Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria

Proportionality in Primary and Secondary Education

Miguel R. Wilhelmi

Universidad Pública de Navarra

Resumen

La proporcionalidad es un contenido longitudinal y transversal en el currículo. Esta presencia se justifica por el gran número de aplicaciones. El objetivo de este trabajo es analizar la idoneidad epistémica y motivar la necesidad de una ingeniería didáctica, que permita la evolución del significado personal aprendido por los estudiantes. Esta ingeniería permite avanzar desde una actividad puramente aritmética hasta otra donde el álgebra está consolidada. Se aportan algunas implicaciones para la formación docente.

Palabras clave: Currículo, proporcionalidad, idoneidad didáctica, holosignificado, ingeniería didáctica.

Abstract

Proportionality is a longitudinal and cross-curricular subject. The large number of applications justifies this presence in the curricula. The objective of this paper is to analyse the epistemic suitability and to motivate the need for a didactical engineering that allows the evolution of the personal meaning learned by the students. This engineering allows for progressing from a purely arithmetical activity to another activity where algebra is consolidated. Finally, there are some implications for teacher training.

Keywords: Curriculum, proportionality, didactical suitability, holistic-meaning, didactical engineering.

1. Introducción

La proporcionalidad es un objeto matemático longitudinal en el currículo de Educación Primaria y Secundaria. Además, es transversal a diferentes materias: Matemáticas y Educación Artística, en Educación Primaria; Matemáticas, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas o aplicadas, Física y Química, Biología, Dibujo Técnico, Educación Plástica, Visual y Audiovisual, Dibujo Artístico, Volumen y Fundamentos de Arte en Educación Secundaria. Así, como se puede ver en el anexo, la proporcionalidad se relaciona con:

- Educación Primaria
  - *Números*. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. Porcentajes, leyes del doble, triple, mitad. Aplicaciones en la vida cotidiana.
  - *Educación audiovisual o Expresión artística*: proporción como medida de equilibrio orden y estética.
- Educación Secundaria
  - *Áreas de Matemáticas*: *Números*, *Geometría* (Tales, semejanza), *Funciones* (función lineal), *Probabilidad* (clásica como proporción de casos favorables entre posibles, siendo todos equiprobables) y *Estadística* (proporción con la media muestral o poblacional).

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

– *Asignaturas científico-técnicas*: *Actividad científica* (relaciones funcionales entre magnitudes), *Cinemática* (aceleración en un movimiento armónico simple (m.a.s.) proporcional al desplazamiento), *Biología* (composición y función de bioelementos), *Genética y evolución* (proporción de la descendencia y la información genética), *Dibujo técnico* (aplicaciones de la proporcionalidad, equilibrio y proporción áurea).

– *Asignaturas artísticas*: *Educación plástica, visual y audiovisual* (proporción como medio de obtener equilibrio, ritmo o, en general, una percepción estética de una producción visual o acústica), *Dibujo Artístico* (el cuerpo humano como modelo de belleza y funcionalidad), *Volumen* (cánones de proporción de diferentes culturas y periodos artísticos) y *Fundamentos de Arte* (proporción áurea y su uso en diferentes artes).

De manera sucinta, se presenta en la Figura 1 el mapa curricular de la proporcionalidad.

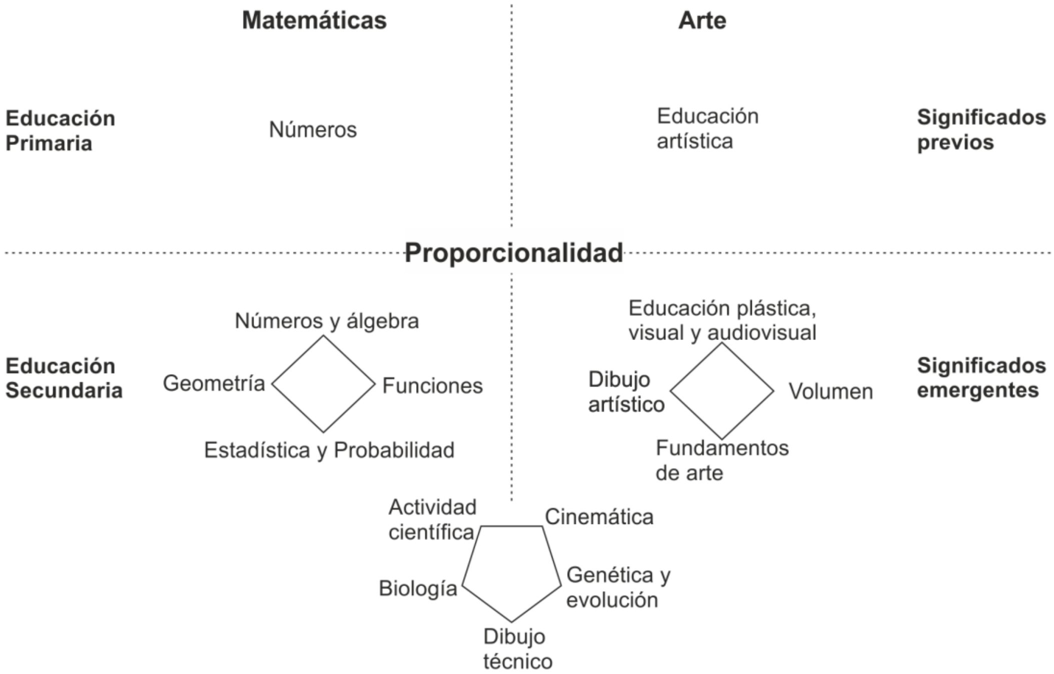

Figura 1. La noción de proporcionalidad en el currículo

Esta presencia longitudinal y transversal de la proporcionalidad se justifica por el gran número de aplicaciones (Godino y Batanero, 2002). Así, el propósito curricular es la adecuación paulatina del significado personal de los estudiantes a los distintos contextos de uso, mediante un *currículo en espiral* (Bruner, 1988).

