numérico, en las distintas fases de resolución.

Ejemplo 35 (Determinación de la tarea T1) *Tomando en los parámetros los valores $m = 5$, $n = 12$, $a = 3$, $b = -4$ y $c = -6$, los coeficientes de la ecuación explícita, los cálculos del método de igualación, los coeficientes de la ecuación de 2º grado y la solución del sistema, son valores enteros.*

Se parte, por ejemplo, de la siguiente configuración de términos:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x &= y + 6 \\ 5x - y &= 12 \end{cases}$$

La expresión explícita de las ecuaciones tiene, asimismo, los coeficientes en el conjunto numérico de los números enteros.

$$\begin{cases} y &= 3x^2 - 4x - 6 \\ y &= 5x - 12 \end{cases}$$

Al aplicar el método de igualación, los cálculos intermedios y la ecuación de segundo grado no cambian de registro numérico.

$$3x^2 - 4x - 6 = 5x - 12 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 3 \times 6}}{2 \times 3} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{6} = 3 \pm 1$$

Y se obtienen dos resultado en el campo numérico de los enteros, $x_1 = 1$, $y_1 = -7$, y $x_2 = 2$, $y_2 = 2$.

Ejemplo 36 (Determinación de la tarea T2) *Tomando en los parámetros los valores $m = -8/3$, $n = -4/3$, $a = -3/5$, $b = 0$ y $c = 32/5$, los coeficientes de la ecuación de segundo grado pertenecen al conjunto de los números enteros, a pesar de que en la expresión de la ecuación explícita, en los cálculos del método de igualación y en la solución del sistema, aparecen valores racionales no enteros.*

Se parte, por ejemplo, de la siguiente configuración de términos:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5y &= 32 \\ -8x - 3y &= 4 \end{cases}$$

A pesar de que en la expresión implícita inicial los coeficientes son enteros, en la expresión explícita de las ecuaciones, los coeficientes pertenecen al conjunto de los números racionales (no enteros).

$$\begin{cases} y = \frac{-3}{5}x^2 + \frac{32}{5} \\ \\ y = \frac{-8}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases}$$

Al aplicar el método de igualación, los cálculos intermedios y la ecuación de segundo grado vuelven al registro numérico inicial.

$$\frac{-3x^2 + 32}{5} = \frac{-8x - 4}{3} \quad \Rightarrow \quad 9x^2 - 40x - 116 = 0$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 + 4 \times p \times 116}}{2 \times 9} = \frac{40 \pm \sqrt{5776}}{18} = \frac{20 \pm 76}{18}$$

Y se obtiene, por tanto, una solución en el campo numérico de los enteros, $x_1 = -2$, $y_1 = 4$, y otra solución en el campo numérico de los números racionales, $x_2 = 58/9$, $y_2 = -500/27$.

Ejemplo 37 (Determinación de la tarea T3) *Tomando en los parámetros los valores $m = 1$, $n = 1/2$, $a = 1/2$, $b = 0$ y $c = 1$, los coeficientes de la ecuación de segundo grado y las soluciones del sistema pertenecen al conjunto de los números enteros, a pesar de que en la expresión de la ecuación explícita y en los cálculos del método de igualación , aparecen valores racionales no enteros.*

Se parte, por ejemplo, de la siguiente configuración de términos:

$$\begin{cases} \qquad y = \frac{x^2}{2} + 1 \\ \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$$

En la expresión implícita inicial y en la expresión explícita, los coeficientes pertenecen al conjunto de los números racionales.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ \\ y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Al aplicar el método de igualación, en los coeficientes de la ecuación de segundo grado aparecen números enteros.

$$\frac{x^2}{2} + 1 = x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Y se obtiene una solución doble en el campo numérico de los racionales, $x = 1$, $y = 3/2$.

Ejemplo 38 (Determinación de la tarea T4) *Tomando en los parámetros los valores* $m = 6$, $n = -14$, $a = 1$, $b = 0$ *y* $c = -6$, *los coeficientes de la ecuación explícita, los cálculos del método de igualación, los coeficientes de la ecuación de segundo grado y las soluciones del sistema pertenecen al conjunto de los números enteros.*

Se parte, por ejemplo, de la siguiente configuración de términos:

$$\begin{cases} x^2 - y &= 6 \\ 6x - y &= 14 \end{cases}$$

En la expresión implícita inicial y en la expresión explícita, los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros.

$$\begin{cases} y &= x^2 - 6 \\ y &= 6x - 14 \end{cases}$$

Al aplicar el método de igualación y la ecuación de segundo grado, se obtienen dos soluciones.

$$x^2 - 6 = 6x - 14 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Y se obtienen dos soluciones en el campo numérico de los enteros, $x_1 = 4$, $y_1 = 10$, y $x_2 = 2$, $y_2 = -2$.

Ejemplo 39 (Determinación de la tarea T5) *Tomando en los parámetros los valores* $m = -4$, $n = 2$, $a = 3$, $b = -11$ *y* $c = 2$, *los coeficientes de la ecuación explícita, los cálculos del método de igualación y los coeficientes de la ecuación de segundo grado son números enteros, mientras que la solución del sistema pertenece al conjunto de los números enteros.*

Se parte, por ejemplo, de la siguiente configuración de términos:

$$\begin{cases} y &= 3x^2 - 11x + 2 \\ 8x + 2y &= 4 \end{cases}$$

En la expresión implícita inicial y en la expresión explícita, los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros.

$$\begin{cases} y &= 3x^2 - 11x + 2 \\ y &= -4x + 2 \end{cases}$$

Al aplicar el método de igualación y la ecuación de segundo grado, se obtienen dos soluciones racionales.

$$3x^3 - 11x + 2 = -4x + 2 \quad \Rightarrow \quad x(3x - 7) = 0$$

Y se obtienen dos soluciones en el campo numérico de los enteros, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$, y $x_2 = 7/3$, $y_2 = -22/3$.

En la tabla 6.4 se observa la progresión de los conjuntos numéricos en las tareas T1, T2 y T3, desde el uso exclusivo de números enteros, a la progresiva introducción de números racionales. Asimismo, las tareas T4 y T5 guardan también cierta progresión, con la introducción del conjunto de los números racionales al final de la resolución en la tarea T5. En la experimentación, las tareas T1, T2 y T3 se resolverán con la asistencia del modelo dinámico y formarán parte del cuestionario MD. Las tareas T4 y T5, asequibles en cuanto al conjunto numérico y las operaciones a realizar, formarán un segundo bloque y se resolverán en el aula ordinaria, con un soporte exclusivo de lápiz y papel.

Tabla 6.4: Conjuntos numéricos en las tareas T1-T5.

	T1	T2	T3	T4	T5
Ecuación implícita	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Ecuación explícita	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Método de igualación	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Coeficientes ecuación 2º grado	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Solución	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$

6.1.4. Variables macro-didácticas

La resolución de las tareas T1-T5 requiere de la puesta en marcha y la articulación de una serie de objetos matemáticos primarios y una serie de procesos, junto con la utilización de ciertos instrumentos. Estos elementos constituyen, precisamente, las variables macro-didácticas con las que se diseña la práctica matemática en la experimentación.

Los objetos matemáticos primarios que participan en la práctica matemática "resolución de ecuaciones" se han descrito en detalle en la sección 5.2. La concreción de la actividad a las tareas T1-T5 permite ajustar la selección a los siguientes elementos lingüísticos, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos:

- *Elementos lingüísticos.*
  - *Verbal.* Aritméticos: número entero, número racional, número decimal, igualdad, suma, resta, multiplicación, división, potencia, raíz cuadrada; algebraicos: coeficiente, término independiente, parámetro, deslizador, incógnita, monomio de primer grado, ecuación de primer grado, ecuación de segundo grado, sistema de ecuaciones lineales; geométricos: punto, lugar geométrico, recta, parábola, intersección; funcional: variable independiente, variable dependiente, función lineal, función cuadrática.
  - *Gráfico.* Eje cartesiano para la representación de lugares geométricos y funciones, eje de coordenadas auxiliares para la interpretación topológica de la ecuación de la función lineal y de la función cuadrática.
  - *Simbólico.* Representación algebraica de ecuaciones.
- *Situaciones.* Resolución algebraica de un sistema de ecuaciones no-lineales, compuesto por una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, en contexto intramatemático; representación gráfica de un sistema con la asistencia de un modelo dinámico.

- *Conceptos.* Conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, reales, imaginarios); operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación, división, potencia, radical); media aritmética; operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potencia, radical); estructura de grupo abeliano y de anillo con unidad, matriz, determinante, rango, dependencia e independencia lineal, proporcionalidad simple; punto, recta, plano, polígono, cónica, lugar geométrico, distancia.

- *Proposiciones.* Propiedades de la proporcionalidad simple, propiedades de la función lineal y de los sistemas de ecuaciones lineales; existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación cuadrática; existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

- *Procedimientos.* Despeje de incógnitas y manipulaciones en expresiones algebraicas; método de igualación, método de sustitución, método de reducción; uso de igualdades notables; resolución de la ecuación de segundo grado.

- *Argumentos.* Responsabilidad matemática, coherencia entre distintas representaciones (algebraica-simbólica, analítico-funcional, gráfica) de un mismo objeto; procesos de particularización y generalización de ecuaciones y funciones, generalización de una función/ecuación en una familia de funciones/ecuaciones, particularización de una función/ecuación de una familia de funciones/ecuaciones.

La situación propuesta a los estudiantes constituye una actividad de desarrollo de contenidos, y contempla, por ello, un *momento de exploración* con un modelo dinámico. En la situación se requiere a los estudiantes un proceso de *reificación* de procedimientos *unitarios* (resolución de un sistema de ecuaciones lineales, resolución de una ecuación de segundo grado) en un procedimiento *sistémico* complejo (resolución de un sistema de ecuaciones no-lineales). Además del proceso dual *unitario-sistémico*, la actividad contempla la manipulación de ecuaciones y expresiones de funciones particulares que pertenecen a familias amplias. Estas manipulaciones requieren, a su vez, la puesta en marcha de procesos de *particularización* (concreción de valores particulares de coeficientes y parámetros) y *generalización* (identificación de una expresión particular como elemento dentro de una familia). Estas expresiones de ecuaciones y funciones se representan de forma *ostensiva* sobre una variedad de soportes (simbólico-algebraico, analítico-funcional, gráfico), siendo necesarios para su gestión procesos de *significación* y *representación* en términos de *tratamiento* y *conversión*.

6.2. Aspectos personales

6.2.1. Conocimientos previos y emergentes

El estudiante ha realizado con anterioridad tareas de resolución de ecuaciones de primer grado, $Ax \pm B = Cx \pm D$, y conoce el procedimiento para resolver la ecuación de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Asimismo, el estudiante ha trabajado la interpretación analítico-funcional de la ecuación lineal, $y = mx + n$, y resuelve sistemas de ecuaciones lineales en dos variables, por los métodos de reducción, igualación y sustitución.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La situación que se presenta a los estudiantes tiene por objetivo la creación de un sistema de objetos a partir de estos conocimientos previos unitarios. Es decir, a partir de estos conocimientos previos, se quiere articular un sistema de objetos que permita resolver un sistema de ecuaciones en el que participa, además de una ecuación lineal, una ecuación cuadrática.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$

La representación gráfica de la recta es un conocimiento previo del estudiante. La resolución de la tarea contempla la emergencia de un nuevo conocimiento, es decir, la introducción de la parábola como la curva que representa una ecuación cuadrática. La resolución del sistema contempla una fase de exploración en la que se utiliza un modelo dinámico para trabajar la representación gráfica de la recta y la parábola. La tabla 6.2 relaciona la articulación de los conocimientos previos del estudiante con los objetos emergentes.

6.2.2. Comportamientos esperados y obstáculos relacionados

El proceso de aprendizaje del álgebra es gradual. La codificación y la manipulación de símbolos, de acuerdo a una serie de reglas, están sujetos a errores que tienden a desaparecer a medida que el estudiante avanza en la adquisición de cierta maestría en las operaciones aritméticas y algebraicas. Así, es de esperar que los estudiantes cometan diversos tipos de errores.

En segundo ciclo de ESO, los errores algebraicos más comunes tienen que ver con la manipulación del signo negativo en la resolución de paréntesis y en las operaciones con fracciones algebraicas. Este tipo de errores pueden ocurrir, por ejemplo, en un proceso en el cual se solicita a un estudiante la obtención de la ecuación explícita.

$$-8x - 3y = 4 \quad \overset{error}{\Longrightarrow} \quad y = \frac{8x + 4}{3}$$

Los estudiantes de la etapa también cometen errores típicos relacionados con las operaciones básicas sobre monomios no equivalentes. Por ejemplo, al aplicar el método de igualación, el estudiante despeja un término de segundo grado "pasando el cuadrado al otro lado" como un divisor.

$$\begin{cases} x^2 - y &= 6 \\ 6x - y &= 14 \end{cases} \quad \overset{error}{\Longrightarrow} \quad x = \tfrac{y+6}{2}$$

Estos errores son en su mayoría *no anecdóticos*, *reproducibles* y *recurrentes*, por lo que se constituyen en *obstáculos* (figura 3.3, p. 48). Estos obstáculos epistemológicos tienen su origen, generalmente, en el paso de la aritmética al álgebra. En efecto, el estudiante está inmerso en un proceso en el que progresivamente avanza en los *niveles* *de algebrización*, y este proceso de abstracción y generalización es problemático por su propia naturaleza. Los obstáculos de "manipulación algebraica" pueden generar, además, un *bloqueo afectivo* (Guzmán, 2008) en el estudiante, que se horroriza y se bloquea ante la perspectiva de tener que manipular "castillos" algebraicos.

$$\frac{\frac{x^2-2x+1}{x-1}-\frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}}$$

Además del obstáculo epistemológico "manipulación algebraica", el conjunto numérico de referencia en el diseño de la actividad influye en el comportamiento de los estudiantes en la resolución de ecuaciones. Así, se espera un mejor manejo y precisión en los cálculos numéricos en las tareas T1 y T4, es decir, cuando la tarea involucre la manipulación exclusiva de coeficientes enteros en todas las fases de la resolución, y en la tarea T5, en la que los números racionales solo aparecen en la presentación de la solución. Sin embargo, en las tareas T2 y T3, varias fases del proceso de resolución requieren del uso de números racionales, y por ello, es esperable que la precisión de los cálculos sea inferior (tabla 6.5).

Tabla 6.5: Precisión esperada en los cálculos numéricos.

Precisión		
Alta	Media	Baja
T1; T4	T5	T2; T3

En los centros de secundaria, las técnicas algebraicas y los diversos campos numéricos se trabajan, por regla general, en base a procedimientos mecanizados. Las heurísticas de resolución derivan en la aplicación de una serie de pasos predeterminados que no se motivan ni se justifican. La descontextualización de las tareas de resolución de ecuaciones, provoca, además, que las técnicas de resolución se enseñen en base a un catálogo de ecuaciones-tipo que se estudian de forma memorística. Todo ello puede provocar que los estudiantes apliquen de forma irreflexiva un procedimiento institucionalizado. La tarea que se propone a los estudiantes integra cálculos algebraicos, interpretación funcional de expresiones analíticas y la manipulación de un modelo dinámico con parámetros. Es decir, a pesar de que se solicita a los estudiantes la integración de una variedad de procesos, se espera que los estudiantes primen los procedimientos de manipulación escrita que ya conocen. Esta deriva estaría motivada por la falta de interpretación analítico-funcional de las ecuaciones por parte de los estudiantes. De hecho, cuando el estudiante efectivamente interpreta las ecuaciones como funciones u objetos analíticos, la instrumentalización de la referencia axial es numérica y el estudiante necesita escalar los ejes de coordenadas es, sin llegar a realizar una interpretación topológica del esquema gráfico (figura 6.7).

En la literatura aparecen otros tipos de obstáculos asociados también a la falta de comprensión funcional de una tarea algebraica. Por ejemplo, Bossé y Nandakumar (2003) identifican obstáculos didácticos en situaciones en las que los estudiantes toman por equivalentes dos expresiones funcionales que difieren en el dominio. Por ejemplo, un docente puede realizar la siguiente afirmación en el transcurso de una clase: "el radical de una fracción algebraica equivale a otra fracción, en la que numerador y denominador poseen su propio radical". En efecto, la afirmación no cierta, a no ser que el docente incluya en su argumentación un análisis del dominio.

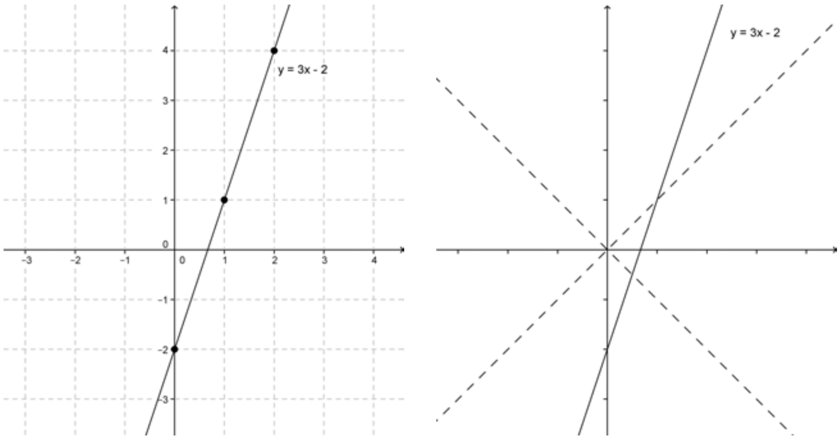


Figura 6.7: Escala numérica vs. interpretación topológica.

$$\sqrt{\frac{x-4}{x+2}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} \qquad x \in [4, +\infty)$$

Para evitar este obstáculo, no es suficiente con que el docente escriba al margen de la ecuación una nota sobre el dominio de aplicación de la regla. El docente debería dejar experimentar a sus estudiantes con estas expresiones, dando ejemplos y contraejemplos, para que ellos mismos postulen cuales son las condiciones que se deben cumplir para que una igualdad se dé. En este sendido, es de esperar que el *momento de exploración* con el modelo dinámico ayude al estudiante en el análisis del dominio y del recorrido de las funciones, y evite, así, la aparición de obstáculos relacionados (figura 6.8).

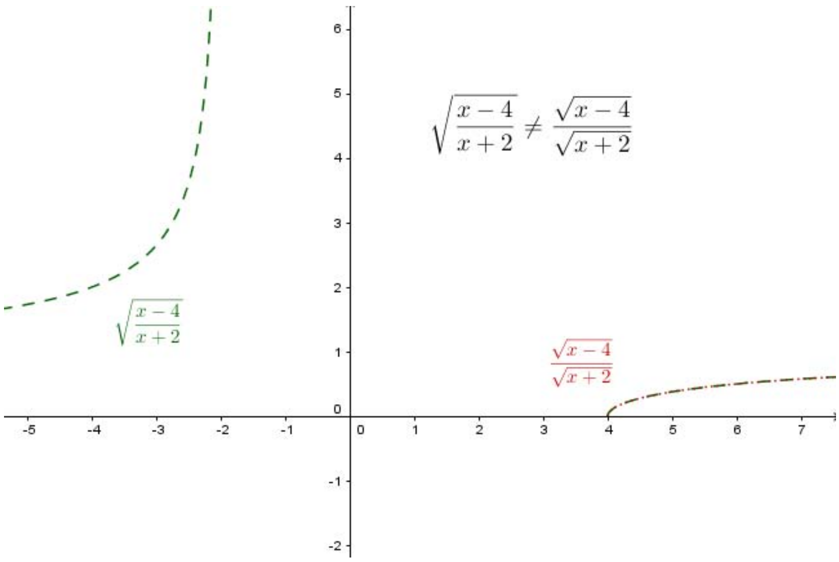


Figura 6.8: Obstáculo de dominio (Bossé y Nandakumar, 2003).

Cuando los estudiantes aplican técnicas procedimentales en la resolución de un problema, se genera una cierta actividad física en el aula. Es decir, existe una actividad en la que los estudiantes leen, escriben o realizan operaciones con la asistencia de una calculadora. Este hecho genera en el docente la ilusión de que los estudiantes deben crear una atmósfera determinada que garantice el aprovechamiento de los recursos temporales. Se puede llegar a confundir la "actividad cognitiva" del estudiante con un "activismo físico y cognitivo". Sin embargo, la *instrumentación* y la *instrumentalización* de una herramienta, y el *tratamiento* de nociones matemáticas en una diversidad de soportes, requieren también de una actividad cognitiva implícita que queda oculta en una atmósfera de aparente inactividad. Los estudiantes requieren de un espacio temporal para poder recuperar y poner en funcionamiento sus conocimientos previos, y es de esperar que no ataquen directamente una tarea que es, *a priori*, novedosa para ellos. La gestión de la atmósfera de trabajo es una clausula implícita en el *contrato didáctico*, que regula la relación entre el docente y los estudiantes, y el cual se discute en la siguiente sección.

Capítulo 7

Experimentación

Breve resumen

En este capítulo se presenta una experimentación en aula, cuyo propósito es la integración del software dinámico en la práctica matemática de resolución de ecuaciones. La experiencia se realizó en aulas de 4º ESO y tuvo por objetivos: a) el estudio de la influencia del instrumento GeoGebra en los comportamientos de los estudiantes, b) el análisis de las resoluciones de sistemas de ecuaciones no lineales, y c) la identificación de un momento idóneo para integrar el instrumento GeoGebra en la práctica matemática.

Laburbilduma

Kapitulu honetan ikasgelan egindako esperimentazio bat aurkezten da, helburu duena software dinamikoaren integrazioa matematika jardueran, ekuazioak ebazterako orduan. Esperimentazioa DBHko 4 mailan egin zen, hiru helburu nagusirekin: a) GeoGebra instrumentuak ikasleen portaeretan izan zuen eragina aztertzea, b) ekuazioen sistema ez linealen ebazpena aztertzea, eta c) GeoGebra instrumentua jarduera matematikoan txertatzeko momentu egokia identifikatzea.

Short summary

In this chapter, we present a classroom experience. The aim is to integrate the use of dynamic software in the mathematical practice, when solving equations. The experience takes place in college fourth grade (age 15-16), with three principal objectives: a) to analyze the influence of the instrument GeoGebra in student productions, b) to analyze the resolution of non-linear equation systems, and c) to identify a suitable moment to use the instrument GeoGebra in the mathematical practice.

La presente experimentación describe los comportamientos mostrados y las respuestas dadas por estudiantes de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, en la modalidad B de ciencias (MEC, 2006), en la resolución de ecuaciones y su asistencia mediante un modelo dinámico.

El diseño de la actividad se basa en el modelo didáctico presentado en el capítulo 3, donde se complementa el uso del software dinámico con el soporte de lápiz y papel. De esta manera, se introduce una *fase de acción* en la que el estudiante utiliza el modelo dinámico dentro de un *momento de exploración*. Con la introducción del modelo dinámico, se complementan en el diseño de la actividad las resoluciones aritmético-algebraica (sección 5.2.1, p. 130) y analítico-funcional (sección 5.2.2, p. 132).

Se pretende así identificar en la práctica operativa y discursiva, los objetos y los procesos matemáticos en tareas de resolución de ecuaciones. Además, se pretende contrastar si estas prácticas difieren en función del soporte material empleado en la resolución de la tarea.

La integración de nociones funcionales y algebraicas debería facilitar la comprensión de los contenidos de resolución de ecuaciones (hipótesis H1, p. 20) y la utilización de un modelo dinámico debería mejorar los resultados de los estudiantes (hipótesis H2, p. 20) con independencia de su nivel de maestría informático (hipótesis H3, p. 20).

7.1. Muestra

La muestra es intencional y está formada por 154 estudiantes de 4º ESO, en la modalidad de ciencias. Es decir, todos los estudiantes cursan la modalidad B de la asignatura de matemáticas. La experimentación se realiza durante el curso 2013/2014. Los estudiantes estudian en centros públicos y concertados, en modelos lingüísticos de euskera (D) y castellano (G)[1]. La tabla 7.1 describe la distribución de la muestra.

Tabla 7.1: Distribución de la muestra.

Centro	I	II	III	IV	V	VI
Público / concertado	P	P	P	P	C	P
Modelo lingüistico	G	D	D	G	G	D
Número de estudiantes	22	23	30	20	29	30

Además de la muestra presentada, la experimentación se realizó de forma complementaria en un grupo adicional, en la modalidad A de la asignatura de matemáticas. La muestra adicional pertenece al centro VII (centro público de modelo lingüistico G) y está compuesta por 13 estudiantes. El análisis de este grupo se realiza de forma separada para evitar un posible sesgo en los resultados, dado que los contenidos de la asignatura y la tipología se los estudiantes varían considerablemente. De hecho, este grupo de estudiantes es reducido, y por ello, no se realiza un análisis estadístico de los resultados de este grupo. Tampoco es el propósito de este trabajo la comparación de los grupos de

[1]El sistema educativo en Navarra se organiza en tres modelos lingüísticos, denominados A, D y G. Los modelos A y D son mixtos y simétricos uno del otro. Los estudiantes del modelo A cursan todas las asignaturas en castellano, y tienen una asignatura complementaria de lengua y literatura vasca. Los estudiantes del modelo D cursan todas las asignaturas en euskera, y tienen una asignatura complementaria de lengua y literatura castellana. El modelo G es monolingüe, en castellano. Además, en todas las modalidades se cursan las correspondientes asignaturas de primera y segunda lengua extranjera, y existen programas opcionales de inmersión lingüística en inglés.

estudiantes pertenecientes a cada modalidad de estudios. En este grupo de estudiantes, se analiza el diseño de la situación para decidir cómo se debería adaptar la propuesta original a este perfil de estudiantes.

Mortandad de la muestra

La experimentación consta de dos sesiones: una sesión se realiza en aula ordinaria (MA), y otra en aula de ordenador (MD). A pesar de que la muestra total es de 154 estudiantes, por diversas razones, algunos estudiantes no participan en ambas sesiones. 6 estudiantes realizan exclusivamente las T4 y T5, y no realizan las tareas T1, T2 y T3. Asimismo, 6 estudiantes (no coinciden los estudiantes) realizan únicamente las tareas T1, T2 y T3, pero no realizan la tareas T4 y T5. En la tabla 7.2 se detallan los estudiantes que desaparecen de la muestra en cada sesión, caracterizados a partir de las variables externas modelo lingüístico, titularidad de centro, sexo y orden de ejecución de la tarea (sección 7.3.2).

Tabla 7.2: Mortandad en la muestra

	Variables externas				Estudiantes
	1	1	1	0	1
Sesión MD	1	1	0	1	3
	0	0	1	1	2
					6
	1	1	1	1	1
	1	1	0	1	1
Sesión MA	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	3
					6

7.2. Cuestionario

Las tareas que se presentan a los estudiantes son actividades de desarrollo de conocimientos matemáticos que previamente han adquirido. Estos conocimientos previos consisten en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en dos variables por los procedimientos de reducción, igualación y sustitución. Además, los estudiantes conocen el procedimiento algebraico para resolver la ecuación de segundo grado. Se parte entonces del supuesto de que los estudiantes están en disposición de movilizar estos conocimientos en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales en dos variables. En particular, en las tareas que se presentan a los estudiantes se requiere resolver un sistema de ecuaciones en la que la primera ecuación es una recta y la segunda una parábola. Los estudiantes no conocen el procedimiento para la representación gráfica de la parábola y se trata de su primer contacto con este tipo de tarea.

En todos los centros y grupos, se realizan dos sesiones con los estudiantes. Cada grupo se reparte en dos subgrupos con igual número de estudiantes. En la primera sesión, uno de los subgrupos realiza la tarea en el aula de ordenador, mientras el otro subgrupo realiza la tarea en el aula ordinaria. En la segunda sesión, ambos subgrupos intercambian el aula (tabla 7.3). Dicho de otro modo, el primer subgrupo realiza la primera sesión en el aula de ordenador y la segunda sesión en el aula ordinaria, mientras el segundo subgrupo realiza las sesiones en orden inverso, primero en el aula ordinaria y luego en el aula de ordenador. Así, todos los sujetos pasan por todas las condiciones, pudiéndose controlar el efecto del orden.

Tabla 7.3: Secuencia de ejecución.

	Grupo de estudiantes	
	Subgrupo 1	Subgrupo 2
Sesión 1	Aula ordenador	Aula ordinaria
Sesión 2	Aula ordinaria	Aula ordenador

En la sesión en aula de ordenador, la actividad se centra en el instrumento GeoGebra. Además de la manipulación del instrumento, el estudiante tiene que poner en funcionamiento los procedimientos matemáticos que conoce en un contexto hasta ahora desconocido.

Se emplean distintos cuestionarios para cada sesión:

- *Cuestionario MD.* En el aula de ordenador, los estudiantes resuelven un cuestionario asociado al Modelo Dinámico (MD), que contempla la utilización del software.
- *Cuestionario MA.* En el aula ordinaria, se modifica el cuestionario, el cual se asocia ahora al Modelo Analítico (MA), para que los estudiantes puedan representar gráficamente el sistema sin necesidad de recurrir al ordenador.

En las secciones 7.2.1 y 7.2.2 se exponen en detalle ambos cuestionarios, las tareas y las consignas que reciben los estudiantes.

7.2.1. Cuestionario MD

En las sesiones en aula de ordenador y en aula ordinaria las tareas propuestas son similares. Se espera que con la asistencia del software dinámico la representación gráfica sea más económica. Por ello, en el cuestionario MD se proponen a los estudiantes tres tareas. Para cada una de ellas, se les solicita:

1. *Obtención de la expresión explícita.* El modelo dinámico está diseñado para representar las ecuaciones en su forma funcional. Por ello, se requiere transformar las ecuaciones a su forma explícita.

2. *Representación gráfica.* El modelo dinámico permite la representación gráfica de las dos ecuaciones que participan en el sistema. Existen deslizadores para asignar los valores de los coeficientes a cada ecuación. Una vez asignados los respectivos valores a las ecuaciones, se observa la intersección de las ecuaciones en pantalla. En el diseño del modelo dinámico se decide no mostrar la escala numérica sobre el eje de coordenadas, para evitar que los estudiantes asignen un valor numérico a la intersección basándose únicamente en la numeración de los ejes. Sin embargo, el modelo sí permite estimar la posición del punto de corte de las ecuaciones, a través de dos ejes auxiliares, que indican las rectas $y = x$ e $y = -x$. Una casilla de control permite mostrar u ocultar estos ejes auxiliares. Una vez representado

el sistema en pantalla, se solicita a los estudiantes la transcripción a mano alzada de la representación gráfica en la plantilla de resolución (figura 7.1)[2].

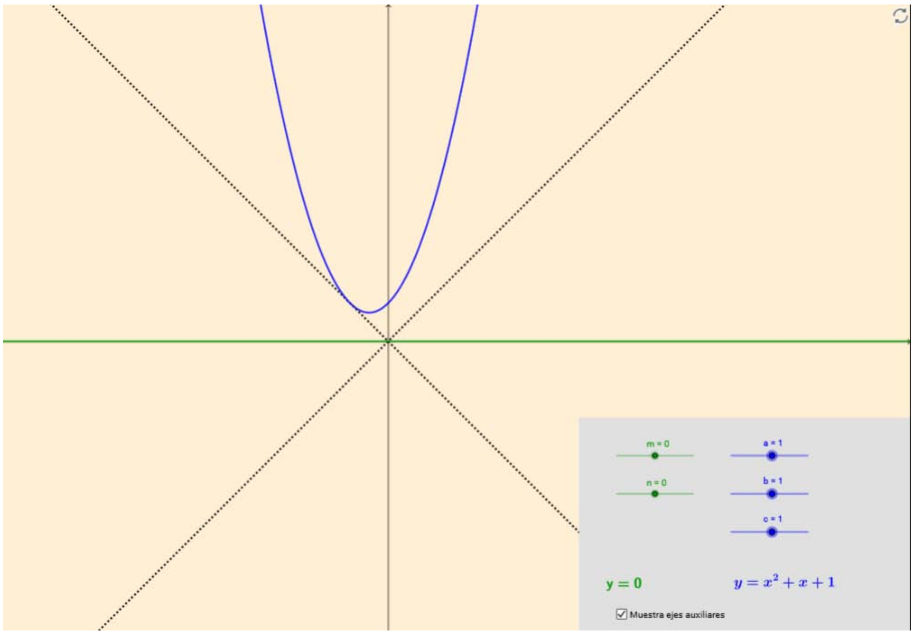


Figura 7.1: Posición inicial del applet.

3. *Resolución algebraica.* Previamente se ha solicitado a los estudiantes que modifiquen las expresiones de las ecuaciones para obtener las ecuaciones explícitas. Es conveniente, por tanto, utilizar el método de igualación. Una vez igualados los términos con variable independiente, se emplea la fórmula de segundo grado para obtener los valores de la misma. Por último, se sustituyen éstos valores para obtener la variable dependiente.

4. *Comprobación.* Se solicita a los estudiantes que cambien el color del bolígrafo utilizado. Deben comparar la solución algebraica que han obtenido por escrito con la representación gráfica que ya tenían. En la comparación se deben fijar en los signos de las soluciones, para comprobar que los puntos de corte están, en efecto, sobre el cuadrante esperado. Además, se deben comparar los valores relativos de las soluciones, para estimar si su localización es, en efecto, la esperada. Los estudiantes tienen la oportunidad de añadir información a la resolución obtenida, a modo de comentario. Además, pueden resaltar posibles incoherencias, y señalar una posible causa.

La tabla 7.4 muestra las tres tareas propuestas a los estudiantes en el cuestionario MD. Por un lado, si se atiende al número de soluciones, en las tareas T1 y T2, el discriminante de la ecuación de segundo grado es estrictamente positivo, por los que ambos sistemas tienen dos soluciones cada una. En la tarea T3, el discriminante toma el valor 0, y el sistema tiene en consecuencia una sola solución. Por otro lado, atendiendo al campo numérico, la tarea T1 se resuelve exclusivamente sobre el conjunto de los enteros.

[2]El modelo dinámico se puede consultar en:
`http://tube.geogebra.org/material/simple/id/nSrLvW0u#material/58606`

En las tareas T2 y T3, se requiere la manipulación de números fraccionarios. La figura 7.2 muestra la plantilla de resolución para la tarea T1.

Tabla 7.4: Tareas del cuestionario MD.

Tarea T1	Tarea T2	Tarea T3
$\begin{cases} 3x^2 - 4x = y + 6 \\ 5x - y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x^2 + 5y = 32 \\ -8x - 3y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + 1 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$

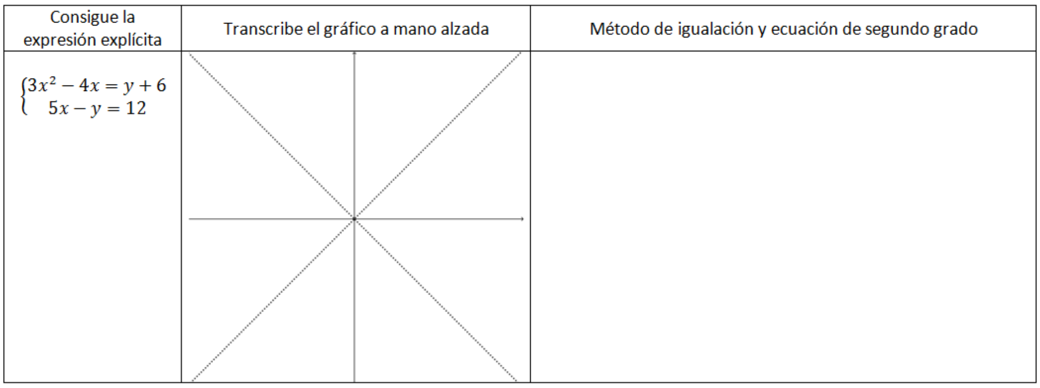


Figura 7.2: Plantilla de resolución MD, tarea T1.

7.2.2. Cuestionario MA

En las sesiones en aula ordinaria no hay posibilidad de asistir la tarea con un ordenador. La representación gráfica se debe realizar en el soporte de “lápiz y papel”. Se espera que este tipo de resolución sea más costosa, y por ello, en el cuestionario MA se proponen a los estudiantes dos tareas. Para cada una de ellas, se les solicita:

1. *Obtención de la expresión explícita.* La plantilla de resolución contempla un espacio para la representación, punto a punto, de las ecuaciones en su forma funcional. Por ello, se requiere transformar las ecuaciones a su expresión explícita.

2. *Representación gráfica.* La representación de las ecuaciones se realiza en el soporte de “lápiz y papel”. La plantilla de resolución contiene una tabla de valores en la que el estudiante debe calcular algunos valores numéricos para luego representar las ecuaciones. Al igual que en la plantilla del cuestionario MD, la plantilla del cuestionario MA no muestra ninguna escala predeterminada y el estudiante debe seleccionar ésta escala en función de la magnitud de los valores que obtiene.

3. *Resolución algebraica.* Previamente se ha solicitado a los estudiantes que modifiquen las expresiones de las ecuaciones para obtener las ecuaciones explícitas. Es conveniente, por tanto, utilizar el método de igualación. Una vez igualados los

términos con variable independiente, se emplea la fórmula de segundo grado para obtener los valores de la misma. Por último, se sustituyen éstos valores para obtener la variable dependiente.

4. *Comprobación.* Se solicita a los estudiantes que cambien el color del bolígrafo utilizado. Deben comparar la solución algebraica que han obtenido por escrito con la representación gráfica que ya tenían. En la comparación se deben fijar en los signos de las soluciones, para comprobar que los puntos de corte están, en efecto, sobre el cuadrante esperado. Además, se deben comparar los valores relativos de las soluciones, para estimar si su localización es, en efecto, la esperada. Los estudiantes tienen la oportunidad de añadir información a la resolución obtenida, a modo de comentario. Además, pueden resaltar posibles incoherencias, y señalar una posible causa.

La tabla 7.5 muestra las tareas T4 y T5 propuestas a los estudiantes en el cuestionario MA. Se reduce el número de tareas por considerar que la representación gráfica por tabla de valores en más costosa. En ambas tareas, el discriminante de la ecuación de segundo grado es estrictamente positivo, por lo que existen dos soluciones para cada sistema. Además, en ambas tareas, el campo numérico de las operaciones está formado por el conjunto de los números enteros, a excepción del resultado, que pertenece al campo de los números fraccionarios. La figura 7.3 muestra la plantilla de resolución para la tarea T5.

Tabla 7.5: Tareas del cuestionario MA.

Tarea T4	Tarea T5
$\begin{cases} y = 3x^2 - 11x + 2 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - y = 6 \\ 6x - y = 14 \end{cases}$

7.2.3. Consignas

Todos los grupos de estudiantes están repartidos en dos subgrupos de igual cantidad de participantes, aproximadamente. Un docente auxiliar guía la sesión en aula de ordenador mientras el docente titular de la asignatura se hace cargo de la sesión en aula ordinaria. Las consignas y la información que se da a los estudiantes antes de cada sesión queda redactada de forma clara y concisa, para evitar sesgos en el desarrollo de la sesión ordinaria en cada centro:

- Cada estudiante debe realizar la actividad de forma individual.
- Para asegurar que los estudiantes se toman en serio la actividad, se les advierte de que se evaluará tanto la actitud mostrada durante la resolución como la adecuación de su producción a las consignas planteadas.
- En la resolución se utilizarán bolígrafos de dos colores: azul y rojo. Los primeros 3 pasos de la resolución se realizarán en color azul, esto incluye la representación gráfica. El paso 4 se realizará en color rojo.

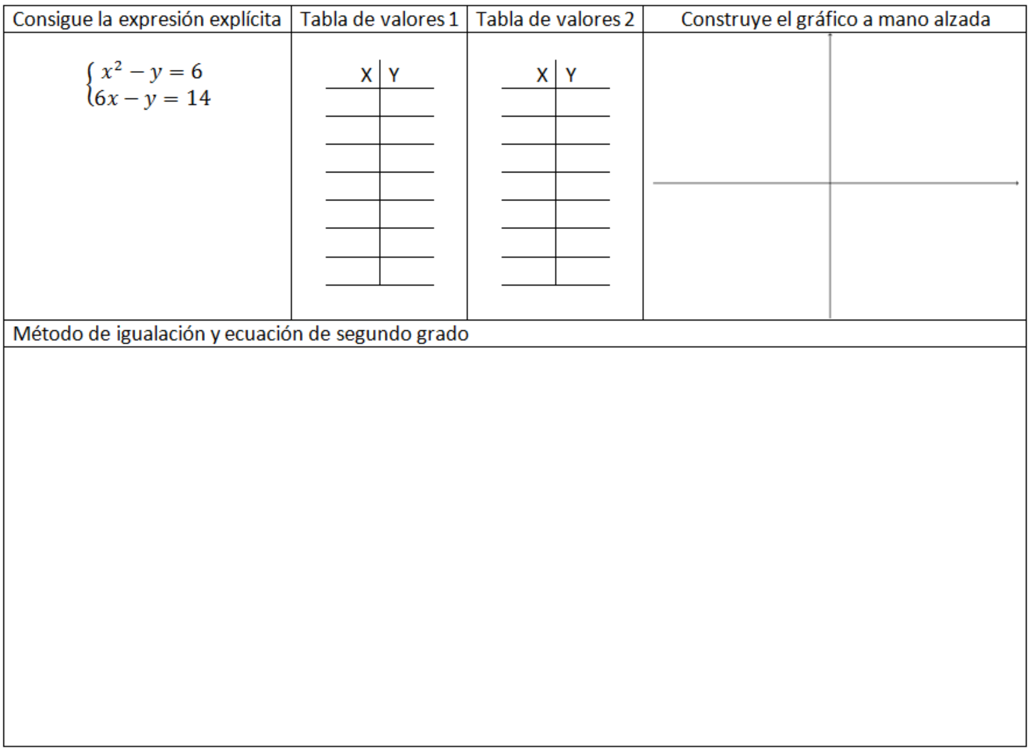


Figura 7.3: Plantilla de resolución MA, tarea T5.

La plantilla de resolución consta de varios apartados (figuras 7.2 y 7.3). La información y las consignas que el docente da a los estudiantes para que cumplimenten cada apartado queda asimismo redactado y clarificado previamente:

1. *Obtén la expresión explícita.* Es necesario escribir la expresión explícita de ambas ecuaciones (“despejar la ‘y’ ”, “en forma de función”, etc.), para utilizar el modelo dinámico.

2. *Representa la gráfica.*

   a) *Ordenador.* Debes utilizar el modelo dinámico para representar las ecuaciones. Cada deslizador cambia el valor de un coeficiente de la ecuación. El eje de coordenadas del modelo dinámico no muestra la escala numérica, pero tienes la posibilidad de representar dos ejes auxiliares, que indican las rectas “$y = x$” e “$y = -x$” (“las diagonales”, “el valor de ‘x’ coincide con el valor de ‘y”’, etc.). Transcribe la representación a mano alzada en la plantilla de resolución. El modelo dinámico está disponible en el siguiente enlace[3]:

   `http://www.geogebratube.org/student/m58606`

   b) *Lápiz y papel.* Debes utilizar la tabla de valores para representar las ecuaciones. La plantilla no muestra ninguna escala determinada, la debes elegir en función de la magnitud de los valores que obtengas.

[3] El enlace lleva directamente a una hoja de trabajo independiente, sin conexión con el Libro-GeoGebra que engloba todas las construcciones de este trabajo.

3. *Resolución algebraica.* Como ya disponemos de las expresiones explícitas de las ecuaciones (lo hemos hecho en el paso 1), lo tenemos fácil para utilizar el método de igualación. A continuación, será necesario emplear la fórmula de segundo grado para obtener los valores de "x". Por último, debes sustituir en la expresión los valores de "x" para obtener los de "y".

4. *Comprobación.* Cambia de color, utiliza el rojo. Observa si la resolución algebraica obtenida se corresponde con la representación gráfica ("signo positivo o negativo del resultado", "posición de las gráficas", etc.). En caso de observar alguna incoherencia, o si quieres añadir algo a la resolución, marca con el color rojo una posible modificación de la representación gráfica o de la resolución algebraica.

7.3. Resultados

La exposición y el análisis de los resultados se basan, por un lado, en los comportamientos observados en el desarrollo de las sesiones, y por otro lado, en las producciones escritas de los estudiantes. La información de las interacciones de los estudiantes con el medio didáctico corresponde, únicamente, a las tareas T1, T2 y T3, en la sesión en aula de ordenador (MD). No se dispone de información precisa sobre las interacciones con el medio didáctico en el aula ordinaria (MA), en la resolución de las tareas T4 y T5. La información que se dispone de estas resoluciones corresponde únicamente a la obtenida a partir de la plantilla de resolución.

A continuación, en la sección 7.3.1 se exponen las interacciones de los estudiantes con el medio didáctico, es decir: las interacciones con el instrumento GeoGebra, con sus compañeros y con el docente[4]. El análisis contempla variables externas e internas. En la sección 7.3.2 se presentan las variables externas del estudio, aquellas que tienen que ver con la sociología de la muestra (género, modelo lingüístico y titularidad de centro) y con el orden en la ejecución de las tareas propuestas. Las variables externas son comunes a toda la muestra, pero las variables internas difieren en algunos aspectos, en función de la sesión (MD o MA). En la sección 7.3.3 se presentan las variables internas analizadas en las tareas T1, T2 y T3 (sesión MD). En la sección 7.3.8 se presentan las modificaciones realizadas en las variables internas en las tareas T4 y T5 (sesión MA). Los resultados obtenidos se organizan en función de cada tarea, es decir: los resultados de las tareas T1, T2, T3, T4 y T5 se presentan, respectivamente, en las secciones 7.3.4, 7.3.6, 7.3.7, 7.3.9 y 7.3.11. Se han realizado, además, contrastes de hipótesis de las variables internas en las tareas T1 y T4 (secciones 7.3.5 y 7.3.10, respectivamente), para analizar las producciones de los estudiantes en función de las variables externas. Se cierra la sección de resultados con un análisis implicativo y su respectivo diagrama (sección 7.3.12).

7.3.1. Interacciones del estudiante con el *medio dinámico*

La ejecución de tareas matemáticas en aula de ordenador es potencialmente problemática, porque depende del buen funcionamiento de un equipo tecnológico expuesto a fallos eléctricos, electrónicos y de software. Además, los centros educativos de secundaria no tienen en plantilla un servicio informático que se encargue del mantenimiento

[4] Por ello, los resultados de la sección 7.3.1 hacen referencia, exclusivamente, al *medio dinámico*, en referencia a la sesión en aula de ordenador.

de los sistemas y de la resolución de incidencias. Por ello, durante la experimentación, el docente auxiliar realiza una adecuación del aula de ordenadores en cada centro, previa a la ejecución de la actividad. Aun y todo, hay en algunos casos fallos puntuales de red y errores de configuración de JAVA, que se han podido corregir *in situ*, y no han tenido mayor repercusión en el desarrollo de la experiencia.

En el plano pedagógico y afectivo, los estudiantes se comportan de distinta manera, en función de si es su primera o segunda sesión. Así, en todos los casos, durante la primera sesión de ordenador, los estudiantes tienen un comportamiento atento y serio. Se les ha informado previamente del tipo de actividad que van a realizar, pero no saben exactamente lo que se espera de ellos. El estudiante tampoco tiene claro cómo se va a desenvolver en la actividad. No así, en el desarrollo de la segunda sesión, los estudiantes están más relajados. La tranquilidad de la segunda sesión obedece a la actividad previa que han realizado en el aula ordinaria y al *feedback* que han obtenido de sus compañeros del grupo anterior.

Además, los estudiantes no están habituados a situaciones en las que deban tomar decisiones. El *componente adidáctico* de la situación desorienta a la mayoría de los estudiantes. Junto con ello, se observan situaciones de *bloqueo afectivo* (Guzmán, 2008). Los estudiantes se sienten inseguros ante la perspectiva de una actividad para la que no han sido entrenados con anterioridad, por "miedo al ridículo" o al "qué dirán". Algunos estudiantes sienten vergüenza y cierto apuro al manipular el modelo dinámico. Vigilan por encima del hombro la producción de sus compañeros, para cerciorarse de que su producción no es radicalmente distinta a la de sus compañeros. De forma simétrica, se sienten vigilados por la mirada de sus compañeros y tienen miedo de hacer una manipulación que genere bromas entre sus compañeros. Ante preguntas perfectamente pertinentes (por ejemplo, un estudiante pregunta si es posible el uso de una calculadora), el estudiante recibe del grupo el *feedback* de que la pregunta era ridícula o ingenua.

Los términos del contrato didáctico contemplan la cláusula de la gestión del tiempo. En este caso, una vez diseñada y puesta en marcha la actividad, el docente auxiliar no interviene en la gestión del tiempo, y respeta el *tempo* de los estudiantes. Así, todas las sesiones en aula de ordenador tienen una duración de 50 minutos, y en general, los estudiantes han utilizado entre 20 y 30 minutos para desarrollar la tarea T1. Los primeros minutos transcurren, pues, en una aparente inactividad, que no es tal. Una vez se realiza la tarea T1, el ritmo en la actividad de los estudiantes se acelera. Se requiere menos tiempo para ejecutar las tareas T2 y T3, a pesar de que, en algunos casos, el estudiante no consigue terminar la tarea T3 antes de que finalice la sesión.

En algunos casos, la comprensión funcional que el estudiante tiene del sistema de ecuaciones no es suficiente para que éste pueda abordar de forma autónoma la resolución de la tarea. Así, se requiere, en algunos casos, de la intervención del docente auxiliar. En estos casos, el estudiante manipula el modelo dinámico como si se tratara de una única ecuación, en lugar de un sistema. Es decir, el estudiante representa la parábola al asignar los valores de los coeficientes a los deslizadores del modelo dinámico, pero no asigna ningún valor a los deslizadores que representan la recta. El estudiante que actúa de esta forma no comprende el propósito del modelo dinámico, y solicita asistencia al docente auxiliar. Este le recuerda que está trabajando con un sistema de dos ecuaciones, y le solicita que manipule el modelo en consecuencia.

Además de la interpretación funcional del sistema de ecuaciones, se generan dudas en la manipulación del campo numérico. En particular, los estudiantes tienen dudas en la representación decimal de números fraccionarios. Se ha expuesto previamente que en las tareas T2 y T3, la manipulación de los términos de la ecuación da como resultado una expresión explícita de las ecuaciones con coeficientes fraccionarios. En estas tareas, la mayoría de los estudiantes pregunta al docente como seguir adelante, al no poder representar en el deslizador un número fraccionario. En efecto, el deslizador solo permite representar la aproximación decimal de la fracción, y este hecho genera dudas generalizadas en todos los grupos. A pesar de ser un contenido que los estudiantes han trabajo con anterioridad en cursos previos y a principio de ese mismo curso, el estudiante no identifica fácilmente este contenido como un conocimiento previo operativo.

Por último, se han identificado ciertos errores vinculados a una incorrecta interpretación de conocimientos funcionales previos. El error ocurre cuando los estudiantes intentan interpretar la ecuación de la parábola en términos de la ecuación de la recta. En efecto, los estudiantes tienen un conocimiento más amplio de la recta que de la parábola, y saben que la ecuación de la recta es una expresión algebraica de dos términos: término "con" variable x; y término "sin" variable x. En particular, dotan de significado personal a la expresión funcional de la recta, identificando pendiente (término con variable x) y ordenada en el origen (término independiente). El estudiante pone en funcionamiento estos conocimientos previos, e intenta identificar los componentes funcionales de la recta en la parábola. Es decir, para las ecuaciones $y = mx + n$ e $y = ax^2 + bx + c$:

- Algunos estudiantes se refieren al término bx de la parábola como la "pendiente" en presencia del docente y dirigiéndose a él.
- En ausencia del término c, algunos estudiantes se refieren al término bx como la "ordenada en el origen" de la parábola, haciendo caso omiso a la existencia de la variable x en el término $y = ax^2 + cx$, es decir, equiparando n y bx.

En ambos casos, el estudiante intenta dar un significado al término intermedio bx, a partir de su experiencia. El estudiante intenta dotar de significado a la configuración funcional de la ecuación de segundo grado, a partir de elementos funcionales que sí domina en la recta, y buscando una regla o patrón. En este caso, la regla consiste en la siguiente apreciación:

- "La pendiente es el término primero de la expresión".
- "La ordenada en el origen es el segundo término de la expresión".

Esta regla esconde, además, el error de la *aplicación extricta* por orden de grado, es decir, que si se presenta la ecuación de la recta con sus términos invertidos, $y = n + mx$, es posible que el estudiante vuelva a identificar de forma incorrecta los términos de la expresión.

7.3.2. Variables externas

El análisis de los resultados de la muestra se realiza sobre variables dicotómicas: presencia (1) o ausencia (0) de un comportamiento determinado en las producciones de los estudiantes o característica específica. Las características generales de la muestra se describen a partir de las variables externas "modelo lingüístico" (Ext1), "titularidad del centro (Ext2)", "sexo" (Ext3) y "secuencia de ejecución de la tarea" (Ext4) (tabla 7.6). Las variables externas se utilizan, en las secciones 7.3.5, 7.3.5 y 7.3.5, para contrastar

Tabla 7.6: Variables externas de la muestra.

Variable	Significado	Porcentaje (1)
Ext1	Modelo lingüistico D (1) Modelo lingüistico G (0)	53,4 %
Ext2	Centro público (1) Centro concertado (0)	81,8 %
Ext3	Sexo femenino (1) Sexo masculino (0)	42,6 %
Ext4	Secuencia MD-MA (1) Secuencia MA-MD (0)	45,9 %

la existencia de diferencias estadísticamente significativas en las producciones de los estudiantes, dentro de cada clase.

Los grupos de estudiantes se reparten de forma equilibrada en dos subgrupos, en relación a la secuencia en la que realizan la actividad. Así, el 45, 9 % de los estudiantes resuelve el cuestionario en la secuencia MD-MA, es decir, realiza primero las tareas T1, T2 y T3 en la sesión de ordenador (cuestionario MD), y después, en la segunda sesión, resuelve las tareas T4 y T5 en el aula ordinaria.

La muestra es equilibrada en cuanto a modelos lingüísticos y sexo. El 53,4 % de los estudiantes cursa sus estudios en modelo D (euskera), y el 42, 6 % de los estudiantes es de sexo femenino. La mayoría de los centros seleccionados en la muestra son de titularidad pública (el 81,8 % de los estudiantes pertenece a centros públicos); únicamente el centro `V` es concertado (tabla 7.1).

El centro `V` es el único centro concertado (C) y los estudiantes de este centro cursan sus estudios en castellano (modalidad lingüística G). Además, las características sociológicas de este centro son peculiares, al tratarse de un centro al que acceden, en su mayoría, estudiantes provenientes de familias con dificultades económicas o carencias en estructuración familiar. Por todo ello, este centro, que representa el 18,8 % del total de la muestra, y que representa, a su vez, a más de un tercio (40,8 %) de los estudiantes que realizaron la prueba en la modalidad lingüística G, será analizado de manera específica, para evitar posibles sesgos en el análisis de la variable Ext1.

7.3.3. Variables internas en las tareas T1-T2-T3

Las variables internas del estudio son, al igual que las externas, dicotómicas: presencia (1) o ausencia (0) de comportamientos en las producciones de los estudiantes. Las variables internas se han agrupado en tres categorías, atendiendo al tipo de comportamiento que miden:

- *Variables A1-A2.* Miden el paso previo de obtención de la expresión explícita de las ecuaciones, y la anticipación en resolución algebraica previa a la manipulación del modelo dinámico.

- *Variables B1-B12.* Miden los comportamientos relativos a la transcripción de información de un soporte a otro, y la instrumentalización que el estudiante hace de los distintos soportes, software dinámico y plantilla sobre papel.

- *Variables C1-C13.* Miden los comportamientos relativos a la resolución algebraica en la plantilla sobre papel, el nivel de éxito en la tarea, los tipos de errores mostrados y la interpretación del resultado obtenido.

En las tablas 7.7, 7.8 y 7.10 se sintetizan, respectivamente, los significados de cada grupo de variables internas. Además, en la tabla 7.9 se identifica la numeración de cada una de las soluciones en las tareas T1, T2 y T3.

Tabla 7.7: Significado de las variables internas "A".

Var	Significado
A1	(1) Obtiene la expresión explícita sin errores. (0) Comete errores en la obtención de la expresión explícita.
A2	(1) Resuelve el sistema en la primera entrada de la plantilla. (0) Realiza cada paso de la resolución en la entrada que corresponde.

7.3.4. Resultados de la tarea T1

Al comienzo de cada tarea, se solicita a los estudiantes una manipulación algebraica de las ecuaciones para obtener su expresión explícita. La mayoría de los estudiantes (92,6 %), obtiene las dos representaciones explícitas de forma correcta y sin errores (variable A1). En este primer paso, no se solicita a los estudiantes la resolución algebraica del sistema de ecuaciones, dado que esta se debe realizar, según la consigna, una vez los estudiantes realizan la representación gráfica a través del modelo dinámico. Sin embargo, el 4,7 % de los estudiantes se adelanta a la consigna y resuelve el sistema directamente en la primera entrada de la plantilla (variable A2), haciendo caso omiso a la consigna, y ejecutando la tarea a partir de un procedimiento algebraico previamente institucionalizado en el aula (tabla 7.11).

En la figura 7.4 se muestra un ejemplo del comportamiento de prevalencia algebraica que mide la variable A2. En él se observa que el estudiante resuelve la tarea por un procedimiento algebraico en el primer hueco que encuentra en la plantilla. Una vez ha resuelto la tarea por un procedimiento mecanizado y que domina, el estudiante procede a la costrucción de la representación gráfica. A continuación, cuando se le solicita la transcripción del método de igualación y la ecuación de segundo grado, duplica una parte de la información en la entrada de la plantilla a la que corresponde.

El diseño del modelo dinámico requiere la obtención de la expresión explícita de las ecuaciones, que permite la manipulación del modelo dinámico y la representación gráfica de las ecuaciones del sistema. En la tarea T1, la mayoría de los estudiantes (95,9 %) manipula el modelo dinámico, de forma que obtiene una representación gráfica de la situación y la transcribe a la plantilla (variable B1). Aun y todo, no todas las transcripciones son correctas. En el 60,8 % de los casos la transcripción del gráfico que los estudiantes realizan en la plantilla corresponde al gráfico real de la situación (variable B2). Esta información se sintetiza en la tabla 7.12.

