Análisis de estrategias utilizadas por estudiantes de bachillerato al resolver problemas de proporcionalidad

Analysis of strategies used by high school students to solve problems of proportionality

Juan Carlos Ramírez Maciel y Claudia Margarita Acuña Soto

Centro de Investigación y de estudios Avanzados del IPN

Resumen

La siguiente investigación muestra un análisis de problemas de proporcionalidad utilizando como marco teórico al Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática. Como metodología para el análisis, utilizamos las configuraciones epistémicas y cognitivas, proporcionadas por este marco teórico. Al proponer problemas de *valor faltante* a estudiantes de bachillerato se observó la activación de distintas estrategias en su solución de las que se destacan tres procesos básicos que podrían participar en su comprensión: Iteración, Construcción de razones y la Regla de tres. Consideramos la necesidad de articular estos distintos procedimientos de solución para enriquecer y favorecer el razonamiento proporcional en los estudiantes.

Palabras clave: Razón, proporción, configuración epistémica y cognitiva.

Abstract

In this research we present an analysis of proportionality problems using the Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition as a theoretical framework. As a methodology for the analysis, we use the epistemic and cognitive configurations provided by this theoretical framework. When proposing missing value proportion problems to high school students, we observed the activation of different strategies in their solution, in which three basic processes that may take part in their understanding are highlighted: Iteration, Building of ratios and the Rule of three. We consider the need to articulate these different solving procedures to enrich and favour proportional reasoning in the students.

Keywords: Ratio, proportion, epistemic and cognitive configuration.

1. Introducción

Las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad han sido de gran interés para la matemática educativa y objeto de múltiples reportes de investigación. En el caso de este trabajo tratamos este tema desde la interpretación de problemas de valor faltante relativos a la proporcionalidad en el bachillerato. También consideraremos como variables de análisis para entender los conflictos de interpretación entre los estudiantes a los tipos de cantidad - homogénea y heterogénea - involucradas y a la actividad de comparación entre ellas a través de la razón y la proporción.

Pretendemos entender cómo la diferencia entre cantidades influye en la construcción de la idea de proporcionalidad, así como la manera en que los procesos de comparación entre ellas son involucrados en la solución de problemas de este tipo.

Para entender de mejor manera los mecanismos de solución presentes en problemas de proporcionalidad, no sólo para resolverlos sino para interpretarlos, es decir, aplicarlos a los problemas de ese tipo, así como de la revisión llevada a cabo sobre la literatura, encontramos que, resolver problemas de valor faltante, no supone necesariamente la

Ramírez Maciel, J. C y Acuña Soto, C. M. (2017). Análisis de estrategias utilizadas por estudiantes de bachillerato al resolver problemas de proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

formación de un pensamiento proporcional (Tjoe y De la Torre, 2014b), sino que éste se compone de más elementos. Esta es la razón por la que estamos interesados en este problema.

Para acercarnos a esta problemática tomamos como marco el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y D'Amore, 2007). Este marco nos permite catalogar los aspectos intervinientes en estos procesos, a través de los distintos tipos de configuraciones, y también nos aporta una estructura metodológica específica que nos apoya para analizar la actividad de los estudiantes cuando deban resolver e interpretar problemas de valor faltante.

Para el desarrollo de este trabajo, propusimos problemas de valor faltante a estudiantes de primer semestre de bachillerato, sin indicaciones sobre la estrategia a seguir. El fin ha sido observar la interpretación que hacen del tipo de problemas en cuestión teniendo en cuenta las cantidades de distinto tipo que intervienen, así como para observar las estrategias usadas. Los datos que presentaremos aquí son producto de una primera aproximación y se obtuvieron con base en un cuestionario junto con entrevistas grabadas en video y audio, así como las notas de campo del investigador.

El análisis de las denominadas configuraciones epistémicas y cognitivas, que son unas de las herramientas metodológicas que proporciona el marco teórico del EOS, nos dieron una visión sobre la manera en que los estudiantes abordan e interpretan la comparación entre cantidades relativa a la proporcionalidad; las entrevistas realizadas con algunos de ellos nos permitieron profundizar en la interpretación de los datos obtenidos.