Esta diversidad de contextos de la proporcionalidad puede ser utilizada para hacer emerger los campos numéricos racional y real. Por ejemplo, en la probabilidad el número racional se adecúa a la definición de Laplace o frecuencial (casos favorables entre posibles), mientras que la probabilidad axiomática según Kolmogorov es una función real de variable real con imagen en [0,1]. Sin embargo, no es este el objetivo del trabajo. Aquí se analiza la *idoneidad epistémica* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) que se sigue del currículo y de sus posibles desarrollos y se motiva la necesidad de una *ingeniería didáctica* (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014), que permita la evolución del significado personal aprendido por los estudiantes. Este significado debe articular los significados parciales de la proporcionalidad y generar las condiciones para la evolución de su uso en Educación Primaria (*conocimientos previos*) hacia su uso y desarrollo en Educación Secundaria (*conocimientos emergentes*).

Para alcanzar este objetivo, en la sección 2 se aportan las herramientas teóricas y metodológicas que van a ser utilizadas (*idoneidad didáctica, holosignificado, niveles de algebrización e ingeniería didáctica*). En la sección 3 se hace una valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio convencionales asociados al currículo actual. Esta valoración permite motivar algunas implicaciones para la enseñanza (sección 4).

2. Marco teórico y metodológico

Una de las funciones esenciales del docente es valorar la pertinencia y eficacia de un determinado proceso de estudio. Esta valoración no es absoluta, sino relativa a una determinada institución, en un momento específico y con unos agentes concretos. Así, además del análisis del contenido matemático (*dimensión epistémica*), es necesario valorar otras dimensiones:

- *Dimensión cognitiva*. Relativa a los procesos de aprendizaje de los estudiantes concretos que participan en el proceso de estudio.
- *Dimensión afectiva*. Relativa al impacto afectivo y a la gestión de las emociones en el proceso de adquisición de contenidos novedosos, que incluye errores, fracasos, conflictos semióticos, negociación de significados, éxitos, etc.
- *Dimensión interaccional*. Relativa a las formas de interaccionar docente-estudiantes y entre pares iguales (estudiantes entre sí).
- *Dimensión mediacional*. Relativa a los medios utilizados para la gestión del significado en la clase.
- *Dimensión ecológica*. Relativa al contexto, marco normativo e institución donde se desarrolla el proceso de estudio. Las normas, además del currículo y proyecto de centro, engloba los *contratos pedagógicos y didácticos* subyacentes y, en general, todo el entramado normativo necesario para el funcionamiento del sistema didáctico (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009).

Estas dimensiones no son independientes entre sí; por ello, en ocasiones se agrupan para explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, para el análisis de la *idoneidad didáctica* es usual distinguir tres macrodimensiones: epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e interaccional-mediacional (Godino, Wilhelmi, Bencomo, 2005; Contreras, Ordoñez, Wilhelmi, 2010), para enfatizar el triángulo didáctico (matemáticas, estudiantes y docente) y sus relaciones.

Este análisis global de los procesos de estudio no se puede realizar de forma descontextualizada, puesto que es consustancial a la institución y al momento temporal en que tiene lugar. Por ello, es necesario describir un significado global u *holosignificado* (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007a, 2007b) que oriente el desarrollo del currículo y articule significados parciales adquiridos previamente.

En el caso de la proporcionalidad, el holosignificado, que se sigue de los contextos de uso *intramatemáticos* (aritmético, algebraico, funcional, geométrico, probabilístico, estadístico) y *extramatemáticos* (ámbitos científico-técnico y artístico o vida cotidiana), debe permitir el necesario progreso en los sucesivos *niveles de algebrización* (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015; Godino, Wilhelmi, Neto, Blanco, Contreras, Díaz-Batanero, Estepa y Lasa, 2015). Así es preciso prever el progreso desde una actividad puramente aritmética (nivel 0), propia de la Educación Primaria, hasta la consolidación algebraica (nivel 3), en los primeros años de la Educación Secundaria, y la utilización de parámetros en el posterior análisis funcional (nivel 4). Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) proponen una categorización de significados parciales asociados a la proporcionalidad según el nivel de algebrización de la actividad matemática: aritmético, proto–algebraico y algebraico–funcional. Aquí el objetivo es motivar que este progresivo avance es posible si se realiza una *ingeniería didáctica* (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) que permita un *tránsito flexible* entre los distintos significados parciales.

> "Flexible mathematical thinking is what permits the passage between different partial meanings and the coordination or partitioning of the different meanings when necessary" (Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009, 143).

Antes de dar pautas para el diseño de prácticas matemáticas, se valora, a modo de análisis *a priori*, el desarrollo usual del currículo en términos de su idoneidad didáctica relativa.

3. Valoración de la idoneidad didáctica en el desarrollo del currículo de Educación Secundaria

Valorar la idoneidad de los procesos de estudio requiere por un lado conocer los significados asociados y contextos de uso, analizar la continuidad y rupturas del currículo y, por último, valorar su funcionamiento. En los siguientes apartados abordamos estos aspectos partiendo de la *regla de tres* (como modelo estereotipado de la proporcionalidad) y concluyendo con fenómenos didácticos asociados.

3.1. La regla de tres

Una máxima general en Educación es el desarrollo de nuevos contenidos basados en los previos, relacionados con el tópico que se desea abordar. Así, el desarrollo de la proporcionalidad en el inicio de la Educación Secundaria (MEC, 2015) debe partir de los conocimientos previos adquiridos en la Educación Primaria (MEC, 2014), donde la proporcionalidad se introduce mediante la *regla de tres* en situaciones cotidianas o cálculos sencillos de *doble, triple o mitad*. Asimismo, se utiliza para valorar cualidades artísticas de formas y objetos.

La inclusión explícita de la regla de tres en el currículo es una novedad, puesto que es la constatación de un hecho; a saber, a pesar de que los currículos anteriores a la LOMCE (MEC, 2013) no incluían explícitamente esta regla, ni en Primaria (MEC, 2007b) ni en Secundaria (MEC, 2007a), era un contenido que se enseñaba en la escuela. Por lo tanto, a pesar de que ya en la LGE (MEC, 1970) no se incluía esta regla en los currículos, ha persistido su enseñanza en la escuela, como modelo prototípico de la proporcionalidad.