En la figura 7.4, además de la prevalencia algebraica, se observa una correcta manipulación del modelo dinámico, y la transcripción del gráfico se corresponde con la situación real. La figura 7.5 muestra la producción de un estudiante que obtiene correctamente la expresión explícita de las ecuaciones, pero no consigue instrumentalizar el

Tabla 7.8: Significado de las variables internas "B".

Var	Significado
B1	(1) Transcribe el gráfico a mano alzada. (0) Deja en blanco la representación gráfica.
B2	(1) El gráfico transcrito se corresponde con el gráfico real. (0) El gráfico transcrito no se corresponde con el gráfico real.
B3	(1) Instrumentaliza el eje auxiliar para representar la solución 1. (0) No instrusmenta el eje auxiliar para representar la solución 1.
B4	(1) Instrumentaliza el eje auxiliar para representar la solución 2. (0) No instrumentaliza el eje auxiliar para representar la solución 2.
B5	(1) Valida el resultado algebraico obtenido en la representación gráfica. (0) No usa la representación gráfica para validar el resultado algebraico.
B6*	(1) La solución obtenida es correcta, y en su discurso, el estudiante argumenta correctamente que es correcta. (0) No argumenta por escrito, la argumentación es incorrecta o la solución es incorrecta.
B7*	(1) La solución obtenida es incorrecta, y en su discurso, el estudiante argumenta correctamente la imposibilidad de que sea correcta. (0) No argumenta por escrito, la argumentación es incorrecta o la solución es correcta.
B8*	(1) La solución obtenida es correcta, pero en su discurso, el estudiante argumenta que es incorrecta (argumentación incorrecta). (0) No argumenta por escrito, la argumentación es correcta o la solucion es incorrecta.
B9*	(1) La solución obtenida es incorrecta, pero en su discurso, el estudiante argumenta que es correcta (argumentación incorrecta). (0) No argumenta por escrito, la argumentación es correcta o la solución es correcta.
B10	(1) Realiza una instrumentación del modelo dinámico dinámico y de la representación gráfica. (0) No instrumentaliza los ejes de coordenadas para representar las soluciones 1 y 2; y en caso de realizar una argumentación por escrito, la argumentación es incorrecta.
B11	(1) Escribe la solución como valor numérico sobre el gráfico. (0) No escribe la solución o la representa como un punto en el plano.
B12	(1) Escala los ejes de coordenadas, o tabula puntos. (0) No escala los ejes de coordenadas y no tabula puntos.
(*)	Atendiendo a las variables B6–B9, la ausencia de una argumentación escrita en la resolución queda reflejada por la 4-tupla $(B6, B7, B8, B9) = (0, 0, 0, 0)$.

Tabla 7.9: Soluciones en las tareas T1-T3.

Tarea	Solución 1	Solución 2
T1	$(2, -2)$	$(1, -7)$
T2	$(-2, 4)$	$(58/9, -500/27)$
T3	$(1, 3/2)$	$\nexists$

Tabla 7.10: Significado de las variables internas “C”.

Var	Significado
C1	(1) Resuelve por método de igualación. (0) No resuelve por el método de igualación.
C2	(1) Resuelve por método de reducción. (0) No resuelve por el método de reducción.
C3	(1) Resuelve por método de sustitución. (0) No resuelve por el método de sustitución.
C4	(1) Obtiene correctamente la solución 1. (0) No obtiene la solución 1.
C5	(1) Obtiene correctamente la solución 2. (0) No obtiene la solución 2.
C6	(1) Obtiene dos valores de x, pero no obtiene valores de y; interpreta el sistema como una ecuación en una incógnita. (0) Obtiene dos valores, x e y, para cada solución.
C7	(1) Obtiene dos soluciones. (0) Obtiene, a lo sumo, una solución.
C8	(1) Las dos soluciones son correctas. (0) Al menos una solución es incorrecta.
C9	(1) Obtiene una solución. (0) No obtiene ninguna solución.
C10	(1) La única solución obtenida es correcta. (0) La única solución obtenida es incorrecta.
C11	(1) Comprueba la solución obtenida, por métodos aritméticos o algebraicos. (0) No deja constancia escrita de una comprobación de los cálculos, por procedimientos aritméticos o algebraicos alternativos.
C12	(1) Comete errores aritméticos o algebraicos en la resolución. (0) Los cálculos aritémicos y las manipulaciones algebraicas son correctas.
C13	(1) Interpreta la solución como una pareja de datos. (0) Presenta la solución como valores numéricos independientes, aun cuando obtiene todas las soluciones.

Tabla 7.11: Obtención de la expresión explícita en T1.

Var	% (1)
A1	92,6
A2	4,7

Tabla 7.12: Transcripción del gráfico en T1.

Var	% (1)
B1	95,9
B2	60,8

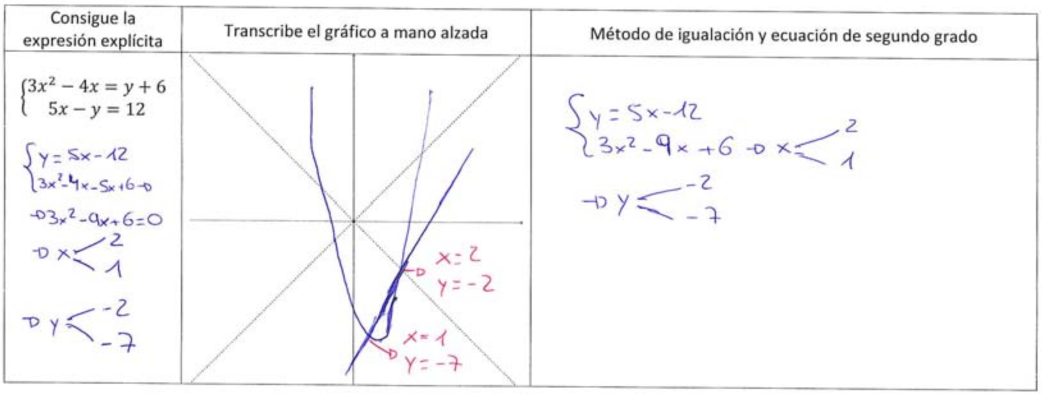


Figura 7.4: Prevalencia algebraica en T1.

modelo dinámico, de forma que el gráfico que obtiene no se ajusta a la situación planteada. Este tipo de producciones no permiten, en los pasos siguientes, la comprobación del resultado algebraico obtenido en la vista gráfica.

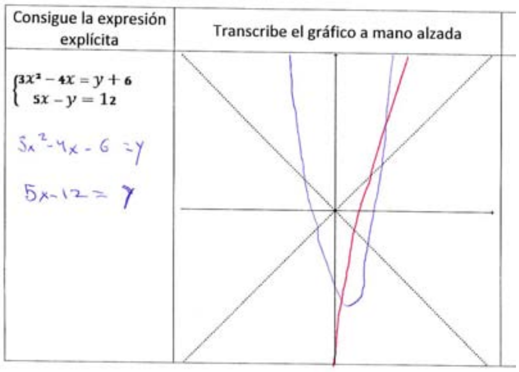


Figura 7.5: No instrumentalización del modelo dinámico en T1.

El modelo dinámico dispone, además del eje usual de coordenadas cartesianas, de un sistema de ejes auxiliares (formado por las rectas $y = x$ e $y = -x$), que sirve de referencia para la transcripción del gráfico, dada la ausencia de otro tipo de referencia numérica o escala de valores en el sistema de ejes cartesianos. En particular, los ejes auxiliares deberían facilitar la representación de soluciones con valores simétricos. El 16,9 % instrumentaliza correctamente este eje auxiliar para representar la solución $(2, -2)$ en su posición correcta (variable B3). El sistema de ejes auxiliares permite asimismo determinar la posición de una solución en función de los signos de sus coordenadas, y en función de una comparación de los valores de sus coordenadas. El 21,6 % de los estudiantes instrumentaliza correctamente el gráfico para representar la solución la segunda solución al sistema, el punto $(1, -7)$, en su posición correcta (variable B4). El 22,3 % de los estudiantes representa los puntos-solución obtenidos en la resolución (variable B5), y utiliza este procedimiento de control para validar el resultado (tabla 7.13).

En la figura 7.4 se muestra el ejemplo de una producción en la que el estudiante instrumentaliza el modelo dinámico y la representación gráfica para representar y comprobar el resultado obtenido, a pesar de que no se utiliza propiamente una representación

Tabla 7.13: Instrumentalización del eje auxiliar en T1.

Var	% (1)
B3	16,9
B4	21,6
B5	22,3

puntual; simplemente, empareja los datos de las variables x e y, como valores numéricos. Sin embargo, en la figura 7.6, se muestra una producción en la que el estudiante instrumentaliza el eje de coordenadas auxiliares para representar la solución $(2, -2)$, y además, utiliza la representación de los puntos para validar el resultado obtenido.

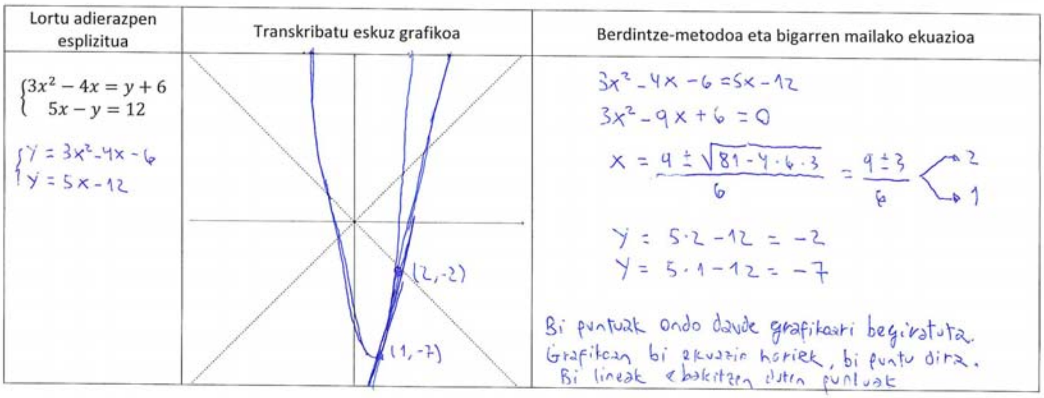


Figura 7.6: Validación gráfica del resultado en T1.

Junto con la transcripción de los resultados, se solicita a los estudiantes que redacten una argumentación, en la cual tienen que justificar la coherencia entre el resultado numérico y la representación gráfica. La argumentación realizada puede ser correcta o incorrecta, con independencia de la solución propuesta por el estudiante, que puede ser, a su vez, correcta o incorrecta. Así, la mitad de los estudiantes (49,4 %) instrumentaliza correctamente el modelo dinámico y la representación gráfica (variable C10), y argumenta correctamente la coherencia del resultado: el 37,2 % argumenta correctamente que la solución obtenida es correcta (variable B6), mientras que el 12,2 % argumenta correctamente que la solución obtenida es incorrecta (variable B7). Asimismo, el 18,9 % de los estudiantes intenta instrumentalizar el modelo dinámico y la representación gráfica, pero no consigue hacerlo correctamente: el 15,5 % argumenta que la resolución es correcta, pese a que no lo es, es decir, la comprobación es incoherente (variable B8); el 3,4 % de los estudiantes resuelve correctamente la tarea por el procedimiento algebraico, y sin embargo, argumenta por escrito que la solución obtenida es incorrecta (variable B9). Por el contrario, casi un tercio de los estudiantes no instrumentaliza el modelo dinámico y no desarrolla, por tanto, argumentación alguna sobre la validez de su respuesta (31,7 %). Todos estos resultados se indican en la tabla 7.14.

La figura 7.7 muestra, respectivamente, ejemplos de producciones de estudiantes que argumentan de forma coherente la corrección o la incorrección de su producción. En ambos casos, el estudiante instrumentaliza el modelo dinámico y la representación gráfica, de forma que es capaz de validar su resultado, tanto si esta es correcta como si es incorrecta.

Tabla 7.14: Instrumentalización de la vista gráfica en T1.

Solución correcta	Argumentación correcta	
	Sí	No
Sí	37,2 %(Var: B6)	15,5 %(Var: B8)
No	12,2 %(Var: B7)	3,4 % (Var: B9)

El 31,7 % no realiza argumentación alguna:
$(B6, B7, B8, B9) = (0, 0, 0, 0)$

En la primera producción, se puede leer: "Utilizando distintos métodos, se obtiene la misma solución". En la segunda producción, el estudiante obtiene una solución algebraica que no coincide con la vista gráfica: "No coincide porque creo que lo he hecho mal".

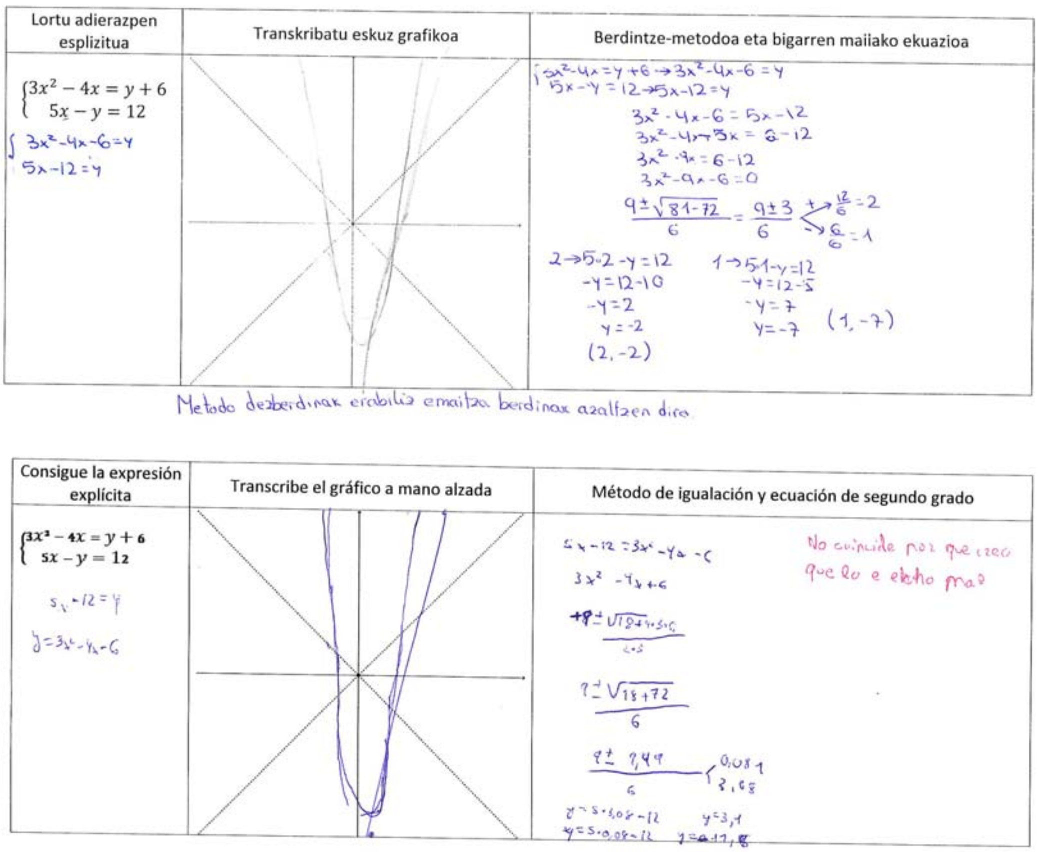


Figura 7.7: Argumentación correcta en la tarea T1

Asimismo, la figura 7.8 muestra dos ejemplos de producciones de estudiantes en las que la argumentación es incorrecta. En la primera producción, el estudiante obtiene correctamente las soluciones numéricas, pero no las empareja, ni tampoco las identifica con puntos en el plano. A pesar de que el gráfico no se corresponde con la situación de los puntos de corte, el estudiante argumenta, incorrectamente, la coherencia del resultado: "Las líneas se juntan, justo, en los puntos de la solución".

En la segunda producción, el estudiante obtiene correctamente los valores de la variable x, que se ajustan, además, a la situación del gráfico; sin embargo, el estudiante argumenta, incorrectamente, que la situación carece de sentido: "No tiene sentido que se obtengan dos valores de x".

En ambos casos, la argumentación no es coherente y el estudiante no instrumentaliza el modelo dinámico; los estudiantes no utilizan de manera eficiente la representación gráfica como medio de control de la resolución simbólica literal.

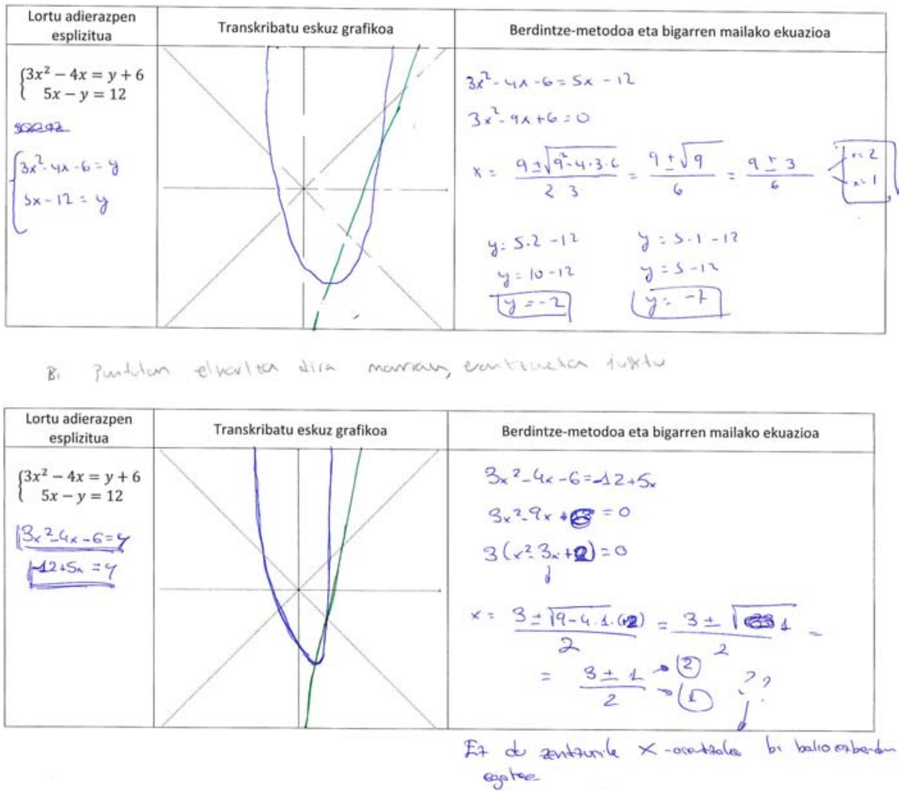


Figura 7.8: Argumentación incorrecta en la tarea T1

Existen también algunos comportamientos que ponen en evidencia la ausencia de una interpretación funcional de las ecuaciones. Por ejemplo, el 1,4 % de los estudiantes escribe los valores numéricos de la solución sobre el gráfico, sin emparejar los valores en pares de coordenadas, y sin dar, por ello, una interpretación puntual al resultado (variable B11). El 8,8 % escala los ejes de coordenadas y tabula una lista de puntos para representar la recta (variable B12). Estos últimos interpretan las parejas de valores desde un punto de vista funcional, pero para ellos la noción de linealidad no es operativa, es decir: no se conforman con dos puntos para representar una recta, y necesitan toda una lista de puntos para cerciorarse de que las cantidades van alineadas. Estos resultados se sintetizan en la tabla 7.15.

Tabla 7.15: Comportamientos numéricos en T1.

Var	% (1)
B11	1,4
B12	8,8

La figura 7.9 muestra dos ejemplos de comportamientos numéricos en la resolución de la tarea T1. En la primera producción, el estudiante obtiene los valores numéricos de la solución, pero no sabe como organizar esta información, y los escribe directamente sobre la vista gráfica, sin asignar un significado puntual a los números obtenidos. Por un lado, en la entrada de la plantilla en la que resuelve el procedimiento algebraico, no organiza los resultados como parejas de puntos. Por otro lado, en la vista gráfica, escribe los valores numéricos sin una localización coherente sobre la hoja (aparecen, además, tres valores de la variable x, y un valor de la variable y). En la segunda producción, a pesar de que la representación gráfica y la resolución algebraica son correctas, el estudiante necesita escalar los ejes de coordenadas para cerciorarse de que su producción es correcta: "Con el método de igualación se obtienen dos soluciones, $(2, -2)$ y $(1, -7)$, y en el gráfico se puede ver que las dos ecuaciones se cortan, más o menos, en estos puntos."

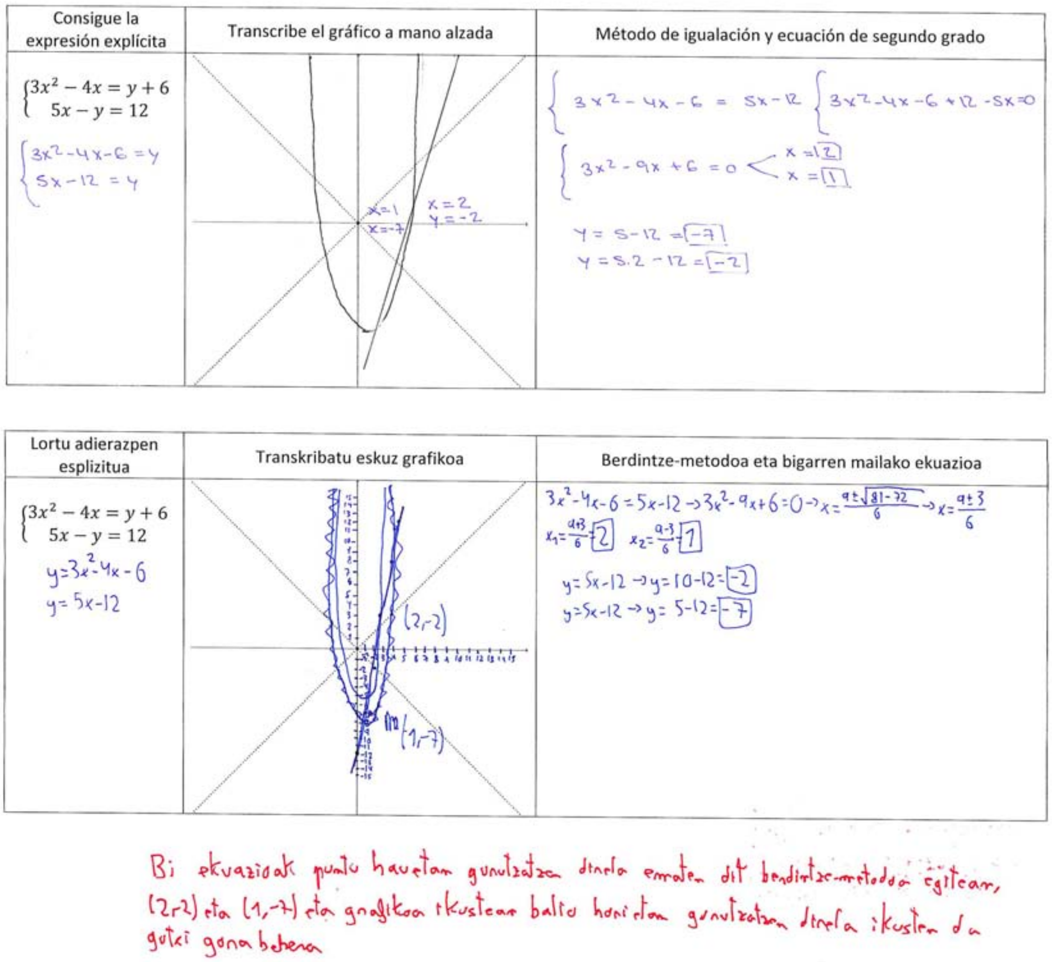


Figura 7.9: Comportamientos numéricos en la tarea T1

El cuestionario sugiere, en el procedimiento de resolución, la utilización del método de igualación. En efecto, la mayor parte de los estudiantes (87,2 %) sigue las indicaciones y resuelve el sistema por este método (variable C1). Aun así, algunos estudiantes optan por otras técnicas, como el método de reducción (variable C2; 3,4 %) o el método de sustitución (variable C3; 2,0 %). Estos resultados se resumen en la tabla 7.16.

Tabla 7.16: Métodos de resolución en T1.

Var	% (1)
C1	87,2
C2	3,4
C3	2,0

El sistema propuesto en la tarea T1 tiene dos soluciones, estas son $(2, -2)$ y $(1, -7)$. Se observa que el 68,2 % obtiene correctamente la solución $(2, -2)$ (variable C4), y el 64,2 % obtiene la solución $(1, -7)$ correctamente (variable C5). Además, se da la circunstancia de que estos porcentajes se ajustan a las variables que miden el número de soluciones obtenidas, es decir: los estudiantes que obtienen correctamente una única solución, obtienen exclusivamente la solución $(2, -2)$ en todos los casos (figura 7.10). Este resultado tiene su reflejo en la sección 7.3.12, donde se presentan los resultados del análisis implicativo (la variable T1C5 implica la variable T1C4, al 100 %).

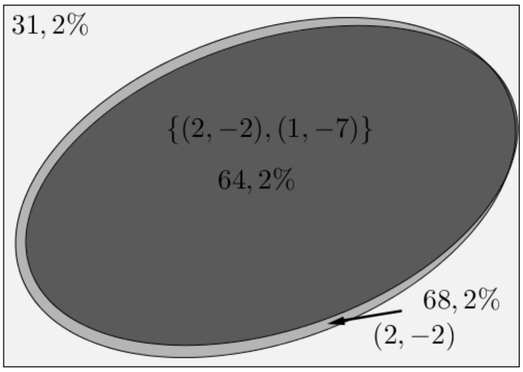


Figura 7.10: Soluciones correctas, tarea T1.

Estos porcentajes cuantifican los resultados correctos en los que se interpreta el resultado como una pareja de datos (no se interpreta necesariamente el resultado como un punto en el plano). Sin embargo, otros estudiantes interpretan el sistema como una sola ecuación en una incógnita: el 24,3 % obtiene correctamente los valores de x, pero no realiza ningún tratamiento con ellos para obtener los respectivos valores de y (variable C6). El 67,6 % de los estudiantes obtiene dos soluciones, es decir, dos soluciones con sus respectivos valores x e y (variable C7). En el 64,2 % de los casos ambas soluciones son correctas (variable C8). En la figura 7.10 se observa que solamente el 3,4 % de los estudiantes que obtienen dos soluciones presentan alguna solución incorrecta. El 70,3 % de los estudiantes obtiene al menos una solución, es decir, una solución con sus respectivos valores x e y (variable C9). En el 68,2 % de los casos, la solución que se presenta es correcta (variable C10). La tabla 7.17 sintetiza estos resultados.

En la tabla 7.14 se ha observado la instrumentalización que los estudiantes hacen del modelo dinámico, para comprobar el resultado obtenido por una técnica de resolución algebraica. Además de esta instrumentalización, algunos estudiantes reflejan explícitamente la comprobación numérica del resultado a partir de métodos aritméticos o algebraicos (variable C11; 2,7 %). Se observa un claro *nivel* 3 *de algebrización* en todas las resoluciones, a pesar de que cerca de una quinta parte de los estudiantes cometen errores algebraicos y aritméticos en la resolución (variable C12; 19,6 %). Las manipulaciones

Tabla 7.17: Resoluciones correctas en T1.

Var	% (1)
C4	68,2
C5	64,2
C6	24,3
C7	67,6
C8	64,2
C9	70,3
C10	68,2

algebraicas dan como resultado parejas de valores, x e y, pero no todos los estudiantes relacionan explícitamente ambos valores como coordenadas de un punto en el plano: el 35,8 % de los estudiantes interpreta la solución algebraica como una pareja de datos (variable C13). La tabla 7.18 resume estos resultados.

Tabla 7.18: Validación, errores e interpretación en T1.

Var	% (1)
C11	2,7
C12	19,6
C13	35,8

7.3.5. Contrastes de hipótesis en la tarea T1

Los resultados obtenidos en la sección 7.3.4 se pueden contrastar en relación a las variables externas *orden de ejecución de la tarea* (MD-MA, MA-MD), *sexo* (femenino, masculino), *modelo lingüístico* (euskera, castellano) y *titularidad de centro* (público, concertado).

Las variables internas describen comportamientos y son dicotómicas. Por ello, se realiza un contraste de proporciones para comprobar si las diferencias obtenidas en las proporciones de cada subgrupo son significativas. Para todas ellas, se realiza un contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_0 \\ H_1 : p_1 \neq p_0 \end{cases}$$

Variable externa: orden de ejecución de la tarea

La variable externa *orden de ejecución de la tarea* toma dos valores: MD-MA y MA-MD. Por un lado, $p_{(MD-MA)}$ hace referencia a la proporción de los estudiantes que realizaron la tarea T1 sin instrucción previa. En total, $n_{(MD-MA)} = 68$ estudiantes realizaron la tarea en esta secuencia. Estos estudiantes no se han enfrentado al problema con anterioridad y no han trabajado un procedimiento algebraico previo. En su lugar, exploran el sistema por primera vez con la asistencia del modelo dinámico. Por otro lado, $p_{(MA-MD)}$ hace referencia a la proporción de estudiantes que realizaron la tarea T1 con una instrucción previa. En total, $n_{(MA-MD)} = 80$ estudiantes realizaron la tarea en esta secuencia. Estos estudiantes han realizado previamente las tareas T4 y T5 en el aula ordinaria, y han trabajado por tanto el procedimiento de resolución algebraico sin asistencia del modelo dinámico.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_{(MD-MA)} = p_{(MA-MD)} \\ H_1 : p_{(MD-MA)} \neq p_{(MA-MD)} \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, B1, B9. B11, B12, C2, C3 y C11, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll}
A1: & {p_{(MD-MA)}}^c \times n_{(MD-MA)} = 4{,}012 & < 5 \\
A2: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 4,012 & < 5 \\
B1: & {p_{(MD-MA)}}^c \times n_{(MD-MA)} = 1{,}020 & < 5 \\
B9: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 1{,}020 & < 5 \\
B11: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 1{,}972 & < 5 \\
B12: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 2{,}992 & < 5 \\
C2: & p_{(MA-MD)} \times n_{(MA-MD)} = 0{,}000 & < 5 \\
C3: & p_{(MA-MD)} \times n_{(MA-MD)} = 0{,}000 & < 5 \\
C11: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 2{,}992 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre las variables B2, B3, B5, B7, B8, C1, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C12 y C13, no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula ya que el p valor es menor que $0,05$ en todos los casos (tabla 7.19).

En el caso de las variables B4, B6 y B10 analizadas sobre la muestra, el contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en estos casos, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.20).

Es decir, se puede afirmar que el subgrupo de estudiantes que realiza las tareas T4 y T5 en el aula ordinaria, es decir, que trabaja de forma previa la estrategia algebraica de resolución, instrumentaliza de forma más eficaz el modelo dinámico en la tarea T1. En este grupo de estudiantes, el promedio de los estudiantes que, habiendo obtenido la solución correcta, argumentan y justifican por escrito la corrección de la solución obtenida, es significativamente superior. Además, una proporción mayor de estos estudiantes representa en el gráfico la solución $(1, -7)$, una solución que no se representa estrictamente sobre el eje de coordenadas auxiliares $y = x$ e $y = -x$.

En el caso de las variables C2 y C3, todos los estudiantes que realizan las tareas en la secuencia MA-MD utilizan el método de igualación sugerido en la consigna. Los estudiantes que utilizan un método de resolución distinto al de igualación pertenecen al subgrupo MD-MA. Es decir, se puede observar que en el momento de exploración "sin instrucción previa", los estudiantes utilizan mayor variedad de métodos. Los estudiantes del subgrupo MA-MD, al haber tenido una sesión previa, realizan una ejecución homogénea en cuanto a la técnica utilizada.

Variable externa: sexo

La variable externa *sexo* toma dos valores: Femenino (F) o Masculino (M). Por un lado, p_M hace referencia a la proporción de los estudiantes de sexo femenino que

Tabla 7.19: Orden de ejecución en T1: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_{MD-MA}	p_{MA-MD}	es	Z	p
B2	43	47	0,0803	0,557	0,5775
B3	8	17	0,0602	−1,5348	0,1248
B5	11	22	0,067	−1,6493	0,0991
B7	6	12	0,0527	−1,1457	0,2519
B8	13	10	0,0603	1,1074	0,2681
C1	57	72	0,0558	−1,1194	0,263
C4	43	58	0,0769	−1,2066	0,2276
C5	40	55	0,079	−1,2552	0,2094
C6	18	18	0,071	0,5611	0,5747
C7	43	57	0,0773	−1,038	0,2993
C8	40	55	0,079	−1,2552	0,2094
C9	46	58	0,0756	−0,6437	0,5198
C10	43	58	0,0769	−1,2066	0,2276
C12	12	17	0,065	−0,5503	0,5821
C13	20	33	0,078	−1,497	0,1344

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

Tabla 7.20: Orden de ejecución en T1: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_{MD-MA}	p_{MA-MD}	es	Z	p
B4	9	23	0,0652	−2,2849	0,0223
B6	16	39	0,076	−3,1642	0,0016
B10	27	52	0,0798	−3,0741	0,0021

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

realizaron la tarea T1. En total, se trata de $n_F = 63$ estudiantes. Por otro lado, p_M hace referencia a la proporción de estudiantes de sexo masculino que realizaron la tarea T1. En total, se trata de $n_M = 85$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_F = p_M \\ H_1 : p_F \neq p_M \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, B1, B9, B11, B12, C2, C3 y C11, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll} A1: & {p_F}^c \times n_F = 3{,}969 & < 5 \\ A2: & p_F \times n_F = 1{,}008 & < 5 \\ B1: & {p_F}^c \times n_F = 0{,}000 & < 5 \\ B9: & p_F \times n_F = 0{,}000 & < 5 \\ B11: & p_F \times n_F = 0{,}000 & < 5 \\ B12: & p_F \times n_F = 3{,}969 & < 5 \\ C2: & p_F \times n_F = 2{,}016 & < 5 \\ C3: & p_F \times n_F = 1{,}008 & < 5 \\ C11: & p_F \times n_F = 2{,}016 & < 5 \end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre las variables B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B10, C1, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10 y C13, no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.21).

A pesar de que en la mayoría de las variables la proporción de éxito es ligeramente mayor en el subgrupo femenino (por ejemplo, género femenino comete un menor número de fallos aritméticos y algebraicos en la resolución de la tarea T1), en ningún caso se puede considerar esta diferencia como estadísticamente significativa. Así, se debe aceptar la hipótesis nula en todos los casos.

Variable externa: modelo lingüistico

La variable externa *modelo lingüístico* toma dos valores: euskera (e) o castellano (c). Por un lado, p_e hace referencia a la proporción de los estudiantes que realizaron la tarea T1 en euskera. En total, se trata de $n_e = 79$ estudiantes. Por otro lado, p_c hace referencia a la proporción de estudiantes que realizaron la tarea T1 en castellano. En total, se trata de $n_c = 69$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_e = p_c \\ H_1 : p_e \neq p_c \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, B1, B3, B7, B8, B9, B11, B12, C1, C2, C3, C11 y C12, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

Tabla 7.21: Sexo en T1: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_F	p_M	es	Z	p
B2	37	53	0,0813	$-0{,}4464$	0,6553
B3	11	14	0,0625	0,1589	0,8738
B4	18	14	0,0697	1,7682	0,0770
B5	17	16	0,0702	1,1793	0,2383
B6	24	31	0,0804	0,2022	0,8397
B7	9	9	0,0553	0,6805	0,4962
B8	63	10	0,0618	1,4727	0,1408
B10	36	43	0,0826	0,7904	0,4293
C1	56	73	0,0547	0,5406	0,5888
C4	45	56	0,0767	0,7166	0,4736
C5	45	50	0,0780	1,5814	0,1138
C6	15	21	0,0712	$-0{,}1257$	0,9000
C7	46	54	0,0765	1,219	0,2229
C8	45	50	0,0780	1,5814	0,1138
C9	46	58	0,0753	0,6291	0,5293
C10	45	56	0,0767	0,7166	0,4736
C12	8	21	0,0628	$-1{,}8197$	0,0688
C13	26	27	0,0800	1,1925	0,2331

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

En efecto, los valores que se obtienen son:

$$\begin{array}{lll}
A1: & {p_e}^c \times n_e = 1{,}027 & < 5 \\
A2: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\
B1: & {p_e}^c \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\
B3: & p_c \times n_c = 4{,}968 & < 5 \\
B7: & p_e \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\
B8: & p_c \times n_c = 4{,}002 & < 5 \\
B9: & p_e \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\
B11: & p_e \times n_e = 0{,}000 & < 5 \\
B12: & p_c \times n_c = 4{,}002 & < 5 \\
C1: & {p_e}^c \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\
C2: & p_e \times n_e = 1{,}027 & < 5 \\
C3: & p_e \times n_e = 0{,}000 & < 5 \\
C11: & p_e \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\
C12: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre la variable B10, no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.22).

En el caso de las variables B2, B4, B5, B6, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10 y C13, el

Tabla 7.22: Modelo en T1: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_e	p_c	es	Z	p
B10	42	37	0,0822	$-0{,}0558$	0,9555

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en este caso, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.23).

Tabla 7.23: Modelo en T1: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_e	p_c	es	Z	p
B2	55	35	0,0794	2,3491	0,0188
B4	26	6	0,0628	3,57	0,0004
B5	25	8	0,065	2,9235	0,0035
B6	37	18	0,0771	2,6057	0,0092
C4	64	37	0,0745	3,5706	0,0004
C5	62	79	0,0759	3,8803	0,0001
C6	14	22	0,0707	$-2{,}0033$	0,0451
C7	63	37	0,0752	3,3867	0,0007
C8	62	33	0,0759	3,8803	0,0001
C9	64	40	0,074	3,0594	0,0022
C10	64	37	0,0745	3,5706	0,0004
C13	38	15	0,075	3,337	0,0008

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

En resumen, los porcentajes de éxito de las variables en la tabla 7.23 indican una mejor resolución y una tasa de éxito mayor en el subgrupo de modelo D. Estos estudiantes obtienen, con un promedio superior, la correcta transcripción del gráfico a mano alzada. Las proporciones también son superiores en el subgrupo de modelo D a la hora de instrumentalizar el modelo dinámico y representar los puntos-solución sobre el gráfico: se representa la solución $(2, -2)$ en el eje auxiliar de coordenadas y la solución $(1, -7)$ en el gráfico. En proporción, los estudiantes de modelo D argumentan correctamente por escrito que la solución obtenida es correcta un mayor número de veces, y asimismo, estos estudiantes obtienen las soluciones $(2, -2)$ y $(1, -7)$ correctamente un mayor número de veces.

Las variables que miden el número de soluciones (con parejas de valores x e y, es decir, se interpreta la solución como una pareja de datos) y el número de soluciones correctas tienen un promedio superior en este subgrupo. Por otro lado, los estudiantes de modelo G obtendrían, en proporción, dos valores de x sin asignar un respectivo valor a la variable y un mayor número de veces, interpretando el sistema como una ecuación en una incógnita.

Variable externa: titularidad de centro

La variable externa *titularidad de centro* toma dos valores: público (P) y concertado (C). Por un lado, p_P hace referencia a la proporción de estudiantes de centros públicos que realizaron la tarea T1. En total, se trata de $n_P = 121$ estudiantes. Por otro lado, p_C hace referencia a la proporción de estudiantes de centros concertados que realizaron la tarea T1. En total, se trata de $n_C = 27$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_P = p_C \\ H_1 : p_P \neq p_C \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, B1, B3, B4, B5, B7, B8, B9, B10, B11, B12, C2, C3, C11, C12 y C13, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll}
A1: & {p_P}^c \times n_P = 3{,}025 & < 5 \\
A2: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
B1: & {p_P}^c \times n_P = 3{,}025 & < 5 \\
B3: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
B4: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
B5: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
B7: & p_P \times n_P = 4{,}961 & < 5 \\
B8: & p_C \times n_C = 0{,}000 & < 5 \\
B9: & p_P \times n_P = 3{,}993 & < 5 \\
B10: & {p_C}^c \times n_C = 4{,}995 & < 5 \\
B11: & p_P \times n_P = 2{,}057 & < 5 \\
B12: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
C2: & p_P \times n_P = 3{,}993 & < 5 \\
C3: & p_P \times n_P = 3{,}025 & < 5 \\
C11: & p_P \times n_P = 3{,}025 & < 5 \\
C13: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre las variables B6 y C6, no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.24).

Tabla 7.24: Titularidad en T1: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_P	p_C	es	Z	p
B6	46	9	0,1009	0,4553	0,6489
C6	26	10	0,1002	−1,7028	0,0886

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

En el caso de las variables B2, C1, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10 y C12, el contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en este caso, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.25).

Tabla 7.25: Titularidad en T1: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_P	p_C	es	Z	p
B2	80	10	0,1024	2,7986	0,0051
C1	110	19	0,0917	2,8847	0,0039
C4	91	10	0,1009	3,8522	0,0001
C5	86	9	0,0996	3,6984	0,0002
C7	90	10	0,1011	3,748	0,0002
C8	86	9	0,0996	3,6984	0,0002
C9	93	11	0,1020	3,7127	0,0002
C10	91	10	0,1009	3,8522	0,0001
C12	15	14	0,1007	−4,6702	0,000

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

7.3.6. Resultados de la tarea T2

En la manipulación previa a la representación gráfica y a la resolución algebraica, la mayoría de los estudiantes (73 %) obtiene sin errores la expresión explícita en la tarea T2 (variable A1). A pesar de que en este primer paso no se solicita a los estudiantes la resolución algebraica del sistema de ecuaciones, el 2 % de los estudiantes se adelanta a la consigna y resuelve el sistema directamente en la primera entrada de la plantilla (variable A2). Al igual que en la tarea T1, estos estudiantes no hacen caso a la consigna, y ejecutan la tarea a partir de un procedimiento algebraico previamente institucionalizado en el aula (tabla 7.26).

Tabla 7.26: Obtención de la expresión explícita en T2.

Var	% (1)
A1	73,0
A2	2,0

En la figura 7.11, se puede observar el tipo de errores que cometen los estudiantes a la hora despejar variables en expresiones algebraicas con coeficientes racionales, asociados a la variable A1. En la resolución de un sistema de ecuaciones, cometer un error al manipular los coeficientes racionales, implica resolver un sistema no equivalente. En este caso, el estudiante equivoca los signos de los coeficientes en ambas ecuaciones. Sin embargo, el estudiante obtiene soluciones que valora por coherentes dentro del nuevo sistema. Se observa, asimismo, la presencia de la variable A2: en la primera entrada de la plantilla, el estudiante sustituye directamente la segunda ecuación en la primera, igualando a 0, en lugar de presentar únicamente las ecuaciones en su forma explícita.

El objetivo y el interés de obtener la expresión explícita consiste, precisamente, en la manipulación del modelo dinámico y en la obtención de la representación gráfica del

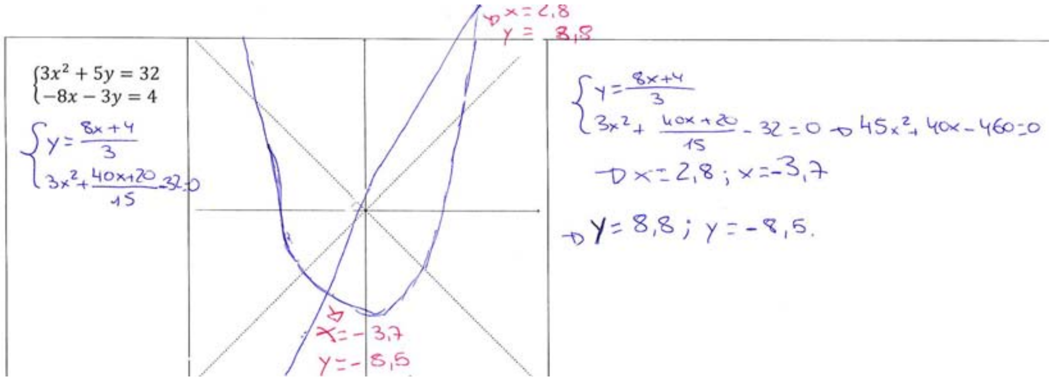


Figura 7.11: Expresión explícita incorrecta en T2.

sistema de ecuaciones. En este sentido, la producción de la figura 7.11 es minoritaria, pero hay estudiantes que no obtienen correctamente la gráfica, aun siendo correcta la expresión explícita de la ecuación. La mayoría de los estudiantes (70,9 %) manipula el modelo dinámico, obtiene una representación gráfica de la situación y la transcribe a la plantilla (variable B1). Cerca de la mitad de los estudiantes (48,6 %) obtiene una representación gráfica que se ajusta a la situación planteada, y transcribe correctamente el gráfico en la plantilla (variable B2). Esta información se sintetiza en la tabla 7.27.

Tabla 7.27: Transcripción del gráfico en T2.

Var	% (1)
B1	70,9
B2	48,6

La plantilla carece de una escala numérica u otro tipo de escala de valores en el sistema de ejes cartesianos. Por ello, el modelo dinámico incorpora en su diseño un sistema de ejes auxiliares formado por las rectas $y = x$ e $y = -x$), para que estas sirvan de referencia en la transcripción del gráfico, es decir: el sistema de ejes auxiliares permite determinar la posición de una solución en función de los signos de sus coordenadas, y en función de una comparación de los valores de sus coordenadas. Así, el 14,9 % de los estudiantes instrumentaliza correctamente los ejes auxiliares para representar la solución $(-2, 4)$ en su posición correcta (variable B3). El 21,6 % de los estudiantes instrumentaliza correctamente el gráfico para representar la solución $(58/9, -500/27)$, en su posición correcta (variable B4). El 10,1 % de los estudiantes representa los puntos-solución obtenidos en la resolución (variable B5), y utiliza este procedimiento de control para validar el resultado (tabla 7.28).

Tabla 7.28: Instrumentalización del eje auxiliar en T2.

Var	% (1)
B3	14,9
B4	12,8
B5	10,1

En la figura 7.12 se observa la producción de un estudiante que instrumentaliza la representación gráfica para validar el resultado obtenido. En la primera entrada de la plantilla, debajo de las expresiones explícitas de las ecuaciones, se puede ver la transformación de los coeficientes racionales: de fracción a decimal aproximado. Esta transformación es necesaria para manipular el modelo dinámico. En la tercera entrada de la plantilla, el estudiante realiza las operaciones sobre las fracciones, y presenta la aproximación decimal del resultado. Además, se argumenta en texto de color rojo la ubicación de la segunda solución, fuera de los márgenes de la vista gráfica: “La solución es posible (el segundo punto no entra, pero si se continúa, aparecerá).”

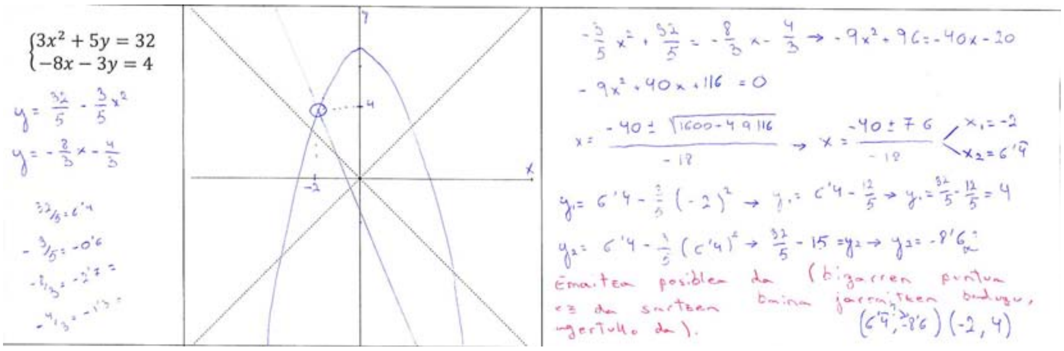


Figura 7.12: Representación de puntos en T2.

Una vez realizan la transcripción de los resultados, la consigna solicita de los estudiantes la redacción de una argumentación que justifique la coherencia entre el resultado numérico y la representación gráfica. Al cruzar la corrección de la solución con la corrección de la argumentación, se obtienen cuatro casos posibles, es decir, que la argumentación realizada puede ser correcta o incorrecta, y a su vez, la solución propuesta por el estudiante puede ser correcta o incorrecta.

En la tarea T2, la mayoría de los estudiantes (64,9 %) no realiza argumentación alguna (esta respuesta se corresponde con el valor $(0, 0, 0, 0)$en la 4-tupla formada por las variables B6–B9). Solamente el 31,1 % de los estudiantes realiza una instrumentalización del modelo dinámico y de la representación gráfica para comprobar el resultado (variable B10). El 16,2 % argumenta correctamente que la solución obtenida es correcta (variable B6), mientras que el 11,5 % argumenta correctamente que la solución obtenida es incorrecta (variable B7).

El 7,4 % de los estudiantes intenta instrumentalizar el modelo dinámico y la representación gráfica, pero no consigue hacerlo correctamente: el 5,4 % argumenta que la resolución es correcta, pese a que no lo es, es decir, la comprobación es incoherente (variable B8); el 2,0 % de los estudiantes resuelve correctamente la tarea por el procedimiento algebraico, y sin embargo, argumenta por escrito que la solución obtenida es incorrecta (variable B9). Estos resultados se indican en la tabla 7.29.

En la figura 7.13 se observa el ejemplo de una resolución correcta en la tarea T2, que caracteriza la variable B6. El estudiante realiza las operaciones sobre coeficientes racionales fraccionarios. A continuación, transforma los coeficientes a su representación decimal, para instrumentalizar el modelo dinámico. A pesar de que la transcripción de la vista gráfica se realiza a mano alzada, y no es exacta, es suficiente para que el estudiante valide su solución con una argumentación correcta: “Sí, tiene sentido, los puntos se ajustan a la parábola”.

Se observa, en otras producciones, que el estudiante no es capaz de transformar

Tabla 7.29: Instrumentalización de la vista gráfica en T2.

Solución correcta	Argumentación correcta	
	Sí	No
Sí	16,2 %(Var: B6)	5,4 %(Var: B8)
No	11,5 %(Var: B7)	2,0 %(Var: B9)

El 64,9 % no realiza argumentación alguna:
$(B6, B7, B8, B9) = (0, 0, 0, 0)$

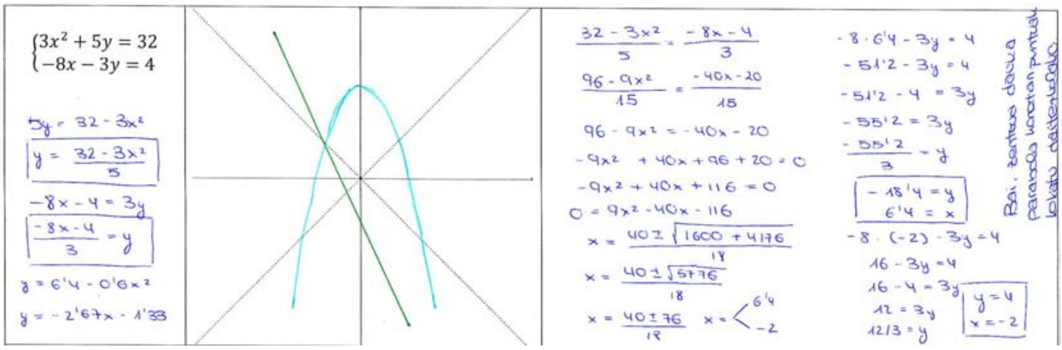


Figura 7.13: Argumentación correcta en T2.

los coeficientes a su representación decimal. En la figura 7.14, el estudiante obtiene correctamente la expresión explícita de las ecuaciones; sin embargo, al no transformar los coeficientes fraccionarios, no es capaz de obtener correctamente la representación gráfica del sistema. Aun y todo, argumenta correctamente la existencia de un error en su producción: “No se en qué he fallado, pero no coinciden las soluciones”.

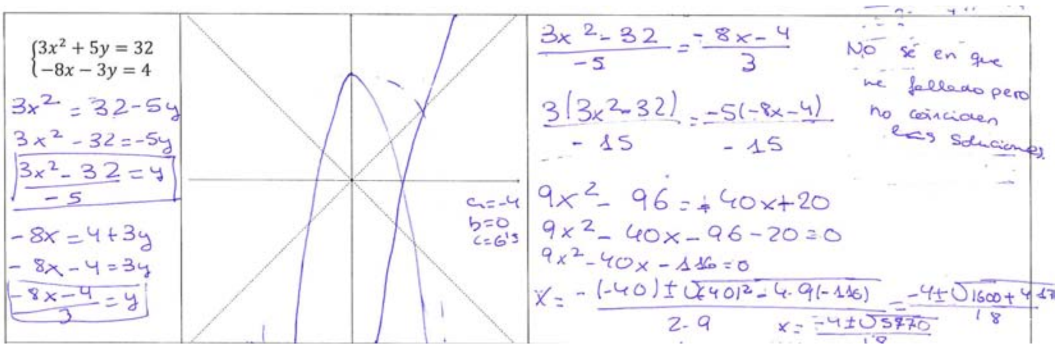


Figura 7.14: No transforma los coeficientes en T2.

La variable B11, estudiada en la tarea T1, no tiene presencia alguna en la tarea T2. Además, en algunos casos, persiste la necesidad de tabular listas de puntos para cerciorarse de que las cantidades van alineadas. Es decir, el 5,4 % de los estudiantes escala los ejes de coordenadas y tabula una lista de puntos para representar la recta (variable B12). En estos casos, los estudiantes interpretan las parejas de valores desde un punto de vista funcional, pero para ellos la noción de linealidad no es operativa. Todos estos resultados se sintetizan en la tabla 7.30. La figura 7.15 muestra el ejemplo de una producción en la que el estudiante requiere de una escala numérica para cerciorarse de que la solución que aporta es se ajusta a la vista gráfica.

Tabla 7.30: Comportamientos numéricos en T2.

Var	% (1)
B11	0,0
B12	5,4

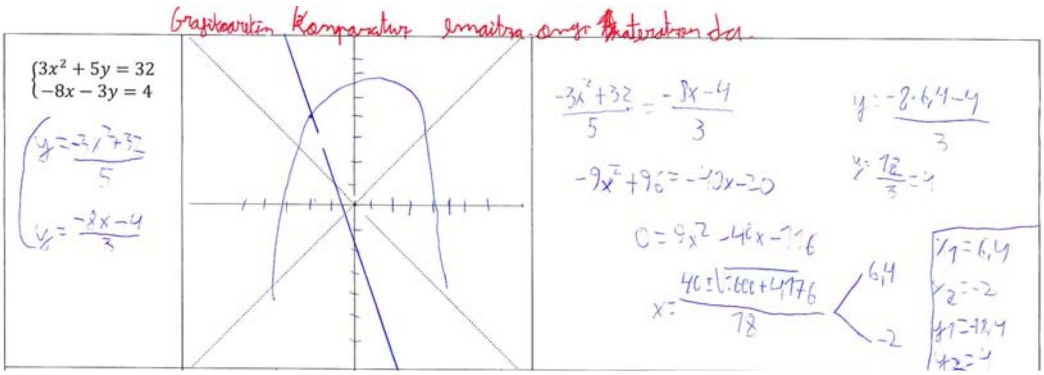


Figura 7.15: No transforma los coeficientes en T2.

En la consigna que reciben los estudiantes, se les sugiere la utilización del método de igualación como técnica para la resolución de la tarea. La mayor parte de los estudiantes (76,1 %) sigue las indicaciones y resuelve el sistema por este método (variable C1). Aun y todo, hay estudiantes que prefieren el método de reducción (variable C2; 1,4 %) o el método de sustitución (variable C3; 2,0 %). Estos resultados se resumen en la tabla 7.31.

Tabla 7.31: Métodos de resolución en T2.

Var	% (1)
C1	76,1
C2	1,4
C3	2,0

Al igual que la en tarea T1, el sistema propuesto en la tarea T2 tiene dos soluciones, estas son $(-2, 4)$ y $(58/9, -500/27)$. El 27,0 % de los estudiantes obtiene ambas soluciones correctamente. Hay también estudiantes que solo obtienen una única solución correctamente: el 29,1 % de los estudiantes obtiene correctamente la solución $(-2, 4)$ (variable C4), mientras que el 27,7 % obtiene correctamente la solución $(58/9, -500/27)$ (variable C5). En la figura 7.16 se presenta un diagrama de Venn-Euler que representa el resultado descrito.

Al igual que en la tarea T1, cerca de una cuarta parte de los estudiantes obtiene valores de la variable independiente x que no utiliza, a continuación, para obtener los respectivos valores de la variable dependiente y. El 25,7 % de los estudiantes obtiene dos valores de x, pero no realiza ninguna otra acción con estos valores (variable C6). Para estos estudiantes, resolver el sistema consiste en resolver una ecuación en una variable, y no interpreta la solución como una pareja de datos. La tabla 7.32 sintetiza estos resultados.

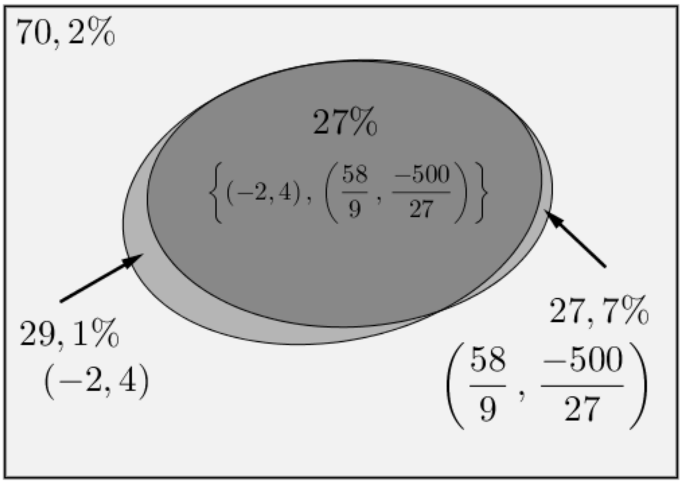


Figura 7.16: Soluciones correctas, tarea T2.

Tabla 7.32: Resoluciones correctas en T2.

