UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Didáctica de la Matemática

UNA APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA A LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Tesis doctoral

Ángel Martínez Recio

Junio, 1999

Quiero agradecer a Juan Díaz Godino su inestimable ayuda para la realización de este trabajo de investigación. A Carmen Batanero su valiosa asistencia en el diseño estadístico. A ambos su amistad.

INDICE

Página:

INTRODUCCIÓN **9**

CAPÍTULO 1:

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA COMO OBJETO DIDÁCTICO.

ANÁLISIS DE UN PROBLEMA

1.1. Introducción 13

1.2. Problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática

Estado de la cuestión 15

1.2.1. Marco Curricular 15

1.2.2. Dificultades para los estudiantes de la demostración matemática 21

1.2.3. Significados de la demostración matemática 24

1.2.4. Relaciones de la demostración matemática con otros instrumentos validativos 29

1.2.5. Necesidad de una aproximación epistemológica 34

1. 3. Objetivos, hipótesis y metodología de la investigación 40

1.3.1. Parte teórica: Aplicación de la noción de significado sistémico y elaboración de un modelo semiótico de la actividad matemática 40

1.3.2. Parte experimental: Caracterización de los significados personales de estudiantes universitarios sobre la demostración matemática. Factores condicionantes 43

CAPÍTULO 2:

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

2.1. Introducción 51

2.2. Objetos y significados desde una perspectiva semiótico-antropológica 52

2.3. El campo conceptual de la argumentación 54

2.4. La argumentación en distintos contextos institucionales 58

2.4.1. La argumentación en la vida cotidiana 59

2.4.2. La argumentación científica. La prueba 63

2.4.3. La argumentación matemática. La demostración 66

2.4.4. La demostración en lógica y fundamentos de las matemáticas 69

2.4.5. La demostración en clase de matemáticas 71

2.5. Conclusiones e implicaciones para la investigación y la enseñanza 76

CAPÍTULO 3:
EPISTEMOLOGÍA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y SUS PROCESOS DE VALIDACIÓN. ESBOZO DE UN MODELO SEMIÓTICO PARA EL ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

3.1. Introducción. 79
3.2. Construcción del conocimiento matemático 81
3.3. Validación del conocimiento matemático 87
3.4. Esbozo de un modelo semiótico para el análisis de la actividad matemática 92
3.5. La demostración matemática como cadena de relaciones semióticas 98
3.6. Conclusiones 103

CAPÍTULO 4:
ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACION MATEMATICA PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS.

4.1 Introducción 105
4.2. Caracterización experimental de los esquemas personales de demostración de estudiantes universitarios 106
- 4.2.1. Muestra 107
- 4.2.2. Cuestionario 107
- 4.2.3. Categorización de las respuestas 110
- 4.2.4. Interpretación de las respuestas como esquemas de demostración 114
- 4.2.5. Resultados cuantitativos 115
- 4.2.6. Asociación entre variables 119

4.3. Consistencia de los esquemas personales de demostración 122
- 4.3.1. Muestra 123
- 4.3.2. Cuestionario 123
- 4.3.3. Resultados cuantitativos 124

4.4. Estudios complementarios 130
- 4.4.1. Estudio estadístico de la puntuación total en las pruebas 130
- 4.4.2. Variabilidad de la puntuación total según especialidades 134

4.5. Conclusiones 137

CAPÍTULO 5:
ANÁLISIS COGNITIVO DE LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN

5.1 Introducción 139
5.2. Los esquemas personales de demostración matemática y las teorías de niveles 141

5.2.1. Consideraciones generales 141
5.2.2. La teoría de niveles de Van Hiele 142
5.3. Interpretación cognitiva de los esquemas personales de demostración. Un estudio de casos 148
5.3.1. Metodología 148
5.3.2. Caso 1: Alumno A 151
5.3.3. Caso 2: Alumno Ar 156
5.3.4. Caso 3: Alumno C 158
5.3.5. Caso 4: Alumno E 161
5.3.6. Caso 5: Alumno F 164
5.3.7. Caso 6: Alumno M 165
5.3.8. Caso 7: Alumno MM 167
5.4. Conclusiones finales del estudio de casos 168
CAPÍTULO 6:
COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN MATEMÁTICA
6.1. Introducción 173
6.2. La teoría de los momentos didácticos en el enfoque antropológico 175
6.3. Complejidad semiótica de los procesos de validación matemática. Un estudio experimental 178
6.3.1. Metodología de investigación 178
6.3.2. El ángulo como rotación 180
6.3.2.1. Análisis 'a priori' de la tarea 181
6.3.2.2. Descripción y análisis del proceso de estudio 184
6.3.2.3. Conclusiones: Complejidad de una noción elemental 189
6.3.3. El ángulo como inclinación. Rectas paralelas cortadas por una secante 190
6.3.3.1. Análisis 'a priori' de la tarea 190
6.3.3.2. Descripción y análisis del proceso de estudio 193
6.3.3.3. Conclusiones 196
6.3.4. Suma de los ángulos interiores de un triángulo 196
6.3.4.1. Análisis 'a priori' de la tarea 197
6.3.4.2. Descripción y análisis del proceso de estudio 200
6.3.4.3. Papel de los conocimientos previos en la producción de demostraciones 205
6.4. El momento de trabajo de la técnica y el desarrollo de esquemas conceptuales 207
6.5. Conclusiones 210
CONCLUSIONES FINALES E IMPLICACIONES 213
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 223

INTRODUCCIÓN

Este libro describe una investigación sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática que hemos desarrollado en el periodo 1994/99.

Nace como resultado de nuestra preocupación por el bajo nivel de razonamiento matemático por parte de nuestros alumnos -observado en nuestra experiencia como profesor durante más de 20 años- y de nuestro interés por los fundamentos epistemológicos de la matemática y su didáctica.

Aunque nuestro interés inicial estaba orientado hacia el estudio del razonamiento matemático, en general, posteriormente hemos preferido acotar nuestra investigación en torno a la demostración matemática, que implica un tipo particular de razonamiento, el razonamiento validativo, de especial interés en la educación secundaria y en la educación universitaria.

Difícilmente se puede realizar una investigación sobre la didáctica de un contenido matemático sin un estudio riguroso de la naturaleza del mismo. Tal estudio nos aportará criterios necesarios para organizar ese contenido desde un punto de vista didáctico, formular hipótesis sobre posibles dificultades de enseñanza y aprendizaje, y elaborar instrumentos de diagnostico e intervención didáctica.

Es por ello que nuestra investigación se ha centrado en el análisis epistemológico y didáctico del campo conceptual de la argumentación matemática, particularmente de la demostración matemática.

El libro ha sido dividido en seis capítulos. Los tres primeros están dedicados a la explicitación de la problemática abordada y al análisis y desarrollo de distintos elementos teóricos implicados. Los tres restantes contienen varios estudios de tipo experimental, centrados en la exploración de los esquemas personales de demostración de estudiantes de primer curso de la universidad de Córdoba.

El capítulo 1 contiene la descripción del área problemática, estado de la cuestión, hipótesis y metodología de la investigación. Se señalan diferentes objetivos e hipótesis de trabajo, centrados en el análisis de los significados institucionales y personales de la demostración matemática, y en las dificultades de los estudiantes en la elaboración de demostraciones matemáticas.

En el capítulo 2 se aborda el problema de describir las principales características del significado de la demostración y nociones relacionadas, tales como razonamiento, argumentación y prueba, en distintos contextos institucionales que en mayor o menor medida condicionan las prácticas de validación en la clase de matemáticas. En particular, se analizan los contextos de la vida cotidiana, ciencias experimentales, matemáticas, y lógica y fundamentos de las matemáticas.

En el capítulo 3 se plantea el estudio del significado de los objetos matemáticos, y en particular de la demostración, desde una perspectiva semiótica-antropológica. La consideración de la demostración como cadena de relaciones semióticas permite una visión integradora de las diferentes formas de argumentación matemática, que pueden aparecer así como distintas fases de un mismo proceso de demostración.

En el capítulo 4 se efectúa un estudio de los significados personales de la demostración matemática, de los esquemas personales de demostración. El estudio se ha realizado analizando las prácticas argumentativas desarrolladas, ante una prueba escrita, por 622 estudiantes de primer curso de distintas especialidades de la Universidad de Córdoba.

Para efectuar un análisis cognitivo de los esquemas personales de demostración analizados en el capítulo 4, se describen en el capítulo 5 entrevistas clínicas desarrolladas con un grupo de 7 estudiantes de 5º curso de Psicopedagogía, tras un curso sobre didáctica de las matemáticas, que incluía una reflexión teórica y práctica sobre la demostración matemática.

El aporte teórico realizado en el capítulo 5, junto con el efectuado en el capítulo 6, para dar fundamento a los datos experimentales registrados en un nuevo estudio de casos en torno a los aspectos semiótico-antropológicos de la demostración matemática, completa el estudio teórico de los procesos de validación matemática.

Finalizamos la obra con una última sección en la que sintetizamos las conclusiones obtenidas y exponemos algunas implicaciones para la investigación y la práctica de la enseñanza de la demostración matemática.

Desde el punto de vista metodológico, en nuestra investigación hemos combinado diversas técnicas y enfoques según las distintas facetas de nuestro estudio, dependiendo del problema abordado en las mismas. Al igual que cada problema (o campo de problemas) matemático requiere sus conceptos y técnicas específicas para su solución, desde el punto de vista metodológico somos partidarios de emplear en cada caso los enfoques y técnicas pertinentes al problema didáctico planteado.

Así, hemos combinado el estudio documental y cualitativo en la fase teórica del estudio con diversas técnicas y enfoques en la parte experimental. En el estudio de los esquemas personales de prueba de los estudiantes hemos utilizado el enfoque cuantitativo, experimental, donde el control de variables, el tamaño de la muestra y su representatividad confiere una gran potencia y fiabilidad a los resultados del análisis estadístico de los datos, particularmente al cálculo de correlaciones y los contrastes de hipótesis realizados. Por otro lado, y puesto que este enfoque nos indica las tendencias existentes en la población, pero no muestra toda la riqueza de la variabilidad individual, ni explica el por qué de la misma, hemos complementado el estudio mediante técnicas de tipo cualitativo. Particularmente, el estudio de casos nos ha permitido mostrar la consistencia de los esquemas personales de demostración. Así mismo, la observación y registro de unos episodios instruccionales ha mostrado la complejidad semiótica de los procesos elementales de demostración.

Evidentemente, cuando el estudio es cualitativo su carácter es exploratorio y está principalmente orientado a la formulación de hipótesis que deberán ser contrastadas formalmente en nuevas investigaciones.

CAPÍTULO 1

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA COMO OBJETO DIDÁCTICO. ANÁLISIS DE UN PROBLEMA.

1.1. INTRODUCCIÓN

La demostración es un objeto de especial significación en matemáticas. Para Garnier y Taylor (1996, prefacio), *"...la demostración es uno de los conceptos claves que caracterizan la disciplina (matemática)".* Según Bogomonly (1998, p. 1), "*…demostrar proposiciones es la esencia de las matemáticas*".

Pero es también un objeto de notable interés didáctico. Para Hanna y Jahnke (1996; p. 877) *"la demostración es una característica esencial de la matemática y como tal debería ser un componente clave de la educación matemática".*

Aunque se trata de un objeto complejo, que admite diferentes interpretaciones, la demostración matemática aparece para la generalidad de los matemáticos como demostración deductiva, que es el modelo para ellos de demostración rigurosa. Un modelo que está ligado a la concepción que la generalidad de los matemáticos tiene de la propia matemática: una disciplina abstracta, cuyos teoremas se deducen de conjuntos establecidos de axiomas, mediante razonamientos estrictamente lógicos. La axiomatización garantiza el rigor. En un contexto axiomático las inferencias son precisas; las demostraciones rigurosas. Dieudonné (1987; p. 206) sintetiza esta idea diciendo:

"...no puede haber demostración 'rigurosa' excepto en el contexto de una teoría axiomática".

La aplicabilidad de la demostración estrictamente deductiva en el marco escolar es, sin embargo, discutida. Diversos autores, como Fischbein (1982), Senk (1985), Martin y Harel (1989), Chazán (1993), Battista y Clements (1995), Recio y Godino (1996), que han estudiado las capacidades de los estudiantes de diferentes niveles educativos para comprender y elaborar demostraciones deductivas, cuestionan su uso en el ámbito escolar, especialmente en los niveles no universitarios.

En realidad, la implantación del rigor deductivo en el ámbito escolar es reciente; se produjo durante los años sesenta y principios de los setenta, acompañando al movimiento de renovación de la enseñanza de esta disciplina que dio en llamarse «*matemática moderna*».

En la década de los ochenta muchos educadores han reevaluado el papel de la demostración matemática en diferentes partes del curriculum y como resultado ha habido una tendencia a salir de lo que ha sido visto como una sobredependencia de la demostración formal. Bajo esta perspectiva, Hanna (1989, p. 50), introducía una clara distinción entre *"demostraciones que demuestran y demostraciones que explican"* y demandaba un mayor protagonismo en educación matemática de demostraciones que fomenten la comprensión, indicando *"que de hecho la completitud de detalles en una deducción formal puede oscurecer, más que iluminar".*

El proceso de revisión del papel educativo de la demostración matemática ha continuado en la década de los noventa, pudiendo citarse, como ejemplo indicativo, el número monográfico, sobre la demostración matemática, de *Educational Studies in Mathematics*, en 1993. También el trabajo de investigadores tales como: Villiers (1993); Boero, Garuti y Mariotti (1996); Hanna y Jahnke (1996); Harel y Sowder (1996); Barnard y Tall (1997); Mariotti, Bartolini, Boero, Ferri y Garuti (1997); Godino y Recio (1997, 1998); Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti (1998); Garuti, Boero y Lemut (1998); Mariotti, (1998), Douek (2000), Knuth (2000), Villiers (2000), etc.

Como consecuencia de esa revisión, la demostración aparece hoy como un objeto complejo, estrechamente relacionado con otros elementos validativos, como pueden ser los de *explicación*, *comprobación*, *argumentación*, *prueba*, etc. La comprensión de esas relaciones ayuda a interpretar mejor el significado del objeto *demostración*, más amplio que el estrictamente deductivo, permitiendo abrir un proceso de aproximación a la noción de demostración matemática más cercano a las capacidades lógicas de los estudiantes de Educación Primaria, Secundaria e, incluso, primeros niveles de Educación Universitaria.

En los apartados siguientes se expondrá el estado actual de las investigaciones acerca de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática. A partir de dicha revisión formularemos nuestras hipótesis de trabajo, cuya posible verificación constituye el objeto central de esta tesis.

1.2. PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. ESTADO DE LA CUESTIÓN

1.2.1. Marco curricular

El desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas -dentro del objetivo más general de desarrollo de las capacidades de razonamiento matemático- constituye un objetivo fundamental de la educación matemática, como se desprende de las directrices curriculares en distintos países.

Así, los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics de los EEUU de América (NCTM, 1989) -que constituyen una propuesta curricular de amplio seguimiento en la comunidad internacional de investigadores y profesionales de la educación matemática-, al establecer las metas generales de profesionales de la educación matemática, indican que para trabajar con las matemáticas es fundamental formular hipótesis, recopilar evidencias y *elaborar un argumento* que apoye estas nociones, señalando que, de hecho, una *demostración bien razonada* debiera ganar más reconocimiento que la capacidad de los estudiantes para encontrar la respuesta correcta.

Para el ciclo P-4 (que puede hacerse corresponder, aproximadamente, con Educación Infantil y los dos primeros ciclos de Educación Primaria, en nuestro sistema educativo), los Estándares plantean que el currículo debe hacer hincapié en el desarrollo de las capacidades de pensamiento y razonamiento matemático de los niños. El uso y la necesidad de las matemáticas que va a tener el individuo en el futuro hacen que la capacidad de pensar, razonar y resolver problemas sea un objetivo fundamental del estudio de las matemáticas. Para desarrollar estas características en los niños se necesita que las escuelas incluyan en el currículo experiencias adecuadas de razonamiento y de resolución de problemas desde el principio. Aun más, este objetivo ha de influir en el modo en que se enseñen las matemáticas y en el modo en que los alumnos se enfrentan a ellas y las aplican durante toda su educación.

En el apartado de las matemáticas como razonamiento, los Estándares establecen (p. 28), para este ciclo, que:

"*En los niveles P-4, el estudio de las matemáticas debe hacer hincapié en el razonamiento, para que los estudiantes sean capaces de:*

- *llegar a conclusiones lógicas en matemáticas;*
- *usar modelos, hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar sus ideas*;
- *justificar sus respuestas y sus modelos resolutivos;*
- *hacer uso de sus estructuras conceptuales y conexiones para analizar situaciones matemáticas;*
- *creer en el significado de las matemáticas*".

Para los niveles 5-8 (que se corresponden, aproximadamente, con el tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de ESO, en nuestro sistema educativo), los estándares afirman (p. 79) que:

"*En los niveles 5-8, el razonamiento debe impregnar todo el currículo de matemáticas para que los estudiantes sean capaces de*

- *reconocer y aplicar razonamientos deductivos e inductivos;*
- *entender y aplicar procesos de razonamiento, con especial atención al razonamiento espacial y al razonamiento con proporciones y gráficas;*
- *hacer y evaluar conjeturas y argumentos matemáticos;*
- *dar validez a sus propias ideas;*
- *apreciar la utilidad y la potencia que tiene en toda situación el razonamiento como parte de las matemáticas".*

Los Estándares (p. 79) precisan los cambios en capacidades de razonamiento que se producen en esta etapa, sobre la anterior, indicando que el desarrollo del razonamiento lógico viene ligado al desarrollo intelectual y verbal de los estudiantes. Durante los niveles 5-8 cambia la capacidad de razonamiento de los estudiantes. Mientras la mayor parte de estudiantes de quinto grado continúan ejerciendo un pensamiento concreto que depende de un contexto físico o especifico para poder percibir regularidades y relaciones, muchos estudiantes de octavo grado son ya capaces de razonamiento más formal y de abstracción No obstante, incluso los estudiantes más avanzados de los niveles 5-8 pueden hacer uso de materiales concretos para apoyar su razonamiento; esto es particularmente cierto en el caso del razonamiento espacial.

Señalan los Estándares, como consideración preliminar para el ciclo 9-12 (correspondiente, aproximadamente, al segundo ciclo de ESO y Bachillerato, en nuestro sistema educativo), que la educación matemática en la enseñanza secundaria debe presentar experiencias que animen y capaciten a los alumnos a valorar las matemáticas, adquirir confianza en su propia capacidad matemática, ser capaces de resolver problemas matemáticos, comunicarse matemáticamente y razonar matemáticamente.

En el Estándar dedicado al razonamiento en matemáticas, para este ciclo, se dice (p. 147):

"En los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe incluir experiencias numerosas y variadas que refuercen y amplíen las destrezas de razonamiento lógico para que todos los estudiantes sean capaces de:

- *elaborar y comprobar conjeturas;*
- *formular contraejemplos;*
- *seguir argumentos lógicos;*
- *juzgar la validez de un argumento;*
- *construir argumentos sencillos validos.*

La atención se centra (p. 147) en que en todas las áreas de la matemática se requiere pensamiento inductivo y deductivo, por separado y en combinación. Un matemático o un estudiante que esté haciendo matemáticas generaliza, con frecuencia, a partir de una muestra de observaciones de casos particulares para elaborar una hipótesis (razonamiento inductivo) y después comprueba la hipótesis construyendo bien una verificación lógica, bien un contraejemplo (razonamiento deductivo).

El estándar plantea como objetivo el que todos los estudiantes tengan una experiencia con estas actividades para que lleguen a apreciar el papel que cumplen ambos modos de razonamiento en las matemáticas y en otras situaciones fuera de las matemáticas. Más aún, todos los estudiantes, en especial los futuros universitarios, deben aprender que el razonamiento deductivo es el método por el que se establece, en último término, la validez de un enunciado matemático.

Consideran los Estándares que en los niveles 9-12, los futuros universitarios tendrán su primera experiencia de razonamiento dentro de un sistema de axiomas, contexto que es tan esencial para el trabajo matemático. Este pensamiento de rango superior puede que no llegue fácilmente, ya que el requisito de verificar enunciados con una demostración deductiva por medio de un razonamiento a partir de axiomas sólo se da en la matemática; por tanto, se trata de un modo de pensamiento completamente nuevo para los alumnos de secundaria. Su experiencia previa tanto dentro como fuera de la escuela les ha enseñado a considerar suficientes los argumentos informales y empíricos. Los estudiantes deben llegar a entender que aunque resulten útiles estos argumentos, no constituyen por sí mismos una demostración.

En el Estándar de evaluación se plantea que (p. 226):

"La evaluación de la capacidad que tengan los alumnos para razonar matemáticamente debe ofrecer evidencia de que son capaces de:

- *utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas;*
- *utilizar el razonamiento para desarrollar argumentos plausibles de enunciados matemáticos;*
- *utilizar el razonamiento proporcional y espacial para resolver problemas;*
- *utilizar el razonamiento deductivo para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos validos;*
- *analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes;*

- *reconocer la naturaleza axiomática de las matemáticas.*

En nuestro país, las consideraciones curriculares sobre la importancia de la demostración y el razonamiento matemático son más escuetas. El Diseño Curricular Base elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989) considera (Primaria, p. 378; Secundaria, p. 480) el razonamiento deductivo como el resultado de un proceso que se inicia con las formas empírico-inductivas de razonamiento, introduciendo reflexiones como las siguientes:

"Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de las matemáticas, del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo, desempeñando incluso a menudo un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que este último. Esta afirmación vale no sólo desde el punto de vista histórico, sino que describe como proceden los matemáticos en su trabajo. Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver que sucede, etc., son las autenticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior. Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático".

Esas consideraciones son complementadas por las referencias de los decretos por los que se establecen los currícula de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria (MEC, 1991), indicando que (p. 13) :

"*…la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración del proceso* *inductivo y de construcción a través del cual ha llegado a desarrollarse ese conocimiento. La especial trascendencia que para la educación matemática tiene el proceso, tanto histórico como personal, de construcción empírica e inductiva del conocimiento matemático, y no solo formal o deductiva, invita a resaltar dicho proceso de construcción".*

Añaden también los decretos (p. 17):

"*Inicialmente, tales experiencias matemáticas serán de naturaleza esencialmente intuitiva y estarán vinculadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación en situaciones particulares. Son experiencias, sin embargo, que constituyen únicamente un punto de partida, donde, por otra parte, puede ser preciso detenerse durante períodos de tiempo dilatados. Un punto de partida que es preciso en algún momento abandonar, procediendo a la construcción del conocimiento matemático a través de una abstracción y formalización crecientes. En esta formalización, a menudo, será preciso además corregir los errores, distorsiones y, en general, insuficiencias de la intuición espontánea, gracias a los conceptos y a los procedimientos matemáticos. La orientación de la enseñanza y del aprendizaje en esta etapa, se sitúa a lo largo de un continuo que va de lo estrictamente manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal".*

1.2.2. Dificultades para los estudiantes de la demostración matemática

Las orientaciones curriculares, consideradas en el apartado anterior, demandan una enseñanza de las matemáticas que concedan importancia al desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones matemáticas, dentro de la capacidad más general de razonar matemáticamente

La importancia, atribuida desde esas orientaciones curriculares, al razonamiento y la demostración contrasta con las dificultades reales de los estudiantes para asimilar y desarrollar procedimientos de validación matemática.

Existe una extensa bibliografía al respecto. Puede consultarse, al respecto, el espacio Web creado por el profesor Balacheff, a través de

Internet, desde 1997, que recoge una amplia y permanentemente actualizada bibliografía sobre la problemática educativa de la demostración matemática (la dirección de consulta es *http://www-cabri.imag.fr/Preuve*).

Diversos investigadores han constatado las dificultades de los estudiantes para comprender y realizar demostraciones matemáticas, incluso elementales.

Galbraith (1981, p. 16), en un estudio clínico sobre diversos aspectos de los procesos de demostración matemática, en el que fueron entrevistados 170 alumnos de secundaria, encontró, entre otras cuestiones, que cerca de un tercio de dichos alumnos no comprendían el valor del contraejemplo para refutar una proposición:

"La proporción incapaz de percibir la significación del contraejemplo dado permanecía considerable, aproximadamente el 28%".

Fischbein (1982, p. 16), investigando en una muestra de 400 estudiantes de secundaria de Tel Aviv (grados 10, 11 y 12) cómo distinguían éstos entre demostración empírica y formal, concluyó que, de toda la población investigada, sólo un porcentaje reducido de estudiantes fueron capaces de aceptar una demostración desarrollada de acuerdo con un razonamiento estrictamente lógico, sin necesidad de comprobaciones empíricas adicionales:

"Sólo el 14,5% fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)."

Senk (1985), en el contexto de una investigación relacionada con la teoría de niveles van Hiele, estudiando las capacidades de prueba matemática de 1520 estudiantes en 74 clases de 11 escuelas de 5 estados de EEUU, encontró que, de los alumnos que recibieron un curso de geometría de año completo, con enseñanza de la demostración, un 25% de los estudiantes no tenían virtualmente ninguna competencia en hacer demostraciones; otro 25% hacían sólo demostraciones triviales; sobre un 20% podían hacer demostraciones de mayor complejidad; y sólo un 30% eran capaces de hacer demostraciones similares a las existentes en los libros de texto estándar. Su conclusión explícitamente formulada fue (p. 453) que:

"...aproximadamente el 30% de los estudiantes siguiendo un curso de año completo con enseñanza de la demostración alcanzaron un 75% de nivel de maestría en demostraciones escritas".

Martin y Harel (1989, p. 41), en una investigación sobre esquemas personales de demostración matemática, realizada con 101 estudiantes de magisterio, encontraron que

"...más de la mitad de los estudiantes aceptaban un argumento empírico-inductivo como demostración matemática válida".

Nosotros mismos (Recio y Godino, 1996) hemos podido constatar la existencia de importantes limitaciones en la capacidad de realizar sencillas demostraciones matemáticas, por parte de estudiantes de primer año de la Universidad de Córdoba, que analizaremos más adelante.

Zaslavsky y Ron (1998, p. 230), estudiando el papel de los contraejemplos para refutar sentencias matemáticas falsas, con alumnos de los primeros cursos de secundaria, han encontrado que:

"...en el contexto de examinar cuatro sentencias matemáticas falsas (por ejemplo, que si dos cuadriláteros tienen todos sus lados respectivamente iguales, entonces los cuadriláteros son iguales), *sólo el 10% de los estudiantes usaron correctamente los contraejemplos en más de un caso. Dos tercios de los estudiantes o bien no encontraron apropiado usar contraejemplos o no fueron capaces de usar correctamente contraejemplos para las sentencias".*

Estos trabajos publicados muestran que la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática representa un problema, de cierta relevancia, que procede estudiar en profundidad. Comenzaremos por analizar el significado epistemológico y didáctico de la misma.

1.2.3. Significados de la demostración matemática

Las dificultades que suscita la demostración en el aula, entre otras razones, han motivado el trabajo de diversos investigadores en educación matemática por el esclarecimiento del significado epistemológico y didáctico de la demostración y otros instrumentos de validación matemáticos.

Desde esta perspectiva, una primera línea de trabajo ha sido de diferenciar distintos significados posibles del concepto de demostración matemática. Aunque en el siguiente capítulo desarrollaremos extensamente los significados institucionales de la demostración matemática, apuntaremos ahora los diferentes sentidos que de la demostración matemática dan diferentes investigadores en educación matemática.

Bell (1976, p. 24), señala tres sentidos diferentes para la noción de demostración:

"*…el primero es verificación o justificación, relacionado con la verdad de una proposición; el segundo es iluminación, en el que se espera que una buena prueba sugiera una idea de por qué la proposición es verdadera… El tercer sentido de la demostración es el más característicamente matemático, el de sistematización, es decir de organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos primitivos y teoremas, y resultados menores derivados de esos*".

Hersch (1993, p. 391) considera tres significados distintos para la demostración matemática:

A) Test para tratar de determinar el estado de verdad de los asuntos.

B) Un argumento que convence a jueces cualificados.

C) Una secuencia de transformaciones de sentencias formales, desarrollada de acuerdo con las reglas del cálculo de predicados.

La opción A corresponde al uso ordinario de la demostración matemática, cuando el matemático somete su trabajo a la crítica de sus colegas. La opción B corresponde a la demostración que es enviada a una revista especializada y juzgada por jueces cualificados. La opción C corresponde al modelo ideal de demostración que, aunque teóricamente posible, es imposible en la práctica, al requerir tiempo, paciencia e interés más allá de la capacidad de los matemáticos reales.

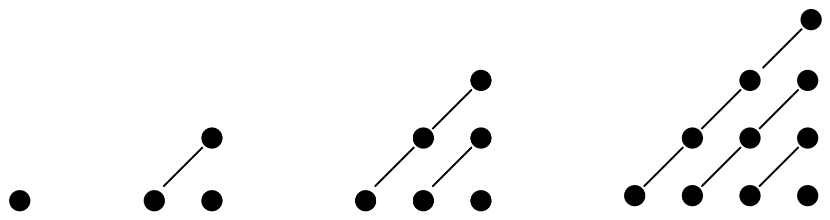
Villiers (1993) propone cinco funciones de la demostración matemática: como medio de *verificación/convicción* (p. 18); como medio de *explicación* (p. 20); como medio de *sistematización* (p. 22); como medio de *descubrimiento* (p. 23); y como medio de *comunicación* (p. 25).

El sentido de la demostración como *iluminación* de Bell, al igual que el de *explicación* de Villiers, tienen una interpretación en términos educativos, que ha sido desarrollado por Hanna (1989) y Hanna y Jahnke (1996), analizando el problema de la demostración ligado al de la *comprensión*, promoviendo el uso de demostraciones que no sólo demuestren, sino también que *expliquen*.

Hanna (1989, p. 45) distingue entre demostraciones *que demuestran* y demostraciones *que explican*, especificando que éstas muestran "*...no sólo que una demostración es verdad, sino también por qué es verdad*". Aportó (pp. 48-49) al respecto el ejemplo de la demostración de la fórmula de la suma de los n primeros números naturales, que puede ser realizada mediante un proceso de inducción matemática, en una línea de búsqueda de rigor matemático, pero que en el aula puede ser efectuada mediante un procedimiento más intuitivo, como el siguiente, que promueve la comprensión del por qué de la fórmula:

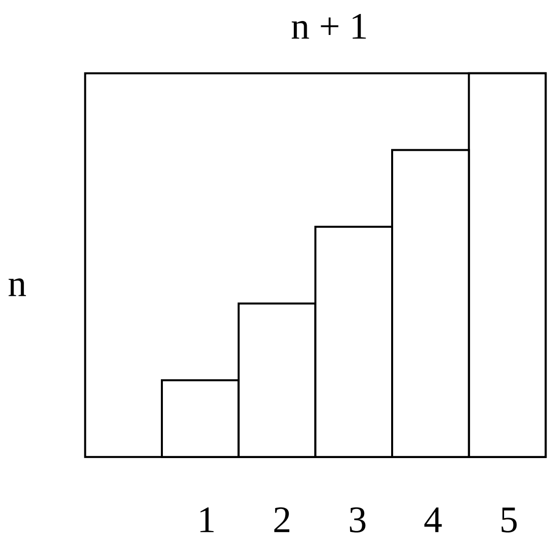
$$
\begin{array}{l}
S = 1 + 2 + \ldots + n \\
S = n + (n-1) + \ldots + 1 \\
\hline
2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) \\
S = n(n+1)/2
\end{array}
$$

Hanna y Jahnke (1996, p. 904) han ampliado este ejemplo con una versión geométrica, representando la suma de números naturales como números triangulares:



1   1 + 2   1 + 2 + 3   1 + 2 + 3 + 4

Y también representando los números naturales como áreas rectangulares:



En una línea cercana de reflexión sobre aspectos de la demostración que pueden tener incidencia en el plano educativo, Fischbein (1982, p. 11), estudiando las relaciones entre intuición y demostración, distingue tres diferentes clases de convicciones:

"Uno es el tipo extrínseco formal de convicción indirectamente impuesto por una argumentación formal (a veces puramente simbólica). La segunda es la forma de convicción empírica inductiva derivada de una multitud de hallazgos prácticos que confirman la conclusión respectiva. El tercero es el tipo intrínseco de convicción, directamente impuesto por la estructura de la situación misma".

Analizando el concepto de demostración matemática, complementaba Fischbein (1982, p. 15) estas afirmaciones, diciendo que:

"Hay, en principio, dos maneras básicas de demostrar. Si estamos considerando realidades factuales, la demostración consiste principalmente en producir u observar hechos que confirmen la afirmación expresada en la respectiva sentencia. Nuestra convicción de la validez de la sentencia crecerá más fuertemente si llegamos a ser capaces de producir más hechos que se correspondan con la sentencia. Con referencia a las matemáticas la manera de demostrar es diferente: la sentencia que consideramos debe ser la conclusión necesariamente lógica, conclusión necesaria de otras sentencias previamente aceptadas.

Tal demostración no está basada en una multitud de casos prácticos muy bien controlados. La validez del teorema está garantizada sólo por la validez de la inferencia lógica formal usada…".

Fischbein (1982, p. 16), en la investigación antes referida, sobre una muestra de 400 estudiantes de secundaria de Tel Aviv (grados 10, 11 y 12), se preguntaba por qué

"…sólo el 14,5% fueron consistentes hasta el final (es decir, no sintieron la necesidad de posteriores comprobaciones empíricas)."

Para él una explicación muy simple podía ser la siguiente:

"Sólo el 14,5% de los estudiantes comprende lo que realmente significa una demostración matemática. Estoy completamente de acuerdo, pero es sólo una primera explicación".

Fischbein (1982, p. 17), continuaba su reflexión diciendo que:

"Las dos maneras básicas de demostrar -la empírica y la lógica- no son simétricas, no tienen el mismo peso en nuestra actividad práctica. Para el comportamiento adaptativo corriente, la principal manera de producir representaciones e interpretaciones generales es la de la inducción empírica: como tenemos éxito en acumular más hechos que confirmen una cierta visión general, llegamos a estar más convencidos de su validez. El grado de creencia depende, naturalmente, de la cantidad y, naturalmente, variedad de hechos confirmatorios que conseguimos acumular…

El concepto de demostración formal está completamente fuera de la principal corriente de comportamiento. Una demostración formal ofrece una garantía absoluta a una sentencia matemática. Incluso una simple comprobación práctica es superflua. Esta manera de pensar, de pensar y demostrar, contradice básicamente la forma adaptativa práctica de conocer que está permanentemente a la búsqueda de confirmación adicional…

Naturalmente, él (el alumno) puede aprender demostraciones y puede aprender la noción general de una demostración. Pero nuestra investigación ha mostrado que eso no es suficiente. Se requiere una profunda modificación. Se necesita una "base de creencia" no natural completamente nueva, la cual es diferente de la manera en la *que una "base de creencia" empírica se forma. El concepto de demostración formal, no inductiva, no intuitiva, no empírica puede llegar a ser un efectivo instrumento para el proceso de razonamiento si, y sólo si, tiene en sí mismo las cualidades requeridas por el comportamiento empírico adaptativo.*

En otros términos: las maneras formales de pensar y demostrar pueden liberarse de las limitaciones del conocimiento empírico si llegan a ser capaces de incluir en sí mismas aquellas cualidades que confieren a la investigación empírica su productividad específica…No es suficiente para el alumno aprender formalmente lo que significa una demostración formal, en orden a estar listo para tomar completa ventaja de ese conocimiento (en una actividad de razonamiento matemático). Una nueva "base de creencia", una nueva aproximación intuitiva, debe ser elaborada la cual permitirá al alumno no sólo comprender una demostración formal, sino también creer (completa, comprensiva, intuitivamente) en la universalidad a priori del teorema garantizado por la demostración respectiva. Como en cada forma de pensamiento, necesitamos, en adición a los esquemas conceptuales, lógicos, la capacidad para una aceptación comprensiva, directa, global que es expresada en una aproximación intuitiva… El sentimiento de la necesidad universal de una cierta propiedad no es reducible a un formato conceptual puro. Es un sentimiento de acuerdo, una base de creencia, una intuición -pero que es congruente con la correspondiente aceptación formal".

1.2.4. Relaciones de la demostración matemática con otros instrumentos validativos

En las investigaciones orientadas al esclarecimiento epistemológico y didáctico de la demostración matemática, una segunda línea de trabajo ha sido la de relacionar la demostración con otros instrumentos validativos.

En esa línea, Balacheff (1987, pp. 147-148) distingue entre '*demostración'* y '*prueba'*, utilizando el término '*explicación'* como idea primitiva de la cual derivar ambos términos. Para este autor la *explicación* se puede considerar como un:

"*discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado*".

Propone reservar el término «*prueba*» para una:

"*…explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado*".

Presenta la *demostración* como un tipo particular de prueba:

"*En el seno de la comunidad matemática no pueden ser aceptadas como pruebas más que explicaciones adoptando una forma particular. Son una sucesión de enunciados organizados siguiendo reglas determinadas; un enunciado es conocido como verdadero o bien es deducido de los que le preceden con ayuda de una regla de deducción tomada de un conjunto de reglas bien definidas. Llamamos demostración a estas pruebas*".

Balacheff (1987, pp. 155-157) diferencia entre pruebas para *decidir*, pruebas para *convencer* y pruebas para *saber*. Distingue, también, entre pruebas *pragmáticas* y pruebas *intelectuales*:

"*Las pruebas pragmáticas, asociadas a…la puesta en ejecución de una decisión, o a la realización del contenido de una afirmación…está hipotecada por la singularidad del acontecimiento que la constituye…es en suma tributaria de un material contingente: herramientas imprecisas, defectos de funcionamiento… La prueba intelectual, que moviliza una significación contra otra, una pertinencia contra otra, una racionalidad contra otra…requiere la expresión lingüística de los objetos sobre los que actúan y sus relaciones*".

Duval (1992/93, pp. 37-38) distingue entre '*demostración*' y '*argumentación*', considerando la argumentación como "*…un modo de razonamiento natural, que no se deja describir ni evaluar según los criterios lógicos canónicos…";* como (p. 42) *"…un razonamiento que no obedece a constricciones de validez (lógica), sino a constricciones de pertinencia;* como (p. 59) "*…un modo de razonamiento que está intrínsecamente ligado a la utilización de la lengua natural*".

Para Duval (1992/93, p. 52),

"…para que un razonamiento pueda ser una demostración, es necesario que sea un razonamiento válido…;…la organización de una demostración…hace abstracción de todo valor epistémico ligado a la comprensión espontánea de las proposiciones para centrarse exclusivamente sobre el valor epistémico derivado del estatus teórico, previamente fijado, de cada proposición"

Harel y Sowder (1996, p. 3-60) han relacionado la demostración con la idea de *justificación*, considerando una demostración como justificación de la verdad de una conjetura, en un proceso que implica dos aspectos: "*convencimiento (convencerse uno mismo) y persuasión (convencer a los demás)".* Han introducido, también, la idea de *esquema de demostración individual,* definida como *"todo lo que significa convencimiento y persuasión para esa persona",* planteando diferentes categorías de esquemas individuales de demostración. Con esta orientación han señalado una dirección de investigación, referente al significado subjetivo de la demostración matemática, importante para comprender las respuestas individuales de los estudiantes en el ámbito de la demostración.

Como se ha podido apreciar, el concepto de demostración aparece en diferentes autores muy relacionado con el de *razonamiento*.

Balacheff (1988, p. 31) propone usar el término '*razonamiento'* de una manera abierta, para *"designar la actividad intelectual, en general no completamente explícita, de manipulación de informaciones, dadas o adquiridas, para producir nuevas informaciones.*

Arsac (1996, pp. 1-2), interpreta que

"*…la palabra (razonamiento) designa tanto el producto final como la actividad misma… Bien entendido, los dos aspectos están ligados, pero no coinciden. Se podrá precisar razonamiento heurístico para la actividad si se quiere evitar la confusión con el producto final…el razonamiento final, la demostración, a menudo escrita…".*

Boero, Garuti y Mariotti (1996, pp. 113) han estudiado los procesos mentales subyacentes a la producción de sentencias y demostraciones en alumnos de VIII grado (sistema italiano), indicando la existencia de fuerte continuidad cognitiva *"entre la producción de conjeturas y la construcción de demostraciones".* Lo que viene a expresar de otra forma la relación entre el razonamiento y la demostración, apareciendo el proceso de creación de conjeturas como paso previo para la producción de demostraciones.

Balacheff (1987, pp. 163-165) distingue cuatro tipos de procesos mentales que conducen a la demostración: *empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico y experiencia mental*.

"*El empirismo ingenuo…consiste en sacar de la observación de un pequeño número de casos la certidumbre de la verdad de una aserción. La experiencia crucial es un proceso de validación de una aserción en la cual el individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve apostando por un caso que reconoce como poco particular. El ejemplo genérico consiste en la explicitación de las razones de la validez de una aserción mediante la realización de operaciones o de transformaciones sobre un objeto presente no por él mismo, sino en tanto que representante característico de una clase de individuos. La experiencia mental invoca la acción en la interiorización y en el distanciamiento de su realización sobre un representante particular".*

Harel y Sowder (1996), y Harel (1998) han catalogado los esquemas personales de demostración de estudiantes de diferentes niveles académicos (que al implicar procesos mentales pueden ser interpretados también como esquemas de razonamiento): *"esquemas por convicción externa, empíricos y teoréticos".* Entre los esquemas por convicción externa pueden citarse (p. 60) los *esquemas de demostración autoritaria*, en los que "*la principal fuente de convicción es una sentencia dada en un libro, manifestada por un profesor u ofrecida por un compañero de clase destacable por sus conocimientos*". Los esquemas empíricos (p. 61) "*están basados solamente* *sobre ejemplos*". Entre los esquemas de demostración teoréticos pueden citarse (p. 62) los *transformacionales*, en los que "*las justificaciones de los estudiantes atienden a los aspectos de generalidad de una conjetura y están orientados y pensados anticipadamente".*

Todas estas aproximaciones al problema de la demostración matemática, desde la óptica de la educación matemática, nos indican la existencia de diferentes objetos validativos, próximos a la demostración (*explicación*, *argumentación*, *prueba*, etc.), con variadas finalidades (*explicar*, *sistematizar*, *comunicar*, *convencer*, etc.), con diferentes significados *institucionales (matemáticos y no matemáticos)*, con distintas manifestaciones a nivel individual, etc.