Por otro lado, la regla de tres no se incluye en los currículos internacionales de manera homogénea en la misma etapa Educativa. La manipulación explícita de incógnitas y la resolución de la ecuación asociada (Figura 2) ha condicionado su inclusión en grados superiores, donde se proponen actividades cuyo objetivo final es la el acceso al *nivel 3 de algebrización*.

Enunciado	**Resolución**
Juan sabe que para hacer un pan se debe utilizar 350gr de agua por cada 600gr de harina. Solo tiene 450gr de harina, ¿cuánta agua debe utilizar?	Se tiene: 350 —— 600 x —— 450 Luego: $350 \times 450 = 600 \cdot x \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x = \dfrac{350 \times 450}{600} = 262{,}5$

Figura 2. Resolución de problemas de proporcionalidad mediante la regla de tres

Así, no es extraño observar en currículos (de distintos países y momentos históricos) el traslado de la técnica “regla de tres” a la Educación Secundaria e introducir la proporcionalidad en Educación Primaria mediante el método de “reducción a la unidad” y el análisis tabular.

3.2. Fenómenos didácticos: continuidad y rupturas en el currículo

En Educación Primaria, para organizar situaciones cotidianas donde el uso de la proporcionalidad es pertinente se recurre en muchas ocasiones a la construcción de tablas. Las tablas permiten la organización eficaz de la información y resaltan la utilidad de determinar el valor que le corresponde a la unidad, de ahí la denominación de la regla “reducción a la unidad”.

Esta introducción suele ser obviada en el desarrollo de la proporcionalidad en Educación Secundaria que contempla casi exclusivamente un uso técnico de la regla de tres o una interpretación funcional a partir de la fórmula de función lineal ($y=mx$, $m>0$).

Esta situación genera diversos *fenómenos didácticos* (Wilhelmi, Font y Godino, 2005):

- *Ilusión de la transparencia*. Los niños desde los 9-10 años tienen experiencias reiteradas en situaciones cotidianas y escolares de proporcionalidad. Esto muchas veces hace que en la Educación Secundaria 12-14 años los ejercicios de proporcionalidad se planteen como “algo sabido”, siendo únicamente necesario centrarse en las nuevas formas de expresión, que se presumen transparentes “porque tienen un correlato con una noción ya conocida”. La realidad es que se requiere de aprendizajes específicos que relacionen la construcción de tablas, la técnica de reducción a la unidad, la regla de tres, la interpretación de la pendiente de una función lineal, el paso de la fórmula a la tabla y a la representación gráfica, etc.

- *Ilusión de la linealidad*. La aplicación abusiva de la linealidad está documentada sobradamente (Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006). Este abuso está condicionado por la forma en que se introduce la proporcionalidad; a saber, como una noción aislada, donde no es necesario analizar si se trata de una situación modelizable por esta noción. Con otras la palabras, los problemas de proporcionalidad aparecen todos en el mismo apartado y se fuerza, casi de inmediato, el manejo técnico, donde el niño debe únicamente determinar si “a más, más; a menos, menos”.

  Así, es usual que hasta un docente en formación ante la cuestión “*La función* $y = \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}}\ (x > 0)$ *es directa o inversamente proporcional?*” no responda inmediatamente: “La pregunta carece de sentido, puesto que la función no es lineal”.

De hecho, la gran mayoría analizan si la función es o no creciente, en aplicación de la regla “a más, más; a menos, menos” (Figura 3).

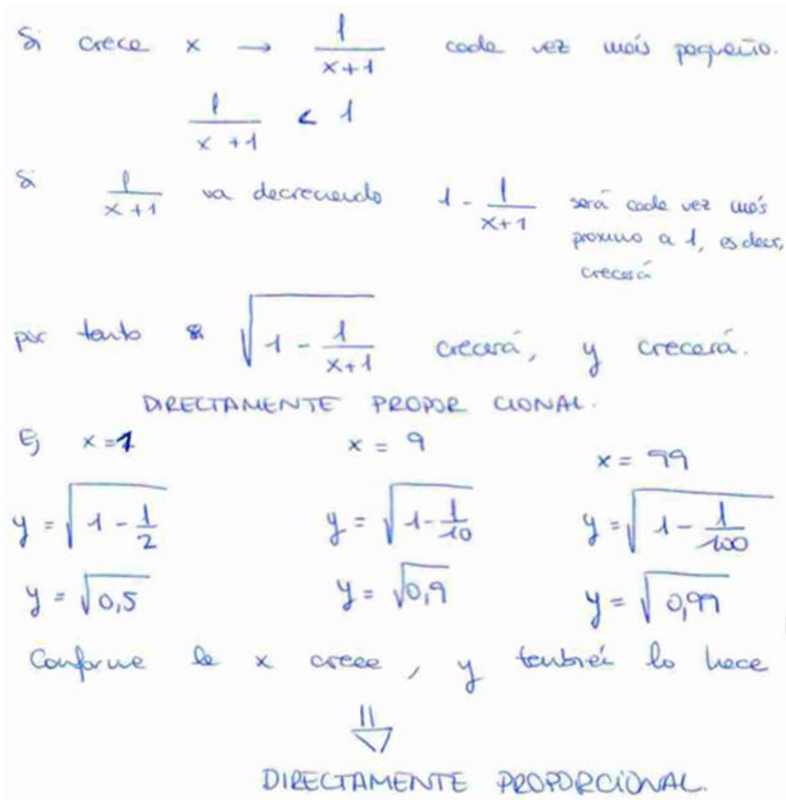

Figura 3. La “proporcionalidad” como sinónimo de “función creciente”

Así, la *propiedad en acto* “a más, más; menos, menos” se revela como un *obstáculo didáctico* muy persistente en el tiempo, incluso en estudiantes que han tenido una escolarización brillante, que les ha llevado a optar por ser docentes en matemáticas. Bien es cierto que algunos de los estudiantes añaden, tras el estudio de la monotonía, alguna referencia al hecho de que la función “no es lineal” (Figura 4); además, únicamente un número muy reducido de estos últimos añade, de forma implícita o explícita, la necesidad de existencia de una *constante m de proporcionalidad* ($y=mx$, $m>0$), concluyendo pues que la función dada no representa una relación de proporcionalidad (Figura 5).