Var	% (1)
C4	29,1
C5	27,7
C6	25,7

El 39,2 % de los estudiantes obtiene dos soluciones, es decir, dos soluciones con sus respectivos valores x e y (variable C7). En el 27,0 % de los casos ambas soluciones son correctas (variable C8). El 41,2 % de los estudiantes obtiene al menos una solución, con sus respectivos valores x e y (variable C9). En el 29,7 % de los casos, la solución que se presenta es correcta (variable C10). La tabla 7.33 sintetiza estos resultados.

Tabla 7.33: Número de soluciones en T2.

Var	% (1)
C7	39,2
C8	27,0
C9	41,2
C10	29,7

Los estudiantes disponen de dos métodos para comprobar la solución que aportan. En primera lugar, pueden instrumentalizar el modelo dinámico y la representación gráfica 7.29. Por otro lado, pueden emplear algún procedimiento aritmético o algebraico para comprobar la solución. En este sentido, a diferencia de la tarea T1, en la tarea T2 ningún estudiante comprueba la solución numérica del resultado a partir de métodos aritméticos o algebraicos (varibale C11; 0,0 %). A pesar de la ausencia de una comprobación de los cálculos, cerca de un tercio de los estudiantes (31,1 %) comete errores algebraicos y aritméticos en la resolución (variable C12). Aun y todo, y a pesar de los errores cometidos, se observa un claro *nivel* 3 *de algebrización* en todas las resoluciones. Además, el 20,9 % de los estudiantes, a pesar de que obtiene valores de x e y en la solución, no interpreta la solución algebraica como una pareja de datos, es decir, como un punto en el plano (variable C13). La tabla 7.18 resume estos resultados.

Tabla 7.34: Validación, errores e interpretación en T2.

Var	% (1)
C11	0,0
C12	31,1
C13	20,9

La figura 7.17 muestra una producción en la que las operaciones sobre el conjunto de números racionales conducen a errores aritméticos y algebraicos.

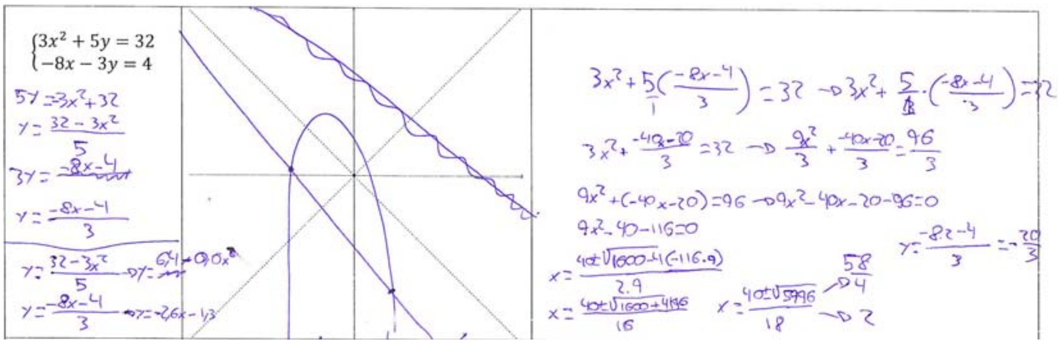


Figura 7.17: Errores aritméticos y algebraicos en T2.

7.3.7. Resultados de la tarea T3

Al igual que la tarea T2, T3 requiere del empleo del campo numérico racional para manipular la ecuación implícita, obtener la ecuación explícita y aplicar el método de igualación. Asimismo, la solución pertenece al campo numérico racional. Sin embargo, la dificultad objetiva de la tarea T3 es inferior a la tarea T2, dado que las cantidades que se requieren manipular en la tarea T3 son fracciones usuales en el contexto escolar (del tipo $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$). A pesar de ello, una cuarta parte de los estudiantes deja en blanco la tarea.

Debido, sobre todo, a esta ausencia de resolución, la tasa de éxito es, en comparación con las tareas T1 y T2, inferior en todas las variables internas. Así, el 65,5 % de los estudiantes obtiene la expresión explícita sin errores (variable A1) y ninguno de ellos resuelve el sistema directamente sobre la primera casilla de la plantilla (variable A2). La tabla 7.35 resume estos porcentajes.

Tabla 7.35: Obtención de la expresión explícita en T3.

Var	% (1)
A1	65,5
A2	0,0

Por un lado, los coeficientes son asequibles para resolver el sistema por un procedimiento algebraico. Por otro lado, el estudiante apura los últimos minutos. Así, algunos estudiantes desisten de manipular el modelo dinámico y se observan resoluciones en las que los estudiantes resuelven el sistema sin representan el gráfico antes (figura 7.18). Así, solo el 47,3 % de los estudiantes transcribe el gráfico a mano alzada en la plantilla (variable B1). En el 39,9 % de los casos, el gráfico transcrito se corresponde con el gráfico real (variable B2). La tabla 7.36 resume estos valores.

Tabla 7.36: Transcripción del gráfico en T3.

Var	% (1)
B1	47,3
B2	39,9

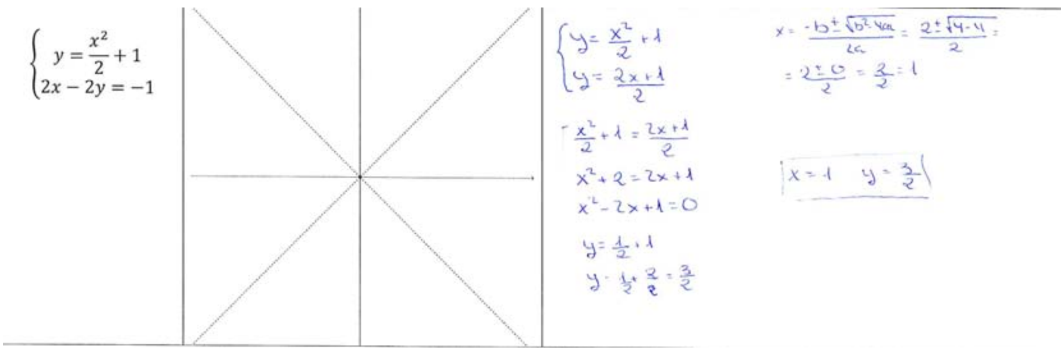


Figura 7.18: Ausencia de representación gráfica en T3.

Aun en el caso de que el estudiante utilice el modelo dinámico y transcriba la gráfica en la plantilla, la instrumentalización del modelo sigue siendo baja, en comparación con las tareas T1 y T2. Así, el 16,9 % de los estudiantes instrumentaliza el eje auxiliar para representar las soluciones del sistema (variables B4 y B5). En el 6,8 % de los casos, el estudiante comprueba la solución representando las coordenadas del punto en el gráfico (variable B6). En la tabla 7.37 se sintetizan estos valores.

Tabla 7.37: Instrumentalización del eje auxiliar en T3.

Var	% (1)
B3	16,9
B4	16,9
B5	6,8

El porcentaje de estudiantes que no realiza argumentación alguna sobre la validez del resultado es superior a las tareas T1 y T2. Así, el 72,3 % de los estudiantes no argumenta la validez del resultado (resultado $(0, 0, 0, 0)$ en la 4-tupla formada por las variables B6–B9). El 18,9 % de los estudiantes argumenta correctamente la validez del resultado, siendo este correcto (variable B6). El 5,4 % instrumentaliza correctamente el modelo dinámico, argumentando correctamente la existencia de un error en la resolución, en base a una incoherencia entre la resolución algebraica y la vista gráfica (variable B7). El 3,4 % de los estudiantes piensa que la solución que aporta es correcta, pero comete un error en su argumentación (variable B8). A diferencia de las tareas T1 y T2, ningún estudiante argumenta incorrectamente una supuesta incoherencia en la resolución que aporta (variable B9). La tabla 7.38 resume estos resultados. Ya sea por una argumentación escrita o por una representación pictórica en el soporte gráfico, el 28,4 % de los estudiantes realiza una instrumentalización del modelo dinámico y de la representación gráfica para comprobar su resultado (variable B10).

Tabla 7.38: Instrumentalización de la vista gráfica en T3.

Solución correcta	Argumentación correcta: Sí	Argumentación correcta: No
Sí	18,9 %(Var: B6)	3,4 %(Var: B8)
No	5,4 % (Var: B7)	0,0 %(Var: B9)

El 72,3 % no realiza argumentación alguna: $(B6, B7, B8, B9) = (0, 0, 0, 0)$

Ningún estudiante escribe la solución sobre el gráfico sin realizar una interpretación puntual del resultado (variable B11) y el porcentaje de estudiantes que escala los ejes de coordenadas para tabular puntos en la representación gráfica es anecdótica (variable B12). La tabla 7.39 sintetiza estos resultados.

Tabla 7.39: Comportamientos numéricos en T3.

Var	% (1)
B11	0,0
B12	3,4

En la figura 7.19 se puede observan una resolución-tipo correcta en la que el estudiante representa gráficamente el resultado y lo interpreta para argumentar la ausencia de una segunda solución: “Está bien, solo pasa por un punto”. El estudiante comete un error aritmético anecdótico, en la suma final: $1 + 0,5 = 1,05$.

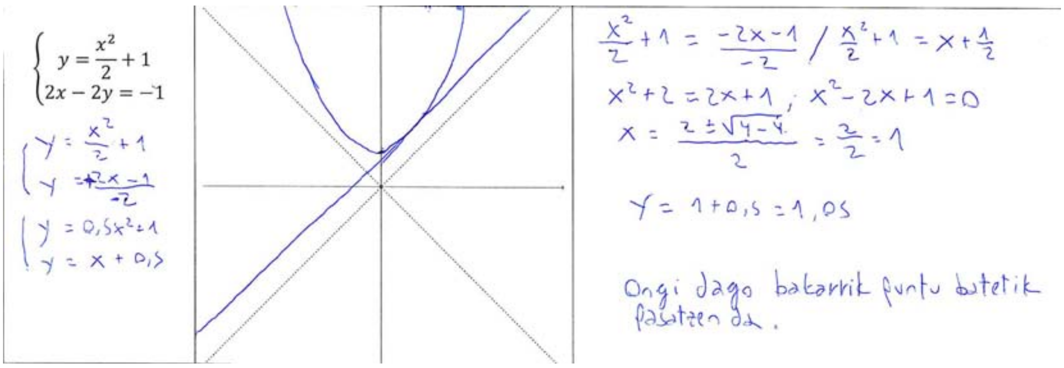


Figura 7.19: Argumentación correcta en T3.

El 56,8 % de los estudiantes resuelve el sistema por el método de igualación, siguiendo la consigna de la tarea (variable C1). Por ejemplo, en la resolución mostrada en la figura 7.19 se ha utilizado el método de igualación. Ningún estudiante resuelve por el método de reducción (variable C2), y el porcentaje de estudiantes que resuelve el sistema por el método de sustitución es anecdótico (variable C3; 1,4 %). La tabla 7.40 sintetiza estos resultados.

Tabla 7.40: Métodos de resolución en T3.

Var	% (1)
C1	56,8
C2	0,0
C3	1,4

El sistema propuesto en la tarea T3 solo tiene una solución. Los estudiantes argumentan por diversos medios la duplicidad de la solución, es decir, la ausencia de una segunda solución. Por ejemplo, un estudiante utiliza la noción *discriminante* en su argumentación (figura 7.20). Por regla general, los estudiantes emplean el lenguaje natural para justificar la ausencia de una segunda solución.

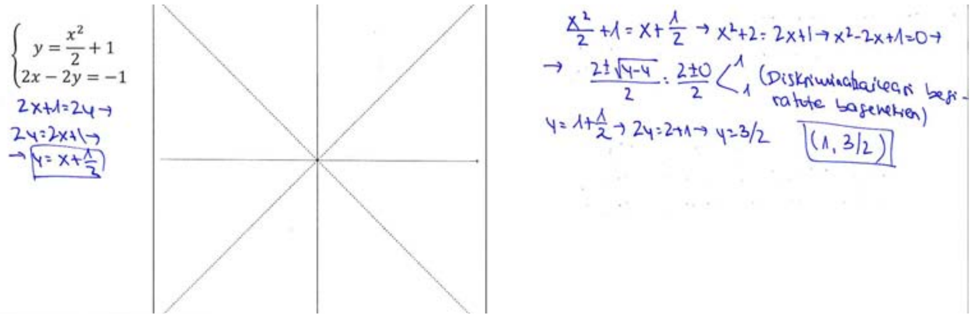


Figura 7.20: Comprobación por discriminante en T3.

El 29,1 % de los estudiantes obtiene la única solución del sistema, es decir, el punto $(1, 3/2)$ (variable C4). En lo que refiere a la unicidad de la solución, el 29,7 % de los estudiantes justifica, utilizando el lenguaje natural o cierta codificación simbólica, la duplicidad de la solución obtenida, o la ausencia de una segunda solución (variable C5). Además, el 17,6 % de los estudiantes obtiene únicamente un valor (correcto o incorrecto) o dos valores (alguno de ellos incorrecto) de la variable x, y no presenta en su producción el correspondiente valor de y, es decir, no presenta una pareja de datos ni realiza ninguna reflexión sobre el carácter puntual de la solución. La tabla 7.41 resume estos resultados.

Tabla 7.41: Resoluciones correctas en T3.

Var	% (1)
C4	29,1
C5	29,7
C6	17,6

En cuanto al número de soluciones obtenidas, el 30,4 % de los estudiantes presenta dos soluciones (variable C7); se tiene en cuenta aquí la duplicidad de la solución, es decir, la indicación explícita del estudiante de la ausencia de una segunda solución. Estas dos soluciones son correctas en un 27,0 % de los casos (variable C8). El 33,1 % de los estudiantes obtiene una única solución (variable C9). La única solución presentada es correcta en un 31,8 % de los casos (variable C10). La tabla 7.42 sintetiza estos resultados.

Los cálculos aritméticos y algebraicos en la tarea T3 se ejecutan sobre valores numéricos sencillos. El porcentaje de estudiantes que comprueban los resultados obtenidos por

Tabla 7.42: Número de soluciones en T3.

Var	% (1)
C7	30,4
C8	27,0
C9	33,1
C10	31,8

métodos aritméticos o algebraicos es anecdótico (variable C11; 0,7 %). El 12,8 % de los estudiantes comete errores algebraicos y aritméticos en la resolución de la tarea (variable C12), y solamente el 15,5 % de los estudiantes interpreta la solución algebraica obtenida como una pareja de datos (variable C13). La tabla 7.43 resume estos resultados.

Tabla 7.43: Validación, errores e interpretación en T3.

Var	% (1)
C11	0,7
C12	12,8
C13	15,5

7.3.8. Variables internas en las tareas T4-T5

Las variables externar e internas del estudio son dicotómicas. Las variables internas se han organizado en tres grupos, "A", "B" y "C", para indicar, respectivamente, comportamientos relativos a la obtención de la expresión explícita y a la prevalencia algebraica en la resolución (A), comportamientos relativos a la instrumentalización del soporte empleado (B), y comportamientos relativos a la resolución algebraica (C).

En las tareas T1, T2 y T3, las variables del grupo "B" miden la instrumentalización del modelo dinámico por parte del estudiante. En su lugar, las variables del grupo "BN" miden la instrumentalización que el estudiante hace de la representación gráfica construida a partir de una tabla de valores. Es decir, las variables BN1–BN12 miden los comportamientos relativos a la transcripción de información de un soporte a otro, y la instrumentalización que el estudiante hace de un mismo soporte, es decir, por un lado, la tabla de valores y la representación gráfica, y por otro, la expresión algebraica.

Con esta notación, los grupos de variables "A" y "C" son iguales para todas las tareas, T1, T2, T3, T4 y T5. Sin embargo, se emplea distinto soporte material, por un lado, en las tareas T1, T2 y T3, y por otro, en las tareas T4 y T5. Así, el significado de las variables del grupo "B" difiere, y se cambian por ello por las variables del grupo "BN".

La tabla 7.45 recoge las variables que modifican su significado para ajustarlo al nuevo soporte. Además, en la tabla 7.44 se numeran las soluciones de las tareas T4 y T5.

Tabla 7.44: Numeración de las soluciones en las tareas T4-T5.

Tarea	Solución 1	Solución 2
T4	$(2, -2)$	$(4, 10)$
T5	$(0, 2)$	$(7/3, -22/3)$

Tabla 7.45: Significado de las variables internas "BN".

Var	Significado
BN1	(1) Tabula correctamente los valores en la tabla. (0) Comete errores en la tabulación de la tabla.
BN2	(1) Construye el gráfico punto por punto. (0) Deja en blanco la representación gráfica.
BN3	(1) El gráfico construido se corresponde con el gráfico real. (0) El gráfico costruido no se corresponde con el gráfico real.
BN4	(1) Comprueba la solución representando los puntos-solución en el gráfico. (0) No modifica la representación gráfica para representar los puntos-solución.
BN5*	(1) La solución obtenida es correcta, y en su discurso, el estudiante argumenta correctamente que es correcta. (0) No argumenta por escrito, la argumentación es incorrecta o la solución es incorrecta.
BN6*	(1) La solución obtenida es incorrecta, y en su discurso, el estudiante argumenta correctamente la imposibilidad de que sea correcta. (0) No argumenta por escrito, la argumentación es incorrecta o la solución es correcta.
BN7*	(1) La solución obtenida es correcta, pero en su discurso, el estudiante argumenta que es incorrecta (argumentación incorrecta). (0) No argumenta por escrito, la argumentación es correcta o la solución es incorrecta.
BN8*	(1) La solución obtenida es incorrecta, pero en su discurso, el estudiante argumenta que es correcta (argumentación incorrecta). (0) No argumenta por escrito, la argumentación es correcta o la solución es correcta.
BN9	(1) Obtiene la solución 1 en ambas tablas. (0) Obtiene la solución 1, a lo sumo, en una tabla.
BN10	(1) Obtiene la solución 2 en ambas tablas. (0) Obtiene la solución 2, a lo sumo, en una tabla.
BN11	(1) Resalta las soluciones coincidentes de la tabla, en la tabla o en el texto. (0) En caso de obtener resultados coincidentes, no las resalta en la tabla ni en el texto.
BN12	(1) Realiza una instrumentalización de la tabla o de la representación gráfica para comprobar el resultado. (0) No representa los puntos-solución en el plano, no realiza una argumentación correcta por escrito y no resalta soluciones coincidentes en la tabla.
BN13	(1) La instrumentalización de la tabla o de la representación gráfica es correcta. (0) El estudiante representa los puntos-solución en el plano o resalta soluciones coindicidentes en la tabla, y no comete errores en la argumentación escrita.
BN14	(1) Escribe la solución como valor numérico sobre el gráfico. (0) No escribe la solución o la representa como un punto en el plano.
(*)	Atendiendo a las variables BN6–BN9, la ausencia de una argumentación escrita en la resolución queda reflejada en el vector $(BN5, BN6, BN7, BN8) = (0, 0, 0, 0)$.

7.3.9. Resultados de la tarea T4

En la sesión en aula ordinaria se trabajan dos situaciones, en lugar de tres. Se reduce el número de tareas en comparación a la sesión en aula de ordenador, porque se estima que el estudiante necesita dedicar cierto tiempo a tabular los valores numéricos de los puntos en la representación gráfica. Aun y todo, y tal como ocurre también en la sesión en aula de ordenador, la tasa de realización de la tarea T4 es superior a la de la tarea T5. Así, el 89,2 % de los estudiantes obtiene la expresión explícita sin errores (variable A1), y el 4,7 % de los estudiantes resuelve el sistema directamente en la primera entrada de la plantilla de resolución (variable A2). La tabla 7.46 sintetiza estos resultados.

Tabla 7.46: Obtención de la expresión explícita en T4.

Var	% (1)
A1	89,2
A2	4,7

En el ejemplo de la figura 7.21 se observa la prevalencia algebraica en la tarea T4. El estudiante realiza los cálculos algebraicos que requiere la resolución, directamente en la entrada de la plantilla destinada a obtener la expresión explícita de las ecuaciones del sistema. Complementa los cálculos de la resolución algebraica con una constatación de que los valores en las tablas 1 y 2 son idénticos. Esta constatación se remarca con una con una flecha. Por último, en el espacio de la plantilla destinado a los cálculos algebraicos, estudiante comprueba los cálculos que ha realizado previamente y añade una argumentación a su propuesta de resolución. El estudiante sigue en este último paso la consigna del docente, y emplea una marcador de distinto color. El estudiante intenta construir el gráfico a mano alzada, pero el gráfico carece de rigor y no se puede instrumentalizar.

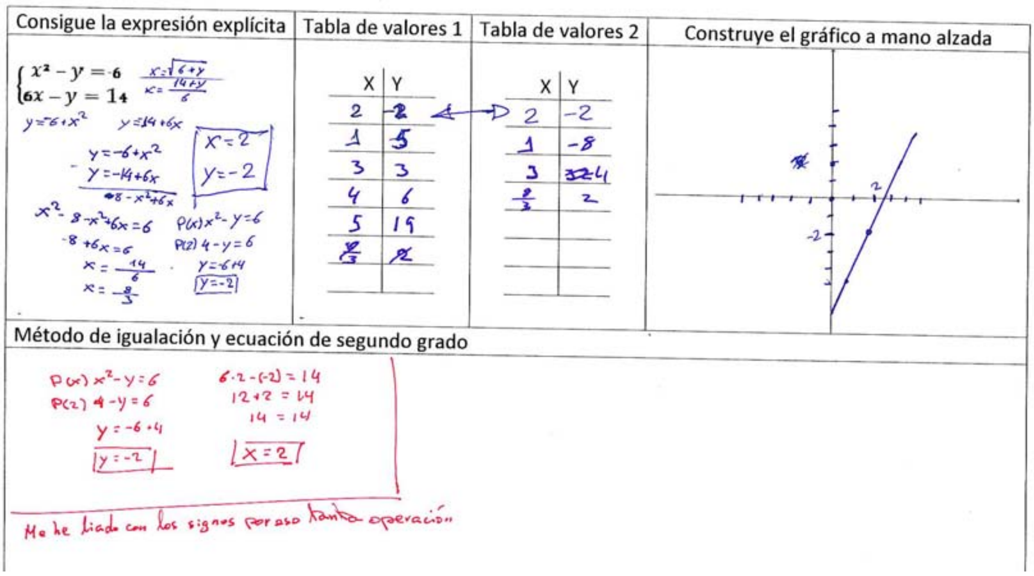


Figura 7.21: Prevalencia algebraica en T4.

A diferencia de las tareas T1, T2 y T3, en las tareas T4 y T5 el estudiante no tiene a mano un modelo dinámico para asistir la resolución del sistema. En su lugar, se solicita al estudiante que tabule dos listas de puntos, una para cada función, para poder representar el gráfico. El 89,2 % de los estudiante tabula correctamente los valores en las tablas (variable BN1). A continuación, el 87,8 % de los estudiantes construye el gráfico con los datos obtenidos en las tablas (variable BN2). Sin embargo, solo la mitad de los estudiantes (48,0 %) consigue un gráfico que se ajusta a la situación real planteada (BN3). La tabla 7.47 resume estos resultados.

Tabla 7.47: Transcripción del gráfico en T4.

Var	% (1)
BN1	89,2
BN2	87,8
BN3	48,0

El ejemplo de la figura 7.22 muestra la producción de un estudiante que no ha conseguido una representación gráfica correcta, a pesar de haber obtenido la expresión explícita de las ecuaciones y de haber tabulado correctamente los valores en las tablas. Este error no permite instrumentalizar la representación gráfica para validar el resultado algebraico obtenido.

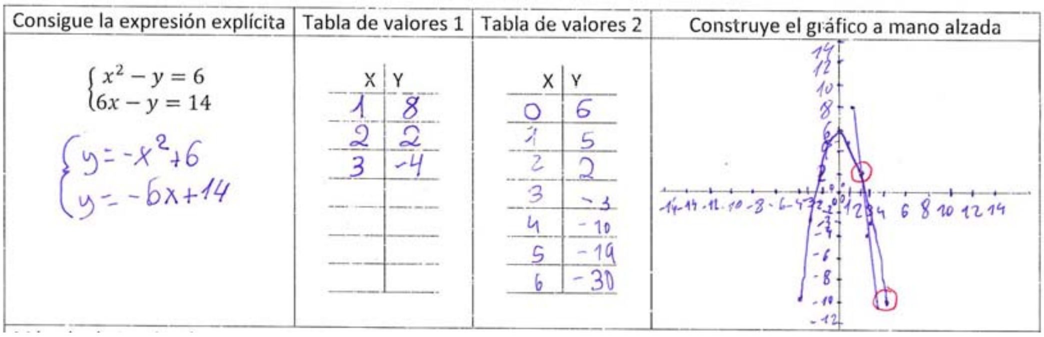


Figura 7.22: Error de representación gráfica en T4.

En el ejemplo de la figura 7.22, se observa que el estudiante comprueba la solución algebraica obtenida representando los puntos-solución en el gráfico (variable BN4). El estudiante resalta en color rojo los puntos de intersección de las curvas, haciendo notar que sus coordenadas concuerdan con los resultados numéricos obtenidos. El 16,2 % de los estudiantes realiza esta acción en su resolución, que permite validar el resultado obtenido. La validación puede ser tanto pictórica como verbal. Otros estudiantes argumentan por escrito, utilizando el lenguaje natural, la concordancia de la solución con la representación gráfica.

Así, cerca de la mitad de los estudiantes realiza una argumentación correcta sobre la coherencia del resultado. El 40,5 % de los estudiantes argumenta correctamente por escrito que la solución obtenida es correcta (variable BN5). El 4,7 % de los estudiantes argumenta correctamente por escrito que la solución obtenida es incorrecta (variable BN6). La argumentación del estudiante no es correcta en todos los casos. El 10,8 % de los estudiantes asegura haber obtenido la solución correcta, pero su argumentación es incorrecta (variable BN7). Por último, el 5,4 % de los estudiantes argumenta haber obtenido una solución incorrecta, siendo esta argumentación errónea (variable BN8). En la tabla 7.48 se sintetizan estos datos. La 4-tupla $(BN5, BN6, BN7, BN8) = (0, 0, 0, 0)$ caracteriza a los estudiantes que no realizan ninguna argumentación, ni pictórica ni verbal.

Tabla 7.48: Instrumentalización de la vista gráfica en T4.

Solución correcta	Argumentación correcta: Sí	Argumentación correcta: No
Sí	40,5 %(Var: BN5)	10,8 %(Var: BN7)
No	4,7 % (Var: BN6)	5,4 % (Var: BN8)

El 38,6 % no realiza argumentación alguna:
$(BN5, BN6, BN7, BN8) = (0, 0, 0, 0)$

En el ejemplo de la figura 7.23 se pueden observar dos propuesta de resolución a la tarea T4. El primer estudiante realiza correctamente todos los pasos de la resolución: obtiene la expresión explícita de las ecuaciones, tabula los valores de las funciones, representa el gráfico y resuelve por el método de igualación. Una vez organiza la información numérica, el estudiante es capaz de validar positivamente su propuesta de resolución: "La gráfica sí que concuerda, porque se cruzan en $(2, -2)$ y parece que se volverán a cruzar, que en este caso será $(4, 10)$". El segundo estudiante comete errores aritméticos y algebraicos en todos los pasos de la resolución. La expresión explícita, la tabulación de valores, el gráfico y la resolución algebraica no son coherentes. El estudiante es capaz de reconocer la incoherencia de su propuesta, y la validación es negativa: "No me coinciden porque no me han salido bien las cuentas".

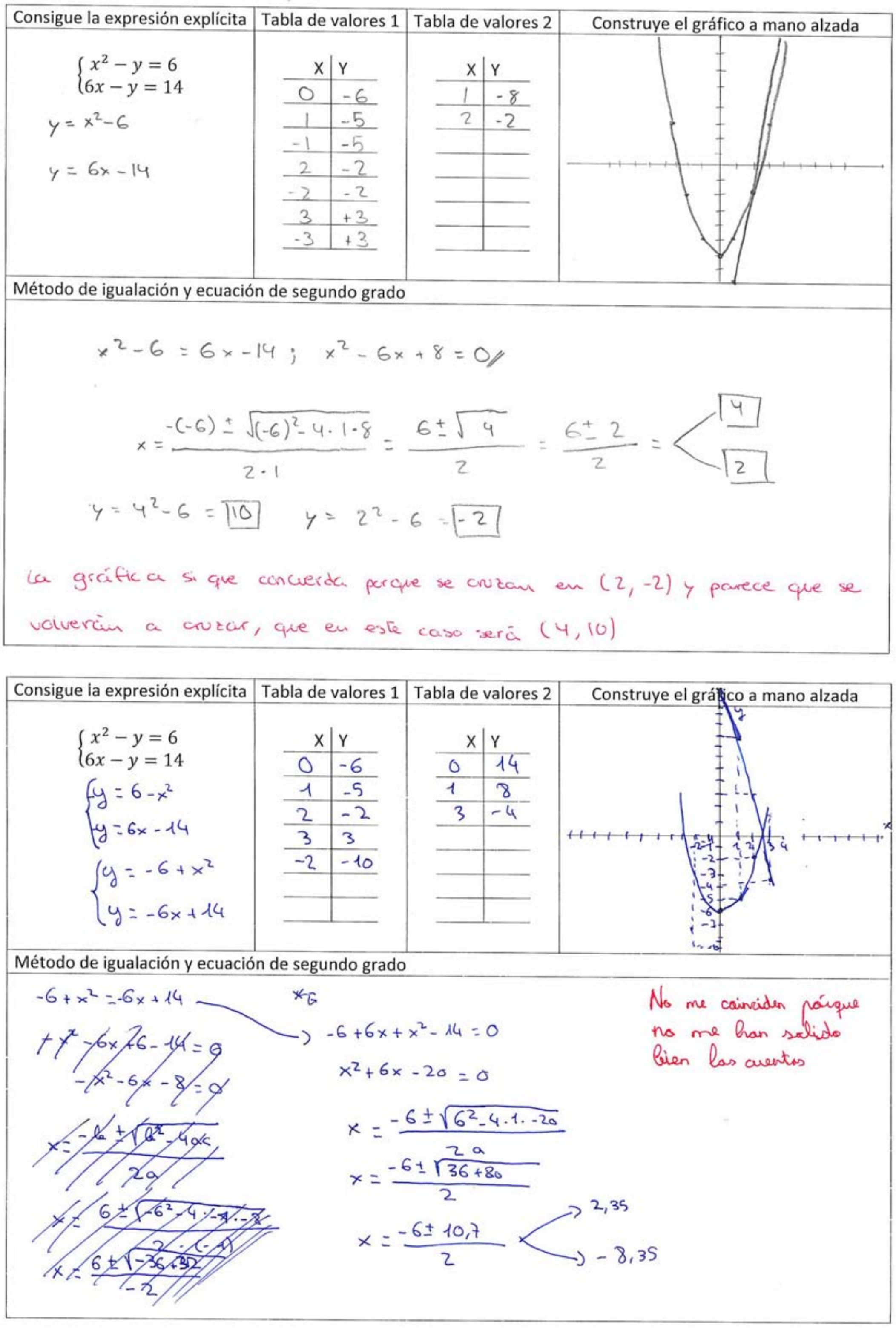
El sistema de la tarea T4 tiene dos soluciones, estas son, $(2, -2)$ y $(4, 10)$. Además de la representación gráfica, la plantilla de resolución permite obtener estas soluciones en las tablas de valores. Los estudiantes que obtienen la misma pareja de valores en la tabulación de los datos, tienen a mano la evidencia de una solución del sistema. Por un lado, el 83,8 % de los estudiantes obtiene la solución $(2, -2)$ en ambas tablas (variable BN9). Por otro lado, el 47,3 % de los estudiantes obtiene la solución $(4, 10)$ en ambas tablas (variable BN10). En menor medida, los estudiantes resaltan explícitamente las soluciones coincidentes en las tablas (20,9 %; variable BN11). La explicitación de las soluciones coincidentes se realiza bien en la tabla, en la representación gráfica o en el texto (tabla 7.49).

Tabla 7.49: Soluciones coincidentes en tablas en T4.

Var	% (1)
BN9	83,8
BN10	47,3
BN11	20,9

En el ejemplo de la figura 7.24 se observa una producción en la que el estudiante obtiene las 2 soluciones por coincidencia en las tablas de valores. La representación gráfica, la resolución algebraica y la argumentación que presenta el estudiante son incompletas: "Coincide, me sale bien en la gráfica [en alusión a la tabla] y en la solución algebraica". Sin embargo, el estudiante está seguro de que presenta dos soluciones correctas, a partir de la tabulación de valores.

De esta forma, atendiendo a las variables anteriores, se considera que el estudiante



Consigue la expresión explícita | Tabla de valores 1 | Tabla de valores 2 | Construye el gráfico a mano alzada

$\begin{cases} x^2 - y = 6 \\ 6x - y = 14 \end{cases}$

$y = x^2 - 6$

$y = 6x - 14$

Tabla de valores 1

X	Y
0	-6
1	-5
-1	-5
2	-2
-2	-2
3	+3
-3	+3

Tabla de valores 2

X	Y
1	-8
2	-2

Método de igualación y ecuación de segundo grado

$x^2 - 6 = 6x - 14 \; ; \; x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \boxed{4}, \boxed{2}$

$y = 4^2 - 6 = \boxed{10} \qquad y = 2^2 - 6 = \boxed{-2}$

la gráfica si que concuerda porque se cruzan en (2, -2) y parece que se volverán a cruzar, que en este caso será (4, 10)

Consigue la expresión explícita | Tabla de valores 1 | Tabla de valores 2 | Construye el gráfico a mano alzada

$\begin{cases} x^2 - y = 6 \\ 6x - y = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 6x - 14 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -6 + x^2 \\ y = -6x + 14 \end{cases}$

Tabla de valores 1

X	Y
0	-6
1	-5
2	-2
3	3
-2	-10

Tabla de valores 2

X	Y
0	14
1	8
3	-4

Método de igualación y ecuación de segundo grado

$-6 + x^2 = -6x + 14$

$-6 + 6x + x^2 - 14 = 0$

$x^2 + 6x - 20 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -20}}{2a}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 80}}{2}$

$x = \frac{-6 \pm 10,7}{2}$ → 2,35 ; → -8,35

No me coinciden porque no me han salido bien las cuentas

Figura 7.23: Argumentaciones correctas en T4.

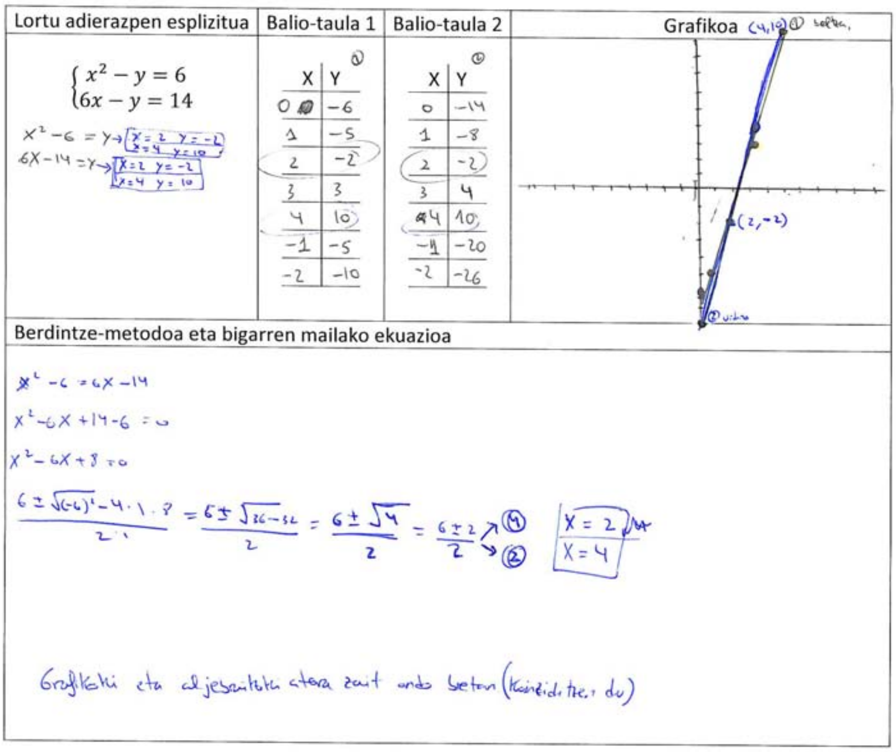


Figura 7.24: Soluciones coincidentes en tablas en T4.

instrumentaliza la tabla de valores o la representación gráfica, siempre y cuando deje una constancia argumental (verbal o pictórica) de un contraste entre las soluciones algebraica y tabular/gráfica (tabla 7.50). El 58,8 % de los estudiantes instrumentaliza la tabla de valores o la representación gráfica para comprobar el resultado (variable BN12). En el 54,1 % de los casos, la instrumentalicación es correcta (variable BN13). De forma anecdótica, algunos estudiantes escriben la solución como valor numérico sobre el gráfico, sin dotar a la representación de una interpretación puntual (variable BN14; 2,0 %)

Tabla 7.50: Instrumentalización de la vista gráfica en T4.

Var	% (1)
BN12	58,8
BN13	54,1

El estudiante conoce los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones. Además, al inicio de la sesión, se le ha dado la consigna de utilizar el método de igualación, por las ventajas que este método tiene a la hora de instrumentalizar la vista gráfica del sistema, en la tarea propuesta. En efecto, la mayoría de los estudiantes hace caso de la consigna inicial, y resuelve el sistema por el método de igualación (variable C1; 83,8 %). Sin embargo, algunos estudiantes hacen caso omiso de la consigna inicial. De forma anecdótica, unos pocos estudiantes resuelven el sistema por el método de reducción (variable C2; 2,7 %) o el método de sustitución (variable C3; 2,7 %).

La solución 1 se obtiene en un porcentaje ligeramente mayor que la solución 2.

Así, el 68,9 % de los estudiantes obtiene la solución $(2, -2)$ correctamente (variable C4), mientras que el 64,2 % de los estudiantes obtiene la solución $(4, 10)$ correctamente (variable C5). La figura 7.25 muestra el correspondiente diagrama de Venn-Euler.

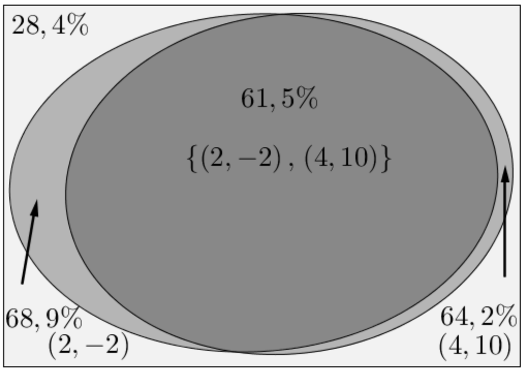


Figura 7.25: Soluciones correctas, tarea T4.

La tabla 7.51 muestra los porcentajes de éxito en la obtención de resultados y su corrección. Así, el 63,5 % de los estudiantes obtiene dos soluciones con sus respectivos valores x e y (variable C7). En el 61,5 % de los casos, las dos soluciones son correctas (variable C8). El 74,3 % obtiene al menos una solución con sus respectivos valores x e y (variable C9). En el 71.6 % de los casos, al menos una de las soluciones obtenidas es correcta (variable C10). A diferencia de los estudiantes que interpretan el sistema con dos variables, algunos estudiantes no aportan una solución puntual al sistema, y resuelven el sistema como si éste fuera una ecuación en una incógnita. El 14,9 % de los estudiantes obtiene dos valores de la variable x, pero no asigna ningún valor a la variable y (variable C6).

Tabla 7.51: Resoluciones correctas en T4.

Var	% (1)
C4	68,9
C5	64,2
C6	14,9
C7	63,5
C8	61,5
C9	74,3
C10	71,6

Algunos estudiantes explicitan comprobaciones numéricas de los cálculos realizados. Así, el 6,1 % de los estudiantes comprueba los resultados obtenidos por métodos aritméticos o algebraicos (variable C11). Aun y todo, el 9,5 % de los estudiantes comete errores algebraicos y aritméticos en la resolución (variable C12). Las manipulaciones numéricas no siempre dan como resultado representaciones puntuales de los datos. El 32,4 % de los estudiantes interpreta la solución algebraica como una pareja de datos (variable C13).

7.3.10. Contrastes de hipótesis en la tarea T4

Los resultados obtenidos en la sección 7.3.9 se pueden contrastar en relación a las variables externas *orden de ejecución de la tarea* (MD-MA, MA-MD), *sexo* (femenino, masculino), *modelo lingüístico* (euskera, castellano) y *titularidad de centro* (público, concertado).

Las variables internas describen comportamientos y son dicotómicas. Por ello, se realiza un contraste de proporciones para comprobar si las diferencias obtenidas en las proporciones de cada subgrupo son significativas. Para todas ellas, se realiza un contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_0 \\ H_1 : p_1 \neq p_0 \end{cases}$$

Variable externa: orden de ejecución de la tarea

La variable externa *orden de ejecución de la tarea* toma dos valores: MD-MA y MA-MD. Por un lado, $p_{(MA-MD)}$ hace referencia a la proporción de los estudiantes que realizaron la tarea T4 sin instrucción previa. En total, $n_{(MA-MD)} = 80$ estudiantes realizaron la tarea en esta secuencia. Estos estudiantes no se han enfrentado al problema con anterioridad y no han explorado previamente el problema con la asistencia de un modelo dinámico. En su lugar, trabajan el sistema por primera vez en el aula ordinaria y siguiendo una metodología tradicional de “lápiz y papel”. Por otro lado, $p_{(MD-MA)}$ hace referencia a la proporción de estudiantes que realizaron la tarea T4 con una instrucción previa. En total, $n_{(MD-MA)} = 68$ estudiantes realizaron la tarea en esta secuencia. Estos estudiantes han realizado previamente las tareas T1, T2 y T3 en el aula de ordenador, y han trabajado por tanto el procedimiento de resolución algebraico con asistencia del modelo dinámico.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_{(MD-MA)} = p_{(MA-MD)} \\ H_1 : p_{(MD-MA)} \neq p_{(MA-MD)} \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A2, BN6, BN7, BN8, BN14, C2, C3 y C11, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll}
A2: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 1,020 & < 5 \\
BN6: & p_{(MA-MD)} \times n_{(MA-MD)} = 2,000 & < 5 \\
BN7: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 2,992 & < 5 \\
BN8: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 4{,}012 & < 5 \\
BN14: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 1,020 & < 5 \\
C2: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 1,020 & < 5 \\
C3: & p_{(MD-MA)} \times n_{(MD-MA)} = 2,992 & < 5 \\
C11: & p_{(MA-MD)} \times n_{(MA-MD)} = 3,000 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre las variables A1, BN1, BN2, BN3, BN4, BN5, BN9, BN10, BN11, BN12, BN13, C1, C4, C5, C6, C7, C9, C10, C12 y C13 no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.19).

Tabla 7.52: Orden de ejecución en T4: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_{MD-MA}	p_{MA-MD}	es	Z	p
A1	61	68	0,0543	0,8529	0,3937
BN1	61	68	0,0543	0,8529	0,3937
BN2	61	66	0,0562	1,2520	0,2106
BN3	31	39	0,0823	−0,3839	0,7010
BN4	11	13	0,0608	−0,0121	0,9904
BN5	28	34	0,0813	−0,1626	0,8708
BN9	54	67	0,0641	−0,6810	0,4958
BN10	26	43	0,0811	−1,8855	0,0594
BN11	13	17	0,0661	−0,3216	0,7478
BN12	41	44	0,0813	0,6491	0,5162
BN13	39	40	0,0820	0,8936	0,3715
C1	57	64	0,0632	0,6002	0,5484
C4	49	51	0,0765	1,0761	0,2819
C5	48	45	0,0783	1,7989	0,0720
C6	9	12	0,0573	−0,3066	0,7591
C7	48	44	0,0784	1,9487	0,0513
C9	51	57	0,0729	0,5119	0,6087
C10	50	54	0,0749	0,7998	0,4238
C12	6	8	0,0480	−0,2437	0,8074
C13	23	24	0,0769	0,4979	0,6185

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

En el caso de la variable C8, el contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en este caso, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.53).

Tabla 7.53: Orden de ejecución en T4: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_{MD-MA}	p_{MA-MD}	es	Z	p
C8	47	42	0,0791	2,0577	0,0396

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

Es decir, se puede afirmar que el subgrupo de estudiantes que realiza las tareas T1, T2 y T3 en el aula de ordenador, es decir, que trabaja de forma previa la instrumentalización del modelo dinámico, obtiene de forma más eficaz las dos soluciones algebraicas correctas en la tarea T4. En este grupo de estudiantes, el promedio de los estudiantes que obtiene dos soluciones con sus respectivos valores x e y, siendo estas soluciones correctas, es significativamente superior.

Hay que puntualizar este resultado, haciendo notar no se da la circunstancia simétrica en la resolución de la tarea T1. Es decir, aquellos estudiantes que resuelven la tarea T1 después de haber trabajado previamente el método de resolución en las tareas T4 y T5, no obtienen resultados significativamente superiores que los estudiantes que se enfrentan por primera vez a este tipo de tareas.

Variable externa: sexo

La variable externa *sexo* toma dos valores: Femenimo (F) y Masculino (M). Por un lado, p_M hace referencia a la proporción de los estudiantes de sexo femenino que realizaron la tarea T4. En total, se trata de $n_F = 63$ estudiantes. Por otro lado, p_M hace referencia a la proporción de estudiantes de sexo masculino que realizaron la tarea T1. En total, se trata de $n_M = 85$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_F = p_M \\ H_1 : p_F \neq p_M \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, BN1, BN6, BN8, BN14, C1, C2, C3 y C11, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll}
A1: & {p_F}^c \times n_F = 3{,}024 & < 5 \\
A2: & p_F \times n_F = 2{,}016 & < 5 \\
BN1: & {p_F}^c \times n_F = 3{,}024 & < 5 \\
BN6: & p_F \times n_F = 3{,}969 & < 5 \\
BN8: & p_F \times n_F = 3{,}024 & < 5 \\
BN14: & p_F \times n_F = 1{,}008 & < 5 \\
C1: & {p_F}^c \times n_F = 3{,}024 & < 5 \\
C2: & p_F \times n_F = 0{,}000 & < 5 \\
C3: & p_F \times n_F = 1{,}008 & < 5 \\
C11: & p_F \times n_F = 2{,}016 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre todas las demás variables (BN2, BN3, BN4, BN5, BN7, BN9, BN10, BN11, BN12, BN13, C4, C5, C6, C7, C8, C9, C10, C12 y C13) no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.54).

A pesar de que el contraste bilateral da como resultado la aceptación de la hipótesis nula, en la mayoría de las variables la proporción de éxito es superior en el subgrupo femenino. De hecho, en el caso de las variables A1, BN1 y C1, se incumplen los requisitos del contraste por tener el subgrupo femenino un porcentaje de éxito cercano al 100 % en estas variables. Es decir, el género femenino obtiene con mayor frecuencia la expresión explícita sin errores, y tabula correctamente los valores en la tabla (es decir, comete un menor número de fallos aritméticos y algebraicos) en la resolución de la tarea T4. Además, las producciones del género femenino son más homogéneas, y resuelven la tarea aplicando el método de igualación dictado por el docente en las consignas iniciales.

Tabla 7.54: Sexo en T4: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_F	p_M	es	Z	p
BN2	57	71	0,0546	1,223	0,2216
BN3	29	42	0,0830	−0,407	0,6840
BN4	8	16	0,0596	−0,9996	0,3175
BN5	22	37	0,0806	−1,0576	0,2902
BN7	9	7	0,0532	1,1721	0,2412
BN9	54	68	0,0619	0,9032	0,3664
BN10	29	41	0,0830	−0,2655	0,7906
BN11	16	15	0,0687	1,1456	0,2520
BN12	38	48	0,0818	0,4690	0,6391
BN13	34	45	0,0829	0,1238	0,9014
C4	44	56	0,0774	0,5087	0,6110
C5	39	54	0,0804	−0,2022	0,8397
C6	13	9	0,0609	1,6988	0,0894
C7	41	51	0,0802	0,6300	0,5287
C8	39	50	0,0812	0,3785	0,7050
C9	47	63	0,0734	0,3845	0,7006
C10	44	60	0,0761	−0,0983	0,9217
C12	7	7	0,0496	0,5911	0,5545
C13	16	31	0,0757	−1,4309	0,1525

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

Variable externa: modelo lingüistico

La variable externa *modelo lingüistico* toma dos valores: euskera (e) y castellano (c). Por un lado, p_e hace referencia a la proporción de los estudiantes que realizaron la tarea T4 en euskera. En total, se trata de $n_e = 79$ estudiantes. Por otro lado, p_c hace referencia a la proporción de estudiantes que realizaron la tarea T4 en castellano. En total, se trata de $n_c = 69$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_e = p_c \\ H_1 : p_e \neq p_c \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A1, A2, BN1, BN6, BN7, BN8, BN9, B14, C1, C2, C3, C11 y C12, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5.

$$\begin{array}{lll} A1: & {p_e}^c \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\ A2: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\ BN1: & {p_e}^c \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\ BN6: & p_e \times n_e = 1{,}975 & < 5 \\ BN7: & p_c \times n_c = 4{,}968 & < 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
BN8: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\
BN9: & p_e \times n_e = 4{,}029 & < 5 \\
BN14: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\
C1: & p_e \times n_e = 3{,}002 & < 5 \\
C2: & p_e \times n_e = 1{,}027 & < 5 \\
C3: & p_c \times n_c = 4{,}002 & < 5 \\
C11: & p_c \times n_c = 4{,}002 & < 5 \\
C12: & p_e \times n_e = 1{,}975 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. El contraste realizado sobre las variables BN2, BN4 y C6, no da muestra de una diferencia significativa entre las proporciones obtenidas en cada caso. No hay una evidencia estadísticamente significativa entre las proporciones de uno u otro subgrupo, por lo que se acepta la hipótesis nula (tabla 7.55).

Tabla 7.55: Modelo en T4: se acepta la hipótesis nula.

Var	p_e	p_c	es	Z	p
BN2	73	57	0,0545	1,819	0,0689
BN4	14	10	0,0603	0,5316	0,5950
C6	13	9	0,0582	0,5821	0,5605

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

En el caso de las variables BN3, BN5, BN10, BN11, BN13, C4, C5, C7, C8, C9 y C10, el contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en este caso, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.56).

En resumen, los porcentajes de éxito de las variables en la tabla 7.56 indican una mejor resolución y una tasa de éxito mayor en el subgrupo de modelo D. Estos estudiantes obtienen, con un promedio superior, la correcta transcripción del gráfico a mano alzada en un promedio mayor. Una vez construido el gráfico, los estudiantes de modelo D argumentan correctamente por escrito que la solución obtenida es correcta un mayor número de veces. Las proporciones también son superiores a la hora de instrumentalizar el modelo dinámico y representar el punto solución $(4, 10)$ sobre el gráfico. Asimismo, resaltan las soluciones coincidentes en la tabla o en el texto e intrumentalizan la tabla o la representación gráfica de forma correcta. En proporción, obtienen las soluciones $(2, -2)$ y $(4, 10)$ correctamente un mayor número de veces. Las variables que miden el número de soluciones (con parejas de valores x e y, es decir, se interpreta la solución como una pareja de datos) y el número de soluciones correctas tienen un promedio superior en este subgrupo. Estos resultados son consistentes con las diferencias observadas en las tareas T1, T2 y T3.

Variable externa: titularidad de centro

La variable externa *titularidad de centro* toma dos valores: público (P) y concertado (C). Por un lado, p_P hace referencia a la proporción de estudiantes de centros públicos

Tabla 7.56: Modelo en T4: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_e	p_c	es	Z	p
BN3	47	24	0,0796	3,0018	0,0027
BN5	40	20	0,0784	2,6758	0,0075
BN10	46	24	0,0798	2,8499	0,0044
BN11	25	6	0,0624	3,4228	0,0006
BN12	54	33	0,0797	2,531	0,0114
BN13	50	30	0,0806	2,4128	0,0158
C4	63	39	0,0749	3,0454	0,0023
C5	60	35	0,0770	3,193	0,0014
C7	60	34	0,0770	3,3628	0,0008
C8	59	32	0,0770	3,5302	0,0004
C9	65	45	0,0716	2,3702	0,0178
C10	64	42	0,0735	2,7115	0,0067

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

que realizaron la tarea T4. En total, se trata de $n_P = 121$ estudiantes. Por otro lado, p_C hace referencia a la proporción de estudiantes de centros concertados que realizaron la tarea T4. En total, se trata de $n_C = 27$ estudiantes.

Se realiza entonces el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : p_P = p_C \\ H_1 : p_P \neq p_C \end{cases}$$

Se descarta realizar el contraste en el caso de las variables A2, BN3, BN4, BN5, BN6, BN7, BN11, BN14, C2, C3, C6, C8, C11 y C13, es decir: a pesar de que la muestra reúne las condiciones para el contraste, dado que es mayor que 25 individuos, el producto entre la proporción obtenida (p_i ó ${p_i}^c$) y el número de sujetos de la clase (n_i) es inferior a 5 (capítulo 4).

$$\begin{array}{lll}
A2: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5 \\
BN3: & p_C \times n_C = 4{,}995 & < 5 \\
BN4: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5 \\
BN5: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5 \\
BN6: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
BN7: & p_C \times n_C = 0{,}000 & < 5 \\
BN8: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5 \\
BN11: & p_C \times n_C = 3{,}996 & < 5 \\
BN14: & p_C \times n_C = 0{,}000 & < 5 \\
C2: & p_C \times n_C = 0{,}999 & < 5 \\
C3: & p_C \times n_C = 0{,}000 & < 5 \\
C6: & p_C \times n_C = 3{,}996 & < 5 \\
C8: & p_C \times n_C = 4{,}995 & < 5 \\
C11: & p_C \times n_C = 1{,}998 & < 5 \\
C13: & p_C \times n_C = 2{,}997 & < 5
\end{array}$$

Se realiza el contraste para el resto de variables analizadas sobre la muestra. En todos los casos, el contraste bilateral da como resultado el rechazo de la hipótesis nula. Existe, en este caso, una diferencia estadísticamente significativa entre ambas proporciones (tabla 7.57).

Tabla 7.57: Titularidad en T4: se rechaza la hipótesis nula.

Var	p_P	p_C	es	Z	p
A1	112	20	0,0876	2,7973	0,0052
BN1	114	18	0,0932	4,1682	0,000
BN2	113	17	0,0956	4,3736	0,0000
BN9	108	16	0,0987	3,8235	0,0001
BN10	63	7	0,0958	2,4599	0,0139
BN12	79	8	0,098	3,4038	0,0007
BN13	73	7	0,0953	3,2436	0,0012
C1	110	14	0,0996	4,9784	0,0000
C4	92	10	0,1007	3,9586	0,0001
C5	89	6	0,0895	5,0303	0,0000
C7	88	6	0,0897	4,9292	0,0000
C9	98	12	0,1021	3,9307	0,0001
C10	95	11	0,1017	3,9364	0,0001
C12	7	7	0,0870	3,2334	0,0012

es: valor estadístico de contraste
Z: punto de la distribución normal ($Z_{calculado}$)
p: p-valor

7.3.11. Resultados de la tarea T5

En la resolución de las tareas T1, T2 y T3, en sesión en aula de ordenador, se observa un descenso en el porcentaje de estudiantes que resuelven la tarea T3, la última tarea de la sesión. Este descenso es debido, posiblemente, a falta de tiempo o al cansancio. En la resolución de las tareas T4 y T5, en la sesión en aula ordinaria, se podría esperar un comportamiento similar en la tarea T5. Sin embargo, el descenso en el porcentaje de estudiantes que no resuelven la tarea T5 es inferior. Por ello, la duración de la tarea se ajusta en mejor medida a lo esperable en los estudiantes.

Así, en la tarea T5, el 81,1 % de los estudiantes obtiene la expresión explícita de las ecuaciones del sistema sin errores (variable A1). El porcentaje de estudiantes que resuelve el sistema directamente sobre la primera entrada de la plantilla baja hasta el 1,4 % (variable A2). La tabla 7.58 resume estos resultados.

Tabla 7.58: Obtención de la expresión explícita en T5.

Var	% (1)
A1	81,1
A2	1,4

A pesar de que el porcentaje de estudiantes que resuelve la tarea T5 baja poco en relación al porcentaje de estudiantes que resuelve la tarea T4, se nota un descenso en la tasa de éxito. El descenso en la corrección de las producciones se observa desde los primeros pasos, empezando por la tabulación de valores. Así, el 63,5 % de los estudiantes tabula correctamente los valores en la tabla (variable BN1). El 71,6 % de los estudiantes construye el gráfico, punto por punto, utilizando los valores tabulados (variable BN2). Sin embargo, el gráfico se corresponde con el gráfico real en el 45,3 % de los casos (variable BN3). En la tabla 7.59 se resumen estos valores, los cuales son, en todos los casos, inferiores a los datos de la tabla 7.47.

Tabla 7.59: Transcripción del gráfico en T5.

Var	% (1)
BN1	63,5
BN2	71,6
BN3	45,3

Una vez construido el gráfico, el 7,4 % de los estudiantes comprueba la solución obtenida, representando los puntos-solución en el gráfico (variable BN4). El porcentaje de estudiantes que presenta una solución, pero no realiza argumentación alguna por escrito es del 53,5 %. El resto, realiza algún tipo de argumentación. Así, el 24,3 % de los estudiantes argumenta correctamente la obtención de una solución que es, a su vez, correcta (variable BN5). El 10,1 % de los estudiantes argumenta correctamente que la solución obtenida no es coherente (variable BN6). El porcentaje de estudiantes que comete algún error en su argumentación es inferior. Por un lado, el 4,7 % dice obtener una solución correcta, pero su argumentación no está fundamentada (variable BN7). Por otro lado, el 7,4 % de los estudiantes asegura haber obtenido una solución equivocada, y sin embargo, su solución es correcta (variable BN8). La tabla 7.60 recoge estos resultados de forma sintética.

Tabla 7.60: Instrumentalización de la vista gráfica en T5.

Solución correcta	Argumentación correcta	
	Sí	No
Sí	24,3 %(Var: BN5)	4,7 %(Var: BN7)
No	10,1 %(Var: BN6)	7,4 %(Var: BN8)

El 53,5 % no realiza argumentación alguna:
$(BN5, BN6, BN7, BN8) = (0, 0, 0, 0)$

Se presentan, a continuación, ejemplos de argumentaciones de estudiantes que valoran las producciones que ellos mismos presentan. Se muestran argumentaciones correctas e producciones.