Nos hablan, pues, de la demostración como un objeto complejo, respecto al cual carecemos de un modelo consolidado de conceptualización, lo que constituye, de entrada, una vertiente importante del problema.

Por ello, un primer modo de abordar el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática puede ser la búsqueda de un modelo conceptual capaz de describir de forma integradora a la demostración matemática como objeto matemático y como objeto didáctico.

1.2.5. Necesidad de una aproximación epistemológica

En la construcción de ese modelo teórico nos parece esencial una aproximación epistemológica, que explique el significado de la demostración no como objeto aislado sino como un objeto más del edificio matemático, al que hay que dar significación de forma global.

La importancia de la reflexión epistemológica puede ser apreciada en toda su dimensión considerando las aportaciones al respecto de autores como Poincaré, Wittgenstein o Lakatos.

Los rasgos distintivos, según de Lorenzo (1974, p.p. 30-35), del pensamiento de Poincaré, quedan recogidos en los siguientes párrafos:

"Es un hecho que la Matemática no hace sino aumentar en el numero de sus proposiciones, enriqueciéndose a lo largo del tiempo. En cada instante hay más teoremas, más propiedades que en cualquier otro instante anterior. La Matemática es una disciplina en constante expansión, en permanente devenir, siempre fecundo.

...Junto a este permanente aumento del contenido también es un hecho que la marcha del hacer matemático en cada una de sus parcelas, en cada una de sus proposiciones, es la generalización: el paso de una proposición a otra más general; el paso de una teoría a otra más amplia que la englobe o reduzca a caso particular, si no a mero ejercicio .

Las proposiciones de la Matemática, a pesar del aumento de las mismas y de las constantes generalizaciones, gozan de un carácter de rigor absoluto <<que nadie piensa poner en duda>>. Obtenida una proposición matemática, su validez –si no contradice proposiciones ya establecidas– será permanente.

...La Matemática, como sistema de proposiciones, es una creación libre, aunque no arbitraria, del hombre. <<El espíritu tiene la facultad de crear símbolos>>. Es el matemático <<quien construye con todas las piezas una combinación nueva relacionando los elementos>>.

...En su construcción, etapa tras etapa, el matemático debe evitar cualquier tipo de contradicción, es lo único que le garantiza la coherencia de la misma.

...Es actitud radical de que el conocimiento es un proceso de construcción, no de descubrimiento de relaciones entre objetos de un mundo, de cosas en sí, trascendente.

...Ciertamente, <<los matemáticos no estudian objetos, sino relaciones entre *objetos; les es indiferente por ello reemplazar esos objetos por otros, siempre que las relaciones no cambien. La materia no les importa, sólo la forma les interesa>> . Con lo cual <<las teorías matemáticas no tienen por objeto revelarnos la verdadera naturaleza de las cosas; esa seria una pretensión irrazonable. Su único objeto es coordinar las leyes físicas que la experiencia nos hace conocer, pero que sin el auxilio de las matemáticas no podríamos siquiera enunciar>>. En otras palabras, la Matemática es una <<forma pura>>, pero condicionada siempre a la experiencia de relaciones fácticas, enlazada por siempre con las restantes ciencias y, a su través, con un contenido intuitivo del que no debe ser separada arbitrariamente.*

...El símbolo '$\sqrt{2}$' no es una construcción arbitraria, salida enteramente de la mente del matemático; es un símbolo construido como culminación de un proceso que comienza con la noción o idea intuitiva, casi empírica, del continuo físico. Proceso que, correctamente conducido, es decir, sin contradicciones en sus etapas, conduce a la creación del continuo matemático, conjunto de símbolos no contradictorio que responde en parte a la elaboración de unas nociones intuitivas, empíricas. Es por lo que puede sostenerse que <<reduciendo el pensamiento matemático a una forma hueca se le mutila>>. Aunque las proposiciones matemáticas no puedan ser consideradas como empíricas, ni obtenidas directamente de la experiencia, el matemático ha de elaborarlas condicionado siempre por tal experiencia, de aquí que <<el matemático puro que olvidara la existencia del mundo exterior, sería semejante a un pintor que supiera combinar armoniosamente los colores y las formas, pero a quien los modelos le faltaran. Su potencia creadora pronto se agotaría>>.

...Puede observarse, finalmente, que si la experiencia fuerza al matemático a crear todo un conjunto de símbolos y proposiciones acerca de tales símbolos, dichas proposiciones son independientes de la experiencia. La Matemática, de esta forma, no puede apoyarse en la experimentación para ser fundamentada ni siquiera explicada. De aquí que sus instrumentos sean las reglas lógicas y, a diferencia de las restantes ciencias, los propios recursos del razonar matemático".

Vemos, pues, que para un autor como Poincaré, la matemática es una creación libre de la mente, aunque condicionada por la experiencia obtenida en el mundo físico. La fundamentación de la matemática está en la lógica y en los recursos del propio razonar matemático.

También para Wittgenstein(1956, p. 4*), "el matemático es un inventor, no un descubridor"*. Pero, para él, las matemáticas aparecen como simples juegos de lenguaje.

Wittgenstein (1958, pp. 115-116), entiende por '*juegos de lenguaje'* formas habituales de uso y de aprendizaje del lenguaje natural, mediante el entrenamiento, dirigidos por una persona más experta:

"*...A estos sistemas de comunicación los llamaremos 'juegos de lenguaje'. Son más o menos similares a lo que en el lenguaje ordinario llamamos juegos. A los niños se les enseña su lengua nativa por medio de tales juegos*".

De acuerdo con Schulz (1967, p. 67), entre otros muchos juegos de lenguaje que considera Wittgenstein, pueden referirse los siguientes:

"...inventar una narración y leerla, actuar en teatro, cantar en forma de canon, acertar adivinanzas, resolver un problema de cálculo aplicado, etc.".

Las matemáticas para Wittgenstein (1958, p. 116) no son sino juegos de lenguaje especializados:

"...Cuando el muchacho o adulto aprenden lo que podrían llamarse lenguajes técnicos especiales, por ejemplo, ...la geometría descriptiva, ...aprenden más juegos de lenguaje".

Para Wittgenstein(1956, p. 65), el significado de las palabras reside *"en su uso"*. Para Wittgenstein (1969, p. 10), *"un significado de una palabra es una forma de utilizarla"*. Según Wittgenstein (1969, p. 10), el significado de las palabras es parte del juego de lenguaje: "*cuando cambian los juegos de lenguaje cambian los conceptos y, con éstos, los significados de las palabras*".

Para Wittgenstein (1956, p. 24), la demostración, la inferencia lógica es un juego de lenguaje más:

"Pero en qué consiste entonces 'inferir'...Precisamente en pronunciar, escribir, etc., una proposición tras otra como aserto en un juego de lenguaje cualquiera".

Wittgenstein (1956, p. 359) dice también:

"La introducción de una nueva regla de inferencia puede considerarse como paso a un nuevo juego de lenguaje".

Wittgenstein (1956, p. 141): considera la demostración como transformación de signos:

"*Toda demostración es, por así decirlo, una adhesión a un deteminado uso de signos".*

Wittgenstein (1956, p. 364) añade que la demostración presupone un determinado paradigma:

"La inferencia lógica es una transición que se justifica si sigue un determinado paradigma, y cuya legitimidad no depende de nada más".

La demostración es para Wittgenstein (1956, p. 40) un hecho convivencial, un acuerdo entre personas:

"En una demostración nos ponemos de acuerdo con alguien".

Más aún, es un hecho social, pues para Wittgenstein (1956, p. 57):

" ...las leyes de inferencia nos obligan en el sentido en que lo hacen otras leyes de la sociedad humana".

Dice también Wittgenstein (1969, p. 38),

"*...que estemos completamente seguros de tal cosa no significa tan sólo que cada uno aisladamente tenga certeza de ello, sino que formamos parte de una comunidad unida por la ciencia y la educación*".

Añade Wittgenstein (1969, p. 41),

"*...cuando decimos que sabemos esto o lo otro, queremos decir que cualquier persona razonable en nuestra situación también lo sabría y que sería insensato dudar de ello*".

En esencia, Wittgenstein considera las matemáticas como juegos de lenguajes y la demostración como representación paradigmática de la correcta realización de ciertas transformaciones de signos. Su función es persuadir de que conviene extender el aparato conceptual en una cierta dirección, de que es útil aceptar la regla gramatical expresada en el enunciado del teorema que se demuestra. Su aceptación es convencional, dada por el uso, en el contexto de un determinado paradigma. No corresponde al descubrimiento de alguna verdad esencial, sino al resultado de un acuerdo, del convencimiento mutuo de un colectivo social.

Lakatos (1976, p. 20) ofrece otra aportación metodológica interesante, ocupándose del papel de las matemáticas informales y cuasiempíricas:

"*Las matemáticas informales y cuasiempíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitatiblemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones …"*.

Davis y Hersh (1988, p. 253) describía *Proofs and Refutations*, la obra maestra de Lakatos, en los siguientes términos:

"Proofs and Refutations se vale de la historia como texto en el que basar su sermón: que las matemáticas, lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables, que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error u omisión. Se parte de un problema o una conjetura, y se buscan simultáneamente demostraciones y contraejemplos. Las nuevas demostraciones explican los contraejemplos viejos, los contraejemplos nuevos minan y socavan las demostraciones anteriores. Para Lakatos, en este contexto de matemática informal, <<demostración>> no significa un procedimiento mecánico que lleve a la verdad desde las hipótesis hasta las conclusiones en irrompible encadenamiento. Significa más bien explicaciones, justificaciones, elaboraciones que hacen la conjetura más plausible, más convincente, al tiempo que va adquiriendo mayor detalle y precisión bajo la presión de los contraejemplos".

Estas ideas de Lakatos están en la línea de Polya (1953). Para Polya (1953, pp. 13-14):

"Estrictamente hablando, todos nuestros conocimientos, aparte de las matemáticas y de la lógica demostrativa, consisten en conjeturas…Aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, pero apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible…

Hay dos grandes diferencias entre las dos clases de razonamiento.

El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional.

Las matemáticas se nos presentan, una vez terminadas, como puramente demostrativas, consistentes en pruebas simplemente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo…El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta es a su vez descubierta mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición…"

La aportación epistemológica de estos distintos autores nos hacen apreciar la importancia de la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas; el carácter de la matemática como creación o descubrimiento; su posible reducción a un mero lenguaje formal; las vinculaciones del lenguaje matemático con la realidad física, con las verdades científicas; el papel de las conjeturas en la creación matemática; la existencia de otros posibles instrumentos validativos, complementarios de la demostración; etc.

Sólo después de una reflexión de tipo epistemológico estaremos en condiciones de analizar con fundamento los diferentes significados posibles de la demostración, el papel de la demostración deductiva, la existencia de otros instrumentos argumentativos complementarios y la importancia en el aula de estos instrumentos de validación.

1.3. OBJETIVOS, HIPÓTESIS Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación se ha centrado en la problemática epistemológica y didáctica de la demostración matemática. Comprende, por tanto, un componente teórico, de carácter epistemológico, y otro didáctico de tipo experimental, que están íntimamente relacionados- aunque aquí se presenten separadamente- y han sido desarrollados simultáneamente en el período 1994-99. Para estos dos componentes, describiremos en esta sección las ideas impulsoras, los objetivos, expectativas, hipótesis y la metodología de investigación implementada.

1.3.1. Parte teórica: Aplicación de la noción de significado sistémico y elaboración de un modelo semiótico de la actividad matemática

La idea impulsora del estudio teórico es que consideramos necesario clarificar la naturaleza de los objetos matemáticos como paso previo para el análisis de los problemas de la enseñanza y aprendizaje de dichos objetos. En el caso particular de la demostración matemática, pensamos que, a pesar de la cada día más abundante literatura sobre el tema, se precisa un estudio sistemático que contemple las relaciones de dicha noción con otras íntimamente conectadas, como las de argumentación, comprobación, prueba, etc., ofreciendo un modelo integrativo de dichas conceptualizaciones.

Esta idea impulsora se concreta en el siguiente objetivo:

O1: *Analizar el campo conceptual de la argumentación matemática, mostrando la complejidad de dicho campo y su dependencia de los contextos institucionales, en el marco de la teoría del significado institucional de los objetos matemáticos desarrollada por Godino y Batanero (1994, 1998).*

Se trata de realizar una aproximación epistemológica a la argumentación matemática, mostrando la variedad de formas argumentativas posibles, según los diversos contextos institucionales en los que aquella se pone en juego. Si bien la perspectiva que nos interesa es la educacional, centrada en indagar la naturaleza y el papel desempeñado por la demostración en la clase de matemáticas, pensamos que sus características en este contexto y los esquemas de demostración mostrados por los estudiantes están relacionados con los significados que dicho instrumento validativo adopta en otros contextos institucionales tales como vida cotidiana, ciencias experimentales, la propia matemática, lógica y fundamentos de las matemáticas. Los resultados alcanzados se describen de forma pormenorizada en el capítulo 2.

El segundo objetivo formulado, de carácter teórico, lo podemos enunciar del siguiente modo:

O2: *Introducir una tipología de entidades matemáticas y de relaciones semióticas entre las mismas que permita el análisis de los procesos interpretativos puestos en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas - en particular de la demostración matemática-, en línea con el modelo de Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) sobre el significado de los objetos matemáticos.*

Como se describe en Godino y Recio (1998), recientemente observamos un interés creciente en la comunidad de investigación en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así encontramos trabajos presentados en PME (Ernest, 1993; Vile y Lerman, 1996), y los realizados desde la perspectiva del interaccionismo simbólico, entre otros, por Bauersfeld y colaboradores (Cobb y Bauersfeld, 1995) que enfatizan la noción de significado y negociación de significados como centrales para la educación matemática. Destacamos también los trabajos publicados sobre la problemática de la influencia del lenguaje matemático en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Ellerton y Clarkson, 1996)

Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) han desarrollado una teoría del significado de los objetos matemáticos, desde presupuestos pragmáticos y antropológicos, que nos ha resultado útil para interpretar los procesos comunicativos puestos en juego en la educación matemática.

Bajo esa perspectiva, hemos dado una interpretación personal al triángulo epistemológico de Steinbring (1997), que establece relaciones semióticas entre los tres tipos básicos de objetos matemáticos: elementos notacionales, fenomenologías y entidades conceptuales. Considerando la argumentación como cadena de relaciones semióticas, hemos podido ofrecer un modelo integrador de las diferentes formas de argumentación matemática.

La metodología a seguir en esta parte de la investigación ha consistido esencialmente en el estudio y confrontación de distintas fuentes documentales pertenecientes al campo de la filosofía de la ciencia, semiótica, epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

1.3.2. Parte experimental: Caracterización de los significados personales de estudiantes universitarios sobre la demostración matemática. Factores condicionantes

En esta parte de la investigación abordamos el estudio propiamente didáctico de la misma al interesarnos por la caracterización de los significados personales de los estudiantes sobre el tema de la demostración matemática y la identificación de algunos factores que los condicionan.

La noción de significado personal de un objeto hace referencia en el modelo de Godino y Batanero (1994, 1998) al sistema de prácticas del sujeto ante un campo de problemas. Desde un punto de vista cognitivo puede situarse el estudio del significado de la demostración matemática en torno a la noción de *esquema de demostración*, que tiene para nosotros el carácter de esquema operatorio, de invariante cognitivo. En este contexto, otro objetivo de la investigación será el siguiente:

O3: *Caracterizar los esquemas personales de demostración matemática de los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba y aportar criterios para su evaluación, por medio de sus prácticas argumentativas matemáticas.*

Aunque se han realizado diversos estudios en distintos países sobre las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria y universitarios en la elaboración de demostraciones matemáticas, no se dispone de investigaciones que evalúen los esquemas personales de demostración matemática en el momento de iniciar los estudios universitarios, mediante tareas matemáticas que no requieran conocimientos especializados. Esta información es potencialmente útil tanto para los profesores de secundaria como para los de la universidad. En el primer caso por aportar una evaluación final de este rasgo cognitivo al finalizar la secundaria, y para los segundos porque conocer los esquemas personales de demostración matemática de los estudiantes que inician sus estudios universitarios debe permitirles adoptar decisiones instruccionales acordes con dicha evaluación.

El logro de este objetivo requiere diseñar una investigación de tipo descriptivo que puede concretarse en la siguiente hipótesis sustantiva:

H3: *Los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba tienen importantes dificultades en el desarrollo de demostraciones matemáticas de carácter deductivo, incluso en demostraciones elementales, existiendo entre ellos una variedad de esquemas personales de demostración matemática.*

Para contrastar esta hipótesis hemos implementado la siguiente metodología:

Instrumento y variables:

Se ha diseñado un cuestionario compuesto por dos problemas de demostración, uno sobre aritmética y otro de geometría, ambos implicando nociones muy elementales cuyas definiciones incluso se recordaban en el propio enunciado de la tarea.

El contenido matemático del enunciado de los problemas, con dos valores (aritmético y geométrico) constituye la variable independiente ligada a la tarea propuesta.

Como variable dependiente de tipo cualitativo hemos identificado el tipo de esquema argumentativo (cinco categorías).

Población y muestra:

El cuestionario se aplicó a una muestra de 429 estudiantes que iniciaban sus estudios universitarios (mes de Octubre), durante el curso 1994-95, de distintas Facultades y Escuelas de la Universidad de Córdoba. Aunque se trata de una muestra intencional, dado su tamaño y composición se puede considerar representativa de la población de estudiantes de primer curso de nuestra universidad.

Análisis de datos:

Se ha realizado un estudio cualitativo de las respuestas de los estudiantes construyendo una categorización de las prácticas argumentativas de los estudiantes, común para ambos tipos de problemas. También se han realizado los siguientes análisis estadísticos:

- tablas de frecuencias y porcentajes de las variables estadísticas consideradas;
- cálculo de estadísticos elementales de las variables;
- gráficos estadísticos (histogramas y gráfico de cajas);
- tabla de contingencias y gráfico de mosaico de la variable bidimensional (puntuación en el problema aritmético, puntuación en el problema geométrico) para el estudio de la posible asociación estadística entre dichas variables.

Un cuarto objetivo de nuestra investigación ha sido el siguiente:

O4: *Estudiar la influencia de diversos factores condicionantes de los esquemas de demostración matemática de los estudiantes.*

Los problemas de la prueba fueron seleccionados de forma que se refiriesen a conceptos matemáticos elementales, intentando evitar que una dificultad potencial de los problemas oscureciera el objetivo central de evaluación de capacidades de razonamiento. Ello nos llevó a formular la siguiente hipótesis:

H4.1: *En los esquemas personales de demostración de los estudiantes no influye el contenido matemático de los problemas de demostración (aritmético, geométrico) planteados en la prueba.*

Para contrastar esta hipótesis, se han cruzado las puntuaciones asignadas a los estudiantes en cada problema en una tabla de contingencia (Sección 4.2.6) a la que se ha calculado el coeficiente de asociación para variables ordinales Gamma de Goodman y Kruskal, complementado con el gráfico de mosaico correspondiente.

Asimismo se han comparado la media, mediana y varianza de estas dos puntuaciones para detectar posibles diferencias.

El bajo nivel de realización de demostraciones deductivas, por parte de los estudiantes, detectado en la investigación realizada para el logro del objetivo O3 nos llevó a formular la hipótesis de que tal desempeño puede ser debido a que desconocen o no recuerdan las características de la demostración matemática. En consecuencia, si fueran informados de tales características previamente al enunciado de las tareas los esquemas de demostración mejorarían significativamente. Formulamos, por tanto, la siguiente hipótesis de tipo estadístico:

H4.2: *Los esquemas personales de demostración matemática evolucionan significativamente si a los estudiantes se les informa previamente de las características exigidas a las demostraciones matemáticas.*

Para contrastar esta hipótesis implementamos la siguiente metodología:

Instrumento y variables:

Se elaboró una versión alternativa del cuestionario descrito en el objetivo O3, que incluye los problemas aritmético y geométrico, siendo los enunciados precedidos de una información aclaratoria de qué significa una demostración matemática.

El instrumento usado incorporaba una nueva variable independiente: tener o no tener información sobre qué es una demostración matemática.

Población y muestra:

La prueba se pasó a 193 estudiantes de primer curso de la universidad de Córdoba, a 99 de los cuales, elegidos aleatoriamente, se les entregó el cuestionario con la información sobre la demostración y a los restantes la prueba sin dicha ayuda.

Análisis de datos:

Además de las tablas de frecuencias, estadísticos elementales y gráficos estadísticos se realizó un análisis de la varianza de las puntuaciones totales y parciales según el factor "ayuda".

Con el fin de aportar una posible interpretación cognitiva de los esquemas personales de demostración de los estudiantes, caracterizados en el capítulo 4, diseñamos y realizamos una investigación experimental, con un enfoque cualitativo, que describimos en el capítulo 5.

El objetivo pretendido con dicha investigación lo formulamos del siguiente modo:

O5: *Indagar las posibilidades de interpretar los esquemas personales de demostración matemática como estructuras de pensamiento estables, coherentes con otras formas consolidadas de razonamiento.*

Este objetivo se investigó, con un sentido exploratorio, en el contexto de una experiencia, realizada en el curso 1996/97 con estudiantes de 5º curso de Psicopedagogía de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba.

Se partió de la aplicación del cuestionario anteriormente considerado, al comienzo y al final del curso, completando el estudio con una entrevista semiestructurada en torno a una secuencia de actividades sobre conceptualización y clasificación de paralelogramos. Se analizaron las relaciones de los esquemas personales de demostración de los estudiantes entrevistados, en problemas geométricos, con sus niveles de pensamiento geométrico, considerados a la luz de la teoría de van Hiele (1986), teniendo en cuenta también los estadios de Piaget (1964). Las conclusiones finales obtenidas en esta investigación se describen en la sección 5.4.

Un último objetivo de nuestra investigación, desarrollado en el capítulo 6, podemos describirlo del siguiente modo:

O6: *Indagar las posibilidades de aplicar un enfoque semiótico-antropológico para explicar las dificultades de los estudiantes con la demostración matemática.*

Con este estudio esperábamos mostrar la variedad de objetos y de relaciones semióticas que se ponen en juego en las demostraciones de problemas matemáticos, incluso elementales, y el papel desempeñado por dominio de los conceptos y técnicas correspondientes en los procesos de validación.

Para responder a este objetivo aplicamos la siguiente metodología: se realizó una experiencia consistente en el desarrollo de tres sesiones de trabajo con un grupo de 4 estudiantes en las cuales se les propuso una secuencia de tres problemas de demostrar en el contexto geométrico. Las sesiones se centraron en la resolución de los problemas, primero de forma individual y luego de forma colectiva, bajo la orientación del investigador que dirigía la discusión. Las sesiones fueron grabadas en vídeo y después transcritas para su posterior análisis. Los resultados se describen en la sección 6.3. Para la interpretación de los resultados se amplió el marco teórico previo, recogiendo aportaciones de teorías psicológicas y antropológicas complementarias.

CAPÍTULO 2

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

2. 1. INTRODUCCIÓN

A pesar de la abundante literatura publicada en los últimos años sobre el campo de la demostración en educación matemática entendemos, sin embargo, que los esfuerzos de clarificación realizados sobre la propia noción de demostración matemática, sus distintas tipologías y relaciones con otras nociones son insuficientes. No parece extraña esta situación si desde el propio ámbito la lógica y la filosofía de la ciencia se llega a afirmar que en la demostración confluyen la lógica, la argumentación, la verdad y el conocimiento, *"¿Qué más se podría pedir a una noción para que constituya un nido de problemas?"* (Vega, 1994, p. 203). Sin embargo, esta complejidad no puede ser motivo para rechazar el desafío del análisis de esta noción cuando nuestro trabajo consiste en lograr que los estudiantes entiendan y sean capaces de producir demostraciones matemáticas.

La idea de demostración suele ser entendida de un modo rígido y absoluto en el seno de la comunidad matemática. Pero cuando nos interesamos por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, consideramos que es necesario realizar un estudio sistemático acerca de los diversos significados de la 'demostración' y nociones relacionadas, tanto desde un punto de vista subjetivo, como también desde un punto de vista institucional. Este estudio podría facilitar la comparación de las aportaciones de distintas investigaciones, poner de relieve nuevas cuestiones de investigación, aportar interpretaciones alternativas sobre las dificultades de los estudiantes en el campo de la demostración y elaborar propuestas de intervención didáctica fundamentadas.

En este capítulo vamos a tratar de analizar las diferencias de significado de la idea de demostración en distintos contextos institucionales, ampliando el trabajo publicado por Godino y Recio (1997) como *Research Report* en las Actas del Congreso del Grupo Internacional Psychology of Mathematics Education celebrado en Lahti (Finlandia).

Usaremos el marco teórico sobre los objetos matemáticos y sus significados desarrollado en Godino y Batanero (1994, 1998) cuyos principales elementos describimos en la siguiente sección.

2.2. OBJETOS Y SIGNIFICADOS DESDE UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICO- ANTROPOLÓGICA

En trabajos publicados hasta la fecha por Godino y Batanero (1994, 1998) se han interesado por elaborar un constructo que denominan "*sistema de prácticas realizadas por una persona o en el seno de una institución ante un campo de problemas*". Godino y Batanero nos proponen que cuando nos interroguemos por la naturaleza de los objetos matemáticos -o por el significado de las expresiones que los designan- pensemos en el "*sistema de prácticas"* de donde tales objetos sobrevienen. El objeto matemático se concibe como un emergente de tales sistemas de prácticas, y se le atribuye una naturaleza dual: personal (cognitiva, mental) e institucional (social, compartida). Dentro de la categoría de objetos personales se incluyen todo constructo psicológico (invariantes operatorios, esquemas, concepciones, conocimiento subjetivo, etc.), mientras que en la categoría de objetos institucionales se incluyen toda entidad sociocultural (definiciones, proposiciones, procedimientos, teorías, etc.).

Esta modelización postula, por tanto, una relatividad tanto de los objetos como de los significados, intrínseca a los diferentes grupos de personas e instituciones implicadas en el campo de problemas correspondiente, y dependiente de los distintos contextos y formas expresivas disponibles. La incorporación en el modelo de las nociones de "objeto personal", "objeto institucional", "sistema de prácticas" es un intento de articular los enfoques cognitivos y antropológicos en la investigación en didáctica de las matemáticas, desde una aproximación semiótica.

Dado que una práctica es *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas*" (Godino y Batanero, 1994, p. 334), un análisis de los objetos y significados supone identificar los campos de problemas (elementos extensionales), los medios de expresión (elementos notacionales u ostensivos), las generalizaciones y justificaciones elaboradas (elementos intensionales).

Vamos a tratar de aplicar este modelo semiótico-antropológico al estudio del campo conceptual de la argumentación. En este trabajo utilizaremos el término de 'demostración' para referirnos de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación, esto es, situaciones que requieren justificar el carácter de verdadero de un enunciado.

Comenzaremos, pues, con un estudio del campo conceptual de la argumentación.

2.3. EL CAMPO CONCEPTUAL DE LA ARGUMENTACIÓN

La *argumentación* es, de acuerdo con autores como Vega (1994) o Miranda (1995), una práctica lingüística con la que pretendemos justificar nuestras creencias o acciones.

Para Vega (1994, p. 204), la argumentación es:

"… una interacción compleja que puede cumplir, entre otras funciones, la de dar cuenta y razón de algo ante alguien en un marco de discurso…En otras palabras, toda argumentación se dirige de modo implícito o explícito a persuadir o a convencer a alguien de algo."

Para Miranda (1995, p. 16), la argumentación es:

"…Una práctica lingüística sometida a reglas, que se produce en un contexto comunicativo y mediante la cual pretendemos dar razón ante los demás o ante nosotros de algunas de nuestras creencias, opiniones o acciones. Cuando argumentamos, proferimos un conjunto de expresiones lingüísticas conectadas de tal modo que de ellas se sigue otra expresión. Un argumento es, pues, un conjunto de oraciones utilizadas en un proceso de comunicación, llamadas premisas, que justifican o apoyan a otra, llamada conclusión, que se deduce, de algún modo, de aquéllas. El nexo que hay entre éstas y aquélla se llama inferencia."

Hay autores, como Duval (1991, p. 234), que consideran la *argumentación* como un tipo de razonamiento:

"…un tipo de razonamiento que aparece espontáneamente cuando se trata de examinar una tesis o convencer en una discusión".

Para Vega (1994, p. 205), las argumentaciones admiten *"alguna transcripción normalizada o <<congelada>> bajo la forma de un argumento. Esta transcripción no pasará de ser por lo regular una expresión parcial y selectiva del curso correspondiente de razonamiento…".*

Nos parece acertada la distinción que hace Duval (1992/93, p. 51) entre *"...argumentación retórica, desarrollada para convencer a un interlocutor o a sí mismo",* y *"...argumentación heurística, desarrollada para progresar en un problema".*

En lo que sigue, nos ocuparemos sólo de las argumentaciones retóricas, dirigidas a justificar la verdad de un enunciado, dejando a un lado las argumentaciones heurísticas, dirigidas a justificar la eficacia de una acción.

Para Vega (1994, p. 205), un objetivo central de la argumentación es la formación de conocimientos: *"...habremos de argumentar si queremos que una creencia (o un conjunto de creencias) adquiera el estatuto cabal y expreso de un conocimiento probado (o de un cuerpo de conocimiento)".* Cuando un argumento da origen a un nuevo conocimiento, pasa a ser una *prueba*. Para que una prueba lo sea, ha de ser reconocida como tal por algún agente discursivo. Una *demostración* es, para Vega (1994, p. 208), un tipo especial de prueba que establece una proposición de manera tan cierta y evidente que nos fuerza a asumirla.

Por ser un fenómeno comunicacional, para que haya argumentación capaz de convencer, es necesario que, en un momento dado, se produzca una comunidad efectiva de personas. Suscita interés la búsqueda de una técnica argumentativa capaz de imponerse indiferentemente a todos los auditorios o, al menos, a todos los auditorios compuestos por personas competentes o razonables. Perelman y Olbrechts-Tyteca (1989, p. 67) llaman argumentación *persuasiva* a la argumentación que *"sólo pretende servir para un auditorio particular"* y argumentación *convincente* a la que *"se supone obtiene la adhesión de todo ente de razón".*

Una argumentación dirigida a un auditorio universal debe convencer del carácter apremiante de las razones aducidas de su evidencia. Debe inducir *certeza*, es decir, conciencia de estar ante una *verdad*.

Para Russell (1948, p. 160), la verdad aparece como correspondencia entre creencia y hecho:

"La verdad es una propiedad de las creencias… La verdad consiste en una cierta relación entre una creencia y uno o más hechos distintos de la creencia".

Es una concepción que está en línea con la concepción clásica de la verdad, que se remonta a la antigüedad griega, como adecuación entre el pensamiento y la realidad exterior al mismo. El conocimiento resulta *verificado*, constatado empíricamente, por su concordancia con los hechos.

Para Miranda (1995, p. 20), hay que distinguir entre *verdad* y *validez*:

"La verdad o falsedad se predica de un enunciado. La validez o invalidez y la corrección o incorrección se dicen de los argumentos".

Que una argumentación dé lugar a una conclusión verdadera obliga tanto a la verdad de las premisas como a la validez o corrección del argumento.

De acuerdo con Miranda (1995), se puede diferenciar la *validez* de la *corrección* de un argumento. Para Miranda (1995, p. 22), la *corrección* de un argumento se suele predicar de los argumentos usados en el diálogo con los demás:

"La corrección y la fuerza probatoria que tenga una determinada argumentación no depende sólo de su estructura formal, sino también del marco discursivo y del contexto de comunicación en que se produce".

Para Duval (1992-93), la *corrección* de una argumentación depende de la adecuación, siquiera sea parcial, entre los contenidos semánticos de la conclusión y el argumento que la justifica. La argumentación debe tener un valor epistémico positivo, siendo capaz de resistir los contraargumentos potenciales.

Para Miranda (1995, p. 20), la validez deriva de la forma lógica del argumento:

"…Un argumento se dice que es válido cuando la conclusión es una consecuencia de las premisas y esta relación se da en virtud de la forma lógica del argumento".

La necesidad lógica de la inferencia entre conclusión y premisas, en un argumento válido, se traduce en el hecho de que no es posible, simultáneamente, que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Es el caso, por ejemplo, del argumento del tipo:

Todos los A son B

Todos los B son C

Todos los A son C

La argumentación admite, pues, diferentes matices interpretativos. En primer lugar, la argumentación puede estar dirigida a convencer o a justificar una acción. Remitiéndonos sólo al primer tipo, a las argumentaciones *retóricas*, orientadas a *convencer* a alguien de algo, hay que distinguir entre procesos de *verificación* y procesos de *validación*. En los procesos de verificación se busca fundamentar el carácter de verdad de las proposiciones en cuestión. Es un proceso sobre todo de *comprobación*, de constatación *empírica* de la coincidencia con los hechos reales. Cuando la argumentación da lugar a la formación de conocimientos, reconocidos como tales por una comunidad de interlocutores, la argumentación pasa a ser una *prueba*. Los procesos de prueba pueden suponer no sólo procesos de verificación, de constatación empírica de las afirmaciones implicadas, sino además procesos de validación, de reconocimiento de la validez procesual de la argumentación en sí misma. Si la validez es lógicamente concluyente, en lugar de prueba se habla entonces de *demostración*.

2.4. LA ARGUMENTACIÓN EN DISTINTOS CONTEXTOS INSTITUCIONALES

La trama de objetos por los que nos interesamos, al estudiar el campo conceptual de la argumentación, son, como se ha visto en la sección anterior, los denotados por expresiones tales como: *verificación, comprobación, validación, prueba, demostración.* Aunque en todos ellos se pueda reconocer una idea común, -la de justificar una afirmación (tesis) aportando razones o argumentos- sin embargo, sus rasgos característicos y los recursos expresivos puestos en juego situaciones y contextos distintos pueden ser de hecho diferentes.

Como emergente del sistema de prácticas argumentativas, la demostración es también dependiente del contexto, utilizándose la palabra 'demostración' con diversos sentidos en distintos contextos. Desde un punto de vista cultural Wilder (1981) nos recuerda que, *"no debemos olvidar que lo que constituye 'demostración' varia de una cultura a otra así como de una época a otra"* (p. 346). Nosotros vamos a tratar de mostrar que esta relatividad debe ampliarse a distintos contextos institucionales, cuando nos interesamos por los problemas psicológicos y didácticos implicados en la enseñanza de la demostración.

Consideraremos que un contexto o marco institucional es un punto de vista local o perspectiva sobre una problemática determinada, caracterizada por el uso de recursos expresivos e instrumentales propios, por hábitos y normas específicas de comportamiento. En lo que sigue trataremos de mostrar la diversidad de formas argumentativas según los contextos institucionales siguientes: vida cotidiana, ciencias experimentales, matemática profesional, lógica y fundamentos de las matemáticas y enseñanza de las matemáticas elementales (incluyendo aquí los niveles primarios, secundarios y universitarios). En cada uno de estos contextos es posible identificar, a su vez, puntos de vista más locales en los cuales el problema de la verdad y la demostración adquiere connotaciones específicas. Sin embargo, consideramos que el nivel de análisis que hemos adoptado en este trabajo es suficiente para mostrar la diversidad de '*objetos demostración*' identificables, y en particular que no hay una teoría y una práctica uniforme firmemente establecida sobre la demostración matemática.

2.4. 1. La argumentación en la vida cotidiana

Diversos autores, como Galotti (1989), Voss, Perkins y Segal (1991) o Miller-Jones (1991), han estudiado el razonamiento *informal*, que, de acuerdo con Galotti (1989, p. 334), es el razonamiento que se utiliza en la vida cotidiana:

"El razonamiento informal o razonamiento de la vida cotidiana, cubre las actividades intelectuales que componen el pensamiento aplicado en nuestras vidas cotidianas: planificar, adquirir compromisos, evaluar argumentos, descubrir y elegir opciones. En este tipo de razonamiento, las premisas no vienen dadas completamente en el problema. La persona que razona se ve obligada a buscar la información relevante, lo que a menudo aparece como un subproblema: la tarea de determinar exactamente cuál es la información relevante".

Miller-Jones (1991) destaca una característica muy importante, a su juicio, del razonamiento informal: su dependencia del contexto e incluso de la situación concreta desde la que el individuo se enfrenta al problema. En una tarea de razonamiento informal, la conclusión a la que llega un mismo sujeto enfrentado a un mismo problema puede ser diferente dependiendo del contexto situacional en el que se encuentre, de sus estados de ánimo o de su base de conocimientos sobre el contenido del problema.

Según Fernández y Carretero (1995, pp. 41-43), las principales características del razonamiento informal son las siguientes:

a) Se aplica a cuestiones de la vida cotidiana…

b) Se aplica a cuestiones relevantes para la persona que realiza el razonamiento…

c) Está relacionado con la capacidad de elaborar argumentos, defenderlos frente a otros posibles y evaluarlos en relación con la información disponible para llegar a una conclusión…

d) Es un tipo de razonamiento muy dinámico y muy dependiente del contexto situacional…

e) Se aplica a tareas abiertas o mal definidas…

f) Se aplica a tareas no deductivas…

g) No utiliza un lenguaje formal o simbólico, sino el lenguaje aplicado en la vida cotidiana…

h) Se utiliza en todos los dominios de conocimiento, incluso en problemas matemáticos o científico-naturales…

Como se ha señalado, una característica importante del razonamiento informal es que se aplica a tareas abiertas o mal definidas, que exigen que la persona que razona tenga que activar una amplia base de conocimientos -sus conocimientos sobre el mundo- y seleccionar la información que considera más relevante. Este carácter de las tareas propias del razonamiento informal impide que existan unos procedimientos definidos previamente que conduzcan al individuo a una solución correcta del problema.

Se ha indicado, también, que las tareas a las que se aplica el razonamiento informal suelen ser no deductivas. Ello quiere decir que, a diferencia de lo que ocurre en las tareas deductivas, no toda la información necesaria para la resolución de la tarea aparece en las premisas, puesto que, en ocasiones, estas ni siquiera aparecen y es el propio sujeto el que ha de generarlas y evaluarlas. Tampoco en estas tareas, a diferencia de lo que ocurre con los argumentos deductivos, la verdad de las premisas garantiza la verdad de la conclusión. Las conclusiones van más allá de la información contenida en las premisas y, en muchos casos, son varias las soluciones plausibles. Determinar cual es la más correcta es, en muchos casos, una cuestión de opinión.

La argumentación informal no da lugar necesariamente a verdades, porque se apoya en consideraciones que tienen un valor local, situacional, careciendo del valor objetivo de la prueba científica.

Polya (1953, prólogo) ha estudiado el razonamiento informal en matemáticas, con el nombre de razonamiento *plausible,* considerándolo como el razonamiento que utilizamos para la formulación de nuestras conjeturas matemáticas:

"Aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, pero apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible… El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, y está más allá de toda controversia. El razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional. Aquél penetra las ciencias naturales tanto como la matemática, pero es, en sí misma, igual que esta última, incapaz de producir un conocimiento esencialmente nuevo sobre el mundo en torno. Para aprender algo nuevo sobre el mundo necesitamos el razonamiento plausible, que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana…"

Según Polya, las bases del razonamiento plausible son la inducción, la generalización, la especialización y la analogía.

Para Polya (1953, p. 27), la *inducción* resulta de la observación, indicada por ejemplos particulares:

"...Hemos llegado así con ello a formular una conjetura, que ha sido encontrada por inducción. Esto es, sugerida por observación, indicada con ejemplos particulares".

Según Polya (1953, p. 37), la *generalización*

"Es el paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contiene a la primera. Por ejemplo, ... generalizamos ... cuando pasamos del estudio de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo a las funciones trigonométricas de un ángulo indeterminado".

La *especialización* es, para Polya (1953, p. 38)

"...pasar de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie más pequeña de objetos contenida en la primera. Por ejemplo, especializamos cuando pasamos de polígonos regulares con n lados al triángulo equilátero".

La definición de *analogía* que hace Polya (1953, p. 38) es menos precisa:

"No hay nada vago o cuestionable en los conceptos de generalización y especialización. Sin embargo, cuando empezamos a discutir la analogía nos movemos sobre algo menos sólido.

Analogía es una especie de semejanza. Es, diríamos, semejanza definida sobre un nivel definido y conceptual. Aún podemos expresarnos con más exactitud. La diferencia esencial entre la analogía y otras clases de semejanza yace, en mi opinión, en las intenciones del pensador. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan para definir conceptos, usted mira estos objetos semejantes como análogos. Si tenemos éxito en aclarar los conceptos, hemos clarificado la analogía".

La argumentación informal incluye una amplia variedad de modos argumentales. Algunos son más elementales, como la analogía, pero otros, como la inducción o la deducción informal, que consideramos con cierto detenimiento en la siguiente sección, son más complejos.

Pese a la elementalidad que presenta en los casos más simples, los modos argumentales informales representan instrumentos validativos importantes, porque sirven para la justificación intuitiva de conjeturas. Si como afirman Garuti, Boero y Lemut (1998, p. 345), hay continuidad cognitiva entre la fase de producción de conjeturas y la construcción de demostraciones, puede considerarse que estas formas argumentativas constituyen los primeros estadios de la demostración matemática.