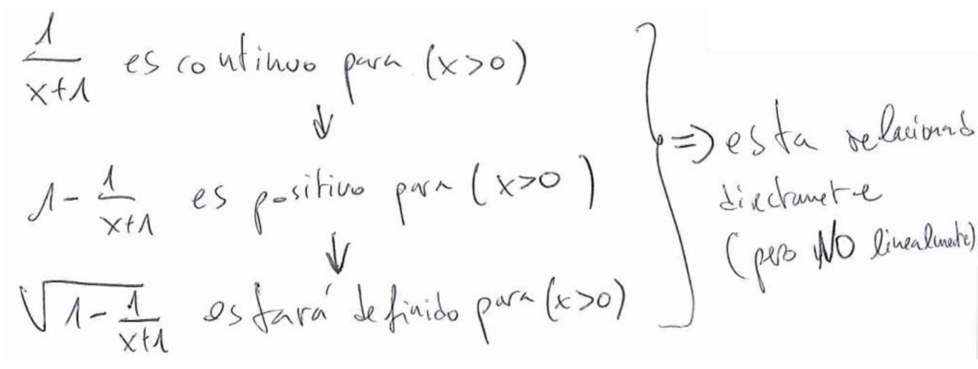

Figura 4. No hay proporcionalidad en la función $=\sqrt{1-\frac{1}{x+1}}$ $(x>0)$

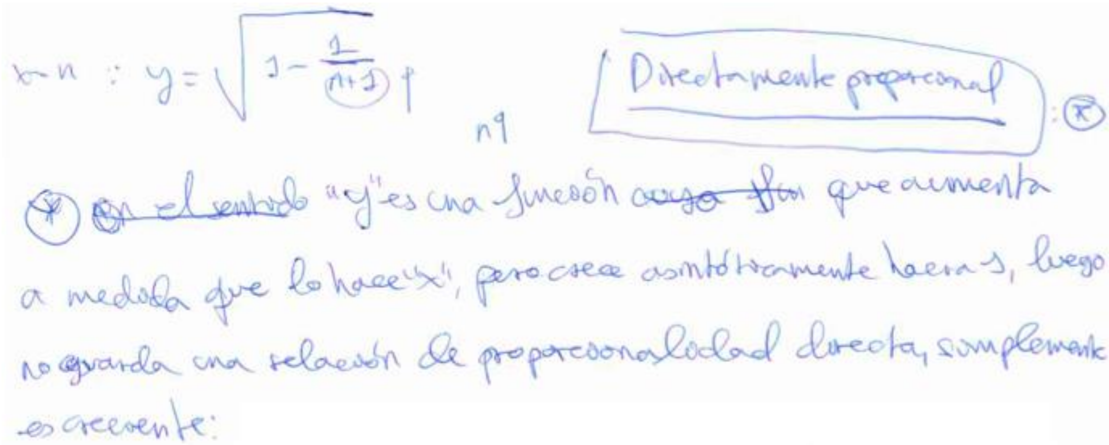

Figura 5. No hay proporcionalidad en la función $= \sqrt{1-\frac{1}{x+1}}\ (x > 0)$

Estos dos fenómenos (de ilusión de la transparencia y de la linealidad) están relacionados con otros dos que determinan los momentos de introducción y desarrollo de la proporcionalidad.

- *Ruptura longitudinal*. La enseñanza de la proporcionalidad en Educación Secundaria no parte en general del conocimiento adquirido en Primaria. En esta etapa, la proporcionalidad se desarrolla en un contexto aritmético o con un nivel 1 de algebrización incipiente. Sin embargo, en Educación Secundaria, se inicia la instrucción algebraica mediante ecuaciones de primer grado y funciones lineales y afines, de tal suerte que la proporcionalidad se desarrolla en este contexto como un ejemplo de utilidad de la función lineal (proporcionalidad directa). Más adelante, la introducción de la función inversa numérica (y=1/x) permite la introducción formal de la proporcionalidad inversa. En este proceso no se parte de los conocimientos previos (representación tabular, reducción a la unidad y, en su caso, regla de tres), sino que se formaliza funcionalmente la proporcionalidad y se construyen las tablas “dando valores”. Hay pues una ruptura en la línea longitudinal de los aprendizajes.
- *Omisión transversal*. La noción de proporcionalidad se introduje en distintas áreas del currículo (Figura 1), pero la enseñanza parcelada del mismo no permite contextos de reconocimiento de la noción en las distintas áreas intra y extra matemáticas. Con otras palabras, no se establecen las condiciones necesarias para que los estudiantes adquieran la noción como un objeto unitario.

Este análisis permite proponer unas implicaciones para la enseñanza que tendrían que tenerse en cuenta para la elaboración de una *ingeniería didáctica* (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014). En la siguiente sección se describen estas implicaciones.

4. Implicaciones para la enseñanza

Los fenómenos de ruptura longitudinal y omisión transversal descritos en el apartado anterior pueden ser evitados si se revisan las propuestas de los libros de texto y los desarrollos potenciales que de ellas se podrían realizar.

4.1. Atención a la adquisición longitudinal de los aprendizajes

En general, en la Enseñanza Secundaria se sigue un proceso de estudio para el aprendizaje de la proporcionalidad como función lineal en dos momentos separados en el tiempo y desarticulados. En un primer momento, se realizan problemas vinculados a la construcción de tablas de valores y a la aplicación de la regla "reducción a la unidad". Eventualmente, introduciendo la representación gráfica en el plano cartesiano como una forma de "ver los valores", no como *ábaco* (Lacasta y Pascual, 1998).