Por un lado, la figura 7.26 presenta dos ejemplos de producciones de estudiantes en las cuales se ha instrumentalizado correctamente la vista gráfica y la tabulación de valores. En la primera producción, el estudiante argumenta correctamente la coherencia del resultado: "Coinciden en los puntos $(0, 2)$ y $(2, \widehat{3}; -7, \widehat{3})$. La gráfica concuerda con los resultados". En la segunda producción, el estudiante identifica un error en su producción (obtiene dos resultados numéricos distintos para la variable y, al sustituir el valor de la variable x en una y otra función), tras comparar el resultado algebraico con la vista gráfica: "No me coincide, por lo tanto es erróneo".

Por otro lado, la figura 7.27 presenta dos ejemplos de producciones de estudiantes cuya argumentación no es correcta. En el primer ejemplo, el estudiante comete un error algebraico. Este error provoca que la solución 2 no sea coherente con la representación gráfica. Aun y todo, el estudiante justifica su propuesta: “Yo creo que coinciden”. En el segundo ejemplo, no hay error alguno en los cálculos de la resolución algebraica. Sin embargo, el estudiante asegura haber cometido algún error, donde no lo hay (posiblemente, piensa que un resultado con fracciones no es tolerable), a pesar de que la representación gráfica es coherente con los valores presentados: “Uno me coincide y el otro no me coincide”.

El sistema de la tarea T5 tiene dos soluciones: $(0,2)$ y $(7/3,-22/3)$. La solución 2 presenta valores del conjunto de números racionales. Sin embargo, en los pasos intermedios de la resolución, el estudiante no ha tenido que manipular números racionales. La ecuación implícita, las manipulaciones para obtener la ecuación explícita, la aplicación del método de igualación y la aplicación de la ecuación de segundo grado se ejecutan sobre coeficientes enteros.

A la hora de tabular los valores en la tabla, puede ocurrir que los estudiantes obtengan el mismo valor numérico en ambas tablas. Por un lado, el 58,8 % de los estudiantes obtiene la solución $(0,2)$ en ambas tablas (variable BN9). Por otro lado, el 2,0 % de los estudiantes obtiene la solución $(7/3,-22/3)$ en ambas tablas. El 11,5 % de los estudiantes resalta las soluciones coincidentes de la tabla, en la tabla o en el texto (variable BN11).

Tabla 7.61: Soluciones coincidentes en T5.

Var	% (1)
BN9	58,8
BN10	2,0
BN11	11,5

En el ejemplo de la figura 7.28 se observa una resolución correcta de la tarea T5. El estudiante obtiene correctamente la expresión explícita de las dos ecuaciones, y tabula, de esta manera, los valores de la variable dependiente, en función de los valores de la variable independiente. Se observa que la ejecución de tarea es simultánea en todas las entradas de la plantilla. En efecto, no es “natural” que el estudiante seleccione los valores $x_1 = 0$ y $x_2 = 2,3$ en ambas tablas, en ese orden, y por azar. La tabulación de los valores en las tablas, la representación gráfica y la resolución algebraica se han realizado, cuando menos, en paralelo. El estudiante utiliza, de esta forma, los tres medios de los que dispone (tabla de valores, gráfico y cálculos algebraicos) para comprobar los valores que obtiene en todos los soportes. En particular, resalta los valores coincidentes en las tablas (dado que están en una posición ventajosa en la tabla), resalta los puntos-solución en el gráfico (marca los puntos de intersección en los que las curvas “se juntan”), y resalta por escrito, en lenguaje natural, la validez del resultado: “Creo que sí concuerdan los dos puntos que he calculado”.

En la figura 7.28, se resaltan los valores coincidentes de las tablas, y además, el estudiante argumenta correctamente sobre la vista gráfica, es decir, instrumentaliza correctamente la tabla de valores y la representación gráfica para validar su resultado (variable BN12). Si se analiza el total de la muestra, el porcentaje de estudiantes que instrumentaliza la vista gráfica no llega a la mitad. El 43,2 % de los estudiantes instrumentaliza la tabla de valores o la representación gráfica para comprobar el resultado.

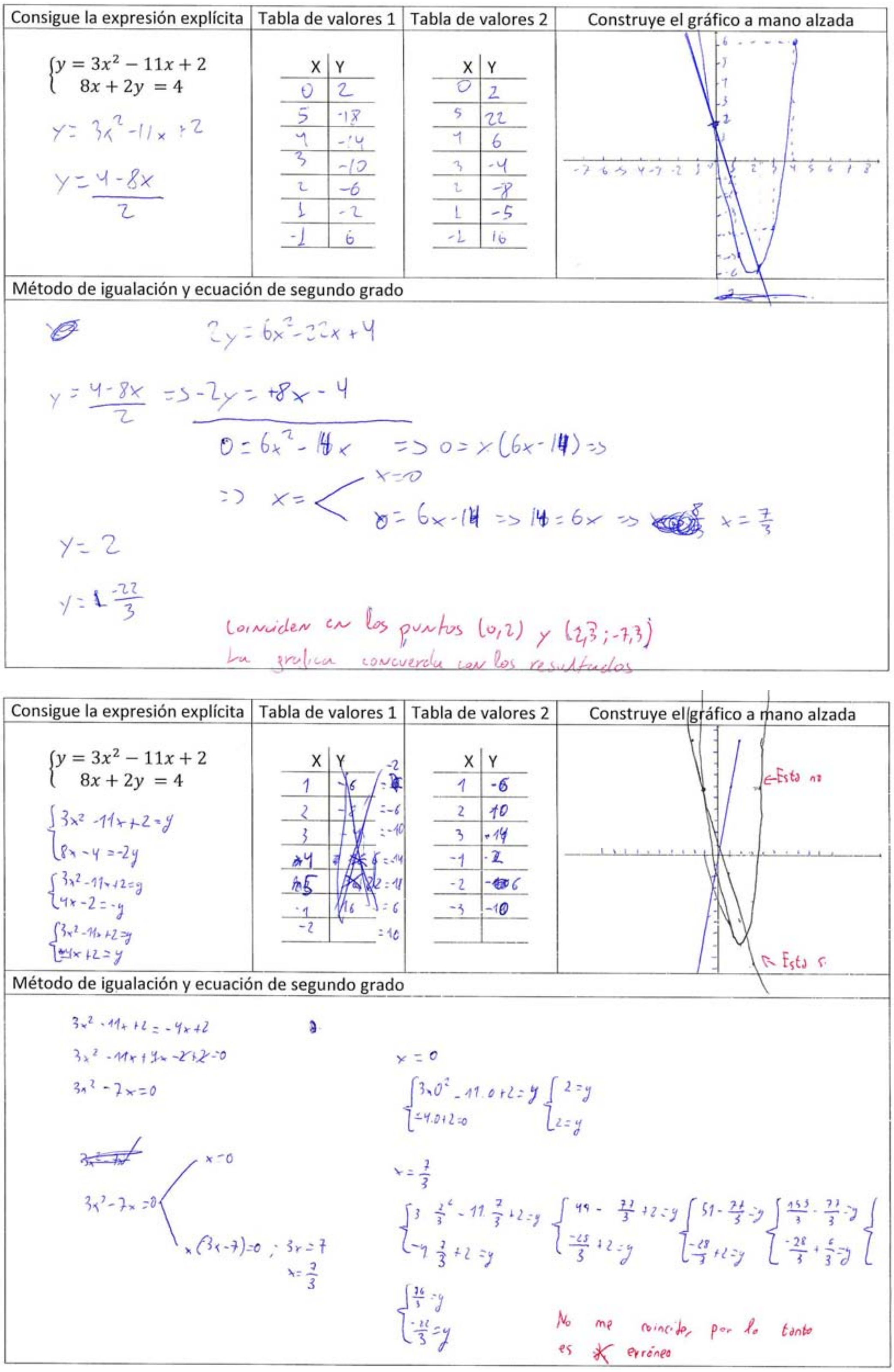
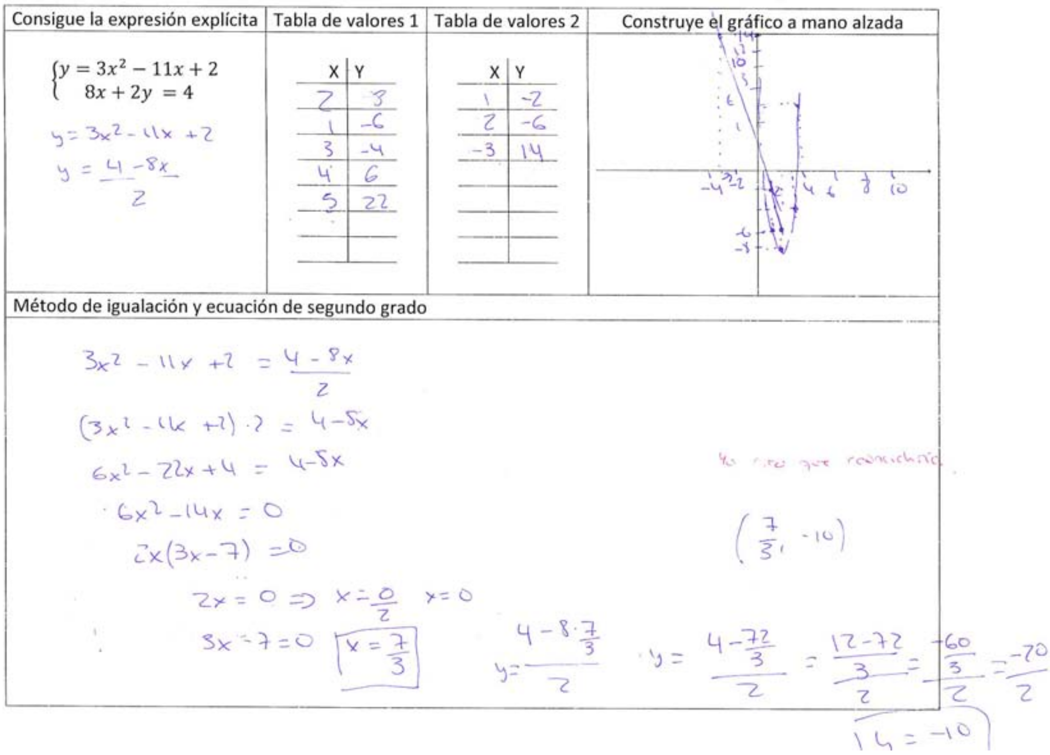


Figura 7.26: Argumentaciones correctas en T5



Consigue la expresión explícita	Tabla de valores 1	Tabla de valores 2	Construye el gráfico a mano alzada
$\begin{cases} y = 3x^2 - 11x + 2 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$ $y = 3x^2 - 11x + 2$ $y = \frac{4-8x}{2}$	X | Y 2 | -8 1 | -6 3 | -4 4 | 6 5 | 22	X | Y 1 | -2 2 | -6 -3 | 14	

Método de igualación y ecuación de segundo grado

$3x^2 - 11x + 2 = \frac{4-8x}{2}$

$(3x^2 - 11x + 2)\cdot 2 = 4 - 8x$

$6x^2 - 22x + 4 = 4 - 8x$

$6x^2 - 14x = 0$

$2x(3x-7) = 0$

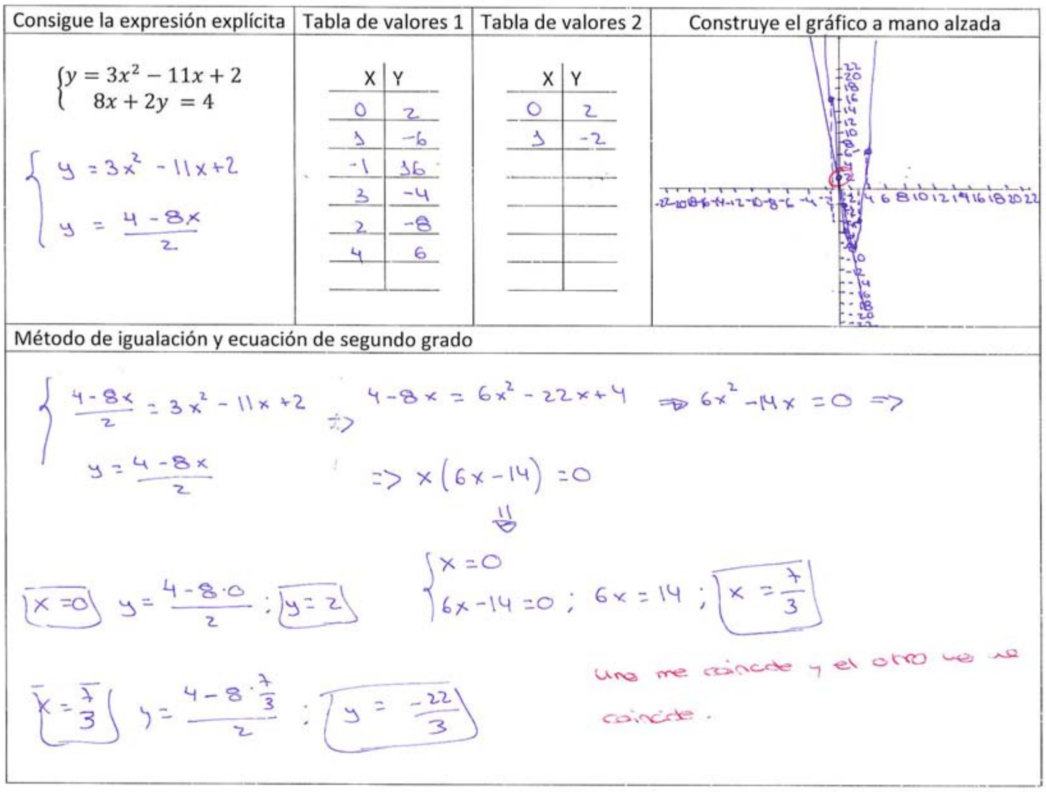
$2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} \quad x = 0$

$3x - 7 = 0 \quad \boxed{x = \frac{7}{3}} \quad y = \frac{4 - 8\cdot\frac{7}{3}}{2} \quad y = \frac{4 - \frac{72}{3}}{2} = \frac{\frac{12-72}{3}}{2} = \frac{\frac{-60}{3}}{2} = \frac{-20}{2}$

$\boxed{y = -10}$

Yo creo que coincidirá.

$\left(\frac{7}{3}, -10\right)$



Consigue la expresión explícita	Tabla de valores 1	Tabla de valores 2	Construye el gráfico a mano alzada
$\begin{cases} y = 3x^2 - 11x + 2 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x^2 - 11x + 2 \\ y = \frac{4-8x}{2} \end{cases}$	X | Y 0 | 2 1 | -6 -1 | 16 3 | -4 2 | -8 4 | 6	X | Y 0 | 2 1 | -2	

Método de igualación y ecuación de segundo grado

$\begin{cases} \frac{4-8x}{2} = 3x^2 - 11x + 2 \\ y = \frac{4-8x}{2} \end{cases} \Rightarrow 4 - 8x = 6x^2 - 22x + 4 \Rightarrow 6x^2 - 14x = 0 \Rightarrow x(6x-14) = 0$

$\boxed{x = 0} \quad y = \frac{4 - 8\cdot 0}{2} ; \boxed{y = 2} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 6x - 14 = 0 ; \quad 6x = 14 ; \quad \boxed{x = \frac{7}{3}} \end{cases}$

$\boxed{x = \frac{7}{3}} \quad y = \frac{4 - 8\cdot\frac{7}{3}}{2} ; \boxed{y = \frac{-22}{3}}$

Uno me coincide y el otro no me coincide.

Figura 7.27: Argumentaciones incorrectas en T5

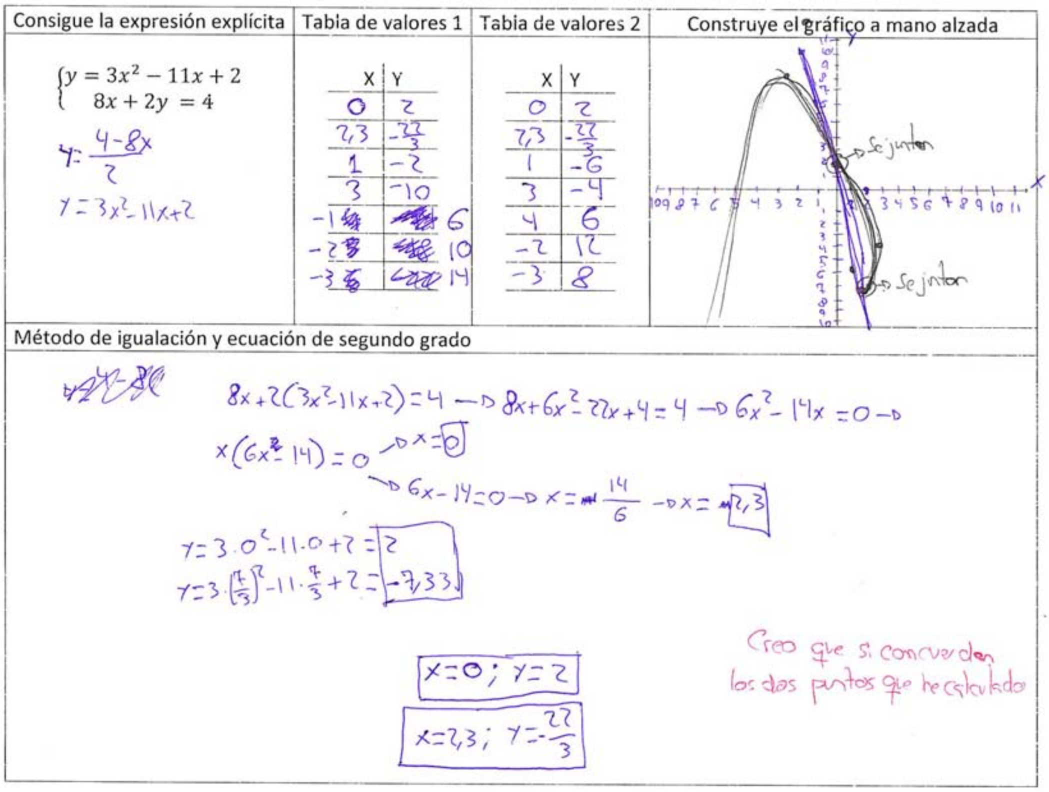


Figura 7.28: Soluciones coincidentes en T5.

En el 37,2 % de los casos la instrumentalización es correcta (variable BN13). En la tabla 7.62 se sintetizan estos valores.

Tabla 7.62: Instrumentalización de la vista gráfica en T5.

Var	% (1)
BN12	43,2
BN13	37,2

La utilización de otro método de resolución que no sea el de igualación sigue siendo anecdótico. Así, el 72,3 % de los estudiantes resuelve por este método (variable C1); el 2,0 % resuelve por el método de reducción (variable C2) y el 2,0 % lo hace por el de sustitución (variable C3). En cuanto a la soluciones obtenidas, el 48,0 % obtiene correctamente la solución $(0, 2)$ (variable C4), y el 31,1 % obtiene correctamente la solución $(7/3, -22/3)$ (variable C5). La figura 7.29 muestra el diagrama de Venn-Euler correspondiente a las soluciones correctas 1 y 2.

En la tabla 7.63 se puede ver que el 41,2 % obtiene dos soluciones con sus respectivos valores x e y (variable C7), y en el 27,7 % de los casos estas soluciones son correctas (variable C8). El 53,4 % obtiene una solución con sus respectivos valores x e y (variable C9), y en el 50,0 % de los casos esta solución es correcta (variable C10). Por otro lado, en una quinta parte de las propuestas el estudiante se conforma con presentar dos valores de la variable x, sin presentar su respectivo valor en y (variable C6).

Por último, la tabla 7.64 muestra los resultados relativos a los comportamientos

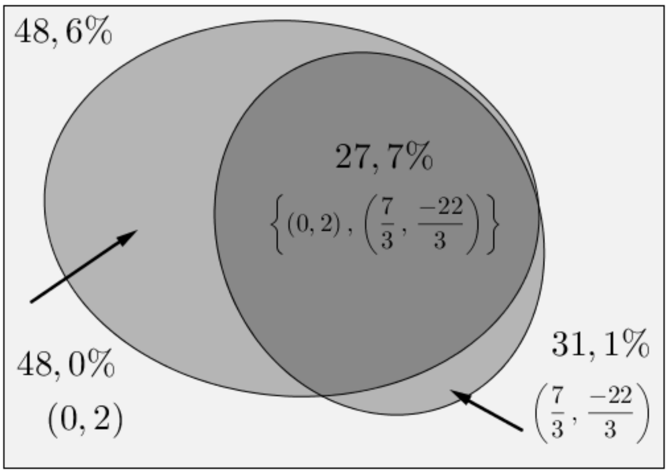


Figura 7.29: Soluciones correctas, tarea T5.

Tabla 7.63: Resoluciones correctas en T5.

Var	% (1)
C4	48,0
C5	31,1
C6	19,6
C7	41,2
C8	27,7
C9	53,4
C10	50,0

numéricos de validación, a los errores cometidos y a la interpretación del resultado. Así, el 2,0 % de los estudiantes comprueba los resultados obtenidos por algún método aritmético o algebraico (variable C11). El 17,6 % comete errores algebraicos a lo largo de la resolución (variable C12) y el 27,0 % interpreta la solución algebraica obtenida como una pareja de datos (variable C13).

Tabla 7.64: Validación, errores e interpretación en T5.

Var	% (1)
C11	2,0
C12	17,6
C13	27,0

7.3.12. Análisis estadístico-implicativo

La matriz de datos de las variables internas y externas de la experimentación, permite su análisis por medio del Análisis Estadístico Implicativo (ASI[5]). Se procede, a continua-

[5]ASI, del francés: *Analyse Statistique Implicative.*

ción, al análisis del diagrama implicativo obtenido por medio del software CHIC[6]. En este análisis, se cruzan todas las variables internas, correspondientes a las cinco tareas propuestas a los estudiantes. El objetivo del análisis conjunto de las variables consiste en relacionar una misma variable, o un conjunto de variables, en las distintas tareas. De esta forma, el AI permite obtener información adicional, que complementa los resultados obtenidos previamente, tarea por tarea, y la información relativa a los contrastes de hipótesis.

El elevado número de variables en la muestra genera un diagrama de grandes dimensiones. Por ello, se muestran en esta sección partes del diagrama original, para facilitar así la presentación de los resultados. En los diferentes diagramas, la relación directa entre variables se muestra a través de líneas continuas, en tres niveles: relación al 99 % (en color rojo); relación al 95 % (en color azul); y relación al 90 % (en color verde). Además, las líneas discontinuas representan relaciones transitivas en las implicaciones, siguiendo el mismo código de colores.

El diagrama consta de diversas partes de estructuras simples o complejas. En algunas partes simples, se observa una relación coherente entre las variables internas, es decir, se observa que la variable que mide un comportamiento en una tarea determinada, tiene vinculación con esta misma variable en otra tarea. Esta relación se da, principalmente, en las distintas tareas que conforman una misma sesión. A modo de ejemplo, la figura 7.30 muestra la relación existente entre la instrumentalización del eje de coordenadas auxiliares (variable B4) en las tareas T1, T2 y T3 de la sesión en aula de ordenador (MD). La instrumentalización del eje de coordenadas auxiliares en la tarea T3 implica ese mismo comportamiento en la tarea T2. A su vez, la instrumentalización en la tarea T2 implica el mismo comportamiento en la tarea T1. Además, existe una relación transitiva en esta cadena. La orientación de la cadena, es decir, T3 → T2 → T1, indica un incremento progresivo en la tasa de ejecución y éxito en las tareas, en sentido inverso: T1 → T2 → T3.

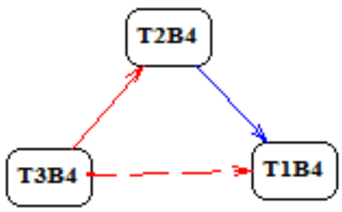


Figura 7.30: Coherencia en la instrumentalización del eje auxiliar, en la sesión MD.

Existen, pues, secciones del diagrama implicativo en los que se observa la coherencia de una misma variable con respecto a una serie de tareas. Existen otros tipos de secciones en el diagrama, que muestran otro tipo de relación. Un conjunto de variables puede aparecer agrupado en relación a una tarea particular. Por ejemplo, en la figura 7.31, se observa la agrupación de las variables que describen la correcta transcripción del gráfico (variable B2), la correcta instrumentalización de los ejes auxiliares para representar las soluciones 1 y 2 (variables B3 y B4, respectivamente) y la validación gráfica del resultado (variable B5), en relación a la tarea T1. El diagrama contiene implica-

[6] Acrónimo de ‘Clasificación jerárquica implicativa y cohesitiva” en su expresión original en francés: *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*.

ciones directas y transitivas que enlazan las variables en un retículo, que indican, a su vez, una fuerte conexión ente los comportamientos que describen las variables. Así, la obtención correcta del gráfico implica, a su vez, la correcta instrumentalización de los ejes de coordenadas y su validación en la vista gráfica. Los estudiantes que representan la solución 1, representan también la solución 2, y estos validan el resultado en la vista gráfica.

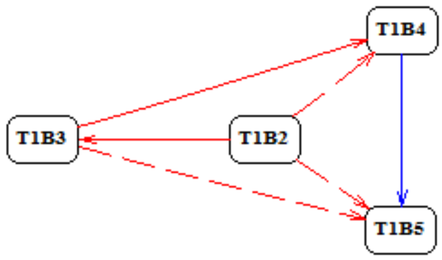


Figura 7.31: Coherencia en la instrumentalización y validación en T1.

En la figura 7.30 se muestra la relación de la una variable (B4) consigo misma, en un grupo de tareas (T1, T2 y T3). A su vez, en la figura 7.31 se muestra la relación de un grupo de variables (B2, B3, B4 y B5) en una tarea particular (T1). En partes más complejas del diagrama, un grupo de variables puede aparecer relacionado consigo mismo en más de una tareas. Por ejemplo, las variables B2, B3, B4 y B5, que aparecen aisladas en la tarea T1, aparecen agrupadas en las tareas T2 y T3. Así, en las tareas T2 y T3, las variables que miden la correcta transcripción del gráfico (B2), la instrumentalización de los ejes de coordenadas (B3) y la validación de la solución en la vista gráfica (B5), están unidas por implicaciones directas y transitivas que forman un retículo enlazado en forma de pentágono.

La figura 7.32 muestra la sección del diagrama implicativo en el que se observan estas relaciones. En el gráfico, la representación de la solución 1 en la tarea T2 implica no solo la corrección del gráfico y la validación gráfica de la solución en la propia tarea T2; implica, asimismo, la obtención del gráfico, la correcta representación de la solución 1 y su validación gráfica en la tarea T3. Asimismo, la obtención de la representación gráfica y la validación gráfica de la solución en la tarea T2 implica estos mismos comportamientos en la tarea T3.

Las variables del grupo “B” describen los comportamientos relativos a la instrumentalización del modelo dinámico, y las variables del grupo “C” describen los comportamientos algebraicos. Existen partes del diagrama implicativo que enlazan variables internas de los dos grupos. Así, por ejemplo, en la figura 7.33, se muestra una sección del diagrama implicativo en el que las variables del grupo “B” que miden la argumentación correcta sobre la vista gráfica (B6 y B7) aparecen en relación con las variables del grupo “C” que miden la obtención de la solución 1 (C4), la obtención de dos soluciones (C7) y la obtención de al menos una solución (C9), en las tareas T2 y T3. En el diagrama, la obtención de dos soluciones en la tarea T2, implica la correcta obtención de la solución 1; implica, además, la obtención de dos soluciones en la tarea T3, que a su vez, implica la correcta obtención de la solución 1 en la tarea T2. Es decir, existe una vinculación en las cadenas de comportamientos de las dos tareas. En el diagrama, la argumenta-

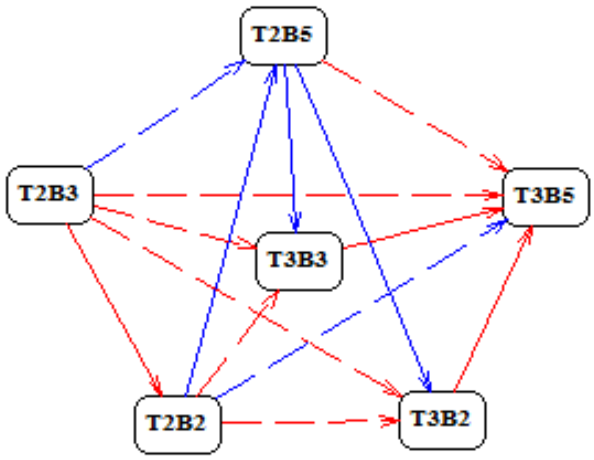


Figura 7.32: Instrumentalización y validación cruzada en T2 y T3.

ción correcta en la tarea T2 implica la argumentación correcta en la tarea T3, y estos comportamientos están vinculados, a su vez, a la correcta obtención de la solución 1.

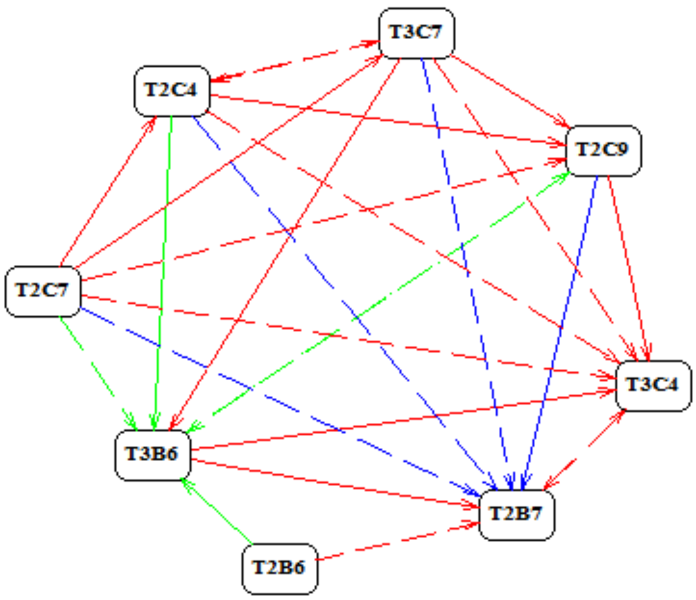


Figura 7.33: Coherencia en la argumentación y la obtención de soluciones en T2 y T3.

En las figuras 7.30, 7.31, 7.32 y 7.33 se muestran partes del diagrama implicativo que evidencian la coherencia interna entre las variables que miden comportamientos de éxito, en relación a la instrumentalización del modelo dinámico y la validación del resultado obtenido en la vista gráfica. Podría parecer que las implicaciones solo se dan entre variables que miden comportamientos de éxito. Sin embargo, esta coherencia interna se da, también, en variables que miden comportamientos erróneos. Por ejemplo, en la figura 7.34, se observa que la comisión de errores aritméticos y algebraicos (variable C12) se mantiene estable en las tareas T1, T2 y T3 y T5. Es decir, los estudiantes que cometen errores aritméticos y algebraicos son reincidentes en más de una tarea.

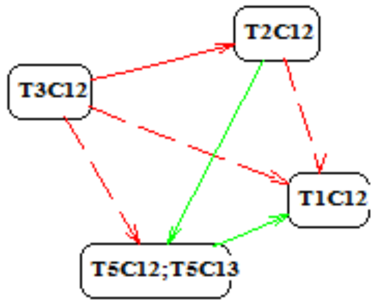


Figura 7.34: Coherencia en la instrumentalización y validación en T1.

En las figuras 7.30, 7.31 y 7.32 se ha mostrado la coherencia de las variables internas B2, B3, B4 y B5 en las tareas T1, T2 y T3. Además, en la figura 7.34 se observa que la comisión de errores aritméticos y algebraicos es también recurrente. Cabría pensar, por estos resultados, que los comportamientos de los estudiantes son siempre recurrentes en las distintas tareas. Sin embargo, existen secciones del gráfico implicativo en las que se observa que los estudiantes pueden mostrar distintos comportamientos en diferentes tareas.

En la figura 7.35, se toman como referencia las variables que miden la obtención de una solución numérica repetida en la tabulación de las tablas (BN9, solución 1; BN10, solución 2; BN11, resalta las soluciones coincidentes), en las tareas T4 y T5. En él, se pueden ver comportamientos distintos, por un lado, en las tareas T4 y T5, y por otro, en la tarea T3. En el diagrama se puede identificar una cadena de comportamientos, en la resolución de las tareas T4 y T5, que tienen por origen las variable BN9, BN10 y BN11, y que conducen a errores: errores aritméticos y algebraicos (variable C12), presentación de soluciones numéricas relativas a la variable x (variable C6) y argumentaciones incorrectas (variable BN7). Sin embargo, en la tarea T3 no se han utilizado tablas tabuladas, y se observa la presencia de la variable C8 en el diagrama.

Las variables externas "sexo", "modelo lingüístico" y "titularidad de centro" están ausentes del diagrama implicativo. La variable externa "orden de ejecución de la tarea" es la única variable externa que aparece representada en el diagrama (figura 7.36). Esta sección del retículo del diagrama es compleja y permite, por ello, varias lecturas:

1. Se puede observar la cadena de comportamientos relacionados con la correcta representación e instrumentalización de la vista gráfica y de los ejes auxiliares, en la tarea T1, de la figura 7.30, y su vinculación con la variable externa "orden de ejecución de la tarea", con una fuerte transitividad.

2. Se observa que la validación del resultado en la vista gráfica en la tarea T1 implica el mismo comportamiento en la tarea T4, vinculado asimismo al "orden de ejecución de la tarea" y a la instrumentalización del modelo dinámico en la tarea T2.

3. La variable B8 mide la "argumentación incorrecta sobre una solución correcta", es decir, el comportamiento por el cual el estudiante obtiene una solución correcta, pero no la identifica como tal, y realiza una argumentación equivocada para

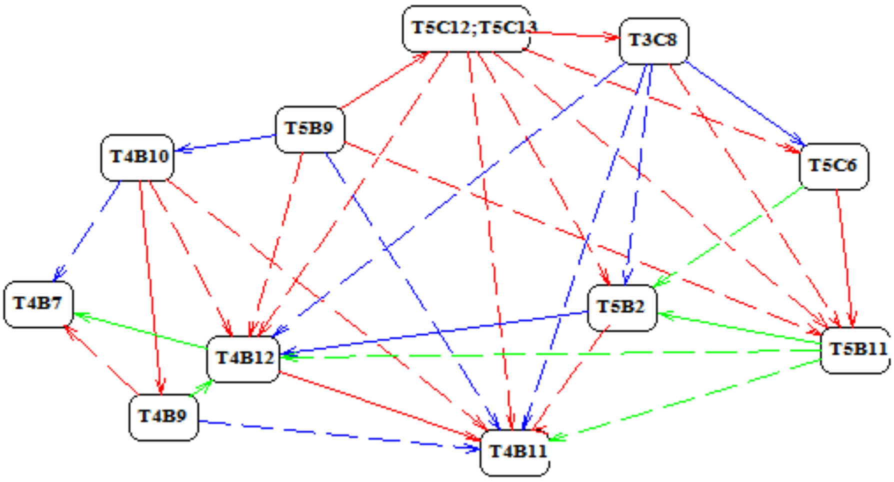


Figura 7.35: Uso de tablas en las tareas T4 y T5.

desacreditar su solución. En la tarea T1, esta variable está vinculada al orden de ejecución MD-MA, es decir, la secuencia MA-MD está vinculada a una argumentación correcta.

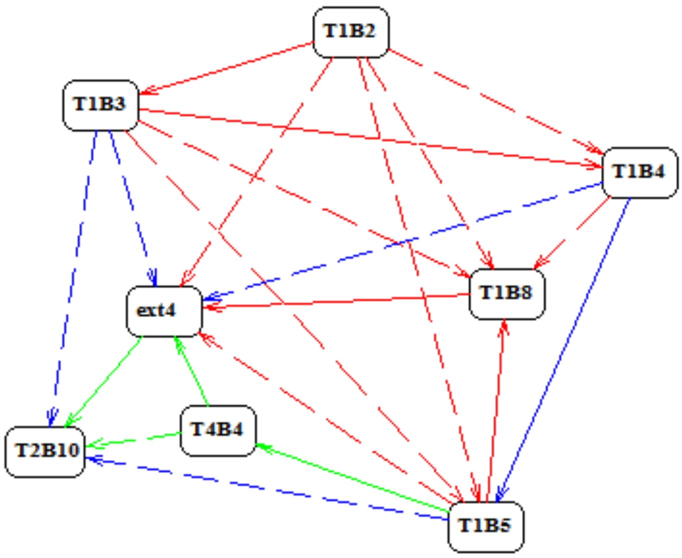


Figura 7.36: Retículo en torno a la variable externa "orden de ejecución de la tarea".

La variable C6 mide la obtención de valores numéricos en x, sin su correspondiente valor en y. Este comportamiento indica que el estudiante no interpreta las ecuaciones como partes de un sistema, ni las soluciones como puntos en el plano cartesiano. El estudiante solamente obtiene valores numéricos, y los presenta fuera del contexto gráfico, sin interpretación puntual.

La variable C6 es, pues, incompatible con las variables que miden la obtención de dos soluciones (C7), la obtención de dos soluciones correctas (C8), la obtención de al menos una solución (C9) y la obtención de al menos una solución correcta (C10). Además, la variable C6 es incompatible con las variables que identifican la obtención de la solución 1 en el sistema (C4) y la obtención de la solución 2 (C5). Este hecho significa que en la matriz de valores, las 2-tuplas $(C6, C_i)$ y $(C_i, C6)$ nunca toman el valor $(1, 1)$, con $i \in \{4, 5, 7, 8, 9, 10\}$. Sin embargo, en multitud de ocasiones, la variable C6 aparece relacionada con estas mismas variables en el diagrama implicativo. Para que estas relaciones implicativas tengan significado, la variable de origen debe tomar, necesariamente, el valor 0.

Por ejemplo, en la primera sección del diagrama implicativo de la figura 7.37, se observa la relación T1C4 $\rightarrow$ T1C6. Esta relación indica que los estudiantes que no consiguen obtener la solución 1 del sistema en la tarea T1, presentan dos soluciones en x. A su vez, los que consiguen instrumentalizar el eje para presentar la solución 2 y no presentan dos soluciones en x, llegan al final de la resolución y obtienen dos soluciones correctas.

En la segunda sección del diagrama implicativo en la figura 7.37 se observa una situación similar, que enlaza las resoluciones de las tareas T2, T3 y T5. Se observa el mismo comportamiento en la tara T2: los estudiantes que no presentan dos valores de x, son capaces de llegar al final de la resolución y presentan dos soluciones correctas. El mismo diagrama enlaza las tareas T2 y T3: los estudiantes que obtienen dos soluciones correctas en T3 presentan dos valores en x en T2. Este resultado se ajusta a lo observado en las secciones 7.3.6 y 7.3.7, donde se observa que la tarea T3 presenta mayor porcentaje de éxito en la muestra, debido al campo numérico empleado y a que los cálculos involucrados son asequibles. Además, se observa en el diagrama que los estudiantes que obtienen correctamente la solución 1 en la tarea T5 obtienen dos soluciones correctas en T2 y T3.

En la sección tres del diagrama implicativo en la figura 7.37, se vuelven a repetir los resultados ya mencionados. En particular, se observa la relación T3C4 $\rightarrow$ T3C6, observada en la tarea T1. Además, se observa la relación T2B7 $\rightarrow$ T3C6, indicando que los estudiantes que no obtienen soluciones correctas en T2 pero son capaces de validar su solución como incorrecta. Estos estudiantes presentan, en la tarea T3, dos valores de x como solución al sistema.

Además, la sección cuatro del diagrama implicativo en la figura 7.37 muestra la relación T4C6 $\rightarrow$ T4B13. Es decir, en la tarea T4, la obtención de dos valores de x está vinculada a la resolución “numérica” de las tablas de valores. Las producciones de algunos estudiantes no presentan soluciones algebraicas al sistema, aun habiendo obtenido valores coincidentes en la tabla numérica. Estos estudiantes obtienen valores numéricos coincidentes en la tabla de valores que no identifican con la solución del sistema, o consideran que “no es lícito” presentar una solución en esos términos, porque los requerimientos del docente son otros (desajuste con el *contrato didáctico*). En el mismo diagrama se observa que los estudiantes que obtienen al menos una solución en T5 obtienen dos soluciones en T4.

En la quinta y última sección del diagrama implicativo en la figura 7.37, la variable C6 vuelve a estar vinculada, en la tarea T5, a los comportamientos numéricos de resolución con la tabla. Al igual que en la tarea T4, en la tarea T5 los estudiantes que presentan valores numéricos de x como solución al sistema, resaltan esos valores coincidentes en la tabla de valores, pero no identifican estos valores coincidentes como soluciones algebraicas al sistema.

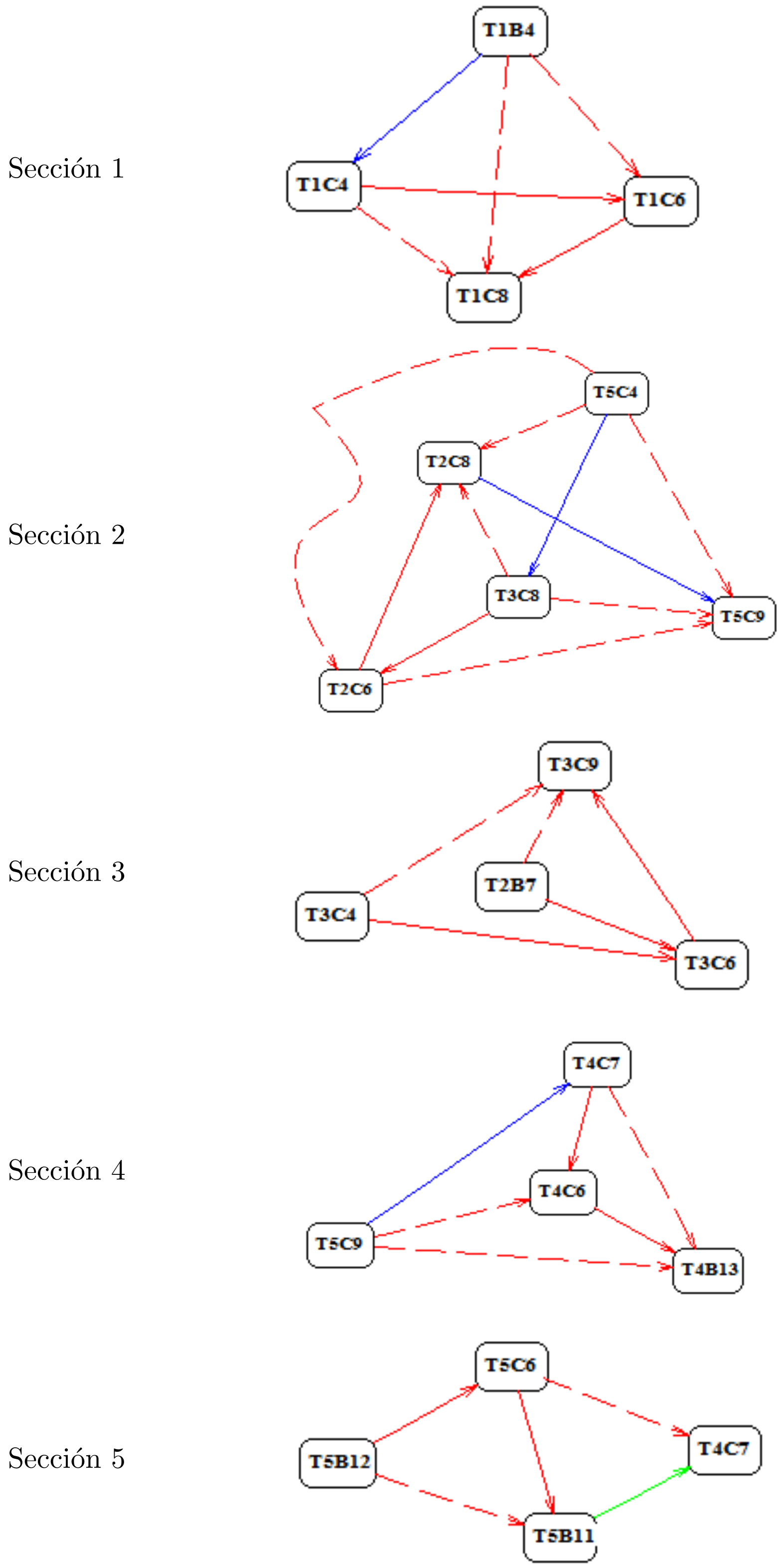


Figura 7.37: Obtención de valores de la variable x.

Capítulo 8

Análisis *a posteriori*

Breve resumen
En este capítulo se realiza el contraste argumental entre el análisis previo y lo observado en la experimentación. Los resultados obtenidos son coherentes con otros resultados anteriores del autor y de otros autores, y permiten realizar lecturas en el plano sociológico, pedagógico y didáctico. Se realiza un análisis del a idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Laburbilduma
Kapitulu honetan aldez aurreko azterketaren eta esperimentazioaren arteko alderaketa egiten da. Lorturiko emaitzak autorearen eta beste autore batzuen aurreko lanekin koherenteak dira. Lorturiko emaitzak koherenteak dira egileak eta beste egile batzuek lorturiko emaitzekin. Emaitzek irakurketak onartzen dituzte plano soziologikoan, pedagogikoan eta didaktikoan. Amaitzeko, ikaskuntza prozesuaren egokitasun didaktikoaren azterketa bat egiten da.

Short summary
In this chapter, we compare the previous analysis and the results of the experience. The results are coherent with other results from the author and from other authors. Furthermore, the results allow readings in sociological, pedagogical and didactical levels. We end up with an analysis of the didactical adequacy of the learning process.

En la sección 5.1, se ha presentado un conjunto de técnicas históricas que constituyen una antropología del saber "ecuaciones e inecuaciones". En los ejemplos históricos presentados, estas técnicas se aplican a problemas geométricos y económicos reales, que responden a necesidades concretas de civilizaciones antiguas. El escriba explica cada técnica con un ejemplo, utilizando valores particulares; sin embargo, su propósito es mostrar el potencial de la técnica para resolver un tipo de situaciones-problemas. Es por ello que, en los ejemplos históricos mostrados, las técnicas se concretan con coeficientes y soluciones que pertenecen al conjunto de los números racionales positivos. Además, las técnicas utilizadas para resolver problemas integran técnicas aritméticas, geométricas y funcionales. Así, las técnicas aritméticas se justifican sobre un esquema geométrico, o se aplica una propiedad lineal de los sistemas de ecuaciones, en términos de "incrementos". Este es el caso de las técnicas de empezar por el final y *regula falsi*, discutidas en las secciones 5.1.1 y 5.1.2, y que sirven de técnica de base o técnica auxiliar en procedimientos de mayor complejidad.

Así pues, la integración de los puntos de vista funcional y algebraico forma parte de la génesis histórica del conocimiento matemático. Sin embargo, a partir del análisis del currículo vigente y de los libros de texto (sección 5.4), se ha argumentado cómo la enseñanza actual enfatiza las técnicas de resolución algebraica, en detrimento de otras nociones geométricas o funcionales. Enseñar las técnicas algebraicas fuera del contexto geométrico o funcional, implica la atomización del conocimiento matemático y afecta a la construcción del significado personal. En efecto, en la sección 3.3, se ha descrito la forma en la que la habilidad para traducir información de una representación semiótica a otra, afecta positivamente a la construcción del significado personal, en términos de conversión y tratamiento.

Los resultados obtenidos en la experimentación (capítulo 7) validan empíricamente el punto de vista teórico del modelo didáctico (capítulo 3). En efecto, la integración de dos soportes físicos (modelo dinámico y "lápiz y papel") en la situación propuesta afecta en diversos aspectos a los comportamientos observados en los estudiantes. En otras palabras, el requerimiento hecho a los estudiantes de manipular un modelo dinámico para asistir la resolución algebraica condiciona los comportamientos.

8.1. Discusión de los resultados

Los resultados que se presentan en el capítulo 7, permiten su discusión en al menos siete aspectos de naturaleza distinta:

- **Dimensión sociológica y sociolingüística**

    1. *El modelo y la titularidad de centro en las tareas T1 y T4*, donde se justifica que desde la muestra de la experimentación no es posible dar una explicación a la diferencia de comportamientos observados. En las cuestiones abiertas se dan indicaciones para aclarar, en un futuro, las diferencias sociológicas observadas en los resultados.

    2. *El género en las tareas T1 y T4*, donde se da una respuesta a los comportamiento observados, en referencia a estudios de ámbito sociológico de género. En las cuestiones abiertas se dan indicaciones para aclarar, a futuro, las diferencias de género observadas en los resultados.

- **Dimensión pedagógica**

  3. *Gestión del tiempo en la sesión MD*, donde se analiza la importancia radical de los *momentos de exploración* en el progreso del significado atribuido a los objetos matemáticos.

- **Dimensión didáctica**

  4. *Prevalencia algebraica*, donde se observa la importancia que tienen las técnicas algebraicas, no solo como instrumento de control de los estudiantes dentro del *contrato didáctico* clásico, sino también como estrategia de base dentro de un *esquema de acción instrumentada* previo a un *momento de exploración* con un modelo dinámico.
  5. *Influencia del campo numérico*, dado que la elección del campo numérico en el diseño de las distintas fases de resolución en un problema, determina la complejidad y el desarrollo de la tarea, y contribuye a dotar de significado la práctica matemática.
  6. *Interpretación del sistema como una ecuación*, donde se analizan los comportamientos de los estudiantes que proponen soluciones numéricas, en lugar de interpretar la solución como un punto en el plano.
  7. *Orden en la ejecución de la tarea en T1 y T4*, en la que se extrae información de los contrastes de hipótesis sobre la influencia del orden en las secuencias MA–MD y MD–MA. La discusión de este resultado tiene especial relevancia, puesto que aporta elementos para el diseño de una secuencia de aprendizaje eficiente, desde el punto de vista de la gestión del *medio didáctico*.

A continuación, se procede la discusión de estos siete aspectos.

8.1.1. El modelo y la titularidad de centro en las tareas T1 y T4

El contraste de hipótesis realizado sobre las variables internas con relación a las variables externas "modelo lingüístico" y "titularidad de centro", muestran diferencias estadísticamente significativas en las producciones de los estudiantes de los distintos modelos. Sin embargo, no se deben sacar conclusiones precipitadas de estos resultados. Los resultados obtenidos no son suficientes para valorar los distintos modelos educativos.

En efecto, la muestra utilizada en el estudio empírico es intencional, y en ella no se han podido respetar los porcentajes relativos a los distintos segmentos de la estructura educativa en Navarra. La ausencia de una técnica de muestreo que respete los porcentajes de estudiantes matriculados en los distintos modelos y en los centros de distinta titularidad, hace inviable la posibilidad de obtener conclusiones al respecto.

Sin ir más lejos, se pueden comparar las características de la muestra con los datos de la Memoria del Curso Escolar 2013/2014 del Gobierno de Navarra (DEGN, 2014). Según los datos de la Memoria, las características de la matriculación de los estudiantes difieren en gran medida de los datos de la muestra[1] (tabla 8.1).

[1]En la sección 7.1 se han explicado las características de los modelos lingüísticos en Navarra, denominados A, D y G. Los modelos A y D son mixtos y simétricos uno del otro. Los estudiantes del modelo A cursan todas las asignaturas en castellano, y tienen una asignatura complementaria de lengua y literatura vasca. Los estudiantes del modelo D cursan todas las asignaturas en euskera, y tienen una asignatura complementaria de lengua y literatura castellana. El modelo G es monolingüe, en castellano.

Tabla 8.1: Datos de matriculación curso 2013/2014.

	Sistema educativo	Muestra
Titularidad pública	64,13 %	81,8 %
Titularidad concertada	35,87 %	18,2 %
Estudia ESO en modelo G	64, 85 %*	46,6 %
Estudia ESO en modelo D	24, 63 %*	53,4 %

* El 10,52 % restante estudia en modelo lingüístico A

Por todo ello, no es posible explicar las diferencias constatadas en los resultados de la experimentación atendiendo exclusivamente a los modelos y a las titularidades de los centros educativos. En todo caso, las explicaciones son de tipo sociológico y responden a aspectos como, por ejemplo, la vinculación de docentes particulares en el empleo de modelos dinámicos en su quehacer diario en los centros, las circunstancias sociológicas de cada centro educativo, la motivación y la cohesión de cada grupo de estudiantes, etc.

En particular, se puede afirmar que los estudiantes y los docentes que estudian en modelo D sienten una mayor vinculación afectiva con el sistema público, dado que pertenecen a un segmento minoritario dentro del sistema educativo (un estudiante de cada cuatro estudia en modelo D). Además, los centros de modelo G que mejores resultados obtienen en pruebas de evaluación diagnóstica pertenecen a la red privada, y esta no se ve suficientemente reflejada en la muestra analizada.

8.1.2. El género en las tareas T1 y T4

En la muestra de la experimentación, existen pequeñas diferencias en la proporción entre chicos y chicas en los distintos centros educativos, y en el rendimiento de los mismos en función del género. Es decir, hay un menor número de mujeres que de hombres, y el rendimiento femenino es ligeramente superior al masculino, sin que esta diferencia llegue a ser estadísticamente significativa: los contrastes de hipótesis no permiten en ningún caso rechazar la hipótesis nula.

A pesar de que el contraste de hipótesis que se realiza en función del género no revela diferencias significativas entre las producciones de chicos y chicas en la muestra, las variables que miden la tasa de éxito o los fallos aritméticos en las tareas T1–T5 muestran siempre que el porcentaje de éxito de las mujeres es superior a la de los hombres. En particular, en las variables A1, BN1 y C1, la tasa de éxito femenino ronda el 100 %. De ello se puede concluir que la diferencia observada, a pesar de no ser estadísticamente significativa, sí es representativa de un mejor comportamiento femenino. El hecho de que en análisis de los datos no sea concluyente se debe a:

- *El tamaño de la muestra.* Un incremento en el tamaño de la muestra requiere de una menor diferencia dentro de ella para que ésta sea significativa.

- *Los bloques de la muestra.* El análisis por bloques de una muestra permite concluir que diferencias no significativas en los bloques de la muestra, lo son si éstas se mantienen en el conjunto de la muestra.

Además, en todas las modalidades se cursan las correspondientes asignaturas de primera y segunda lengua extranjera, y existen programas opcionales de inmersión lingüística en inglés.

En conclusión, las diferencias observadas en las producciones de los estudiantes en función del género no son significativas, pero sí son representativas, ya que se ajustan a una tónica general en el sistema educativo. Por un lado, el menor número de mujeres en la muestra es consistente con el número de mujeres que cursan las modalidades de ciencias en la Educación Secundaria: inferior al de varones; por otro lado, el rendimiento de las mujeres es mejor en estas modalidades. En 4º ESO, este hecho tiene su reflejo en la modalidad de la asignatura de matemáticas que eligen los estudiantes. En particular, el porcentaje de mujeres en la muestra de este estudio, que cursan la modalidad científico-tecnológica de matemáticas, es del 42,6 %.

Se puede comprobar que los resultados obtenidos en la experimentación (menor número de mujeres en la muestra y mejor rendimiento femenino) se pueden explicar atendiendo a la realidad social de Navarra. En efecto, las investigaciones de género en Navarra indican, en las últimas décadas, una evolución positiva en la proporción de mujeres que accede a cada una de las etapas educativas en Navarra (Fernández, 2003). Además, en promedio, las mujeres obtienen mejores resultados académicos, tienen mayor tasa de éxito y finalizan sus estudios en menos tiempo.

> “Las chicas continúan decidiéndose mayoritariamente por titulaciones menos valoradas en el mercado de trabajo. A pesar de este mejor rendimiento académico femenino, las chicas renuncian a los estudios y opciones académicas con más prestigio y cuyo valor de cambio en el mercado laboral es claramente superior. De ahí que, las desigualdades entre los géneros en el sistema educativo han [de] medirse no tanto por las probabilidades de éxito académico sino por las probabilidades de paso a determinados opciones y estudios.” (Fernández, 2003, 76)

No obstante, existen todavía diferencias en las modalidades de los estudios que selecciona uno y otro género, es decir: existen ramas “feminizadas” y “masculinizadas”. En particular, Fernández (2003) destaca que el género masculino copa los estudios técnicos y científicos, en las etapas educativas medias y superiores; mientras que las mujeres tienen mayor presencia en las ramas sanitarias y administrativas.

8.1.3. Gestión del tiempo

En los centros de Educación Secundaria, la gestión del tiempo contempla, además de la secuencia de unidades didácticas que se implementan a lo largo del curso académico, la secuencia detallada del tiempo dedicado en cada sesión a cada tarea. Además, la forma de evaluar la actividad del estudiante se basa en el *contrato didáctico de imitación* o de *reproducción formal* (Brousseau, 2007), según el cual, en matemáticas, “el docente puede exigir al alumno que re-escriba la respuesta correcta de un problema, que recite un enunciado, que imite un procedimiento, etc.” (Brousseau, 2007, 100). Como consecuencia, en el *contrato de imitación*, el estudiante puede traducir las órdenes del docente en actos, sin necesidad, en la resolución de las tareas propuestas, de aprender el significado del procedimiento que se pretende enseñar.

En función de este *contrato de imitación*, el docente quiere asegurar que se aprovecha el tiempo dedicado a cada actividad en cada sesión lectiva, y considera la inactividad del estudiante como una “pérdida de tiempo”. Así, el *contrato didáctico de imitación* incluye una cláusula que indica “perder el tiempo no es aceptable dentro del horario lectivo". El docente puede llegar a confundir "actividad" con "activismo", y puede solicitar al estudiante que esté constantemente generando actividad "visible" durante la sesión. Una forma de generar este "activismo" se sigue de una excesiva participación del docente en el aula. Así, la actividad que éste solicita a los estudiantes, pasa a ser una actividad excesivamente guiada, incluso incompatible con una actividad autónoma. En este contexto:

> "El alumno se compromete a efectuar la tarea definida a condición de que sea completamente reductible al repertorio que posee [...] El efecto didáctico de la ejecución de la tarea está asegurado solamente por las creencias del profesor o la cultura." (Brousseau, 2007, 100)

A diferencia de lo que dicta la cláusula "pérdida de tiempo" del *contrato didáctico de imitación*, en el desarrollo de las sesiones MD se ha observado que los estudiantes requieren de unos 20 minutos de exploración, antes de empezar a resolver la tarea propuesta. Durante este tiempo, el estudiante está en aparente falta de actividad. No obstante, bajo esa aparente inactividad, el estudiante está en *fase de acción*, y reflexiona sobre los pasos que debe seguir. Los estudiantes necesitan esa *fase de acción/exploración*, antes de producir por escrito una respuesta. El *contrato didáctico* en secundaria debe, pues, superar el *contrato de imitación o reproducción formal*[2], y debe contemplar estos momentos de exploración.