2.4.2. La argumentación científica. la prueba

En contraste con la argumentación natural de la vida cotidiana, que tiene un sentido justificativo más inmediatista, situacional, la argumentación científica tiene un sentido validativo de más largo alcance, que la capacita para originar conocimientos científicos, explicables de forma racional y objetiva, con un continuo sometimiento al tamiz de la prueba experimental.

Una descripción clásica del método científico, de acuerdo con Fourez (1994, p. 26), es la siguiente:

"Las ciencias parten de la observación fiel de la realidad; seguidamente, se extraen leyes de esa observación; esas leyes se someten a comprobaciones experimentales y se prueban; esas leyes probadas, finalmente, se unen en teorías que describen la realidad".

Ese proceso de sometimiento a la prueba, a la comprobación experimental sistemática, es lo que caracteriza a la argumentación científica y la diferencia de la argumentación natural.

Una visión ingenua del método científico puede interpretar las teorías científicas como resultado de un proceso de argumentación inductiva. Pero, en realidad, el desarrollo de las teorías científicas implica un método de argumentación a la vez inductivo y deductivo. Es decir, mediante métodos inductivos se hacen generalizaciones, que se encadenan entre sí mediante procedimientos deductivos y mediante los cuales se predicen nuevos efectos, que se comprueban experimentalmente.

El método científico parte de la observación de los hechos experimentales. Pero esta observación no se reduce a un hacer meramente empírico. Hace falta partir, sí, de los hechos, pero dentro de un marco teórico y conceptual. La vía que conduce desde la observación a la teoría pasa por una conceptualización de los hechos experimentales. La observación implica un modelo teórico previo, un modelo de interpretación de la realidad.

Lo que se suele llamar un *hecho* es la expresión de un fenómeno real, pero utilizando conceptos que remiten a un determinado modelo teórico, a un modelo interpretativo de la realidad. Los conceptos que se utilizan para expresar los hechos son construcciones abstractas de nuestra mente. Son principios de clasificación creados por abstracción y convención, no dados por la naturaleza. Son, en definitiva, instrumentos que sirven para conectar teoría y realidad empírica.

Las teorías científicas constituyen modelos de representación de la realidad. Las ciencias sustituyen las representaciones espontáneas del mundo. Los modelos científicos aparecen cuando tomamos cierta distancia respecto a la vida cotidiana, iniciándose un espacio conceptual que puede originar otro modelo del mundo, distinto del cotidiano, apareciendo un nuevo lenguaje, una nueva forma de expresar la realidad. La argumentación informal es sustituida por la argumentación científica

Las teorías científicas se expresan mediante lenguajes que presentan, con frecuencia, un fuerte contenido matemático. La matemática aparece, así, como herramienta de expresión de hechos científicos.

La argumentación matemática presenta, en los dominios científicos, connotaciones de *«prueba»*. Las teorías matemáticas son consideradas verdaderas porque, independientemente de sus interrelaciones formales, deductivas, pueden ser *comprobados* de forma experimental, en situaciones fenomenológicas variadas. Para autores como Kline (1980, p. 400),

"La corrección de las matemáticas debe ser juzgada por su aplicabilidad al mundo físico... Son correctas en la medida que funcionan, y cuando no funcionan deben ser modificadas".

Es su utilidad para fundamentar teorías científicas consolidadas la que *prueba*, en último extremo, según estas concepciones, la validez de las teorías matemáticas.

Esta impregnación que experimenta la argumentación matemática de modos argumentativos propios de los ámbitos científicos motiva la aparición de otras dos formas de argumentación matemática. Una primera, a la que llamaremos *prueba empírico-inductiva*, que acude a una comprobación en casos particulares como medio de validación de teoremas (por ejemplo, la comprobación del teorema de Pitágoras en diferentes ternas pitagóricas). Y una segunda, a la que llamaremos *prueba deductiva informal*, que es una argumentación de carácter deductivo, pero sustentada en la intuición, en el uso de variados procedimientos informales: gráficos, relaciones analógicas, generalizaciones inductivas, etc. (por ejemplo, la demostración de teoremas sobre funciones de variable real, apoyada en consideraciones intuitivas sugeridas por la representación gráfica de dichas funciones como "curvas").

2.4.3. La argumentación matemática. La demostración

El proceso de argumentación que desarrollan los matemáticos para justificar la verdad de las proposiciones matemáticas recibe el nombre de «*demostración matemática*». El modelo prototípico de demostración matemática es la demostración *deductiva*.

Según Pacheco (1997, p. 207).

"Demostrar un Teorema es construir un razonamiento para convencernos de que lo que se dice es verdadero. Y ello con el máximo de generalización…. El matemático no quedará satisfecho hasta que haya incluido en su Teorema todos los casos particulares…".

La verdad no es, como en las ciencias experimentales, el resultado de una comprobación experimental, sino el resultado de un razonamiento.

Vega (1994, pp. 204-206) considera la demostración como una prueba lógicamente concluyente (interpretando que la prueba es una argumentación reconocida como tal por un agente discursivo):

"…una demostración es una prueba lógicamente concluyente que nos hace saber que algo es (o no es) el caso".

En esa misma línea, Dunham (1995, p. 170) considera que

" …una demostración es cualquier argumentación cuidadosamente elaborada dentro de las reglas de la lógica, que es irrebatiblemente convincente...".

Para Dieudonné (1987, p. 206), el rigor validativo va unido a la axiomatización:

" …no puede haber demostración 'rigurosa' excepto en el contexto de una teoría axiomática".

La concepción axiomática de la demostración pone el acento en los aspectos lingüísticos y formales. Intentando liberar de significado intuitivo -fuente de error potencial- a los objetos matemáticos, reduce las expresiones matemáticas a expresiones sintácticas, formalizadas.

La lógica que soporta esa formalización es una lógica formal, en la cual las deducciones lógicas no tienen en cuenta el significado de las proposiciones que relacionan, siendo válidas exclusivamente en función de su forma lógica. Es el caso, por ejemplo, de la forma deductiva "*ponendo-ponens*", tal que

Si A, entonces B

A

Luego B

La matemática desde esta concepción se transforma en una gramática formal. La demostración se convierte en un procedimiento algorítmico que puede ser materializado mediante el uso de ordenadores. Según Dijkstra (1991, pp. 902), "*cada lenguaje de programación representa un sistema formal*". Para Schwichtenberg (1992, p. 81), *"...una demostración formal puede ser vista como un programa".*

Las demostraciones bajo estos esquemas formalistas se tornan extraordinariamente complejas. Livingston (1987), por ejemplo, muestra la complejidad de la prueba de la unicidad del elemento neutro en un grupo algebraico, comparada con su trivialidad mediante una argumentación informal.

Esto hace, como afirma Resnick (1992), que la matemática contemporánea esté, alternativamente, repleta de "*working proofs*", de demostraciones informales, no axiomatizadas. El matemático profesional se centra en la resolución de nuevos problemas, en incrementar el cuerpo de conocimientos, y en menor medida en la organización y fundamentación del sistema completo de las matemáticas. No se requiere el grado de máxima seguridad características del trabajo realizado por las personas interesadas por los fundamentos de las matemáticas.

En el ámbito profesional real, pues, las demostraciones matemáticas no están completamente formalizadas, Se expresan mediante el lenguaje ordinario completado con el uso de expresiones simbólicas. La fundamentación de una inferencia $A ==> B$ no estriba en la existencia de una regla de transformación estrictamente lógica que permite pasar de A a B, sino que se apoya en la significación particular de las expresiones A y B, interpretada por el matemático que realiza la inferencia.

Desde la propia matemática están surgiendo, además, nuevas estrategias de validación de las proposiciones matemáticas que desafían la concepción clásica de la demostración deductiva 'línea a línea', tales como *la «zero-knowledge proof», «holographic proof», «visual proof»,* y en general las pruebas basadas en comprobaciones experimentales (Hanna, 1995, p. 43). Son pruebas basadas principalmente en el uso de ordenadores, incorporando procedimientos aleatorios de validación.

Como señala Hanna (1989, p. 20), la concepción tradicional bourbakista, basada en una visión formal, abstracta y rigurosa de las matemáticas, está cambiando:

"Durante las dos últimas décadas varios matemáticos y educadores matemáticos han desafiado el principio de que el aspecto más significativo de las matemáticas sea el razonamiento por deducción, que culmina en pruebas formales. Desde sus puntos de vista hay mucho más en matemáticas que sistemas formales. Este punto de vista reconoce la realidad de la práctica matemática. Los matemáticos admiten que su demostración puede tener diferentes grados de validez formal -y todavía adquirir el mismo grado de aceptación. Los matemáticos están de acuerdo, además, que cuando una demostración es válida en virtud de su forma sólo, sin atender a su contenido, es probable que añada muy poco a la comprensión de su materia e irónicamente puede no ser muy convincente".

2.4.4. La demostración en lógica y fundamentos de las matemáticas

En lógica y fundamentos de las matemáticas, la noción de demostración aparece ligada a las nociones de *deducción* y de *sistema formal*.

El argumento lógico por excelencia es, según Garrido (1978), el argumento deductivo. Los argumentos deductivos "puros" tienen lugar en el seno de un sistema axiomático, formal.

Un sistema axiomático es, para Garnier y Taylor (1996, p. 98):

a) una colección de términos indefinidos y símbolos;

b) reglas sintácticas para construir 'sentencias' y fórmulas a partir de los símbolos y términos indefinidos;

c) una colección de sentencias correctamente construidas llamadas axiomas;

d) reglas de inferencia.

Las reglas de inferencia determinan cómo pueden ser deducidos de los axiomas las sentencias que van a representar teoremas.

Según Knowless (1998, p. 1):

"Una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien un axioma ... o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Un teorema es una proposición así derivada por una demostración".

La formalización sustituye la concepción semántica de la verdad, como adecuación entre el pensamiento y la realidad exterior al mismo, por una concepción sintáctica de la verdad, interpretada como coherencia dentro de un determinado sistema formal.

La coherencia formal de un sistema se define técnicamente como consistencia. De acuerdo con Garrido (1978, p. 309):

"Un sistema formal es consistente cuando todas las fórmulas que de él se derivan o pueden derivarse están exentas de contradicción".

La consistencia implica, pues, que no se puedan demostrar simultáneamente dos proposiciones, una de las cuales sea negación de la otra. (En los sistemas formales que no contengan el operador negación, la consistencia se plantea exigiendo que no toda proposición del sistema sea derivable de los axiomas).

La consistencia es una propiedad metalingüística. El metalenguaje de un sistema es el lenguaje con que se describe el sistema, se habla de él y se investigan sus propiedades. Otras propiedades metalingüísticas son: la completitud o la decibilidad.

De acuerdo con Ladrière (1969, p. 70):

"...un sistema es saturado (completo) en sentido fuerte cuando toda proposición perteneciente al sistema es derivable o refutable (puede demostrarse su no derivabilidad)... Esta definición sólo es aplicable a los sistemas que comportan una operación de negación... Se dice que un sistema está saturado en sentido débil (cuando no existe una operación de negación) si, añadiendo a los axiomas sistemas una proposición no derivable del sistema, se hace a éste no-coherente (no consistente)".

Un sistema es resoluble (decidible), de acuerdo con Ladrière (1969, p. 71) si:

"...se puede dar un procedimiento efectivo (un algoritmo) que permita decidir, para toda proposición del sistema, si ésta es derivable o no".

Un resultado metamatemático fundamental es el teorema de incompletitud de Gödel, que de acuerdo con Kline (1980, p. 315), se puede formular diciendo que

"...si una teoría formal T que abarca la teoría de números enteros es consistente, entonces es incompleta". Esto significa que existe un enunciado significativo de la teoría de números, que podemos llamar S, tal que ni S ni no S son demostrables en la teoría".

Una teoría inconsistente es una teoría que contiene contradicciones siendo rechazable para expresar la verdad matemática. Pero el teorema de Gödel demuestra que una teoría capaz de contener a la aritmética elemental, si es consistente, no es completa, no puede contener toda la verdad matemática. Lo que, en definitiva, viene a decir que la matemática no puede reducirse a un mero sistema formal.

El teorema de Gödel viene a señalar las limitaciones del pensamiento deductivo, cuando se formaliza de una manera extrema, cuando se reduce a un proceso estrictamente algorítmico, a un desarrollo puramente sintáctico, carente de significación semántica.

Se abre así una justificación fundada a la introducción en el ámbito de la reflexión matemática de métodos de demostración no estrictamente formales; el recurso a la intuición; la consideración de los aspectos semánticos, es decir, el significado de los conceptos y proposiciones matemáticas.

La consecuencia es que la verdad matemática deja de tener carácter de necesidad absoluta, presentando un valor pragmático. La decisión de si una argumentación informal es o no correcta no puede resolverse de forma automática, acudiendo a un proceso de derivación formal, sino que es una cuestión ligada al acuerdo entre partes, a la consideración subjetiva de las personas intervinientes en el proceso de demostración.

2.4.5. La demostración en clase de matemáticas

La demostración en clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos varios de los diferentes tipos de argumentaciones analizados en los apartados anteriores.

En Primaria predomina una matemática informal. Los conceptos matemáticos aparecen imbricados con objetos y situaciones de la vida cotidiana, de la realidad física y social. La argumentación prototípica es una argumentación informal de carácter muy intuitivo.

Los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el National Council of Teachers of Mathematics de los EEUU de América (NCTM, 1989), ya considerados en el capítulo primero, plantean para el ciclo P-4 (que puede hacerse corresponder, aproximadamente, con Educación Infantil y los dos primeros ciclos de Educación Primaria, en nuestro sistema educativo), que (p. 28):

"Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…

Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas…".

Para el ciclo 5-8 (que corresponde, aproximadamente, con el tercer ciclo de Educación Primaria y primer ciclo de ESO, en nuestro sistema educativo), los Estándares plantean como objetivo un tipo de razonamiento fundamentado en lo concreto, en métodos inductivos y en formas deductivas elementales. Así, afirman (p. 79):

"Mientras la mayor parte de los estudiantes de quinto grado continúan ejerciendo un pensamiento concreto que depende de un contexto físico o específico para poder percibir regularidades y relaciones, muchos alumnos de octavo grado son ya capaces de razonamiento más formal y de abstracción. No obstante, incluso los

estudiantes más avanzados de los niveles 5-8 pueden hacer uso de materiales concretos para apoyar su razonamiento…"

Y también (p. 148):

"En los niveles 5-8, los estudiantes habrán experimentado el razonamiento inductivo y la evaluación y construcción de argumentos deductivos sencillos en diversos contextos de resolución de problemas".

Los Estándares plantean, para el ciclo 9-12 (que podría hacerse corresponder, aproximadamente, con el segundo ciclo ESO y Bachillerato) que (p. 148):

"En los niveles 9-12, a medida que los contenidos van siendo más profundos y complejos, debe mantenerse este énfasis en la interacción que se da entre la formulación de hipótesis y el razonamiento inductivo, y en la importancia de la verificación deductiva…"

Así, pues, en Secundaria la matemática, que aparece como una disciplina cercana a la realidad física y social, a la que ayuda a explicar, pero independiente de ella y que manifiesta también como ciencia al servicio de otras ciencias, tiene como formas prototípicas de argumentación la *prueba empírico-inductiva* y la *prueba deductiva informal*.

En la Educación Universitaria, es más habitual el contacto con la *demostración deductiva*, con el rigor deductivo. Los estudiantes universitarios han de familiarizarse con el hecho de que la argumentación deductiva es el método por el que se establece, en último término, la validación de los teoremas matemáticos. Una argumentación que en estos niveles ha de tener ya una forma esencialmente axiomática.

La realidad es que la demostración matemática en el ámbito educativo está "contaminada" por las distintas modalidades de argumentación, matemática y no matemática, que los estudiantes encuentran en diferentes contextos institucionales: vida cotidiana, clases de ciencias experimentales, clases de matemática, clases de filosofía (lógica). Por lo que la demostración matemática puede aparecer en un mismo nivel educativo con diferentes significados, que hay que tener presentes. Incluso en los niveles superiores se irán "arrastrando" otros significados más elementales. Así, en la formulación de conjeturas se pondrá de manifiesto un razonamiento informal, sustentado en relaciones intuitivas. Esas conjeturas serán comprobadas por medio de pruebas empírico-inductivas y probadas mediante procedimientos deductivos informales. Los teoremas, así probados, adquirirán verdadero rango de tales a partir de su validación mediante demostraciones deductivas basadas en estrictos razonamientos lógicos.

Herbst (1998) ha examinado, desde una perspectiva naturalista, distintos modos de impartir enseñanzas de matemática, intentando estudiar cómo funciona la demostración en el aula, cómo se valida en la clase el conocimiento matemático, qué formulas de negociación establecen profesor y alumnos al respecto. Ha analizado la forma de operar de elementos validativos tales como *ejemplo genérico*, *ejemplo aislado*, *metáfora o analogía*, *cálculo simbólico* y *demostración*. Y ha mostrado cómo todos esos instrumentos validativos tienen un claro sentido para los estudiantes que los usan, ajustado a las normas, a la negociación, explícita o implícita, establecida entre profesor y alumnos, dentro de un determinado nivel escolar.

Las concepciones y normas imperantes en el aula condicionan las formas de demostración que se desarrollan en ella.

La matemática escolar se manifiesta con frecuencia como una matemática platonista. Basada en el descubrimiento de conocimientos eternos, inmutables, que son expresión de "leyes naturales". Una matemática cuya verdad no se pone en duda, porque se considera que es la matemática aceptada por la generalidad de los matemáticos profesionales. Las demostraciones son usadas por el profesor en gran medida para poner de manifiesto la estructura interna de las teorías matemáticas. Se espera de los estudiantes principalmente capacidad de comprender las demostraciones, no de discutirlas, no de desarrollarlas según criterios propios.

Alternativamente, cuando se acepta y se fomenta que los estudiantes desarrollen sus propios instrumentos de validación, ha de adoptarse una actitud abierta, asumiendo que la demostración matemática puede tener diferentes sentidos, diversos grados de rigor, y que la demostración deductiva no es sino el último paso de un proceso que comienza con sencillas argumentaciones informales, con diferentes modos de razonamiento plausible, los cuales dan lugar a conjeturas, las cuales hasta mucho después no operan como verdaderos teoremas, a medida que van siendo progresivamente justificadas por procedimientos cada vez más depurados, en una lenta transición hacia los modelos deductivo-axiomáticos, los cuales no se consolidan realmente hasta los niveles universitarios.

Es importante aceptar que los modos informales de argumentación matemática no son procedimientos incorrectos, sino elementos necesarios dentro de un proceso de validación global. Pues hay que tener en cuenta que, si bien en el trabajo matemático profesional, para demostrar de modo concluyente la veracidad de las conjeturas, se utilizan argumentaciones deductivas formales, inicialmente, en las fases de creación y descubrimiento de conjeturas se utilizan también otros tipos de argumentaciones más informales, cuyo valor didáctico conviene destacar, favoreciendo su desarrollo natural en el aula.

2.5. CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN Y LA ENSEÑANZA

Sin duda podemos apreciar algunos rasgos comunes en los usos de la palabra '*demostración'* en los distintos contextos institucionales descritos, lo que permite hablar de la idea de demostración en sentido general. Pero este modo de hablar genérico, abstracto, metafísico, no debe ocultar la rica y compleja variedad de sentidos que adquiere el concepto de demostración, o si se prefiere, la diversidad de objetos '*demostración'* existentes para los miembros de dichas instituciones, cada uno con un significado local. Creemos que cuando estamos interesados por los problemas psicológicos y didácticos involucrados en los procesos de validación de proposiciones matemáticas, interesa considerar que no hay un concepto de demostración sino diversos, tanto desde el punto de vista subjetivo como epistemológico.

Existe una forma de argumentación *informal*, que se suele usar en la vida cotidiana, que es situacional, dependiente del contexto e, incluso, dependiente de la propia situación emocional del sujeto, de sus estados de ánimo. Este tipo de argumentación informal no da lugar necesariamente a verdades, porque se apoya en consideraciones que pueden tener exclusivamente un valor local, situacional, careciendo del valor objetivo de la prueba científica. Las argumentaciones matemáticas informales, incluso las más elementales, representan instrumentos validativos importantes, porque sirven de fundamento para la justificación intuitiva de conjeturas, constituyendo los niveles más elementales de demostración matemática.

Existen dos formas de argumentación matemática, que hemos llamado *prueba empírico-inductiva y prueba deductiva informal*, que se corresponden con formas argumentativas propias de los ámbitos científicos, y que consideramos también formas elementales de demostración matemática. En el primer caso, mediante la comprobación en casos particulares, como forma de aproximación a la validación genérica; y en el segundo, mediante razonamientos lógicos, deductivos, pero con una fuerte presencia de elementos intuitivos.

La forma prototípica de argumentación en matemáticas es la *demostración deductiva,* de carácter axiomático, aunque sin la excesiva carga formalista que la demostración tiene en lógica y fundamentos de las matemáticas.

Reconociendo esta diversidad de objetos y significados estaremos en mejores condiciones de estudiar el significado del objeto *'demostración matemática'*, las circunstancias de su desarrollo, los papeles que desempeñan en los distintos contextos, en definitiva, de comprender las *relaciones ecológicas* que se establecen entre los mismos y su carácter sistémico. Esta modelización ontosemántica puede ayudar a tomar conciencia de los conflictos cognitivos que se plantean a todo individuo que se ve forzado a participar como sujeto en distintos contextos institucionales.

Dado que los estudiantes se encuentran simultáneamente sujetos a distinta instituciones, en cuyo seno se ponen en práctica distintos esquemas argumentativos, parece razonable que los estudiantes tengan dificultades en discriminar el uso respectivo de cada tipo de argumentación. En consecuencia, consideramos que tales esquemas institucionales de demostración pueden ser factores explicativos de los esquemas subjetivos manifestados, por lo que deben ser tenidos en cuenta e investigados con más profundidad.

En los distintos niveles de enseñanza se precisa articular de algún modo los distintos significados de la demostración, desarrollando progresivamente en los estudiantes los conocimientos, la capacidad discriminativa y la racionalidad que se debe poner en juego en cada caso. Los esquemas informales de demostración no pueden ser vistos simplemente como incorrecciones, errores o deficiencias, sino como etapas en la apropiación y dominio de las prácticas argumentativas matemáticas.

La comprensión y dominio de la argumentación deductiva por parte de los estudiantes requiere el desarrollo de una racionalidad y un estado específico de los conocimientos. Exige "*la adhesión a una problemática que no es la de la eficacia (exigencia de la práctica) sino la del rigor (exigencia teórica)* (Balacheff, 1987, p. 170). Pero la construcción de esta racionalidad es un proceso progresivo que requiere tiempo, así como adaptaciones ecológicas del objeto *'demostración'* (transposiciones didácticas) en los distintos niveles de enseñanza.

CAPÍTULO 3

EPISTEMOLOGÍA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y SUS PROCESOS DE VALIDACIÓN. ESBOZO DE UN MODELO SEMIÓTICO PARA EL ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 hemos mostrado cómo la noción de significado sistémico nos ha permitido caracterizar la diversidad de demostraciones matemáticas, dependiendo de distintos contextos institucionales, y explicar en parte las dificultades de los alumnos con la comprensión y elaboración de demostraciones por la complejidad de las interacciones entre los diversos significados.

En este capítulo continuaremos con el desarrollo del componente teórico de nuestra investigación, ampliando el modelo epistemológico-semiótico para la didáctica de las matemáticas esbozado en Godino y Recio (1998), y aplicándolo al campo de la argumentación matemática.

Consideramos que tiene utilidad el desarrollo de un modelo que permita describir y explicar las complejas relaciones entre las estructuras conceptuales, el lenguaje y los diversos contextos institucionales y fenomenológicos en los que emerge el conocimiento matemático, y que permita además integrar en él las diferentes modalidades de argumentación matemática.

De acuerdo con el modelo de partida, consideramos la existencia de tres tipos de entidades elementales (notacionales, fenomenológicas y conceptuales) y consideramos diferentes relaciones semióticas entre ellas. Esto nos permitirá describir la argumentación matemática en términos de secuencia de relaciones semióticas.

El modelo que apuntamos se describe en detalle en la sección 3.4, siendo precedida dicha sección por una síntesis de diversas aportaciones sobre la caracterización del proceso de construcción del conocimiento matemático, en el plano personal y en el plano institucional (sección 3.2), y un análisis del papel de los procesos de validación en la construcción del conocimiento matemático (sección 3.3).

Aplicamos el modelo desarrollado en la sección 3.5, para el análisis de una demostración de un teorema elemental de geometría. También en el capítulo 6, para el análisis de los procesos de resolución de otros problemas de demostración y a procesos de estudio cooperativo con un grupo reducido de estudiantes. Eso nos permitirá comprender la complejidad ontológica y semiótica de las actividades matemáticas, incluso tan elementales como las consideradas.

Comenzaremos ahora analizando el problema central de la epistemología: el problema de la construcción del conocimiento matemático. Problema que tiene una clara incidencia en el ámbito educativo.

3.2. CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

El problema de la construcción del conocimiento puede ser analizado desde una perspectiva psicológica o desde una perspectiva antropológica.

Las aproximaciones de tipo psicológico consideran el conocimiento como producto individual, como una construcción mental que resulta de un lento proceso de adaptación al medio social y natural del individuo, consistente en un conjunto de concepciones, sistemas de representación simbólica, procedimientos algorítmicos, métodos de decisión, etc., que aparecen organizados como estructuras de pensamiento y se manifiestan como esquemas de actuación.

La importancia de la actividad práctica en la conformación del conocimiento individual tiene una larga tradición en psicología cognitiva. Para Piaget (1950): *"la acción precede al pensamiento y el pensamiento consiste en una composición siempre más rica y coherente de las operaciones que prolongan la acción, interiorizándola".* Las acciones están en la base del desarrollo intelectual, que para Piaget (1964, p. 19) aparece como resultado del proceso de adaptación al medio: *"... el desarrollo mental aparece, finalmente, como una adaptación cada vez más precisa a la realidad".*

Vergnaud (1990, p. 18), siguiendo a Piaget, también considera que "*...la acción es el principal factor del proceso de conocer...*", resultando el conocimiento a partir de la acción resolutoria desarrollada en una gran variedad de situaciones problemáticas, que analiza a partir de su teoría de los *campos conceptuales*. Para Vergnaud (1990, p. 18) la acción tiene un significado amplio, pues considera también como acción la actividad simbólica, que es para él "*contrapartida interna de la actividad patente".*

De acuerdo con Ráfales (1993), las operaciones mentales implicadas en los procesos de construcción del conocimiento individual son las de:

comparación, análisis, síntesis, generalización, inducción, deducción y abstracción.

La *comparación* de objetos diversos permite considerar analogías y diferencias entre ellos. El *análisis* es la división mental de un objeto en partes, con el fin de esclarecer su estructura. La *síntesis* es la unión de las partes del objeto, dividido anteriormente por el análisis. La *generalización* es el reconocimiento explícito de una propiedad común en un conjunto de objetos dados. La *inducción* es la generalización extendida a todos los objetos de un campo de estudio. La *deducción* es una forma de pensamiento que conecta generalidades o que deriva particularidades de casos generales. La *abstracción* puede entenderse como el aislamiento mental de una propiedad del objeto y, más aún, como la sustitución mental del objeto por dicha propiedad característica.

Para nosotros, los procesos de *generalización* y de *abstracción* son los instrumentos básicos para la conformación de los objetos matemáticos.

Para Dreyfus (1991), generalizar es derivar o inducir de particulares, para identificar aspectos comunes, para expandir dominios de validez. Un estudiante puede saber por experiencia que una ecuación lineal en una variable tiene una solución, y que "la mayoría" de los sistemas de dos (tres) ecuaciones lineales en dos (tres) variables tienen una única solución. Puede entonces generalizar esto a sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Más importante aún, con una guía apropiada, puede ser conducido a examinar el significado de "la mayoría" para $n=2$ y $n=3$ en la proposición anterior, formularla como una condición apropiada, y generalizar esa condición para $n>3$.

Otras generalizaciones hacen necesaria la formación de abstracciones más complejas y exigen la reconstrucción de los conceptos previos en planos nuevos, diferentes. Un buen ejemplo, señalado por Tall (1991), de generalización reconstructiva es la que tiene lugar cuando pasamos del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ a la construcción abstracta, axiomática del concepto de espacio vectorial.

Para Dörfler (1991) es también la acción el punto de partida en el desarrollo de los procesos de generalización y de abstracción. Una acción o un sistema de acciones, que pueden ser materiales, pero que también pueden ser *operaciones simbólicas*. Por ejemplo, operaciones aritméticas, transformaciones geométricas, etc.

El objetivo, significado y curso de la acción dirige la atención del que actúa sobre algunas relaciones y conexiones entre los objetos y situaciones soportes de las acciones. Estas relaciones demuestran ser estables cuando las acciones se repiten. Son *invariantes* de las acciones.

Esos invariantes necesitan una cierta descripción simbólica. Los *símbolos* utilizados para ello tienen la cualidad de primeros representantes, y juegan sólo un papel descriptivo. Los símbolos usados empiezan a sustituir gradualmente a los elementos de las acciones y las transformaciones sobre ellas, ganando progresiva independencia respecto de los objetos con los que son asociados y llegando a hacerse, finalmente, objetos independientes, que obtienen su significación y sentido de las relaciones y de las operaciones respecto a las cuales ellos actúan como objetos simbólicos.

El paso decisivo en el proceso de generalización matemática es ver esos símbolos como *variables* objetivadas cuyas características están sólo dadas por las cualidades y relaciones abstractas y que son válidas exactamente por ellas mismas y no por sus referentes. Los símbolos usados al principio como marcas de referencia pasan a ser variables con propiedad de sustitución. Inicialmente el símbolo tenía que adaptarse a los objetos que pretendía representar. Finalmente, son los objetos los que se adecuan al símbolo, al concepto. Todo objeto que pueda adecuarse al símbolo es susceptible de ser referido por éste, extendiendo la significación del mismo.

Dörfler habla de *cosificación* para referirse a este proceso de independencia del símbolo respecto a los objetos por él denotados. El término es equivalente al de *encapsulación* de Dubisnky (1991), quien entiende que la reflexión sobre las acciones y las relaciones entre ellas induce su conversión en objetos mentales que llegan a operar entre sí con relativa independencia de los procesos que describen. Ese proceso de encapsulación tiene para Harel y Kaput (1991), entre otros, el objetivo de facilitar la memorización de los procesos cuando éstos implican múltiples elementos constituyentes.

La simbolización aparece así como el momento culminante del proceso de generalización matemática, confiriéndole el grado máximo de abstracción. Los símbolos que actuaban anteriormente como representaciones de objetos y relaciones entre objetos, se tornan ellos mismos los objetos propios de la acción, puramente mental en este caso. La reflexión opera ahora sobre objetos abstractos, definidos en sí mismos por reglas internas al lenguaje en cuestión, por criterios lógicos, sin necesidad de referencia alguna a objetos concretos. El pensamiento se torna esencialmente abstracto.

El conocimiento matemático individual, en su forma más elevada, es un conocimiento abstracto, expresado mediante un lenguaje fuertemente simbólico, cuyos objetos tienen una significación determinada por las reglas de funcionamiento del propio lenguaje.

La aproximación antropológica, a diferencia de la psicológica, considera el conocimiento como un producto social, elaborado en el seno de las instituciones sociales. Así, para Bunge (1983) o Fourez (1994), el conocimiento científico es el resultado de la actividad investigadora de una comunidad científica, en el seno de una sociedad dada.

Los individuos reciben de la sociedad en que viven una cultura, que es, además de un conjunto de creencias, normas, costumbres, etc., un conjunto de conocimientos. La cultura puede ser entendida como un universo simbólico constituido por múltiples códigos, entre los que sobresale como código fundamental el lenguaje. Mediante el lenguaje, el conocimiento puede ser construido de una manera colectiva. El lenguaje permite intercambiar las experiencias individuales, las hace accesibles a todos los que pertenecen a la misma comunidad lingüística, con lo que se convierte en instrumento del acopio colectivo de conocimientos.

El lenguaje potencia la capacidad de conocimiento individual, al aportarle toda la riqueza cultural del conocimiento social, pero también actúa como un filtro cognitivo que condiciona la relación del individuo con su realidad. La sociedad ofrece a los individuos un universo de significaciones, de conocimientos, y el individuo, al integrarse en ella, debe, en mayor o menor medida, asumirlos e interiorizarlos, con lo que, inevitablemente, se ve sometido a condicionamientos.

El vínculo de los individuos con la sociedad se produce fundamentalmente a través de instituciones (familiar, escolar, laboral, etc.). Los sujetos individuales están siempre inmersos en formas de ver colectivas, institucionales y por tanto sus experiencias mismas están condicionadas por el hecho institucional, en la medida en que dichas experiencias son comprendidas a través de esquemas institucionales heredados mediante el lenguaje. Sus estrategias para actuar y dar sentido a su actividad en el mundo están siempre apuntaladas por estilos culturales adquiridos a través del lenguaje. Más aún, las instituciones legitiman los conocimientos en su seno, convirtiéndose por ello en codificadoras de comportamientos cognoscitivos de los individuos miembros de las mismas.

Desde el enfoque antropológico, los objetos matemáticos son objetos sociales, entidades culturales, en permanente proceso de construcción, que emergen históricamente de actividades de resolución de problemas desarrolladas en el seno de instituciones. Los individuos establecen una relación personal con dichos objetos en las instituciones en las que están integrados, recreándolos en el ámbito individual.

En realidad, las aproximaciones psicológica y antropológica están muy cercanas, pues ambas clases de conocimiento, individual y social, están profundamente imbricados y no es posible considerar el uno sin el otro.

Por una parte, el conocimiento institucional es resultado de la integración de conocimientos individuales, gracias a ese instrumento de comunicación, de interacción social que es el lenguaje. Así, el conocimiento científico aparece para Bunge (1983) como un complejo sistema conceptual, constituido por conceptos, proposiciones y teorías, que expresan e integran las aportaciones de las diferentes comunidades de científicos.

Por otra parte, el conocimiento individual deriva, a su vez, del conocimiento social. Como señala Rabade (1995), el comportamiento cognoscitivo individual es un comportamiento socialmente adquirido en el seno de una cultura. Cada individuo de una sociedad se integra en ese universo de cauces de conocimiento que constituye la cultura, la cual le impone un elenco de categorías para interpretar la realidad, para organizarla, para estructurarla. Cada individuo construye su visión particular del mundo, pero en sintonía, al menos relativa, con la cosmovisión general de la sociedad.

3.3. VALIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Una cuestión epistemológica fundamental es la validación del conocimiento, la determinación de criterios que permitan afirmar su *validez*, su *verdad*.

La diferencia principal entre el conocimiento y la creencia radica precisamente en el hecho de que el conocimiento se justifica, se valida, mientras que la creencia simplemente se tiene. Para Ponte (1994), las creencias son una parte menos elaborada del conocimiento que, incluso, no requieren consistencia interna. Una vez que una conjetura, una creencia se demuestra, pasa a alcanzar el estatus matemático de teorema, de proposición verdadera.

En Russell (1948) podemos encontrar la expresión clásica del concepto de verdad, que se remonta a la antigüedad griega, como adecuación entre el pensamiento y la realidad exterior al mismo. Para él, las creencias reflejan observaciones que creemos verdaderas. Esas observaciones son verdaderas cuando reflejan hechos reales. El conocimiento resulta verificado, constatado empíricamente, por su concordancia con los hechos.

Es una concepción semántica de la verdad, útil en la ciencia de carácter experimental, pero menos adaptable, en principio, a disciplinas como la matemática, que aparece como una ciencia abstracta, sin referencia directa a la realidad factual.

De hecho, como señaló Popper (1972), ni siquiera las teorías científicas son verificables empíricamente. La comprobación de una ley científica en múltiples casos particulares no impide la posibilidad de refutación en una nueva comprobación experimental. Es el problema lógico de la inducción, que conduce a Popper a su teoría de la falsación: las teorías científicas no pueden ser verificadas, sólo pueden ser falsadas o refutadas por la experiencia. Una teoría simplemente subsiste mientras no pueda ser refutada por la experiencia.

En matemáticas, las corrientes formalistas han introducido una concepción *sintáctica* de la verdad, interpretada como *coherencia*, dentro de un determinado sistema axiomático. Una proposición es considerada verdadera si puede ser derivada correctamente de los axiomas de la teoría, por aplicación de las reglas propias del sistema lógico que la expresa. A ese proceso de derivación respecto de los axiomas se le llama *demostración* (deductiva/formal).

De acuerdo con Kline (1980), el teorema de incompletitud de Gödel, al demostrar la imposibilidad de existencia de un sistema formal, consistente y completo, capaz de contener, cuando menos, la aritmética elemental, muestra las limitaciones de esa concepción sintáctica de la verdad matemática, haciendo ver que la demostración rigurosamente deductiva no es posible fuera de sistemas matemáticamente irrelevantes.

Este resultado de Gödel dio lugar a importantes problemas subsidiarios. Dada la existencia en matemáticas de proposiciones que no pueden ser probadas ni rechazadas, una cuestión complementaria es determinar si una proposición dada puede o no ser demostrada. Se trata del problema de la decisión, de saber de antemano si existe o no un procedimiento efectivo para demostrar en un número finito de pasos una proposición dada. De acuerdo con Kline (1980), Church demostró que, en general, no es posible un procedimiento de decisión; para cada proposición particular no existe un test que nos diga por adelantado si es demostrable o no.

Las limitaciones puestas de manifiesto por éstos y otros teoremas metamatemáticos han conducido a una visión más pragmática de la demostración matemática. La demostración matemática no puede reducirse a un mero encadenamiento lógico, formal, que prescinda de la fenomenología de los objetos implicados. La matemática es una producción cultural, histórica, que aporta modelos de interpretación de la realidad, que como todos los modelos científicos, son válidos mientras son útiles. La validez de las teorías matemáticas es una cuestión social, una convención, decidida por la comunidad de matemáticos y sancionada por la sociedad, que resulta de una lenta labor de aproximación, con avances y retrocesos, contradicciones incluso, acompañando al proceso, siempre inacabado, de construcción del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, puede ser interesante considerar el punto de vista de Wittgenstein (1956, 58 y 69), interpretado con ayuda de estudios filosóficos como los de Baker y Hacker (1985) y Frascolla (1994), que introduce un enfoque convencionalista ciertamente peculiar.

Para Wittgenstein la necesidad lógica de cualquier enunciado es siempre la expresión directa de una convención lingüística. Un teorema matemático no expresa una propiedad universal e intemporal de ciertas entidades ideales; se trata en cambio de la expresión disfrazada de una regla aceptada que establece lo que se debe obtener cuando los procesos de cálculo pertinentes se realizan correctamente.

La demostración es concebida como una representación paradigmática de la correcta realización de ciertas transformaciones de signos. Su función es persuadir de que conviene extender el aparato conceptual en una cierta dirección, de que es útil aceptar la regla gramatical expresada en el enunciado del teorema.

Según esta posición, la aceptación, por ejemplo, de la proposición 2+2=4, con carácter necesario e intemporal, no es porque se corresponda con propiedades de objetos ideales, y que por ello exprese una verdad universal, sino porque hemos sido entrenados en seguir unas reglas de uso (definiciones) de los símbolos '2', '+', '4'.

De acuerdo con la filosofía de Wittgenstein (Baker y Hacker, 1985, p. 291 y sig.), si pensamos que una proposición matemática tiene el más alto grado de seguridad, como que son más seguras que las proposiciones empíricas, estamos confundidos. No es más cierto que 25 x 25 = 625 que, por ejemplo que, el sol está brillando. La seguridad de tales verdades necesarias no es mayor, sino de una clase diferente, y la diferencia en clase no es psicológica sino lógica, ya que se tratan de diferentes tipos de proposiciones.

Tener una prueba equivale a *establecer la seguridad en matemáticas*, como en una corte de justicia. Pero lo que se llama *'una prueba',* así como el papel de la prueba, es muy diferente en ambos casos. El papel de las pruebas en una corte de justicia es discriminar las proposiciones empíricas verdaderas de las falsas. Pero el papel de las pruebas en matemáticas, en geometría por ejemplo, no es discriminar las proposiciones geométricas verdaderas de las falsas sino determinar las proposiciones de la geometría, fijar los conceptos geométricos y establecer lo que tiene sentido decir al caracterizar objetos en el espacio y sus relaciones espaciales. El fallo en observar esta diferencia equivale a asimilar desastrosamente la prueba de una proposición matemática a la verificación de una proposición empírica.

Pensamos que una demostración muestra que una proposición es verdadera con seguridad, y que como consecuencia de esta certidumbre estamos seguros al aplicarla, y justificados a hacerlo. La demostración parece inexorable y parece establecer lo que demuestra como absolutamente seguro. ¿Pero en qué consiste esta inexorabilidad? ¿A qué nos fuerza hacer? ¿Nos obliga a reconocerla, y si es así, qué es lo que reconocemos?

Lo que es inexorable, no es la demostración, sino las consecuencias de aceptarla, esto es, que la aplicamos después inexorablemente en los cálculos empíricos, por ejemplo, en la física. Y confundimos el hecho de que mantenemos la proposición demostrada como rígida (la usamos como una norma de representación) con el pensamiento de que se mantiene firme porque es verdadera con seguridad -¡ya que está demostrada por la demostración!. (Baker y Hacker, 1985, p.292)

En definitiva, para Wittgenstein, las demostraciones matemáticas, de acuerdo con Frascolla (1994, p. 142). pasan

"...de ser un instrumento poderoso y sofisticado para establecer verdades, a un instrumento de persuasión para producir cambios conceptuales que no son justificables de otra forma excepto en términos de la inclinación compartida a aceptarlos, generada por la demostración ".