En un segundo momento, se introduce la fórmula ($y=mx$, $m>0$) como modelo de proporcionalidad para la resolución de problemas; así, en particular, se plantea como ejercicio la construcción de una tabla con los valores (x, y), para la representación en el plano cartesiano y la observancia de que la proporcionalidad "es una recta". Eventualmente, se señala que la pendiente m de la recta es el valor de y alcanzado en $x=1$, pero en general no es habitual interpretar este hecho en términos de la técnica "reducción a la unidad".

De esta forma, se desaprovecha un desarrollo natural en 9 pasos:

1) Organización de los valores conocidos y desconocidos en forma de tabla de valores.
2) Reducción a la unidad: determinación del valor de "y" al que le corresponde "$x=1$".
3) Construcción de una tabla de valores "extensa" que contemple la información de 1) y de 2).
4) Representación en el plano cartesiano de los valores de la tabla 3), identificando unos valores en el eje "x" y "sus parejas" en el eje "y".
5) Interpretación gráfica de la técnica "reducción a la unidad": valor de y para $x=1$.
6) Determinación de la relación:

   "valor de y" = "valor de reducción a la unidad" × "valor de x"

   Esta relación se establece en este paso en escritura natural, no formalizada.
7) Determinación de la fórmula de la función lineal ($y=mx$, $m>0$) que describe la situación, como un lenguaje simplificado y eficiente, donde la pendiente m representa el valor de reducción a la unidad.
8) Interpretación de la situación original en términos de la fórmula de la función lineal determinada: eficacia y coste.
9) Desarrollo de la noción de función lineal como familia dependiente del parámetro m ($y=mx$, $m\in\mathbb{R}$).

Los pasos 1 y 2 se desarrollan íntegramente de forma aritmética (*nivel 0 de algebrización*). Los pasos 3 y 4 suponen un progreso hacia la generalización (*nivel 1*). En los pasos 5 y 6, aunque se utilice un lenguaje no formalizado, suponen asimismo un progreso en el nivel de algebrización, puesto que se descontextualiza la información, observándose una relación entre las variables sujeta a la representación gráfica (que podría modelizar otras situaciones); finalmente, en el paso 7, la representación de la función en lenguaje formalizado es indicadora de nivel 2 de algebrización. En el paso 8 se desarrolla la noción de función lineal en un contexto algebraico consolidado (nivel 3), que posteriormente se contextualiza como ejemplar de la clase de funciones ($y=mx$, $m\in\mathbb{R}$), dependientes del parámetro m (nivel 4).

Sin embargo, el esquema general de la Enseñanza de Secundaria en dos momentos, descritos al inicio de esta sección 4.1, queda descrito sucintamente, en función de estos 9 pasos, de la siguiente forma:

– Momento 1: 1) $\Rightarrow$ 2).
– Momento 2: 7) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Luego, descontextualizadamente, se desarrolla 9).

De esta forma, se pone de manifiesto no solo una ruptura en el proceso, sino la omisión de los pasos 5 y 6 que permiten, por un lado, la articulación del nuevo modelo de la proporcionalidad (función lineal $y=mx$) con la técnica “reducción a la unidad” y, por otro lado, la construcción del lenguaje formalizado. Asimismo, se omite en muchos casos el paso 8, puesto que se entiende que el modelo “función lineal”, introducido en el punto 7, es “transparente”. Luego de estos dos momentos se desarrolla de forma aislada el paso 9. Así pues, además de la ruptura del proceso cognitivo, no se realiza un desarrollo paulatino de los niveles de algebrización.

Por último, la regla de tres no se ha introducido en la propuesta en 9 pasos para evitar los fenómenos de ilusión de la transparencia y de la linealidad, descritos en la sección 3.2. Sin embargo, según los currículos, esta regla se introduce o bien entre los pasos 1 y 2 (si aparece como contenido en Educación Primaria), o bien entre los pasos 6 y 7 (si se incluye en el inicio de la Educación Secundaria). Esta última decisión es más adecuada, porque pone el énfasis en la manipulación simbólica como medio eficaz en la resolución de problemas; en el momento en el que esta manipulación no es un mero juego de símbolos, sino que queda contextualizada en la resolución de ecuaciones.

4.2. Atención a la articulación transversal de aprendizajes

En la Figura 1 se muestra de forma sintética las distintas áreas que introducen la proporcionalidad en el currículo. En Secundaria la noción se utiliza de forma masiva, en diferentes áreas, pero sin la determinación de *conexiones* eficaces y estables, que representan, según el NCTM (http://www.nctm.org/standards/), un estándar de proceso.

> “[Process Standards:] *Connections*. Mathematics is not a collection of separate strands or standards, even though it is often partitioned and presented in this manner. Rather, mathematics is an integrated field of study. When students connect mathematical ideas, their understanding is deeper and more lasting, and they come to view mathematics as a coherent whole. They see mathematical connections in the rich interplay among mathematical topics, in contexts that relate mathematics to other subjects, and in their own interests and experience. Through instruction that emphasizes the interrelatedness of mathematical ideas, students learn not only mathematics but also about the utility of mathematics.”

Los principios y estándares del NCTM señalan además la necesidad de tener un *currículo* bien articulado longitudinalmente y que integre la *tecnología* para mejorar los *aprendizajes*. Para que estos aprendizajes se adecúen a las expectativas más altas la *enseñanza* debe partir del conocimiento y necesidades de los estudiantes, siendo desafiante y exigente, con un acompañamiento adecuado, que asegure la *equidad*. Para que esto sea posible, es necesario que los distintos *estándares de contenido* (números y operaciones; álgebra; geometría; medida; análisis de datos y probabilidad) sean desarrollados en contextos variados y próximos a los intereses de los estudiantes y que, además, permitan progresar en los *estándares de proceso* (resolución de problemas; razonamiento y prueba; comunicación; conexiones; representaciones).

El EOS (Godino, Batanero y Font, 2007) condiciona la eficacia de un proceso a la toma en consideración de las dimensiones involucradas y, por lo tanto, el diseño de una práctica matemática supone de facto responder a cuestiones del tipo:

- *Dimensión epistémico-ecológica*. ¿Qué contenido se desea abordar teniendo en cuenta las posibilidades y restricciones curriculares?
- *Dimensión cognitivo-afectiva*. ¿Cómo hacer evolucionar el significado personal de los estudiantes hacia el institucional pretendido, tomando en consideración los intereses y expectativas de los estudiantes?
- *Dimensión interaccional-mediacional*. ¿Qué interacciones y medios facilitan la negociación de significados en un proceso de estudio?