Por tanto, el docente no debe confundir actividad con activismo, y debe respetar el *tempo* de la clase. La excesiva participación del docente en la actividad de aula, puede generar, dentro de este "activismo guiado", un efecto Topaze (sección 3.10). Es decir, la actividad autónoma del estudiante desaparece y el nivel de intensidad de las orientaciones del docente (por ejemplo, una secuencia dinámica de "preguntas y respuestas") permiten a los estudiantes dar respuestas aceptables en el marco de la actividad siguiendo únicamente las indicaciones del docente, pero sin llegar a generar conocimiento.

Para garantizar que no sucedan fenómenos didácticos como el efecto Topaze, el docente debe respetar el ritmo de las *fases de acción* y la toma de decisiones por parte del estudiante. En el *momento de exploración* con la asistencia de un modelo dinámico, ante la perspectiva de tener que resolver una situación novedosa, el estudiante requiere de tiempo para ejecutar la toma de una decisión. El docente debe gestionar la incertidumbre de la sesión, por lo menos, en dos aspectos:

1. El estudiante manipula un modelo dinámico sin garantías de tener éxito en la exploración de la situación.

2. Es posible que el estudiante aplique un procedimiento algebraico no consolidado.

Por ello, es necesario asumir que la consolidación de una técnica algebraica ayuda al estudiante a gestionar el envite epistemológico que lleva en sí el *momento de exploración* de una tarea con la asistencia de un modelo dinámico. En la sección 8.1.4 se profundiza en la cuestión de la *prevalencia algebraica* y la *ruptura epistemológica* que implica en algunos estudiantes en la resolución de la tarea (Wilhelmi, 2007). Además, en la sección

[2]El contrato de imitación o reproducción formal ha extendido, en el sistema educativo, la creencia: "entiendo-olvido, veo-comprendo, hago-aprendo". Según Brousseau, esta posición extrema supone aceptar que el *contrato de imitación* es una panacea, cuando la didáctica ha mostrado reiteradamente que las soluciones globales a problemas generales son una quimera.

8.2, el análisis de la *idoneidad didáctica* pone de relieve la alta idoneidad *epistémica* del proceso de estudio.

Asimismo, con relación a la gestión del tiempo, se observa que no todos los estudiantes terminan el cuestionario completo. Hay estudiantes que tienen éxito en la realización de las primeras tareas de cada cuestionario (T1 y T2 en MD, y T4 en MA), pero no completan las últimas tareas de cada cuestionario (T3 en MD y T5 en MA). Además, en el diagrama estadístico implicativo (sección 7.3.12), se observa un comportamiento que guarda relación con este resultado: hay estudiantes que obtienen dos soluciones correctas en las primeras tareas, mientras que en las últimas se conforman con presentar soluciones numéricas de la variable x. Para estos estudiantes, el *contrato didáctico* ordena dentro de una escala cualitativa las distintas tareas, desde lo "importante" a lo "accesorio": ante la falta de tiempo, la *prevalencia algebraica* dicta que lo importante es aportar información algebraica, aunque ésta sea parcial.

Otros estudiantes no tuvieron éxito en las primeras tareas, y por ello, no tienen tiempo para completar el cuestionario entero. Estos estudiantes no dominan la técnica algebraica y tienen serias dificultades para manipular e interpretar la vista gráfica en el modelo dinámico. La ausencia de un *esquema de acción instrumentada* desmotiva a los estudiantes en la primera tarea, puesto que necesitan mucho más tiempo que sus compañeros para desarrollar la primera tarea de cada sesión, y muestran, además, síntomas de *bloqueos afectivos* (Guzmán, 2008). En particular, a la hora de manipular el modelo dinámico, los estudiantes se miran por encima del hombro y se identifican las emociones de vergüenza, apuro, miedo al ridículo o al "qué dirán". La fatiga de los estudiantes es notoria al final de la sesión, y una cuarta parte de los estudiantes deja en blanco las tareas T3 y T5.

8.1.4. Ruptura epistemológica y prevalencia algebraica

La práctica matemática escolar debe contemplar instrumentos para que los estudiantes puedan ejercer un control sobre sus producciones. Los instrumentos de control son variados, y la elección de uno u otro depende, en gran medida, del soporte material que se usa en cada proceso. Por ejemplo, en el soporte "papel", el control puede ser aritmético y algebraico: el estudiante comprueba los cálculos que ha realizado, o realiza cálculos por vías alternativas para cotejar los resultados. En el soporte "software dinámico", el estudiante puede realizar cálculos simbólicos en la ventana CAS, o puede representar la solución en la vista gráfica para discutir la coherencia de los valores obtenidos.

En la experimentación, se solicita a los estudiantes que ejerzan el control de su producción algebraica a partir de una representación gráfica de la situación en el modelo dinámico. En la consigna inicial, el docente solicita en primer lugar la representación gráfica de la situación. A continuación, el estudiante debe abordar la tarea por el procedimiento algebraico. Este uso del medio material Gráfico Cartesiano de Funciones (GCF; Lacasta, 1995; Lacasta y Pascual, 1998) permite la *previsión* y la *comunicación* de valores a través del soporte gráfico. Estas acciones se desarrollan atendiendo a los siguientes usos del medio GCF:

- *Ideograma.* Con la introducción de deslizadores en el modelo dinámico, se representa en la vista gráfica una función particular de la familia de funciones. Se estudian su representación global en función del valor de sus coeficientes: localización en el plano, ejes de simetría, puntos extremos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc.

- *Mensaje topológico*. Los ejes de coordenadas no presentan escalas, y se emplean ejes auxiliares ($y = x$, $y = -x$) como apoyo a la interpretación gráfica. De esta forma, el punto de intersección se localiza topológicamente, previamente al cálculo algebraico de sus coordenadas en el soporte de papel.
- *Ábaco*. La localización topológica del punto de intersección permite la utilización del eje de coordenadas como ábaco, para anticipar el valor de la solución y su comunicación.

El uso del soporte GCF permite, pues, la interpretación global (función como trayectoria) y la interpretación puntual (función como ábaco) del gráfico. Las dos interpretaciones se articulan, permitiendo el uso de la función para prever y anticipar. Así pues, la introducción del soporte gráfico tiene por objetivo garantizar que los estudiantes tengan a mano instrumentos para controlar su propuesta de resolución.

La secuencia de resolución solicitada a los estudiantes es similar en las tareas T1, T2 y T3, en la sesión en aula de ordenador (cuestionario MD), y en las tareas T4 y T5, en aula ordinaria (cuestionario MA), y el el objetivo de realizar la tarea en esta secuencia es que los estudiantes ejecuten una *fase de acción* previa a la ejecución algebraica. De esta forma, exploran la situación y pueden anticipar la existencia de soluciones, los signos de los valores numéricos, y con la ayuda de los ejes auxiliares, la posible simetría de los valores. En definitiva, con el diseño se pretende poner a disposición del estudiante un instrumento de control gráfico, previo a la producción algebraica.

No se ha medido con una variable específica la secuencia en la que el estudiante completa la plantilla. Es decir, no se puede saber con certeza el orden en el que el estudiante ha completado el cuestionario. Sin embargo, existen evidencias para concluir que los estudiantes, en general, resuelven primero el sistema por un procedimiento algebraico, y que la consolidación del procedimiento algebraico determina, en gran medida, el éxito en la tarea. A continuación, los estudiantes manipulan el modelo dinámico.

Este hecho se ha observado *in situ* por el docente auxiliar, en la sesión MD: hay estudiantes que completan la resolución en la plantilla, para luego enfrentarse al modelo dinámico. A pesar de que los estudiantes no muestran ninguna duda ni realizan ninguna pregunta a este respecto, la mayoría de los estudiantes resuelve la tarea T1 primero por un procedimiento algebraico mecanizado, y a continuación, explora la situación con el modelo dinámico. Es decir, una vez que el estudiante tiene una producción escrita de su resolución, explora el modelo dinámico sobre esa base.

En algunos casos, el estudiante resuelve la totalidad de las tres tareas propuestas por el procedimiento algebraico, antes de enfrentarse al modelo dinámico. Este hecho también se ha valorado en la sección 8.1.3, en términos de gestión de tiempo. A fin de cuentas, en la Educación Secundaria *el contrato didáctico de imitación o reproducción formal* prima la resolución algebraica en detrimento de las resoluciones gráficas o literales; ello provoca en el estudiante la necesidad de garantizar, ante todo, la parte "importante" de la resolución, es decir, aquella parte que el estudiante supone que el docente va a valorar más: la corrección de los cálculos aritméticos y algebraicos.[3]

Estos hechos son indicadores de dos fenómenos: la *ruptura epistemológica* y la *prevalencia algebraica*. Es decir, la utilización de técnicas numéricas, funcionales o gráficas

[3] Esta concepción de la práctica matemática escolar guarda relación con el *contrato pedagógico* clásico, según el cual: (1) el docente propone una tarea, (2) el alumno la realiza, y (3) el docente la evalúa. De esta forma, la *validación* de las acciones del estudiante es *externa*.

que exceden el ámbito de la manipulación de monomios por transformaciones algebraicas, supone una *ruptura epistemológica* en el proceso de estudio (Wilhelmi, 2007). La *prevalencia algebraica* observada en los estudiantes está vinculada al paso de una técnica rutinizada basada en transformaciones algebraicas, a otra técnica que implica un envite epistemológico. En la sesión MA este hecho se infiere de las producciones de los estudiantes. Por ejemplo, se observa que los estudiantes utilizan los valores resultantes de la resolución algebraica para tabular valores en la tabla y construir la gráfica; sin embargo, si se hubieran seguido las indicaciones del docente, esta información debería ser posterior a la construcción de la tabla.

Se constata, pues, la *prevalencia algebraica* de los estudiantes, pero la resolución es mecánica y no viene acompañada de instrumentos de control, ni aritméticos ni algebraicos. Es decir, el estudiante no utiliza los instrumentos de control típicos del soporte "papel": no se comprueban los cálculos realizados, no se utilizan vías alternativas para cotejar los resultados y no se discute la validez de los valores numéricos logrados.

Los instrumentos de control, aritméticos y algebraicos, son asequibles para el estudiante y se basan en conocimientos previos que éste tiene. Sin embargo, los comportamientos de los estudiantes indican la falta de integración en la enseñanza de medios de control de las técnicas aprendidas. En general, ponen de relevancia la existencia de un fenómeno de *irresponsabilidad matemática*, que tiene su origen en la organización de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria, y en particular, en el *contrato didáctico de imitación o reproducción formal.*

Estos resultados son típicos en el sistema educativo tradicional y son previsibles atendiendo a la literatura. La forma clásica de organizar el *medio didáctico* condiciona las prácticas operativas y discursivas, enfatiza los procedimientos algebraicos estandarizados, y en el *contrato pedagógico* tradicional, se requiere del estudiante la reproducción de una técnica de resolución previamente presentada por el docente. De esta forma, la introducción de un medio gráfico no facilita *per se* la comprensión de la tarea, y los resultados contradicen la idea ingenua de que, en el medio material GCF, el comportamiento de las funciones es transparente para el estudiante.

> "La presentación gráfica no parece desempeñar un papel significativamente distinto de los otros modos de presentación de la función, siendo el concepto matemático lo fundamental en la resolución de problemas [...] El gráfico no basta para soportar por sí mismo los conocimientos relativos a las funciones que representan, de una manera especial en el caso de las relaciones entre la función lineal y la proporcionalidad" (Lacasta y Pascual, 1998, 172).

El éxito en la ejecución de la tarea depende, pues, de la corrección en los cálculos aritméticos y algebraicos. Sin embargo, la mecanización del proceso algebraico y la carencia de un procedimiento algebraico controlado, provoca este tipo de errores. Si los errores son anecdóticos (figura 3.3, página 48), no ponen en peligro aprendizaje (por ejemplo, en figura 7.19, página 219, el estudiante comete una equivocación en la presentación final del resultado, sin mayores consecuencias). Sin embargo, el porcentaje de estudiantes que comete errores aritméticos y algebraicos reproducibles en la experimentación (variable C12), supera en todos los casos el 10 % (llegando al 30 % en la tarea T2) y compromete gravemente la eficacia y estabilidad del método de resolución. El porcentaje de estudiantes que comete errores aritméticos y algebraicos guarda relación con el campo numérico empleado en la tarea, y se discute en la sección 8.1.5.

El diseño de la experimentación, la gestión de las sesiones y el modo en el que se han recogido los resultados, no permiten determinar si los errores aritméticos y algebraicos observados (variable C12) son recurrentes ni, por lo tanto, si son indicadores de la existencia de un *obstáculo* (sección 3.9). Sin embargo, diversos autores (Chamorro, 2005; Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006) constatan que en el paso de la aritmética al álgebra y en los procesos de generalización de propiedades numéricas y simbólicas, el aprendizaje de las reglas de manipulación algebraicas son problemáticas y chocan con conocimientos numéricos previos, generando *obstáculos epistemológicos*, lo que sugiere la necesidad de un análisis detallado de este aspecto en futuras investigaciones.

La comparación de las variables internas B10 y C9 refuerza la presencia de la *prevalencia algebraica*, y apoya la idea de que el estudiante resuelve primero por el procedimiento algebraico, y luego, representa el gráfico por el modelo dinámico: la *instrumentalización* del modelo dinámico no supera la mitad de los estudiantes, en ninguna de las tareas; sin embargo, el porcentaje de estudiantes que presenta soluciones algebraicas supera al porcentaje de estudiantes que instrumentaliza el modelo dinámico, en todas las tareas (tabla 8.2). De forma anecdótica, pero en la misma línea, la variable A2 indica que una minoría de estudiantes ejecuta la resolución algebraica en la primera casilla de la plantilla, haciendo caso omiso de las indicaciones de resolución. La constatación explícita de este hecho en las plantillas de resolución es minoritaria, pero deja en evidencia la tendencia de los estudiantes a una resolución mecánica, basada en la pura algebra.

Tabla 8.2: Indicadores de prevalencia algebraica.

Var	T1	T2	T3	T4	T5
B10 / BN12	49,4 %	31,1 %	28,4 %	54,1 %	37,2 %
C9	70,3 %	41,2 %	33,1 %	74,3 %	53,4 %

Los estudiantes, pues, aplican una técnica algebraica mecanizada, pero no tienen instrumentos para controlar la validez del proceso. En la sesión MA de la experimentación, tienen a mano los instrumentos “papel”, “software de geometría dinámica” y “tabulación de valores con calculadora científica”, pero la consolidación de la técnica algebraica es la única que garantiza de manera generalizada el éxito en la tarea. Es decir, a lo largo de la etapa de Educación Secundaria, se entrena al estudiante en la aplicación de procedimientos algebraicos cerrados, de forma que estos estudiantes muestran de forma global un *esquema de acción instrumentada* sobre el soporte de “lápiz y papel”. A pesar de que las técnicas algebraicas se estudian sin instrumentos de control, y en ausencia de situaciones que permitan dar un contexto de validación, la utilización de una técnica consolidada ofrece al estudiante ciertas ventajas:

- Una ejecución ágil e inmediata permite al estudiante avanzar rápidamente en la resolución de una tarea. Esto ocurre, sobre todo, cuando se trata de una *tarea de consolidación*, es decir: la tarea se ubica dentro de una categoría de problemas de una misma dificultad, con relación a los contenidos previos y a las técnicas que el estudiante debe movilizar para resolver dicha tarea.

- El estudiante no tiene que evaluar, paso por paso, las decisiones tomadas dentro de una *heurística* particular de resolución de problemas.

La constatación de la *prevalencia algebraica* y los resultados obtenidos en torno a la *gestión del tiempo* van en la misma dirección. Los resultados indican la conveniencia de que el estudiante domine la técnica algebraica, antes de un *momento de exploración* con un modelo dinámico. Es decir, la técnica algebraica da seguridad al estudiante, y éste se enfrenta con más garantías de éxito a una tarea de exploración en un problema que pertenece a la misma categoría y cuya resolución contempla *fases de formulación y validación*.

8.1.5. Influencia del campo numérico

En el capítulo 6 de análisis *a priori*, se han descrito las distintas fases que tiene la tarea con relación al campo numérico en el que se deben realizar los cálculos en cada tarea. La elección del campo numérico se detalla en la tabla 6.4. La resolución algebraica requiere:

1. La manipulación de una ecuación implícita.
2. La obtención de la ecuación explícita correspondiente.
3. La aplicación del método de igualación.
4. La resolución de una ecuación de segundo grado.
5. La representación de la solución de la tarea.

En la sesión en aula de ordenador (MD), los estudiantes resuelven las tareas T1, T2 y T3. En la tarea T1, las cinco fases de la resolución se ejecutan sobre el conjunto de los números enteros. En la tarea T2, las fases (2), (3) y (5) requieren la manipulación de números racionales en forma de fracción o en desarrollo decimal aproximado. En la tarea T3, además, la fase (1) también requiere de la manipulación de números racionales. Asimismo, en la sesión en aula ordinaria (MA), los estudiantes resuelven las tareas T4 y T5. En la tarea T4, las cinco fases de la resolución se ejecutan, al igual que en la tarea T1, sobre el conjunto de los números enteros. En la tarea T5, la fase (5) requiere la manipulación de números racionales.

El campo numérico es un factor determinante que explica las variaciones en la tasa de éxito, a la hora de obtener soluciones correctas en la resolución algebraica, en las diversas tareas. En la tabla 8.3 se observa, por un lado, un descenso en las variables que miden la obtención correcta de resultados (variables C8 y C10), y por otro lado, un incremento en los errores aritméticos y algebraicos cometidos (variable C12) en función del campo numérico. Es decir, la progresiva presencia del campo numérico racional en cada una de las cinco fases de la resolución, disminuye la tasa de éxito e incrementa los errores.

Tabla 8.3: Influencia del campo numérico.

Var	T1	T2	T3	T4	T5
A1	92,6 %	73,0 %	65,5 %	89,2 %	81,1 %
C8	64,2 %	27,0 %	27,0 %	61,5 %	27,7 %
C10	68,2 %	29,7 %	31,8 %	71,6 %	50,0 %
C12	19,6 %	31,1 %	12,8 %	9,5 %	17,6 %

El descenso progresivo de la variable A1 es observable en las dos sesiones, MD y MA, es decir, en las respectivas progresiones T1 $\rightarrow$ T2 $\rightarrow$ T3 y T4 $\rightarrow$ T5. En la sesión MD, el descenso es algo mayor que en la sesión MA. El mayor descenso en la sesión MD indica las dificultades que tienen los estudiantes incluso para obtener correctamente la expresión explícita de una ecuación en coeficientes racionales (fase (1) de la resolución). Es decir, en las tareas T1, T4 y T5, la manipulación de la expresión explícita de la ecuación no requiere la manipulación de coeficientes racionales, y en estos casos, el porcentaje de éxito en la variable A1 supera el 80 %. Sin embargo, en las tareas T2 y T3, se requiere manipular coeficientes racionales para acceder a la expresión explícita de las ecuaciones y seguir adelante con la tarea; en ambos casos, el porcentaje de éxito de la variable A1 baja del 75 %.

La progresiva introducción del campo numérico racional afecta también a las variables C8 y C10, que miden, respectivamente, la obtención de dos soluciones o una solución correctas. El porcentaje de estudiantes que obtiene dos o una solución, baja a más de la mitad por efecto de la ampliación del campo numérico. Por ejemplo, en las tareas T1 y T4, la variable C8 presenta una mayor tasa de éxito (61-64 %), debido a que las tareas presentan soluciones en el conjunto de los números enteros. Sin embargo, en las tareas T2, T3 y T5, la misma variable C8 presenta una tasa de éxito que no alcanza la tercera parte del estudiantes (27-28 %), debido a que, en estas tareas, por lo menos una de las soluciones pertenece al conjunto de los números racionales (no enteros). En la tarea T5, una de las soluciones es entera y la otra racional. Por ello, el porcentaje de éxito de la variable C10 se mantiene en el 50 %.

La variable C12 mide la cantidad de estudiantes que comete errores aritméticos y algebraicos en la resolución de la tarea. Tomando como referencia las tareas T1 y T4, se observa un incremento en el porcentaje de estudiantes que comete errores en las tareas T2 y T5. Los resultados de la tarea T3 no siguen la progresión antes mencionada, y atendiendo a las variables C10 y C12, se observa que los resultados son atípicamente mejores. Este hecho se explica atendiendo a la *memoria didáctica* de la clase: los valores numéricos de la solución, 1/2 y 3/2, son fracciones positivas sencillas y usuales en el contexto escolar.

Las variables C4, C5 y C8 miden, respectivamente, la obtención de las soluciones 1, 2 o ambas soluciones, en cada tarea (tabla 8.4). Los resultados obtenidos en estas variables y su discusión, junto con el análisis estadístico-implicativo, permiten, además, estudiar el nivel de discriminación del campo numérico en la competencia matemática.

Tabla 8.4: soluciones en función del conjunto numérico de referencia.

	T1	T2	T3	T4	T5
C4	68,2	29,1	29,7	68,9	48,0
C5	64,2	27,7	29,1	64,2	31,1
C8	64,2	27,0	27,0	61,5	27,7

Así, por ejemplo, en la tarea T4, la solución 2 (solución entera, $(4, 10)$) es menos frecuente que la solución 1 (solución entera simétrica, $(2, -2)$). La figura 7.25 muestra el diagrama de Venn-Euler de la situación. De hecho, hay una implicación al 95,8 % de la obtención de dos soluciones correctas (variable $C8$) a la obtención de la solución 2 (variable C5), y sin embargo, al 89,3 % a la solución 1 (variable C4).

$$T4: \quad P(C4|C5) = \frac{P(C8)}{C5} = \frac{61,5}{64,2} = 95,8$$

$$T4: \quad P(C5|C4) = \frac{P(C8)}{C4} = \frac{61,5}{68,9} = 89,3$$

Esto quiere decir que los estudiantes que determinan la solución 2 también determinan la solución 1 al 95,8 %, reforzando la hipótesis de que este cálculo posee un mayor nivel de discriminación en la competencia matemática. La solución 2 es menos frecuente, puesto que no es simétrica y se "aleja del origen".

En la tarea T5, la solución 2 (solución racional, $(7/3, -22/3)$) es menos frecuente que la solución 1 (solución entera $(0, 2)$). La figura 7.29 muestra el diagrama de Venn-Euler de la situación. Hay una implicación al 89,1 % de la obtención de dos soluciones correctas a la obtención de la solución 2, y sin embargo, al 57,7 % a la solución 1.

$$T5: \quad P(C4|C5) = \frac{P(C8)}{C5} = \frac{27,7}{48,0} = 89,1$$

$$T5: \quad P(C5|C4) = \frac{P(C8)}{C4} = \frac{27,7}{31,1} = 57,7$$

La solución 2 (fraccionaria y negativa en la ordenada), es mucho más representativa del nivel de competencia matemática. De hecho, al mezclar "fracciones" y "números con signo", la solución excede del horizonte de maestría convencional en la Educación Secundaria.

Las implicaciones obtenidas con relación a las variables C4, C5 y C8, a partir del análisis estadístico-implicativo, no implican necesariamente una relación de causa-efecto (Lacasta y Wilhelmi, 2008). Es decir, el hecho de que A implique B, no determina necesariamente un orden preferente en la enseñanza de A o B. Por ejemplo, en la tarea T2, la solución 1 es entera, $(2, -2)$, y la solución 2 fraccionaria, $(58/9, -500/27)$. La solución fraccionaria implica la solución entera al 97 %, pero este hecho no implica un orden en la docencia.

> "The results in SIA are static, that is, thay represent a momento of the school reality. The fact 'p implies q' doesn't mean that 'p happens before q', neither that 'p causes q'. In this case, the conclusion is that only some competent students in [p] reach [competence q]" (Lacasta y Wilhelmi, 2008, 112)

Los estudiantes de 4º ESO conocen los distintos conjuntos numéricos, sus propiedades y sus características. Los conocimientos previos de los estudiantes incluyen los siguientes objetos matemáticos: la noción de número racional, las operaciones en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y sus propiedades, y las distintas representaciones del número racional, como fracción y decimal aproximado.

En particular, los estudiantes conocen los procedimientos para transformar la representación de un número racional, de fraccionario a decimal aproximado, y viceversa. En la experimentación, los coeficientes de las ecuaciones tienen distinta representación, en función del soporte material: la representación en papel es fraccionaria; mientras que en el modelo dinámico, los deslizadores representan los coeficientes como valores decimales aproximados. En este contexto, la *instrumentalización* del modelo dinámico requiere la transformación de coeficientes fraccionarios en decimales aproximados.

En las tareas T2 y T3, los comportamientos de los estudiantes muestran que el conocimiento previo "transformar la representación de un número racional" no es operativa para cerca de una cuarta parte de los estudiantes. Estos estudiantes tienen dificultades para identificar una situación que requiere el cambio de una representación fraccionaria a una representación decimal. Esta carencia queda reflejara en la variable A1, y deja en evidencia el fenómeno de la *atomización del conocimiento*. Según este fenómeno, los contenidos algebraicos se trabajan de forma aislada y atomizada a lo largo de la Educación Secundaria, con la ilusión de que el estudiante "automáticamente" sabrá identificar y aplicar este conocimiento cuando se presente ante él en unas situación de aprendizaje.

La dificultad que tienen los estudiantes a la hora de manipular un deslizador en el modelo dinámico, indica también la naturaleza *instrumental* del artefacto *deslizador*. Es decir, las herramientas del modelo dinámico requieren de una instrucción previa, aun siendo intuitiva su utilización. Un artefacto (sección 2.1) puede ser un objeto físico o material, pero también un objeto evocado, que puede ser utilizado en la resolución de una tarea determinada. La instrucción en el manejo del artefacto (los conocimientos teóricos necesarios para su utilización técnica, la identificación de tareas que permite resolver, la valoración de su uso ante otro tipo de artefactos, etc.) provoca un cambio en la relación instrumental del usuario con el artefacto, que pasa a ser un instrumento. En este sentido, los conocimientos previos del estudiante permiten instrumentalizar el deslizador en el conjunto de los números enteros, pero en el conjunto de los números racionales no deja de ser un *artefacto* para muchos estudiantes

En definitiva, los resultados muestran que los estudiantes tienen dificultades a la hora de manipular las distintas representaciones de un número racional, y que algunos conocimientos previos sobre el número racional no son operativos en situaciones de resolución de ecuaciones. Los errores aritméticos y algebraicos que cometen los estudiantes en el conjunto de los números racionales no son anecdóticos y son reproducibles. En este contexto, Sáenz de Cabezón (2008) aporta datos experimentales de la dificultad intrínseca de la construcción y comunicación de los algoritmos con fracciones y su uso.

> "El hecho de haber observado errores similares en 1º y 2º ESO es indicativo de que el 'reconocimiento' de un algoritmo como correcto no garantiza su utilización. No es suficiente la intervención puramente prescriptiva del profesor ('esto es así'), sino que el error reaparece de manera recurrente. En resumen, estamos ante un obstáculo epistemológico." (Sáenz de Cabezón, 2008, 87)

Asé pues, el aprendizaje de la manipulación simbólica de fracciones y sus operaciones genera un *obstáculo de origen epistemológico*, y por su naturaleza, los errores de manipulación de expresiones con fracciones deben reaparecer periódicamente.

A este obstáculo epistemológico hay que añadir otro de origen didáctico, que tiene su base en una incorrecta integración de los contenidos matemáticos a la hora de organizar la actividad matemática en el aula. El fenómeno de la *atomización del conocimiento* provoca el aprendizaje aislado de técnicas y manipulaciones. Estas técnicas se aplican en casos ideales aislados y en ausencia de un contexto de uso variado. De esta forma, el estudiante no reconoce el conocimiento y no identifica los momentos en los que su uso es pertinente. Por ejemplo, el estudiante debe representar un número racional en el *deslizador*, y para ello, debe traducir la representación fraccionaria en decimal aproximada; a pesar de que el estudiante conoce el procedimiento que cambia la representación del número racional, no identifica el momento de uso.

En la experimentación se puede constatar que el campo numérico tiene un efecto directo en la tasa de éxito de la tarea y en los errores aritméticos y algebraicos que cometen los estudiantes. La determinación del campo numérico es, pues, un elemento de gran importancia, que determina, en gran medida, la correcta ejecución de la tarea por parte del estudiante. Si los estudiantes tienen dificultades para realizar cálculos en el conjunto de los números racionales, el docente puede tomar la decisión de presentar a los estudiantes tareas que solo impliquen la manipulación del campo numérico entero, con el ánimo de evitar el fracaso generalizado de los estudiantes, pero generando sesgos en el aprendizaje de las matemáticas.

Para evitar estos sesgos en el aprendizaje de las matemáticas, el docente no debería utilizar el campo numérico como atajo a la hora de diseñar las tareas propuestas a los estudiantes. Es decir, simplificar el campo numérico con la intención de facilitar la tarea a los estudiantes genera fenómenos didácticos que no son deseables en el aprendizaje de las matemáticas: en este caso, el docente provoca un efecto Jourdain (sección 3.10).

Si la aplicación de una técnica o procedimiento es excesivamente compleja para el estudiante, se deben integrar en la situación los objetos matemáticos que ayuden a resolver la tarea. Se requiere para ello la identificación de los conocimientos previos necesarios para afrontar la situación y la articulación de los objetos matemáticos, de forma que permitan la construcción de un significado personal y aporten al estudiante instrumentos para controlar y validar su razonamiento. El éxito del estudiante en la tarea se consigue, de esta forma, a partir de una mejora en las condiciones del aprendizaje, en lugar de la simplificación de un aspecto particular del problema (en este caso, el campo numérico), con la intención de hacer asequible el problema al estudiante, pero a su vez, limitando su alcance y contextos de uso.

De todas estas consideraciones se pueden sacar las siguientes implicaciones:

- La simplificación del campo numérico racional al entero no permite al estudiante poner en funcionamiento sus conocimientos previos sobre el campo numérico racional, haciéndolos innecesarios. Si el docente no presenta al estudiante situaciones variadas en las que éste tenga que poner en funcionamiento los conocimientos numéricos racionales, el estudiante comete errores aritméticos y algebraicos no anecdóticos y reproducibles.

- Una situación de resolución de ecuaciones que contemple la manipulación de números racionales en sus distintas representaciones, requiere de una gestión del tiempo adecuada. Al ampliar el campo numérico entero al racional, sería conveniente reducir el número de ejercicios planteados a los estudiantes, para potenciar de esta manera la autonomía y control de los estudiantes en la resolución de estas tareas.

- El estudiante debe afrontar sistemáticamente problemas y situaciones en las que participan coeficientes racionales, para superar así los obstáculos relacionados con el número racional. Por extensión, esta afirmación es también válida al extender el campo numérico a los sucesivos conjuntos numéricos.

8.1.6. Interpretación del sistema como una ecuación

En los resultados de la experimentación, se observa que el porcentaje de estudiantes que interpreta el sistema como "una ecuación en una variable", está entre el 15 % y el 25 %, en función de la tarea. Estos estudiantes se conforman con presentar soluciones de la variable x, a modo de solución numérica, y sin interpretación como par ordenado.

Las situaciones que se proponen a los estudiantes son sistemas de ecuaciones en dos variables, y las soluciones a los sistemas se deben representar, gráficamente, como puntos en dos coordenadas, x e y, en el plano cartesiano. Aun así, cerca de una cuarta parte de los estudiantes no interpreta la tarea como un sistema de ecuaciones. En su lugar, estos estudiantes aplican las técnicas de resolución para obtener la solución de "una ecuación en una variable". Así, la variable y es una suerte de variable auxiliar, que permite obtener los valores de la variable x, la verdadera incógnita a resolver. En su interpretación, la técnica de igualación permite obtener una ecuación en una sola variable. De esta manera, el significado de la letra y se reduce a un artificio para obtener la verdadera incógnita de la ecuación.

La variable C6 mide el número de estudiantes que han mostrado este comportamiento en la resolución de las situaciones. La tabla 8.5 muestra los porcentajes de la variable C6 para cada tarea. El diagrama implicativo de la figura 7.37 (página 248) complementa estos resultados, y permite, además, relacionar estos comportamientos con otras variables internas del estudio.

Tabla 8.5: Interpretación en una variable.

	T1	T2	T3	T4	T5
Variable C6	24,3 %	25,7 %	17,6 %	14,9 %	19,6 %

En el diagrama implicativo, la variable C6 aparece unida, paradójicamente, a las variables que miden el número de soluciones obtenidas y el número de soluciones correctas obtenidas. En este sentido, se observa que los estudiantes que presentan dos valores de x como solución, son estudiantes que no consiguen obtener la solución 1 del sistema, es decir, son los estudiantes que, de alguna forma, no consiguen obtener la primera solución del sistema, y optan por presentar lo que ellos consideran una "solución parcial" del sistema; se quedan a medio camino de la resolución y presentan dos valores de una sola variable.

En las tareas T4 y T5, la variable C6 aparece vinculada a las variables BN11, BN12 y BN13, que miden los comportamientos numéricos con relación a la tabla de valores. Así, los estudiantes que obtienen dos valores de x obtienen a su vez soluciones coincidentes en la tabla de valores, pero presentan esta solución en su propuesta. Por efecto del *contrato didáctico de imitación o reproducción formal*, el estudiante considera que el estatus de la solución obtenida en las tablas es inferior a una resolución algebraica, es decir, el estudiante considera que la solución obtenida en las tablas no se ajusta a los requerimientos del docente. En todo caso, los comportamientos de interpretación "numérica" y "no-puntual" de la solución están vinculados al soporte tabular de la representación gráfica.

A la hora de buscar una explicación a estos comportamientos, se identifican tres aspectos interrelacionados que generan el fenómeno descrito:

1. *Resolución aritmética.* El análisis del diagrama implicativo permite identificar el primer factor, que guarda relación con la resolución de tipo aritmético. En efecto, en el diagrama implicativo, la utilización de tablas de valores y técnicas para la representación, punto por punto, de una función, aparece relacionada con el comportamiento que interpreta un sistema de ecuaciones como una ecuación en una incógnita.

Es decir, el estudiante que no interpreta de forma global el sistema de ecuaciones como una expresión analítica o fórmula (*intensivo*) en dos dimensiones, trata sin éxito de cumplir con los objetivos de la tarea a partir de cálculos de valores particulares (*extensivos*).

2. *Obtención de valores numéricos en fórmulas (descriptor C1)*. El descriptor C1 (sección 5.4) describe la obtención de valores sencillos en fórmulas y en el currículo aparece únicamente en tercer ciclo de EP y primer ciclo de ESO. El descriptor desaparece del currículo en segundo ciclo de ESO, donde no se contempla este tipo de tabulación numérica puntual, existiendo, pues, una *atomización* y una ruptura en el uso operativo de este contenido.

   La obtención de valores numéricos en fórmulas es un conocimiento previo que se ha dejado de utilizar de forma operativa, y genera comportamientos extraños en los estudiantes: hay estudiantes que encuentran una solución coincidente en ambas tablas, y sin embargo, no la identifican como válida. Es decir, los estudiantes dejan de utilizar los contenidos relativos al descriptor C1 al resolver ecuaciones por técnicas basadas en operaciones algebraicas.

   En este sentido, parte de los estudiantes relaciona la tabulación de puntos con comportamientos numéricos previos. En todo caso, queda claro que el currículo interrumpe un contenido matemático que es válido también en cursos posteriores, y la discontinuidad del descriptor C1 en segundo ciclo de ESO explica parte del comportamiento observado. Por ello, es conveniente no desvincular los contenidos relativos al descriptor C1 de los sucesivos cursos de ESO, para mitigar el comportamiento observado.

3. *Gestión del tiempo*. Los resultados indican que la gestión del tiempo también incide en la presentación de dos valores numéricos de la variable x. En efecto, cuando la sesión llega a su fin, los estudiantes que anticipan que no tienen tiempo de finalizar la última tarea, se conforman con presentar dos soluciones numéricas en lugar de dos parejas de soluciones. El motivo se fundamenta en la memoria didáctica, que privilegia la resolución algebraica. Además, el contrato pedagógico contempla que los docentes deben valorar respuestas parciales, que son indicadores de un "proceso", y los estudiantes tienen la convicción de que el docente valora positivamente la presentación de un resultado parcial de la solución, siempre que ésta sea algebraica.

   En estas condiciones, se debe reducir el número de tareas para que los estudiantes terminen con seguridad la tarea propuesta. Esto es especialmente necesario cuando la tarea implique la manipulación de coeficientes racionales, o donde la tarea presuponga momentos de manipulación o exploración.

8.1.7. Orden de ejecución de la tarea

Existen indicios para poder afirmar que el orden de ejecución de las tareas, es decir, el orden de utilización del *soporte material*, tiene influencia sobre la resolución. En efecto, la muestra de los estudiantes está separada en dos subgrupos, MD–MA y MA–MD. Por un lado, los estudiantes del grupo MD–MA, utilizan primero el soporte "software dinámico" y después el soporte clásico "lápiz y papel"; estos estudiantes resuelven las tareas en el orden:

$$(T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3) \rightarrow (T4 \rightarrow T5)$$

Es decir, los estudiantes del subgrupo MD–MA resuelven la tarea T1 en primer lugar. Sus compañeros del subgrupo MA–MD han realizado previamente las tareas T4 y T5, y utilizan primero el soporte clásico “lápiz y papel”, para luego utilizar el soporte “software dinámico”; estos estudiantes resuelven las tareas en orden:

$$(T4 \rightarrow T5) \rightarrow (T1 \rightarrow T2 \rightarrow T3)$$

Los estudiantes del subgrupo MA–MD resuelven, por tanto, la tarea T4 en primer lugar, y sus compañeros del subgrupo MD–MA han realizado previamente las tareas T1, T2 y T3. Es de esperar, pues, que los estudiantes de cada subgrupo muestren mejorías en su segunda sesión, con respecto a la primera. Los resultados indican que la mejoría tiene distintas características en cada subgrupo.

La mayor tasa de realización se da en las tareas T1 y T4, por ser estas tareas las primeras de cada sesión, y por ello, los contrastes de hipótesis se han realizado en estas tareas. Estos contrastes muestran evidencias estadísticas de la influencia del orden de resolución sobre las variables internas. Cada subgrupo muestra una mejoría estadísticamente significativa con respecto al otro subgrupo, pero en aspectos distintos.

En la tarea T1, los estudiantes del subgrupo MA–MD, (1) instrumentalizan de forma más eficaz el modelo dinámico y la representación gráfica, (2) argumentan con mayor coherencia la validez del resultado en sus argumentaciones, y (3) presentan resoluciones homogéneas. Es decir, los estudiantes que han realizado con anterioridad las tareas T4 y T5 en el aula ordinaria, muestran estas mejoras con respecto a sus compañeros, que ejecutan la tarea T1 sin instrucción previa de ningún tipo. Sin embargo, los estudiantes que tienen una instrucción previa y realizan las tareas T4 y T5 con anterioridad, no obtienen mejores resultados en la resolución algebraica.

En la tarea T4, los estudiantes del subgrupo MD–MA, (1) obtienen en mayor proporción dos soluciones algebraicas correctas. Es decir, aquellos estudiantes que han realizado previamente las tareas T1, T2 y T3, realizan mejores ejecuciones algebraicas siendo la diferencia estadísticamente significativa. Tal como se ha dicho, en la tarea T1 no se da la circunstancia simétrica. En la tabla 8.6 se resumen las mejorías relativas a cada secuencia de ejecución.

Tabla 8.6: Mejorías en la resolución de la tarea.

Subgrupo	Orden	Mejora significativa en la última tarea
MD - MA	T1 – T4	Obtiene dos soluciones correctas en T4
MA - MD	T4 – T1	Instrumentalización eficaz en T1 Argumentación coherente Resolución homogenea

Estos resultados del contraste de hipótesis son coherentes con el gráfico implicativo de la figura 7.36, en la cual se observa que la argumentación incorrecta (variable B8 en T1) tiene una mayor vinculación con la secuencia MD–MA. Además, los resultados obtenidos son coherentes con dos estudios realizados en el ámbito de este trabajo: el estudio piloto[4] de la sección 5.4.4; y la experimentación[5] del Anexo A realizada en Educación Primaria.

Implicaciones para la enseñanza

La discusión de los resultados permite dar una serie de indicaciones sobre cómo se deben diseñar las sesiones en aula ordinaria (MA) y en aula de ordenador (MD). Ponen de relieve, además, la importancia de la secuencia de utilización de los distintos soportes, y su relación con el tipo de aptitudes que mejoran los estudiantes en función del soporte y del orden de utilización. Es decir, los resultados de la experimentación muestran en qué manera influye el orden de los soportes empleados en las resoluciones de los estudiantes.

Los resultados apoyan la conclusión de que dentro de una misma categoría de situaciones, resulta ventajoso para los estudiantes la utilización de una técnica algebraica consolidada. Así, los resultados de la secuencia MA—MD indican que los estudiantes que consolidan una técnica algebraica, se desenvuelven mejor en las fases de formulación y validación. Por otro lado, los resultados de la secuencia MD—MA indican que los estudiantes que exploran una situación novedosa con la asistencia del modelo dinámico, obtienen con mayor facilidad dos soluciones correctas, una vez que trabajan la situación en el soporte de lápiz y papel.

La coherencia entre los resultados de la experimentación y los resultados de otros trabajos, perfila implicaciones para la enseñanza que serán atendidas en el capítulo final (página 275), y que constan de dos fases que optimizan el proceso de enseñanza. Pero antes de entrar a presentar la propuesta, y para complementar la discusión de los resultados, hay que tener en cuenta los indicadores de *idoneidad didáctica*.

En la sección 8.2 se procede a justificar el nivel de idoneidad del proceso de estudio implementado, en función de las dimensiones epistémica, mediacional y ecológica, en los cuales el nivel idoneidad es alto, y las dimensiones afectiva y cognitiva, en las cuales el nivel de idoneidad es media (figura 8.1). Los indicadores de idoneidad sirven, pues, para valorar la adecuación del proceso de estudio implementado, y además, permiten identificar los aspectos que permiten mejorar la propuesta inicial, en las dimensiones afectiva, cognitiva e interaccional, antes de implementar potencialmente una secuencia de estudio siguiendo el diseño de la experimentación.

---

[4]En la sección 5.4.4 se ha presentado un estudio piloto, previo a la experimentación, en la que docentes de secundaria en formación resuelven situaciones en las que se requiere la resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones, en las secuencias MA–MD y MD–MA. En este estudio, los docentes en formación muestran comportamientos similares a los estudiantes de ESO de la experimentación, con relación al orden de ejecución de la tarea. Así, los docentes en formación mejoran su argumentación cuando resuelven la tarea en la secuencia MA–MD. En el estudio piloto, la secuencia MD–MA no da buenos resultados. En ausencia de una técnica algebraica consolidada, el modelo dinámico ejerce de distractor, provocando resoluciones anómalas de los estudiantes. El estudio piloto no apoya la conjetura de que el modelo dinámico facilita *per se* el acceso a nuevas tareas, y refuerza la hipótesis de que los estudiantes requieren de un *esquema de acción* previo a la instrumentalización eficaz del *artefacto*.

[5]En el Anexo A se presenta una *situación didáctica* para el aprendizaje de un tópico geométrico, realizada con niños de 9–10 años. En esta experiencia, los niños alcanzan su límite de maestría aritmética en un problema de optimización de áreas con perímetro conocido, en soporte de “lápiz y papel”, siguiendo un diseño de *fases de acción*, *formulación* y *validación*. A continuación, los niños manipulan un modelo dinámico en un *momento de exploración* para obtener resultados numéricos inalcanzables, para ellos, por vías aritméticas y algebraicas. Las conclusiones de esta experiencia de aprendizaje son coherentes con los resultados de la experimentación, con relación a la secuencia MA–MD.

8.2. Idoneidad didáctica del proceso de estudio

La idoneidad didáctica sirve para analizar un proceso de estudio doble de clase. Aquí, el objetivo del análisis de la idoneidad trata las respuestas dadas por los estudiantes a la resolución de una situación-problema para la que no han tenido una instrucción previa, pero para la que disponen de conocimientos previos suficientes para afrontar su resolución. Estos conocimientos previos se han detallado en la sección 6.2.1.

En este sentido, la situación planteada a los estudiantes tiene su encaje temporal en la secuencia de las unidades didácticas del centro educativo. La experimentación se realiza, en función del centro educativo, entre los meses de noviembre y marzo. De esta forma, el momento de realización de las sesiones en cada centro se ha consensuado con los docentes titulares del centro, respetando el desarrollo del currículo en ese centro y asegurando el encaje temporal con respecto a los conocimientos previos previstos en la experimentación.

El diseño de la experimentación aporta como elemento novedoso la utilización de un medio material y de unos instrumentos que difieren de los habituales en los centros de Educación Secundaria, que condicionan la idoneidad didáctica en las distintas dimensiones.

8.2.1. Dimensión ecológica

El análisis de la tarea propuesta indica una *idoneidad ecológica* alta en el proceso de estudio. Las directrices curriculares de la etapa de ESO explicitan que los contenidos del tópico "resolución de ecuaciones" tienen una presencia nuclear dentro del bloque de contenidos algebraicos en 4º ESO. Estos contenidos están presentes en la implementación y el desarrollo de la situación.

La actividad de los estudiantes se ha monitorizado y evaluado atendiendo al tipo de resolución, los comportamientos mostrados, y adecuación y corrección de los argumentos empleados para justificar los resultados obtenidos. La evaluación de la actividad de los estudiantes responde a una necesidad de la investigación: no se trata de una evaluación de *proceso* o *final*, sino competencial, es decir, de evaluación de las competencias de los estudiantes explicitadas en el currículo de Educación Secundaria.

En las *fases de formulación* de la situación se requiere a los estudiantes que dejen una constancia argumental del proceso que han realizado y de la *validación* que han realizado de su proceso, en términos de *tratamiento* y *conversión*, al trasladar información entre soportes materiales. Estas fases fomentan la integración del lenguaje natural y simbólico, y la responsabilidad matemática de los estudiantes.

La situación contempla el uso de modelos dinámicos, en concordancia con las directrices curriculares, que establecen el uso de instrumentos informáticos, llegando a explicitar el uso del software de geometría dinámica, pero sin nombrar un programa específico. La integración de los soportes "lápiz y papel" y "software dinámico" y la transcripción de información de un soporte a otro, incrementa el potencial de los instrumentos, en comparación al uso exclusivo del medio informático (sección 2.2.5).

8.2.2. Dimensión epistémica

El análisis de la tarea propuesta indica una *idoneidad epistémica* alta. La situación o el problema que se presenta a los estudiantes amplía y complementa las propuestas habituales en los centros educativos, en los que los procesos algebraicos de resolución predominan sobre otras técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. De esta forma, los contenidos algebraicos se integran con contenidos de tipo funcional y analítico, que permiten un mayor control de la actividad matemática.

La situación requiere en su discusión la integración de enunciados y procedimientos fundamentales del tópico "resolución de ecuaciones". El proceso de resolución requiere la integración de los procesos *unitarios* "resolución de sistemas de ecuaciones lineales" y "resolución de la ecuación de segundo grado", en el *sistema* "resolución de sistemas de ecuaciones no lineales", con coeficientes que pertenecen a los conjuntos de los números enteros y racionales.

La resolución de la tarea propuesta supone un reto para el estudiante. En efecto, la tarea propuesta no forma parte una tarea de ejercitación, ni se resuelve de forma mecánica por el estudiante. El estudiante no ha recibido una instrucción previa en el tipo de tarea que tiene que resolver. Con ello, en la situación se asegura la *problematización del saber*. Además, el estudiante no está habituado a utilizar el software de geometría dinámica en clase de matemáticas, y la interacción con el *medio material* (toma de decisión y *feedback* sobre el instrumento GeoGebra) supone, asimismo, un reto para el estudiante.

Algunas de las herramientas que incluye el software de geometría dinámica son desconocidas para el estudiante. Por ejemplo, el estudiante no conoce, y debe negociar con el docente, un significado para los *deslizadores* del modelo dinámico. Estos deslizadores representan los parámetros que aparecen en las expresiones generales de las familias de ecuaciones y de funciones, y la negociación sobre su significado permite a los estudiantes progresar hacia los *niveles de algebrización* avanzados (del *nivel* 3 al *nivel* 4). De esta forma, el docente genera condiciones para que se pueda atender a la *memoria didáctica* del aula, cuando en etapas posteriores se refiera al instrumento *deslizador*, con relación a la interpretación y manipulación de parámetros en ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En la situación, los distintos objetos matemáticos (lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) se relacionan y conectan entre sí, y se identifican y articulan distintos significados (algebraicos y gráficos) que intervienen en la práctica matemática. De esta forma, se promueve el *tratamiento* y la *conversión* de los significados matemáticos en distintos soportes (sección 3.3).

8.2.3. Dimensión afectiva

Por regla general, los estudiantes tienen preferencia hacia las sesiones dinámicas, en las que las decisiones se ejecutan dentro de un cierto ritmo. La percepción que el estudiante medio tiene de una clase de matemáticas en Educación Secundaria dista de ser calificada como "rítmica". El aprendizaje de las materias científicas tiene un componente importante de reflexión, que pausa el ritmo con el que el estudiante avanza en la adquisición de nuevos conocimientos. Además, la materia de matemáticas es central en el currículo de Educación Secundaria, y lo natural es que se programen cuatro sesiones semanales.

Por ello, toda sesión de matemáticas que salga de la monotonía habitual genera interés en el estudiante, y es *a priori* fuente de motivación. El proceso de estudio propuesto a los estudiantes se desarrolla parcialmente en el aula de ordenadores, es decir, fuera del medio material ordinario, y genera interés en el estudiante por ser novedoso e inhabitual. A estas motivaciones hay que añadir el uso del ordenador. Los estudiantes son, hoy en día, *nativos digitales*, por lo que toda actividad que se desarrolle con elementos tecnológicos y pantallas tiene interés *per se*.

En el desarrollo de la experimentación no se hace distinción alguna entre estudiantes, y en la *fase de formulación* todas las opiniones y justificaciones se valoran por su valía. Los estudiantes saben que deben firmar su trabajo, pero esta medida se utiliza únicamente como incentivo en el desarrollo de la tarea y para que los estudiantes se esfuercen. Sin embargo, saben que no perderán el anonimato con el resto de sus compañeros.

El diseño de la situación dispone de mecanismos para que el estudiante realice una autovaloración de los argumentos que propone. De esta forma, se hace hincapié en la responsabilidad y la perseverancia, y se promueve que el estudiante se involucre y participe en la actividad que se le propone.

La situación permite al estudiante realizar conexiones entre los distintos objetos matemáticos que participan en la tarea, enlazando distintos aspectos de las matemáticas involucradas. Pese a ello, la *idoneidad afectiva* del proceso implementado se puede considerar media.

En efecto, la situación es adecuada para que el estudiante argumente sobre las relaciones internas de las matemáticas involucradas, pero no contesta a la presunta habitual del estudiante: ¿para qué sirven las matemáticas? Es decir, la situación no está diseñada para poner en relación las matemáticas con una utilidad directa en la vida cotidiana o en un contexto laboral.

El refuerzo de la dimensión afectiva del proceso de estudio pasa, en parte, por enlazar las relaciones intramatemáticas con aspectos de la vida cotidiana, para que el estudiante no rechace unos contenidos matemáticos que no interpreta como “reales”. De esta forma, se evita el rechazo o la fobia hacia las matemáticas, y se promueve la autoestima del estudiante. Atendiendo al componente emocional del proceso de estudio, cabe recordar que durante las sesiones en aula de ordenador (MD) se observan situaciones de bloqueo afectivo (sección 7.3.1). En particular, a la hora de manipular el modelo dinámico, se identifican las emociones de vergüenza, apuro, miedo al ridículo o al “qué dirán”.

8.2.4. Dimensión interaccional

La situación tiene un componente *adidáctico* (Brousseau, 2007) esencial, en el sentido de que no existe una instrucción previa en el manejo del modelo dinámico. Ya que los estudiantes deben interpretar sus acciones según las respuestas del medio matemático antagonista (Bloch, 1999).

Los docentes titular y auxiliar exponen el objetivo de la tarea al principio de cada sesión, junto con unas indicaciones de las técnicas y de los recursos de los que disponen para realizar la misma (sección 7.2.3). En este sentido, ambos docentes relacionan los contenidos matemáticos de la actividad con el tema de estudio, enfatizando los elementos clave para la resolución de la tarea.

La interacción entre estudiantes y docentes es fluida en todo momento. Al principio de la sesión, el docente aclara cualquier duda que los estudiantes puedan tener acerca de la consigna o la manipulación de los distintos soportes. Una vez iniciada la sesión, vuelven a surgir conflictos de tipo epistemológico, cognitivo o mediacional, y el docente responde en todo momento a los requerimientos del estudiante. La negociación del significado de los *deslizadores*, y la representación decimal en el modelo dinámico de coeficientes fraccionarios provenientes de cálculos algebraicos en papel, son ejemplos de esta interacción (sección 7.3.1).

A pesar de que las interacciones entre docentes y estudiantes son fluidas, la actividad de los estudiantes es autónoma e individual. Las consignas de la situación no incluyen unas directrices o una secuencia concreta de utilización de las herramientas del software, y tampoco hay una intención directa de instrucción informática: no se requiere al estudiante la *creación* de un modelo ni se le presuponen conocimientos informáticos previos (sección 1.2). El estudiante es un "usuario" del modelo dinámico, un usuario que *instrumentaliza* el modelo dinámico en un *momento de exploración* (sección 2.2). Esta manipulación permite al estudiante realizar conjeturas, investigar propiedades y validar el resultado obtenido. Estas son características de la *situación adidáctica* (Brousseau, 2007), en la que los estudiantes asumen la responsabilidad de su aprendizaje. A su vez, por el diseño de la situación y por el objetivo de la experimentación, la actividad de los estudiantes es principalmente autónoma.

La ausencia de diálogo entre los estudiantes se debe entender e interpretar dentro del diseño de la experimentación. Llegados a este punto, hay que poner de relieve la importancia de la efectividad de las intervenciones, antes de la cantidad. En el análisis de los resultados (sección 8.1.3) se ha explicado cómo en el marco del *contrato didáctico de imitación o reproducción formal*, el docente interpreta la ausencia de "activismo" como una pérdida de tiempo injustificable en la gestión del tiempo del aula.

La situación no contempla momentos de discusión en grupos medianos o grupo grande, en los que cada estudiante deba convencer a sus compañeros de la validez de su argumento por medio de una argumentación oral. En su lugar, estos *momentos de formulación* se realizan por escrito y van dirigidos al docente. Es decir, el requerimiento al estudiante consiste en convencer al docente y a si mismo valiéndose de argumentos matemáticos, que necesariamente pasan por una *instrumentalización* del modelo dinámico, de la vista gráfica y del medio material GFC. Con este diseño de fases se fomenta la responsabilidad matemática de los estudiantes en la toma de decisiones en sus acciones y propuestas.

El diseño de la experimentación está enfocado al análisis de los comportamientos de los estudiantes, y no contempla momentos de atención a la diversidad. Por ello, no existen mecanismos que favorezcan la inclusión de estudiantes con dificultades en la mecánica del grupo. Además, la duración de las actividades se limita a dos sesiones, hecho que no permite la observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes, ni una *evaluación de proceso*. Por estas razones, la *idoneidad interaccional* se considera media.

8.2.5. Dimensión cognitiva

Desde el punto de vista del lenguaje, el problema es adecuado para el estudiante, que conoce los elementos *verbales* (aritméticos, algebraicos, geométricos y funcionales), *gráficos* (eje cartesiano) y *simbólicos* (uso de variables y representación de ecuaciones) del problema (sección 5.2). El enunciado del problema es claro, y el estudiante conoce las definiciones y los procedimientos necesarios para resolver el problema, que se detallan en los conocimientos previos (sección 6.2.1). El lenguaje empleado en la tarea es, pues, adecuado para el nivel de los estudiantes.

Además, el diseño de la situación y la elección del momento de implementación en cada centro aseguran que los alumnos disponen de los conocimientos previos necesarios para la ejecución de la tarea (sección 6.2.1); a saber, esencialmente: procedimientos de resolución de ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones, representación gráfica de funciones afines y operaciones en el campo numérico racional.

De esta forma, y a pesar de que en la experimentación la tasa de éxito no ha sido total en ninguna de las tareas, se constata que y la *instrumentación* del modelo dinámico permite al estudiante alcanzar los contenidos pretendidos, es decir, la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. La situación se desarrolla siguiendo *fases de acción* o toma de decisión y *fases de formulación* o comunicación, y contribuyen a que el estudiante construya un significado personal del contenido emergente. La situación promueve, además, momentos en los que el estudiante debe interpretar conjuntamente expresiones algebraicas y gráficas, y en las que debe argumentar sobre la validez de su producción. En este sentido, el modelo dinámico ofrece al estudiante instrumentos para el control de su propuesta, en términos de *validación interna* (Brousseau, 2007). Todo ello garantiza la apropiación de los conocimientos pretendidos.

El objetivo de la experimentación consiste en el análisis de los comportamientos y la forma en la que los estudiantes resuelven la tarea propuesta. Gracias a las variables internas del estudio se ha evaluado la comprensión conceptual y proposicional que el estudiante tiene de los objetivos de la tarea. Además, las *fases de formulación* garantizan la evaluación de la competencia comunicativa y argumentativa. Además, la integración de soportes permite avanzar en la comprensión de la situación, y los procedimientos se integran en varios soportes, ayudando a su interpretación y comprensión.

Los indicadores de *idoneidad cognitiva* indican una idoneidad cognitiva media. El proceso de estudio consta de dos sesiones, en las que no se prevén actividades de *ampliación* y *refuerzo*, para asegurar el acceso al logro (la adquisición de los conocimientos pretendidos) de todos los estudiantes.