El abandono de las concepciones estrictamente formalistas, que reducían las matemáticas a un mero sistema formal, puede conducir a una revalorización de los aspectos semánticos de la matemática. Al considerar que el conocimiento matemático no puede reducirse a un mero lenguaje abstracto, axiomático, carente de significación, la cuestión del significado de los objetos matemáticos, los aspectos semióticos del conocimiento matemático cobran, entonces, un relieve especial.

3.4. ESBOZO DE UN MODELO SEMIÓTICO PARA EL ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

En línea con el interés creciente de la comunidad de investigadores en educación matemática por el uso de nociones semióticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas anteriormente comentado, Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) vienen desarrollado un modelo sobre el significado de los objetos matemáticos, desde presupuestos pragmáticos y antropológicos. En lo que sigue, nosotros utilizaremos dicho modelo con algunas matizaciones propias.

El modelo parte de las siguientes hipótesis epistemológicas, cognitivas y antropológicas sobre las matemáticas:

1. Las matemáticas son una actividad humana implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos. De acuerdo con las teorías constructivistas, los actos de las personas son la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas.
2. Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en instituciones o colectivos implicados en su estudio. Por tanto, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.
3. Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que las situaciones-problemas y sus soluciones se expresan. Los sistemas de símbolos

matemáticos tienen tanto una función comunicativa como instrumental.

4. Las matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado. Una vez que un objeto matemático ha sido aceptado como parte de dicho sistema puede ser considerado como una realidad textual y un componente de la estructura global. Puede ser concebido y tratado como una totalidad para crear nuevos objetos matemáticos, ampliando el rango de herramientas matemáticas, y al mismo tiempo, introduciendo nuevas restricciones en el lenguaje y el trabajo matemático

El modelo parte de la noción de *situación-problema* como noción primitiva. Para una persona, una situación-problema es cualquier situación en que debe realizar actividades de matematización,

- construyendo o buscando soluciones que no son inmediatamente accesibles;
- inventando una simbolización adecuada para representar la situación y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;
- justificando las soluciones propuestas;
- generalizando la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Una clase de situaciones-problemas mutuamente relacionados, que comparten soluciones, procesos o representaciones similares se consideran como un *campo de problemas*.

Los sujetos realizan distintos tipos de *prácticas* o acciones para resolver los problemas matemáticos, para comunicar las soluciones a otras personas, para validar y generalizar las soluciones a otros contextos y problemas. El conocimiento de los sujetos surge como consecuencia de sus interacciones con los diferentes campos de problemas, siendo mediatizado por los contextos institucionales correspondientes.

Una práctica es *significativa* para una persona (respectivamente una institución) si cumple una función para resolver el problema, para comunicar, validar, o extender su solución. Las prácticas significativas son, por tanto, formas expresivas situadas orientadas a un objetivo, e implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona, y las herramientas semióticas que mediatizan la acción.

El sistema de prácticas prototípicas significativas, esto es, el sistema de prácticas eficientes para alcanzar el fin pretendido es considerado como el *significado personal del objeto* (respectivamente, *institucional*). El significado de un objeto puede ser interpretado como la *enciclopedia de usos* del término o expresión que denota el objeto, aunque esta enciclopedia está relacionada aquí a una persona o una institución, y los usos se conciben como prácticas significativas.

El modelo parte de considerar los siguientes objetos como entidades básicas constitutivas de la actividad matemática:

- *Notaciones,* esto es, todo tipo de sistemas de representación usados en la actividad matemática (términos, expresiones, enunciados, símbolos gráficos, tablas, diagramas, etc.)
- *Fenomenologías,* considerando como tales las diferentes situaciones-problemas de tipo matemático, que matematizan situaciones y fenómenos de la vida cotidiana, del mundo natural y social, así como de la propia matemática.

Elementos conceptuales, es decir, las diferentes abstracciones (conceptos, esquemas conceptuales, procedimientos algorítmicos, proposiciones, teorías, etc.) que conforman el conocimiento matemático propiamente dicho.

Las entidades conceptuales y las fenomenologías las concebimos en términos similares a como describe Freudenthal (1982) los *noumena* y *phainomena*. Para este autor los objetos matemáticos son noumena, o sea, objetos de pensamiento (ideas) como los números, por ejemplo. Los noumena, las estructuras matemáticas en general, sirven para organizar los phainomena, los fenómenos tanto del mundo concreto como del matemático. Nosotros consideramos que el estudio matemático de tales fenómenos pone a las personas ante situaciones-problemáticas, y de aquí la conexión que establecemos entre ambas nociones.

La noción de generalización matemática descrita por Dörfler (1991) nos sirve también de punto de partida para interpretar los elementos conceptuales como los productos resultantes de los procesos de generalización de las acciones de los sujetos ante cierta clase de situaciones-problemas.

Las relaciones entre los objetos conceptuales, los signos usados para codificar el conocimiento y los contextos que sirven para establecer el significado del mismo han sido modelizadas por muy diversos autores mediante esquemas de tipo triangular. Entre estos esquemas destacan el triángulo semiótico que presenta Steinbring (1997). Los elementos que incluye Steinbring son *concepto*, *signo/símbolo* y *objeto/contexto de referencia*.

Inspirados en esta tríada, podemos a esbozar un modelo de relaciones entre las entidades matemáticas básicas, como ilustra la figura siguiente:

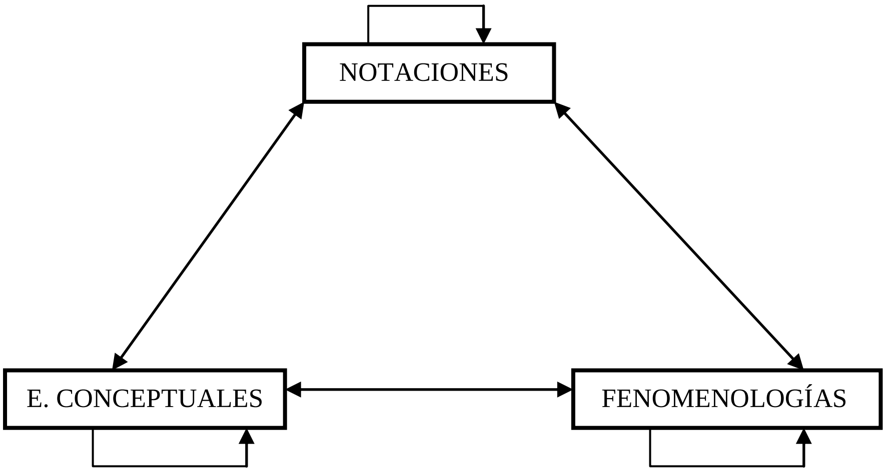


Figura 3.1. Triángulo epistemológico

En el trabajo matemático, tanto los objetos conceptuales como los fenomenológicos vienen dados por sistemas notacionales que describen sus propiedades características. Ambas entidades son inseparables de los ostensivos que les dan corporeidad, pero no identificables con ellos, esto es, consideramos que la matemática no es reducible al discurso que la expresa. "*El hecho enunciado debe ser distinguido del enunciado del mismo*" (Searle, 1997; p. 21).

Las categorías de entidades y las relaciones que hemos propuesto entre ellas se relacionan con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1982), para quien un concepto es una tripleta formada por el "*conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere*" (p. 36)

Entre los distintos tipos de objetos que intervienen en la actividad matemática -notaciones, fenomenologías y elementos conceptuales- se pueden establecer nueve tipos de relaciones semióticas, interpretables como procesos cognitivos implicados en el proceso de construcción del conocimiento como ilustra la figura 3.2:

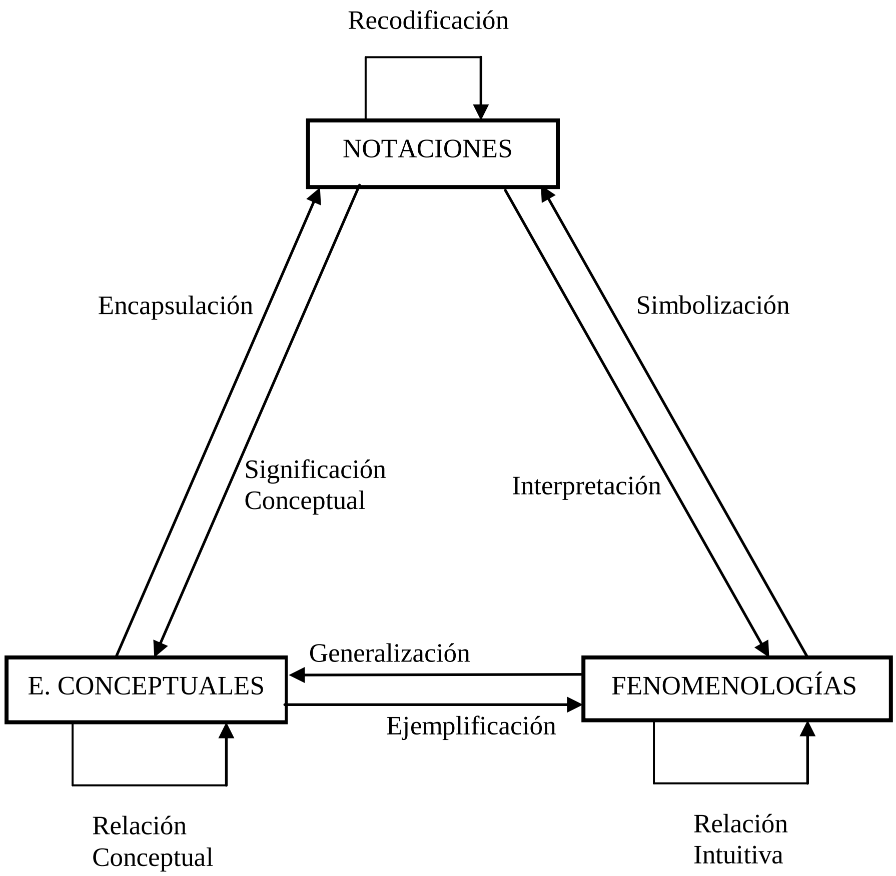


Figura 3.2. Relaciones semióticas

Como se indica, estas relaciones pueden interpretarse como procesos cognitivos específicos.

Así, los elementos notacionales permiten *simbolizar* las entidades fenomenológicas y *encapsular* -en el sentido de Dubisnky, (1991), como variables-, las entidades conceptuales. Los procesos de *recodificación* permiten traducir unos sistemas de representación en otros (enunciados verbales mediante gráficos, etc.).

Las fenomenologías permiten *interpretar* los elementos notacionales y también *ejemplificar* las entidades conceptuales.

Las entidades conceptuales aportan *significación conceptual* a los elementos notacionales, mediante un proceso de *generalización,* a partir de variadas situaciones fenomenológicas. Las *relaciones intuitivas* que emergen de las situaciones fenomenológicas constituyen conjeturas, que inducen *relaciones teóricas* entre entidades conceptuales.

3.5. La demostración matemática como cadena de relaciones semióticas.

Hemos analizado en el capítulo 2 la rica variedad de sentidos que tiene la argumentación matemática, desde la sencilla argumentación informal que acompaña la formulación de conjetura, hasta la rigurosa demostración deductiva formal que constituyente la forma validativa propia de la matemática profesional.

A pesar de aportaciones como la de Boero, Garuti y Mariotti (1996), quienes afirman la existencia de fuerte continuidad cognitiva entre la producción de conjeturas y la construcción de demostraciones, la realidad es que carecemos de un modelo consolidado de conceptualización capaz de relacionar entre sí las diferentes formas de argumentación.

Nuestra investigación intenta ofrecer elementos de acercamiento esa teorización. Nos parece que la riqueza de sentidos de la argumentación matemática puede ser contemplada de una forma más integradora.

Entendemos que el modelo semiótico presentado en el capítulo anterior puede ser útil en dicho cometido. En concreto, proponemos considerar la demostración como una *cadena de relaciones semióticas*.

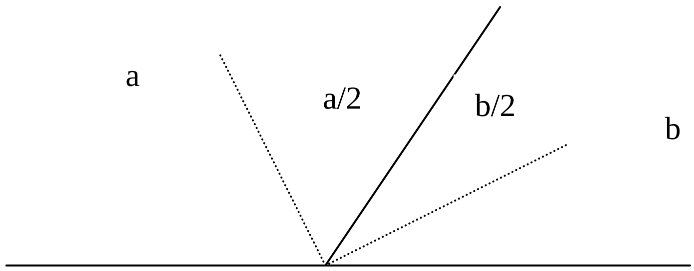
A continuación vamos a aplicar las diferentes ideas propuestas en el modelo semiótico que venimos planteando (en particular la interpretación de la demostración como cadena de relaciones semióticas) a una demostración concreta, tomada como ejemplo, para tratar de apreciar la virtualidad del modelo. Se trata de la demostración de una proposición geométrica elemental, correspondiente a un problema incluido en el cuestionario que se contempla en el capítulo 4 para caracterizar esquemas de demostración. Intentamos mostrar, así, la potencialidad de la nueva propuesta.

El enunciado del problema es el siguiente:

"Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto".

(Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir, 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).

Una respuesta prototípicamente correcta puede ser la siguiente:



Si a y b son los dos ángulos adyacentes, se ha de cumplir que a+b = 180º. El ángulo que forman las bisectrices será, entonces:

a/2 + b/2 =(a+b)/2 =180º/2 =90º

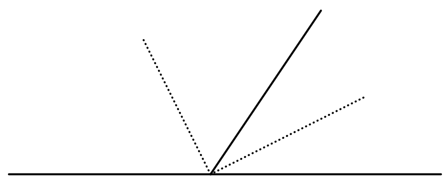
Desde el punto vista semiótico, la tarea propuesta por el investigador (emisor) desencadena en primer lugar procesos interpretativos por parte de los estudiantes (destinatarios) de la misma. Las palabras y expresiones que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes:

Demuestra, ángulo, vértice de un ángulo, lados de un ángulo, semirrecta, bisectriz de un ángulo, ángulo recto, ángulo llano, ángulos adyacentes, división de un ángulo en partes, suma de ángulos, igualdad de ángulos, medida de ángulos, el grado como unidad de medida de ángulos, 180º, 90º.

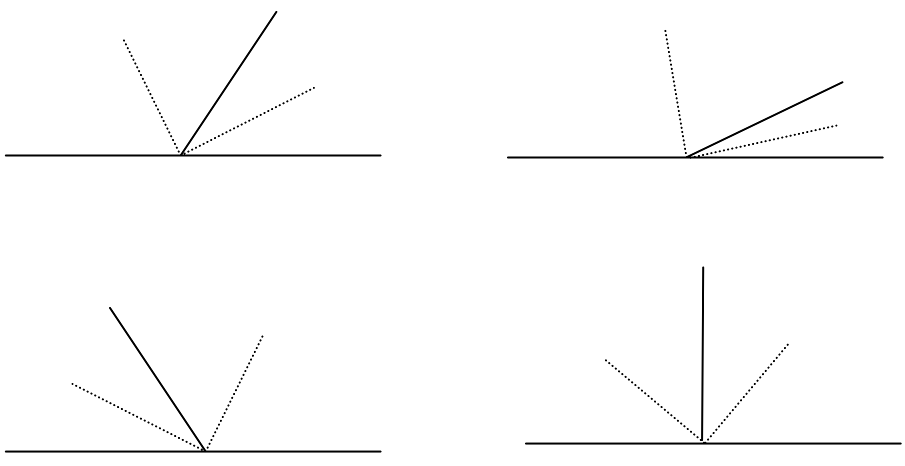
Para efectuar *interpretación* del enunciado se suele relacionar éste con un contexto *fenomenológico* habitual para la geometría euclídea elemental, cual es el de las representaciones gráficas mediante papel y lápiz, (donde la línea recta aparece representada por la huella dejada por el lápiz apoyado sobre una recta, o una representación más informal aún, si los dibujos se hacen a mano alzada).

Esta interpretación permite una *recodificación* del enunciado del problema, mediante la aplicación de algún diagrama, como el incluido en la respuesta prototípica considerada anteriormente.

La interpretación fenomenológica utilizada favorece el surgimiento de sencillas *relaciones intuitivas*, de conjeturas elementales, como que el ángulo formado por las bisectrices es recto, por simple inspección ocular:



Esa conjetura se puede comprobar, mediante un procedimiento empírico inductivo, considerando distintos casos concretos, que constituyen *ejemplificaciones* del enunciado general:



Esas ejemplificaciones pueden hacerse más matizadas, introduciendo medidas numéricas. Así, si un ángulo es de 120º y otro es de 60ª, sus bisectrices forman ángulos de 60º y 30º, que suman 90º. Análogamente para ángulos de 150º y 30º, ángulos de 90º (ambos), etc.

Puede iniciarse un comienzo de *generalización*, usando símbolos para designar a los ángulos. Se representan los ángulos por las letras *a* y *b*, de forma que, por ser ángulos adyacentes, ha de cumplirse que $a + b = 180º$. Entonces los casos anteriores se representan como:

$$a = 120º,\ b = 60º,\ \ a/2 + b/2 = 60º + 30º = 90º$$
$$a = 150º,\ b = 30º,\ \ a/2 + b/2 = 75º + 15º = 90º$$
$$a = 90º,\ b = 90º,\ \ a/2 + b/2 = 45º + 45º = 90º$$

apareciendo sintetizado el resultado como el resultado como:

$$a + b = 180º;\ a/2 + b/2 = 90º$$

Puede efectuarse un proceso de abstracción mayor, considerando las letras como variables genéricas, representativas de ángulos cualesquiera. Lo que se traduce en un proceso de *encapsulación* de los conceptos representados por dichos símbolos, los ángulos adyacentes:

$$a + b = 180º,\ \ a/2 + b/2 = ?$$

Encapsuladas las variables, el proceso de demostración se hace formal, se efectúa teniendo en cuenta sólo las reglas de transformación de expresiones propias del campo en cuestión (álgebra elemental), sin necesidad de tener en cuenta la *significación conceptual* de tales símbolos algebraicos, en el contexto del problema en cuestión:

$$a + b = 180º,\ a/2 + b/2 = (a + b)/2 = 180º/2 = 90º$$

De manera que el proceso de demostración concluye con una fase deductiva formal, pero que ha sido precedida por otras fases previas, que incluyen un proceso de interpretación y recodificación del enunciado, con ayuda de representaciones gráficas, representaciones que facilitan la consideración de relaciones intuitivas, de conjeturas entre los objetos matemáticos (ángulos), que merced a un proceso de abstracción creciente inducen la consideración del teorema en cuestión y su demostración deductiva formal.

La demostración aparece, así, como una concatenación de procesos, como una cadena de relaciones semióticas entre los objetos implicados, de forma que la demostración estrictamente deductiva no es sino la última fase de una argumentación que ha comenzado por la interpretación del enunciado del teorema a demostrar, formulación de conjeturas, etc., finalizando con la demostración formal.

Nos parece que el modelo introducido permite, en efecto, una visión más integradora de las diversas formas de argumentación matemática, como se pretendía.

3.6. CONCLUSIONES

El modelo semiótico esbozado en este trabajo para analizar el significado de los objetos puestos en juego en la actividad matemática, nos ha resultado útil.

En particular, la interpretación de la demostración matemática como cadena de relaciones semióticas nos ha permitido una visión más integradora de las distintas formas de argumentación matemática.

Su aplicación al estudio de un problema de demostración nos ha servido para configurar un modelo de análisis del proceso de resolución del mismo, que puede ser generalizado a otros problemas, como hacemos en el capítulo 6, donde profundizamos el modelo semiótico-antropológico que venimos considerando.

CAPÍTULO 4

ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo iniciamos la parte experimental de nuestra investigación abordando los objetivos O3 y O4 descritos en la sección 1.3.2., que comprenden la evaluación de los esquemas personales de demostración de estudiantes que inician sus estudios en la Universidad de Córdoba, por medio de la caracterización de sus prácticas argumentativas matemática, y el estudio de la influencia de algunos factores en los esquemas de demostración matemática de los estudiantes.

De manera específica pretendemos validar la hipótesis de que los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba tienen importantes dificultades en la comprensión y desarrollo de demostraciones matemáticas de carácter deductivo, existiendo entre dichos estudiantes una variedad de esquemas personales de demostración. Nos proponemos, además, estudiar la influencia en dichos esquemas de demostración de dos factores: el contenido (aritmético o geométrico) de los problemas, y la aportación o no de información a los estudiantes sobre las características deductivas de las demostraciones matemáticas.

Estos objetivos se abordan mediante la aplicación de un cuestionario escrito (en dos versiones) a dos muestras sucesivas de estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba.

4.2. CARACTERIZACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

En la literatura de investigación en educación matemática abundan las publicaciones que describen las dificultades de los estudiantes de los distintos niveles educativos con las pruebas matemáticas, así como sus modos específicos de razonamiento. Pueden destacarse al respecto los trabajos de Galbraith (1981), Fischbein (1982), Senk (1985), Balacheff (1987), Martin y Harel (1989), Arsac (1992) y Chazan (1993).

Harel y Sowder (1996) han estudiado específicamente la dimensión subjetiva o personal de la demostración. Un elemento central de su propuesta es la noción de *esquema personal de demostración*. Demostrar (o justificar) comprende dos aspectos: convencimiento (convencerse uno mismo) y persuasión (convencer a los demás). Un esquema personal de demostración consiste en todo aquello que constituye *convencimiento* y *persuasión para esa persona*.

Nosotros utilizaremos la idea de esquema personal de demostración, dándole una interpretación de esquema operatorio, de invariante cognitivo, de respuesta prototípica ante un campo de problemas dado.

Con el fin de aproximarnos a los esquemas personales de demostración de estudiantes de primer curso de la Universidad de Córdoba, decidimos utilizar una metodología de investigación de tipo cuantitativo, buscando fiabilidad y validez en los resultados del estudio.

Para ello, diseñamos una prueba escrita, que fue aplicada durante el curso 1994-95 y que a continuación analizamos.

4.2.1. Muestra

Decidimos elegir una muestra de alumnos a los pocos días de su ingreso en nuestra Universidad (Córdoba), para que pudiera servirnos de referencia respecto a los resultados alcanzados en la educación preuniversitaria. La prueba se pasó a 429 alumnos que cursaban alguna asignatura de matemáticas en las Facultades o Escuelas de: Agrónomos, Biológicas, Empresariales, Informática, Magisterio, Químicas y Veterinaria. Se realizó ajustada a las posibilidades materiales y de horario de los centros y fue efectuada por los estudiantes de forma voluntaria.

4.2.2. Cuestionario

Se aplicó un cuestionario compuesto por dos problemas cuya resolución requiere poner en juego capacidades de demostración matemática. Los problemas propuestos comprendían nociones muy elementales, asequibles a la generalidad de los estudiantes a los que se aplicó la prueba. Más aún, se les recordó de forma reiterada cualquier noción matemática que pudieran haber olvidado y fuera significativa para la realización de los problemas. El tiempo previsto para su realización fue de veinte minutos cada uno.

Ambos problemas fueron seleccionados por su simplicidad y su operatividad para discriminar entre las capacidades de demostración inductiva y demostración deductiva, detectadas en aplicaciones previas de dichos problemas (y otros similares) en relación con el problema de la evaluación de las capacidades de generalización y simbolización (Recio y Godino, 1996).

El primero de tales problemas tenía el siguiente enunciado:

Demuestra que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números. (Recuerda que los números naturales son los infinitos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19, 11, 12, 13, 14, 15,...).

Este problema trataba de analizar los esquemas de demostración en un contexto numérico. La respuesta estándar considerada correcta era la siguiente:

Si llamamos n y n+1 a los dos números naturales consecutivos, se tendrá:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

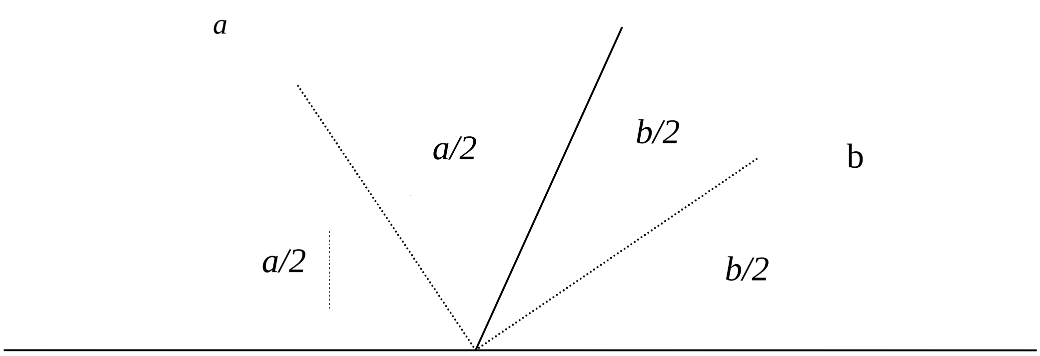
$$n + (n+1) = 2n + 1$$

La primera igualdad demuestra que la diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es un número impar (un número par más uno). La segunda igualdad demuestra que este número impar es igual a la suma de dichos números consecutivos.

El segundo de los problemas planteados fue el siguiente:

Demuestra que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto. (Recuerda que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado en común y suman un ángulo llano, es decir 180º. Un ángulo recto mide 90º. La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos partes iguales).

Este problema trataba de analizar los esquemas de demostración en un contexto geométrico. La respuesta estándar considerada correcta era la siguiente:



Si a y b son los dos ángulos adyacentes, se ha de cumplir que:

a + b = 180º

El ángulo que forman las bisectrices será:

a/2 + b/2 = (a+b)/2 = 180º/2 = 90º

4.2.3. Categorización de las respuestas

Las respuestas fueron clasificadas en cinco categorías diferentes elaboradas a partir de ensayos pilotos previos realizados con estudiantes de estos niveles:

1. La respuesta es muy deficiente (confusa, incoherente,...).
2. *Comprueba* la proposición con ejemplos, sin errores significativos.
3. Comprueba la proposición con ejemplos, afirmando además su cumplimiento *en general*.
4. Justifica *lógicamente* la validez de la proposición, apoyándola en otros teoremas o proposiciones conocidas, de forma parcialmente correcta.
5. Aporta una *demostración* sustancialmente correcta, que incluye una simbolización adecuada.

Las respuestas tipo 1 pueden corresponder a falta de comprensión de la tarea planteada, por dificultades de interpretación del texto leído, falta de capacidad argumentativa mínima u otras razones, que indican limitaciones importantes en el campo de la argumentación.

Las respuestas tipo 2, por su misma caracterización, no ofrecen problemas de interpretación.

Como ejemplos concretos de respuestas de nivel 3, en el problema aritmético, encontramos los siguientes:

a) *Comprueba* la proposición con ejemplos, y *generaliza* su cumplimiento, diciendo que se cumple *siempre*:

“32 - 22 = 5

9 - 4 = 5

Se cumple que la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números”.

b) *Comprueba* la proposición en casos particulares, introduciendo alguna formulación *simbólica*, que resulta muy *incorrecta* o muy *insuficiente*:

“62 - 52 = 6 + 5

11 = 11 Se cumple

72 - 62 = 7 + 6

49 - 36 = 7 + 6

13 = 13 Se cumple

$A^2 - B^2 = A + B$*”*

La introducción del simbolismo indica que los conceptos implicados comportan ya una cierta generalización.

c) *Comprueba* la proposición en casos particulares, desarrollando además una argumentación *lógica*, *generalizante*, aunque no *simbólica*, claramente *incorrecta* o *insuficiente*:

“Siempre será un número impar porque el número resultante de la suma de un número par y un número impar siempre va a ser un número impar, y en dos números consecutivos uno tiene que ser par y otro impar”.

En este caso, los conceptos usados en la argumentación presentan ya cierto grado de generalidad. Se razona considerando los objetos no como entes concretos, sino como representantes de categorías, aunque todavía de forma incipiente.

Como ejemplos concretos de respuestas de nivel 3, en el problema geométrico, encontramos los siguientes:

a) *Comprueba* la proposición con ejemplos, y *generaliza* su cumplimiento, diciendo que se cumple *siempre*:

"El caso más sencillo es que los ángulos adyacentes sean de 90º. Si trazamos su bisectriz a y b, se nos dividen en ángulos de 45º y la suma de ambos es 90º, es decir un ángulo recto.
Lo mismo ocurriría para cualquier ángulo dado. Siempre que a dos ángulos adyacentes le tracemos su bisectriz resultará un ángulo de 90º Otro ejemplo de ángulos adyacentes sería 30º y 150º... (continua la exposición del ejemplo)".

b) Comprueba la proposición en casos particulares, introduciendo alguna formulación *simbólica*, que resulta muy *incorrecta* o muy *insuficiente*:

"Sean dos ángulos A y B, A + B = 180º. Sean A = 30º y B = 150º . Las bisectrices darán ángulos de 15º y 75º; 15º + 75º = 90º. Las bisectrices originan un ángulo de 90º".

c) Comprueba la proposición en casos particulares, desarrollando una argumentación *lógica*, *generalizante*, aunque no *simbólica*, claramente *incorrecta* o *insuficiente*:

"Si los ángulos son de 90º cada uno, las bisectrices dan ángulos de 45º, de modo que 45º + 45º = 90º, es decir las bisectrices originan un ángulo de 90º. Si los ángulos tienen otros valores distintos de 90º, lo que aumenta uno lo disminuye el otro y las bisectrices siguen dando un ángulo de 90º".

La característica general de las respuestas de tipo 4 es que se justifica *lógicamente* la validez de la proposición, apoyándose en otros teoremas o proposiciones conocidas, de forma parcialmente correcta. Como ejemplos concretos, en el problema aritmético, pueden señalarse los siguientes:

a) Hace una argumentación *lógica*, no *simbólica*, sustancialmente *correcta* (con el alcance que permite la no introducción de símbolos):

"El cuadrado de un número impar es un número impar. El cuadrado de un número par es un número par. La diferencia de un número par y de otro impar (o de un número impar y otro par), es un número impar. Dos números naturales consecutivos son uno par y otro impar, de manera que sus cuadrados serán uno par y otro impar y la diferencia de sus cuadrados será un número impar".

b) Hace una argumentación *simbólica*, que resulta parcialmente *incorrecta*:

$$“x^2 - (x + 1)^2 = y \;\; ; \;\; y = x + (x + 1)$$
$$x^2 - (x^2 + 2x + 1) = x + (x + 1)$$
$$x^2 - x^2 - 2x - 1 = x + x + 1$$
$$-2x - 1 = 2x + 1$$
$$-4x = - 2$$
$$4x = 2$$
$$x = 2 \; ; \;\; x + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$y = 2 + (2 + 1) = 5”$$

Como ejemplos concretos de respuestas de nivel 4, en el problema geométrico, encontramos los siguientes:

a) Hace una argumentación *lógica*, sin *simbolismo*, sustancialmente *correcta* (con el alcance que permite la no introducción de símbolos):

“Si los dos ángulos son adyacentes, han de sumar 180º y al hacerse las bisectrices, es decir al dividir cada uno de los dos ángulos en sus dos mitades, resultará que la suma de la mitad de un ángulo y la mitad del otro ángulo valdrá 90º. Es decir, será como dividir el ángulo llano por la mitad”.

b) Hace una argumentación *simbólica*, que resulta parcialmente *incorrecta*:

“Pongamos un ángulo de 50º y otro de 130º. La suma de ambos da 180º. Si la bisectriz nos divide el ángulo en dos partes iguales, cada ángulo pasa a valer 25º y 65º respectivamente. Así pues, la suma de estos ángulos resultantes es 90º, un ángulo recto (Se acompaña el dibujo).

Se tendrá:

$g = 180º \; ; \;\; a = 50º \; ; b = 130º \; ; f = 90º$

$g = a + b$

$a/2 + b/2 = g/2 = f$

$g/2 = f”$

4.2.4. Interpretación de las respuestas como esquemas de demostración

Los tipos de respuestas dadas por los estudiantes pueden ser catalogados como esquemas personales de demostración, con la interpretación de éstos apuntada anteriormente.

Estos esquemas pueden ser relacionados con los distintos tipos de argumentación matemática que consideramos en el capítulo 2. Desde ese punto de vista, para explicar las respuestas de los estudiantes que hemos referido como las respuestas de tipo 2, 3, 4 y 5, consideramos cuatro tipos de esquemas: *argumentación explicativa*, *prueba empírico-inductiva*, *prueba deductiva informal* y *demostración deductiva*.

Las respuestas de tipo 1 corresponden, simplemente, a falta de comprensión de la tarea planteada, por dificultades de interpretación del texto leído, falta de capacidad argumentativa mínima u otras razones, que indican limitaciones cognitivas importantes.

Las respuestas de tipo 2, consistentes en una mera comprobación de la proposición a demostrar, mediante ejemplos particulares, pueden ser catalogadas como *argumentaciones explicativas* -respecto al enunciado del correspondiente problema-, que consideramos formas elementales de *argumentación informal*. Se trata de procesos en los que el sujeto procede a explicarse a sí mismo, mediante ejemplos concretos, el significado de la proposición en cuestión. No hay verdadera intención validativa, no se pretende afirmar el cumplimiento en general de la proposición, válido para todos los casos posibles. Sólo hay intención explicativa, descriptiva.

Las respuestas de tipo 3 pueden ser consideradas como *pruebas empírico-inductivas*, basadas en la comprobación mediante ejemplos particulares, con intención de justificar el cumplimiento general de dicha proposición.

Las respuestas de tipo 4 pueden ser interpretadas como *pruebas deductivas informales*, demostraciones desarrolladas siguiendo criterios lógicos, pero con una lógica intuitiva, no simbólica, apoyándose en generalizaciones no contrastadas.

Las respuestas de tipo 5 las interpretamos como formas elementales de *demostraciones deductivas*. Elementalidad que viene impuesta por la simplicidad de los problemas planteados, pero indicando las respuestas que los criterios lógicos son formales, aplicados de acuerdo con esquemas simbólicos, atendiendo más a las reglas de transformación del lenguaje simbólico dentro del cual operan dichos términos que a la significación concreta de los términos usados.

4.2.5. Resultados cuantitativos

Con objeto de hacer una primera valoración de la Hipótesis O3, en la Tabla 4.1 informamos de las frecuencias absolutas y porcentajes de cada tipo de respuesta obtenida en los dos problemas propuestos en el cuestionario:

Tabla 4.1. Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas

	Problema 1 (Aritmética)			Problema 2 (Geometría)		
Respuesta	Frecuencia	%	% Acumula tivo	Frecuencia	%	% Acumula tivo
1	16	3,7	3,7	34	7,9	7,9
2	48	11,2	14,9	85	19,8	27,7
3	122	28,4	43,4	75	17,5	45,2
4	39	9,1	52,5	53	12,4	57,6
5	204	47,5	100,0	182	42,4	100,0

Puede observarse que el porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente cada uno de los dos problemas *no alcanzó el 50%.* Ese porcentaje se reduce hasta el *32,9* cuando se cuantifican las respuestas conjuntas de los dos problemas, de manera que *sólo 141 de los 429* estudiantes (primer curso de Universidad) a los que se pasó la prueba resolvieron correctamente ambos problemas, pese a la elementaridad de los conceptos implicados, lo que apoya la hipótesis formulada. Los tipos de respuesta identificados podemos considerarlos como los 5 valores de una variable ordinal que expresa una gradación cuantitativa en la capacidad de demostración matemática de los estudiantes, con 1 y 5 como valores mínimo y máximo, respectivamente. Utilizamos dos variables estadísticas, ARITMÉTICA (puntuación en el problema aritmético) y GEOMETRÍA (puntuación en el problema geométrico). Incorporamos también datos de una variable TOTAL (suma de las puntuaciones anteriores). Informamos, en primer lugar, de las principales características de las correspondientes distribuciones de frecuencias (Tabla 4.2 y Figuras

4.1 y 4.2) para analizar nuestra segunda hipótesis relativa al efecto del contenido aritmético o geométrico de las tareas.

Tabla 4.2. Estadísticos de las variables ARITMÉTICA, GEOMETRÍA, TOTAL.

Estadístico	Geometría	Aritmética	Total
Nº de casos	429	429	429
Media	3.62	3.86	7.47
Mediana	4.0	4.0	8.0
Varianza	1.96154	1.52579	5.69366
Coef. Asimetría	-0.425429	-0.559936	-0.491928

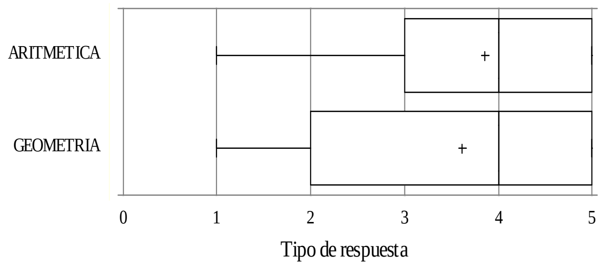


Figura 4.1. Gráfico de cajas de las puntuaciones en los problemas

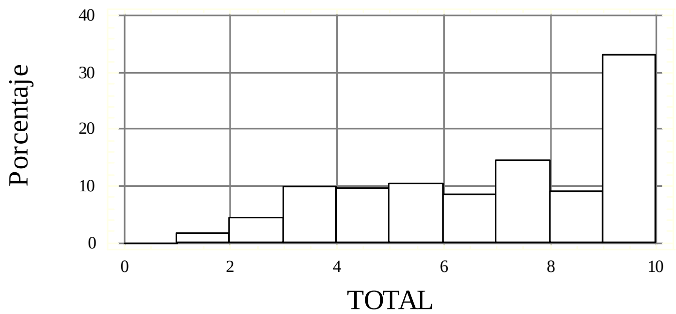


Figura 4.2. Histograma de la puntuación total.

Las medias obtenidas en cada una de estas puntuaciones son: Media en ARITMÉTICA: 3.86; Media en GEOMETRÍA: 3.62. De esto se deduce que el problema de geometría ha sido algo más difícil, ya que la diferencia de medias es 0.24. Al realizar un contraste T de diferencias de medias obtenemos un valor significativo para esta diferencia, debido al alto tamaño de la muestra, aunque la diferencia no es relevante desde el punto de vista práctico, ya que el intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias es (0.13- 0.34). Debemos concluir, por tanto, que se confirma nuestra hipótesis O4.1 de no influencia del contenido matemático de las tareas sobre los esquemas personales de demostración.

Las dos distribuciones son asimétricas, con asimetría negativa, estando más concentradas por encima de la mediana ya que el 50% de los alumnos en cada problema alcanza el valor 4 ó 5, como puede apreciarse con facilidad en los gráficos de caja, en los que se representan las medianas (barras centrales verticales), que coincide en ambos problemas (valor = 4).

Por el contrario las distribuciones se diferencian más en los valores por debajo de la mediana. Mientras que en el problema de aritmética el primer cuartil corresponde al valor 3, en el de geometría corresponde al valor 2. Hay una mayor dispersión entre los alumnos por debajo de la mediana en el problema de geometría, que ha resultado más difícil para estos alumnos.

Esta misma consecuencia se saca al comparar los recorridos intercuartílicos de ambas distribuciones. Mientras que los recorridos de las mismas son iguales (4) el recorrido intercuartílico en el problema de geometría es 3 y en el de aritmética 2.

La característica más destacada de estas distribuciones de frecuencias es, así, el carácter más asimétrico de la puntuación en geometría respecto de la aritmética. El 14.9% de los estudiantes tienen una puntuación 2 o menor en aritmética, mientras que en geometría este porcentaje es del 27.7%. No obstante, el porcentaje de estudiantes que resuelven correctamente cada problema es similar.

4.2.6.Asociación entre variables

El análisis de las puntuaciones en las dos variables estadísticas, ARITMÉTICA y GEOMETRÍA, nos llevó a la conclusión de que no se observaban diferencias relevantes desde el punto de vista práctico respecto a la influencia del contenido matemático de las tareas sobre los esquemas de demostración. Con objeto de reforzar esta conclusión analizaremos en lo que sigue la posible asociación o falta de asociación entre estas dos puntuaciones. Una asociación entre ambas significaría que el nivel de demostración matemática del alumno es alto o bajo, independientemente del contenido matemático de los problemas, mientras que una falta de asociación indicaría una influencia de dicho contenido en los esquemas de demostración.

En consecuencia, consideramos de interés estudiar con más profundidad la relación de asociación entre las dos variables consideradas, "puntuación en el problema aritmético" (ARITMETICA), y "puntuación en el problema geométrico" (GEOMETRIA), esto es, determinar en qué medida un estudiante que resuelve bien el problema de aritmética también resuelve el problema de geometría. Para ello hemos preparado una tabla cruzada de la variable bidimensional (ARITMETICA, GEOMETRIA) (Tabla 4.3)

Tabla 4.3. Frecuencias de la variable bidimensional (ARITMETICA, GEOMETRIA)

Puntuación en el Prob.aritmético		Puntuación en el problema de geometría					
		1	2	3	4	5	Total
	1	7 20.7	9 10.6	0 0.0	0 0.0	0 0.0	16 3.7
	2	9 26.5	26 30.6	10 13.3	2 3.8	1 0.6	48 11.2
	3	16 47.1	30 35.3	33 44.0	18 33.9	25 13.7	122 28.4
	4	1 2.9	8 9.4	5 6.7	10 18.8	15 8.2	39 9.1
	5	1 2.9	12 14.1	27 36.0	23 43.4	141 77.5	204 47.5
Total		34 7.9	85 19.8	75 17.5	53 12.4	182 42.4	429 100.0

En la tabla 4.3 se indican la frecuencia absoluta de cada celda y la relativa por columnas, o sea la distribución de frecuencias relativas de la puntuación en aritmética condicionada por la puntuación en geometría. Se puede observar el crecimiento de una puntuación en función de la otra, así como la marcada dependencia de las distribuciones condicionadas de filas respecto a columnas. Las frecuencias se concentran en general en la diagonal y filas adyacentes, hecho que se cuantifica con el coeficiente Gamma de Goodman y Kruskal de asociación para variables ordinales (0.71), que es relativamente alto. Esta es una medida de asociación apropiada para tablas de contingencias de dos o más filas y columnas, cuando la variable subyacente es ordinal. Mide en una escala (-1, 1) el grado de acuerdo o desacuerdo entre dos ordenaciones diferentes de los mismos objetos. En nuestro caso mide el grado de acuerdo entre los niveles de demostración matemática asignados a cada alumno en los dos problemas diferentes, que ha sido por tanto del 71 %.