4.3. Propuesta de una situación problema: el sorteo de la Liga de Campeones

La probabilidad clásica o de Laplace puede ser modelizada como una proporción, con constataste de proporcionalidad la probabilidad de que un suceso elemental ocurra, suponiendo todos equiprobables. De esta forma, si hay n sucesos elementales, la probabilidad de cada uno de ellos es $1/n$ y la de un suceso compuesto (S_k) por k sucesos elementales es k/n, es decir, "k" veces $1/n$:

$$P(S_k) = \frac{1}{n} \times k$$

En este contexto se plantea el análisis de noticia de Internet (Figura 6), que señala la probabilidad de los cruces en los octavos de final de la Liga de Campeones de fútbol europeo (*Champions*). Esta noticia tiene interés para un gran número de estudiantes (*idoneidad afectiva*) y permite el desarrollo del significado personal atribuido a la probabilidad y proporción (*idoneidad cognitiva*). Además, permite establecer conexiones matemáticas (*idoneidad epistémica*) propias del currículo (*idoneidad ecológica*). Asimismo, permite la integración de hojas de cálculo para la simulación de resultados (*idoneidad mediacional*) y la gestión de las interacciones entre pares de iguales y con el docente para la negociación de significados (*idoneidad interaccional*).


La Liga en 11úmeros
@laligaennumeros
Seguir

3.501 posibles sorteos de 1/8 de Champions

PROBABILIDAD DE CRUCES

---	ARS	NÁP	BAR	ATM	MÓN	DOR	LEI	JUV
PSG		12.51%	20.62%	20.08%		18.77%	14.68%	13.34%
BEN	12.91%		17.48%	16.88%	12.54%	16%	12.71%	11.48%
MCI		15.62%		25.36%	18.22%	24.25%		16.54%
BAY	16.77%	13.74%	22.48%		16%		16.48%	14.54%
LEV	15.6%	13.05%	21.65%	20.39%			15.4%	13.91%
RMA	21.74%	17.62%			20.91%		21.22%	18.51%
OPO	13.11%	11.03%	17.77%	17.28%	12.77%	16.37%		11.68%
SEV	19.88%	16.42%			19.57%	24.62%	19.51%	

Leyenda: PSG: Paris Saint Germain; BEN: Benfica; MCI: Manchester City; BAY: Bayern (de Múnich); LEV: (Bayer 04) Leverkusen; RMA: Real Madrid; OPO: Oporto; SEV: Sevilla; ARS: Arsenal; NAP: Nápoles; BAR: Barcelona; ATM: Atlético Madrid; MON: Mónaco; DOR: (Borussia) Dortmund; LEI: Leicester City; JUV: Juventus.

Figura 6. Probabilidad de cruces de octavos de final de la Champions

El método de sorteo para determinar los emparejamientos en octavos de final de la *Champions* tiene en cuenta que en los octavos de final no pueden enfrentarse equipos:

– Que se han enfrentado en la fase previa.

– Que pertenecen al mismo país.

Además, los equipos se separan en dos bombos: uno, formado por los 8 equipos que han quedado primeros en sus respectivos grupos de la fase previa; otro, formado por los 8 equipos que han quedado segundos en dichos grupos. Así, es suficiente: 1) tomar al azar un equipo del bombo A, 2) determinar qué equipos son sorteables en el bombo B y, finalmente, 3) tomar al azar un equipo del bombo B.

Para poder completar el punto 2) es necesario tener en cuenta las condiciones y utilizar la función condicional “SI( )” de Excel para establecer qué equipos son sorteables. Si, por ejemplo, en el primer turno de sorteo del bombo A sale elegido el Mónaco (Figura 7) significa que se deben excluir del sorteo el PSG (ya que ambos clubes juegan en la Liga francesa) y el Leverkusen (que quedó segundo en el grupo del Mónaco en la fase previa). Esta exclusión se hace introduciendo en las celdas G5 (relativa al PSG) y G9 (relativa al Leverkusen) las fórmulas:

G5=SI(O(C2=1;**C2=5**);0;"Sorteable")

G9=SI(O(**C2=5**;C2=6);0;"Sorteable")

Que excluyen en ambos casos la posibilidad de ser sorteables. El número 5 hace referencia al orden que tiene Mónaco en el Bombo A, que está configurado por los equipos: 1) Arsenal, 2) Nápoles, 3) Barcelona, 4) Atlético, 5) Mónaco, 6) Borussia, 7) Leicester y 8) Juventus. De esta forma, el número aleatorio 1 designa al Arsenal; el 2, al Nápoles;… el 5, al Mónaco; y así sucesivamente. En la Figura 7 se muestra el proceso total, con las funciones Excel necesarias, para la realización del primer emparejamiento.

	A	B	C	D	E	F	G
1		EQUIPOS	8				
2		SORTEO-A	5			SORTEO-B	3
3							
4	GRUPO	**Bombo A**			GRUPO	**Bombo B**	
5	A	Arsenal	0		A	PSG	0
6	B	Nápoles	0		B	Benfica	Sorteable
7	C	Barcelona	0		C	Manchester City	Sorteable
8	D	Atlético	0		D	Bayern	Sorteable
9	E	Mónaco	Elegido		E	Leverkusen	0
10	F	Borussia Dortmund	0		F	Real Madrid	Sorteable
11	G	Leicester	0		G	Oporto	Sorteable
12	H	Juventus	0		H	Sevilla	Sorteable
13							6

Leyenda: Fórmulas en Excel

C2=ALEATORIO.ENTRE(1;C1)
Ci=SI(C2=i;"Elegido";0)
($5 \leq i \leq 12$)

G2=ALEATORIO.ENTRE(1;G13)
G13=CONTAR.SI(G5:G12;"Sorteable")

G5=SI(O(C2=1;C2=5);0;"Sorteable")
G6=SI(C2=2;0;"Sorteable")
G7=SI(O(C2=3;C2=1;C2=7);0;"Sorteable")
G8=SI(O(C2=4;C2=6);0;"Sorteable")
G9=SI(O(C2=5;C2=6);0;"Sorteable")
G10=SI(O(C2=6;C2=3;C2=4);0;"Sorteable")
G11=SI(C2=7;0;"Sorteable")
G12=SI(O(C2=8;C2=3;C2=4);0;"Sorteable")

Figura 7. Sorteo de primer emparejamiento: Mónaco-Bayern.