En este sentido, y debido al diseño de la experimentación, no se han realizado observaciones sistemáticas del progreso *cognitivo* de los estudiantes. Tampoco entra dentro de los objetivos del estudio la evaluación de los objetivos de aprendizaje dentro de una *evaluación de proceso* de los estudiantes.

La integración normalizada de la práctica matemática en aula de ordenador debe permitir esta *evaluación de proceso*, para que la evaluación tenga en cuenta los “distintos niveles de comprensión y competencia de los estudiantes”, y los “resultados de las evaluaciones se difundan y se puedan usar en la toma de decisiones” en el marco del centro educativo (Godino, 2011, 10).

8.2.6. Dimensión mediacional

La *idoneidad mediacional* se considera alta. Los materiales utilizados integran el uso de software y el soporte de “lápiz y papel”. A partir de estos soportes, la situación se analiza en función de distintos modelos (algebraico, analítico-funcional y gráfico), que permiten la visualización del *sistema* de objetos matemáticos presenten en el problema.

La manipulación conjunta de distintos modelos matemáticos del problema, favorece la introducción del lenguaje, de los procedimientos y de las argumentaciones que requiere la resolución de la tarea. Así, las definiciones y las propiedades se contextualizan en el modelo dinámico, que a su vez, sirve de instrumento para introducir la noción novedosa de parámetro, con relación a los *deslizadores* del modelo dinámico.

El proceso de estudio contempla dos sesiones, y ambas se desarrollan en dos desdobles cada una. Se habilitan dos aulas separadas, que se emplean de forma simultánea, con un profesor titular y otro auxiliar. Todo ello permite optimizar las condiciones del aula y el número de alumnos, para asegurar el correcto desarrollo de los procesos instruccionales pretendidos.

Tal como se ha adelantado en la discusión de los resultados (sección 8.1), la experimentación se desarrolla entre los meses de noviembre y marzo, en función del centro educativo. Las fechas empleadas en cada grupo corresponden al momento concreto en el que los estudiantes han desarrollado los contenidos previos que requiere la situación, atendiendo a la programación curricular del centro. En cada centro, las dos sesiones se desarrollan de forma consecutiva, y se seleccionan, dentro del horario lectivo, las sesiones que facilitan el desplazamiento de los estudiantes del aula ordinaria (donde se desarrolla la sesión MA) al aula de ordenador (sesión MD).

Ante posibles incidencias de tipo informático, el aula de ordenador se revisa antes de cada sesión. El docente auxiliar comprueba los equipos y asegura el correcto funcionamiento de la versión y de los complementos del software de geometría dinámica.

El tiempo dedicado a cada sesión es suficiente para el desarrollo de al menos la primera tarea: en la sesión MD, todos los estudiantes realizan la tarea T1; en la sesión MA, realizan la tarea T4. La tasa de ejecución de estas dos tareas es máxima con relación a la muestra, y se toman por ello, como referencia en el contraste de hipótesis. De forma adicional, las tareas T2 y T3, y la tarea T5, aseguran un número suficiente de tareas en cada sesión. Esto permite a los estudiantes afianzar y consolidar las acciones, los procedimientos y los argumentos pretendidos y objeto de estudio.

Idoneidad didáctica global

En resumen, las dimensiones *epistémica*, *ecológica* y *mediacional* destacan en el análisis por tener un nivel alto de *idoneidad* en el proceso de estudio. Según este análisis, el nivel de *idoneidad* en las dimensiones *cognitiva*, *afectiva* e *interaccional* en el proceso de estudio es media. La figura 8.1 representa esta situación.

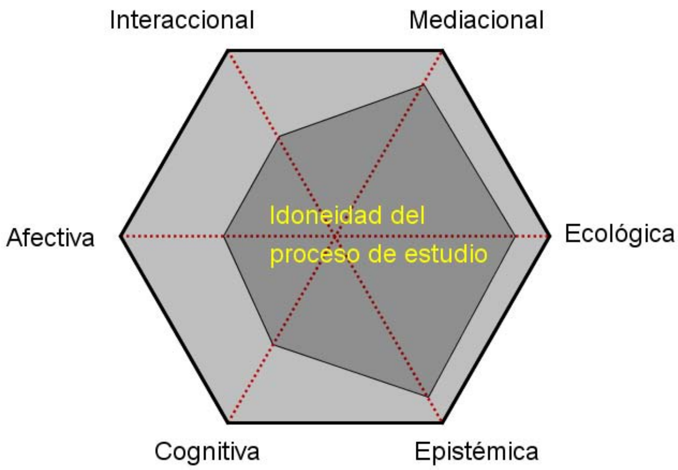


Figura 8.1: Idoneidad didáctica del proceso de estudio.

En análisis de los resultados y el análisis global de la idoneidad didáctica permiten perfilar implicaciones para la enseñanza que serán descritas en el último capítulo de conclusiones.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve resumen

Se realiza en este capítulo una breve síntesis de los aspectos teóricos más relevantes de este trabajo y su relación con los resultados de la experimentación. En las conclusiones se describe un esquema para el diseño de procesos de aprendizaje del tópico "resolución de ecuaciones" que optimiza el proceso de estudio. Se termina con una serie de cuestiones abiertas que marcan el camino a seguir en futuras investigaciones.

Laburbilduma

Kapitulu honetan lan guztian zehar jorratu diren aspektu teorikoen sintesi laburra egiten da. Aztertzen da, baita ere, aspektu teoriko horiek esperimentazioko emaitzekin duten lotura. Ondorioetan aurkeztu egiten da "ekuazioen ebazpena" ikasgaiaren ikaskuntza prozesuak optimizatzen dituen diseinurako eskema bat. Amaitzeko, galdera irekiak zerrendatu dira, eta etorkizuneko ikerketetan jarraitu beharreko bidea zein den adierazi da.

Short summary

This chapter summarizes the theoretical aspects of previous chapters. The theoretical aspects have relations to results of the experimental process. The conclusion is an outline for the design of a situation that optimizes the learning process for the topic "equation solving". To conclude, we present some unanswered questions that require future investigations.

En la introducción de este trabajo se justifica que la actividad matemática escolar se debe basar en la actividad humana. En este sentido, la actividad escolar debe ser rica en lenguaje, nociones, procesos y argumentos, y el diseño de situaciones y la organización del medio material deben contemplar una variedad de soportes que ayuden a integrar los distintos conocimientos matemáticos.

La enseñanza y el aprendizaje del tópico "resolución de ecuaciones e inecuaciones" no está libre de este enfoque. Las técnicas de resolución, la terminología que se requiere para manipular las expresiones matemáticas involucradas y los argumentos empleados, requieren de una variedad de contextos y situaciones que den sentido a estos procesos y permitan a los estudiantes dotar de significado personal a la práctica matemática, con el condicionante de los distintos soportes materiales, como por ejemplo, "lápiz y papel" o "software de geometría dinámica".

En la enseñanza tradicional no se contempla la utilización del software, a pesar de las utilidades que tiene para los estudiantes como instrumento de control, o como *instrumento* de *exploración* en situaciones novedosas. En lugar de recurrir a soportes e instrumentos variados, la enseñanza tradicional se ha basado durante largo tiempo en un único soporte: "lápiz y papel". La utilización en exclusiva de este soporte material ha contribuido a la proliferación de decisiones docentes que, en un principio, tienen por objetivo la mejora de los procesos de enseñanza y el acceso del estudiante al conocimiento, pero generan en la práctica fenómenos didácticos. Por ejemplo:

1. *El adelanto sistemático de contenidos.* El docente toma la decisión de adelantar un contenido procedimental que presenta al estudiante con la ilusión de que cuanto antes empiece éste a trabajar dicho contenido, mejores resultados obtendrá "a futuro". Sin embargo, atendiendo al desarrollo cognitivo del estudiante, a sus conocimientos previos y la posible ausencia de un campo de aplicación del conocimiento, esta decisión puede no estar justificada. Además, otro fenómeno acompaña en ocasiones esta decisión, a saber, el docente entra en una espiral propedéutica en la que cada conocimiento matemático se explica, únicamente, como previo a otro conocimiento de "orden superior", desatendiendo su aplicación y contextualización, y su utilidad en el nivel en el que se introduce. Así, oculta para el estudiante la pertinencia del aprendizaje de un objeto matemático y su justificación, y se compromete, en definitiva, la construcción del estudiante de un significado personal que sea eficaz y estable.

2. *La atomización de contenidos algebraicos.* El docente organiza el curso de forma que los procedimientos se presentan de forma aislada. Esta decisión se justifica, muchas veces, en términos de gestión del tiempo, o bajo la ilusión de que la eficacia en el manejo simbólico aislado posibilita su maestría en situaciones complejas. Sin embargo, esta decisión provoca la desarticulación de los distintos conocimientos algebraicos, y la ausencia de medios de control en las propuestas de los estudiantes.

Las decisiones docentes asentadas en estas bases forman parte de la epistemología espontanea del profesor, y provocan, finalmente, un fenómeno de irresponsabilidad matemática, como se ha mostrado en la discusión de los resultados. De hecho, estos fenómenos encuentran una base sólida en las fundamentaciones teóricas del uso de instrumentos en la práctica matemática escolar y en el modelo didáctico que integra elementos de la TSDM y el EOS. En particular, se observa que:

- La gestión del medio material "software de geometría dinámica" debe conceder tiempo al *momento de exploración* por un modelo dinámico. El uso del modelo dinámico y la obtención de información del mismo no son transparentes para el estudiante, y se requieren *fases de acción* (para que el estudiante pueda obtener la necesaria retroalimentación del modelo en la toma de decisiones) y *fases de formulación* (para que el estudiante comunique y valide sus decisiones, y se acopie de los objetos matemáticos involucrados para su uso en futuras prácticas).

- El orden utilización de los distintos soportes en relación al tópico "resolución de ecuaciones" provoca distintas respuestas por parte del estudiante. El conocimiento de las características de unas y otras respuestas permite adoptar criterios que optimizan los diseños instruccionales en estos soportes.

A día de hoy, los estudiantes son *nativos digitales* y están habituados al empleo de múltiples recursos tecnológicos con pantallas táctiles (móviles, tabletas, etc.). Sin embargo, la *instrumentación* de una herramienta tecnológica particular en la práctica matemática requiere de una instrucción previa y de un *esquema de acción instrumentada*; su uso en la práctica matemática no es natural y transparente para el estudiante. Es primordial que el diseño del modelo dinámico se ciña a aspectos matemáticos, y que la instrucción en el manejo del software no se realice en subordinación a la maestría técnica o informática del estudiante, para evitar un fenómeno de *deslizamiento metacognitivo*.

Por ello, la clasificación que la literatura clásica hace de los distintos modelos dinámicos (en relación al nivel de maestría informático del estudiante) debe ser revisado. En su lugar, los modelos dinámicos se deben clasificar en función de la relación instrumental del estudiante con el modelo. En este trabajo, se presenta una clasificación en la que se toma como referencia los *momentos* de la práctica matemática en los que es pertinente la utilización de un modelo dinámico: la *exploración*, la *ilustración* y la *demostración*.

El medio material "software de geometría dinámica" aporta representaciones *ostensivas* dinámicas de objetos matemáticos. La manipulación de estos objetos dinámicos en un modelo permite el estudio ágil de un gran número de casos particulares (*extensivos*), facilitando la *demostración inductiva* de propiedades matemáticas, y superando el *contrato de ostensión* (Braousseau, 2007). De esta manera, la ausencia de contraejemplos permite avanzar en la construcción de elementos genéricos (*intensivos*), y en la demostración deductiva de propiedades. Se avanza, así, en la idealización (representación *no ostensiva*) de los objetos matemáticos. En particular, el software dinámico permite progresar hacia el *nivel* 4 de *algebrización* en la Educación Secundaria[6].

Los elementos matemáticos que participan en las construcciones dinámicas se enlazan entre sí de dos maneras fundamentales: a partir de una estructura de dependencia cronológica; y por la relación que las distintas representaciones guardan entre sí en función de las vistas algebraica, gráfica, CAS, hoja de cálculo, etc. Estas representaciones y sus relaciones internas facilitan la construcción de un significado personal por parte del estudiante, en términos de *tratamiento* y *conversión*. De esta forma, en los momentos de exploración, los estudiantes asignan *significado personal* a los objetos matemáticos del

[6]Esta afirmación se puede extender, en realidad, a la Educación Primaria. En el Anexo A se presenta una situación didáctica que permite progresar, a partir de un *nivel* 0, hacia los *niveles* 1 y 2 de *algebrización*: la manipulación de objetos geométricos por la acción de *arrastre* y la consecuente modificación de valores (distancias, perímetros, áreas, etc.) muestra a los niños el valor cambiante de una variable, antes incluso de la codificación de la misma a partir del lenguaje simbólico algebraico.

modelo; a continuación, el docente tiene en sus manos instrumentos para *institucionalizar* el conocimiento, en un *momento de ilustración* o en un *momento de demostración* formal.

En la experimentación se aportan resultados que permiten observar la manera en la que los estudiantes integran procedimientos algebraicos *unitarios* en *sistemas* complejos. El análisis de los resultados permite aclarar, a su vez, el papel que juegan los soportes materiales "software de geometría dinámica" (en la sesión MD) y "lápiz y papel" (en la sesión MA) en la integración de estos procesos.

Dimensión epistemológica

Las situaciones o problemas que motivan la necesidad de resolver una ecuación deben tener su origen en circunstancias cercanas al estudiante. En ellas se debe promover la transcripción de los distintos elementos lingüísticos, en contextos geométricos y funcionales. Se deben proponer, asimismo, situaciones en las que los estudiantes deban realizar una discusión y controlar sus producciones, responsabilizándose matemáticamente de ellas.

A pesar de la importancia y efectividad de los procedimientos algebraicos, no se deben abandonar otras técnicas, como por ejemplo, aquellas que persigan la obtención de un valor inicial aproximado o que aportan aproximaciones sucesivas de las soluciones, a partir de un análisis basado en propiedades de las funciones asociadas a los sistemas de ecuaciones y de sus funcionales o lineales de los sistemas de ecuaciones y de sus relaciones en tanto que objetos de un sistema.

La integración de nociones incide en la *comprensión* de la tarea por el estudiante. Éste tiene a su disposición una variedad de representaciones verbales y gráficas que complementan los significados simbólicos. Todos estos elementos sirven al estudiante de instrumento para controlar sus propuestas en la práctica matemática. Un mayor control sobre su propuesta implica, además, una mayor responsabilidad.

En este sentido, el software dinámico permite introducir los objetos matemáticos relativos a funciones y al medio material Gráfico Cartesiano de Funciones dentro de una actividad fundamentalmente algebraica. Además de aportar elementos para la construcción de un significado personal en términos de *tratamiento* y *conversión*, permite progresar en los *niveles de algebrización*. En la etapa de Educación Secundaria, la herramienta *deslizador* juega el rol de un parámetro en expresiones funcionales y algebraicas, anticipando el uso de parámetros. Se representa, así, una ecuación o una función en relación a la familia que la genera. Se avanza, pues, hacia el *nivel* 4 de *algebrización*.

El uso exclusivo del soporte clásico de "lápiz y papel", carga las prácticas matemáticas institucionales de un fuerte componente procedimental: se aplican "recetas" o técnicas algebraicas atomizadas. Los estudiantes aplican estos procedimientos algebraicos sin un proceso de reflexión: no se comprueban los cálculos por instrumentos de control aritméticos o algebraicos, y no se valida el resultado por medios gráficos. La influencia de los procedimientos algebraicos se filtra al medio material "software de geometría dinámico". El modelo dinámico no se usa para prever la existencia de soluciones o anticipar su naturaleza, en un *momento de exploración*. El procedimiento algebraico se antepone a otras estrategias numéricas incluso en el soporte de "lápiz y papel": por regla general, los estudiantes obtienen el resultado obtenido por un procedimiento mecanizado, y no lo comprueban por medio de estrategias aritméticas; en particular, el estudiante que obtiene una solución numérica coincidente en ambas ecuaciones no identifica este resultado como una solución válida al sistema, a no ser que venga acompañada de una manipulación algebraica de términos.

En la práctica institucional, las técnicas algebraicas se exponen y ejemplifican a partir de ejercicios con coeficientes naturales o enteros. Los estudiantes conocen las nociones numéricas y las operaciones relativas al conjunto de los números racionales. Sin embargo, la práctica matemática escolar se articula en torno a los números enteros. La consolidación de una técnica algebraica debe pasar por su uso y aplicación en los conjuntos numéricos propios de la etapa educativa. Así, para que los estudiantes aprendan a resolver problemas en el campo numérico racional, es necesario su manejo estable en tareas complejas, en distintos contextos, no restringiéndolo a una determinada lección del año escolar; a saber, aquella relativa al conjunto de los números racionales. Con otras palabras, no se debe evitar el envite epistemológico que supone el uso contextual y extenso de los distintos conjuntos numéricos.

La consolidación de la técnica algebraica en todos los conjuntos numéricos conocidos por el estudiante tiene beneficios para el estudiante. Una vez que domina la técnica algebraica, el estudiante hace una mejor gestión del tiempo y es más eficaz en la aplicación de una heurística para la resolución de un problema. A su vez, la aplicación de una técnica consolidada facilita la argumentación correcta y coherente, y la validación de una propuesta en un *momento de exploración*.

Así, el modelo dinámico aporta a la configuración de objetos y procesos algebraicos elementos funcionales gráficos, y estos elementos son fundamentales para que el estudiante ejerza un control de su producción algebraica. A su vez, en el *momento de exploración* de un problema con un modelo dinámico, el estudiante adquiere una mayor comprensión de la tarea y aplica a continuación la técnica algebraica con mayores probabilidades de éxito en la obtención de una resolución completa.

Dimensión cognitiva

Los resultados indican que en tareas de resolución de ecuaciones, los estudiantes aplican directamente procedimientos algebraicos estandarizados. El lenguaje simbólico predomina sobre los lenguajes verbal y gráfico. En la resolución, los estudiantes utilizan nociones de operaciones algebraicas y la solución se obtiene por manipulaciones algebraicas de monomios en ambos lados de la igualdad. Los estudiantes dominan estas operaciones en monomios con coeficientes enteros, pero muestran errores reproducibles al ampliar el conjunto numérico al racional.

Por regla general, los procedimientos algebraicos se aplican sin ningún tipo de control. Antes de emprender la resolución por cálculos aritméticos y algebraicos, los estudiantes no recurren a argumentos que justifiquen la existencia de la solución o el número de soluciones. Una vez comienza el proceso de resolución, no se emplean medios aritméticos para comprobar la corrección de los cálculos. Tampoco se emplean instrumentos de control gráfico o de otro tipo.

El análisis de los comportamientos de los estudiantes en la experimentación permite concretar la influencia del medio material en las respuestas de los estudiantes. En la *dimensión cognitiva*, y a la hora de resolver tareas de resolución de ecuaciones, los estudiantes muestran distintos comportamientos y ponen en juego distintas prácticas, objetos y procesos, en función del soporte material empleado y su secuencia de utilización:

- *Secuencia MA–MD.* Los estudiantes que trabajan previamente la técnica algebraica en un soporte tradicional, instrumentalizan de forma eficaz el modelo dinámico, y son capaces de validar de forma coherente la solución que proponen. La consolidación de una técnica algebraica ofrece al estudiante ciertas ventajas: rapidez y eficacia en procedimientos auxiliares y en tareas de consolidación; se evita la evaluación heurística de todos los pasos en una resolución. Esto permite al estudiante dedicar más tiempo y esfuerzo a otros requerimientos. Así, instrumentalizan mejor el modelo dinámico, validando las soluciones algebraicas o identificando el error en su solución. Además, las soluciones son homogéneas y las argumentaciones correctas en mayor medida. Es decir, el estudiante avanza en la adquisición de un *esquema de acción instrumentada*.

- *Secuencia MD–MA.* Los estudiantes que manipulan un modelo dinámico en un *momento de exploración* de forma previa al uso del soporte tradicional, adquieren una comprensión de la tarea que les facilita la obtención de soluciones algebraicas completas en el soporte tradicional. Es decir, la comprensión de la tarea permite al estudiante aplicar de forma eficaz la técnica algebraica, una vez se pasa al soporte tradicional.

La constatación de que las producciones de los estudiantes difieren en función del medio material empleado permiten la articulación de una propuesta que optimiza el proceso de estudio, en función de los objetivos del mismo (*dimensión de enseñanza*).

Dimensión de enseñanza

La ausencia de instrumentos de control tiene su fundamento en ciertos fenómenos didácticos que producen efectos que distorsionan la organización de las enseñanzas en Educación Secundaria:

- *Contrato de imitación o reproducción formal*, que fomenta la aplicación de "recetas" y procedimientos estandarizados.

- *Adelanto sistemático de contenidos*, que no se justifica atendiendo al desarrollo cognitivo de los estudiantes.

- *Atomización de contenidos y procedimientos*, que contribuye a generar una concepción "propedéutica" de la enseñanza de las matemáticas.

Estos factores ayudan a perpetuar la *irresponsabilidad matemática* en los estudiantes. Además, en la *dimensión de enseñanza*, los procesos de instrucción de "resolución de ecuaciones" están fuertemente condicionados por la interpretación del currículo que se hace en los centros educativos, y por las creencias de los docentes de matemáticas. El currículo oficial es un documento que se presta a una lectura lineal, en el que los contenidos de "resolución de ecuaciones" aparecen en primer lugar, antes de cualquier otro bloque de contenidos, y una lectura superficial del documento puede llevar a una presencia introductoria de estos contenidos, en todos los cursos de matemáticas en Educación Secundaria.

Además, dentro del *contrato de imitación o reproducción formal*, los docentes valoran positivamente las producciones claras y nítidas de los estudiantes, y estos prefieren aplicar técnicas fosilizadas, por la seguridad que esto les da a la hora de obtener una evaluación positiva del docente. En este contexto, la utilización de un soporte material distinto al clásico es cuestionado por el docente que no lo domina, y transmite al estudiante la creencia de que el soporte “software dinámico” no es igual de válido desde el punto de vista del quehacer matemático escolar.

En el *momento de exploración* por un modelo dinámico, el estudiante realiza acciones sobre el medio “software de geometría dinámica” y obtiene retroalimentación de él, dentro de una *situación adidáctica* y en función de un *contrato en situación fundamental* o *con un componente adidáctico esencial*. El estudiante no recibe del docente una instrucción concreta en el manejo del modelo dinámico: la acción didáctica se destina a presentar las consignas y los requerimientos de la tarea, y eventualmente, al acto de devolución. El estudiante recurre entonces a la *memoria didáctica* para seleccionar y aplicar la técnica algebraica, reenviando entonces la interacción según un contrato de imitación. Como los requerimientos del docente exceden la resolución puramente algebraica, el estudiante vuelve a la situación adidáctica en cumplimiento de la cláusula del contrato pedagógico según la cual debe responder a las consignas dadas por el docente (figura 8.2).

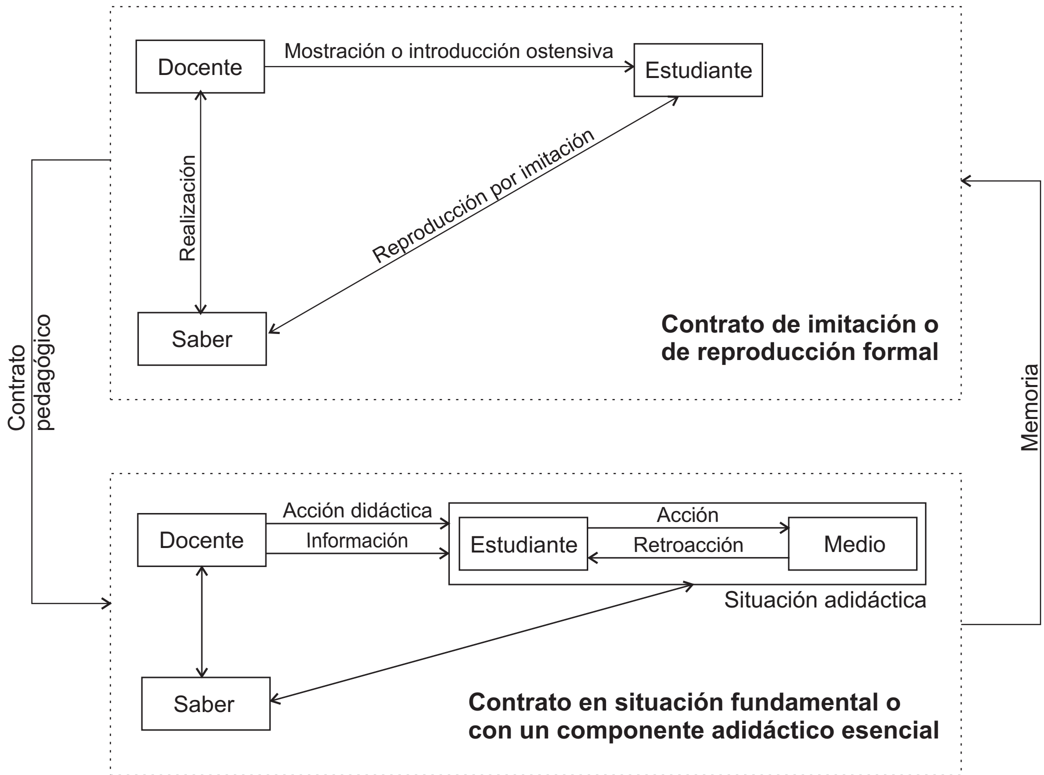


Figura 8.2: Influencia del “software de geometría dinámica” en el contrato didáctico.

La integración de soportes materiales es beneficiosa desde el punto de vista de la instrucción matemática, y permite la organización eficaz del medio didáctico y de los procesos de aprendizaje de las matemáticas. Atendiendo a las *dimensiones epistemológica* y *cognitiva*, el estudiante obtiene distintas mejoras y se relaciona de distinta forma con el saber matemático. Estos resultados se convierten en claves con un valor práctico en el diseño de secuencias de aprendizaje.

Implicaciones para la determinación de procesos de estudio

El análisis de las dimensiones epistémica y cognitiva enlazan con la dimensión de enseñanza, y aportan criterios para el diseño de propuestas argumentadas. Las propuestas clásicas consisten en la concatenación de técnicas algebraicas cada vez más complejas y exigentes, y no contemplan la utilización de otro soporte que no sea el de lápiz y papel. Sin embargo:

- La manipulación previa de un modelo dinámico facilita la obtención de resultados algebraicos en una tarea de resolución de ecuaciones.
- La práctica previa de una técnica algebraica facilita la instrumentalización de un modelo dinámico y mejora la correcta argumentación sobre una situación matemática.

Así, el diseño de secuencias y propuestas concretas de enseñanza y aprendizaje debe contemplar las siguientes fases:

1. *Primera fase.* Dentro de una categoría de problemas, se instruye al estudiante en la utilización de una técnica algebraica que permita la resolución eficaz de la situación, y que permita al estudiante consolidar una técnica algebraica de base. Una vez que el estudiante llega al umbral de maestría algebraica en el uso de esta técnica, se introduce un modelo dinámico de exploración, que permita al estudiante avanzar en el análisis de una situación para la que no tiene una estrategia de resolución consolidada. El estudiante instrumentaliza entonces el modelo dinámico para realizar una argumentación correcta y coherente sobre la nueva situación.
2. *Segunda fase.* En el paso de una categoría de problemas a otra categoría de nivel superior, se presenta al estudiante un modelo dinámico para explorar la situación, junto con unas indicaciones sobre el uso de una nueva técnica algebraica, todavía no consolidada. Finalizada la fase de exploración con el modelo dinámico y en ausencia del modelo, el estudiante actúa con la técnica algebraica para su consolidación y la toma de conciencia de su campo de validez.

Este esquema de implementación en dos fases es helicoidal, y permite enlazar los contenidos y objetivos de la materia de matemáticas de manera progresiva. La propuesta tiene encaje en el marco teórico y es coherente con los resultados obtenidos en la experimentación. Por ello, facilita la adquisición de conocimientos y optimiza el proceso de enseñanza y aprendizaje. La figura 8.3 muestra un esquema del proceso de aprendizaje que integra los soportes “lápiz y papel” y “software de geometría dinámica”, junto con los elementos clave identificados en este trabajo.

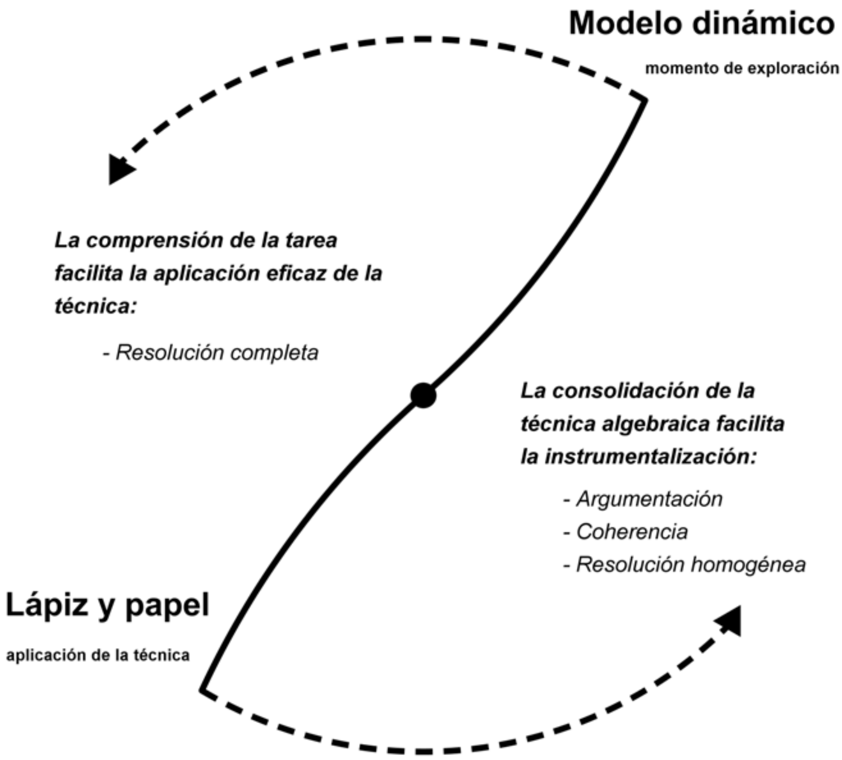


Figura 8.3: Idoneidad del proceso de estudio a partir de la integración de soportes.

Validación de hipótesis iniciales

Todas estas consideraciones permiten validar, en distinto grado, las tres hipótesis de trabajo que se han planteado al inicio de este trabajo:

[H1] *Si las nociones funcionales y algebraicas se presentan de forma integrada, entonces se facilita la comprensión de los contenidos de resolución de ecuaciones.*

La integración de nociones funcionales y algebraicas en procesos de resolución de ecuaciones incide positivamente en la capacidad de argumentación de los estudiantes. Los estudiantes muestran una mayor coherencia en sus argumentaciones, y sus propuestas se asimilan en mayor grado unas con otras (resolución homogénea).

[H2] *Si se utilizan modelos dinámicos en tareas de resolución de ecuaciones, entonces los estudiantes mejoran sus resultados.*

La utilización de un modelo dinámico en un *momento de exploración* previo a la aplicación de una técnica algebraica, incide positivamente en la comprensión de la tarea. Los estudiantes aplican de forma eficaz la técnica algebraica, obteniendo resoluciones completas. Sin embargo, la consolidación de la técnica algebraica facilita la instrumentalización del modelo dinámico.

[H3] *Si se ajusta el uso del software en función del tipo de actividad matemática y no en función de la maestría informática, entonces aumenta la eficacia en la ejecución de las técnicas de resolución y se adquiere un significado más flexible de los objetos matemáticos involucrados.*

La descripción del uso de un modelo dinámico en la actividad matemática escolar en función del tipo de actividad matemática que se realiza, es decir, en términos de *exploración*, *ilustración* y *demostración* se ajusta de forma más precisa a las características del proceso de estudio, que la descripción clásica en términos de *maestría informática* del estudiante.

Cuestiones abiertas

A lo largo de este trabajo no se han podido aportar resultados concluyentes en relación a algunos aspectos que han surgido en la experimentación. En algunos casos, el diseño de la propuesta no está dirigido a contestar esas cuestiones, y se requiere entonces de un diseño específico; en otros casos, los resultados obtenidos son insuficientes para poder clarificar el aspecto.

1. *Error de aplicación estricta*[7]. A la hora de manipular el modelo dinámico, los estudiantes atribuyen un sentido erróneo a los objetos funcionales según su representación literal ostensiva. Por ejemplo, algunos estudiantes se refieren al término bx de la parábola como la “pendiente”; en ausencia del término independiente c, ese mismo término es para otros estudiantes la “ordenada en el origen”. Además, este error puede tener ramificaciones y estar vinculado a errores que ocurren en el estudio de la derivada.

[7] El *error de aplicación estricta* se refiere a la equivocación que cometen los estudiantes al identificar los monomios de una expresión en el orden en el que éstos aparecen, sin reflexionar sobre la estructura del monomio. Así, por ejemplo, se presenta al estudiante la expresión con términos invertidos $y = n + mx$, y el estudiante los considera en orden de aparición: n es la pendiente y m la ordenada en el origen.

Así, dada la expresión $y = ax^2 + bx + c$, ¿interfiere la interpretación del coeficiente a (amplitud de la parábola) con la interpretación del coeficiente $2a$ (*pendiente puntual* de la curva)?

2. *La cuestión del género.* A pesar de que el contraste de hipótesis da como resultado la aceptación de la hipótesis nula, en la mayoría de las variables que miden el éxito o la ausencia de errores en la resolución una tarea, la proporción de éxito es superior en el subgrupo femenino. En particular, las variables A1, BN1 y C1, la tasa de éxito en el subgrupo femenino es cercano al 100 %, en la resolución de la tarea T4, y las producciones del género femenino son, además, más homogéneas.

   ¿Estos resultados son estables con otra muestras? ¿Las diferencias observadas definen una línea de base o pueden atribuirse al azar o a la intencionalidad de la muestra seleccionada?

3. *Errores aritméticos y algebraicos.* Diversos autores constatan que en el paso de la aritmética al álgebra y en los procesos de generalización de propiedades numéricas y simbólicas, el aprendizaje de las reglas de manipulación algebraicas son problemáticas y chocan con conocimientos numéricos previos, generando *obstáculos epistemológicos*.

   ¿Qué tipo de errores aritméticos y algebraicos cometidos por estudiantes en la resolución de ecuaciones son indicadores de la existencia de un *obstáculo epistemológico*? ¿Es posible clasificar los errores aritméticos y algebraicos según su origen?

4. *Perfil del estudiante.* En los resultados, el diagrama implicativo aporta información sobre el grado de relación de las distintas variables internas. Sin embargo, queda por atender el análisis del *árbol de clasificación*, que permitiría la clasificación de los estudiantes en función de sus comportamientos y de los tipos de resolución que aportan.

   Se podrían indicar, de esta manera, las características de estudiantes en función de su perfil: ¿Qué perfiles de estudiantes hay? ¿Existe un perfil de estudiante algebrista? ¿Existe un perfil de estudiante analista? En caso de que así sea, ¿cuáles son las características de cada grupo en cuanto al tipo de resolución o a la *instrumentación* del modelo dinámico?

5. *Ampliación del campo de aplicación.* Las conclusiones obtenidas en este trabajo tienen que ver con la utilización de un modelo dinámico en la resolución de ecuaciones con una ecuación lineal y una ecuación cuadrática.

   ¿Estas conclusiones son válidas en un dominio algebraico ampliado? ¿Son válidas en el ámbito de la geometría analítica?

Parte III

Anexos

Anexo A

Una parcela para Txuri

Este trabajo ejemplifica una actividad fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM; Brousseau, 2007) para identificar y describir, con la asistencia de un modelo dinámico, propiedades de figuras planas cuyas representaciones aritméticas y prealgebraicas exceden los conocimientos previstos de los niños en segundo ciclo (8-9 años) de Educación Primaria (EP).

Ribeiro (2013) propone una situación sobre papel cuadriculado, en el que los niños construyen figuras planas y discuten las propiedades de las mismas, con el objetivo de obtener la que optimiza el área para un perímetro dado. Los conocimientos aritméticos de los niños y el trabajo sobre una cuadrícula limitan la actividad a la obtención del cuadrado como figura óptima, dentro de la familia de cuadriláteros. Sin embargo, el autor no contempla una actividad matemática más allá de ese umbral aritmético.

Se propone aquí una fase de exploración, una vez que el análisis de las propiedades alcanza el límite aritmético de maestría del niño en los soportes físicos y sobre papel. De esta forma, el niño tiene a su alcance una nueva forma de control sobre sus producciones escritas, al poder contrastar los resultados obtenidos en distintos soportes y sobre distintos enfoques de los objetos matemáticos involucrados.

El diseño de esta situación didáctica, cuya puesta en escena se describe en términos de acción, formulación y validación, tiene por objetivo la enseñanza de la Geometría en EP. En particular, la secuencia propone un problema de optimización de áreas: Una parcela para Txuri[1]. El contraste experimental permite concluir que el uso integrado de materiales manipulables, lápiz-papel y software dinámico posibilita el desarrollo de una actividad matemática más rica y compleja que incluye las competencias geométricas clásicas.

En efecto, en EP los recursos materiales y la actividad mediante lápiz y papel determinan casi por completo la evolución de los aprendizajes de los niños, y el software cumple en la actualidad, en general, una función marginal en el sistema didáctico (Lasa y Wilhelmi, 2013a). A la hora de resolver problemas geométricos, existen tres momentos en los que la utilización de GeoGebra es pertinente: *exploración*, *ilustración* y *demostración* de una propiedad geométrica (Lasa y Wilhelmi, 2013b). En particular, GeoGebra cumple la función de *instrumento* tanto en el desarrollo de demostraciones matemáticas como en la resolución de problemas matemáticos.

[1]Txuri es un nombre de perro común en vasco, idioma cooficial en la región donde se ha realizado la experiencia. En la traducción al inglés y al francés, se ha traducido por Laika, para facilitar la asociación en estos idiomas con el nombre de un perro.

Las teorías de la instrumentación consideran clave la noción de *instrumento* en el desarrollo de tareas matemáticas (Rabardel, 2002). Así, la actividad matemática se debe desarrollar en términos de un enfrentamiento con un medio (Brousseau, 2007). Ésta actividad incluye actividad física variada, comunicación verbal o gestual, y representación iconográfica o escrita. Junto con la TSDM, el Enfoque ontosemiótico (EOS) proporciona herramientas teóricas y metodológicas para el análisis del diseño de la actividad y de las producciones de los niños. La articulación de estos dos marcos teóricos ha sido fundamentada en diferentes trabajos (Wilhelmi, Font, Godino, 2005; Godino, Font, Contreras, Wilhelmi, 2006; Drijvers, Godino, Font, Trouche, 2013; Godino et al., 2013); en particular, Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014) fundamentan un sentido extenso de ingeniería didáctica que sirve para el diseño y puesta en marcha de procesos de estudio en matemáticas según diversos marcos teóricos.

Análisis a apriori

El currículo desarrolla los contenidos de descripción e identificación de figuras planas (polígonos y circunferencias) y cálculo de longitudes en segundo ciclo de EP. Además, a pesar de que el cálculo y la estimación de áreas corresponden propiamente a tercer ciclo de EP, los niños en segundo ciclo tienen un conocimiento intuitivo de la superficie. El problema de optimización de área con perímetro conocido que se propone es coherente con estos contenidos curriculares, y además, permite el paso del número a la medida; paso que se puede iniciar propiamente al final del primer ciclo de Educación Primaria (7-8 años) mediante un problema de optimización (Lacasta, Malaspina, Pascual y Wilhelmi, 2009, 2010).

La adaptación de la actividad a segundo ciclo de EP contempla conocimientos consolidados que permiten a los niños abordar el problema propuesto, tales como el conteo, la superposición y la comparación y ordenación de superficies. Además, la actividad permite anticipar el desarrollo formal del cálculo de áreas mediante fórmulas, y determina condiciones que permiten la emergencia de las nociones de perímetro y área y su distinción.

Tal como se ha adelantado en el marco teórico, el *nivel 0 de algebrización* es característico del soporte de lápiz y papel en esta etapa, ya que el conteo, las operaciones aritméticas con números naturales y la interpretación gráfica de la unidad son actividades exclusivamente aritmético-figurativas. Por ello, cabe formular las siguientes preguntas:

- ¿Qué condiciones debe tener una situación que permita el progreso de los niños en EP (8-9 años) en los niveles de algebrización?
- ¿Qué función cumple el soporte material en este progreso?

Responder a estas preguntas concreta el objetivo de este trabajo. Se propone determinar una situación que, en su primera fase, identifique el *umbral de maestría aritmético* de los niños, y partir del mismo, permita avanzar en el descubrimiento de objetos intensivos; a saber, generalización de una familia de figuras geométricas que optimizan el área dado un perímetro determinado.

El avance hacia un *nivel 1 de algebrización* permite la discusión sobre objetos *no ostensivos* (desigualdad isoperimétrica) y su *institucionalización* (la circunferencia optimiza el área para un perímetro dado).

Por todo ello, la hipótesis de base es la siguiente:

> "Si en el aprendizaje de la geometría se introduce un soporte que permite privilegiar la dimensión intensiva de los objetos matemáticos involucrados, entonces los niños reconocen reglas o patrones, que les permite progresar en la adquisición del objeto como entidad no ostensiva (ideal)."

Este proceso de *abstracción* del razonamiento algebraico guarda relación con la tensión dual que sufren los objetos geométricos sobre el modelo dinámico, es decir, los polígonos y sus propiedades representan objetos particulares (extensivo), pero son a su vez representantes de una clase (intensivo).

Situación: Una parcela para Txuri

Se propone a los niños que determinen la forma que debería tener un cerco perimétrico de una longitud determinada para que la superficie encerrada sea máxima. El objetivo de la situación es hacer evolucionar los conocimientos por adaptación a diferentes soportes materiales.

Material

- *Material físico.* 20 unidades de valla, cada unidad representa un metro de valla. Una cuerda de 20 unidades de longitud.
- *Lápiz y papel.* Hoja de cuadricula y lápiz (figuras A.1, A.2, A.3).
- *Software dinámico.* El niño introduce en la entrada de texto el nombre de la figura que quiere trabajar. A continuación, manipula el modelo de la figura plana seleccionada, comparando perímetro y área. La construcción dinámica que modeliza el problema se puede consultar en Lasa y Wilhelmi (2014)[2].

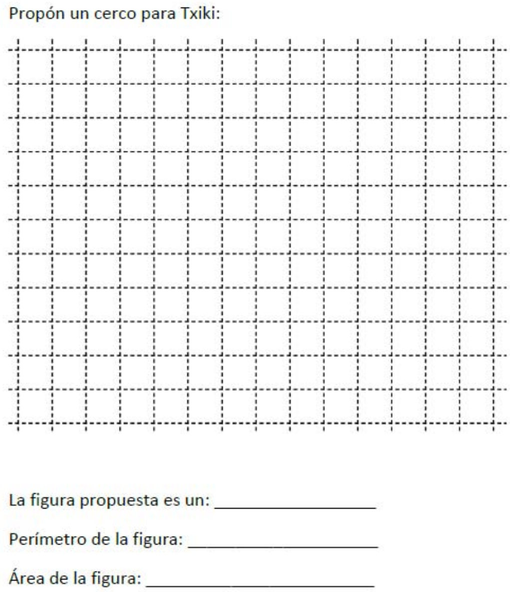
Objetivos de la maestra

La maestra tiene dos objetivos principales. Por un lado, que los niños conjeturen la desigualdad isoperimétrica, a partir de la exploración, comparación, clasificación y construcción de polígonos de hasta seis lados y de la circunferencia y el círculo, atendiendo a criterios de longitud de su perímetro y al área de su superficie. Por otro lado, el desarrollo de estrategias personales para estimar y medir longitudes y superficies de polígonos de manera exacta y aproximada, comparación de superficies por descomposición y medición, y explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada.

Fases de la situación

1. *Consigna.* Los niños reciben el enunciado del problema por parte de la maestra. La consigna de la actividad consiste en construir el mayor cerco posible con el vallado disponible. El enunciado es fácilmente reconocible por los niños y participa de sus núcleos de interés (*principio de globalización*):

[2] La construcción se puede consultar en el enlace a GeogebraTube: `http://www.geogebratube.org/student/mVajSjWVp`

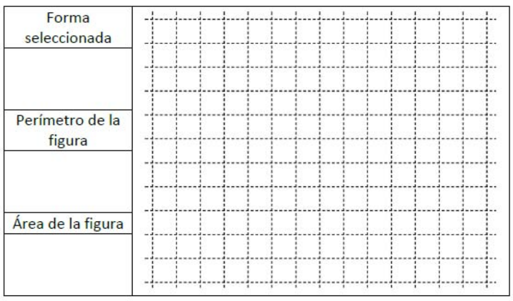

Propón un cerco para Txiki:

La figura propuesta es un: ________________

Perímetro de la figura: ____________________

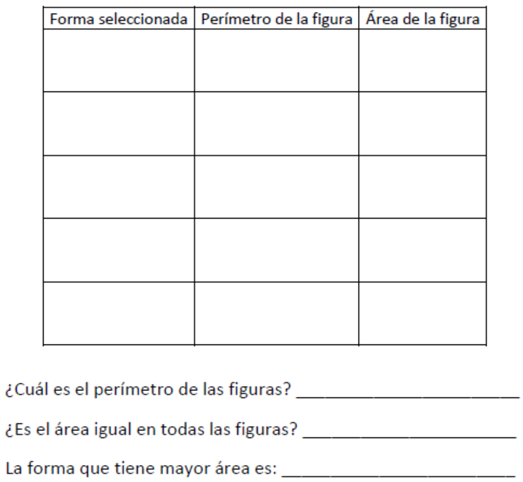
Área de la figura: ________________________

Figura A.1: Propuesta individual sobre papel.



Forma seleccionada
Perímetro de la figura
Área de la figura

Figura A.2: Transcripción de la propuesta por modelo dinámico.



Forma seleccionada	Perímetro de la figura	Área de la figura

¿Cuál es el perímetro de las figuras? ______________________

¿Es el área igual en todas las figuras? _____________________

La forma que tiene mayor área es: _______________________

Figura A.3: Validación de la propuesta ganadora.

> "Txiki necesita espacio para jugar con su pelota, pero si se queda suelta, se despista y no sabe volver. Por ello, queremos construir una parcela para Txiki, en la cual pueda jugar. Disponemos de 20 metros de valla, y con esos 20 metros de perímetro, tenemos que construir un cerco que cubra el mayor espacio posible"

2. *Acción por grupos con material físico.* Fase de acción para introducir el problema y momento de familiarización. Los niños proponen formas utilizando en material físico disponible (palillos, cuerdas) para representar el perímetro sobre el suelo. A través de la estimación, deben observar qué forma puede contener mayor superficie, sin medir todavía ninguna magnitud.

3. *Acción individual sobre papel.* Cada niño dibuja sobre la cuadrícula una propuesta de cerco para Txiki, respetando la restricción de perímetro. La medida de longitudes y áreas se realiza a partir de la cuadrícula, donde cada cuadradito constituye una unidad de superficie.

4. *Puesta en común de propuestas sobre papel*. Fase de formulación en la cual los niños deben comunicar su propuesta y compararla con la de sus compañeros. Como resultado a esta discusión, el grupo debe seleccionar, de entre las propuestas, la figura que optimiza la superficie.

5. *Acción por parejas con modelo dinámico.* Los niños completan el cuestionario sobre formas planas con la asistencia del modelo dinámico. El primer niño selecciona un tipo de forma y trata de optimizar el área de la misma ajustando el perímetro al máximo permitido. Una vez obtenida la figura, ambos niños transcriben tanto la forma como las medidas de la misma en el cuestionario, sobre papel. A continuación cambian el turno, hasta finalizar con las formas disponibles.

6. *Validación de la propuesta ganadora.* Si la forma obtenida a partir del modelo dinámico mejora la propuesta ganadora de la fase 4, ésta se sustituye.

Comportamientos esperados

El primer lugar, la manipulación física de objetos puede llevar a la creación de cualquier tipo de espacio, puesto que la actividad matemática se basa en la comparación de tamaños relativos por estimación. Es de esperar que la reproducción física del cerco corresponda a polígonos regulares, puesto que optimizan el área dentro de la familia de los polígonos.

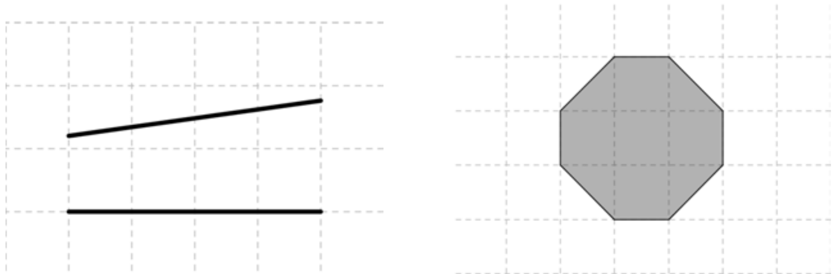
A la hora de utilizar el soporte "papel", la cuadrícula debe promover el descubrimiento de figuras rectangulares, puesto que el niño recurrirá a la estrategia de conteo de cuadrados internos a la hora de calcular el área de la figura. De esta forma, se obtiene el cuadrado de lado 5 como figura óptima dentro de la familia de los cuadriláteros, y el cálculo aritmético permite la validación de éste resultado. De hecho, el niño carece de estrategias algebraicas y aritméticas para calcular el área de polígonos cuyos lados no se ajusten en su casi totalidad a la cuadrícula, como tampoco conoce un medio para calcular el área del círculo.

Por último, la manipulación del modelo dinámico permite la exploración de figuras más complejas. Se puede llegar a la conclusión de que ampliando el número de lados del polígono se obtiene un área cada vez mayor, y por lo tanto, que la circunferencia optimiza el área para un perímetro determinado.

Conocimientos previos y obstáculos relacionados

El niño debe poder identificar y clasificar los polígonos de hasta seis lados, atendiendo al número de lados, así como la circunferencia y el círculo. Asimismo, el niño debe utilizar el vocabulario geométrico básico en la descripción de dichas formas.

La comprensión del número irracional es inaccesible para un niño en segundo ciclo de EP. El empleo de una plantilla cuadriculada puede llevar a interpretar la unidad de medida como la distancia entre dos vértices consecutivos en la cuadrícula, no solo en horizontal y en vertical, sino también en diagonal. Según Dickson, Brown y Gibson (1991), al terminar la EP, la mitad de los niños interpreta la unidad como la distancia no perpendicular entre líneas paralelas (figura A.4).



Segmentos de igual longitud. Figura de perímetro 8 unidades.

Figura A.4: Interpretación de la unidad como distancia no perpendicular entre líneas paralelas.

El niño construye sus propias figuras, tanto sobre papel como sobre la pantalla del ordenador. De esta forma, se evita la representación estereotipada de formas planas, que está en la génesis de diversos *obstáculos didácticos* recogidos en la literatura clásica (Castro, 2001).

El proceso de medida debe respetar asimismo una secuencia de estimación previa y el paso de unidades no-estándares a unidades estándares, antes de la aritmetización de la tarea (Dienes, 1997), para evitar que la tarea derive en una mera reproducción procedimental del cálculo aritmético de perímetros y áreas. Efectivamente, los niños de 10 años no parecen tener dificultades a la hora de calcular un perímetro, siempre y cuando el problema esté *nítidamente diseñado* (Dickson, Brown y Gibson, 1991). La codificación lingüística del problema determina la consecución de la tarea y se observa, por efecto del sistema educativo, una tendencia paulatina a confundir las nociones de perímetro y área (figura A.5). Además, el niño establece el *teorema en acto* (Vergnaud, 1990): Dos figuras de igual perímetro, necesariamente tienen igual área (Chamorro, 2005).

Experimentación

Maestras en activo desarrollan la actividad en centros públicos y concertados, durante el curso 2013/2014. Tal como se ha desarrollado en el apartado 3, el diseño de la actividad y los contenidos trabajados hacen que ésta se considere óptima en segundo

a) Aritmetización de la taréa:
el niño calcula el perímetro
sin dificultad.

b) Emergencia de obstáculos:
interferencia entre perímetro y área:
el 25 % de los niños
indica un perímetro de 60 unidades.

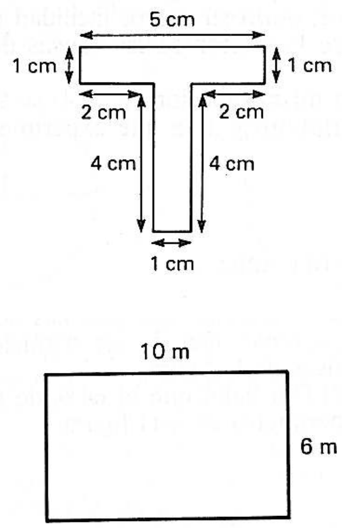


Figura A.5: Aritmetización de la tarea y emergencia de obstáculos.

ciclo de EP. A diferencia de los niños de segundo ciclo, que poseen una idea intuitiva del área, los niños de tercer ciclo poseen contenidos procedimentales relativos a unidades de área.

La muestra del grupo experimental está formada por 90 niños de segundo ciclo de EP. Además se dispone de una segunda muestra compuesta por 55 niños de tercer ciclo que cumple la función de grupo de control. Se pretende de esta forma contrastar el desarrollo de la actividad con niños que tienen una comprensión incipiente e intuitiva de los contenidos involucrados, perímetro y área, con niños que ya han trabajo aspectos procedimentales de estos mismos conocimientos bajo los supuestos que sirven de base a este trabajo. En la tabla A.1 se presenta la distribución de la muestra del grupo experimental.

Tabla A.1: Distribución de la muestra.

Centro	Curso	Número de niños
A	3	21
B	3	9
C	3-4	24
D	4	36
Total		90

Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos en las distintas fases de la situación (manipulación física, lápiz y papel, y modelo dinámico), para las muestras de segundo y tercer ciclo.

Segundo ciclo

Durante la fase de manipulación del material físico, los niños desarrollan principalmente formas geométricas regulares. Los niños proponen el rectángulo, el cuadrado, el pentágono, el hexágono e incluso la circunferencia (figura A.6). Las formas se construyen en el suelo y los niños introducen el pie dentro de la forma para estimar su medida.

Figura A.6: Producciones físicas de los niños con palillos.

Durante la fase de acción sobre papel, prevalecen las propuestas rectangulares, con una clara primacía del cuadrado. Las figuras poligonales con un número par de lados (hexágono, octógono, decágono) aparecen con una frecuencia ligeramente superior a aquellas con número impar de lados (pentágono, heptágono, endecágono). Las figuras con mayor número de lados aparecen en menor frecuencia y solo 4 niños proponen la circunferencia. Uno de cada seis niños incurre en el obstáculo de identificación de la unidad. La tabla A.2 muestra la distribución de respuestas dada por los niños en la actividad.

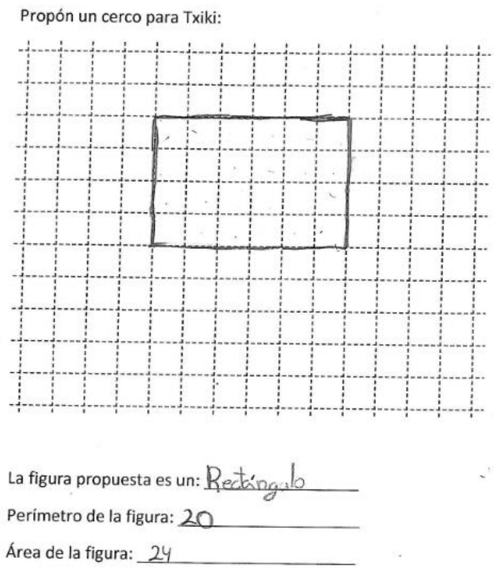
La figura A.7 presenta producciones rectangulares tipo de los niños. En particular, la figura *a*) presenta marcas de la estrategia de conteo sobre la cuadrícula, mientras que en la figura *b*) se ha explicitado un procedimiento aritmético para el cálculo del perímetro. En la figura A.8 se observa el obstáculo de equiparación perímetro-área.

Durante la fase de formulación cada niño presenta su propuesta. Tras una puesta en común y con los datos disponibles, fácilmente se llega a la conclusión de que el cuadrado optimiza el área para el perímetro dado. Así, para los niños en esta fase, el cuadrado es la propuesta "ganadora".

A pesar de que existen propuestas de figuras que aparentemente superan el área del cuadrado, al no haberse completado el cálculo del área, estas propuestas se descartan en la fase de formulación. Sin embargo, gracias a esta discusión, el uso del modelo dinámico en la siguiente actividad queda motivado para los niños.

La actividad en ordenador se desarrolla por parejas. Además, para asegurar el desarrollo pertinente de la sesión, dos maestras se encargan de guiar la actividad. La actividad se desarrolla sin pormenores, y los niños son capaces de completar la ficha (figura A.9). A pesar de que se observan pequeños errores aritméticos y de transcripción, la totalidad de los niños llega a la conclusión esperada: la circunferencia optimiza el área para el perímetro dado.

a) Área y perímetro distintos



b) Rectángulo
de área máxima: cuadrado
Cálculo del perímetro
por fórmula

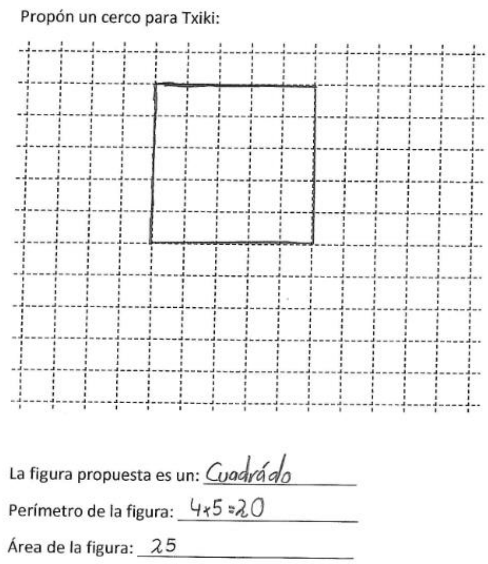


Figura A.7: Producciones tipo: cuadrado y rectángulo.

Tabla A.2: Resultados de la actividad sobre papel, segundo ciclo.