En el eje de abscisas observamos la frecuencia relativa marginal de niveles en el problema geométrico, en el cual el 42.4% de alumnos alcanza el nivel 5. De ellos, el 77.5% también tiene nivel 5 en el problema aritmético, estando el resto repartidos prácticamente en el nivel 3 ó 4. Asimismo la mayoría de alumnos con nivel 4 en geométrico se halla comprendido en los niveles 3 a 5 aritmético. Los alumnos con niveles 1 y 2 (geométrico) tienen en su mayor parte niveles 1 a 3 aritmético. El nivel menos discriminativo es el 3 donde los alumnos se encuentran más repartidos.

La relación entre las dos variables, así como el peso relativo del nivel de demostración matemática en cada uno de los problemas en el total de alumnos se ve con mayor claridad en el gráfico de mosaico de la figura 4.3.

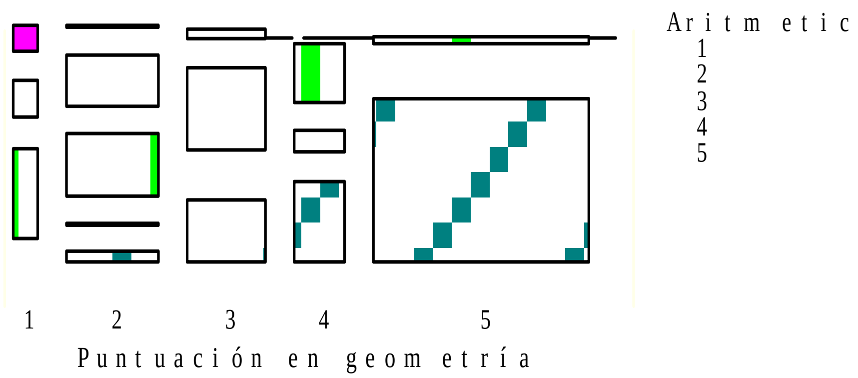


Figura 4.3. Gráfico de mosaico de la variable bidimensional (PARITME, PGEOME)

En las condiciones de la prueba podemos concluir nuevamente que el contenido matemático (aritmético /geométrico) de los problemas tuvo escasa influencia en la capacidad de demostración matemática (algo mayor entre los alumnos con menor capacidad), porque los esquemas personales de demostración de los estudiantes mantenían coherencia, independientemente del contenido matemático sobre el que se manifestaban (aunque el problema geométrico resultó ligeramente más sencillo).

Es importante precisar que el contenido matemático en el que se desenvolvieron estas demostraciones es muy elemental, no necesitándose conocimientos "especiales" para hacer las demostraciones. Cuando el contenido matemático es trivial, como en este caso, no parece influir significativamente en los esquemas personales de demostración. Hay un valor predictivo de una puntuación en función de la otra, entre el problema aritmético y el geométrico, lo que permite considerar la idea de un nivel de demostración subyacente común, al menos para esta clase de problemas elementales. Subsiste la cuestión de qué ocurriría si el contexto fuese más complejo.

4.3. CONSISTENCIA DE LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN

Para profundizar el estudio de los esquemas personales de demostración de estudiantes universitarios de nuestro entorno sociocultural, decidimos volver a aplicar a comienzos del curso 1997/98 el mismo cuestionario del curso 1994/95, con un componente complementario, desde el cual pretendíamos analizar la consistencia de dichos esquemas personales de demostración y estudiar nuestra hipótesis O4.2 (efecto de informar previamente a los estudiantes de las características deductivas exigidas a las demostraciones matemáticas).

4.3.1. Muestra

Decidimos volver a elegir una muestra de estudiantes universitarios, a las pocas semanas de su ingreso en nuestra Universidad (Córdoba). La prueba se pasó a 193 alumnos de primer curso de las Facultades de Ciencias (especialidades de Químicas y Biológicas) y Ciencias de la Educación. Se realizó ajustada a las posibilidades materiales y de horario de los centros y fue efectuada por los estudiantes de forma voluntaria.

4.3.2. Cuestionario

A los 193 alumnos se les plantearon los dos mismos problemas del cuestionario del curso 1994-95, con un formato completamente idéntico. Para estudiar el posible efecto del conocimiento previo, por parte de los alumnos, del significado que para el investigador, representante de la institución matemática, tenía el término "*demostración*", a 99 estudiantes, elegidos al azar, se les añadió, además, una advertencia sobre el significado de dicho término. La advertencia se expresó mediante la siguiente nota complementaria.

Los dos problemas de la prueba son de demostración. Demostrar en matemáticas es verificar que un resultado se cumple siempre, no sólo en unos cuantos casos concretos (aunque fueren muchos). Por eso, no se considerarán correctas las respuestas que se limiten a comprobar la veracidad del enunciado correspondiente en unos cuantos casos particulares.

Para hacer una demostración general, válida para todos los casos posibles, habrá que usar formulaciones genéricas, empleando símbolos abstractos, letras. De esta forma se podrán hacer afirmaciones generales, *aplicables a todos los casos concretos. Así, por ejemplo, la fórmula general*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

sirve para expresar infinitas expresiones numéricas concretas, como las siguientes:

$$(7+5)(7-5) = 7^2 - 5^2$$

$$(8+3)(8-3) = 8^2 - 3^2$$

$$(9+6)(9-6) = 9^2 - 6^2\text{''}$$

Esa advertencia iba dirigida a contrarrestar la práctica existente en amplios sectores de estudiantes, incluso de niveles universitarios, de reducir la demostración matemática a un proceso de comprobación empírico-inductiva en un cierto número de casos particulares.

4.3.3. Resultados cuantitativos

Para comparar con los resultados obtenidos en la primera muestra, en la Tabla 4.4 informamos de las frecuencias absolutas y porcentajes de cada tipo de respuesta obtenida en los dos problemas propuestos en el cuestionario.

Tabla 4.4. Frecuencias y porcentajes de los tipos de respuestas

	Problema1 (Aritmética)			Problema 2 (Geometría)		
Respuesta	Frecuencia	%	% Acumulativo	Frecuencia	%	% Acumulativo
1	3	1,6	1,6	4	2,0	2,0
2	29	15,0	16,6	51	26,4	28,5
3	82	42,5	59,1	57	29,5	58,0
4	10	5,2	64,3	21	10,9	68,9
5	69	35,8	100,0	60	31,1	100,0

Puede observarse que el porcentaje de estudiantes que resuelven correctamente cada uno de los dos problemas *no alcanzó el 40%.* Del total de 193 estudiantes encuestados, 44 resolvieron correctamente los dos problemas, es decir, sólo un *22,8%* del total de estudiantes. Estos resultados son aún más deficientes que los obtenidos en el cuestionario del curso 1994/95.

Dado que en esta prueba nos interesa particularmente estudiar el posible efecto de la variable "ayuda" (haber o no informado a los estudiantes del significado de la demostración matemática), tanto en cada uno de los problemas como en la prueba en su conjunto, vamos a considerar que las respuestas dadas a los problemas son los valores de tres variables estadísticas cuantitativas, ARITMETICA (puntuación en el problema aritmético), GEOMETRIA (puntuación en el problema geométrico) y TOTAL (suma de las puntuaciones anteriores). Informamos, en primer lugar, de las principales características de las correspondientes distribuciones de frecuencias, a fin de comprobar si se cumplen las condiciones de aplicabilidad de los correspondientes contrastes (Tabla 4.5 y Figuras 4.4, 4.5).

Tabla 4.5. Estadísticos de las variables ARITMETICA, GEOMETRIA, TOTAL

Estadístico	Geometría	Aritmética	Total
Nº de casos	193	193	193
Media	3.42487	3.58549	7.01036
Mediana	3.0	3.0	6.0
Varianza	1.52688	1.35854	4.34364
Coef. Asimetría	0.0823773	0.0402334	0.26514

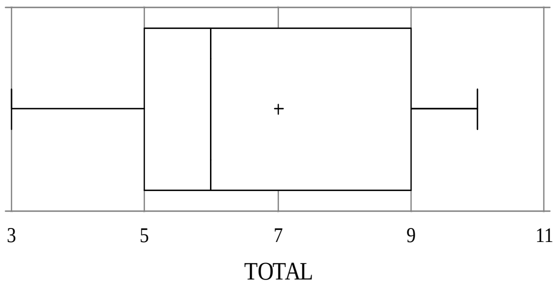


Figura 4.4. Gráfico de la caja de la puntuación total

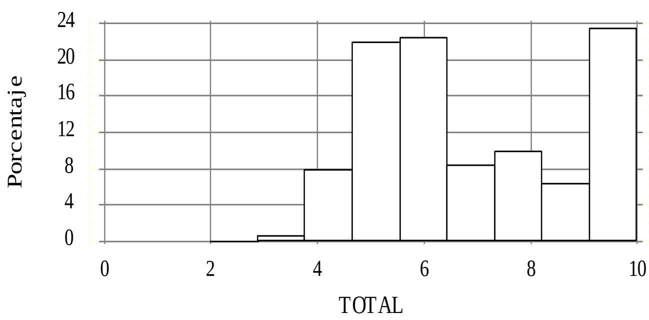


Figura 4.5. Histograma de la puntuación total

Para estudiar la posible influencia de la variable binaria “ayuda” (haber recibido o no la advertencia acerca del significado de la demostración) sobre las variables puntuación en el problema geométrico, aritmético y en la suma de dichas variables, esto es, en la puntuación total en la prueba hemos realizado los correspondientes análisis de la varianza (Tabla 4.6).

Tabla 4.6. Análisis de la varianza según el factor "ayuda" en las puntuaciones parciales y totales.

Fuente	Suma de Cuadrados	G.L.	Media de Cuadrados	F	P
	Puntuación en geometría				
Entre grupos	0.178997	1	0.178997	0.12	0.7330
Intragrupos	292.982	191	1.53394		
Total	293.161	192			
	Puntuación en aritmética				
Entre grupos	2.05891	1	2.05891	1.52	0.2192
Intragrupos	258.78	191	1.35487		
Total	260.839	192			
	Puntuación total				
Entre grupos	1.02	1	1.02	0.23	0.63
Intragrupos	832.96	191	4.36		
Total	833.98	192			

Puesto que el valor F no ha sido significativo, deducimos que no hemos encontrado influencia significativa del factor “ayuda” sobre los resultados parciales y total en la prueba.

Respecto a las condiciones de aplicación del análisis de varianza en esta muestra y en la muestra total que analizaremos posteriormente hacemos las siguientes consideraciones:

a) Es claro que las variables analizadas no siguen la distribución normal, puesto que presentan en general asimetría, bien positiva, bien negativa y son variables discretas. Sin embargo, los coeficientes de asimetría son pequeños en todos los casos, por lo que no nos ha parecido necesario realizar una transformación de las variables previo al análisis de varianza. Como se indica, por ejemplo, en Dunn y Clark(1986), el análisis de varianza es un método robusto frente a la hipótesis de normalidad (cuando no se cumple) si los coeficientes de asimetría son moderados. Más aún, el análisis de varianza es robusto en caso de incumplimiento de la hipótesis de no normalidad si el modelo usado (como en nuestro caso) es de efectos fijos; es decir, si se trata de realizar inferencias sobre la media de una población, aunque no sería robusto para el modelo de efectos variables (cuando se trata de realizar contrastes sobre las varianzas de las poblaciones). Por último, los autores citados indican que, para muestras de tamaño moderado o grande, incluso aunque la población de partida fuese claramente no normal, debido a los teoremas de límite, las medias de las muestras se distribuyen en forma aproximadamente normal lo que justifica el uso del análisis de varianza. Puesto que la muestra en nuestro caso es bastante grande, vemos que el incumplimiento de la hipótesis de normalidad no afecta a la validez de las conclusiones.

b) La segunda hipótesis requerida es la homogeneidad de varianzas, que se cumple en nuestro caso, debido a que las varianzas han sido similares en las distintas muestras y variables implicadas. Además el análisis de varianza es también robusto frente al incumplimiento de esta hipótesis si las muestras en cada nivel del factor tienen tamaños similares. En nuestro caso, para las variables puntuación geométrica/ aritmética, puesto que se trata de los mismos alumnos, las muestras tienen el mismo tamaño. Para la comparación con tipo de ayuda los tamaños de muestra son prácticamente iguales. En el único caso en que el tamaño de las muestras es diferente y se incumple la hipótesis de igualdad de varianzas, hemos sustituido el análisis de varianza por el test de Kruskal Wallis que es un método no paramétrico de comparación de varias muestras.

c) Independencia de ensayos. Esta es la hipótesis que más importancia reviste para el análisis de varianza y consiste en asegurar que las observaciones son independientes de los errores de medición. Puesto que, en nuestro caso todos los datos se tomaron por el autor del trabajo, usando el mismo instrumento y los sujetos de la muestra no podían influir en las respuestas de sus compañeros, podemos asegurar el cumplimento de esta hipótesis, y por tanto aplicar con garantías el análisis de varianza.

La figura 4.6. muestra las medias (e intervalos de confianza) de la puntuación total en cada grupo de estudiantes, esto es, alumnos que recibieron información sobre el significado de la demostración (Ayuda = 1; n = 99), y que no recibieron tal información (Ayuda = 0; n = 94).

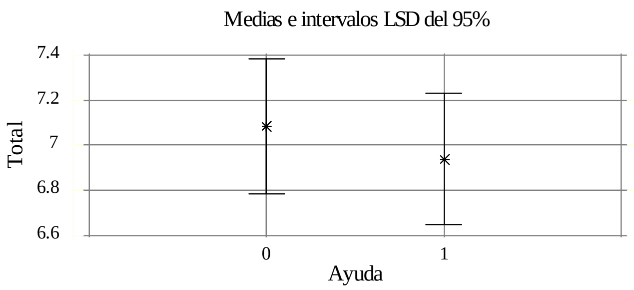


Figura 4.6. Medias e intervalos de confianza LSD del 95% de la puntuación total

Aunque las diferencias en dichas medias no son significativas, como ha mostrado el análisis de la varianza realizado, resulta llamativo el hecho de que el grupo que recibió la ayuda respondió de manera más deficiente. Este hecho se corrobora mejor observando los gráficos de cajas (Figura 4.7.), en los que se aprecia que los alumnos con mejor capacidad parecen que han sido confundidos con la aclaración sobre el significado de la demostración (la mediana es 6 para el grupo con ayuda y 7 sin ayuda).

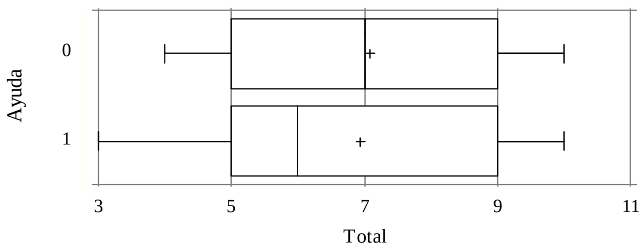


Figura 4.7. Gráficos de cajas de la puntuación total

4.4. ESTUDIOS COMPLEMENTARIOS

4.4.1. Estudio estadístico de la puntuación total en las pruebas

Estudiamos seguidamente si es posible o no considerar conjuntamente las dos muestras de sujetos en los cursos 1994 y 1997 (n=429, y n=193), lo que nos permitirá incrementar el tamaño muestral y mejorar las estimaciones de los correspondientes parámetros poblacionales. Para ello, vamos a realizar, en primer lugar, un análisis de la varianza múltiple de la "puntuación total" según dos factores: "ayuda" (con dos niveles, ayuda = sí, ayuda = no; y "prueba", prueba = 1 (año 1994), prueba = 2 (año 1997).

La tabla 4.7 muestra los resultados de este análisis de la varianza, pudiéndose observar que no existen diferencias significativas al nivel de significación del 5%. Podemos por tanto admitir la homogeneidad de las dos muestras así como de los alumnos que recibieron o no ayuda, a efectos de realizar una estimación conjunta de los parámetros poblacionales de la puntuación total en la prueba.

Tabla 4.7. Análisis de la varianza de la puntuación TOTAL

Fuente	Suma de Cuadrados	G.L.	Media de Cuadrados	F	P
Efectos princ.					
A: AYUDA	1.02376	1	1.02376	0.19	0.6599
B: PRUEBA	11.4737	1	11.4738	2.17	0.1410
Residual	3269.84		5.28246		
Total	3299.09	621			

Esta conclusión también se apoya en los resultados que presentamos en la tabla 4.8, donde se muestra la media de la puntuación total para los distintos factores. Observamos una gran similitud del valor medio en la puntuación total en los diferentes factores. También se muestra el error estándar de cada media, que mide la variabilidad muestral, que es bastante pequeña debido al gran tamaño de las muestras, lo que hace muy precisas las estimaciones que hemos realizado. Por ello mismo, la falta de diferencias significativas en los niveles de los factores apoya aún más nuestra decisión de realizar un análisis conjunto de las dos muestras, ya que los resultados estadísticamente significativos son más probables cuando aumenta el tamaño de las muestras y disminuye el error de muestreo.

Las dos últimas columnas proporcionan intervalos de confianza del 95% de cada una de las medias, que como vemos se solapan, debido a la falta de diferencias entre ellas. La figura 4.8 muestra estos resultados gráficamente pudiéndose observar la mayor amplitud del intervalo de confianza construido en el caso de ayuda=1 (si ayuda) debido al menor tamaño de muestra usado en este caso, y a la mayor variabilidad de la puntuación de los alumnos en este grupo.

Tabla 4.8. Tabla de medias para la puntuación total e intervalos de confianza del 95%

	Frecuencia	Media	Error Típico	Límite Inferior	Limite Superior
Media general	622	7.20			
Sin ayuda	523	7.27	0.1308	7.02	7.53
Con ayuda	99	7.13	0.2654	6.61	7.65
Prueba 1 (1994)	429	7.39	0.1992	7.00	7.78
Prueba 2 (1997)	193	7.01	0.1654	6.68	7.33

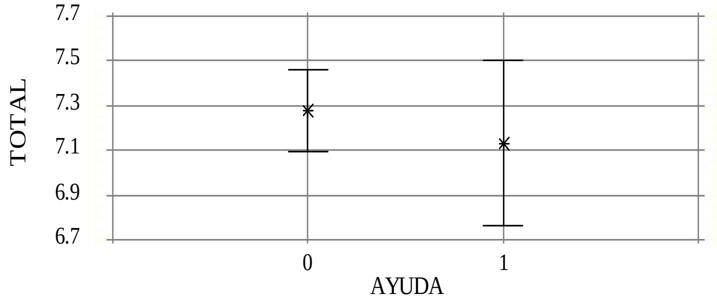


Figura 4.8. Medias e intervalos de confianza de la puntuación total

Las principales características de la distribución de frecuencias de la variable puntuación total, se resumen en la tabla 4.9 y las figuras 4.9, 4.10.

Tabla 4.9. Distribución de frecuencias de la puntuación total

Valor	Frecuencia	Frec Relativa	Frec. Absoluta Acumulada	Frec. Relativa Acumulada
2	7	0,0113	7	0,0113
3	19	0,0305	26	0,0418
4	57	0,0916	83	0,1334
5	83	0,1334	166	0,2669
6	87	0.1399	253	0.4068
7	52	0.0836	305	0.4904
8	81	0.1302	386	0.6206
9	50	0.0804	436	0.7010
10	186	0.2990	622	1.0000

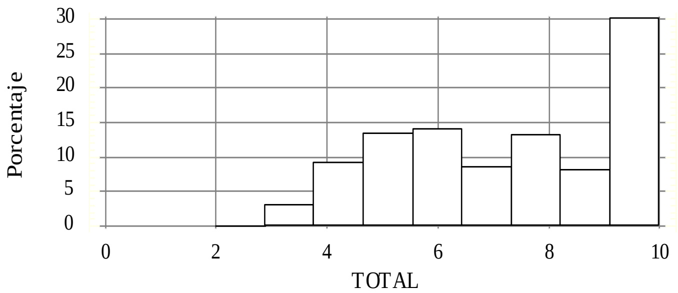


Figura 4.9 Histograma de la puntuación total

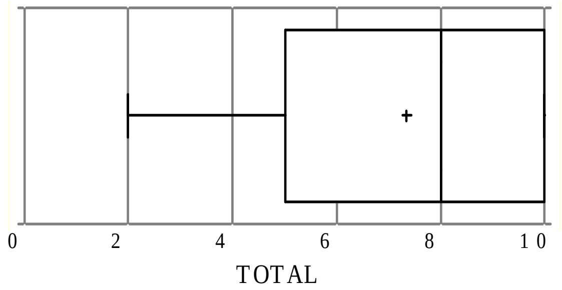


Figura 4.10. Gráfico de la caja de la puntuación total

Al igual que en los casos anteriores la distribución es marcadamente asimétrica, siendo el valor mediano 8. La dispersión es de nuevo mayor entre los alumnos de menos capacidad.

La puntuación media fue 7.32 y el intervalo de confianza del 95% para esta puntuación fue de (7.15- 7.50). El intervalo de confianza del 95% para la varianza de la puntuación fue (2.19-2.44).

El resultado que nos interesa destacar es que sólo el 30% de alumnos participantes en la prueba fueron capaces de resolver correctamente los dos problemas de la prueba, pese a la elementalidad de los mismos.

4.4.2. Variabilidad de la puntuación total según especialidades

Un último estudio sobre los resultados aportados por nuestros cuestionarios ha consistido en analizar las posibles diferencias en el nivel de demostración de los estudiantes según la especialidad cursada.

La prueba fue aplicada a estudiantes que cursaban distintas carreras universitarias. La tabla 4.10 muestra el número de estudiantes de cada especialidad a los que se aplicó la prueba, así como la puntuación media, error típico e intervalos de confianza del 95% (calculados según el procedimiento de la mínima diferencia significativa LSD de Fisher).

Tabla 4.10. Número de estudiantes, media, error típico e intervalos de confianza de la puntuación total según especialidades

ESPECIALIDAD	Nº de estu diantes	Media	Error Típico	Int. Confianza	
				Lim. Infe.	Lím. Super.
Empresariales (1)	187	7.18	0.015 4	6.97	7.40
Politécnica (2)	83	7.85	0.231	7.53	8.17
Agrónomos (3)	101	9.02	0.209	8.74	9.33
Magisterio (4)	106	5.82	0.205	5.53	6.10
Biológicas (5)	69	7.23	0.254	6.87	7.58
Psicopedagogía (7)	22	6.95	0.449	6.33	7.57
Químicas (8)	54	7.02	0.292	6.61	7.42
TOTAL	622	7.33			

En la Figura 4.11 se puede apreciar con más claridad las diferencias entre las puntuaciones medias según especialidades. Hay que destacar el bajo nivel de demostración matemática de la especialidad 4 (Magisterio) y el alto los estudiantes de agronomía (3). A nuestro juicio esto nos parece importante y creemos que debería reforzarse de algún modo el nivel de demostración matemática en los futuros profesores, con situaciones didácticas apropiadas.

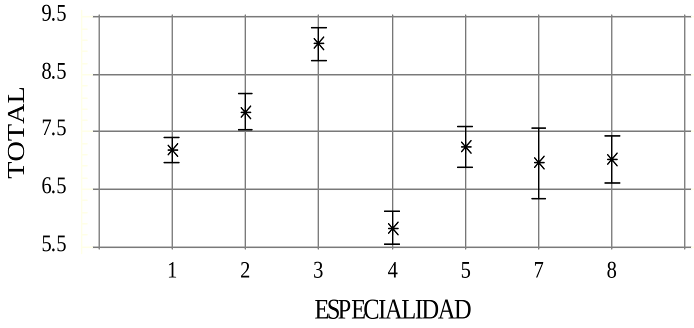


Figura 4.11. Medias e intervalos de confianza de la puntuación total según especialidades

Las diferencias entre las medias de las distintas especialidades son fuertemente significativas como se ve en los resultados del análisis de la varianza (Tabla 4.11)

Tabla 4.11. Tabla del análisis de la varianza de la puntuación total según especialidades

Fuente	Suma de Cuadrados	G.L.	Media de Cuadrados	F	P
Entre grupos	572.159	6	95.3598	21.44	0.0000
Intragrupos	2726.38	613	4.44759		
Total	3298.53	619			

Puesto que el tamaño de muestra era en este caso diferente según especialidades y no se cumplía la hipótesis de igualdad de varianzas, hemos completado el análisis con el test de Kruskal Wallis, que contrasta la igualdad de medianas en varias muestras y que resultó ser asimismo significativo.

Asimismo, en la figura 4.12, que contiene los gráficos de cajas de la puntuación total por especialidades, podemos analizar las fuertes diferencias en las puntuaciones medias como también en otras características de las respectivas distribuciones de frecuencia (mediana, cuartiles, asimetría y valores atípicos).

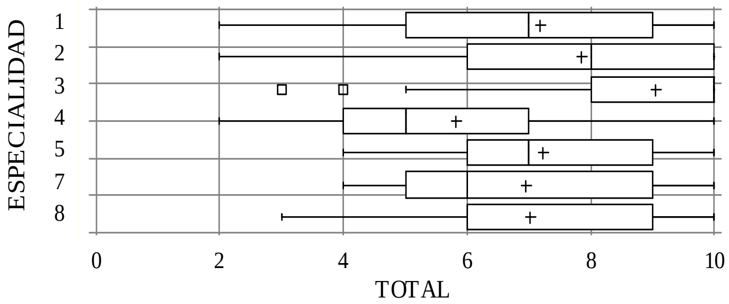


Figura 4.12. Gráficos de cajas de la puntuación total según especialidades

4.6. CONCLUSIONES

Como resultado de estas investigaciones puede concluirse, dentro de los márgenes de categoricidad que permite un estudio de tipo exploratorio como el que venimos desarrollando, que los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba tienen importantes dificultades en la comprensión y desarrollo de demostraciones matemáticas de carácter deductivo, en particular en el campo aritmético y en el geométrico, incluso en demostraciones elementales, existiendo entre ellos una importante variedad de esquemas personales de demostración matemática, que podemos catalogar dentro de cuatro grandes tipos: *argumentación explicativa*, *prueba empírico-inductiva*, *prueba deductiva informal* y *demostración deductiva*.

En esos esquemas personales de demostración no parece influir de manera significativa, en las condiciones de la prueba, la explicación de las características de la demostración matemática, según la institución matemática (representada por el profesor), previa a la realización de los problemas de demostración.

En esas condiciones, tampoco parece influir el contenido matemático de los problemas propuestos.

CAPITULO 5

ANÁLISIS COGNITIVO DE LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los esquemas personales demostración, presentado en el capítulo anterior, realizado mediante la aplicación de un cuestionario escrito a una muestra relativamente importante de estudiantes universitarios, nos ha permitido determinar una variedad de esquemas personales de demostración matemática en dichos estudiantes, que podemos catalogar dentro de cuatro grandes tipos: *argumentación explicativa*, *prueba empírico-inductiva*, *prueba deductiva informal* y *demostración deductiva*.

Con ese cuestionario escrito, y una versión B adaptada, hemos tratado de identificar y estudiar la influencia de diversos factores sobre los esquemas personales de demostración matemática. En particular, hemos pretendido confirmar unas primeras hipótesis, relativas a la posible influencia del contenido aritmético-geométrico de los problemas de demostración y el recuerdo o no de las características intensionales de la demostración matemática.

Como hemos indicado, hemos podido confirmar que, en las condiciones de nuestras pruebas, no existen influencias significativas de los factores estudiados: ni del contenido matemático de las tareas propuestas ni de la explicación por parte del profesor, en el momento de la prueba, de las características exigidas a la demostración matemática.

Esa primera investigación dejó abiertos varios interrogantes. En primer lugar, éramos conscientes de que las circunstancias en las que se aplicó la prueba -primeros días de clase de comienzo de los estudios universitarios, y sin una contextualización matemática previa de las tareas propuestas- podrían introducir dudas sobre la consistencia y estabilidad de las respuestas de los estudiantes, y de que, por tanto, éstas constituyesen indicadores empíricos de un rasgo cognitivo de los sujetos. ¿Cómo resultarían los esquemas de demostración si variasen las circunstancias de aplicación de la prueba, y se aplicase ésta tras un proceso de instrucción en que se enfatizara el significado e importancia de la demostración deductiva?

Asimismo, nos parecía necesario profundizar, con métodos interpretativos, en la caracterización del significado personal para los estudiantes, no sólo sobre el uso del término demostración, sino también sobre la trama de elementos argumentativos implicados en los procesos de validación matemática.

Con la intención de conectar con otros posibles marcos teóricos en orden a ofrecer una posible explicación cognitiva de los esquemas personales de demostración, decidimos analizar éstos desde la perspectiva de las teorías psicológicas de evolución del pensamiento por niveles.

5.2. LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA Y LAS TEORÍAS DE NIVELES

5.2.1. Consideraciones generales

La independencia de los esquemas personales de demostración matemática respecto a diversos factores, como los anteriormente considerados, nos sugirió la hipótesis de que dichos esquemas, objetos personales resultantes de la experiencia pasada de los sujetos, son consistentes, muestran una persistencia temporal, de forma que se precisa una acción docente prolongada para poder inducir cambios permanentes en los mismos.

La hipótesis puede ampliarse más y llevarnos a interpretar los esquemas personales de demostración como estructuras intelectuales estables durante periodos dilatados de tiempo, en la línea de las teorías psicológicas que analizan la evolución del pensamiento por niveles, como las teorías de Piaget (1964) o de Van Hiele (1986).

En ese sentido, cabría encontrar una posible relación entre los esquemas personales de demostración y los estadios de pensamiento descritos por dichas teorías: por ejemplo, entre el esquema de prueba empírico-inductivo y el estadio de pensamiento lógico-concreto piagetiano o el nivel de pensamiento analítico de la teoría de Van Hiele; o entre los esquemas de prueba deductiva informal y demostración deductiva, de nuestro estudio, con los dos subestadios del estadio de pensamiento formal de Piaget, así como con los niveles de pensamiento abstracto y deductivo de van Hiele.

En cualquier caso, una posible relación entre los esquemas personales de demostración y los estadios o niveles de pensamiento de las teorías de Piaget y de van Hiele no nos llevaría a plantear, necesariamente, que los esquemas de demostración, como en estas teorías, sean niveles de pensamiento discontinuos y discretos. La comparación simplemente nos lleva de momento a interrogarnos si lo que hemos llamado "esquemas personales de demostración" comportan la existencia de una estructura intelectual, que convendría entonces analizar.

Teniendo en cuenta su carácter de teoría específicamente aplicada al ámbito matemático (a diferencia de la teoría de Piaget, que estudia formas generales de pensamiento), consideraremos seguidamente con más detalle la teoría de niveles de Van Hiele.

5.2.2. La teoría de niveles de Van Hiele

De acuerdo con la teoría de Pierre y Dina Van Hiele, los estudiantes progresan en el campo geométrico recorriendo niveles de pensamiento (Van Hiele, 1986), desde un primer nivel visual, seguido de niveles crecientemente sofisticados de análisis, deducción informal y deducción formal.

Los niveles son, según la teoría, secuenciales y jerárquicos, de manera que, para que los estudiantes operen adecuadamente en uno de los niveles, deben haber dominado amplias partes de los niveles más inferiores (Hoffer, 1981). El progreso de un nivel al siguiente, según los Van Hiele, es más dependiente de la instrucción que de la edad o maduración biológica. El profesor debería adecuar sus enseñanzas a los niveles reales de sus alumnos, pues en otro caso el aprendizaje no será significativo, será meramente memorístico, rutinario.

Los conceptos implícitamente comprendidos en un nivel llegan a ser explícitamente comprendidos en el siguiente. Por ejemplo, las figuras son reconocidas visualmente en el primer nivel por sus propiedades implícitas, propiedades que se hacen explícitas en el segundo nivel. Cada nivel tiene su propio lenguaje. Por ejemplo, en el segundo nivel, si un cuadrilátero es un cuadrado, no es un rectángulo; en el tercero, sí.

La investigación empírica parece confirmar que los niveles van Hiele son útiles para describir el desarrollo de los conceptos geométricos de los estudiantes (Wirzup, 1976; Burger-Shanghnessy, 1982; Usiskin, 1982; Hoffer, 1983; Fuys y col., 1988). Es interesante destacar que un porcentaje significativo de estudiantes, pese a haber estudiado geometría formalmente, no consiguen alcanzar el nivel 3 de Van Hiele al finalizar la educación secundaria. Casi un 40%, según distintos autores (Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986).

Una posible descripción pormenorizada de los niveles podría ser la siguiente

NIVEL 1. VISUAL: En este primer nivel, los estudiantes operan sobre las formas y configuraciones geométricas de acuerdo con su apariencia. Reconocen y representan mentalmente las figuras como patrones visuales. Los estudiantes dicen, por ejemplo, que "es un rectángulo, porque parece como una puerta". Los estudiantes no son conscientes de las propiedades de las figuras. El razonamiento es dominado por la percepción: "no hay por qué, uno simplemente lo dice" (Van Hiele, 1986, p.83). Durante la transición al nivel descriptivo, clases de figuras comienzan a ser asociadas con sus propiedades características.

NIVEL 2. DESCRIPTIVO/ANALÍTICO: Los estudiantes pueden reconocer y caracterizar las formas por sus propiedades. Un rombo, por ejemplo, puede ser considerado como un cuadrilátero con sus cuatro lados iguales. Las figuras pasan a ser, así, colecciones de propiedades más que patrones visuales. La imagen empieza a quedar de fondo. Los estudiantes descubren que algunas combinaciones de propiedades señalan una clase de figuras y otras no. Surgen, así, las semillas de las implicaciones geométricas. Pero los estudiantes analizan las propiedades de un modo informal, mediante procesos empíricos, mediante la observación y la experimentación. Los estudiantes no ven, sin embargo, relaciones entre clases de figuras. En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son clases de figuras, pensadas en términos de conjuntos de propiedades que los estudiantes asocian a esas figuras.

NIVEL 3. ABSTRACTO/RELACIONAL (DEDUCCIÓN INFORMAL): En este nivel, los estudiantes pueden formar definiciones abstractas, distinguiendo entre la necesidad y la suficiencia del conjunto de condiciones para un concepto. Pueden clasificar figuras jerárquicamente y dar argumentos informales para justificar esas clasificaciones. Un cuadrado, por ejemplo, puede ser identificado como un rombo, porque puede ser pensado como "un rombo con algunas propiedades extras". Pueden descubrir propiedades de clases de figuras por deducción informal. Por ejemplo, deducir que la suma de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera es 360°, porque cualquier cuadrilátero puede ser descompuesto en dos triángulos, en cada uno de los cuales los ángulos suman 180º. Pero en este nivel no comprenden el significado de la deducción o el papel de los axiomas.

Como las figuras pueden aparecer como conjuntos de propiedades de diversas maneras, las definiciones pueden ser vistas no como descripciones, sino como un método de organización lógica.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son propiedades de clases de figuras.

NIVEL 4. DEDUCCIÓN FORMAL: El alumno razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas. En este nivel el alumno es capaz de construir, no ya memorizar, demostraciones. Se puede estudiar la posibilidad de que una demostración se desarrolle siguiendo más de una secuencia de proposiciones. Se entiende la interacción entre condición necesaria y suficiente.

NIVEL 5. RIGOR/METAMATEMATICO: El alumno puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. (Es un nivel elevado, prácticamente inaccesible para los estudiantes que estamos estudiando, de acuerdo con los propios autores de la teoría y no lo consideraremos más aquí).

Se plantean algunas cuestiones criticas con la teoría.

¿Puede ser caracterizado el pensamiento de los estudiantes como de un solo nivel? ¿Se producen transiciones entre niveles?

¿Representan los niveles estadios discretos o grandes reorganizaciones del conocimiento? Esto es, ¿pueden ser los niveles propiamente descrito como etapas? ¿Satisfacen criterios tales como *constancia*, *incorporación* (cada etapa queda incorporada en la siguiente), *invariancia de orden*, e *integración* (las propiedades estructurales que la definen forman un conjunto integrado)?.

¿Se pueden operativizar los niveles? (Puesto que los niveles dependen claramente de la instrucción, se puede dudar de la posibilidad de elaborar un test de validez generalizada).

Exactamente, ¿qué ideas construyen los estudiantes y qué operaciones mentales deben ser tenidas en cuenta en el aprendizaje geométrico?

Sobre el carácter discreto y jerárquico de los niveles, los investigadores soviéticos parecen indicar una respuesta positiva (Hoffer, 1983; Wirzup, 1976), pero diferentes investigadores han comunicado que los estudiantes en transición son difíciles de clasificar de una manera precisa (Usiskin, 1982; Fuys y col. 1988), especialmente para los niveles 2 y 3 (Burger y Shaughnessy, 1986).

Fuys y col. (1988), estudiando las capacidades de los estudiantes para progresar dentro y entre niveles, como resultado de la instrucción, determinaron a la vez un nivel de entrada y un nivel potencial (el nivel demostrado después de la instrucción). Mientras que unos estudiantes estaban en una meseta, otros estaban inestablemente sobre los niveles, oscilando entre ellos. Similares resultados fueron observados en un experimento de enseñanza sobre poliedros (Lunkenbein, 1983).

Diferentes autores (Mayberry, 1983; Burger-Saughnessy, 1986; Denis, 1987; Gutierrez, Jaime y Fortuny, 1991) indican, además, que los estudiantes exhiben diferentes niveles en diferentes tareas. Algunos incluso oscilan en una misma tarea.

Gutiérrez, Jaime y Fortuny, (1991) intentan tener en cuenta la capacidad de los estudiantes para usar cada nivel Van Hiele, más bien que asignarles un único nivel. Dejando aparte el nivel 5, ellos usan un vector de cuatro componentes para representar el grado de adquisición de los niveles Van Hiele. Por ejemplo, (96,67; 82,50; 50,00; 3,75), donde los números representan porcentajes de acierto en cada nivel). Encuentran que hay estudiantes que comienzan la adquisición del nivel n+1 antes que el nivel n haya sido completamente adquirido y relacionan estos resultados con los procesos de enseñanza.

Fuys y col. (1988) coinciden en que cuando estudian un concepto nuevo, los estudiantes frecuentemente caen al primer nivel de pensamiento. Mantienen, sin embargo, que rápidamente son capaces de elevarse al nivel de pensamiento más alto que alcanzan en conceptos previos. Estos investigadores defienden que esos resultados apoyan la opinión de que un nivel potencial de pensamiento permanece estable entre conceptos.

Usando el criterios de Fuys y col. (1988), se podrían considerar los niveles van Hiele como niveles potenciales de pensamiento, -aproximándonos en cierta manera al pensamiento de Vigotsky (1986)-, siendo estos niveles potenciales los que presentarían la constancia demandada para su confirmación como etapas de pensamiento.

Esa línea de pensamiento podría sernos útil para describir nuestras investigaciones. Los esquemas personales de demostración matemática que hemos introducido, circunscritos de momento al contexto de nuestras pruebas, que pretenden caracterizar las capacidades de los estudiantes para efectuar demostraciones matemáticas podrían ser interpretado en esa dirección. Serían estructuras potenciales de demostración, que se manifestarían en una situación en la que no influyera el contenido matemático de la tarea, bien por su elementalidad (como es el caso de nuestra prueba experimental), bien porque el sujeto estuviera familiarizado con los elementos conceptuales implicados.

En la sección siguiente se describe una investigación experimental desarrollada para estudiar la posible estabilidad temporal de los esquemas personales de demostración, sus vinculaciones con otras formas consolidadas de pensamiento matemático de los estudiantes y su coherencia con las concepciones personales de los alumnos acerca de la demostración.

5.3. INTERPRETACIÓN COGNITIVA DE LOS ESQUEMAS PERSONALES DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA. UN ESTUDIO DE CASOS.

5.3.1. Metodología

Para incidir lo más posible en una interpretación cognitiva de los esquemas personales de demostración de los estudiantes, nos pareció necesario operar con métodos interpretativos. Frente a la validez y fiabilidad del estudio estadístico, considerábamos preferible, para estos fines, el marco interpretativo. Razón por la que decidimos efectuar un estudio de casos.

<u>Población y muestra:</u>

Por razones de disponibilidad centramos esta parte de la investigación en alumnos del último curso de la carrera de Psicopedagogía de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba, en el cual nuestro Departamento imparte una asignatura troncal titulada "Intervención Didáctica en el Area de Matemáticas". Es una asignatura enfocada a formar futuros orientadores psicopedagógicos en el ámbito de la didáctica de la matemática, de forma que esos orientadores puedan dar pautas psicopedagógicas apropiadas a profesores de matemáticas, preferentemente de Educación Secundaria. Un porcentaje importante de los alumnos de la asignatura eran profesionales de la orientación en ejercicio. El resto, que constituían mayoría, eran estudiantes que, para ingresar en la especialidad, habían tenido que sufrir un fuerte proceso de selección, realizado sobre la base del expediente académico en sus estudios previos de profesores de Educación Primaria. Era el segundo año que impartíamos esta asignatura, que pretende cubrir los siguientes objetivos y contenidos:

OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA:

Formación del alumno en los siguientes aspectos:

1. Asesoramiento psicopedagógico y curricular en el área de matemáticas, para la Educación Secundaria Obligatoria, al servicio de centros, departamentos y colectivos de profesores, y profesores individuales.