La reiteración del proceso sugerido en la Figura 7, donde en pasos sucesivos se sortean la 2º, 3º, …, hasta la 8º pareja puede organizarse de forma sencilla en el mismo libro Excel añadiendo 7 hojas, en las que: a) se reduce en 1 la celda "C1" en cada paso; b) se suprimen los equipos del bombo A y B ya emparejados en el anterior paso (uno de cada bombo); y, finalmente, c) se adecúan las fórmulas a la nueva situación. La reiteración del procedimiento es una buena oportunidad para poner a prueba la comprensión de la situación y para desarrollar en los estudiantes la capacidad de reiterar un proceso de forma eficaz.

5. A modo de conclusión

La proporcionalidad aparece en los currículos explícitamente como contenido a partir de los 9-10 años; sin embargo, los niños tienen experiencias previas. Por ejemplo, con 5-6 años los niños son capaces de establecer relaciones de doble o mitad con números frecuentes (hasta 30, que representa un día en el calendario) o son capaces de comparar y ordenar triángulos semejantes por solapamiento. Estas experiencias se van articulando con otras en la Educación Primaria, donde el campo numérico se amplía y los contextos y situaciones se diversifican.

En la Educación Secundaria esta formación previa debe servir para el desarrollo de la proporcionalidad, hasta la determinación de un lenguaje simbólico eficaz ($y=mx$, $m>0$) y la contextualización de la función lineal como un tipo de función creciente. Asimismo, se debe progresar en propuestas que articulen el uso de la proporcionalidad en diferentes contextos.

Referencias

Bruner, J. S. (1988). *Desarrollo educativo y educación*. Madrid: Morata.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 367 - 384.

Dooren, W. Van, De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, *(Extra)*4, 115-138.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D. y Batanero, C (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. *Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática*. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf].

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López–Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*,

27(2), 221-252.
Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de Matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76.
Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015) Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.
Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.
Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Blanco, T. F., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de Educación*, *370*, 199-228.
Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *4*(2), 1-26.
Lacasta, E. y Pascual, J. R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (1970). Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *BOE* 187, 12525-12546. Disponible en, https://www.boe.es/boe/dias/1970/08/06/pdfs/A12525-12546.pdf.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE* 5, 677-773. Disponible en, https://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007b). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 173, 31487- 31566. Disponible en, https://www.boe.es/boe/dias/2007/07/20/pdfs/A31487-31566.pdf.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2013). Ley Orgánica 8/2013, 9 diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *BOE* 295, 97858-97921. Disponible en, http://www.boe.es/boe/dias/2013/12/10/pdfs/BOE-A-2013-12886.pdf.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 52, 19349-19420. Disponible en, https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf.
Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado* 3, 169-546. Disponible en, https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf.
Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D. y Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 139-160.
Wilhemi, M. R., Font, V. y Godino, J. D. (2005 mayo). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations

didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique". *Colloque International «Didactiques : quelles références épistémologiques?»*, organisé par l'AFIRSE et l'IUFM d'Aquitaine (Bordeaux, France). Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas_5junio06.pdf].

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007a). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *27*(1), 77-120. [English version, 2011: *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *21*, 53-82. Disponible en, http://math.unipa.it/%7Egrim/Wilhelmi_Q21.pdf].

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007b). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 72-90. Disponible en, http://www.iejme.com/makale/77/didactic-effectiveness-of-mathematical-definitions-the-case-of-the-absolute-value].

Anexo. Proporcionalidad en el currículo actual

1. Educación Primaria (MEC, 2014)

Bloque	Descriptores
MAT 2. Números	– *CO*: Porcentajes y *proporcionalidad*. Porcentajes: Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. *Proporcionalidad* directa. La *Regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa: ley del doble, triple, mitad. Resolución de problemas de la vida cotidiana. – *CE* 7. Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la *proporcionalidad* directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana. – *EAE* 7.4. Usa la *regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria. – *EAE* 7.5. Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y *regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
ART 1. Educación audiovisual	EAE 2.5. Elabora carteles con diversas informaciones considerando los conceptos de tamaño, equilibrio, *proporción* y color, y añadiendo textos en los utilizando la tipografía más adecuada a su función.
ART 2. Expresión artística	EAE 2.4. Organiza el espacio de sus producciones bidimensionales utilizando conceptos básicos de composición, equilibrio y *proporción*.

Leyenda

- *Asignaturas*: MAT: Matemáticas; ART: Educación Artística
- *Descriptores*: CO: Contenido; CE: Criterio de Evaluación; EAE: Estándar de aprendizaje evaluable

2. Educación Secundaria (MEC, 2015)

Bloque	Descriptores
[1º y 2º ESO] MAT 2. Números y Álgebra	– *CO*: Razón y *proporción*. Magnitudes directa e inversamente *proporcionales*. Constante de *proporcionalidad*. – *CO*: Resolución de problemas en los que intervenga la *proporcionalidad* directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente *proporcionales*. – *CE* 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de *proporcionalidad*, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida

	real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente *proporcionales*. – *EAE* 5.1. Identifica y discrimina relaciones de *proporcionalidad* numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. – *EAE* 5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente *proporcionales*.
[3º ESO] MAT OEA 3. Geometría	– *CO*: Lugar geométrico. Teorema de Tales. División de un segmento en partes *proporcionales*. Aplicación a la resolución de problemas. – *EAE* 2.2. Divide un segmento en partes *proporcionales* a otros dados y establece relaciones de *proporcionalidad* entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.
[4ºESO] MAT OEA 2. Números y álgebra	– *CO*: *Proporcionalidad* directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. – *EAE* 1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente *proporcionales*.
MAT OEA 4. Funciones	– *EAE* 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, *proporcionalidad* inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso. – EAE 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de *proporcionalidad* inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas.
[3º ESO] MAT OEP 3. Geometría	– *CO*: Teorema de Tales. División de un segmento en partes *proporcionales*. Aplicación a la resolución de problemas. – EAE 2.1. Divide un segmento en partes *proporcionales* a otros dados. Establece relaciones de *proporcionalidad* entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.
[4º ESO] MAT OEP 2. Números y álgebra	– *CO*: *Proporcionalidad* directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. – *EAE* 1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente *proporcionales*.
MAT OEP 4. Funciones	– *EAE* 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, *proporcional* inversa y exponencial.