	Perímetro					Área			
Forma seleccionada	NP	PC	EC	EF	IDU	AC	EC	EF	MPR
Rectángulo	14	13	2	0	0	13	6	0	0
Cuadrado	37	32	3	2	2	34	10	0	1
Rombo	1	0	0	0	1	1	0	0	0
Pentágono	3	1	0	0	1	1	0	0	0
Hexágono	5	3	1	0	2	3	2	0	0
Heptágono	1	1	0	0	0	0	1	0	0
Octógono	5	1	2	0	3	2	2	0	0
Decágono	2	2	1	0	0	2	1	0	0
Endecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Dodecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0
Circunferencia	4	0	0	0	2	0	0	0	0
Nombre propio	8	4	1	0	4	6	3	0	0
En blanco	8	2	1	0	1	3	3	0	0
Total	90	61	11	2	16	57	28	0	1

NP: Número de propuestas; PC: Perímetro correcto;
EC: Explicita el conteo; EF: Explicita una fórmula;
IDU: Interpretación diagonal de la unidad
AC: Área correcta; MPR: Marca perímetro rígido

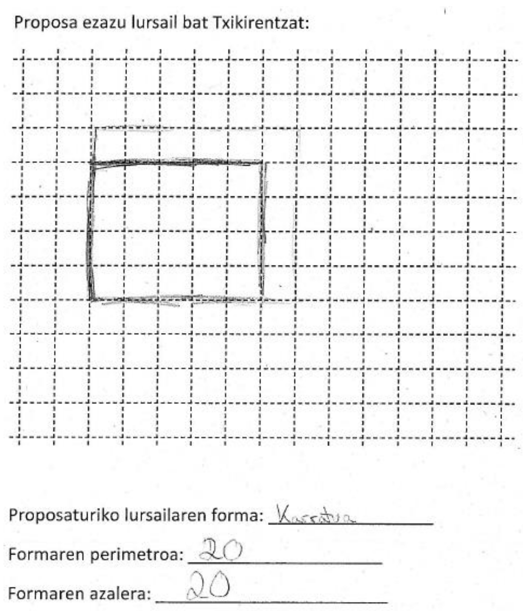
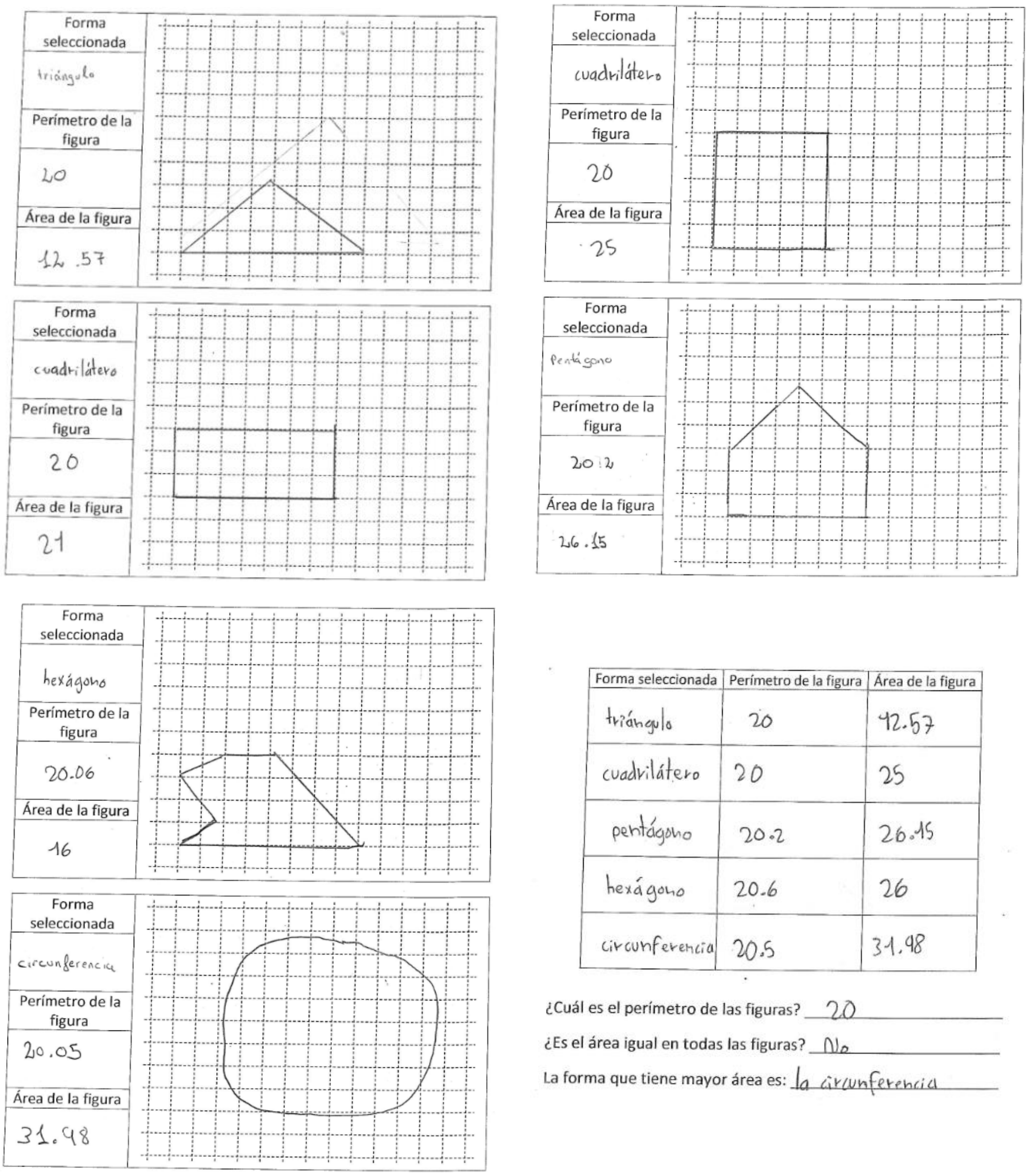


Figura A.8: Equiparación perímetro-área en 3er ciclo (obstáculo epistémico).



Forma seleccionada	Perímetro de la figura	Área de la figura
triángulo	20	12.57
cuadrilátero	20	25
pentágono	20.2	26.15
hexágono	20.6	26
circunferencia	20.5	31.48

¿Cuál es el perímetro de las figuras? 20

¿Es el área igual en todas las figuras? No

La forma que tiene mayor área es: la circunferencia

Figura A.9: Desarrollo tipo de la actividad con la asistencia del modelo dinámico.

Tercer ciclo

La actividad en tercer ciclo de EP se debe adecuar a las características de los niños. En particular, se omite la primera fase de manipulación física. En efecto, a los niños de 10 y 11 años se les puede solicitar el diseño de una producción abstracta sobre papel sin recurrir a la fase previa de familiarización con materiales físicos, puesto que se les ha presentado y han trabajado la noción de unidad de área. Además, desde el punto de vista afectivo, los niños de estas edades pueden sentir un cierto bochorno o rechazo en caso de que la actividad matemática se base en procedimientos de manipulación propio de los primeros ciclos de EP.

La primera actividad se desarrolla pues sobre papel y las propuestas de los niños son semejantes a aquellas presentadas por sus compañeros de segundo ciclo. Una vez más, el cuadrado es la figura que gana en las producciones sobre cuadrícula. El rectángulo se clasifica en segundo lugar, junto con las figuras irregulares con nombre propio (flecha, escalera, cruz, etc.). Los polígonos de más de cuatro lados son minoritarios. La tabla 3 muestra la distribución de respuestas dada por los niños. Los niños cometen más errores en el cálculo de perímetros que en el cálculo de áreas.

No existen diferencias significativas en las producciones de los niños de segundo y tercer ciclo. Al igual que en la muestra de segundo ciclo, la actividad en ordenador se desarrolla por parejas. Sin embargo, los estudiantes trabajan de forma autónoma en el ordenador y no se requiere de la guía de dos maestras para asegurar el desarrollo adecuado de la sesión. Los niños completan la ficha de forma eficaz.

Tabla A.3: Resultados de la actividad sobre papel, tercer ciclo.

	Perímetro					Área				
Forma seleccionada	NP	PC	EC	EF	IDU	AC	EC	EF	MPR	P=A
Rectángulo	8	1	0	1	0	7	4	1	0	7
Cuadrado	35	34	0	3	0	30	19	0	3	0
Pentágono	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Octógono	2	1	1	0	1	2	2	0	0	0
Dodecágono	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Nombre propio	8	5	4	1	1	7	5	0	0	0
Total	55	42	5	5	3	48	31	1	3	7

NP: Número de propuestas; PC: Perímetro correcto;
EC: Explicita el conteo; EF: Explicita una fórmula;
IDU: Interpretación diagonal de la unidad
AC: Área correcta; MPR: Marca perímetro rígido

Se observan errores aritméticos leves y de transcripción, pero estos errores no comprometen la actividad de la clase. La manipulación del modelo dinámico es correcta y la transcripción a papel de los casos observados lleva sin dificultad a la clase en su conjunto a aceptar la circunferencia como la forma plana que optimiza el área para un perímetro determinado. Aún más, atendiendo a las fases de acción, formulación y validación, los niños son capaces de llegar a esta conclusión sin la intervención explícita de la maestra.

Discusión de los resultados

En el soporte de lápiz y papel, los procedimientos empleados por los niños dan a entender que el conteo es la estrategia de base para el cálculo del perímetro y del área. En efecto, en toda da etapa, el 40 % explicita el conteo en sus producciones, en forma de puntos, marcas o numerales en la cuadrícula y dentro de cada cuadrado computado (figura A.10).

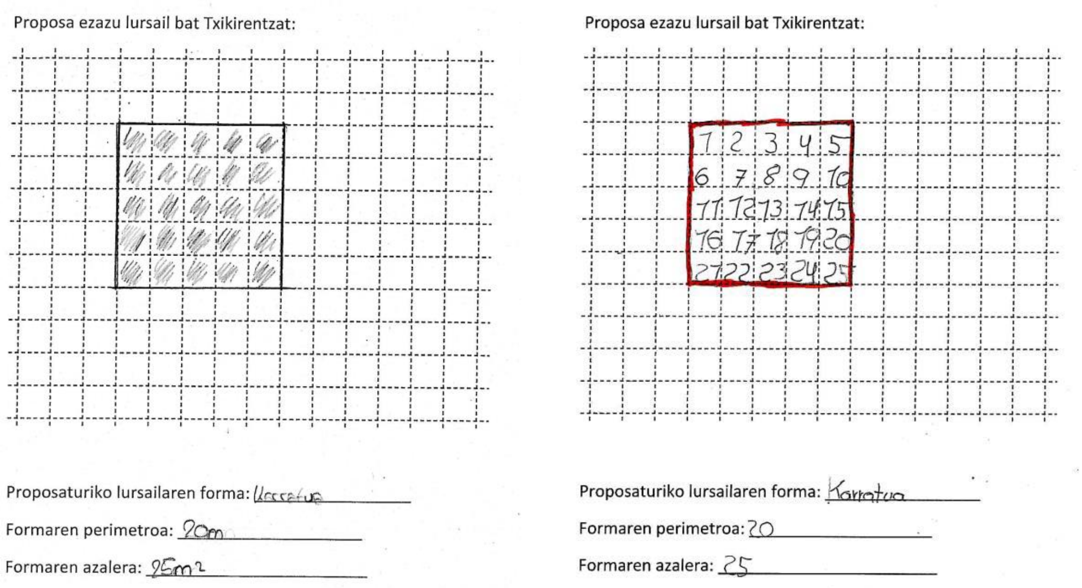


Figura A.10: Conteo explícito de unidades de área.

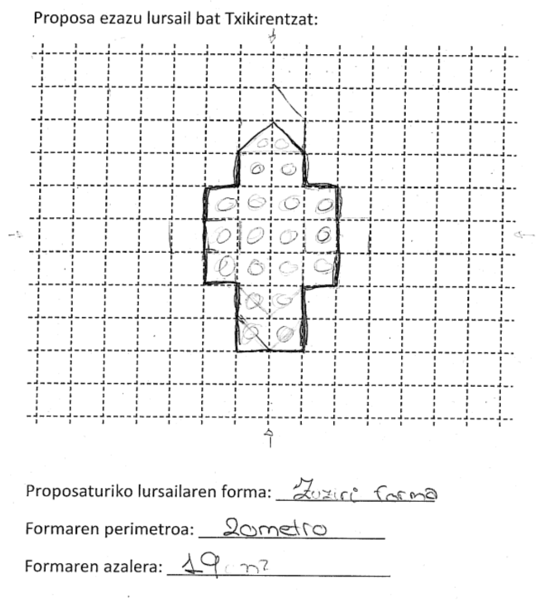
A diferencia del conteo, la descomposición no es un conocimiento operativo para la determinación de áreas en segundo ciclo. Sin embrago, la génesis escolar del cálculo de áreas mediante fórmulas, permite a los niños de tercer ciclo calcular el área de un triángulo en función del área del cuadrado, a partir de fracciones sencillas (figura A.11).

La interpretación de la unidad como distancia entre vértices consecutivos de la cuadrícula, también en diagonal, se corrige a lo largo de la etapa. El 16 % de los niños de segundo ciclo incurre en este error, mientras que solamente el 5 % de los niños de tercer ciclo lo comete (tablas A.2 y A.3). El grupo de control permite observar, de esta manera, que existe una tendencia a superar el obstáculo “identificación de la unidad como distancia no perpendicular entre líneas paralelas” durante la etapa.

El uso de una cuadrícula durante la fase de acción sobre papel, fuerza la aparición de formas principalmente rectangulares (tabla A.4). El porcentaje de niños que durante esta fase identifica el cuadrado como la figura que optimiza el área dentro de la familia de los cuadriláteros incrementa considerablemente de un ciclo a otro.

Tabla A.4: Propuestas rectangulares o cuadradas.

Ciclo	Total	Cuadrado	Rectángulo	P=A en rectángulos
2	57 %	41 %	16 %	0 %
3	78 %	63 %	15 %	13 %



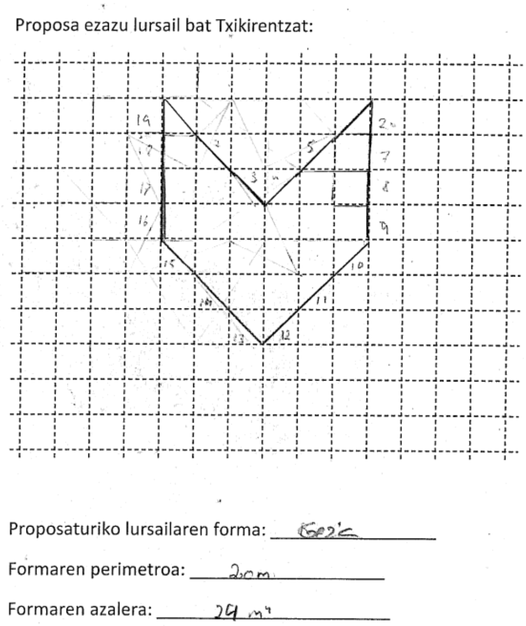


Figura A.11: Cálculo de área por descomposición de un cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles.

En las propuestas de tercer ciclo, los niños que proponen formas rectangulares asignan el mismo valor al área y al perímetro de la figura (figura 6c): ningún niño de segundo ciclo ha incurrido en la identificación P=A, mientras que en tercer ciclo la tasa ha sido del 13 %. Tal y como se ha dicho, la principal diferencia entre los niños de segundo y tercer ciclo es que estos últimos trabajan de forma procedimental el cálculo de perímetro y área, por lo que hay indicios para conjeturar que estos procesos generan el obstáculo didáctico "identificación perímetro-área".

Por último, debido al diseño de la construcción, el modelo dinámico permite potencialmente la construcción de formas singulares, tales como figuras que no corresponden a un polígono determinado por tener lados cruzados, o polígonos que colapsan al coincidir dos de sus vértices en un mismo punto (figura A.12). A pesar de existir esta posibilidad, los niños proponen formas simples y, por lo tanto, en la actividad los niños no generan monstruos, en el sentido de Lakatos (1976).

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

La elección de la circunferencia como figura óptima pasa de ser anecdótica en las propuestas sobre papel, a ser la propuesta unánime a la hora de realizar la actividad con la asistencia del modelo dinámico (figura A.13). Este hecho evidencia que los conocimientos aritméticos y pre-algebraicos de los niños, correspondientes a un *nivel* 0 *de algebrización*, permiten identificar el cuadrado como la figura óptima, y que la cuadrícula induce también ésta identificación, en consonancia con propuestas de otros autores (p.e., Ribeiro, 2013). Es decir, a pesar de que el umbral aritmético de maestría de los niños marca ésta frontera, el modelo dinámico permite avanzar en la construcción de nuevas figuras inaccesibles a los alumnos desde el punto de vista aritmético-figurativo y pre-algebraico.

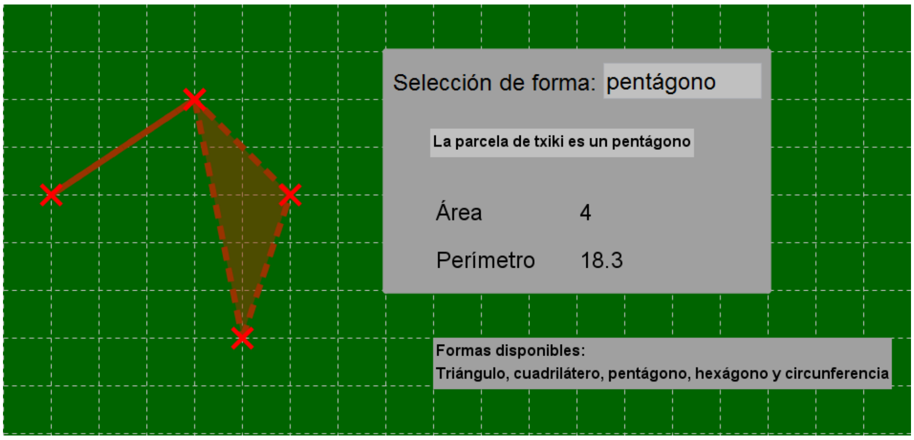


Figura A.12: *Monstruo* (Lakatos, 1976) a partir del modelo dinámico.

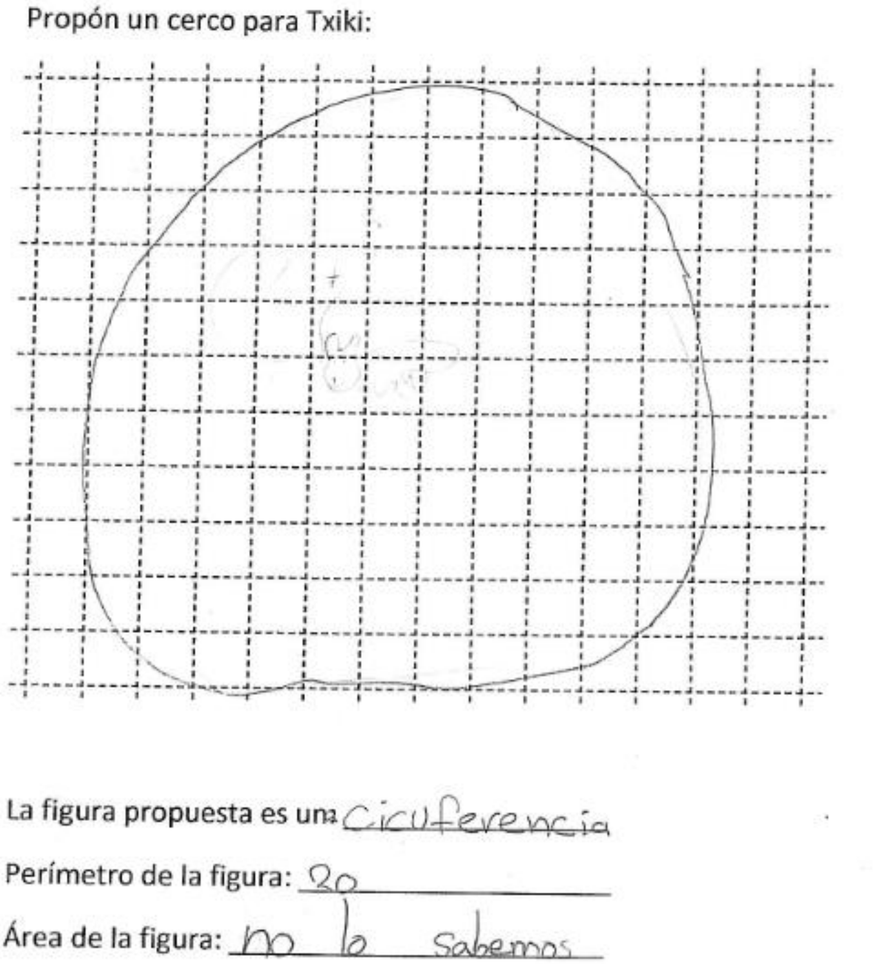
El software dinámico demuestra así su potencial como instrumento de *exploración* (Lasa y Wilhelmi, 2013b) y permite avanzar hacia un *nivel incipiente de algebrización*, *nivel* 1 según Godino et al. (2012, 2014). Así, los valores numéricos variables y los modelos dinámicos de figuras geométricas que participan en la práctica operativa generalizan el uso extensivo del número y del objeto geométrico.

A diferencia del soporte de lápiz y papel, el modelo dinámico presenta distancias y áreas en forma de valores cambiantes. Al manipular el vértice de una figura, el niño se decanta por una localización del punto en previsión del valor que aparecerá en pantalla. Asimismo, el niño advierte que, para obtener un área mayor, se debe incrementar el número de lados del polígono en el modelo dinámico. Por lo tanto, existe un razonamiento que reconoce una regla o patrón, en forma de tendencia, dentro de la actividad matemática.

En particular, una vez las figuras manipuladas en el modelo dinámico se transcriben sobre papel, la secuencia de transcripciones hace ver que a mayor número de lados, se obtiene con frecuencia un área también mayor. Así, los niños adecuan su significado personal al significado institucional pretendido, es decir, aceptan que la circunferencia es la figura que maximiza el área para un perímetro dado.

La Enseñanza basada en modelos, la Educación matemática realista o la Génesis instrumental (Bu y Schoen, 2011) son algunos ejemplos de teorías de la educación interesadas en el software dinámico. En este trabajo, la articulación de estos enfoques con la TSDM y el EOS, ha permitido el diseño de ciertas prácticas operativas y discursivas asistidas mediante el instrumento GeoGebra. El diseño de una situación de optimización (circunferencia como figura de área máxima) ha permitido el uso pertinente de GeoGebra en segundo ciclo de primaria y la justificación de que esta actividad supone el progreso en los niveles de algebrización por los alumnos. Así, se aporta una línea de actuación para la adquisición paulatina por los niños de procedimientos algebraicos.

Es necesario incidir aquí, por un lado, en el análisis de la utilidad de los modelos dinámicos para el progreso en los diferentes niveles de algebrización y, por otro lado, en el uso de las herramientas teóricas aportadas por el EOS para el análisis de la actividad matemática. En concreto, además de las dualidades personal/institucional, intensivo/extensivo y ostensivo/ no ostensivo utilizadas en el análisis de la situación propuesta, son precisas investigaciones que tomen en consideración las dualidades conteni-



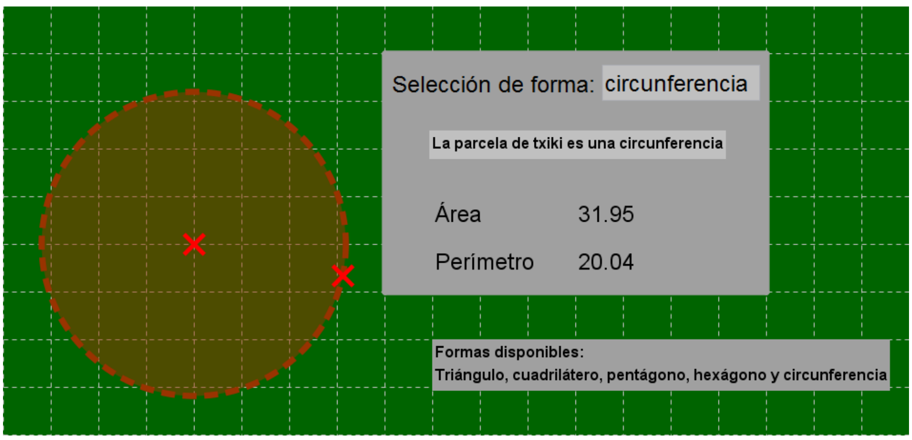


Figura A.13: La circunferencia: en soporte de papel y en modelo dinámico.

do/expresión y sistémico/unitario (figura 3.6) para el análisis de las prácticas operativas, discursivas y regulativas. Igualmente, se deberían describir configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) en las que el software dinámico, junto con soportes físicos o de otro tipo, participa como *instrumento* dentro del *medio material*.

Anexo B

Tablas de resultados

Tabla B.1: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables Ext y A (I).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e1	0	1	0	1	0	1
e2	0	1	1	1	1	0
e3	0	1	0	1	1	0
e4	0	1	0	1	1	0
e5	0	1	0	1	1	0
e6	0	1	0	1	1	0
e7	0	1	1	1	1	0
e8	0	1	0	1	1	0
e9	0	1	0	1	1	0
e10	0	1	1	1	1	0
e11	0	1	0	1	1	1
e12	0	1	0	0	1	0
e13	0	1	0	0	1	0
e14	0	1	1	0	1	0
e15	0	1	0	0	1	0
e16	0	1	0	0	1	0
e17	0	1	1	0	1	0
e18	0	1	0	0	1	0
e19	0	1	1	0	1	0
e20	0	1	0	0	1	0
e21	0	1	0	0	0	0
e22	0	1	1	0	1	0
e23	1	1	0	1	1	0
e24	1	1	0	1	1	0
e25	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	0	1	1	0
e27	1	1	0	1	1	0
e28	1	1	0	1	1	0
e29	1	1	1	1	1	0
e30	1	1	0	1	1	0
e31	1	1	1	1	1	0
e32	1	1	0	1	1	0
e33	1	1	1	1	1	0
e34	1	1	1	0	1	0
e35	1	1	1	0	1	0
e36	1	1	1	0	1	0
e37	1	1	0	0	1	0
e38	1	1	0	0	1	0
e39	1	1	0	0	1	0
e40	1	1	0	0	1	0
e41	1	1	1	0	1	0
e42	1	1	1	0	1	0
e43	1	1	1	0	1	0
e44	1	1	1	0	1	0
e46	1	1	1	1	1	0
e47	1	1	1	1	1	0
e48	1	1	1	1	1	0
e49	1	1	1	1	1	0
e50	1	1	1	1	1	0
e51	1	1	1	1	1	0
e52	1	1	0	1	1	0
e53	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	1	1	0
e55	1	1	0	1	1	0
e56	1	1	0	1	1	0
e57	1	1	0	1	1	0
e61	1	1	1	0	1	0
e62	1	1	0	0	1	0
e63	1	1	0	0	1	0
e64	1	1	0	0	1	0
e65	1	1	0	0	1	0
e66	1	1	0	0	1	0
e67	1	1	1	0	1	0
e68	1	1	0	0	1	0
e69	1	1	1	0	1	0
e70	1	1	1	0	1	0
e71	1	1	0	0	1	0
e72	1	1	1	0	1	0
e73	1	1	0	0	1	0
e74	1	1	1	0	1	0
e75	1	1	1	0	1	0
e76	0	1	1	1	1	0
e77	0	1	1	1	1	0
e78	0	1	1	1	1	0
e79	0	1	1	1	1	0
e80	0	1	1	1	1	0

Tabla B.2: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables Ext y A (II).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e81	0	1	0	1	1	0
e82	0	1	0	1	1	0
e83	0	1	0	1	1	0
e84	0	1	0	1	1	0
e85	0	1	0	1	1	0
e86	0	1	0	0	1	0
e87	0	1	0	0	1	0
e88	0	1	1	0	1	0
e89	0	1	0	0	1	0
e90	0	1	0	0	1	0
e91	0	1	0	0	1	1
e92	0	1	1	0	1	0
e93	0	1	1	0	1	0
e94	0	1	1	0	1	0
e95	0	1	1	0	1	0
e96	0	0	1	1	1	0
e97	0	0	0	1	1	0
e98	0	0	0	1	1	0
e99	0	0	1	1	0	0
e100	0	0	0	1	1	0
e101	0	0	0	1	1	0
e102	0	0	1	1	0	0
e103	0	0	0	1	1	0
e104	0	0	1	1	1	0
e107	0	0	1	1	1	0
e108	0	0	0	0	1	0
e109	0	0	1	0	1	0
e110	0	0	0	0	1	0
e111	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	1	0	0	0
e113	0	0	1	0	0	0
e114	0	0	1	0	1	0
e115	0	0	0	0	1	0
e116	0	0	0	0	1	0
e117	0	0	0	0	1	0
e118	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	1	0
e120	0	0	0	0	1	1
e121	0	0	0	0	1	0
e122	0	0	0	0	1	0
e123	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	1	0	0
e126	1	1	0	1	1	1
e127	1	1	0	1	1	1
e128	1	1	0	1	1	0
e129	1	1	0	1	1	0
e130	1	1	1	1	1	0
e131	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0
e133	1	1	1	1	1	0
e134	1	1	1	1	1	0
e135	1	1	1	1	1	0
e136	1	1	1	1	1	0
e137	1	1	0	1	1	0
e138	1	1	0	1	1	0
e139	1	1	0	0	1	0
e140	1	1	1	0	1	0
e141	1	1	1	0	1	0
e142	1	1	1	0	1	1
e143	1	1	0	0	1	0
e144	1	1	1	0	1	0
e145	1	1	0	0	1	0
e146	1	1	1	0	1	0
e147	1	1	1	0	1	0
e148	1	1	0	0	1	0
e149	1	1	0	0	1	0
e150	1	1	0	0	1	0
e151	1	1	0	0	1	0
e152	1	1	1	0	1	0
e153	1	1	1	0	1	0
e154	1	1	0	0	1	0
Suma	79	121	63	68	137	7
%	53,4	81,8	42,6	45,9	92,6	4,7

Tabla B.3: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables B (I).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e3	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
e4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
e7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e12	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e13	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e14	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e15	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
e16	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
e17	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e18	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e19	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e20	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e22	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e23	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e24	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e25	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e26	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e27	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e28	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e29	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e30	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e31	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e32	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e34	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e35	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e36	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e37	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e38	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e39	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e40	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e41	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e42	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
e43	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e44	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e46	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e47	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e48	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e49	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e50	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e51	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
e52	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e53	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e54	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e55	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e56	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e57	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e61	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e62	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e63	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e64	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e65	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e66	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e67	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e68	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
e69	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e70	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e72	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e73	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e74	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e75	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e76	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e77	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e78	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e79	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.4: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables B (II).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e81	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e84	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e85	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e86	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e87	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e88	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e90	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e91	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e92	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e93	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e94	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e95	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e96	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e97	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e98	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e99	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e100	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e101	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e102	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e103	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e108	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e109	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e110	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e112	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e113	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e114	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e115	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e116	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e117	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e118	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e119	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e120	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e121	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e122	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e127	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e128	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e129	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e130	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e131	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e132	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e133	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e134	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e135	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e136	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e137	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e138	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e139	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e140	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e141	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
e142	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e143	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e145	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e146	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e147	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e148	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
e149	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e150	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e151	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e152	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e153	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
e154	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Suma	142	90	25	32	33	55	18	23	5	79	2	13
%	95,9	60,8	16,9	21,6	22,3	37,2	12,2	15,5	3,4	53,4	1,4	8,8

Tabla B.5: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables C (I).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e2	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e3	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e4	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
e5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
e6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e7	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
e8	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e9	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e10	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e11	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e12	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e13	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e14	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e18	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e19	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e20	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e21	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e22	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e23	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e24	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e25	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e26	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e27	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e28	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e29	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e30	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e31	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e32	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e33	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e34	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e35	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e36	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e37	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e38	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e39	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e40	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e41	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e42	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e43	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e44	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e46	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e47	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e48	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e49	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e50	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e51	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e52	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e53	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e54	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e55	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e56	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e57	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e61	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e62	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e63	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e64	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e65	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e66	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e67	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e68	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e69	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e70	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e71	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e72	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e73	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e74	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e75	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e76	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e77	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e78	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e79	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.6: Respuestas por estudiante: tarea T1, variables C (II).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e81	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e82	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e83	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e84	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e85	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e86	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e87	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e88	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e90	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e91	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e92	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e93	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e94	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e95	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e96	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e97	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e98	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e99	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e100	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e101	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e102	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e103	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e108	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e109	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e110	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e113	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e114	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e115	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e116	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e117	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e118	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e119	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e120	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
e121	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e122	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e127	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e128	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e129	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e130	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e131	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e133	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e134	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e135	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e136	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e137	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e138	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
e139	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e140	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e141	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e142	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e143	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e145	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e146	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e147	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e148	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e149	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e150	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e151	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e152	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e153	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e154	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
Suma	129	5	3	101	95	36	100	95	104	101	4	29	53
%	87,2	3,4	2,0	68,2	64,2	24,3	67,6	64,2	70,3	68,2	2,7	19,6	35,8

Tabla B.7: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables Ext y A (I).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e1	0	1	0	1	0	1
e2	0	1	1	1	1	0
e3	0	1	0	1	0	0
e4	0	1	0	1	0	0
e5	0	1	0	1	1	0
e6	0	1	0	1	1	0
e7	0	1	1	1	0	0
e8	0	1	0	1	1	0
e9	0	1	0	1	1	0
e10	0	1	1	1	1	0
e11	0	1	0	1	0	1
e12	0	1	0	0	1	0
e13	0	1	0	0	1	0
e14	0	1	1	0	1	0
e15	0	1	0	0	1	0
e16	0	1	0	0	1	0
e17	0	1	1	0	0	0
e18	0	1	0	0	0	0
e19	0	1	1	0	1	0
e20	0	1	0	0	1	0
e21	0	1	0	0	1	0
e22	0	1	1	0	1	0
e23	1	1	0	1	1	0
e24	1	1	0	1	1	0
e25	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	0	1	1	0
e27	1	1	0	1	1	0
e28	1	1	0	1	1	0
e29	1	1	1	1	1	0
e30	1	1	0	1	1	0
e31	1	1	1	1	1	0
e32	1	1	0	1	1	0
e33	1	1	1	1	1	0
e34	1	1	1	0	1	0
e35	1	1	1	0	1	0
e36	1	1	1	0	1	0
e37	1	1	0	0	1	0
e38	1	1	0	0	1	0
e39	1	1	0	0	1	0
e40	1	1	0	0	1	0
e41	1	1	1	0	1	0
e42	1	1	1	0	1	0
e43	1	1	1	0	1	0
e44	1	1	1	0	1	0
e46	1	1	1	1	1	0
e47	1	1	1	1	1	0
e48	1	1	1	1	1	0
e49	1	1	1	1	1	0
e50	1	1	1	1	1	0
e51	1	1	1	1	1	0
e52	1	1	0	1	1	0
e53	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	1	1	0
e55	1	1	0	1	1	0
e56	1	1	0	1	1	0
e57	1	1	0	1	0	0
e61	1	1	1	0	1	0
e62	1	1	0	0	1	0
e63	1	1	0	0	1	0
e64	1	1	0	0	0	0
e65	1	1	0	0	1	0
e66	1	1	0	0	1	0
e67	1	1	1	0	1	0
e68	1	1	0	0	1	0
e69	1	1	1	0	1	0
e70	1	1	1	0	1	0
e71	1	1	0	0	1	0
e72	1	1	1	0	1	0
e73	1	1	0	0	1	0
e74	1	1	1	0	1	0
e75	1	1	1	0	1	0
e76	0	1	1	1	0	0
e77	0	1	1	1	1	0
e78	0	1	1	1	1	0
e79	0	1	1	1	1	0
e80	0	1	1	1	1	0

Tabla B.8: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables Ext y A (II).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e81	0	1	0	1	1	0
e82	0	1	0	1	1	0
e83	0	1	0	1	0	0
e84	0	1	0	1	0	0
e85	0	1	0	1	0	0
e86	0	1	0	0	1	0
e87	0	1	0	0	1	0
e88	0	1	1	0	1	0
e89	0	1	0	0	1	0
e90	0	1	0	0	1	0
e91	0	1	0	0	0	0
e92	0	1	1	0	1	0
e93	0	1	1	0	1	0
e94	0	1	1	0	1	0
e95	0	1	1	0	1	0
e96	0	0	1	1	0	0
e97	0	0	0	1	1	0
e98	0	0	0	1	1	0
e99	0	0	1	1	0	0
e100	0	0	0	1	0	0
e101	0	0	0	1	0	0
e102	0	0	1	1	0	0
e103	0	0	0	1	0	0
e104	0	0	1	1	1	0
e107	0	0	1	1	1	0
e108	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	1	0	1	0
e110	0	0	0	0	1	0
e111	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	1	0	0	0
e113	0	0	1	0	0	0
e114	0	0	1	0	0	0
e115	0	0	0	0	1	0
e116	0	0	0	0	1	0
e117	0	0	0	0	1	0
e118	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	0	1
e120	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0
e122	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	1	0	0
e126	1	1	0	1	1	0
e127	1	1	0	1	1	0
e128	1	1	0	1	1	0
e129	1	1	0	1	1	0
e130	1	1	1	1	0	0
e131	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0
e133	1	1	1	1	1	0
e134	1	1	1	1	1	0
e135	1	1	1	1	1	0
e136	1	1	1	1	0	0
e137	1	1	0	1	0	0
e138	1	1	0	1	0	0
e139	1	1	0	0	1	0
e140	1	1	1	0	1	0
e141	1	1	1	0	0	0
e142	1	1	1	0	1	0
e143	1	1	0	0	1	0
e144	1	1	1	0	1	0
e145	1	1	0	0	1	0
e146	1	1	1	0	1	0
e147	1	1	1	0	1	0
e148	1	1	0	0	0	0
e149	1	1	0	0	1	0
e150	1	1	0	0	1	0
e151	1	1	0	0	0	0
e152	1	1	1	0	1	0
e153	1	1	1	0	1	0
e154	1	1	0	0	1	0
Suma	79	121	63	68	108	3
%	53,4	81,8	42,6	45,9	73,0	2,0

Tabla B.9: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables B (I).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
e2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e12	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e13	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e16	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e17	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e18	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e19	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
e20	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e22	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e23	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e24	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e25	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e26	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e27	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e28	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e29	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e30	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e31	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e32	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e34	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e35	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e36	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
e37	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e38	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e39	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e40	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e41	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e42	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e43	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e44	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e46	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e47	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e48	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e49	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e50	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e51	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e52	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e53	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e54	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e55	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e56	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e61	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
e62	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e63	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e64	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e65	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
e66	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e67	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e68	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
e69	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e70	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e72	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e73	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e74	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e75	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e76	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e77	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e78	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.10: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables B (II).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e84	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e85	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e86	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e87	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e88	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e90	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e93	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e94	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e95	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e97	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e116	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e122	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e127	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e128	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e129	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e130	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e131	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e133	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e134	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e135	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e136	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e137	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e138	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e139	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e140	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e141	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e142	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e143	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e145	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e146	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e147	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e149	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e151	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e152	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e153	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e154	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
Suma	105	72	22	19	15	24	17	8	3	46	0	8
%	70,9	48,6	14,9	12,8	10,1	16,2	11,5	5,4	2,0	31,1	0,0	5,4

Tabla B.11: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables C (I).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e6	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e9	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e10	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e19	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e20	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e23	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e24	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
e25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e26	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e27	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
e28	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e29	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e30	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e31	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e32	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e34	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e35	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e36	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e37	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e38	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e39	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e40	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e41	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e42	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e43	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e44	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e46	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e47	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e48	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e49	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e50	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e51	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e52	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e53	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e55	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e56	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e61	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e62	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e63	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e64	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e65	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e66	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
e67	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e68	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e69	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e70	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e71	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e72	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e73	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e74	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e75	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e76	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e77	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e78	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e79	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.12: Respuestas por estudiante: tarea T2, variables C (II).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e81	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e82	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e83	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e85	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
e86	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e88	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e89	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e90	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e93	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e94	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e95	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e97	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e116	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e119	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e122	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e127	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e128	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e129	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e130	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e131	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e133	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e134	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e135	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e136	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e137	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e138	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e139	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e140	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e141	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e142	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e143	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e145	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
e146	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e147	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e148	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e149	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e150	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e151	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e152	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e153	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e154	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Suma	113	2	3	43	41	38	58	40	61	44	0	46	31
%	76,4	1,4	2,0	29,1	27,7	25,7	39,2	27,0	41,2	29,7	0,0	31,1	20,9

Tabla B.13: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables Ext y A (I).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e1	0	1	0	1	0	0
e2	0	1	1	1	1	0
e3	0	1	0	1	0	0
e4	0	1	0	1	0	0
e5	0	1	0	1	1	0
e6	0	1	0	1	1	0
e7	0	1	1	1	0	0
e8	0	1	0	1	1	0
e9	0	1	0	1	1	0
e10	0	1	1	1	1	0
e11	0	1	0	1	0	0
e12	0	1	0	0	1	0
e13	0	1	0	0	1	0
e14	0	1	1	0	1	0
e15	0	1	0	0	1	0
e16	0	1	0	0	1	0
e17	0	1	1	0	0	0
e18	0	1	0	0	0	0
e19	0	1	1	0	1	0
e20	0	1	0	0	1	0
e21	0	1	0	0	1	0
e22	0	1	1	0	1	0
e23	1	1	0	1	1	0
e24	1	1	0	1	1	0
e25	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	0	1	1	0
e27	1	1	0	1	0	0
e28	1	1	0	1	0	0
e29	1	1	1	1	1	0
e30	1	1	0	1	1	0
e31	1	1	1	1	1	0
e32	1	1	0	1	0	0
e33	1	1	1	1	1	0
e34	1	1	1	0	1	0
e35	1	1	1	0	1	0
e36	1	1	1	0	1	0
e37	1	1	0	0	1	0
e38	1	1	0	0	1	0
e39	1	1	0	0	1	0
e40	1	1	0	0	1	0
e41	1	1	1	0	1	0
e42	1	1	1	0	1	0
e43	1	1	1	0	1	0
e44	1	1	1	0	1	0
e46	1	1	1	1	1	0
e47	1	1	1	1	1	0
e48	1	1	1	1	0	0
e49	1	1	1	1	1	0
e50	1	1	1	1	1	0
e51	1	1	1	1	1	0
e52	1	1	0	1	1	0
e53	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	1	0	0
e55	1	1	0	1	1	0
e56	1	1	0	1	0	0
e57	1	1	0	1	0	0
e61	1	1	1	0	1	0
e62	1	1	0	0	1	0
e63	1	1	0	0	1	0
e64	1	1	0	0	1	0
e65	1	1	0	0	1	0
e66	1	1	0	0	1	0
e67	1	1	1	0	1	0
e68	1	1	0	0	1	0
e69	1	1	1	0	0	0
e70	1	1	1	0	1	0
e71	1	1	0	0	1	0
e72	1	1	1	0	1	0
e73	1	1	0	0	1	0
e74	1	1	1	0	1	0
e75	1	1	1	0	1	0
e76	0	1	1	1	0	0
e77	0	1	1	1	1	0
e78	0	1	1	1	1	0
e79	0	1	1	1	1	0
e80	0	1	1	1	1	0

Tabla B.14: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables Ext y A (II).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e81	0	1	0	1	1	0
e82	0	1	0	1	0	0
e83	0	1	0	1	0	0
e84	0	1	0	1	1	0
e85	0	1	0	1	1	0
e86	0	1	0	0	1	0
e87	0	1	0	0	1	0
e88	0	1	1	0	0	0
e89	0	1	0	0	1	0
e90	0	1	0	0	1	0
e91	0	1	0	0	0	0
e92	0	1	1	0	1	0
e93	0	1	1	0	1	0
e94	0	1	1	0	1	0
e95	0	1	1	0	1	0
e96	0	0	1	1	0	0
e97	0	0	0	1	0	0
e98	0	0	0	1	0	0
e99	0	0	1	1	0	0
e100	0	0	0	1	0	0
e101	0	0	0	1	0	0
e102	0	0	1	1	0	0
e103	0	0	0	1	0	0
e104	0	0	1	1	0	0
e107	0	0	1	1	0	0
e108	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	1	0	1	0
e110	0	0	0	0	1	0
e111	0	0	0	0	1	0
e112	0	0	1	0	0	0
e113	0	0	1	0	0	0
e114	0	0	1	0	0	0
e115	0	0	0	0	1	0
e116	0	0	0	0	1	0
e117	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0
e122	0	0	0	0	1	0
e123	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	1	0	0
e126	1	1	0	1	1	0
e127	1	1	0	1	1	0
e128	1	1	0	1	1	0
e129	1	1	0	1	1	0
e130	1	1	1	1	0	0
e131	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0
e133	1	1	1	1	0	0
e134	1	1	1	1	1	0
e135	1	1	1	1	1	0
e136	1	1	1	1	0	0
e137	1	1	0	1	0	0
e138	1	1	0	1	0	0
e139	1	1	0	0	0	0
e140	1	1	1	0	1	0
e141	1	1	1	0	1	0
e142	1	1	1	0	1	0
e143	1	1	0	0	1	0
e144	1	1	1	0	1	0
e145	1	1	0	0	1	0
e146	1	1	1	0	1	0
e147	1	1	1	0	1	0
e148	1	1	0	0	0	0
e149	1	1	0	0	1	0
e150	1	1	0	0	0	0
e151	1	1	0	0	1	0
e152	1	1	1	0	1	0
e153	1	1	1	0	0	0
e154	1	1	0	0	1	0
Suma	79	121	63	68	97	0
%	53,4	81,8	42,6	45,9	65,5	0,0

Tabla B.15: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables B (I).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e12	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e13	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e14	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e15	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
e16	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e17	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e19	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
e20	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e22	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e23	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e24	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e25	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e27	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e29	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e30	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e31	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e34	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e35	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e36	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e37	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e38	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e39	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e40	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e41	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e42	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e43	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e44	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e47	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e49	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e51	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e52	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e62	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e63	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
e64	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e65	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
e66	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e67	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
e68	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
e69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e72	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e73	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
e74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e75	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
e76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e79	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.16: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables B (II).

	B											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
e81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e84	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e85	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
e86	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e87	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e90	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e93	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e94	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
e95	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e116	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e122	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e127	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e128	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e129	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e130	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e131	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
e133	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e134	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e135	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e136	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e137	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e138	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e139	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e140	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e141	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e142	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e143	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e144	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e145	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e146	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e147	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
e148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e149	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e151	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e152	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
e153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e154	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Suma	70	59	25	25	10	28	8	5	0	42	0	5
%	47,3	39,9	16,9	16,9	6,8	18,9	5,4	3,4	0,0	28,4	0,0	3,4

Tabla B.17: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables C (I).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
e6	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e9	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e10	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e12	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e13	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e16	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e19	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
e20	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e22	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e23	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e24	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
e25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e26	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e27	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e29	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e31	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e34	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e35	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e36	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e37	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e38	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e39	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e40	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e41	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e42	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e43	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e44	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e46	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e47	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e49	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e50	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e51	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e52	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
e53	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e54	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e55	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e62	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e63	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e64	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e65	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e67	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e68	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e70	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e73	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e75	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e78	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e79	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.18: Respuestas por estudiante: tarea T3, variables C (II).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e81	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e85	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e86	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e90	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e93	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e94	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e95	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e116	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e122	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e124	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e127	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e128	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e129	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e130	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e131	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e133	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e134	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e135	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e136	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e137	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e138	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
e139	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e140	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e141	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e142	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e143	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e145	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e146	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e147	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e148	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e149	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
e150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e151	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e152	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e153	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e154	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
Suma	84	0	2	43	44	26	45	40	49	47	1	19	23
%	56,8	0,0	1,4	29,1	29,7	17,6	30,4	27,0	33,1	31,8	0,7	12,8	15,5

Tabla B.19: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables Ext y A (I).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e1	0	1	0	1	0	0
e2	0	1	1	1	0	0
e3	0	1	0	1	0	0
e4	0	1	0	1	1	0
e5	0	1	0	1	1	0
e6	0	1	0	1	1	0
e7	0	1	1	1	0	0
e8	0	1	0	1	1	0
e9	0	1	0	1	1	0
e10	0	1	1	1	1	0
e11	0	1	0	1	1	0
e12	0	1	0	0	1	0
e13	0	1	0	0	1	0
e14	0	1	1	0	1	0
e15	0	1	0	0	1	0
e16	0	1	0	0	1	0
e17	0	1	1	0	1	0
e18	0	1	0	0	1	0
e19	0	1	1	0	1	0
e20	0	1	0	0	1	0
e21	0	1	0	0	1	0
e22	0	1	1	0	0	0
e23	1	1	0	1	1	0
e24	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	0	1	1	0
e27	1	1	0	1	1	0
e28	1	1	0	1	1	0
e29	1	1	1	1	1	0
e30	1	1	0	1	1	0
e31	1	1	1	1	1	0
e32	1	1	0	1	1	0
e33	1	1	1	1	1	0
e34	1	1	1	0	1	0
e35	1	1	1	0	1	0
e36	1	1	1	0	1	0
e37	1	1	0	0	1	0
e38	1	1	0	0	1	0
e39	1	1	0	0	1	0
e40	1	1	0	0	1	1
e41	1	1	1	0	1	0
e42	1	1	1	0	1	0
e43	1	1	1	0	1	0
e44	1	1	1	0	1	0
e45	1	1	1	0	1	0
e48	1	1	1	1	1	0
e49	1	1	1	1	1	0
e50	1	1	1	1	1	0
e51	1	1	1	1	1	0
e52	1	1	0	1	1	0
e53	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	1	1	0
e55	1	1	0	1	1	0
e56	1	1	0	1	1	0
e57	1	1	0	1	1	0
e59	1	1	0	1	1	0
e60	1	1	0	1	1	0
e61	1	1	1	0	1	0
e62	1	1	0	0	0	0
e63	1	1	0	0	1	0
e64	1	1	0	0	1	0
e65	1	1	0	0	1	0
e66	1	1	0	0	1	0
e67	1	1	1	0	1	0
e68	1	1	0	0	1	0
e69	1	1	1	0	1	0
e70	1	1	1	0	1	0
e71	1	1	0	0	1	0
e72	1	1	1	0	1	0
e73	1	1	0	0	1	0
e74	1	1	1	0	1	0
e75	1	1	1	0	1	0
e76	0	1	1	1	1	0
e77	0	1	1	1	1	0
e78	0	1	1	1	1	0
e79	0	1	1	1	1	0
e80	0	1	1	1	1	0

Tabla B.20: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables Ext y A (II).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e81	0	1	0	1	1	1
e82	0	1	0	1	0	0
e83	0	1	0	1	1	0
e84	0	1	0	1	1	0
e85	0	1	0	1	1	0
e86	0	1	0	0	1	0
e88	0	1	1	0	1	0
e89	0	1	0	0	1	0
e90	0	1	0	0	1	0
e91	0	1	0	0	1	1
e92	0	1	1	0	1	0
e93	0	1	1	0	1	0
e94	0	1	1	0	1	0
e95	0	1	1	0	1	0
e96	0	0	1	1	1	0
e98	0	0	0	1	1	0
e99	0	0	1	1	1	0
e100	0	0	0	1	1	0
e101	0	0	0	1	1	0
e102	0	0	1	1	1	0
e103	0	0	0	1	1	0
e104	0	0	1	1	1	0
e105	0	0	1	1	1	0
e106	0	0	1	1	1	0
e107	0	0	1	1	1	0
e109	0	0	1	0	0	0
e110	0	0	0	0	1	0
e111	0	0	0	0	1	1
e112	0	0	1	0	1	0
e113	0	0	1	0	1	0
e114	0	0	1	0	1	0
e115	0	0	0	0	1	0
e118	0	0	0	0	1	0
e120	0	0	0	0	1	0
e123	0	0	0	0	1	1
e125	1	1	0	1	1	0
e126	1	1	0	1	1	0
e127	1	1	0	1	1	0
e128	1	1	0	1	1	0
e129	1	1	0	1	1	0
e130	1	1	1	1	1	0
e131	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0
e133	1	1	1	1	1	0
e134	1	1	1	1	1	0
e135	1	1	1	1	1	0
e136	1	1	1	1	1	0
e137	1	1	0	1	1	0
e138	1	1	0	1	1	0
e140	1	1	1	0	1	0
e141	1	1	1	0	1	0
e142	1	1	1	0	1	1
e143	1	1	0	0	1	0
e144	1	1	1	0	1	0
e145	1	1	0	0	1	0
e146	1	1	1	0	1	0
e147	1	1	1	0	1	0
e148	1	1	0	0	1	0
e149	1	1	0	0	1	0
e150	1	1	0	0	1	0
e151	1	1	0	0	1	0
e152	1	1	1	0	1	1
e153	1	1	1	0	1	0
e154	1	1	0	0	1	0
	79	121	63	68	132	7
	53,4	81,8	42,6	45,9	89,2	4,7

Tabla B.21: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables BN (I).

	BN													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e3	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
e4	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e6	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e7	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e8	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e9	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e10	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e11	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e12	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e13	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e14	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e15	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e16	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e17	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e18	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e19	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e20	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e21	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e22	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e23	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e24	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e27	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e28	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e29	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e30	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e31	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e32	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e33	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e34	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e35	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e36	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
e37	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e38	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e39	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e40	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e41	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e42	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
e43	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e44	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e45	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
e48	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e49	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e50	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e51	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e52	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e53	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e55	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e56	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e57	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e59	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e60	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e61	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e62	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e63	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
e64	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e65	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e66	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e67	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e68	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
e69	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e70	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e71	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
e72	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e73	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e74	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e75	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e76	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e77	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e78	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e79	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e80	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0

Tabla B.22: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables BN (II).

	BN													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e81	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e84	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e85	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e86	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e88	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e89	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e90	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e91	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e92	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e93	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e94	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e95	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e96	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e98	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e99	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
e100	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e101	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e104	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e105	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e106	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e110	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e111	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e112	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e113	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e114	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e115	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e118	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e120	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
e123	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e125	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e126	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e127	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e128	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e129	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
e130	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
e131	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e133	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e134	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e135	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
e136	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e137	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e138	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e140	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e141	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e142	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e143	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e144	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e145	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e146	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
e147	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e148	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
e149	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e150	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e151	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e152	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e153	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
e154	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	132	130	71	24	60	7	16	8	124	70	31	87	80	3
	89,2	87,8	48,0	16,2	40,5	4,7	10,8	5,4	83,8	47,3	20,9	58,8	54,1	2,0

Tabla B.23: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables C (I).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e3	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
e4	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e5	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e8	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e10	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e11	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e12	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e13	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e14	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e15	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
e16	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e17	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
e18	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e19	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e20	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e21	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e23	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e24	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e26	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e27	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e28	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
e29	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e30	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e31	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e32	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e33	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e34	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e35	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e36	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e37	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e38	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e39	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e40	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e41	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e42	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e43	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e44	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e45	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e48	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e49	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e50	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e51	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e52	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e53	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e54	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e55	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e56	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e57	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
e59	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e60	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e61	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e62	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e63	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e64	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e65	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e66	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e67	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e68	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e69	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e70	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e71	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e72	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e73	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e74	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e75	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e76	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e77	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e78	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e79	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e80	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

Tabla B.24: Respuestas por estudiante: tarea T4, variables C (II).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e81	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e83	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e84	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e85	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e86	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e88	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e90	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e91	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e93	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e94	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e95	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e96	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e98	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e99	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e100	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e101	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e102	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e105	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e106	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e109	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
e110	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
e111	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
e112	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e113	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e114	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
e115	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e125	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e127	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
e128	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
e129	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e130	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e131	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
e132	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e133	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e134	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e135	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e136	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e137	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e138	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
e140	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e141	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e142	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e143	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e145	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e146	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
e147	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e148	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e149	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e150	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e151	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e152	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e153	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e154	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
	124	4	4	102	95	22	94	91	110	106	9	14	48
	83,8	2,7	2,7	68,9	64,2	14,9	63,5	61,5	74,3	71,6	6,1	9,5	32,4

Tabla B.25: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables Ext y A (I).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e1	0	1	0	1	0	0
e2	0	1	1	1	0	0
e3	0	1	0	1	1	0
e4	0	1	0	1	1	0
e5	0	1	0	1	1	0
e6	0	1	0	1	1	0
e7	0	1	1	1	1	0
e8	0	1	0	1	1	0
e9	0	1	0	1	1	0
e10	0	1	1	1	1	0
e11	0	1	0	1	1	0
e12	0	1	0	0	1	0
e13	0	1	0	0	1	0
e14	0	1	1	0	1	0
e15	0	1	0	0	1	0
e16	0	1	0	0	1	0
e17	0	1	1	0	1	0
e18	0	1	0	0	0	0
e19	0	1	1	0	1	0
e20	0	1	0	0	1	0
e21	0	1	0	0	1	0
e22	0	1	1	0	1	0
e23	1	1	0	1	1	0
e24	1	1	0	1	1	0
e26	1	1	0	1	1	0
e27	1	1	0	1	1	0
e28	1	1	0	1	1	0
e29	1	1	1	1	1	0
e30	1	1	0	1	1	0
e31	1	1	1	1	1	0
e32	1	1	0	1	1	0
e33	1	1	1	1	1	0
e34	1	1	1	0	1	0
e35	1	1	1	0	1	0
e36	1	1	1	0	1	0
e37	1	1	0	0	1	0
e38	1	1	0	0	1	0
e39	1	1	0	0	1	0
e40	1	1	0	0	1	1
e41	1	1	1	0	1	0
e42	1	1	1	0	1	0
e43	1	1	1	0	1	0
e44	1	1	1	0	1	0
e45	1	1	1	0	1	0
e48	1	1	1	1	1	0
e49	1	1	1	1	1	0
e50	1	1	1	1	1	0
e51	1	1	1	1	1	0
e52	1	1	0	1	1	0
e53	1	1	0	1	1	0
e54	1	1	0	1	1	0
e55	1	1	0	1	1	0
e56	1	1	0	1	1	0
e57	1	1	0	1	1	0
e59	1	1	0	1	1	0
e60	1	1	0	1	1	0
e61	1	1	1	0	1	0
e62	1	1	0	0	1	0
e63	1	1	0	0	1	0
e64	1	1	0	0	1	0
e65	1	1	0	0	0	0
e66	1	1	0	0	1	0
e67	1	1	1	0	1	0
e68	1	1	0	0	1	0
e69	1	1	1	0	1	0
e70	1	1	1	0	1	0
e71	1	1	0	0	1	0
e72	1	1	1	0	1	0
e73	1	1	0	0	1	0
e74	1	1	1	0	1	0
e75	1	1	1	0	1	0
e76	0	1	1	1	1	0
e77	0	1	1	1	1	0
e78	0	1	1	1	1	0
e79	0	1	1	1	1	0
e80	0	1	1	1	1	0

Tabla B.26: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables Ext y A (II).