2. Prevención, diagnóstico y asesoramiento en el tratamiento de situaciones problemáticas, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educacion Secundaria Obligatoria.

CONTENIDOS:

1. ASPECTOS GENERALES DEL CURRICULUM MATEMÁTICO:

Papel de las matemáticas en el sistema educativo.

Necesidades matemáticas de la vida adulta.

La matemática como elemento cultural en una sociedad tecnológica.

Propuestas curriculares oficiales para la Educación Secundaria.

2. CONTENIDOS BÁSICOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. DESARROLLO PRÁCTICO.

El sentido numérico y la numeración.

Geometría y a sentido espacial.

Magnitudes y sentido de la medida.

El álgebra como cálculo generalizado.

Funciones y sistemas de representación.

Probabilidad e inferencia estadística.

3. EPISTEMOLOGÍA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La construcción del conocimiento matemático.

La abstracción en matemáticas. Procesos de generalización y simbolización.

Estructuras conceptuales. Esquemas conceptuales.

Comprensión y razonamiento en matemáticas. La demostración matemática.

Estadios de evolución del pensamiento matemático.

Entre los alumnos matriculados el curso 1996-97 seleccionamos a siete que, como parte del trabajo de la asignatura, aceptaron desarrollar como voluntarios las pruebas. El trabajo se desarrolló fuera del horario lectivo.

Como es propio en estudios cualitativos, no pretendemos generalizar las conclusiones a una población mayor; en todo caso lo que procede es describir con detalle los sujetos y circunstancias en las que se han obtenido los datos, con objeto de que el lector disponga de elementos de juicio sobre la posible generalización a otro sujetos y circunstancias.

Instrumentos:

Incluía la aplicación del cuestionario referido en el capítulo anterior, compuesto por el problema aritmético y el geométrico, en el que se enfatizaba que explicaran con detalle las respuestas (Versión C, Anexo 1). Se aplicó el cuestionario dos veces, al comienzo (14/11/96) y al final (19/3/97) de un cuatrimestre, durante el cual recibieron enseñanzas sobre didáctica de la matemática, incluida una reflexión teórico/práctica sobre el razonamiento y la demostración matemáticos. El cuestionario aplicado al final del cuatrimestre incluía una parte en la cual los estudiantes explicaban la significación para ellos de nociones tales como "demostrar", "razonar", "probar", "explicar" o "justificar" (Cuestionario sobre significado de términos argumentativos, Anexo 2).

También al final del segundo cuatrimestre (7/4/1997) el profesor sostuvo con cada estudiante participante en el estudio una entrevista semiestructurada (cuyo guión se incluye en el anexo 2), en la que cada estudiante realizaba diversos ejercicios de geometría con el programa informático CABRI y justificaba los distintos pasos que iba dando. Esta actividad se propuso como medio para contextualizar la reflexión que se les pide sobre la noción de *concepto* y *demostración*.

Variables:

Tendremos en cuenta los *esquemas de demostración, el conocimiento e interpretación que hacen de los paralelogramos*, *y la descripción de los términos validativos.*

Como variable independiente hemos tenido en cuenta el *momento de aplicación* del cuestionario (Versión C), antes o después del curso.

A continuación exponemos, de forma resumida, las respuestas individuales y la interpretación que hacemos de las mismas según los objetivos pretendidos Los protocolos completos son presentados en los Anexos 2.1. a 2.7 de la tesis.

5.3.2. Caso 1: Alumno A

A expresa el enunciado del problema de aritmética en forma simbólica y desarrolla una comprobación empírica con ejemplos particulares en la primera prueba (14/11/96):

Creo que lo que está abajo escrito es lo que se me pide que yo demuestre.

$(x+1)^2 - x^2 = (x+(x+1))$

y siendo éste un número impar.

Voy a poner ejemplos para ver si se demuestra.

$(8^2) - (7^2) = 7+8$; $164 - 149 = 15$; $15 = 15$

$(21)^2 - (20)^2 = 20+21$; $1441 - 409 = 41$; $41 = 41$

$(101)^2 - (100)^2 = 100+101$; $10201 - 10000 = 201$; $201 = 201$

La afirmación del enunciado pienso que se demuestra, por lo menos, en los ejemplos que yo he buscado.

pasando en la segunda prueba (19/3/97) a conseguir ampliar la formulación simbólica, aunque de una manera muy deficiente y acompañada todavía de ejemplos concretos de comprobación:

$x^2 - (x+1)^2 = y$ ---> nº impar igual a dichos números enteros.

$x^2 - (x+1)^2 = x + (x+1)$ ---> $y = x = (x+1)$

al ser un número primo igual a la suma del número base.

$(2)^2 -(3)^2 = 2 + 3$; $4 - 9 = 5$; $-5 = 5$

$(9)^2 -(10)^2 = 9 + 10$; $81 - 100 = 19$; $-19 = 19$

$(21)^2 -(22)^2 = 21 + 22$; $441 - 484 = 43$; $-43 = 43$

No sé por qué sale un nº negativo por lo que voy a darle la vuelta al suponer que quizás no haya expresado bien el enunciado en la ecuación y así creo que puede resultar correcto.

$(x+1)^2 - x^2 = x + (x+1)$

Con lo que con letras voy a intentar demostrar el enunciado.

$(x+1)^2 - x^2 = x + (x+1)$

$x^2+1 - x^2 = 2x + x$

$x^2+1 - x^2 - 2x - x = -3x + 1 = 0$

$-3x + 1 = 0$

$-3x = -1$; $x = 1/3$

Si $x = 1/3$ sustituyendo en la fórmula.

$(1/3 + 1)^2 - 1/3^2 = 1/3 + (1/3 - 1)$

$(1/3 + 1)(1/3 + 1) - 1/9 = 1/6 - (1-3)/3$

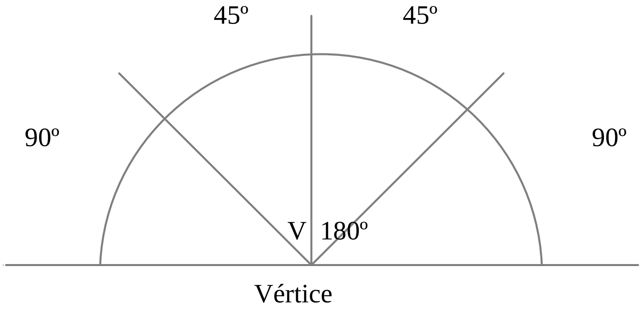
$1/9 + 1/3 + 1/3 + 1 = 1/9 = 1/6 - 2/3$

$1/9 + 1/6 + 1 - 1/9 = 1/6 - 2/3$

$(1+6)/6 = (1-4)/6$

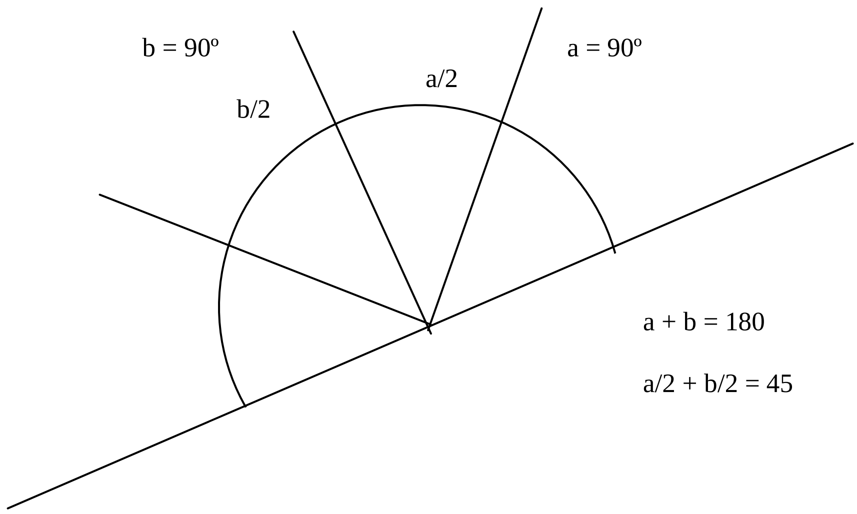
$7/6 = -5/6$

En el problema de geometría, pasa de una mera comprobación empírica con el caso trivial de ángulos adyacentes de 90º en la primera sesión (14/11/96),

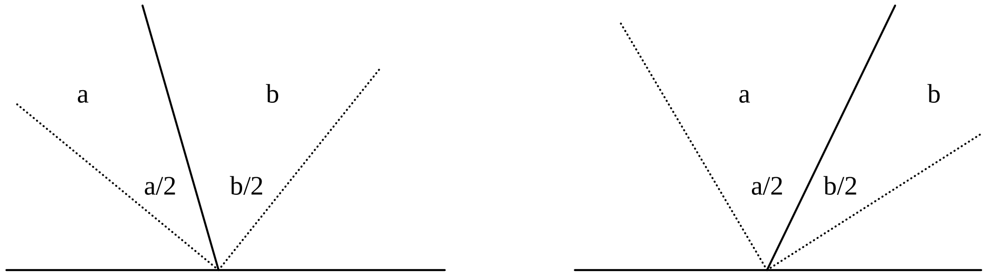


Bien, como vemos en la figura tenemos 2 ángulos de 90º que sumados dan 180º. Sacando o calculando la bisectriz de cada uno que mide la mitad del ángulo que son 45º, esto lo haremos con cada ángulo. Si sumamos los grados que hay entre las dos bisectrices 45 + 45 = 90º.

a una diversificación, en la segunda (19/3/97), de los ejemplos concretos de comprobación, acompañados de una formulación simbólica todavía bastante deficiente, pero apuntando a la respuesta correcta:



Podemos encontrar otros casos:



a + b = 180º a + b = 180º

Como vemos tenemos o podemos encontrar muchos y diversos casos por lo que tendríamos que buscar una forma de generalizar.

Podemos formar para ello quizás un sistema de ecuaciones.

a/2 + b/2 = c

a + b = 180

Sustituyendo en la segunda ecuación

a/2 + b = 180 ; 2 (a/2 + b = 180)

a + 2b = 180

Como vemos, yo no lo puedo resolver por el sencillo motivo de que a y b pueden tomar muchos y diversos valores, por lo tanto creo que es muy difícil demostrar para mí lo que pide el enunciado.

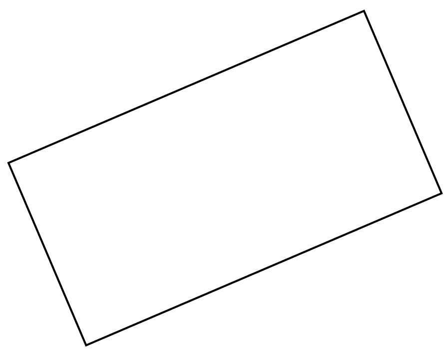
En el cuestionario escrito (19/3/97) **A** plantea la demostración como hacer ver a otro que algo es cierto, comprobable y que este lo pueda comprobar por el mismo con una ayuda adecuada:

Una demostración para mí es hacer ver a otro que algo es cierto, comprobable y que este lo pueda comprobar por el mismo con una ayuda adecuada. Hay que ver que la demostración en matemáticas no es como en otras ciencias, pues partimos de unos axiomas. Las ciencias como la biología, química, etc., pueden tomar los datos de la realidad. La demostración de un experimento se hará de diferente forma pues se tendrán que dar unas condiciones características para poder realizarlo. En matemáticas ocurre de otra forma demostramos razonando. Hay por tanto, muchas formas de razonar.

El razonamiento puede ser muy distinto dependiendo si se hace en matemática, historia, lengua, etc. Todo es razonamiento. En cada materia se pueden probar cosas, justificarlas o explicarlas de una *determinada manera. La matemática sólo es una rama del conocimiento que si bien es muy importante está condicionada por una historia, etc.*

El simbolismo en matemáticas es muy importante porque nos permite trascender de lo concreto a lo abstracto. Mediante letras o expresiones podemos actuar libremente y encontrar explicaciones a cosas que nos resultaría muy difícil de hacer. El desarrollo de la matemática su expresión se ha enriquecido por conceptos como variable, etc.

En la entrevista personal (7/4/1997), parece tener dificultades para razonar sin dibujos geométricos de apoyo, presentando limitaciones para razonar aún apoyándose en dichos dibujos. Su pensamiento es lógico-concreto, no operando con clases lógicas, sino con objetos particulares. Así, por ejemplo, al pedirle que dibuje un rectángulo, construye un rectángulo de lados en la relación 1/2.



No consiguió hacer un diagrama para representar las relaciones de inclusión entre las diferentes categorías de paralelogramos, entre otras cosas porque no llegó a reconocer el cuadrado como rectángulo ni la inclusión de cuadrado, rombo y rectángulo en la familia de los paralelogramos.

5.3.3. Caso 2: Alumno Ar

Ar no hizo la primera prueba del test(14/11/96). En la segunda prueba (19/3/97) razonó (con ligeras incorrecciones) en términos genéricos, simbólicos, con poca o ninguna necesidad de apoyo en ejemplos concretos.

Así, en el problema aritmético su respuesta fue:

n = cualquier nº natural

n + 1 = un número natural, más uno, será igual a su consecutivo

$(n+1)^2 - n^2 = (n+1) + 1$

$n^2 + 2n + 1 - n^2 = n + n + 1$

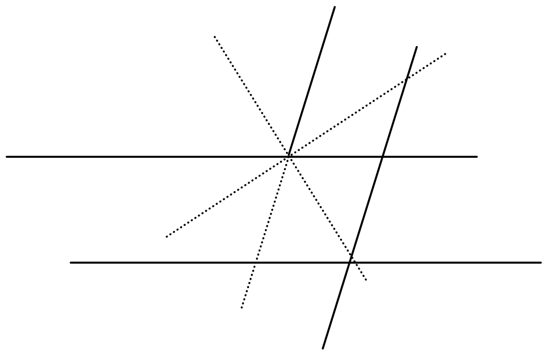
$2n + 1 = 2n + 1$

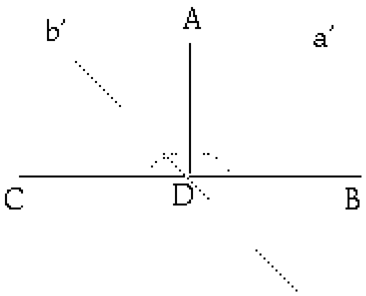
Un número natural par o impar al multiplicar por dos (un número par) siempre dará otro número par.

Si sumamos la unidad, lo que equivale a hallar su consecutivo (n+1), siempre dará un número impar.

Al plantear el enunciado del problema en términos de incógnita, y resolverlo, eliminando opuestos, el resultado será la igualdad de los dos elementos propuestos, (n^2) *y* $(n+1)^2$.

Y en el problema geométrico:





$$ADB + ADC = 180$$

$$\frac{ADB}{2} + \frac{ADC}{2} = 90$$

$$ADB + ADC = 90 \times 2$$

$$ADB + ADC = 180$$

Porque la prolongación de las bisectrices que cortan la mitad de dos ángulos (aquí viene algo así como "qu e", aunque no se entiende bien) suman 180º.

Y las bisectrices, también, presenta una distancia que se mantendrá siempre igual, y que equivale a una relación de mitad.

En el cuestionario escrito (19/3/97) **Ar** define la demostración como un proceso cognitivo, de análisis deductivo, en el que partiendo de una hipótesis se ha de verificar el resultado. Es decir, entiende la demostración como proceso deductivo.

Su pensamiento es deductivo, en gran medida, con capacidad de generalizar, de operar con clases lógicas, de razonar de acuerdo con definiciones, etc. Así, por ejemplo, al pedirle en la entrevista personal construir un cuadrado, es capaz de hacerlo por distintos procedimientos, relacionar el paralelismo con la perpendicularidad, definir un cuadrado de diferentes maneras equivalentes, etc. En todo caso, no fue capaz de relacionar adecuadamente las diferentes categorías de paralelogramos.

5.3.4. Caso 3: Alumno C

C inicia la primera prueba del test de aritmética (19/3/97) con ejemplos concretos, pasando después a introducir una formulación simbólica que no consigue desarrollar correctamente, por dificultades operativas con expresiones simbólicas:

$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$	*1º lo compruebo y comprendo el*
$3 + 2 = 5$	*problema poniendo ejemplos.*

$8^2 - 7^2 = 64 + 49$
$8 + 7 = 15$

2º Lo intento expresar con “x” para generalizar el supuesto
$(x+1)n - xn = [(x+1) + x] =$
$= (xn + 1n +2x.1) - xn = [(x+1) + x] =$
$= (xn + 1 + 2x) - xn = [(x+1) + x] =$
$= (xn + 1 + 2x) - xn = [(x+1) + x]$

$1 + 2x = (x+1) + x$
$1 + x + x = x + 1 + x$

En la segunda prueba (14/11/96), repite un esquema similar y análogas dificultades:

Primero realizo algunas pruebas
2 y 3 ---> 9 - 4 = 5 es impar
10 y 11 ---> 121 - 100 = 21 es impar
= par
+1 = impar

Demostración $(n+1)^2 - (n)^2 = n + 1$

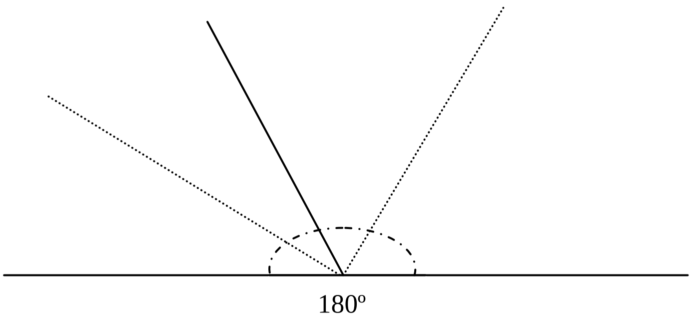
$n^2 + 1 + 2n - n^2 = n + 1 \quad (0+1)^2 - 0^2 = 0 + 1$

$1 + 2n = n + 1 \quad 0 + 1 + 2.0.1 - 0 = 0 + 1$

$2n - n = 1 - 1 \quad 0 + 1 - 0 = 0 + 1$

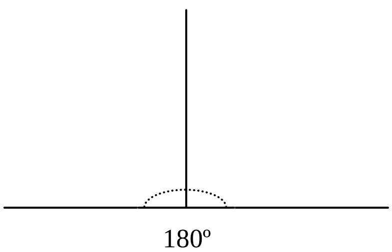
$n = 0$ ---------> *luego* $1 = 1$

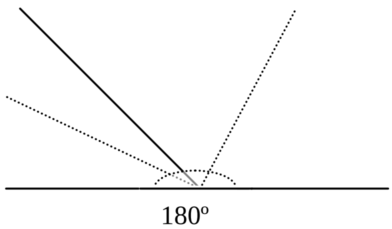
En el test de geometría, en la primera sesión (14/11/96), parte de una comprobación empírica con figuras concretas acompañada de una explicación que inicia un cierto proceso de generalización:



Como dos ángulos adyacentes suman 180º y la bisectriz es la mitad del ángulo y como la mitad de 180º son 90º (que tiene el ángulo recto). Pues toda bisectriz de 2 ángulos adyacentes formarán un ángulo recto.

En la segunda sesión (19/3/97), parte también de ejemplos concretos de comprobación, acompañados de una formulación simbólica que aparenta una operatividad simbólica suficiente por parte de **C**, aunque el comentario final permite comprender que no es así:





En ambos ángulos $x + y = 180$

Y por lo tanto $x/2 + y/2 = 180/2$

Un ángulo más la otra mitad es igual a 90º, que es un ángulo recto

Sé que esto no es una demostración correcta, pero lo he intentado solucionar una ecuación de 2º grado, pero no me ha salido nada coherente.

En el cuestionario escrito (19/3/97) **C** considera la demostración como una combinación de procesos inductivos y deductivos, de comprobación en casos particulares, generalización y nueva comprobación en casos particulares.

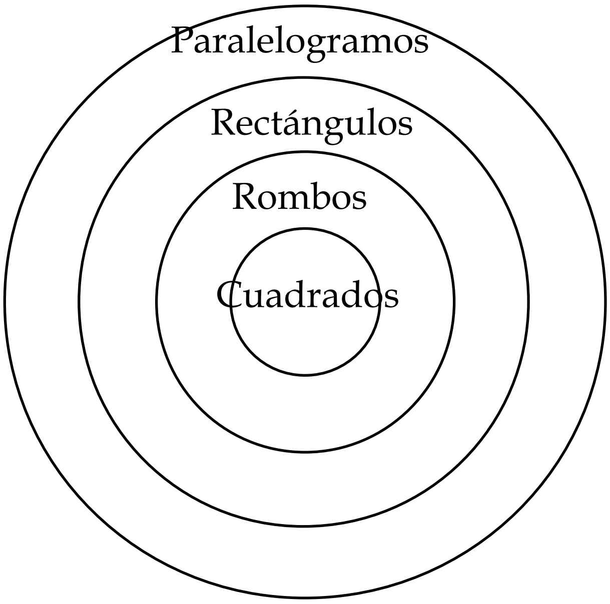
En la entrevista personal (7/4/1997), muestra de forma más amplia su visión de la noción de demostración:

Para mí una demostración consiste en la plasmación, utilizando símbolos, de alguna relación entre varios conceptos, que siempre se cumple cuando lo comprobamos en términos concretos.

Es una forma de generalizar las relaciones que se establecen entre varios conceptos que se cumplen cuando los comprobamos con casos particulares.

... De toda esa serie de términos "razonar", "probar", "explicar" y "justificar", creo que la relación que existe entre éstos y la demostración, es que la "demostración" los engloba a todos, porque ellos son pasos previos y necesarios para llegar a la demostración. Primero se prueba con pasos concretos, estos se razonan y se explican y se trata de establecer algunas relaciones entre esos conceptos matemáticos que los justifiquen como tales, para llegar así a una demostración.

Tiene un pensamiento con cierta capacidad de operar de forma deductiva, aunque presenta desconocimientos geométricos importantes que le dificultan para razonar correctamente en los problemas planteados. Por ejemplo, no sabe utilizar el compás para hacer distancias iguales; no sabe definir correctamente el rombo. Presenta algunas dificultades para manejar abstractamente varias relaciones simultáneamente, como en el caso de la clasificación de los paralelogramos, en el que aporta el siguiente diagrama:



5.3.5. Caso 4: Alumno E

E pasa en el test de aritmética de una mera comprobación empírica con ejemplos concretos (14/11/96),

1º Escojo dos números naturales consecutivos.

2 y 3

$2^2 = 2 x 2 = 4$

$3^2 = 3 x 3 = 9$

2º Efectúo una resta *3º Suma*

$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Compruebo que la diferencia y la suma tienen como resultado un número impar.

3º Observo que el cuadrado de un número natural es otro número natural. Si sumo o resto números naturales consecutivos tengo como resultado un número impar. Ej: 3 - 2 = 1 ; 3 + 2 = 5

Entonces, si sumo los números naturales que he obtenido al efectuar una suma o diferencia del cuadrado de dos números naturales consecutivos, como eran números naturales consecutivos tiene que ser un resultado impar.

a una demostración correcta, usando el simbolismo apropiado (19/3/97)

$(n+1)^2 - n^2 = n + n + 1$ (*)

$n^2 + 1^2 + 2(n.1) - n^2 = n + n + 1$

$n^2 + 1 + 2n - n^2 = n + n + 1$

$1 + 2n = 2n + 1$

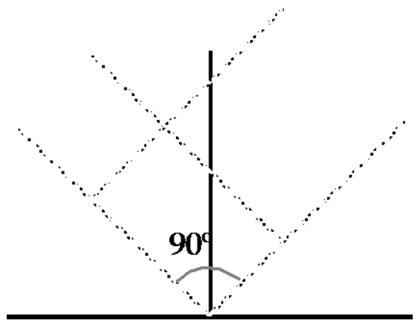
$2n + 1 = 2n + 1$

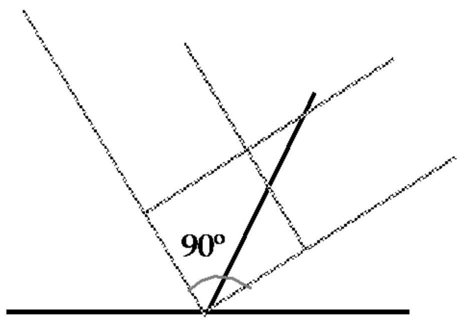
(*) Lo he plasmado así, si lo hago al contrario me saldría un número negativo, ya no sería un número natural.

1- He plasmado con números y letras lo que me dice el problema.

2- He realizado operaciones y me dan en los dos miembros de una igualdad lo mismo, entonces se demuestra esa igualdad.

En el test de geometría, no hizo la primera sesión (14/11/96) y en la segunda (19/3/97) hace una comprobación empírica, operando de una forma manipulativa:





1- He trazado dos ángulos adyacentes.

2- He trazado las bisectrices de cada uno de los ángulos plegando el papel para obtener el ángulo, a continuación he vuelto a plegar el papel para obtener la bisectriz.

3- He trazado paralelas a cada una de las bisectrices.

4- Al cruzarse las paralelas se obtiene un cuadrado o un rectángulo, y los ángulos de estos paralelogramos son 90º.

En el cuestionario escrito (19/3/97) plantea la demostración como argumentación objetiva en la resolución de problemas:

Hay que partir de un problema, hecho concreto. Hay que plasmar a través del lenguaje ese problema, estamos explicando el problema. Al mismo tiempo, a través del lenguaje podemos llegar a razones. Cómo solucionar el problema. La solución que he obtenido de mi razonamiento tengo que justificarla argumentando razones coherentes y objetivas, dejando a un lado la subjetividad y las posibles interpretaciones personales.

Estas razones las pondré a prueba, demostrando si mi razonamiento y justificaciones son válidos. De no ser así modificaré aquello que vea conveniente o lo desecharé por completo, comenzando de nuevo el proceso. Por tanto la demostración es un proceso que necesita del lenguaje, del pensamiento formal y abstracto, de la justificación y la comprobación.

En la entrevista personal (7/4/1997) manifiesta un importante desconocimiento de conceptos geométricos básicos y tiene dificultades para razonar geométricamente. Por ejemplo, no sabe lo que es una diagonal de un polígono, no sabe que las diagonales de un cuadrado son iguales, no es capaz de ver que el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado es menor que el lado del cuadrado.

Manifiesta un pensamiento geométrico poco desarrollado, manipulativo, con importantes desconocimientos de conceptos y proposiciones geométricos, con poca capacidad de razonamiento lógico:

Hay que partir de un problema, hecho concreto. Hay que plasmar a través del lenguaje ese problema, estamos explicando el problema. Al mismo tiempo, a través del lenguaje podemos llegar a

razones. Cómo solucionar el problema. La solución que he obtenido de mi razonamiento tengo que justificarla argumentando razones coherentes y objetivas, dejando a un lado la subjetividad y las posibles interpretaciones personales.

Estas razones las pondré a prueba, demostrando si mi razonamiento y justificaciones son válidos. De no ser así modificaré aquello que vea conveniente o lo desecharé por completo, comenzando de nuevo el proceso. Por tanto la demostración es un proceso que necesita del lenguaje, del pensamiento formal y abstracto, de la justificación y la comprobación.

5.3.6. Caso 5: Alumno F

F pasa en el test de aritmética de una demostración simbólica pero incorrecta a una demostración correcta y en el test de geometría de una mera comprobación empírica con ejemplos concretos (14/11/96) a una demostración correcta (19/3/97).

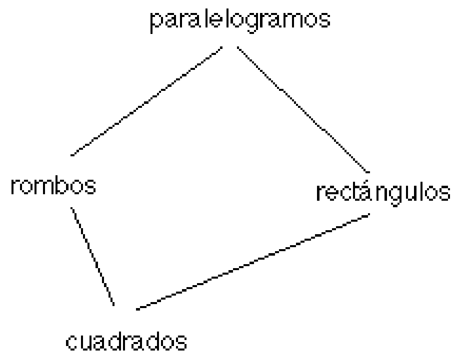
En el cuestionario escrito (19/3/97) plantea la demostración como un proceso que comienza con una comprobación mediante casos particulares y concluye con una generalización, con una extensión al caso general, con ayuda del simbolismo matemático.

En la entrevista personal (7/4/1997), condicionado por el contexto -un contexto de resolución de problemas geométricos con Cabri-, expresa la demostración como una cosa práctica, como un proceso de aplicar conceptos a la resolución de un problema.

Muestra desenvoltura para razonar geométricamente:

I. Pero, ¿tú puedes definir el rombo por las diagonales?
F Se cortan formando ángulos de 90º.
Y. Con eso, ¿quedaría perfectamente definido?
F Sí.

Manifiesta esquemas de pensamiento abstracto, formal. Presenta el siguiente diagrama para expresar las relaciones entre los paralelogramos:



5.3.7. Caso 6: Alumno M

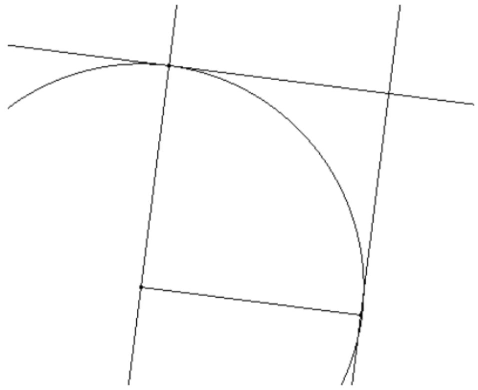
M ha experimentado una importante evolución desde la primera aplicación del test (14/11/96) hasta la segunda (19/3/97), pasando desde unas demostraciones reducidas a meras comprobaciones empíricas sobre casos particulares hasta demostraciones deductivas.

En el cuestionario escrito (19/3/97) da, como definición de demostrar, la siguiente: demostrar es "*comprobar los conocimientos matemáticos a través de las normas, reglas, teoremas... presupuestos establecidos*". Esa definición la expresa mejor en la entrevista personal (7/4/1997) como "*una forma de comprobar mediante leyes abstractas siguiendo un razonamiento deductivo... comprobar una hipótesis... concluyendo que es verdadera o falsa...".*

En la entrevista personal (7/4/1997), muestra un pensamiento deductivo, pese a ciertas insuficiencias conceptuales. Demuestra una capacidad de efectuar razonamientos geométricos abstractos, en línea con la ya demostrada en la experiencia sobre ángulos, referida en el apartado anterior. Por ejemplo, es capaz de los siguientes razonamientos:

** Si tuviéramos que hacer un cuadrado con Cabri, ¿qué tendríamos que hacer?*

M. Dibujaría un segmento. Una circunferencia. Una perpendicular... (da indicaciones para la siguiente figura)



** ¿Por qué has hecho eso?*

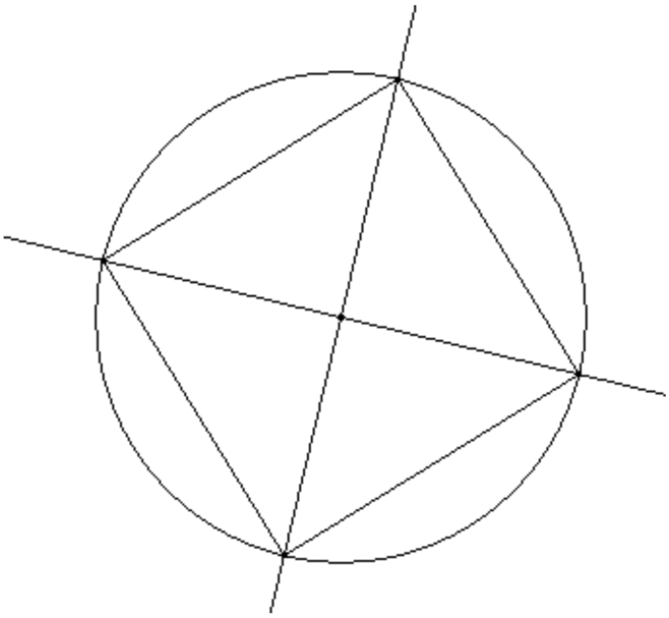
M. Hacemos lo mismo que con el compás.

** Pero, ¿por qué?*

M. Tomamos la misma medida del radio para que sean iguales los lados y dibujamos perpendiculares para que los ángulos sean de 90º.

** Otro procedimiento.*

M. Una circunferencia. Trazo dos perpendiculares que pasen por el centro y ahora unimos...



** ¿Por qué lo has hecho así?*

M. Si un cuadrado tiene cuatro lados iguales y a una circunferencia le trazamos las perpendiculares, los puntos en que se cortan es la misma distancia. Si unimos los puntos... Los cuatro triángulos son iguales y entonces los lados del cuadrado son iguales.

5.3.8. Caso 7: Alumno MM

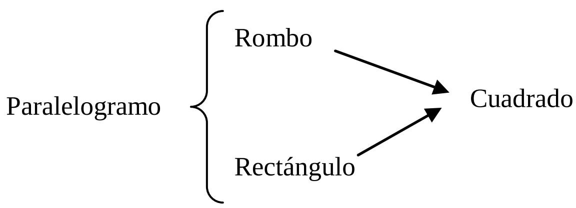
MM no supo resolver el problema de aritmética en la primera sesión del test. En la segunda sesión (19/3/97) desarrolla una formulación simbólica, correcta, aunque acompañada todavía de ejemplos concretos de comprobación.

En el test de geometría, pasa de una mera comprobación visual en la primera sesión (14/11/96) a un razonamiento deductivo en la segunda (19/3/97).

En el cuestionario escrito (19/3/97) **MM** considera que: *“la demostración es un proceso importante de cara a la formación de conceptos“* y afirma que *“para demostrar algo debemos de partir de unas premisas que queremos probar, ver si son ciertas, se cumplen o no...”*

En la entrevista personal (7/4/1997), **MM** insiste en que *“la demostración es como el proceso para afirmar un concepto o rebatirlo”*.

Manifiesta un pensamiento formal, aunque con algunas limitaciones. Por ejemplo, no sabe definir el cuadrado atendiendo a sus diagonales. Opera con clases lógicas, con constructos teóricos, relacionados formalmente. Presenta el siguiente diagrama para las relaciones entre los diferentes tipos de paralelogramos:



5.4. CONCLUSIONES FINALES DEL ESTUDIO DE CASOS

El alumno **A** presentó, durante todo el periodo de prueba, esquemas de demostración empírico-inductivos, reduciendo la demostración a una mera comprobación en casos particulares. Al final de la prueba mostraba un cierto avance hacia el reconocimiento de la importancia del simbolismo en la demostración, tanto en el plano operativo como en el de la reflexión teórica. Su pensamiento geométrico, manifestado en la entrevista, al final del periodo de prueba, seguía siendo lógico-concreto, descriptivo, analítico, basado en la observación y la experimentación manipulativa, pareciendo tener dificultades para razonar sin dibujos geométricos de apoyo, presentando limitaciones para razonar aún apoyándose en dichos dibujos.

El alumno **Ar** mostró durante todo el periodo de prueba esquemas de demostración deductivos. En el cuestionario escrito se ponía de manifiesto la concordancia de sus esquemas deductivos de demostración con sus concepciones teóricas sobre la demostración, que entendía como demostración deductiva, con una idea clara del papel del simbolismo en el paso al razonamiento abstracto. En la entrevista se mostró capaz de operar con diferentes definiciones de un mismo concepto, reconociéndolas como equivalentes; no fue capaz de reconocer el cuadrado como rectángulo, aunque sí como rombo.

El alumno **C** mostró estar iniciando la transición desde esquemas de demostración empírico-inductivos hacia esquemas simbólicos, aunque todavía incipientes. Sus esquemas de demostración concordaban con sus ideas teóricas de la demostración como combinación de procesos inductivos y deductivos, como proceso de comprobación en casos particulares, generalización y nueva comprobación en casos particulares.

Presentaba desconocimientos aritméticos y geométricos que le dificultaban para razonar correctamente. Tuvo dificultades para relacionar adecuadamente las distintas categorías de paralelogramos.

El alumno **E** pasó en el test de aritmética de una mera comprobación empírica con ejemplos concretos a una demostración correcta, usando el simbolismo apropiado. En el test de geometría, no hizo nada del problema en la primera sesión y en la segunda realizó una mera comprobación empírica con ejemplos concretos. En la entrevista personal manifestó un importante desconocimiento de conceptos geométricos básicos, teniendo dificultades para razonar geométricamente. Su concepción de la demostración era la de un proceso que necesita del pensamiento formal y abstracto, pero también de la comprobación.

El alumno **F** pasó en el test de aritmética de una demostración simbólica pero incorrecta a una demostración correcta y en el test de geometría de una mera comprobación empírica con ejemplos concretos a una demostración correcta. Es decir, manifiestó un claro avance hacia esquemas deductivos de demostración, aunque partía ya de cierta capacidad de simbolización. Su pensamiento geométrico, durante la entrevista, era formal, capaz de operar con diferentes definiciones de un mismo concepto, reconociéndolas como equivalentes. Relacionaba adecuadamente los distintos tipos de paralelogramos. En el cuestionario escrito planteó la demostración como un proceso que comienza con una comprobación mediante casos particulares y concluye con una generalización, con una extensión al caso general, con ayuda del simbolismo matemático.

El alumno **M** experimentó una importante evolución desde la primera aplicación del test hasta la segunda, pasando de demostraciones inicialmente reducidas a meras comprobaciones empíricas, sobre casos particulares, a demostraciones finalmente deductivas. En la entrevista personal definía la demostración como: *"una forma de comprobar mediante leyes abstractas siguiendo un razonamiento deductivo... comprobar una hipótesis... concluyendo que es verdadera o falsa...".* En la entrevista personal mostraba un pensamiento geométrico formal, capaz de operar con abstracciones, con diferentes definiciones de un mismo concepto, reconociéndolas como equivalentes, relacionando adecuadamente los distintos tipos de paralelogramos, pese a ciertas insuficiencias conceptuales.

El alumno **MM** no supo resolver el problema de aritmética en la primera sesión del test. En la segunda sesión desarrolló una demostración simbólica, correcta, aunque acompañada todavía de ejemplos concretos de comprobación. En el test de geometría, pasó de una mera comprobación visual en la primera sesión a un razonamiento deductivo en la segunda. En el cuestionario escrito (19/3/97) **MM** consideró que: *"la demostración es un proceso importante de cara a la formación de conceptos"* y afirmaba que *"para demostrar algo debemos de partir de unas premisas que queremos probar, ver si son ciertas, se cumplen o no..."* En la entrevista personal (7/4/1997), **MM** insistía en que *"la demostración es como el proceso para afirmar un concepto o rebatirlo".* Manifiestó un pensamiento formal, aunque con algunas limitaciones. Por ejemplo, no sabía definir el cuadrado atendiendo a sus diagonales. Pero operaba con clases lógicas, con constructos teóricos, relacionándolos formalmente.

Como conclusión general, puede apreciarse la coherencia de los esquemas personales de demostración de los estudiantes con sus niveles de pensamiento geométrico, así como con sus concepciones personales acerca de la demostración. En particular, el alumno **A** presentaba, al final de la experiencia, un pensamiento geométrico de tipo lógico-concreto y esquemas de demostración empírico-inductivos, coherentes con su concepción de la demostración como proceso de comprobación en casos particulares; el alumno **Ar** presentaba un pensamiento geométrico de tipo formal, deductivo, esquemas de demostración deductivos y una concepción de la demostración como deductiva; el alumno **C** evolucionó desde esquemas de demostración impírico-inductivos a esquemas simbólicos, pero con desconocimientos aritméticos y geométricos importantes, siendo su idea de demostración una combinación de procesos inductivos y deductivos; el alumno **E** fue capaz de evolucionar hacia formas deductivas de pensamiento geométrico y hacia esquemas deductivos de demostración en aritmética, pero no en geometría, como consecuencia del importante desconocimiento de conceptos geométricos básicos que manifestó, siendo su concepción de demostración un proceso que necesita del pensamiento formal y abstracto, pero también de la comprobación; los alumnos **M** y **MM** evolucionaron desde esquemas empírico-inductivos a esquemas de demostración deductivos, aunque con ciertas limitaciones, coherentes con la expresión de su pensamiento geométrico como capaz de operar con abstracciones, pero con ciertos desconocimientos conceptuales, y con sus concepciones de la demostración como proceso deductivo, no del todo consolidadas.

El estudio experimental parece confirmar, así, la consistencia de los esquemas personales de demostración, su permanencia temporal, su coherencia con otras formas consolidadas de pensamiento matemático, haciéndolos aparecer como estructuras estables de pensamiento.

Un hecho importante que se recoge en esta descripción de las formas de pensamiento y esquemas de demostración de estos alumnos es que las limitaciones para alcanzar formas deductivas de pensamiento y de demostración están ligadas a desconocimientos conceptuales que dificultan el adecuado desenvolvimiento de esas formas de pensamiento. Es un hecho que destacamos y que analizamos con detalle en el siguiente capítulo.

CAPITULO 6

COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN MATEMÁTICA

6.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior hemos estados interesados por aportar una posible interpretación cognitiva a los esquemas personales de demostración. Hemos buscado para ello cierta orientación en las teorías psicológicas centradas en la evolución de las estructuras intelectuales, mediante estadios o niveles.

Hemos encontrado una cierta zona de encuentro teórico con las teorías de niveles de Van Hiele, bajo los supuestos de Fuys y col. (1988), que consideran los niveles Van Hiele como niveles potenciales de pensamiento. Bajo esta perspectiva, los esquemas personales de demostración también aparecerían como estructuras potenciales de pensamiento: serían estructuras estables de pensamiento, consistentes, resistentes al cambio, pero que se pondrían de manifiesto en situaciones problemáticas familiares para los sujetos, cuando los conceptos implicados les resultaran asequibles, bien por su simplicidad, bien porque los sujetos se hubiesen familiarizado con ellos.