Bloque	**Descriptores**
[2º Bach] MAT - CCSS 4. Estadística y Probabilidad	– *CO*: Media y desviación típica de la media muestral y de la *proporción* muestral. – *CO*: Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la *proporción* en el caso de muestras grandes. – *CE* 2. Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y *proporción* poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande. – *EAE* 2.2. Calcula estimadores puntuales para la media, varianza, desviación típica y *proporción* poblacionales, y lo aplica a problemas reales. – *EAE* 2.3. Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la *proporción* muestral, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. – *EAE* 2.5. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional y para la *proporción* en el caso de muestras grandes.
[4º ESO] F&Q 1. Actividad científica	– *EAE* 7.1. Representa gráficamente los resultados obtenidos de la medida de dos magnitudes relacionadas infiriendo, en su caso, si se trata de una relación lineal, cuadrática o de *proporcionalidad* inversa, y deduciendo la fórmula.
F&Q 6. Cinemática	– *EAE* 3.2. Demuestra que la aceleración de un movimiento armónico simple (M.A.S.) es *proporcional* al desplazamiento utilizando la ecuación fundamental de la

	Dinámica.
[2º Bach] BIO 1. Base molecular y fisicoquímica de la vida	– *EAE* 1.2. Clasifica los tipos de bioelementos relacionando cada uno de ellos con su *proporción* y función biológica.
BIO 3. Genética y evolución	– *CE* 10. Formular los principios de la Genética Mendeliana, aplicando las leyes de la herencia en la resolución de problemas y establecer la relación entre las *proporciones* de la descendencia y la información genética.
[1º Bach] DibTec 1. Geometría y Dibujo técnico	– *CO*: Trazado de formas *proporcionales*. *Proporcionalidad* y semejanza. Construcción y utilización de escalas gráficas. Construcción y utilización de escalas gráficas. – *EAE* 1.7. Reproduce figuras *proporcionales* determinando la razón idónea para el espacio de dibujo disponible, construyendo la escala gráfica correspondiente en función de la apreciación establecida y utilizándola con la precisión requerida.
[2º Bach] DibTec 1. Geometría y Dibujo técnico	– *CO*: *Proporcionalidad*. El rectángulo áureo. Aplicaciones. Construcción de figuras planas equivalentes. – *EAE* 1.1. Identifica la estructura geométrica de objetos industriales o arquitectónicos a partir del análisis de plantas, alzados, perspectivas o fotografías, señalando sus elementos básicos y determinando las principales relaciones de *proporcionalidad*.
[1º y 2º ESO] EduPla 1. Expresión plástica	– *CE* 4. Identificar y aplicar los conceptos de equilibrio, *proporción* y ritmo en composiciones básicas. – *EAE* 4.1. Analiza, identifica y explica oralmente, por escrito y gráficamente, el esquema compositivo básico de obras de arte y obras propias, atendiendo a los conceptos de equilibrio, *proporción* y ritmo
[1º Bach] DibArt 2. Línea y forma	– *EAE* 2.2. Describe gráficamente las formas atendiendo a sus *proporciones*, relacionándolas con formas geométricas simples.
DibArt 3. La composición y sus fundamentos	– *CE* 2. Aplicar las leyes básicas de la percepción visual al representar distintos volúmenes geométricos u orgánicas dentro de un espacio compositivo, atendiendo a las *proporciones* y a la perspectiva.
[2º Bach] DibArt 3. Dibujo y perspectiva	– *CE* 1. Representar gráficamente con diferentes niveles de iconicidad , las formas, aisladas o en una composición, el entorno inmediato, interiores y exteriores, expresando las características espaciales, de *proporcionalidad*, valores lumínicos y cromáticos
DibArt 4. El cuerpo humano como modelo	– *CE* 1. Analizar las relaciones de *proporcionalidad* de la figura humana. – *CE* 2. Representar la figura humana, su entorno, identificando las relaciones de *proporcionalidad* entre el conjunto y sus partes. – *EAE* 1.2. Analiza la figura humana atendiendo a sus relaciones de *proporcionalidad* mediante la observación del natural o con modelos estáticos.
[1º Bach] VOL 2. Elementos de configuración formal y espacial	– *CE* 5. Comprender la relación existente entre forma y *proporción* en las obras escultóricas y relacionarla con los cánones de *proporción* de las diferentes culturas y periodos Artísticos analizando y comparando las diferencias en cuanto a lenguaje compositivo existentes entre las realizaciones volumétricas en relieve y las exentas.
FA 8. El Renacimiento	– *CE* 3. Reconocer la *proporción* aurea en algún elemento de estilo renacimiento: arquitectura, mobiliario, etc. – *EAE* 3.1. Analiza la relación de los elementos arquitectónicos aplicando la *proporción* áurea.

Leyenda

- *Asignaturas*: MAT: Matemáticas; MAT-OEA: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas; MAT-OEP: Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas; F&Q: Física y Química; BIO: Biología; DibTec: Dibujo Técnico; EduPla: Educación Plástica, Visual y Audiovisual; DibArt: Dibujo Artístico; VOL: Volumen; FA: Fundamentos de Arte.
- *Descriptores*: CO: Contenido; CE: Criterio de Evaluación; EAE: Estándar de aprendizaje evaluable.