	Ext				A	
	1	2	3	4	1	2
e81	0	1	0	1	0	0
e82	0	1	0	1	0	0
e83	0	1	0	1	1	0
e84	0	1	0	1	0	0
e85	0	1	0	1	1	0
e86	0	1	0	0	1	0
e88	0	1	1	0	1	0
e89	0	1	0	0	1	0
e90	0	1	0	0	1	0
e91	0	1	0	0	1	0
e92	0	1	1	0	1	0
e93	0	1	1	0	1	0
e94	0	1	1	0	1	0
e95	0	1	1	0	1	0
e96	0	0	1	1	1	0
e98	0	0	0	1	0	0
e99	0	0	1	1	1	0
e100	0	0	0	1	0	0
e101	0	0	0	1	1	0
e102	0	0	1	1	0	0
e103	0	0	0	1	0	0
e104	0	0	1	1	0	0
e105	0	0	1	1	1	0
e106	0	0	1	1	0	0
e107	0	0	1	1	1	0
e109	0	0	1	0	0	0
e110	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0
e112	0	0	1	0	1	0
e113	0	0	1	0	0	0
e114	0	0	1	0	0	0
e115	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	0	1	1	0
e126	1	1	0	1	1	0
e127	1	1	0	1	1	0
e128	1	1	0	1	1	0
e129	1	1	0	1	1	0
e130	1	1	1	1	1	0
e131	1	1	1	1	1	0
e132	1	1	0	1	1	0
e133	1	1	1	1	1	0
e134	1	1	1	1	1	0
e135	1	1	1	1	1	0
e136	1	1	1	1	1	0
e137	1	1	0	1	1	0
e138	1	1	0	1	1	0
e140	1	1	1	0	1	0
e141	1	1	1	0	1	0
e142	1	1	1	0	1	0
e143	1	1	0	0	1	0
e144	1	1	1	0	1	0
e145	1	1	0	0	1	0
e146	1	1	1	0	1	0
e147	1	1	1	0	1	0
e148	1	1	0	0	1	0
e149	1	1	0	0	0	0
e150	1	1	0	0	1	0
e151	1	1	0	0	1	0
e152	1	1	1	0	1	1
e153	1	1	1	0	1	0
e154	1	1	0	0	1	0
	79	121	63	68	117	2
	53,7	81,8	42,6	45,9	79,1	1,4

Tabla B.27: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables BN (I).

	BN													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e3	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e5	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
e6	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e7	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e8	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e9	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e10	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e11	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e12	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e13	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
e14	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e15	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e16	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
e17	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e18	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e19	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e20	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e21	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e22	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
e23	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e24	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e26	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e27	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e28	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e29	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e31	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e32	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e33	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e34	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e36	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e37	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e38	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e39	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e40	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e41	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e42	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e43	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e44	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e45	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e48	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e49	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e50	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e51	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e52	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e53	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e54	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e55	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e56	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e59	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e60	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e61	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e62	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e63	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
e64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e65	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e66	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e67	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e68	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e69	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e70	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e71	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e73	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e74	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e75	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e76	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e77	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e78	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e79	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla B.28: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables BN (II).

	BN													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e81	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e84	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e85	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e86	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e88	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e89	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e90	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e91	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e92	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e93	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e94	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e95	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e105	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e106	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e126	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e127	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e128	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e129	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e130	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e131	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e132	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e133	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
e134	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e135	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e136	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e137	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e138	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
e140	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e141	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
e142	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
e143	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e144	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e145	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e146	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e147	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e148	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
e149	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
e150	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
e151	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e152	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
e153	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e154	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
	92	105	67	11	36	15	7	11	86	3	17	64	55	2
	62,2	70,9	45,3	7,4	24,3	10,1	4,7	7,4	58,1	2,0	11,5	43,2	37,2	1,4

Tabla B.29: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables C (I).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
e3	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e4	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e5	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e6	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
e8	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e9	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e10	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e11	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e13	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e14	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
e15	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
e16	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e18	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e19	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e20	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
e21	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e22	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e23	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
e24	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e26	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e27	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e28	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e29	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e30	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
e31	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e32	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e33	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e36	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e37	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e38	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e39	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e40	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e41	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e42	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e43	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e44	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e45	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e48	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e49	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e50	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e51	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e52	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e53	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e54	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e55	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e56	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e57	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e59	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e60	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e61	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
e62	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e63	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e65	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e66	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e67	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e68	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e69	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e70	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e71	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e73	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e74	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e75	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e76	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e77	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e78	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e79	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e80	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0

Tabla B.30: Respuestas por estudiante: tarea T5, variables C (II).

	C												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
e81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e83	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e84	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e85	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e88	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e89	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e90	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e91	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e92	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e93	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e94	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e95	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e96	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e99	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e101	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e102	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e103	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e104	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e105	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e106	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e107	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e109	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e110	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e111	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e112	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e113	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e114	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e115	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e125	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e126	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e127	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
e128	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
e129	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e130	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e131	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e132	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e133	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
e134	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e135	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
e136	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e137	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e138	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
e140	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e141	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
e142	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
e143	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e144	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e145	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e146	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e147	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e148	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
e149	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
e150	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
e151	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e152	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
e153	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e154	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
	106	3	3	71	46	28	61	41	79	74	3	26	40
	71,6	2,0	2,0	48,0	31,1	18,9	41,2	27,7	53,4	50,0	2,0	17,6	27,0

Anexo C

El estudiante y la máquina

Es indudable que uno de los deberes principales del sistema educativo consiste en la transmisión del conocimiento de una generación a la siguiente. En particular, la enseñanza de las matemáticas debe tener por objetivo la transmisión de los conocimientos principales de la ciencia matemática, junto con la transmisión de los valores y los principios que rigen el pensamiento matemático. Por ello, la metodología para hacer matemáticas en la escuela debe ser lo más fiel posible al quehacer de un matemático profesional. Es decir, se debe garantizar, a partir del método de la "reinvención", que los estudiantes descubran propiedades, invariantes y nuevas definiciones matemáticas, enlazando conocimientos previos con conocimientos emergentes en la práctica operativa y discursiva en el aula.

La didáctica de las matemáticas propone enfoques teóricos y metodológicos que garanticen esta transmisión, equilibrando, por un lado, la fidelidad con las formas de hacer ciencia, y por otro lado, la optimización de recursos dentro del sistema educativo. Precisamente, el *Enfoque del aprendizaje por modelos dinámicos* (Bu y Schoen, 2011) coloca al software de geometría dinámica en un lugar privilegiado dentro del diseño del medio didáctico. Sin embargo, la utilización del software en la práctica matemática profesional y escolar no está libre de controversia.

En la sección 2.2 se profundiza en los procesos de demostración matemática escolar con la asistencia de modelos dinámicos. Se describen las características que deben tener los modelos dinámicos para asegurar un proceso de demostración matemática que respete la progresión inductivo-deductiva. Se presentan, además, ejemplos de modelos dinámicos diseñados para trabajar los distintos momentos de utilización del software dinámico, estos son: la exploración, la ilustración y la demostración. En la sección 3.2.2 se complementa este discurso con aportaciones sobre la percepción social de las matemáticas y el encaje que tiene el software en la práctica diaria del matemático profesional.

No ha sido posible la introducción de información adicional en el cuerpo del texto de este trabajo, que trate la controversia sobre la legitimidad del uso del software en la práctica matemática. Sin embargo, no hay duda de que el ordenador sigue teniendo detractores entre matemáticos profesionales y docentes de matemáticas. Por ello, se resumen en este anexo algunas consideraciones adicionales en relación a la conveniencia o no del uso del ordenador en la escuela. Se presentan algunos ejemplos históricos del uso del ordenador y se finaliza con una panorámica del estado actual de la comunidad de software dinámico.

A fin de cuentas, y parafraseando a The Buggles[1], ¿acabará el ordenador con los principios de la enseñanza matemática?

El Teorema de los Cuatro Colores

La función del ordenador es básicamente la misma en todas las disciplinas del saber. Al igual que otras máquinas o aparatos, el ordenador se utiliza para facilitar la resolución de una tarea, cuando ésta es excesivamente larga o tediosa y no se quiere resolver por un procedimiento manual. De esta forma, tanto la máquina como el usuario "transforman" cierta forma de energía y la aplican en labores más adecuadas, optimizando el esfuerzo del usuario. En matemáticas la máquina es bienvenida, por ejemplo, en procesos de cálculo en análisis numérico, a la hora de realizar estadísticas con grandes bases de datos, y en la representación gráfica en dos y tres dimensiones de funciones, ecuaciones y objetos geométricos.

Los procesos de demostración matemática son complejos y requieren de la articulación de nociones, proposiciones y argumentos, más allá del solo cálculo numérico. Por ello, cuando la asistencia del ordenador se limita al cálculo de largas y tediosas operaciones, no se puede considerar que forme parte de un proceso de demostración. Además, los resultados matemáticos se presentan y redactan de forma que se debe garantizar que los pasos deductivos de la demostración sean revisables. *A priori*, si se delegara a un ordenador la realización de un paso determinado en una secuencia deductiva, se debería garantizar, asimismo, que una persona fuera capaz de revisar la producción del ordenador, para garantizar que es correcto.

En resumen, la ejecución de un eslabón en una cadena deductiva se deja en manos del ordenador cuando esa tarea es excesivamente ardua o repetitiva para que la realice una persona en un espacio de tiempo razonable, pero la corrección de ese eslabón no se puede validar hasta que una persona la verifique de forma "manual". Para salir de la paradoja, se podría solicitar a una persona que verifique la corrección de la programación del software o el esquema que aplica la máquina en su resolución, en lugar de verificar todos y cada uno de los pasos de la máquina. Pero la incertidumbre se mantiene: ¿cómo puede garantizar la mente humana que el ordenador no ha cometido ningún error dentro del proceso sistematizado?

Históricamente, la utilización del ordenador en la demostración de un teorema viene ligado al Teorema de los Cuatro Colores. El problema original consiste en encontrar el menor número de colores necesarios para colorear las regiones conexas de cualquier mapa, de modo que regiones adyacentes con frontera común estén pintados también por colores diferentes. Si bien algunos mapas requieren más colores que otros para ser coloreados siguiendo esta regla, lo que se busca es el menor número que funcione para todos los mapas.

El problema de la coloración de los mapas es sencillo de formular pero extremadamente complejo de resolver. A lo largo de varios siglos se han sucedido intentos fallidos o incompletos para demostrar que cuatro colores bastan para colorear cualquier mapa. Hoy en día, la "demostración" del teorema cuenta con un desarrollo en el que se comprueban, uno por uno, miles de configuraciones a partir de un software informático con un diseño *ad hoc*. Precisamente, la comprobación "manual" de esos miles de casos

[1]The Bugles es un grupo musical británico que en 1978 vaticino la muerte de la estrella de la radio en manos del video-reproductor, en su célebre Radio Killed the Radio Star.

dificulta la demostración formal clásica del teorema.

La conjetura establece que cuatro colores son suficientes para pintar cualquier mapa, y la presenta Guthrie[2] en el año 1 852 (Barnette, 1983). El resultado era advertido entre los cartógrafos de la época y no se conocían contraejemplos, pero nadie era capaz de presentar un argumento que validara la conjetura, que es falsa, a no ser que se añadan al enunciado cuatro hipótesis adicionales:

1. El mapa se dibuja sobre un plano infinito o una esfera.
2. Se considera que dos regiones tienen una frontera común, cuando esté formada por un segmento o un arco. Las regiones que limitan sobre un vértice no tienen frontera común.
3. Siempre que se dibuje un mapa en el plano, existirá en el exterior una parte ilimitada que se expande al infinito. Esta parte se considera asimismo una región.
4. Cada región está formada por una única pieza. Es decir, una región no puede estar formada por dos partes inconexas que requieran de un color común.

En 1 879, 25 años después de la publicación de la conjetura, el abogado inglés A.B Kempe presenta una primera demostración a la conjetura de los cuatro colores, que resulta fallida. Previamente, durante la revolución industrial (1820–1840), Babbage había ultimado ya su máquina de diferencias, pero faltaban todavía unos años hasta la aparición de los primeros ordenadores, y la demostración de Kempe no se valía de ellos.

"Demostración" de Kempe

Kempe basó su demostración en una estrategia que iba reduciendo el número de colores necesarios para colorear un mapa cualquiera. En su argumentación, se fija en las cadenas de dos colores alternos que se pueden formar sobre el mapa, y que llevan por ello el nombre de *cadenas de Kempe* (Barnette, 1983). Al cambiar entre sí los dos colores que forman la cadena, uno por otro, Kempe identifica los intercambios que dan como resultado una reducción en el número de colores necesarios para colorear el mapa. Al aplicar su estrategia para el intercambio de colores, Kempe llega a las siguientes conclusiones:

1. En un vértice en el cual concurren cinco aristas, las cinco regiones adyacentes se pueden colorear con cuatro colores.
2. En todo mapa hay una región delimitada a lo sumo por cinco aristas.

Kempe comete un error en la demostración de la primera propiedad, que se descubre 11 años después de la publicación de su trabajo. En caso de ser cierta la primera afirmación, Kempe no solo habría dado una demostración al teorema, sino que además esta demostración sería constructiva y permitiría presentar un método para hallar la coloración con cuatro colores de cualquier mapa.

La segunda afirmación sí es correcta y se justifica analizando las propiedades numéricas que relacionan vértices (V), aristas (A) y regiones[3] (C) en un mapa. Como apoyo al

[2]Francis Guthrie (1831–1899), matemático y botánico sudafricano: se encontraba coloreando un mapa de las regiones de Inglaterra cuando da cuenta del hecho a su hermano Frederick. Llega así a manos de DeMorgan, su profesor de matemáticas, el cual, interesado, lo comunica por carta a Hamilton.

[3]Se utiliza aquí la letra C para indicar las regiones de un mapa, en coherencia con otros resultados de teoría de grafos, en los que las caras de un poliedro juegan un papel equivalente.

conteo, se marca, además, cada uno de los extremos de las aristas (N). Kempe aplica en su demostración multitud de relaciones numéricas que enlazan las cantidades V, A, C y N, en casos generales aplicables a todos los mapas y en casos particulares de mapas con características concretas. Estas igualdades y desigualdades aportan información parcial sobre las condiciones que deben cumplir los elementos del mapa, pero no son concluyentes para desarrollar una demostración del Teorema de los Cuatro Colores. Se requiere, además de estos resultados numéricos, la aplicación del fórmula de Euler[4].

Originalmente, la fórmula de Euler muestra la relación existente entre el número de vértices, aristas y caras de los poliedros. Al identificar las caras (C) del poliedro con regiones en el mapa, la ecuación tiene ahora validez en el plano y aporta información adicional a la resolución del problema de los cuatro colores. Para poder aplicar el resultado de Euler al problema de los cuatro colores, se debe interpretar que un mapa es un grafo *planar conexo*[5], en cuyos vértices convergen al menos 3 artistas, y cuyas caras (o regiones del mapa) están delimitadas por curvas cerradas simples. En ese caso, la suma de vértices y caras, menos el número de aristas, permanece invariable:

$$V - A + C = 2$$

La fórmula de Euler se demuestra a partir de un proceso de eliminación de aristas y vértices, que mantienen invariable la relación de la fórmula. Es decir, en un poliedro (o un grafo planar conexo) se pueden eliminar aristas o vértices, de forma que la relación existente entre vértices, aristas y caras (regiones) no se vea afectada por la eliminación. En particular, se aplican dos tipos de eliminación que permiten obtener grafos "equivalentes":

1. Se elimina una arista, pero se mantienen los dos vértices que lo delimitan.

2. Se elimina una arista y uno de los vértices de forma simultanea.

En cualquiera de esos dos casos, al pasar del grafo original al simplificado, el valor $V - A + C$ no se ve alterado. Este proceso de eliminación termina en un grafo colapsado con un solo vértice, sin aristas, y con una única región (es decir, $1 - 0 + 1 = 2$). Dado que el valor de ese cómputo no ha variado al simplificar el grafo, la ecuación original también cumple $V - A + C = 2$.

Kempe utiliza la misma estrategia que Euler para demostrar que en todo mapa que cumpla las condiciones iniciales del enunciado, existe una región delimitada, a lo sumo, por cinco aristas. Utiliza, para ello, la fórmula de Euler y una serie de propiedades numéricas de los grafos. En primer lugar, Kempe marca los extremos de las aristas del grafo con la variable auxiliar N, y clasifica las regiones atendiendo al número de aristas que delimitan cada región. Es decir, si p_i es en número de regiones delimitado exactamente por i aristas, entonces:

$$(1) \qquad N = \sum_{i=2}^{\infty} i p_i$$

[4] A pesar de que Euler publicó la demostración de este resultado en 1 752, es muy posible que este fuera conocido cien años antes, dado que fue encontrado en unos manuscritos en posesión de Leibniz atribuidos a Descartes.

[5] Un grafo es *planar* cuando sus aristas solo intersecan en otros vértices del grafo. Un grafo es *conexo* cuando es posible recorrer la parte del grafo comprendido entre dos vértices cualesquiera, a través de sus aristas.

Como cada arista tiene dos extremos, se tiene $N = 2A$, y por ello, la igualdad (1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$(2) \qquad \sum_{i=2}^{\infty} ip_i = 2A$$

Por otro lado, el número total de regiones del mapa, C, se puede escribir como la suma de las distintas cantidades de regiones, p_i, que están delimitadas por i aristas.

$$(3) \qquad \sum_{i=2}^{\infty} p_i = C$$

A continuación, Kempe multiplica la expresión (3) por 6, y le resta a lo obtenido la expresión (2), para conseguir:

$$(4) \qquad \sum_{i=2}^{\infty} (6-i)p_i = 6C - 2A$$

Por un lado, la fórmula de Euler implica $6V - 6A + 6C = 12$. Por otro lado, cada arista cuenta con dos extremos ($N = 2A$), y además, de cada vértice emergen al menos tres aristas ($N \geq 3V$), es decir, $2A \geq 3V$. De todo ello resulta la expresión que interesa a Kempe:

$$(5) \qquad \sum_{i=2}^{\infty} (6-i)p_i \geq 12$$

En la expresión (5), solo los cuatro primeros términos son positivos, y además, a partir de un cierto índice i_0, $p_{i_0} = 0$. Este hecho implica la existencia en cada grafo de una región con a lo sumo 5 aristas de frontera, es decir, demuestra la segunda afirmación de Kempe. En conclusión, la teoría de grafos se manifiesta como una herramienta acertada para atacar el problema de los cuatro colores. Sin embargo, la argumentación deductiva clásica no es suficiente para demostrar la primera afirmación, que queda abierta. Un siglo más tarde, Appel y Haken utilizan el ordenador para completar la demostración.

Demostración de Appel y Haken

Appel y Haken utilizan también la Teoría de Grafos para atacar el problema de los cuatro colores (Saaty y Kainen, 1977). A finales del siglo XX, la teoría de grafos está consolidada, y por ello, su terminología varia con respecto a la terminología incipiente utilizada por Kempe un siglo atrás. Appel y Haken disponen de una teoría de gran potencia para desarrollar su demostración y concatenan una serie de resultados sofisticados. Sin embargo, al igual que sucediera a Kempe, la utilización exclusiva de argumentos deductivos no es suficiente para abordar la complejidad del problema de los cuatro colores, y Appel y Haken recurren finalmente a la realización extensiva de cálculos, es decir: realizan un estudio, caso por caso, de un conjunto de cerca de 2 000 grafos. Este último paso no se puede abordar de forma manual, y por ello, recurren a la asistencia de un ordendor.

En lugar de argumentar la coloración de regiones, Appel y Haken toman como punto de partida el mapa *dual*[6] M' de cada mapa M. De esta forma, la coloración se argumenta ahora sobre vértices y recorridos por Hamiltonianos[7] sobre las aristas, en lugar de sobre regiones. Utilizando este nuevo enfoque, demostrar la conjetura de los cuatro colores es equivalente a demostrar la inexistencia de mapas denominados *irreducibles*, que cumplen las siguientes características:

- El mapa requiere de 5 colores para su coloración.
- Cualquier mapa con menor número de regiones requiere de 4 colores para su coloración.

Para simplificar la terminología, se dice que un mapa es n-colorable si requiere de n colores para su coloración. Así, en las características anteriores, se puede hablar de mapas 4- y 5-colorables.

El argumento de la demostración se puede resumir como sigue. La existencia de un mapa *irreducible* implica la existencia de mapas irreducibles triangulares, es decir, mapas en los que en cada vértice convergen exactamente 3 aristas. Como todo mapa *irreducible* es conexo, se deduce de lo anterior que el mapa es además 3-conexo[8]. De todo lo anterior, Appel y Haken consiguen demostrar que la existencia de un mapa *irreducible* implica la existencia de grafos 4-conexos Hamiltonianos.

En resumen: si se demuestra que todo grafo Hamiltoniano es 4-colorable, entonces no pueden existir grafos *irreducibles*. Esto es cierto puesto que un grafo irreducible no puede tener ningún vértice con *valencia*[9] menor que 5 (en efecto, esta era la segunda afirmación de Kempe). Llegados a este punto, demostrar la conjetura de los cuatro colores consiste en demostrar que “todo grafo tiene una configuración interna reducible”.

Llegados a este punto, Appel y Haken deciden utilizar el estudio extensivo de casos. Proceden a catalogar los mapas en función del número de vértices, de menor a mayor. A continuación, demuestran caso por caso que todos los mapas deben ser reducibles. En primer lugar, se analizan las configuraciones con menor número de vértices, por ejemplo: los vértices con valencia menor que 5 son reducibles; los vértices con valencia 5 y con tres vértices contiguos de valencia 5 son reducibles; etc. A continuación, se estudian las configuraciones con mayor número de vértices. En un momento dado, estas configuraciones tienen un cierto tamaño, y no se puede evitar que incluyan en su interior una configuración reducible catalogada con anterioridad. Como resultado, se demuestra la inexistencia de configuraciones irreducibles y la conjetura queda probada.

Appel y Haken desarrollan herramientas informáticas propias para construir de forma sistemática cada una de estas configuraciones, y así poder analizar la reducibilidad de cada una de ellas. En la última fase de la demostración, se realiza un catálogo de mapas que contienen configuraciones reducibles. Un conjunto de mapas se dice inevitable si cada

[6]El mapa dual M' de un mapa M, es aquel que sustituye regiones por vértices, de forma que se unen por una arista cada nueva pareja de vértices siempre y cuando sus respectivas antiguas regiones tuvieran una frontera común.

[7]Un grafo es Hamiltoniano cuándo existe un circuito que recorre todos los vértices del mismo. Un modo sencillo de colorear un mapa Hamiltoniano consiste en emplear dos colores para pintar de forma alterna las regiones interiores, y los otros dos para las regiones exteriores.

[8]Un grafo es n-conexo si tiene al menos $n+1$ vértices y es necesario eliminar al menos n de ellos junto con sus aristas adyacentes para separar dos vértices cualesquiera.

[9]Se denomina valencia al número de aristas que convergen en un vértice. Un mapa se dice n-valente cuando todos sus vértices tienen valencia n.

grafo del conjunto contiene al menos una de estas configuraciones reducibles. El software de Appel y Haken llega a construir un conjunto inevitable de 1 936 configuraciones, y el programa informático asegura la reducibilidad de cada uno de estos grafos. Más adelante, tras un proceso de simplificaciones progresivas, el conjunto inicial se reduce a 1 482 configuraciones.

Así, en 1 976, la conjetura del problema de los cuatro colores se convirtió en el Teorema de los Cuatro Colores. A pesar del trabajo y el esfuerzo de Appel y Haken, hoy día, la demostración sigue teniendo detractores, y el empleo del ordenador en procesos de demostración matemática sigue siendo controvertido en la comunidad matemática. Estos detractores utilizan el argumento de la validación: ¿se puede asegurar, sin la intervención directa de un ser humano, que el ordenador realiza todas las comprobaciones oportunas, sin pasar por alto alguna configuración?, ¿como se puede garantizar que el programa informático no se "equivocó" en algún cómputo?

Dejar una comprobación larga y molesta en manos de un programa informático es, desde el punto de vista de la demostración matemática, controvertido. Sin embargo, resulta también de gran ayuda en tareas que de otra forma no se podrían llevar adelante en un intervalo razonable de tiempo. Dado que el sistema educativo en general, y la enseñanza de las matemáticas en particular, deben ser fieles a la filosofía y los principios del quehacer matemático, y partiendo del hecho de que el ordenador forma parte del día a día en el siglo XXI, se hace inprescindible definir la relación que el estudiante tiene con la máquina.

El desarrollo de la máquina pensante

La utilización de una computadora para facilitar cálculos complejos en una demostración matemática, no deja de ser similar al empleo de una sofisticada calculadora. El Teorema de los Cuatro Colores se demuestra gracias a la utilización de un instrumento de cálculo complejo, un programa informático diseñado *ad hoc* para la tarea.

Sin embargo, la resolución del Teorema de los Cuatro Colores no es sino un punto de partida a lo que será el trabajo en matemáticas durante las siguientes décadas. Hoy día, existen lenguajes de programación y programas informáticos que asisten la labor del matemático profesional en su quehacer diario: Cabri-Géomètre II Plus, GeoGebra, GAP, MatLab, Wolfgram Mathematica, etc.

Una demostración matemática debe ser lógica y comprendida por la mente humana, pero es posible concebir una máquina que realice la labor de forma automática. La discusión filosófica sobre la diferencia entre lo humano y la máquina es antigua y tanto la ciencia como el arte se han ocupado de ella. Descartes[10] postuló dos premisas para discriminar entre humano y máquina, estas son:

1. La máquina no dispone de un mecanismo de retroalimentación.

2. No dispone de una razón generalizada.

El ordenador digital es lo que más se parece hoy en día a una máquina pensante. La revolución industrial jugó un papel determinante en la costrucción de las primeras máquinas calculadoras mecánicas, que más adelante servirían de base para la máquina digital de Turing.

[10]Descartes sentenció que los animales eran máquinas, asimismo.

La máquina analítica

En la década de 1 820, Charles Babbage formuló y construyó máquinas que jugaban al tres en raya y al ajedrez, y máquinas que realizaban cálculos aritméticos[11]. Se basó para sus diseños en los autómatas artesanos que había conocido en su infancia. Estos autómatas eran construidos por artesanos sin un estudio científico previo, a partir de pruebas, ensayos y errores. Eran los albores de la revolución industrial, y la tradición artesanal había evolucionado a un punto en el que era posible construir telares automáticos que generaban patrones a partir de cuartillas troqueladas.

En este contexto, Babbage recibió una importante suma de dinero de mano del Gobierno Británico, para construir la *máquina de diferencias* o molino aritmético. Cuando el diseño estaba ultimado, el propio Babbage lo desechó por otro ingenio más ambicioso: la *máquina analítica*. Ambos ingenios tienen por objetivo el cálculo de aproximaciones numéricas de funciones (figura C.1), y están inspirados en la noción de *división del trabajo*, puesto en funcionamiento durante la revolución industrial por Adam Smith.

Figura C.1: Máquina de diferencias y máquina analítica (unocero.com).

La máquina de diferencias consta de N ejes o columnas, que representan un valor numérico cada uno. En cada eje hay insertados engranajes que toman valores del 0 al 9, indicando cada engranaje un valor decimal determinado, en función de su posición. El mecanismo de la máquina realiza sumas entre los valores de los engranajes, modificando en cada iteración el valor numérico relativo al eje.

En la máquina analítica Babbage mejora el diseño anterior, cuantitativa y cualitativamente. Por un lado, la máquina dispone de miles de ejes y engranajes, que solo se pueden accionar con el aporte energético de una máquina de vapor. Por otro lado, la estructura de la máquina incluye un sistema de control, regulada con un sistema de tarjetas perforadas. Es decir, a diferencia de la máquina de diferencias, la máquina analítica dispone de un mecanismo de entrada, memoria, unidad de control, unidad aritmético-lógica y un mecanismo de salida. El sistema de control permite, pues, almacenar instrucciones, para alterar en un momento determinado el orden de las operaciones en función de los cálculos previos obtenidos, y posibilita, de esta forma, adaptar el uso de la máquina a situaciones múltiples.

[11] Charles Babbage fue *Lucasian Professor* de matemáticas en Cambridge, en período 1828–1839 y se le atribuye ser el precursor de la investigación operativa actual.

Babbage tuvo por ayudante a la también matemática Lady Lovelace, hija de Lord Byron. La ayudante de Babbage tuvo gran implicación en el proyecto de construcción de ambas máquinas, y sus palabras dejan una clara constancia del potencial del segundo ingenio en comparación al primero: "la máquina analítica es a la máquina de diferencias, lo mismo que el análisis es a la aritmética".

Las máquinas de Babbage son ejemplos máquinas de *estados discretos*, es decir, máquinas en las que los engranajes y los ejes, los datos y las instrucciones almacenadas, toman valores discretos, y los cambios de estado en estos elementos ocurren de forma súbita.

Aunque no hay duda de la capacidad de cálculo de las máquinas de estados discretos, éstas carecen de pensamiento original. Es decir, la máquina solo es capaz de analizar aquello que el programador sea capaz de hacerle analizar. Sin embargo, no son capaces de prever y luego de actuar en consecuencia a esa previsión. En su *juego de la imitación*, Alan Turing intenta solventar las carencias que harían de la máquina un ser pensante. Para ello, centra su discurso en la computadora digital, es decir, una máquina que modeliza a todas las posibles máquinas de estados discretos.

El juego de la imitación

Alan Turing reformula las premisas de Descartes en un test (el denominado Test de Turing) que tiene por objetivo discriminar, a partir de una secuencia de preguntas y respuestas, a una máquina de un ser humano[12]. Para el diseño del test, Turing deja de lado la pregunta "¿pueden pensar las máquinas?" y plantea, en su lugar, el "juego de la imitación" (Turing, 2012).

En su diseño original (figura C.2), el juego de la imitación consta de un interrogador (C), y de dos concursantes (A y B), de ambos sexos. El objetivo de C consiste en averiguar el sexo de A y B, realizando, para ello, cuantas preguntas sean necesarias. C recive por escrito la transcripción de las respuestas (siempre verdaderas), que emiten A y B. El objetivo de A y B es conseguir que C se equivoque en la asignación de sexos, contestando para ello de la forma más ambigua posible.

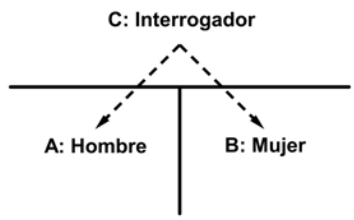


Figura C.2: El juego de la imitación, versión original.

En el juego de la imitación de Turing, el jugador A o B deja el juego, y se pone en su lugar una máquina, en el sentido de "ingenio análitico" de Babbage (una calculadora electrónica o una computadora digital). Es decir, Turing descarta en su imaginario otro tipo de técnicas, como la biotecnología o los ingenios experimentales cuyo funcionamiento no se pueda explicar completamente.

[12]Alan Turing desarrolló también la máquina analítica de Babbage, para diseñar y construir las denominadas "bombas" de Bletchley Park. Estas máquinas se emplearon durante la segunda guerra mundial para descifrar el código de la máquina alemana Enigma.

El juego consiste ahora en que C descubra, a partir de preguntas y respuestas, quién es el ser humano y quién es la máquina. El objetivo de la máquina consiste en hacerse pasar por humano. Para Turing, una máquina "piensa" si al contestar a preguntas realizadas por un ser humano, éste es incapaz de decidir si las da una máquina u otro ser humano. Por lo tanto, la máquina "piensa" si es capaz de "imitar" al ser humano.

Las premisas de Turing pueden parecer, en una primera lectura, algo ingenuas. De hecho, John Searle[13] se burla de Turing, calificando su planteamiento de "conductismo simplón". La objeción de Searle apela a la "conciencia", pero hay otro tipo de objeciones que tienen que ver, por ejemplo, con la teología (las máquinas, al igual que los animales, carecen de alma) o la biología (el sistema nervioso forma un continuo, que los estados discretos de la máquina no pueden imitar). El propio Turing discute y refuta algunas de estas opiniones contrarias a la cuestión principal (Turing, 2012), entre las que se encuentra la objeción matemática del Teorema de Gödel.

La objeción matemática

La *máquina de Turing*[14] es, en origen, una noción teórica, que se utiliza como medio para definir de forma precisa la idea intuitiva de número *computable* o *calculable*[15] (Turing, 2012). En la actualidad, las computadoras digitales son, en la práctica, *máquinas universales de Turing*[16].

Al profundizar en la programación de sus máquinas, Turing se da cuenta de la existencia de un problema de *incalculabilidad* o *indecidibilidad*: el problema de la *parada*, según el cual, todo algoritmo programable es susceptible de entrar en un bucle o secuencia que no le permite obtener un resultado en un número finito de pasos. Este resultado limita los estados en los que puede trabajar toda máquina teórica, y tiene su reflejo en un resultado matemático de características similares: el teorema de indecidibilidad de Gödel.

El teorema de Gödel establece que, en todo sistema lógico que sea consistente, se pueden formular enunciados que no se pueden demostrar pero tampoco se pueden refutar dentro del propio sistema (Gödel, 2009). El propósito de Turing estriba en trasladar al lenguaje de las máquinas el resultado del teorema de Gödel, mejorando y haciendo más inteligible la idea fundamental que origina el problema: la teoría de funciones recursivas, que se basa en el uso de lenguajes formales. Garrido (Gödel, 2009) sintetiza la paradoja en los siguientes términos:

> "La máquina universal sería capaz de descodificar y simular la estructura y la función de cualquier máquina de Turing, incluida ella misma, lo cual es tanto como decir que sería capaz de cualquier cálculo realizable,

[13]John Searle es el autor de un experimento que tiene por objetivo desacreditar el planteamiento de Turing. El experimento teórico lleva el nombre de "La Habitación China". En el juego, se encierra en una habitación a una persona que desconoce el chino. La persona dispone de un código gracias al cual puede relacionar ideogramas chinos con de forma inteligible, pero llegar a comprender el idioma. Searle defiende que, en esta situación, se cumple el postulado de Turing, pero no se llega a la comprensión.

[14]Se denomina máquina de Turing a cualquier máquina que sea capaz de ejecutar una tarea aritmética particular.

[15]En general, un problema es calculable cuando se puede resolver algorítmicamente en un número finito de pasos previamente programados.

[16]La máquina universal de Turing es una máquina de Turing capaz de imitar el funcionamiento de cualquier otra máquina de Turing.

> aunque no, naturalmente, de rebasar la barrera de lo incalculable, como indica el aludido resultado de limitación" (Gödel, 2009, 55)

Este aporte de la lógica matemática se puede usar, por tanto, para demostrar que los estados discretos de una máquina tienen limitaciones. Es decir, la máquina universal tiene una capacidad infinita, pero siempre habrá tareas que la máquina no pueda resolver. Volviendo a la cuestión inicial, esto implica que se puede diseñar una máquina que cumpla la función de dar respuestas en el juego de la imitación. Sin embargo, siempre existirán preguntas que la máquina no pueda contestar en un espacio de tiempo finito, o preguntas a las que contestará de forma equivocada.

Turing y Gödel son conscientes de las conexiones entre los sistemas formales y los sistemas calculables, y están de acuerdo en las limitaciones en torno a la decidibilidad. Sin embargo, discrepan en el alcance de esta limitación. Turing defiende la idea de que las limitaciones de los sistemas formales, y por extensión, la inevitable limitación de las máquinas tienen su reflejo en las incapacidades de la mente humana: el ser humano y la máquina no son infalibles. Por ello, defiende la idea de que la estructura del ordenador digital es un modelo válido para la investigación de la mente, y por extensión, para el desarrollo de la inteligencia artificial. Esta idea es conocida con el nombre de la *metáfora del ordenador*. Gödel niega la validez de la metáfora del ordenador, y propone como contraejemplo su propio resultado de indecidibilidad.

> "Supóngase un ordenador en marcha tras haber sido alimentado con los principios y las reglas de construir y de inferir fórmulas del sistema formal de la aritmética. Cuando la máquina se encuentre inexorablemente con la fórmula indecidible G, se detendrá de modo automáico, sin poder salir de su perplejidad. Pero cualquier sujeto humano puede apreciar sin gran esfuerzo que esa fórmula indecidible es verdadera, puesto que predica de sí misma la característica de ser indemostrable y eso acaba de probar." (Gödel, 2009, 59)

Una vez la discusión entra en el tópico de la inteligencia artificial, el tema toma un cariz filosófico. Dado que un sistema lógico no se puede probar a sí mismo, la creación de un ordenador pensante implica, paradójicamente, su imperfección. Una máquina infalible sería perfecta, y por lo tanto, no-inteligente en el sentido humano. Sea cual sea el desarrollo de esta discusión, el hecho es que en la actualidad existen máquinas que son capaces de pasar la criba de Descartes, y de ganar en el juego de la imitación de Turing.

La cuarta discontinuidad

Hoy día existen máquinas capaces de pasar tanto la criba de Descartes como la de Turing, por lo que éstas cribas han quedado obsoletas. No en vano, Mazlish (1995) se atrevió a plantear, ya en los años 90, una "cuarta discontinuidad", anticipando una nueva ruptura en la relación entre el ser humano y la máquina. Al igual que ocurrió con las tres rupturas anteriores, debidas a Copérnico, Darwin y Freud, la supuesta superioridad humana queda una vez más en entredicho, ésta vez ante la máquina.

- Copérnico consideró la tierra como parte del cosmos, desplazando nuestro planeta del centro del universo.

- Darwin fue más allá y relegó al ser humano a la condición de animal en constante evolución, despojándolo de su categoría de dueño y señor.
- Freud relativizó la racionalidad del ser humano, al considerar la importancia del inconsciente en los procesos mentales.

Estos tres impactos resultaron ser un fuerte golpe a la necesidad del ser humano por sentirse superior al medio que le rodea. La idea de la cuarta discontinuidad plantea que el ser humano ni siquiera es superior a la máquina, sino que el funcionamiento del cerebro humano y la máquina son cada vez más similares. Los autómatas ejemplifican la identificación que tiene el ser humano con la máquina, más cuándo éste tiene su forma y apariencia física. Sin embargo, carecen del sutil fluido universal o magnetismo vital que le den alma y razón.

Para Karl Marx, existe una diferencia moral entre herramienta y máquina, dado que la primera extiende nuestro poder personal, en tanto que la segunda nos somete a su organización impersonal. Con la revolución industrial, el tiempo deja de ser un elemento natural y pasa a ser una obra del ser humano. Al igual que se empiezan a concebir los procesos naturales y físicos como grandes y complejos mecanismos de relojería, los objetivos del aprendizaje también se regulan temporalmente. Con el reloj, el ser humano se ha vuelto mecánico, la mecanización de las manos conlleva la mecanización del pensamiento.

El cambio producido en el siglo XIX en cuanto a los sistemas productivos, sirve de metáfora para la enseñanza de las matemáticas. La autorregulación del trabajo doméstico implica trabajar hasta completar las necesidades inmediatas, al igual que los procesos de resolución de problemas tienen su propio objetivo y se desarrollan al ritmo de la reflexión. Por contra, la fábrica deshumaniza al ser humano, ya que le obliga a desarrollar labores parciales que no tienen sentido en sí mismos, en beneficio de un bien general y mayor. Es decir, los procesos matemáticos estandarizados y atomizados son la cadena de montaje de los centros de enseñanza, que mecaniza los procesos de resolución y aprendizaje.

En la educación, los instrumentos tecnológicos son cada vez más extensiones del estudiante, extremidades biónicas que le facilitan las tareas. La máquina es una prolongación de la mano del estudiante, y la relación es cada vez más simbiótica. Puede ser medicinal, como las gafas a los implantes de cóclea, o un instrumento que asiste al pensamiento, como los ordenadores de bolsillo.

Desde que ocurriera la revolución industrial, innumerables autores han escrito sátiras en las que se comparan sus respectivas civilizaciones con sociedades ficticias. En ellas, se especula con la posibilidad de destruir las máquinas y volver al anterior modelo de sociedad, por miedo al desarrollo que estas puedan tener y el riesgo que conlleva su excesiva evolución. Evidentemente no hay forma de parar los avances tecnológicos. No tiene sentido querer ser los nuevos ludistas [17].

Puesto que no hay forma de frenar la revolución digital en la enseñanza de las matemáticas, solo cabe analizarla y darle el mejor empleo posible. Desde el punto de vista de la educación, el contexto tecnológico nos obliga a reformular la relación que tenemos con nuetras máquinas, y por extensión, la relación que queremos tengan los estudiantes de matemáticas con las mismas, así como las propuestas para su acción instrumental.

[17] Ludista: detractores contrarrevolucionarios que destrozaban máquinas durante la revolución industrial.

Referencias

[Aké, Godino, Gonzato y Wilhelmi, 2013] Aké, L.P., Godino, J.D., Gonzato, M., Wilhelmi, M.R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A.M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 1–8. Kiel, Germany: PME.

[Artigue, 1998] Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l´analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 231–262.

[Bachelard, 1938] Bachelard, G. (1938). *La formation de l'espirit scientifique.* Paris: Vrin.

[Ballacheff, 1987] Balacheff, N. (1987). Processus de prevue et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176.

[Barnette, 1983] Barnette, D. (1983). *Map coloring, polyhedra, and the four-color problem.* Washington DC: Mathematical Association of America.

[Beveridge y Turnbull, 1989] Beveridge, C., Turnbull, R. (1989). *The Eclipse of Scottish culture: inferiorism and the intellectuals.* Edinburgh: Polygon.

[Bloch, 1999] Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135–194.

[Bossé y Nandakumar, 2003] Bossé, M.J., Nandakumar, N.R. (2003). When equalities are not equal: missing mathematical precision in teaching, texts and technology. *The College Mathematical Journal*, 34(5), 383–389.

[Bravo, Joolingen y Jong, 2006] Bravo, C., Joolingen, W. van, Jong, T de. (2006). Modeling and simulation in inquiry learning: Checking solutions and giving intelligent advice. *Simulation*, 82(11), 769–784.

[Bremigan, 2005] Bremigan, E.G. (2005). An analysis of diagram modification and construction in students'solutions to applied calculus problems. *Journal for research in mathematics education*, 36(3), 248–277.

[Brousseau, 1997] Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

[Brousseau, 2007] Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas.* Buenos Aires: Zorzal.

[Bu y Schoen, 2011] Bu, L., Schoen, R. (Eds.) (2011). *Model-Centered Learning. Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.* Rotterdam: Sense Publishers.

[Bu, Spector y Haciomeroglu, 2011] Bu, L, Spector J.M, Haciomeroglu E.S. (2011). Towards model-centered mathematics learning and instruction. En L. Bu y R. Shoen (Eds.), *Model-Centered Learning. Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra.*, pp. 13–40. Rotterdam: Sense Publishers.

[Burke y Kennedy, 2011] Burke, M., Kennedy, P. (2011). GeoGebra: From simulation to formalization in teacher preparation and inservice programs. In L. Bu and R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning.*, 57–72. Rotterdam, NED: Sense Publishers.

[Castro y Godino, 2011] Castro, W. F., Godino, J. D. (2011). Metodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997–2010). En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, M. Mercedes (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 99–116. Ciudad Real: SEIEM.

[Castro, 2001] Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

[Centeno, 1995] Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant.* Bordeaux: LADIST.

[Chamorro, 2005] Chamorro, M.C. (2005). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil.* Madrid: Pearson Prentice Hall.

[Chevallard, 1992] Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.

[Chevallard, 1997] Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

[Chevallard, 2004] Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Troisième Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22–27 août. IUFM d'Aix-Marseille y UMR ADEF.

[Colera y Gaztelu, 2009] Colera, J., Gaztelu, I. (2009). *Matemáticas, 2º ESO.* Madrid: Anaya.

[Contreras, 2005] Contreras, A. (2005). Los registros de representación semiótica y la Teoría de las funciones semióticas. En A., Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), *Investigación en didáctica de las matemáticas. Primer congreso internacional sobre aplicaciones y desarrollos de la Teoría de las funciones semióticas*, pp. 41–67. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

[DEGN, 2014] Departamento de Educación Gobierno de Navarra (DEGN) (2014). *Informe del sistema educativo en Navarra, curso 2013/2014.* Pamplona: DEGN.

[DEGN, 2007] Departamento de Educación Gobierno de Navarra. (2007) DECRETO FORAL 25/2007, de 19 de marzo, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Foral de Navarra. *BON* 65, 25 de mayo, 157–183.

[Dickson, Brown y Gibson, 1991] Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: LABOR.

[Dienes, 1977] Dienes, Z.P. (1977). *Exploración del espacio y práctica de la medida.* Barcelona: Teide.

[Douady, 1986] Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

[Dreyfus, 1999] Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1–3), 85–109.

[Drijvers, Godino, Font y Trouche, 2013] Drijvers, P., Godino, J., Font, V., Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23–49.

[Duval, 1995] Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

[Fernández, 2003] Fernández, B. (2003). *Situación social de las mujeres en Navarra. 2003. Evolución y tendencias de cambio.* Pamplona: Gobierno de Navarra.

[Font, Godino y D'Amore, 2007] Font, V., Godino, J.D., D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, 27(2), 2–7.

[Font, 2007] Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, 19(2), 95–128.

[Freudenthal, 1973] Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel.

[Freudenthal, 1978] Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematics education.* Dordrecht: D. Reidel.

[Giménez, 2015] Giménez, C. (2015). Ah, però... el GeoGebra té CAS?. *VII Jornades de l'ACG, El nou GeoGebra: una solució per a cada usuari.* Barcelona, 20 i 21 de febrer de 2015, Campus de la Ciutadella, UPF. [Recuperable en (15/10/15): `http://acgeogebra.cat/`]

[Godino et al, 2015a] Godino, J.D., Neto, T., Wilhelmi, M.R., Aké, L., Etchegaray, S., Lasa, A. (2015) Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática* (en prensa).

[Godino et al, 2015b] odino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. R. (2015).

Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 127 – 150.

[Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014] Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199–219.

[Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014] Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167–200.

[Godino et al., 2013] Godino, J. D., Batanero C., Contreras, A., Estepa, A. Lacasta, E., Wilhelmi M.R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*, 2810–2819). Ankara, TR: Middle East Technical University and ERME. [Recuperable en (08/10/14): `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ erme/index.php?slab=proceedings`].

[Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012] Godino, J. D., Castro, W.F., Aké, L., Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 42(B), 199–219.

[Godino, 2011] Godino, J.D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME).* Recife, Brasil.

[Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011] Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R., Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247–265.

[Godino et al., 2011] Godino, J. D., Carrillo, J., Castro, W.F., Lacasta, E., Muñoz-Catalán, M.C, Wilhelmi, M.R. (2011). Métodos de investigación en educación matemática. Análisis de los trabajos publicados en los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, M. Mercedes (Eds), *Investigación en educación matemática XV*, pp. 33–50. Ciudad Real: SEIEM.

[Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009] Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R., Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

[Godino, Batanero y Font, 2007] Godino, J.D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

[Godino y Font, 2007] Godino, J.D., Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.

[Godino, Contreras y Font, 2006] Godino, J.D., Contreras, A., Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39–88.

[Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006] Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006) . Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 117–150. [Recuperable en (08/10/14): `http://www.clame.org.mx/relime.htm`].

[Godino, 2002] Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2–3), 237–284.

[Godino y Batanero, 1994] Godino, J.D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14(3), 325–355.

[Gödel, 2009] Gödel, K. (2009). *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los* Principia Mathematica *y sistemas afines*, I. Oviedo: KRK.

[Guzmán, 2008] Guzmán, M. de (2008). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.

[Hoyles y Noos, 2003] Hoyles, C., Noos, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick y F.K.S Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*, pp. 323–349. Dordrecht: Kluwer.

[Jong, 2006] Jong, T. de (2006). Scaffolds for computer simulation based scientific discovery learning. En J. Elen y R. E. Clark (Eds.), *Dealing with complexity in Learning Environments*, pp. 107–128. London: Elsevier.

[Jong y Joolingen, 2008] Jong, T. de, Joolingen, W.R. van (2008). Model-Facilitated Learning. En J.M. Spector, M.D. Merrill, J. van Merriënboer y M.P. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology (3ª ed.)*, 457–468. New York: Lawrence Erlbaum.

[Katz, 1998] Katz, V.J. (1998) *A History of Mathematics*. Amsterdam: Addison Wesley Longman.

[Korf y Felner, 2007] Korf, R. E., Felner, A. (2007). Recent Progress in Heuristic Search: a Case Study of the Four-Peg Towers of Hanoi Problem. *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, 2324–2329. January 6–12, Hyderabad.

[Lacasta, 1995] . Lacasta, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse. Université Bordeaux I.

[Lacasta y Pascual, 1998] Lacasta, E. , Pascual, J. R. (1999). *Las funciones en los graficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

[Lacasta y Wilhelmi, 2012] Lacasta, E., Wilhelmi, M. R. (2012). Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil. Inédito. Pamplona: UPNA.

[Lacasta y Wilhelmi, 2011] Lacasta, E., Wilhelmi, M. R. (2011). Métodos cuantitativos en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (2001–2010). En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, M. Mercedes (Eds), *Investigación en educación matemática XV*, pp. 51–76. Ciudad Real: SEIEM.

[Lacasta y Wilhelmi, 2008] Lacasta, E., Wilhelmi, M.R. (2008). The graphic illusion of high school students. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications*, pp. 99–117. Berlin: Springer.

[Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006] Lacasta, E., Madoz, E.G., Wilhelmi, M.R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la educación secundaria obligatoria. *Boletín de estudios e investigación*, 4, 79–90.

[Lacasta, Malaspina, Pascual y Wilhelmi, 2010] Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2010). Optimization through measurement situations in grade 2. En M. M. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology*, 3, pp. 259–271. Brazil: Belo Horizonte.

[Lacasta, Malaspina, Pascual y Wilhelmi, 2009] Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J. R., Wilhelmi M. R. (2009). Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de Educación Primaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 259–271. Santander: SEIEM. [Recuperable en (08/10/14): http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm].

[Lakatos, 1983] Lakatos, I. (1983). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

[Lasa, 2015a] Lasa, A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz*. Bilbo: Udako Euskal Unibertsitatea.

[Lasa, 2015b] Lasa, A. (2015). GI: A place to Guide Innovation. Actas *GeoGebra Global Gathering*. Linz, 14–16 julio de 2015, Johannes Kepler University. [Recuperable en: http://tube.geogebra.org/book/title/id/ygtqTUJv#]

[Lasa, 2011] Lasa, A. (2011). Papel de la noción de función en la resolución de ecuaciones. Trabajo Fin de Máster. Inédito. Pamplona: UPNA.

[Lasa y Wilhelmi, 2015a] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2015). Si Feynman hagués tingut GeoGebra. *VII Jornades de l'ACG, El nou GeoGebra: una solució per a cada usuari*. Barcelona, 20 i 21 de febrer de 2015, Campus de la Ciutadella, UPF. [Recuperable en (15/10/15): http://acgeogebra.cat/]

[Lasa y Wilhelmi, 2015b] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2015). Atando cabos: contanto circunferencias. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2, pp. 145–152. Granada, 2015. [Recuperable en (15/10/15): http://www.estadis.net/3/actas/COM/06.%20Atando%20cabos,%20contando%20circunferencias.pdf]

[Lasa y Wilhelmi, 2015c] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2015). El soporte material en la práctica matemática del aula. *Día de GeoGebra*, 9 de mayo de 2015. Alcalá de Henares.

[Lasa y Wilhelmi, 2015d] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2015). Una parcela para Laika. *Día de GeoGebra*, 9 de mayo de 2015. Alcalá de Henares.

[Lasa y Wilhelmi, 2014] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2014). Integración de GeoGebra en el diseño de situaciones didácticas en Educación Primaria. VI Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra. Barcelona: Universidad Pompeu Fabra. [Disponible en (26/03/2014): `http://acgeogebra.cat/vi_jornades.html`. [Enlace a la construcción (26/03/2014): `http://www.geogebratube.org/student/mVajSjWVp`].

[Lasa y Wilhelmi, 2013a] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013). GeoGebra en la formación de profesorado de ESO y Bachillerato. *Cónica*, 3, 30–32. [Disponible en: `http://acgeogebra.cat/butlleti/conica3/conica3.pdf`].

[Lasa y Wilhelmi, 2013b] Lasa, A., Wilhelmi, M.R. (2013b). Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de Sao Paulo*, 2(1), 52–64. [Recuperable en (01/10/2014): `http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279`].

[Mason, Burton y Stacey, 1989] Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente.* MEC: Labor.

[Mayer, 2004] Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist.*, 59, 14–19.

[Mazlish, 1995] Mazlish, B. (1995). *La cuarta discontinuidad. La coevolución de hombres y máquinas.* Madrid: Alianza.

[MEC, 2007] Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE* 5, de 5 de enero, 677–773.

[MEC, 2006] Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE* 5, del 5 de enero de 2007, 677–773.

[Mendiola, 2005] Mendiola, L.D. (2005). *El papel de la evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la resolución de problemas. El caso de los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incognitas por alumnos de segundo de secundaria.* Tesis de Maestría: Universidad de Piura.

[Milrad, Spector y Davidsen, 2003] Milrad, M., Spector, J.M., Davidsen, P.I. (2003). Model facilitated learning. En S. Naidu (Ed.), *Learning and teaching with technology: Principles and practices*, pp. 13–27. London: Kogan Page.

[Moreira, Caballero y Vergnaud, 2009] Moreira, M.A., Caballero, C., Vergnaud, G. (2009). *La teoría de los campos conceptuales y la enseñanza/aprendizaje de las ciencias.* Burgos: Universidad de Burgos.

[NCTM, 1989] NCTM (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla, ESP: Sociedad andaluza de educación matemática Thales.

[O'Neill y Dominguez, 2001] O'Neill, C.E., Domínguez, J.M. (2001). *Diccionario histórico de la Compañía de Jesús: Infante de Santiago-Piatkiewicz.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

[Or, 2015] Or, A. (2015). Designing GeoGebra Tasks for Visualization and Reasoning. Linz, 14–16 julio de 2015, Johannes Kepler University. [Recuperable en (15/10/15): `https://tube.geogebra.org/b/1405633#`]

[Or, 2013] Or, A.C.M. (2013). Designing tasks to foster operation apprehension for visualization and reasoning in dynamic geometry environment. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study*, 22, 89–98. Oxford, U.K: ICMI.

[Penrose, 1995] Penrose, R. (1995). *La nueva mente del emperador*. Barcelona: Grijalbo Mondadori.

[Piaget, 1975] Piaget, J. (1975). *L'equilibration des structures cognitives.* Paris: PUF.

[Polya, 1945] Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

[Rabardel, 2002] Rabardel, P. (2002). *People and technology. And cognitive approach to contemporary instruments.* [Recuperable en (15/03/15): `http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr`]

[Ribeiro, 2013] Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, pp. 71–90. Bilbao: Universidad del País Vasco. [Recuperable en (08/10/14): `http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm`].

[Saaty y Kainen, 1977] Saaty, T.L., Kainen, P.C. (1977). *The four-color problem. Assaults and conquest.* New-York: McGraw-Hill.

[Sáenz de Cabezón, 2008] Sáenz de Cabezón, A. (2008). La enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con fracciones en el primer ciclo de ESO. Inédito. DEA, Universidad Pública de Navarra.

[Sessa, 2007] Sessa, A. A. di (2007). Systemics of learning for a revised pedagogical agenda. In R. A. Lesh, E. Hamilton & J.J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematicas education*, 245–261. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[Trouche, 2000] Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 239–264.

[Turing, 2012] Turing, A.M. (2012). *¿Puede pensar una máquina?*. Oviedo: KRK.

[Vergnaud, 1994] Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En H. Guershon and J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* Albany, N.Y: State University Press.

[Vergnaud, 1990] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133–170

[Vergnaud, 1988] Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En H. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 141–161. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

[Villiers, 2004] Villiers, M. de (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teacher's understanding of proof. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 35(5), 703–724.

[Vizmanos, Hernández y Alcaide, 2008] Vizmanos, J.R, Hernández, J, Alcaide, F. (2008) *Matemáticas 1, Ciencias y Tecnología.* Madrid: Ediciones SM.

[Wilhelmi, 2007] wilhelmi, M.R. (2007). El momento del trabajo de la técnica en la evolución de un proceso de estudio: El caso de la determinación de una circunferencia. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)*, pp. 177–197. Jaén: Universidad de Jaén.

[Wilhelmi, 2003] Wilhelmi, M.R. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos.* Sección 2: Tesis doctorales, nº23. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

[Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007] Wilhelmi, M.R., Godino, J.D., Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77–120.

[Wilhelmi, Godino y Font, 2007] Wilhelmi, M. R., Godino, J.D., Font, V. (2007). Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las matemáticas: reflexiones sobre la teoría de las situaciones didácticas y el enfoque ontológico y semiótico. En M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas*, pp. 1–20. Mendoza, Argentina: Universidad de Cuyo. [Disponible en: `http://www.webpersonal.net/vfont/Burdeos.pdf`]

[Wilhelmi, 2009] Wilhelmi, M.R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: una caso práctico. En C. Gaita (Ed.), *Actas IV Coloquio internacional Enseñanza de las matemáticas*, pp. 1–22. Lima: Universidad Católica Pontificia del Perú. IREM.

[Wilhelmi, Belletich y Lasa, 2013] Wilhelmi, M.R., Belletich, O., Lasa, A., Reina, L. (2013). Evaluación de respuesta a una tarea de recuento. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Primeras Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, pp. 273–283. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [Disponible en (16/09/2013): `http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/Actas%20jornadas.pdf`].

[Yerushalmy, 2005] Yeurushalmi, M. (2005). Challenging known transitions: learning and teaching algebra with technology. *For the learning of mathematics*, 25(3), 37–42.

Índice de figuras

Índice de Tablas

Índice alfabético