En todo caso, es necesario preguntarse por el significado de los esquemas personales de demostración en situaciones problemáticas ante las que el sujeto no es suficientemente experto. Como señalan Pérez Echeverría y Pozo (1994, p. 35), al estudiar los procesos de solución de problemas comparando las actuaciones de expertos y novatos, las investigaciones actuales en el estudio de los procesos de conocimiento y de razonamiento se orientan hacia la dependencia del contenido:

"En lugar de tratar de identificar un proceso general útil para la solución de cualquier problema, se está intentando conocer de qué forma afectan la experiencia y los conocimientos específicos en una determinada materia o dominio de conocimiento a la solución de un problema propio de esa área... Dada esa especificidad, la mayor eficiencia en la solución de problemas no se debería a una mayor capacidad cognitiva general sino a sus conocimientos específicos".

Las reglas del "buen pensar" no aseguran una eficaz solución de problemas si no van acompañadas de un conocimiento contextual específico. De ahí que los expertos, cuyos conocimientos son específicos o locales a un área dada, sean mucho más eficientes en la solución de problemas.

En la investigación experimental que describimos en la sección 6.3 tratamos de estudiar las posibilidades ofrecidas por el modelo semiótico descrito en la sección 3.4., atendiendo a la identificación de la trama de objetos y de relaciones semióticas que se ponen en juego en las tareas matemáticas, para explicar las dificultades que tienen los estudiantes con las demostraciones matemáticas.

Pero pensamos, incluso, que este modelo semiótico es insuficiente para explicar esas dificultades. En este sentido, entendemos que la *teoría de los momentos didácticos*, propuesta por Chevallard y col. (1997) dentro de la aproximación antropológica, puede aportar una herramienta útil, capaz de ofrecer otros elementos explicativos. Por este motivo presentamos en la sección 6.2 una síntesis de dicha teoría, algunas de cuyas nociones -como el momento del trabajo de la técnica- usaremos en la interpretación de los resultados de la experiencia implementada.

El objetivo de esta experiencia consiste, por tanto, en indagar las posibilidades de una aproximación semiótico-antropológica a la didáctica de las matemáticas, con los supuestos que estamos considerando, para explicar las dificultades de los estudiantes en los procesos de validación matemática.

6.2. LA TEORÍA DE LOS MOMENTOS DIDÁCTICOS EN EL ENFOQUE ANTROPOLÓGICO

La teoría de los momentos didácticos, recientemente elaborada por Chevallard y col. (1997) como un desarrollo de la aproximación antropológica a la didáctica de las matemáticas (Chevallard, 1992), nos ha resultado de utilidad para describir y explicar algunos fenómenos detectados en nuestra investigación. En este apartado hacemos una breve síntesis de esta teoría siguiendo el trabajo de Bosch (1998).

Al igual que en el modelo de los significados sistémicos (Godino y Batanero, 1994), la matemática se concibe como estudio de campos de problemas, el cual puede estructurarse en distintas fases o momentos. Como resultado de los procesos de estudio se producen "organizaciones matemáticas" (praxeologías): sistemas formados por un campo de problemas, técnicas, tecnologías y teorías. Esta noción tiene una estrecha similitud con la noción de "sistema de prácticas" elaborada por Godino y Batanero.

El proceso de estudio de un campo de problemas se estructura en seis momentos o dimensiones que describen del siguiente modo (Bosch, 1998).

1) *El primer encuentro con un problema o tarea problemática*

El momento del primer encuentro es la dimensión del proceso de estudio en la que surge, se nos plantea, por primera vez, una tarea problemática que no sabemos realizar y, en lugar de rechazar la problematicidad, decidimos hacer algo para conseguir realizarla. La tarea no debe considerarse de manera puntual, sino como un tipo de tareas

La cuestión problemática inicial se suele identificar con las "razones de ser" de los conocimientos que se construirán durante el estudio. La búsqueda de estas razones de ser de los conocimientos debe formar parte del proceso de estudio.

2) *Exploración del campo de problemas y emergencia de una técnica*

El *momento exploratorio* es la segunda dimensión del proceso de estudio. Una vez problematizada la cuestión inicial, se eligen algunos problemas particulares y se busca alguna técnica o "manera de hacer" particular que permita resolverlos y empezar a delimitar un primer campo de problemas. El momento exploratorio acaba cuando emerge una primera técnica que permite realizar -o empezar a realizar- el tipo de tareas problemáticas inicial.

3) *El trabajo de la técnica y la necesidad de explicarla y justificarla*

La técnica emergente debe funcionar de manera normalizada -convertida en rutina y que su empleo se haga de manera 'natural'- para poder resolver más problemas del campo. Esto requiera "trabajar" la técnica, variándola, ampliándola y poniéndola a prueba con un número mayor de casos.

4) *El momento tecnológico-teórico*

Este momento recoge todas aquellas etapas del proceso en las que nos vemos llevados a describir y justificar el trabajo realizado. Se trata de responder a cuestiones "teóricas" relativas al valor, alcance y descripción del trabajo realizado: ¿por qué funciona aquí y no allá? ¿Qué nos asegura el éxito (o el fracaso)? ¿Qué puntos en común tienen estos problemas? ¿Qué relación con esos otros? ¿Qué propiedades se deducen de los objetos estudiados? ¿Cómo sintetizar y exponer los conocimientos producidos?

5) *La institucionalización de la organización matemática construida*

En todo proceso de estudio hay momento en los que se explicitarán, comentarán y destacarán determinados elementos. Se les despojará de sus condiciones particulares de emergencia, se los pondrá en relación con los demás elementos de las organizaciones matemáticas ya disponibles y se les atribuirá un estatuto y una función en la nueva parcela de conocimiento que empiezan a habitar. Estas etapas del proceso, en los que el trabajo privado y, a veces, personal debe arrinconarse para que sus frutos pasen a formar parte del bien común forman parte del momento de la institucionalización.

6) *Evaluación de los componentes de la organización y de nuestra capacidad para utilizarlos*

Sea cual sea el proceso de estudio que se lleva a cabo, y sea quien sea el que lo realiza (grupo de alumnos con profesor, grupo de investigadores, etc.), hay siempre un momento —en realidad, son varios— en los que se debe hacer un alto en el camino y poner a prueba los resultados obtenidos. La evaluación afecta pues, de manera indisociable, tanto los objetos matemáticos que se han construido (técnicas, propiedades generales, definiciones, etc.) como nuestra capacidad para manejarlos y utilizarlos en nuevas situaciones.

De todos esos momentos hay uno que cobra especial significación en nuestra investigación, que es el *momento del trabajo de la técnica*, el momento destinado a “rutinizar” las técnicas adquiridas en el momento exploratorio.

El momento de la técnica es importante en el tránsito de “novato” a “experto”, en particular en el ámbito validativo, en el desarrollo de la capacidad de efectuar demostraciones, dentro del campo de problemas en cuestión.

A continuación presentamos una investigación experimental desarrollada para indagar las posibilidades de aplicar este enfoque antropológico para explicar el significado de la demostración matemática.

6.3. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN MATEMÁTICA. ESTUDIO EXPERIMENTAL

6.3.1. Metodología de investigación

La experiencia consistió en el desarrollo de tres sesiones de trabajo con un grupo experimental de estudiantes de 5º de Psicopedagogía de la Facultad de Ciencias de la Educación de Córdoba, durante el curso 1997-98. Las sesiones fueron desarrolladas con alumnos voluntarios, fuera del horario académico. Sirvieron de fundamento para un trabajo, de carácter teórico-práctico, que el grupo de alumnos/as participantes tenía que llevar a cabo dentro de la asignatura.

Las sesiones se centraron en la resolución de tres problemas, primero de forma individual y luego de forma colectiva, bajo la orientación del investigador, quien dirigía la discusión. Se dejaba un tiempo prudencial para la fase individual (unos diez minutos por problema) y se pasaba luego a la fase de resolución colectiva.

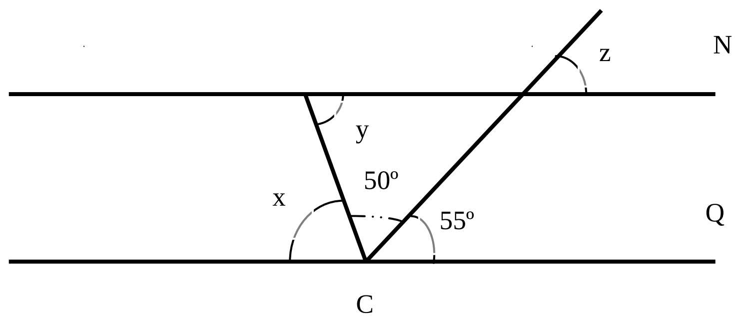
La fase de resolución o aproximación individual tenía el sentido de etapa de elaboración de conjeturas de cara a la fase de resolución colectiva. Esta fase puede relacionarse con el momento o dimensión exploratoria del proceso de estudio en el modelo de Chevallard y cols (1997). Cada problema ayudaba a repasar conceptos que eran necesarios para la resolución del siguiente problema, pues los problemas formaban una especie de "cadena", de manera que los alumnos que no hubieran conseguido asumir bien los conceptos previos tendrían dificultades para resolver adecuadamente el siguiente problema en cuestión.

Se decidió este sistema de trabajo, después de evaluar una experiencia preparatoria realizada el curso anterior, también con alumnos de Psicopedagogía.

Los tres problemas aludidos fueron los siguientes:

1. En tres horas, ¿cuál será el ángulo descrito por la aguja que marca las horas en un reloj de pared? ¿Y por el minutero? ¿Y por el segundero? Explica y justifica tus respuestas.

2. Determinar el valor de los ángulos x, y, z sabiendo que las rectas MN y PQ son paralelas. Explica y justifica tus respuestas.



3. Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano.

Los tres problemas anteriores están centrados en torno a la noción de ángulo, que es una noción con un contenido semántico complejo y cuyo análisis puede ayudar a comprender la perspectiva semiótico-antropológica que fundamenta este trabajo de tesis.

En las secciones que siguen presentamos el análisis "a priori" de los tres problemas seleccionados y un resumen del proceso de estudio cooperativo realizado en la clase (con atención especial a los momentos de validación observados).

6.3.2. El ángulo como rotación

El primero de los tres problemas planteados compete directamente al significado de la noción de ángulo, que es el problema que abordamos en este apartado.

De acuerdo con Balacheff (1988), hay cuatro tipos de definiciones de ángulos, en el campo de la geometría plana elemental, excluyendo deliberadamente otros posibles contextos matemáticos, como son definiciones algebraicas, medidas de ángulos, ángulos orientados o ángulos de vectores. Estas cuatro definiciones son: el ángulo como *inclinación de una recta sobre otra*; el ángulo como *figura formada por dos semirectas*; el ángulo como *región del plano*; y el ángulo como *rotación*.

Según Balacheff (1988), la primera es la definición clásica de los Elementos de Euclides. Es una definición que incita a considerar ángulos menores de 180º. La segunda es atribuida a Aristóteles y puede excluir los ángulos cóncavos. La tercera ha conocido su apogeo con la enseñanza de las "*Matemáticas Modernas*", ligada a la noción de sector angular. La cuarta, aunque muy antigua también, no ha llegado a imponerse verdaderamente en la enseñanza.

Pasamos seguidamente a analizar, tras estas consideraciones previas, el problema indicado, comenzando con un análisis semiótico "a priori" del mismo, de su enunciado y de la solución que consideramos estándar, y un análisis "a posteriori" del episodio didáctico concreto que resultó al tratar de resolverlo.

6.3.2.1. Análisis 'a priori' de la tarea

Enunciado:

En tres horas, ¿cuál será el ángulo descrito por la aguja que marca las horas en un reloj de pared? ¿Y el minutero? ¿Y el segundero? Explica y justifica tus respuestas.

Solución:

La aguja horaria recorre la esfera del reloj en 12 horas, o sea, gira en ese tiempo un ángulo de 360º . Por tanto, en 3 horas recorrerá la cuarta parte de 360º esto es, 90º .

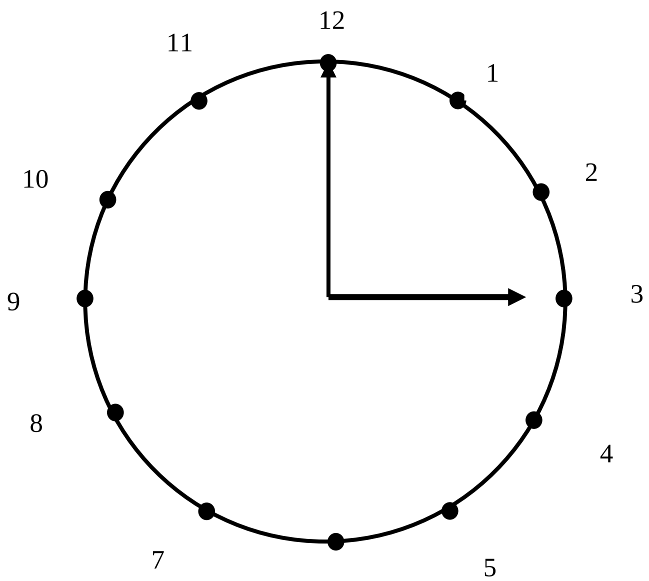
La aguja del minutero da una vuelta completa en 1 hora. Por tanto, en 3 horas girará 3 x 360º = 1080º .

El segundero da una vuelta completa en un minuto. Por tanto, en tres horas girará 3x60x360º = 64800º .

Análisis del enunciado:

- El enunciado describe una situación problemática, una tarea escolar referida a un fenómeno físico-social, como es la medida del tiempo mediante el reloj de agujas. Las palabras y expresiones usadas en el enunciado se refieren en unos casos a objetos fenomenológicos (reloj, agujas horarias, minutero, segundero, etc.), y en otros a objetos conceptuales (tres, hora, minuto, segundo, ángulo, medida de un ángulo, etc.). Se supone que el sujeto conoce cómo funciona un reloj de agujas: que la aguja horaria da una vuelta completa en 12 horas; que el minutero gira una vuelta en 1 hora y el segundero una vuelta en 1 minuto.

- El sujeto que resuelve puede tener que interpretar la situación problemática mediante dibujos como el siguiente, que recodifica el enunciado del problema en un lenguaje gráfico:



Esa interpretación gráfica del enunciado del problema induce relaciones con conceptos teóricos, como los de circunferencia, división de la circunferencia en partes iguales, ángulo, etc., cuya utilización permite la expresión de la situación problemática de una forma más abstracta, más “simple” (en el sentido de que elimina elementos superfluos y se centra en los aspectos esenciales) y favorece tratamiento específicamente matemático de la misma. De hecho, el alumno que no tenga una buena imagen gráfica de la situación problemática tendrá mayores dificultades para resolverla.

La expresión 'ángulo descrito' se debe interpretar en este caso como 'ángulo girado'. Es posible que los estudiantes tengan dificultades para discriminar entre los usos figural y rotacional de 'ángulo'.

Análisis de la solución:

U1: *La aguja horaria recorre la esfera del reloj en 12 horas, o sea, gira en ese tiempo un ángulo de 360º.*

El sujeto que emite esta expresión ha interpretado que 'aguja horaria' implica 'vuelta completa en 12 horas', y que 'vuelta completa' significa 'giro de 360º'. Se evoca el concepto de medida de un ángulo y el hecho de que un grado es la 360ava parte de una vuelta completa.

U2: *Por tanto, en 3 horas recorrerá la cuarta parte de 360º esto es, 90º.*

Denota la acción mental (que puede tener apoyatura gráfica en los dibujos antes presentados), de dividir las 12 horas en cuatro grupos de 3 horas, de manera que se comprende que el periodo de tres horas es la cuarta parte de 12 horas y que en ese periodo se girará la cuarta parte de 360º, o sea 90º. Esta acción mental implica también la realización de un razonamiento proporcional.

U3: *La aguja del minutero da una vuelta completa en 1 hora.*

Se expresa el conocimiento de qué significa 'aguja del minutero'. Decir 'aguja del minutero' quiere decir 'objeto que da una vuelta en 1 hora'

U4: *Por tanto, en 3 horas girará 3 x 360º = 1080º.*

Denota la acción de multiplicar por 3 los 360º que la aguja del minutero gira en 1 hora, para hallar el número de grados totales girados en las 3 horas. Esta acción implica también la realización de un razonamiento proporcional que pone en juego la noción de multiplicación.

U5: *El segundero da una vuelta completa en un minuto.*

Se expresa el conocimiento de qué significa 'aguja del segundero'. Decir 'aguja del segundero' quiere decir 'objeto que da una vuelta en 1 minuto'

U6: *Por tanto, en tres horas girará* $3x60x360^o = 64800^o$.

Denota la acción de calcular los minutos que hay en 3 horas, *3 x 60*, y multiplicar por 360º , que es el número de grados que la aguja del segundero gira en cada minuto, para hallar el número de grados totales girados en las 3 horas. Esta acción implica también la realización de un razonamiento proporcional.

El enunciado de la tarea no menciona la unidad de medida en que se debe dar la solución. Por tanto, se puede concluir también que la aguja horaria gira un cuarto de vuelta, el minutero dará 3 vueltas y el segundero 3x60= 180 vueltas.

6.3.2.2. Descripción y análisis del proceso de estudio

Asisten los alumnos que representaremos por las iniciales de sus nombres: Ch, M, F y Ma.

En sus primeras intervenciones, espontáneas, discutiendo entre ellos, los cuatro alumnos coinciden en que, hasta las 3 horas, la aguja de las horas gira 90º. Las divergencias empiezan al considerar el giro de la aguja del minutero. Ch piensa que el minutero gira 0^o y M, en cambio, que el minutero gira $360^o + 360^o + 360^o = 1080^o$. Las divergencias revelan diferentes concepciones de la noción de ángulo. M dice que la expresión "*el ángulo descrito*" remite al número de vueltas que da. Ch dice que sólo hay que pensar en las posiciones inicial y final y entonces el ángulo avanzado es de *0º*. F se adapta a la posición de Ch y Ma a la de M. Ch insiste en que la aguja da vueltas y vueltas y al final vuelve a la posición inicial, de modo que el ángulo que recorre es de *0º*.

A partir de ese momento se produce la intervención del profesor y da realmente comienzo el episodio didáctico, que consiste en una discusión entre alumnos y profesor, orientada por las preguntas de éste.

Profesor: *¿Y no puede ser que el concepto de ángulo que tenéis es distinto?*

M: *Sí, sí, sí.*

Ch: *Para mí es como lo que sobra de dar vueltas.*

M: *Y yo creo que los ángulos pueden ser mayores de 360º. Yo recuerdo haber trabajado con ángulos mayores de 360º.*

Ch: *El problema es cómo puedes tú dibujar un ángulo de 525º. Tú sí puedes dibujar un ángulo de 70º. Pero de 525º, no.*

M: *Indicas el número de vueltas y los grados sueltos.*

Ch: *Pero eso no es dibujar un ángulo.*

M: *¿Tú sabes lo que es 200º?*

Ch: *Sí, perfectamente.*

M: *¿Y tu puedes sumar 200º + 200º?*

Ch: *Sí, te da 400º, pero no lo puedes dibujar.*

(En el diálogo se ve claramente cómo Ch, F y Ma tienen una concepción del ángulo como región angular; para ellos el término 'ángulo' tiene un sentido figural. M es el único que ha superado el contexto figural y le atribuye un sentido operatorio, rotacional al ángulo)

M: *Pero qué más da que no lo pueda dibujar, si sé lo que es.*

Profesor: *¿Por qué no escribís en el folio, pensándolo despacio, qué noción tenéis de ángulo cada uno? (Pasa un rato). Leed las respuestas, por favor.*

Ma: *El espacio comprendido entre dos líneas, que pretendemos medir en grados.*

M: *El recorrido de algo, un objeto, una línea, o lo que sea, medido entre un instante inicial y otro final, medido en grados.*

Ch: *El espacio, entre comillas, que hay entre dos segmentos con un vértice común y mediría el camino, también entre comillas, que hay que seguir para ir de uno a otro.*

F: *El espacio imaginario que hay entre dos líneas que se cruzan formando un ángulo, en grados, claro.*

(En las intervenciones de Ma, M, y F vemos la insistencia en asociar 'ángulo' con 'grado'. Esto puede indicar una deficiente conceptualización de la magnitud amplitud angular al no separarla de la medida. Esto podría ser un obstáculo para realizar tareas en las que se requiera manipular ángulos sin sus medidas. En toda la discusión, ningún estudiante usa la "vuelta", 1/4 de vuelta, o 3 vueltas para describir las cantidades giradas por las agujas).

Profesor: *CH, tú dices que el ángulo es el camino recorrido para ir de uno a otro.*

Ch: *Sí.*

Profesor: *¿Y el camino recorrido es cero, en el caso del problema?*

(El profesor ha pretendido, con su intervención, poner de manifiesto la contradicción de definir el ángulo como camino recorrido y decir que vale 0º).

CH: *(Lo piensa) Pues no es cero. Entonces es la distancia que hay.*

Profesor: *Entonces, ¿cambias la definición?*

Ch: *Sí.*

Profesor: *En vez del camino recorrido, la distancia que hay entre una posición inicial y otra final… Y la distancia, ¿cómo la medirías?*

(El profesor intenta, con esta línea de intervenciones, poner en cuestión esa visión del ángulo como distancia, matemáticamente incorrecta).

Ch: *... (No contesta).*

Profesor: *¿Una distancia recta, curva…?*

<u>Ch</u>: *... (No contesta).*

<u>Profesor</u>: *Bueno, no sabes precisar muy bien, pero dices que el ángulo expresa una distancia.*

<u>Ch</u>: *Sí.*

<u>Profesor</u>: *¿Sería posible decir que Ch tiene una visión estática del ángulo y M una visión dinámica?*

(El profesor introduce en la discusión una posible clasificación de las posibles "concepciones" (o "visiones") del ángulo: visión estática y visión dinámica. Procura, con ello, acercar la discusión a la contraposición entre las concepciones figurales y las operatorias).

<u>Ch</u>: *La mía también es dinámica.*

<u>Profesor</u>: *Yo no digo cuál es mejor. Me refiero a que tú, Ch, te fijas en la posición inicial y final y M en el camino recorrido.*

<u>Ch</u>: *Sí, pero yo también digo que se han dado tres vueltas y creo que mi concepción no es tan estática.*

<u>Profesor</u>: *¿Por qué asocias concepción estática a algo negativo?*

<u>Ch</u>: *No, no es algo estático. Yo también hablo de que da 3 vueltas.*

<u>F</u>: *Yo sí tengo una concepción estática de ángulo.*

<u>Profesor</u>: *¿Y cuál de las dos concepciones es más correcta?*

<u>F</u>: *Todas son definiciones.*

<u>Profesor</u>: *Pero alguna será mejor que las demás.*

<u>M</u>: *Claro, si da tres vueltas, está claro que la distancia no puede ser cero.*

(El profesor, para insistir más sobre la concepción operatoria, introduce seguidamente en la discusión la posibilidad o no de dibujar ángulos cuya medida sea mayor de 360º. Tal planteamiento podría resultar inconveniente desde el punto de vista matemático, por permanecer vinculado al uso figural de los ángulos, aunque parece procedente desde el punto de vista didáctico, toda vez que da apoyo gráfico al sentido operatorio del ángulo. La introducción de la representación en espiral (en “caracol”, dicen los estudiantes) puede ayudar a los estudiantes para encontrar seguridad en la ruptura conceptual que supone pasar de la concepción figural a la operatoria, en el momento crítico de la transición entre una y otra concepción).

Profesor: *Yo voy a introducir otro elemento. Tú, Ch, decías que no se puede dibujar el ángulo que ha recorrido al cabo de las tres vueltas.*

Ch: *Puedes hacer un caracol.*

M: *Eso, eso.*

Ch: *Pero eso no lo veo como ángulo. Quizá es que mi idea es muy distinta de la que tiene él.*

Profesor: *Pero lo cierto es que sí se puede dibujar el ángulo y tú decías que no se puede dibujar.*

Ch: *Yo veo que hay una vuelta, dos vueltas y el ángulo que sobre. Pinto las vueltas que se dan y al final quedan 0º.*

Profesor: *Suma dos ángulos de 200º.*

Ch: *Yo haría…*

Profesor: *Píntalo.*

Ch: *(Lo dibuja) El ángulo es lo que me quedaría después de dar una vuelta.*

Profesor: *Para ti, el ángulo de 400º sería igual que el de 40º.*

Ch: *Sí... Por eso hay que especificar que hay una vuelta más los 40º. Es un ángulo completo más 40º. Una circunferencia, más 40º.*

Profesor: *Pero, ¿una circunferencia es un ángulo?. ¿Una circunferencia tiene grados?*

(La discusión se desvía hacia este punto y el profesor decide concluir la sesión, invitando a que el próximo día traigan una definición de ángulo buscada en los libros. Al día siguiente traen definiciones sacadas de libros de texto, enciclopedias, enciclopedias electrónicas, pero todas giran en torno a la noción de ángulo como región angular).

6.3.2.3. Conclusiones: Complejidad de una noción elemental

El primer hecho que puede destacarse en relación con el episodio didáctico es que la búsqueda infructuosa de una definición general de una entidad abstracta como la de “ángulo”, que se produce en dicho episodio, es lógica, porque las entidades abstractas, conceptuales carecen, en general, de una definición universal.

Esa búsqueda es consecuencia de una falta de reconocimiento de la pluralidad de usos del término “ángulo”, según distintos contextos fenomenológicos, y por tanto, de una diversidad de reglas de uso de dicho término.

En cualquier caso, puede reconocerse un transito “natural” desde las concepciones figurales a las concepciones operatorias, acompañando a la formación matemática que van recibiendo los estudiantes, que conviene tener en cuenta.

Entendemos que el contexto figural acompaña, de modo natural, a la idea de “ángulo” en la geometría euclídea elemental, que es la primera teoría matemática que suelen conocer los estudiantes en la que interviene la noción de “ángulo”. Después, cuando los estudiantes toman contacto con la trigonometría, que induce una idea operatoria, rotacional de ángulo, pueden considerar ángulos mayores de 360º.

De hecho, la mayoría de los alumnos del episodio son de “letras”, de manera que no habían tenido contacto con la visión trigonométrica del objeto “ángulo”. Sí lo había tenido el alumno M, que es el que más claramente manifiesta una concepción operatoria.

En este episodio se muestra claramente la fuerte dependencia, para la realización de una tarea matemática, de las concepciones previas de los alumnos: la fijación de un sentido figural del ángulo impide, en este caso, resolver adecuadamente la tarea.

6.3.3. El ángulo como inclinación. Rectas paralelas cortadas por una secante

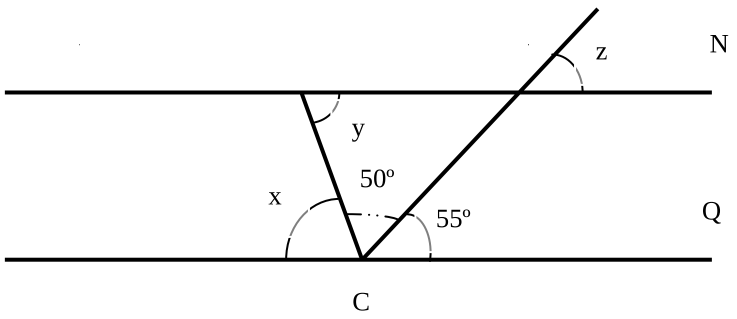
El segundo de los problemas propuestos es un problema planteado como "puente" hacia el tercero: tiene el sentido de recordar las relaciones de igualdad entre ángulos determinados sobre rectas paralelas por una secante, que es un dato importante para la resolución del tercer problema.

6.3.3.1. Análisis 'a priori' de la tarea

Enunciado:

Determinar el valor de los ángulos x, y, z sabiendo que las rectas MN y PQ son paralelas.

Explica y justifica tus respuestas.



Solución:

Consideramos dos posibles soluciones:

a) Por ser parte del ángulo llano en C, el ángulo x medirá: 180º - 50º - 55º = 75º. Por ser los ángulos x e y alternos-internos, y por tanto iguales, el ángulo y medirá 75º. Por ser z y el ángulo de 55º ángulos correspondientes, será: z = 55º.

b) Por ser z y el ángulo de 55º ángulos correspondientes, será: z = 55º. El ángulo opuesto por el vértice al z valdrá también 55º. Los tres ángulos del triángulo de vértices A, B y C sumarán 180º y, en consecuencia, y = 180º-50º-55º = 75º. Por ser los ángulos x e y alternos-internos, y por tanto iguales, el ángulo x medirá 75º.

<u>Análisis del enunciado:</u>

- El enunciado del problema incorpora, como elemento constitutivo del mismo, una representación gráfica de la situación problemática, un dibujo.
- En este dibujo, los puntos aparecen representados por letras mayúsculas y los ángulos por letras minúsculas, complementadas por unos "arquitos". Algunas letras mayúsculas se utilizan para representar vértices de ángulos; otras, para poder nombrar rectas. La medida de los ángulos se expresa en grados.
- La expresión 'valor de un ángulo' hace referencia a la medida de los ángulos. Las letras x, y, z (minúsculas) son usadas aquí para denotar medidas de amplitudes angulares, en correspondencia con el uso que se hace de los valores 50º y 55º colocados junto a los ángulos QCB y ACB. Esta expresión es conforme con la práctica escolar de denotar un ángulo por su medida en grados colocada en las proximidades del vértice.
- El problema se puede resolver de varias maneras. Considerándolas globalmente, se ponen en juego, entre otros, los siguientes elementos conceptuales:
  - Ángulo (como par de semirectas concurrentes)
  - Medida de un ángulo (en grados)
  - Ángulo llano
  - Medida de un ángulo llano (180º)

- Suma de ángulos
- Suma de los ángulos de un triángulo
- Rectas paralelas
- Rectas secantes
- Ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante
- Ángulos correspondientes
- Ángulos opuestos por el vértice
- Ángulos alternos-internos
- Traslación
- Giro
- Simetría

Análisis de la solución:

SOLUCIÓN A:

U1: *Por ser parte del ángulo llano en C, el ángulo* ***x*** *medirá: 180º-50º-55º=75º.*

Se expresa la división del ángulo llano en tres partes y el cálculo consiguiente de la medida del ángulo *x*. Se usa el hecho que el ángulo llano mide 180º y la suma de medidas angulares.

U2: *Por ser los ángulos* ***x*** *e* ***y*** *alternos-internos, y por tanto iguales, el ángulo* ***y*** *medirá 75º.*

Se expresa la aplicación de un teorema de igualdad de ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante para calcular la medida del ángulo ***y***.

U3: *Por ser* ***z*** *y el ángulo de 55º ángulos correspondientes, será:* ***z*** *= 55º.*

Análogas consideraciones que en el punto anterior.

SOLUCIÓN B:

U4: *Por ser **z** y el ángulo de 55º ángulos correspondientes, será: **z** = 55º.*

Análogas consideraciones que en los puntos U2 y U3.

U5: *El ángulo opuesto por el vértice al **z** valdrá también 55º.*

Se expresa la aplicación de un teorema de igualdad de ángulos opuestos por el vértice para calcular la medida del ángulo *y*.

U6: *Los tres ángulos del triángulo de vértices A, B y C sumarán 180º y, en consecuencia, **y** = 180º-50º-55º = 75º.*

Se expresa la aplicación del teorema relativo al valor de la suma de los ángulos de un triángulo, para deducir el valor del ángulo *y*, efectuando operaciones de suma y resta de ángulos.

U7: *Por ser los ángulos **x** e **y** alternos-internos, y por tanto iguales, el ángulo **x** medirá 75º.*

Se expresa la aplicación de un teorema de igualdad de ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante para calcular la medida del ángulo ***x***.

6.3.3.2. <u>Descripción y análisis del proceso de estudio</u>

Las primeras intervenciones son aclaratorias con respecto a las notaciones usadas para representar los diferentes elementos geométricos intervinientes: puntos, rectas, ángulos, etc.

<u>M</u>: Aquí <u>A</u> y <u>B</u>, <u>¿qué quieren decir</u>?

<u>P</u>: *¿Qué pensáis que quieren decir <u>A</u> y <u>B</u>.*

<u>Ch</u>: *Los puntos de corte, ¿no?*

<u>P</u>: *Las letras mayúsculas, ¿qué quieren decir?, ¿qué representan?, ¿qué representan <u>M</u> y <u>N</u>?*

<u>Ch</u>: *Puntos y la recta que pasa por esos puntos es la recta MN.*

<u>P</u>: *O sea, las letras mayúsculas aquí están representando, ¿qué?*

Ch: *Puntos.*

M: *Dos puntos. Una línea recta tiene que estar definida por dos puntos.*

P: *¿Y las minúsculas?*

Ch: *Ángulos.*

M: *Sí, ángulos.*

(En esta parte, es Ch la que hace la mayoría de las aclaraciones. Como luego se ve, es ella quien hace la mayor parte de las aportaciones sustanciales, de manera que no se puede saber con seguridad si el resto de los estudiantes comparte plenamente su conocimiento de notaciones.

Las restantes intervenciones están ya dedicadas de lleno a la resolución del problema y explicaciones pertinentes. En primer lugar, F calcula el valor del ángulo *x*, apoyándose en una idea incorrecta, la idea de que media circunferencia mide 180º, y razonando mal)

F: *x + 50 + 55 = 180º, porque media circunferencia vale 180º y por lo tanto x = 75º. Como este ángulo …*

P: *¿Qué ángulo?*

F: *Éste*

P: *Ese ángulo, ¿cómo se llama?*

F: ***y**. Como **y** y éste son simétricos, **y** y el de 50º son iguales.*

P: *¿Por qué?*

F: *Es por la figura.*

(Discuten entre todos y F comprende que su argumentación no es correcta).

(Las siguientes intervenciones de Ch son muy diferentes. En primer lugar, calcula el valor de *x* teniendo en cuenta que este ángulo es una parte del ángulo llano con vértice en *C*. En segundo lugar, calcula el valor de *y*, teniendo en cuenta que *x* e *y* son ángulos alternos-internos. Después calcula el valor de *z*, de dos formas distintas: como ángulo correspondiente al de *55º* y como opuesto al ángulo, con vértice en *B*, del triángulo *ABC*. La intervención de Ch que es muy aclaratoria del papel de los conocimientos previos en las tareas de resolución de problemas).

P: *Ahora tú, Ch.*

Ch: *(Argumenta de nuevo que **x** = 75º, pero ahora diciendo que es porque **x** + 50 + 55 forma un ángulo llano, que debe valer 180º. Explica correctamente, a instancias del profesor qué es un ángulo llano. Indica que **y** y **x** tienen que ser iguales, por alternos internos).*

P: *¡Qué empollona! ¡Se lo sabe todo! ¡Alternos internos!*

Ch: *(Entre risas). Eso es que se me ha venido a la cabeza. Dos ángulos alternos internos son dos ángulos que están entre rectas paralelas con una recta que las cruza y éstos son alternos internos y éstos (señala los correspondientes)... no me acuerdo cómo se llaman, también tendrían que ser iguales. Y luego el ángulo z tiene que valer 55º. Yo lo he hecho de dos formas. Una es sabiendo los ángulos en el triángulo, que miden 180º y como uno vale 50º y otro 75º, pues yo lo sumo, a 180º le quito eso y me sobra el otro ángulo. Y la otra forma es comparando el ángulo z, que es igual que éste, porque estos dos ángulos son... no me acuerdo como se llaman.*

P: *No te acuerdas como se llaman…*

Ch: *No, y también z es igual al de 55º, porque son dos líneas rectas con una que las cruza u se puede trasladar un ángulo sobre otro. Es que yo me acuerdo que en dos rectas paralelas cortadas por otra salen muchos ángulos iguales, éste con éste,...*

P: *Bueno, yo te preguntaría ahora, ¿por qué dos ángulos alternos-internos son iguales?*

Ch: *Pues eso es lo que estaba pensando. Me tengo que parar a pensarlo. Una explicación es que... se me acaba de ocurrir (da una explicación basada en traslaciones y giros, con incorrecciones formales). Es que no me acuerdo de los nombres de las propiedades.*

(M va a operar de un modo semejante)

P: *Bueno, más o menos está hecho. Ahora M.*

M: *Yo primero he averiguado el ángulo **z** igual que en la segunda forma de Ch. Si yo corto dos rectas paralelas con otra, salen cuatro ángulos, que son iguales dos a dos. Yo sabía que si este ángulo vale 55º, éste (se refiere al **z**) también valía 55. Luego, por esa misma propiedad, también éste (señala el opuesto por el vértice al **z**) también vale 55. Y entonces éste (señala el **y**) vale 75º. Y me queda el **y** que sale por ángulo llano.*

(Finalmente Ma vuelve a mostrar el desconocimiento de la idea de ángulo llano y el error conceptual de que la circunferencia mide *180º*).

P: *Bueno, ahora tú, Ma.*

Ma: *Yo no me acuerdo de lo que es un ángulo llano. He calculado x por que los tres ángulos son la mitad de una circunferencia, o sea 180º.*

P: *Bueno, paramos aquí por ahora.*

6.3.3.3. Conclusiones

La estudiante Ch tiene los conocimientos necesarios para resolver el problema en cuestión y por ello opera correctamente. Conoce no sólo las relaciones de igualdad entre ángulos determinados sobre rectas paralelas por una recta secante a ellas (aunque se le hallan olvidado los nombres de los teoremas), sino que tiene una cierta idea del por qué de esas relaciones de igualdad, en términos de los movimientos (traslaciones, giros, etc.) necesarios para pasar de unos ángulos a otros, para hacer transformaciones de ángulos que no modifican su amplitud. Es decir, tiene formado un esquema conceptual apropiado al tipo de problema en cuestión.

Como veremos en el siguiente apartado, al tener Ch constituido este esquema conceptual, puede resolver también el tercer problema, que es sustancialmente más complejo.

Otros alumnos, como F y Ma, tienen errores conceptuales importantes, como la idea de que media circunferencia vale *180º*, que dificultan el proceso de resolución del problema.

6.3.4. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

El tercer problema se refería a la demostración de un teorema clásico de geometría elemental*: la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es un llano*. Se pretendía mostrar con él la *dependencia* de la capacidad para realizar dicha demostración del *previo conocimiento* de elementos conceptuales tales como las relaciones de igualdad entre ángulos determinados por una secante sobre dos rectas paralelas (por ejemplo, la igualdad de ángulos alternos-internos). Sin ese conocimiento pueden aflorar otros esquemas de comprobación pragmáticos, manipulativos, pero no una demostración deductiva.

Comenzaremos el análisis del problema y los resultados obtenidos con él desarrollando un detallado análisis del problema y sus posibles soluciones, antes de pasar al análisis del episodio didáctico concreto que resultó al tratar de resolverlo.

6.3.4.1. Análisis 'a priori' de la tarea

Enunciado:

Demuestra que la suma de ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano.

Solución:

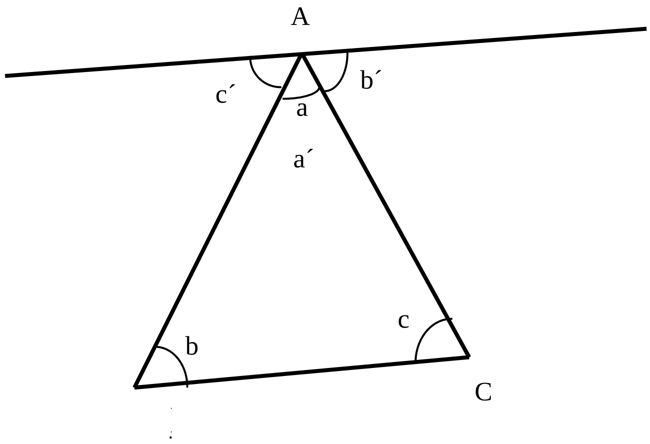
Balacheff (1988) específica diferentes *pruebas pragmáticas* y *demostraciones matemáticas*, que se pueden utilizar para demostrar este teorema:

Indica dos pruebas pragmáticas, basadas en manipulaciones sobre un triángulo dibujado sobre un folio: mediante recorte y mediante pliegues de los ángulos, para componer con ellos un ángulo llano.

Considera, además, varias demostraciones, ligadas a diferentes concepciones de ángulos: la prueba de Euclides, ligada al ángulo como inclinación y varias demostraciones ligadas al ángulo como rotación.

Nosotros consideramos como demostración estándar las demostraciones ligadas al ángulo como inclinación, basadas en las relaciones de igualdad entre ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante, por estar más ajustadas al contexto habitual de enseñanza de dicha demostración en nuestros centros escolares. Como ejemplo concreto, apuntamos el siguiente:

Sea ABC un triángulo cualquiera y a, b, c, los ángulos correspondientes. Trazamos por A la paralela a BC formándose tres ángulos: a, b' y c' cuya suma es un llano. Como b' = b y c' = c, por ser alternos internos, queda demostrado el teorema.



Análisis del enunciado:

- El enunciado globalmente describe una tarea (demostrar un teorema) que se demanda a los alumnos, a los que se pide dar una respuesta en forma de demostración matemática.
- Existen procedimientos estandarizados que la institución matemática establece para demostrar el teorema contemplado en el enunciado del problema. La demostración ha de hacerse, según la institución matemática, apoyándose en otros postulados o teoremas de la teoría en cuestión -geometría euclídea-, como pueden ser los teoremas relativos a

las relaciones de igualdad entre ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante.

- Los diversos términos y expresiones (objetos ostensivos) que aparecen en el enunciado aluden a las siguientes entidades conceptuales.

  - demostración
  - ángulo
  - igualdad de ángulos
  - suma de ángulos
  - ángulo llano
  - triángulo
  - ángulo de un triángulo

- Para hacer la demostración se han de usar otras entidades conceptuales, tales como:

  - punto
  - segmento
  - recta
  - vértices
  - rectas paralelas
  - ángulos alternos-internos
  - lado de un triángulo

<u>Análisis de la solución:</u>

U1: *Sea **ABC** un triángulo cualquiera y **a**, **b**, **c**, los ángulos correspondientes.*

Se denota la acción de dibujar un triángulo genérico, simbolizando sus vértices con las letras *A*, *B*, y *C*, y sus ángulos con las letras *a, b* y *c.*

Es una manifestación de la práctica de apoyar la demostración sobre un dibujo - en este caso el del triángulo *ABC* -, para ayudar a su realización.

U2: *Trazamos por* ***A*** *la paralela a* **BC** *formándose tres ángulos:* ***a*****,** ***b'*** *y* ***c'*** *cuya suma es un llano.*

Denotamos la acción de dibujar una recta paralela al lado *BC* del triángulo, que pase por el punto *A*. Aquí hacemos un uso explícito o implícito del postulado de la existencia de una (única) paralela a una recta por un punto dado. Expresamos también el reconocimiento en esa recta del ángulo llano de vértice *A*. Expresamos también, por último, la acción de descomponer dicho ángulo llano en tres ángulos, uno de ellos el ángulo *a* del triángulo, y de simbolizar los otros dos ángulos con las letras *b´* y *c´*. La intención de este segundo paso de la demostración es la de hacer posible la aplicación, que se efectuará en el siguiente paso, de los teoremas relativos a las relaciones de igualdad entre ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante.

U3: *Como b' = b y c' = c, por ser alternos internos, queda demostrado el teorema.*

Denotamos la acción de aplicar uno de los teoremas de igualdad de ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante y de concluir, como consecuencia, el cumplimiento de la demostración.

6.3.4.2. <u>Descripción y análisis del proceso de estudio</u>

(En las primeras interacciones, **M** razona sobre el caso del triángulo equilátero. Partiendo de que los ángulos del triángulo equilátero miden *60º*, deduce que se cumple el teorema para este caso particular)

P: *Venga,* ***M****, ¿qué estás haciendo?*

<u>M</u>: *Pues yo lo primero que he intentado es dibujar un ángulo llano y luego he dibujado un triángulo equilátero.*

P: *¿Por qué? Con ese triángulo equilátero, ¿qué haces?*

M: *Ah, no sé,... He intentado...*

P: *Pero, esos valores que has escrito, ¿qué son? ¿60, 60 y 60…?*

M: *60, 60 y 60 son lo que miden los ángulos del triángulo.*

P: *Y con eso, ¿qué sacas?*

M: *Pues que eso es lo mismo que mide el ángulo llano.*

P: *O sea, que ves experimentalmente ahí que…*

M: *Sí, pero ya no soy capaz de justificar ni explicar nada más.*

(En la siguiente intervención, **M** trata de considerar otro ejemplo, usando un ángulo recto de *90º*, otro de *40º* y otro de *50º*, pero no es capaz de aportar ninguna justificación para este otro caso)

P: *¿Y qué más has hecho?*

M: *Luego he intentado no hacer un triángulo equilátero, que es muy fácil, y he intentado otro más complicado, con un ángulo recta, de 90º, otro de 40º y otro de 50º. Pero no he sido capaz de justificar ni razonar nada más.*

(F, en las siguientes interacciones, sigue un proceso similar, pero comprobando visualmente, de forma aproximada, que el teorema se cumple)

P: *F, ¿tú qué has hecho?*

F: *Yo no sé por qué. He partido de una circunferencia.*

P: *¿Por qué?*

F: *Por que una circunferencia tiene 360º, que es dos veces 180º.*

(El profesor introduce una discusión colateral para revisar el error de que "la circunferencia tiene 180º", que no consideramos).

F: *Entonces, yo he dibujado el triángulo y he partido de un triángulo equilátero, que sé que todos los ángulos son de 60º y suman 180º, que es lo que mide el ángulo llano. Luego he dibujado otros triángulos, con ángulos diferentes. Entonces, más o menos 120º, 30º y 30º. Otro de 75º, 50º y 55º. Y a partir de ahí tengo una posibilidad mucho más amplia de...*

P: *O sea, que tú estás viendo experimentalmente, de una forma aproximada, que posiblemente se cumple eso de que, en general, sea de 180º.*

F: *Sí, exactamente.*

(En las siguientes interacciones, M realiza una conjetura errónea, pero que da idea de que está desarrollando una argumentación propia)

P: *M, ¿y tú?*

M: *Yo la verdad es que no he sido capaz. Yo lo único que he sacado más en conclusión, después de hacer un par de ejemplos, que no han servido para nada…*

P: *Pero, ¿qué ejemplos?*

M: *Demostrar simplemente que con dos triángulos distintos mide 180º.*

P: *Comprobarlo, ¿no?*

M: *Eso no tiene más historia. Lo que sí he caído en la cuenta es de que en un triángulo, por más que yo quiera, los ángulos nunca serán mayores de 90º.*

P: *¿No puede haber ángulos mayores de 90º?*

M: *No. Ah, sí, sí. Entonces no he sacado nada. No sé demostrarlo.*

P: *¿Tú sabes lo que te ha pasado? Que has trabajado con ángulos isósceles. Y en el isósceles no te sale nunca un ángulo de 90º o mayor de 90º. Uno sí, pero dos no.*

M: *Sí, sí.*

(En las interacciones siguientes, el profesor sugiere un acercamiento dinámico a la demostración. El profesor presenta ostensivamente el comportamiento de los ángulos de una serie de triángulos isósceles cuyas alturas van disminuyendo. Los ángulos de la base disminuyen (su medida se aproxima a cero) mientras que el ángulo mayor crece (su medida se aproxima a *180º).*

Sin duda hay en esta comprobación experimental un cierto progreso. Se llega a establecer tres secuencias de desigualdades que se cumplen entre los tres ángulos:

$a1 > a2 > ... > an...\ \ (ai < 180)$

$b1 < b2 < ... < bn...\ \ (bi > 0)$

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n \ldots \quad (c_i > 0)$$

Aunque de estas desigualdades no se puede inferir ninguna constancia respecto de la suma $a_i+b_i+c_i$.

P: *Y si yo sigo estirando este triángulo - referencia a la figura - reduciendo la altura, ¿qué le pasa a los ángulos?*

A: *Los de abajo van disminuyendo y los de arriba aumentando*

P: *Aumentando. Cada vez más. Aproximándose cada vez más, ¿ a cuánto?*

A: *A 180º.*

P: *Y los otros, aproximándose ¿a cuánto?.*

A: *A 0º.*

P: *O sea, que por ahí, intuitivamente, algo se podría ver del teorema.*

En las interacciones siguientes, Ch propone una comprobación experimental del teorema con material manipulativo que convence a los compañeros. El profesor hace notar que se trata de una comprobación y no una demostración.

P: *Ch, tú ¿qué has hecho?*

Ch: *Una cosa que manipulativamente se me ha ocurrido.*

P: *¿Se te ha ocurrido?*

Ch: *Lo vi hace tiempo y me he acordado.*

P: *Bueno.*

Ch: *Yo cojo un triángulo cualquiera. (Se refiere a un triángulo dibujado sobre papel) Le coloreamos los vértices por delante y por detrás. Los voy doblando y me encuentro que cuando los junto los tres, me sale un ángulo llano. (Hace el doblado de forma práctica).*

P: *O sea, que manipulando el papel consigo los tres ángulos y que me salga un ángulo llano. Eso, ¿es una demostración?*

Ch: *Sí lo es.*

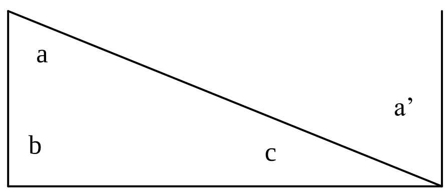
(Los restantes alumnos coinciden en la afirmación).

P: *¿Saldría con cualquier triángulo?*

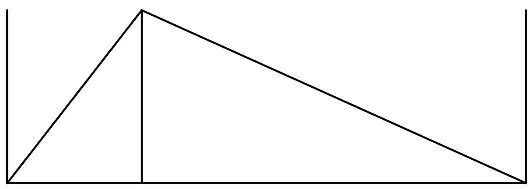
Ch: *Yo creo que sí, vamos a comprobarlo.*

P: *No puede ser una demostración, porque tú misma lo has comprobado en varios casos y ahora dices "yo creo que sí".*

(Se discute sobre el concepto de demostración. Deciden comprobar otro caso. Casualmente, el triángulo está mal recortado y "no sale" el teorema. Seguidamente, Ch desarrolla una demostración, utilizando la igualdad de ángulos alternos-internos (aunque es el profesor el que utiliza esa terminología), empezando con un triángulo rectángulo



resultando la demostración de la igualdad de *a* y *a´*, lo que hace ver el hecho de que *a* + *c* es un ángulo recto. Posteriormente amplia la demostración a cualquier triángulo, por descomposición en dos triángulos rectángulos



(El profesor continúa la discusión).

P: *¿Esto vale para cualquier triángulo? ¿Esto es una demostración?*

A: *Sí, sí.*

P: *¿Por qué ha podido Ch hacer esta demostración?*

A: *Por los conocimientos matemáticos previos que tenía.*

P: ¿Qué conocimientos?

Ch: *La idea de igualdad de ángulos alternos-internos.*

P: *Esa idea es clave para la demostración. Sin ese dato no se puede hacer la demostración, al menos con este formato, de forma rigurosa. Bueno, lo vamos a dejar aquí.*

6.3.4.3. Papel de los conocimientos previos en la producción de demostraciones.

Este episodio muestra con claridad la *dependencia* de la capacidad de realizar la demostración que plantea el problema en cuestión del *previo desarrollo* de determinadas habilidades, en particular el conocimiento de los teoremas de igualdad entre ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante.

En la demostración se pone en juego una dialéctica sutil entre objetos notacionales y objetos conceptuales. Así las letras *A*, *B* y *C* representan (ostensivamente) los vértices de un triángulo. Pero la figura pretende representar un triángulo arbitrario, genérico (una abstracción), circunstancia crucial para la verdad del teorema. Igual se puede decir de las letras *a*, *b*, *c*, la recta trazada por el vértice *A* y las figuras angulares producidas, aunque se hagan con un trazado impreciso.

Por eso, un acto semiótico esencial consiste, en este caso, en interpretar el proceso constructivo descrito como la realización efectiva de la suma de los tres ángulos del triángulo dado, pero generalizable a cualquier triángulo plano, de forma que se obtendría el mismo resultado.

La dependencia, puesta de manifiesto por los estudiantes, de sus formas de demostración de respecto de los conocimientos conceptuales previos implicados, es decir, del previo conocimiento esquemas conceptuales apropiados (conceptos, teoremas, procedimientos, etc.), puede ayudar a entender la dificultad de la demostración deductiva, ya comentada en diferentes apartados de esta tesis, y la importancia del momento de trabajo de la técnica en la realización de demostraciones.

En el episodio hemos podido analizar cuatro procesos de prueba, de los cuales sólo el último, el realizado por Ch, puede ser calificado de demostración matemática.

Las pruebas empíricas dadas por M y F (aunque en este caso son además circulares) están ligadas al uso de objetos notacionales, en este caso figuras de triángulos equiláteros, triángulos rectángulos, etc. Si hubieran dispuesto de instrumentos de dibujo posiblemente hubieran medido los ángulos de las figuras y comprobado la suma con un cierto grado de aproximación. Estas técnicas pueden desempeñar un papel necesario para algunos sujetos en el *momento de primer encuentro del proceso de estudio de la tarea* (Chevallard y cols, 1997).

Las mismas consideraciones se pueden aplicar a la prueba manipulativa de Ch, aunque en este caso los sujetos parecen atribuir al proceso las características de una demostración, a pesar de los posibles errores de percepción y manipulación de los objetos físicos utilizados.

La prueba dinámica presentada por el profesor tiene también un valor heurístico. Permite fijar cotas al valor de los ángulos del triángulo isósceles: Cuando uno de ellos es próximo a 180º los otros dos son próximos a 0º; si uno es próximo a 0º los otros dos son próximos a 90º. Se puede sólo conjeturar que la suma está próxima a 180º. El proceso de prueba pone en juego experimentos con objetos figurales, esto es, en el dominio ostensivo. Pero permite establecer el carácter necesario de las acotaciones indicadas de los ángulos, las cuales son propiedades conceptuales del triángulo isósceles.

¿Qué es lo que distingue a la cuarta prueba de las restantes? En una visión axiomática de las matemáticas decimos que la prueba nos convence de la verdad del teorema porque se deduce de conceptos, postulados y proposiciones previamente aceptadas. La prueba establece una secuencia de interpretaciones que relaciona el enunciado del teorema con la red de conceptos y proposiciones previamente admitidas.

Bajo la perspectiva pragmática/convencional defendida por Wittgenstein el teorema no establece una propiedad del objeto abstracto que llamamos 'triángulo', porque tales objetos no tienen existencia alguna. Se trata de una norma de representación, una nueva regla gramatical, que especifica que si algo se caracteriza correctamente como un triángulo, también se dice correctamente que tiene ángulos cuya suma es 180º, y se excluye como sin sentido las palabras 'es un triángulo cuyos ángulos suman 185º. La geometría euclídea es la sintaxis del lenguaje para describir las formas y relaciones espaciales entre objetos. Sus axiomas y teoremas son reglas de sintaxis, convenios de expresión, y por tanto, partes de la gramática. La prueba es un argumento que nos convence de la conveniencia de ampliar la gramática, esto es, las reglas para el uso de las expresiones matemáticas, en la dirección marcada por el teorema.

6.4. EL MOMENTO DE TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL DESARROLLO DE ESQUEMAS CONCEPTUALES.

Como se ha podido apreciar en la descripción de los episodios didácticos anteriores, el proceso de demostración es un proceso que está determinado por el contenido semiótico del campo de problemas al que pertenece la demostración, siendo necesaria no sólo una determinada competencia cognitiva para poder llevarlo a término, sino también el conocimiento de conceptos y procedimientos propios del campo de problemas en cuestión. De forma que la evolución en los esquemas de demostración aparece ligada a la adquisición de esas técnicas instrumentales.

Se puede apreciar así la importancia del *momento del trabajo de la técnica,* momento en el que se produce la adquisición de destrezas operativas necesarias para la resolución de los problemas del campo de problemas en cuestión.

Cuando, por ejemplo, los estudiantes entran en contacto con la trigonometría, pueden transformar su idea de la noción de ángulo, adquiriendo la concepción del ángulo como rotación, de forma que pueden manejar mentalmente ángulos mayores de 180º.

Cuando los alumnos desarrollan el esquema conceptual de las relaciones de igualdad entre ángulos de rectas paralelas cortadas por una secante, pueden demostrar el teorema relativo a la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

La idea de esquema conceptual nos parece importante para expresar, a nivel cognitivo, la importancia del momento del trabajo de la técnica. Pues es en este momento cuando los alumnos pueden organizar sus conocimientos, desarrollando esquemas conceptuales operativos, aplicables a otras situaciones problemáticas cercanas a aquellas en que los construyeron.

Para Zorroza (1998), la adquisición de esquemas conceptuales previos aparece como un componente esencial de la habilidad para resolver problemas. Zorroza establece el momento en que el sujeto resolutor relaciona el problema con algunos de sus esquemas conceptuales previos como el momento de *integración* personal del problema. Cuando un problema no encuentra en el conocimiento del sujeto un esquema al cual adecuarse de forma apropiada, éste es mal interpretado y resulta más difícil que el sujeto consiga resolverlo.

Para Zorroza, los esquemas son estructuras de información prototípica, genéricas, almacenadas en la memoria, capaces de interpretar, de dar significación a nuevas situaciones, relacionándolas con otras anteriormente experimentadas. Estructuras no estáticas, sino que están en desarrollo y que son necesarias para alcanzar el dominio y habilidad propio del experto en el campo en cuestión.

Los esquemas conceptuales no sólo incluyen conocimientos factuales y procedimientos; incluyen también estrategias. De acuerdo con Zorroza, una diferencia importante entre novatos y expertos es que éstos, cuando se enfrentan a problemas novedosos, utilizan estrategias de resolución que han desarrollado en problemas anteriores.

Esta noción de esquema conceptual tiene un antecedente importante en Piaget (1950). Para él aparece fundamentalmente como esquema de acción, entendida como coordinación mental de acciones. Es una noción que aparece ligada al concepto *de abstracción reflexiva*, que es considerado como construcción de objetos mentales, resultantes de acciones mentales sobre los objetos.

Siguiendo esa misma línea de pensamiento, Dörfler (1991) describe también el esquema conceptual como esquema de acción, como invariante de las acciones, ligado a un proceso de generalización, de abstracción, en el que los objetos y los procesos son cosificados, son convertidos en símbolos, sobre los que se desarrolla la acción mental, con un cierto grado de autonomía del significado concreto de dichos símbolos.

La propia noción de esquema personal de demostración puede acogerse a esta idea de esquema conceptual, apareciendo integrado con otros esquemas conceptuales.

La adquisición de estos diferentes esquemas conceptuales puede ser un objetivo importante del momento de trabajo de la técnica.

6.5. CONCLUSIONES

En los capítulos anteriores habíamos tipificado los esquemas personales de demostración matemática (con una validez restringida de momento a la población investigada), que aparecen como estructuras de pensamiento consistentes, estables, susceptibles de operar de un modo similar en contextos diferenciados.

Sin embargo, cuando el sujeto se enfrenta a procesos de validación que implican tareas donde no es suficientemente experto, la experiencia que hemos desarrollado muestra que el proceso de demostración aparece influido, inevitablemente, por el contenido semiótico del campo de problemas al que pertenece la demostración, siendo necesario para la realización efectiva de la demostración un dominio de conceptos, procedimientos y estrategias propios del campo de problemas en cuestión, de forma que la evolución en los esquemas de demostración aparece ligada a la adquisición de esas técnicas instrumentales.

En la experiencia descrita, el alumno Ch es el único que tiene los conocimientos necesarios para resolver los problemas planteados. Conoce no sólo las relaciones de igualdad entre ángulos determinados sobre rectas paralelas por una recta secante, sino que tiene una cierta idea del por qué de esas relaciones de igualdad, en términos de los movimientos (traslaciones, giros, etc.) necesarios para pasar de unos ángulos a otros. Es decir, tiene formado un esquema conceptual apropiado a los problemas en cuestión. Ello le permite resolver los problemas y desarrollar una demostración del teorema planteado. Sin esos conocimientos pueden aflorar otros esquemas de demostración empíricos, manipulativos, pero no una demostración deductiva.

Esta dependencia de la demostración deductiva del previo conocimiento de determinados conceptos, teoremas, procedimientos, esquemas conceptuales, etc., aparece como causa explicativa de la dificultad que la demostración matemática de carácter deductivo tiene para los estudiantes, y hace resaltar la importancia del momento de trabajo de la técnica, para un adecuado desarrollo de la habilidad de entender y realizar demostraciones en ámbitos conceptuales variados.

CONCLUSIONES FINALES E IMPLICACIONES

En esta última sección presentamos una síntesis de las conclusiones finales obtenidas sobre los distintos objetivos planteados inicialmente, mostrando en qué medida se han cumplido las expectativas formuladas en el capítulo 1. Describimos también algunas cuestiones abiertas, que dadas las limitaciones de toda investigación -y sobre todo la complejidad del campo abordado- requerirían el diseño e implementación de nuevas investigaciones en el futuro, tanto teóricas como experimentales. Dado el compromiso ineludible de la didáctica de las matemáticas con la práctica de la enseñanza nos atrevemos a presentar algunas recomendaciones que se derivan de nuestra investigación para la mejora de la enseñanza de la demostración en la clase de matemáticas.

OBJETIVO1:

Analizar el campo conceptual de la argumentación matemática, mostrando la complejidad de dicho campo y su dependencia de los contextos institucionales, en el marco de la teoría del significado institucional de los objetos matemáticos desarrollada por Godino y Batanero (1994, 1998).

El estudio realizado en el capítulo 2 ha mostrado que la argumentación y la demostración matemática -como un tipo especial de argumentación- adquieren connotaciones particulares en distintos contextos institucionales en los cuales se pone en juego.

El estudiante de matemática debe aprender en el seno de la clase de matemáticas las características notacionales, fenomenológicas y conceptuales de la demostración. Pero cada estudiante es miembro -y está sujeto, por tanto a las influencias- de distintos contextos institucionales: particularmente no puede evitar participar como ciudadano en la vida cotidiana y emplear todos los recursos característicos del razonamiento informal; es también alumno de las clases impartidas sobre ciencias experimentales, donde es inducido a pensar en términos empíricos e inductivos; en las clases de matemáticas recibe, por otra parte, diferentes modelos de demostración matemática. La influencia de estos diferentes modos de razonar condiciona su comprensión y dominio de la demostración matemática.

Conocer en detalle la manera particular de interactuar esos distintos modos de argumentación en las clases de matemáticas precisaría diseñar investigaciones clínicas y etnográficas pormenorizadas.

Herbst (1998) ha caracterizado con riqueza de matices "lo que cuenta como demostración en la clase de matemáticas", mostrando que incluso el ejemplo aislado, la ostensión, la analogía y la metáfora, entre otros procedimientos no deductivos, son aceptados como herramientas de validación. En esta dirección nos debemos preguntar cuestiones como las siguientes: *¿En qué medida se usan de manera legítima las técnicas argumentativas en los momentos exploratorios del estudio de los problemas matemáticos? ¿En qué grado depende la elaboración de las demostraciones deductivas matemáticas de los resultados de las restantes formas argumentativas puestas en juego en los momentos exploratorios?*. Son cuestiones que dejamos abiertas para futuras investigaciones.

OBJETIVO2:

Introducir una tipología de entidades matemáticas y de relaciones semióticas entre las mismas que permita el análisis de los procesos interpretativos puestos en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas - en particular de la demostración matemática-, en línea con el modelo de Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (1999) sobre el significado de los objetos matemáticos.

El modelo descrito en la sección 3.4, basado en postular la puesta en juego en la actividad matemática de tres tipos de entidades (que denominamos notacionales, fenomenológicas y conceptuales) y la adopción de la noción de relación semiótica como entidad relacional básica, nos permite explicar, al menos en parte, las dificultades y bloqueos de los sujetos en la elaboración de las argumentaciones matemáticas.

Su aplicación al análisis de algunos episodios didácticos muestra la complejidad ontológica y semiótica de la actividad matemática, incluso ante tareas elementales como las estudiadas. Pensamos que esta clase de análisis puede ayudar a superar una cierta ilusión de trasparencia ante los procesos de abstracción y razonamiento en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al mostrarnos la multiplicidad de códigos que se ponen en juego.

La interpretación de la demostración matemática como cadena de relaciones semióticas nos ha permitido desarrollar una visión más integradora de las distintas formas de argumentación matemática, haciéndonos valorar las formas no deductivas de argumentación como elementos necesarios en la construcción de las demostraciones matemáticas.

OBJETIVO3:

Caracterizar los esquemas personales de demostración matemática de los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba y aportar criterios para su evaluación, por medio de sus prácticas argumentativas matemáticas.

HIPÓTESIS O3:

Los estudiantes que inician sus estudios universitarios en la Universidad de Córdoba tienen importantes dificultades en el desarrollo de demostraciones matemáticas de carácter deductivo, incluso en demostraciones elementales, existiendo entre ellos una variedad de esquemas personales de demostración matemática.

Los resultados descritos en la sección 4.2 han confirmado esta hipótesis. En nuestro estudio, sólo 186 de 622 estudiantes de la Universidad de Córdoba analizados, algo menos del 30% de alumnos participantes en la prueba fueron capaces de resolver correctamente los dos problemas de la prueba, pese a la elementalidad de los mismos.

Los estudiantes manifiestaron, además, una variedad de esquemas personales de demostración, situadas en torno a dos formas básicas de argumentación, empírico-inductiva y deductiva, siendo destacable la proporción de estudiantes que no superan las primeras. Este hecho es congruente con los descritos al respecto por diversos autores, como Fischbein (1982), Senk (1985) o Martin y Harel (1989), en distintos países.

Ese dato puede ser importante, porque, partiendo de esta realidad, es conveniente articular, en los distintos niveles de enseñanza, esas dos formas básicas de argumentación, propiciando en los estudiantes el desarrollo progresivo de los conocimientos, la capacidad discriminativa y la racionalidad necesarios, para que puedan progresar de una a otra forma de argumentación.

OBJETIVO 4:

Estudiar la influencia de diversos factores condicionantes de los esquemas de demostración matemática de los estudiantes.

HIPÓTESIS O4.1:

En los esquemas personales de demostración de los estudiantes no influye el contenido matemático de los problemas de demostración (aritmético, geométrico) planteados en la prueba.

La investigación realizada para contrastar esta hipótesis ha permitido corroborarla. El estudio de la asociación de las puntuaciones en ambos problemas indica que, en las condiciones de la prueba, el contenido matemático de los problemas planteados (aritmético, geométrico) no influyó en los esquemas personales de demostración de los estudiantes, lo que nos ha permitido considerar la idea de que, para esta clase de problemas elementales, la capacidad de efectuar una demostración matemática deductiva resulta independiente del contenido matemático de las tareas.

HIPOTESIS O4.2:

Los esquemas personales de demostración matemática evolucionan significativamente si a los estudiantes se les informa previamente de las características exigidas a las demostraciones matemáticas.

La investigación realizada para confirmar esta hipótesis no ha confirmado esta hipótesis. El hecho de informar por escrito, a una parte de los estudiantes, de las características de la demostración matemática no ha mejorado el tipo de esquemas de demostración de los estudiantes, y por tanto, no hemos encontrado diferencias significativas en las puntuaciones de la prueba según esta variable de la tarea.

OBJETIVO5:

Indagar las posibilidades de interpretar los esquemas personales de demostración matemática como estructuras de pensamiento estables, coherentes con otras formas consolidadas de razonamiento.

La independencia de los esquemas personales de demostración matemática respecto a factores como el contenido matemático o la intervención incidental del profesor, en las condiciones de la prueba, nos sugirió la hipótesis de interpretar los esquemas personales de demostración como estructuras intelectuales estables, bajo ciertas condiciones, en la línea de las teorías psicológicas que analizan la evolución del pensamiento por niveles, como las teorías de Piaget (1968) o de Van Hiele (1986).

Para contrastar esta hipótesis hemos realizado un estudio de casos con estudiantes alumnos del último curso de la carrera de Psicopedagogía de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba, habiendo podido constatar la estabilidad de los esquemas personales de demostración, sus vinculaciones con las estructuras generales de pensamiento geométrico de los estudiantes y la coherencia de los esquemas de demostración con las concepciones personales de los alumnos acerca de la demostración.

OBJETIVO6:
Indagar las posibilidades del enfoque semiótico-antropológico a la didáctica de las matemáticas para explicar las dificultades de los estudiantes universitarios con la demostración matemática.

Aunque hemos podido constatar, en el contexto de nuestro estudio, la existencia de un cierto grado de independencia de los procesos de demostración respecto del contenido matemático de las tareas, cuando éstas son elementales, nos hemos preguntado también por el significado de los esquemas personales de demostración en situaciones más problemáticas, ante las que el sujeto no es suficientemente experto.

Hemos encontrado que las investigaciones actuales en el estudio de los procesos de razonamiento se orientan hacia la consideración de una cierta dependencia del contenido de la tarea, siendo necesaria no sólo una determinada competencia cognitiva para poder llevar a término una demostración, sino también un amplio conocimiento de conceptos y procedimientos propios del campo de problemas en cuestión.

Se puede apreciar, así, la importancia del *momento del trabajo de la técnica* -en la terminología de Chevallard y col. (1997)- en el proceso de aprendizaje. Un momento en el que se produce la adquisición de destrezas operativas necesarias para la resolución de los problemas del campo conceptual en cuestión. Destrezas entre las que hemos destacado, con especial énfasis, el desarrollo de esquemas conceptuales, que actúan como marcos teóricos de referencia donde encuadrar los problemas y sus posibles modos de solución.

Como conclusión general de nuestro estudio podemos indicar, en primer lugar, que la *teoría del significado de los objetos matemáticos* de Godino y Batanero (1994, 1998), enriquecida con las aportaciones de Godino y Recio (1997, 1998), ha aportado un marco teórico adecuado para desarrollar nuestra aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.

Los esquemas personales de demostración matemática de los estudiantes aparecen relacionados con los significados institucionales de la demostración matemática, en consonancia con las presunciones del modelo, que trata de articular las dimensiones personales e institucionales del conocimiento matemático, postulando una relación entre objetos y significados personales e institucionales.

Así, los esquemas personales de demostración que hemos denominado *argumentación explicativa*, *prueba empírico-inductiva*, *prueba deductiva informal* y *demostración deductiva,* aparecen relacionados con los modos de argumentación matemática institucionales que hemos denominado argumentación informal, *prueba empírico-inductiva, prueba deductiva informal y demostración deductiva.* Resultando lógico, en todo caso, que los estudiantes desarrollen esquemas personales de demostración coherentes con los modos argumentales que existen en la vida cotidiana, ámbitos científicos, matemáticos, lógicos, etc., con los que conviven dentro y fuera de la institución escolar.

Nuestro interés profesional está ligado al dominio de los procesos de enseñanza y aprendizaje en situaciones reales, en el aula. Para avanzar en esa dirección hemos analizado los procesos de validación puestos en juego en la solución de una pequeña muestra de problemas de geometría elemental por un grupo de estudiantes bajo nuestra dirección.

El análisis de estos procesos nos ha inducido a utilizar otras herramientas teóricas pertinentes que permitan describir y explicar los fenómenos observables.

El estudio epistemológico realizado, bajo un enfoque antropológico-semiótico, permite encontrar explicación a las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración matemática. Podemos inferir del mismo que parte de las dificultades de los estudiantes con la demostración matemática derivan de la variedad de significados del concepto demostración, correspondientes a las diferentes funciones institucionales que puede desempeñar la demostración; de la complejidad semiótica del proceso de demostración, que presenta una dependencia inevitable de conocimientos propios del campo conceptual en cuestión; de deficiencias en la articulación entre los diferentes momentos del proceso didáctico, en particular con el momento de trabajo de la técnica.

El conocimiento de estas cuestiones de carácter epistemológico no aporta soluciones inmediatas al problema de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Pero sí abre direcciones de trabajo para poder encontrarlas. En ellas trabajaremos a partir de ahora.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arsac, G. (1996). Un cadre d'étude du raisonnement mathématique. En D. Grenier (Ed.): *Séminaire Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*. Grenoble: IMAG.

Arzarello, F. , Micheletti, C., Olivero, C. y Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in mathematics. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.): *Proceedings of the 22th International Conference of PME* (Vol. 2, pp. 24-32), Stellenbosch, South Africa.

Baker, G. P. y Hacker, P. M. S. (Eds.) (1985). *Wittgenstein. Rules, Grammar and Necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations (Vol. 2).* Basil Blackwell.

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situation de validations. *Educational Studies in Mathematics* 18: 147-176.

Balacheff N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématics chez des élèves de Collège. *These.* Université Joseph Fourier, Grenoble.

Barnard, T. y Tall, D. (1997). Cognitive units, connections and mathematic proof. En E. Pehkonen (Ed.): *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (Vol. 2, pp. 2-41), Lahti, Finland.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher* 88(1): 48-54.

Bell, A. (1976), A study of pupils'proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics* 7: 23-40.

Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En L. Puig y A. Gutiérrez (Ed.): *Proceedings of the 20th International Conference of PME* (Vol. 2, pp. 121-128), Valencia.

Bogomonly, A. (1998), Proofs in mathematics. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. November/December.

Bosch, M. (1998). Dirigir el estudio de las matemáticas. El reparto de funciones entre alumnos y profesores. Conferencia invitada. *VIII Jornada Andaluzas de Educación Matemática* (Thales, Universidad de Jaén).

Bunge, M. (1983). *La investigación científica*. Madrid: Ariel.

Burger, W. F., Shaughnessy, J.M. (1986), Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* 17: 31-48.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics* 24: 359-387.

Chevallard y col. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barceolona: ICE-Horsori.

Davis, P.J., Hersch, R. (1998). *Experiencia matemática*. Barcelona: Labor.

Denis, L. (1987). *Relationships between stage of cognitive development and Van Hiele levels of geometric thought among puerto rican adolescents.* UMI Diseertation Services. Michigan.

Dieudonné, J. (1987). The concept of 'rigorous proof'. *The Mathematical Gazzete* 80: 204-206.

Dijkstra, E. W. (1991). How computing science created a new mathematical style? *Mitteilungen der mathematischen gessellschaft in Hamburg* 12 (4): 897-905.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *Mathematicsal Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Douek, N. (2000). Comparing argumentation and proof in a mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Dreyfus, T. (1991). Processes of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Dubinski, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall. (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer A.P.

Dunn, O. J. y Clark, V. A. (1986). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: John Wiley.

Dunham, W. (1995): *El universo de las matemáticas.* Madrid: Pirámide.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration *Educational Studies*22: 233-261.

Duval, R. (1992-93). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive?. *Petit x* 31: 37-61.

Eco, U. (1979). Tratado de semiótica general. Barcelona: Lumen, 1991.

Ellerton, N. F. y Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1034). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Ernest P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1993). Mathematical activity and rhetoric: A social constructivist account. En I. Hirabasash, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Eds.), *Proceedings of 20th International Conference of PME* (pp. II-238-245). University of Tsukuba. Japan.

Fernández P. y Carretero, M. (1995). Perspectivas actuales en el estudio del razonamiento. En M. Carretero, J. Almaraz Y P. Fernández Berrocal (Eds.): *Razonamiento y comprensión.* Madrid: Trotta.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics,* 3 (2): 9-24.

Fourez, G. (1994). *La construcción del conocimiento científico*. Madrid: Narcea.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's philosophy of mathematics*. London: Routledge.

Freudenthal, H. (1982). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer, A. P.

Fuys, D. y col. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monographs nº 3. Reston, VA: N.C.T.M.

Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics* 12: 1-28.

Galotti, K. M. (1989). Approaches to studying formal and everyday reasoning. *Psychological Bulletin* 105: 331-351.

Garrido, M. (1978). *Lógica simbólica.* Madrid: Tecnos.

Garnier, R. y Taylor, J. (1996). *100% Mathematical Proof.* New York: John Wiley and Sons.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive units of theorems and dificulty of proof. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.): *Proceedings of the 22th International Conference of PME* (Vol. 2, pp. 345-352), Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D. (1999). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. (Trabajo presentado en el Grupo de Trabajo "*La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica*". III Simposio de la SEIEM, Valladolid) (http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm)

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. y Recio A. M. (1997). Meanings of proof in mathematics education. En E. Pehkonen (Ed.): *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (Vol. 2, pp. 313-321), Lahti, Finland.

Godino, J. D. y Recio A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.): *Proceedings of the 22th International Conference of PME* (Vol. 3, pp. 1-8), Stellenbosch, South Africa.

Gutiérrez, A., Jaime, A., Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the adquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education* 22,3: 237-251.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.): *Proceedings of the 13th International Conference of PME* (pp. 45-51), Paris.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof *For the Learning of Mathematics* 15 (3): 42-49

Hanna, G. y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. En A. J. Bishop et al. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Harel (1998), Greek Versus Modern Mathematical Thought and the Role of Aristotelian Causality in the Mathematics of the

Renaissance: Sources for Understanding Epistemological Obstacles in College Students' Conception of Proof. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Harel, G. y Kaput J. (1991). The rol of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical. En D. Tall (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht: Kluwer A. P..

Harel, G. y Sowder, L. (1996). Classifying processes of proving. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.): *Proceedings of the 20th International Conference of PME* (vol.3, pp. 59-65), Valencia.

Herbst, P. (1988). What works as proof in the mathematic class?. *Doctoral these.* University of Georgia, Athens.

Hersch, R. (1993). Proving is convencing and explaining. *Educational Studies in Mathematics* 24: 389-399.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher* 24: 14-15.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. En L. Lesh (Ed.) (1983): *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press.

Kline, M. (1980). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Madrid: Siglo XXI[1985] .

Knowless, M. H. (1998). What is "Proof"?! - in mathematics... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Knuth, E. (2000). The rebirth of proof in school mathematics in the United States. *International Newsletter on the Teaching and*

Learning of Mathematical Proof (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Ladrière, J. (1969). *Limitaciones internas de los formalismos.* Madrid: Tecnos.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial [1978].

Liébana, I. M. (1996). *Introducción a la teoría del conocimiento*. Eos

Livingston, E. (1987). *The ethnomethodological foundations of mathematics.* London: Routledge.

De Lorenzo J. (1974). *La filosofía de la matemática de Poincaré* Madrid: Tecnos.

Mariotti, M., Bartolini, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, En E. Pehkonen (Ed.): *Proceedings of the 21th International Conference of PME* (Vol. 1, pp. 180-195), Lahti, Finland.

Mariotti, M. (1998). Intuition and proof: reflecting on Fischbein's paper. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve)*

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (1): 41-51.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre-service teachers. *Journal for Research in Mathematics Education* 14: 58-69.

M.E.C. (1989). *Diseño Curricular Base*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

M.E.C. (1991). *Curriculo de Educación Primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

M.E.C. (1991). *Curriculo de Educación Secundaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Miller-Jones, D. (1991). Informal Reasoning in inner-city children. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Ed.): *Informal Reasoning and Education*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum, A. P.

Miranda T. (1995). *El juego de la argumentación.* Ediciones de la Torre.

NCTM. (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*, Reston, Va: The Council. Sociedad Andaluza de Educación Matemática [1991].

Odgen, C. y Richards, Y. (1923). *El significado del significado*. Paidós [1984].

Pacheco, J. M. (1997). Matemáticas, aunque es de noche. *Epsilon*, 39: 205-212.

Perelman, Ch. y Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la argumentación. La nueva retórica*. Madrid: Gredos [1989].

Pérez Echeverría, M, y Pozo, J.I. (1994). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En Pozo, J.I. y col. (Eds.): *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.

Perkins, D. N., Faraday, M. y Bushey, B. (1991). Everyday reasoning and the roots of intelligence. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Eds.): *Informal Reasoning and Education*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum, A. P.

Piaget, J. (1950). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático*. Buenos Aires: Paidós [1978].

Piaget, J. (1964). *Seis estudios de psicología*. Barcelona: Seix Barral [1979].

Polya, G. (1953*). Matemáticas y razonamiento pluasible*. Madrid: Tecnos [1966].

Popper, K. (1972*). Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos [1974].

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers professional knowledge. En J. Ponte, J.P. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII International Conference for PME* (pp. 195-210). Lisboa.

Rabade, S. (1995), *Teoría del conocimiento.* Madrid: Akal.

Rafales, E. L. (1993), *Metodología de la investigación técnico-científica.* Madrid: Rubiños.

Recio, A.M. (1999). Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (1996). Assessment of university students' reasonong capacities. En R. Luengo (Ed.): *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (p. 280), Sevilla.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En: M. Detlefsen (Eds.): *Proof and knowledge in mathematics* (pp. 6-32). London: Routledge.

Russell, B. (1948). *El conocimiento humano*. Barcelona: Ediciones Orbis [1983].

Schulz, W. (1967*). Wittgenstein. La negación de la filosofía*. Verlag Günter Neske. G. del Toro [1970].

Schwichtenberg, H. (1992). *Proof as programs, Collection: Proof Theory* (Leeds, 1990). Cambridge Univ. Press, 79-113.

Searle, J. R. (1997). *La construcción de la realidad social*. Barcelona: Paidós.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher* 78: 448-456.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics* 32: 49-92.

Usiskin, Z. (1982). *Val Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC: USA).

Van Hiele, P.M.(1986). *Structure and insight*. New York: Academic Press.

Vega, L. (1994). Argumentos, pruebas y demostraciones. En E. de Bustos et al. (Eds.): *Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia*(pp. 203-215). Madrid: Siglo XXI.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and development psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3, 2: 31-41.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics and Cognition*: *A Research Synthesis by the International Group for the PME* (pp. 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Vile, A. y Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematics domain. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.):

Proceedings of the 20 International Conference of PME vol.4 (pp. 395-402), Valencia

Villiers, M. D. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* 26: 15-30.

Villiers, M. D. De (2000). Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (*http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Vygotski, L.S. (1986). *Pensamiento y Lenguaje.* En L. Semionovivh (Ed.): Obras Escogidas.Vol. 2. Visor. Madrid. (Edición original, 1934).

Voss, J. F., Perkins, D. N. y Segal, J. W. (1991). *Informal Reasoning and Education*. Hillsdale, N.Y.: Lawrence Erlbaum, A. P.

Wilder, R. W. (1981). *Mathematics as a cultural systems*. New York: Pergamon.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En Martin, J.L. y Bradbard, D.A. (Eds): *Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA).

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica [1988].

Wittgenstein, L. (1956*). Observaciones sobre los fundamentos de matemáticas*. Blackwell. Alianza Editorial [1978].

Wittgenstein, L. (1958). *Los cuadernos azul y marrón*. Blackwell. Tecnos [1976].

Wittgenstein, L. (1969). *Sobre la certeza*. Basil Blackwell. Gedisa [1995].

Zaslavsky, O. y Ron, G. (1998). Students'understanding of the role of counter-examples. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.): *Proceedings of the 22th International Conference of PME* (Vol. 4, pp. 225-232), Stellenbosch, South Africa.

Zorroza, J. (1998). Resolución de problemas matemáticos: estudio experimental de los procesos cognitivos. *Tesis doctoral*. Universidad de Valencia.