2. Antecedentes

La proporcionalidad es una de las ideas más complejas de la educación media superior debido a que involucra diversos conceptos, formas de pensar y formas de actuar, los cuales se encuentran ligados a la construcción de diversas estructuras: establecimiento de razones, proporciones, algoritmos, formas funcionales. Por tanto, no es de extrañar que sea un tema que ha sido objeto de multitud de investigaciones, las cuales en particular dan evidencia de la problemática que surge cuando los estudiantes trabajan con este tema. Citamos, a continuación algunas de estos problemas:

1. La llamada "*ilusión de linealidad*" (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007)
2. La confusión y uso de estrategias aditivas en lugar de multiplicativas (Mellar, 1991; Hart, 1984 y 1988).
3. La importancia del contexto (Lesh y Doerr, 2003; Lesh *et al*., 1988).
4. El razonamiento proporcional se ve afectado por: a) Los procesos físicos subyacentes a la situación del problema, b) Formación de relaciones cuantitativas y c) La invariancia multiplicativa (Harel *et al*. , 1991).
5. Se identifican los siguientes atributos del razonamiento proporcional: comparar fracciones, ordenar fracciones, construir razones, construir proporciones, identificar una relación multiplicativa entre conjuntos de valores, diferenciar la relación proporcional de una no proporcional y aplicar algoritmos en la solución de problemas de razonamiento proporcional (Tjoe y De la Torre, 2014a).

De manera general, las investigaciones consideran: 1) Errores en las estrategias que emplean los estudiantes, 2) El papel de las cantidades y el contexto, 3) Identificación de etapas para el desarrollo del razonamiento proporcional, 4) La habilidad de los estudiantes para trabajar con ideas relativas a la proporcionalidad.

Respecto a los problemas de proporcionalidad donde hay que encontrar el valor faltante, se han establecido relaciones entre la habilidad de los estudiantes de secundaria para resolver problemas de valor faltante y la capacidad de diferenciar entre las que son relaciones de proporcionalidad y las que no lo son. A partir de ello se sugiere que la habilidad de resolver problemas de este tipo no tiene relación directa con el razonamiento proporcional, esto es, el mecanismo para resolver problemas de valor faltante no presupone un pensamiento de este tipo (Tjoe y De la Torre, 2014), esto debido a que la solución algorítmica no presupone la comprensión de la relación, aun en el caso del uso de la regla de tres.

3. Marco Teórico

Nuestra investigación se apoya en el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino, y D'Amore, 2007; Godino, 2002). En esta aproximación, la actividad matemática juega un rol central y se encuentra modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (a los que evocamos al hacer matemáticas) lo cuales son representados en forma textual, oral o incluso gestual. Los sistemas de prácticas y funciones semióticas permiten por un lado entender las posibles interpretaciones del significado de un objeto matemático y por el otro caracterizar las relaciones que se establecen entre dichos objetos. Los sistemas de prácticas realizadas en el seno de las instituciones determinan la emergencia de los "objetos matemáticos" donde el significado de estos objetos está íntimamente ligado con los problemas y la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Las situaciones-problema promueven y contextualizan la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficas) representa a las otras entidades y sirve como herramientas para la acción; los argumentos, usados para solucionar el problema, utilizan los procedimientos y las proposiciones, las cuales relacionan conceptos. A este conglomerado, necesario para la realización y evaluación de la práctica, en el EOS se le llama configuración. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional, (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el caso de la resolución de problemas de proporcionalidad que propusimos, las situaciones utilizadas son diversas. En el lenguaje consideramos símbolos, expresiones, representaciones; en conceptos ubicamos a la proporcionalidad; en propiedades entendemos al tipo de cantidad que tiene el problema ya sea homogénea o no; en los procedimientos consideramos el tipo de estrategias que los estudiantes utilizan para dar solución y en los argumentos las respuestas de los estudiantes al problema.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal-institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo**.** Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos (Font, Godino, D‘Amore, 2007). En este trabajo algunas de las dualidades anteriormente citadas jugaron un papel relevante para el análisis de las respuestas por parte de los estudiantes, las que destacaremos en adelante.

Los sistemas de prácticas y las configuraciones epistémica y cognitiva se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble posibilidad: personal e institucional, lo que nos proporciona un instrumento metodológico de análisis de las prácticas de los estudiantes contrastadas con aquellas propuestas por la institución, ya que se considera que resolver una tarea matemática implica la realización de prácticas o secuencias de acciones sujetas a las reglas matemáticas. En un segundo nivel de análisis utilizamos la dualidad expresión-contenido de los objetos emergentes en la resolución de los problemas propuestos donde la función semiótica juega un papel importante. En la siguiente sección mostraremos cómo se han utilizado estas herramientas metodológicas para desarrollar la investigación actual.

4. Metodología

El objetivo de esta investigación es llevar a cabo un análisis de las estrategias usadas por los estudiantes ante situaciones particulares de relaciones de proporcionalidad, debido a que deseamos observar la influencia que tiene el tipo de cantidad o magnitud en la situación- problema en la resolución de los problemas propuestos. Tratamos de establecer si es posible construir una base para el desarrollo del razonamiento proporcional que derive de la comparación entre las cantidades involucradas.

Para describir y analizar los conglomerados de objetos matemáticos que intervienen en las prácticas, se propone como herramienta de análisis la configuración cognitiva así como un análisis de los atributos contextuales y dualidades de los objetos emergentes de la práctica de resolución.

Para la puesta en escena se realizó un cuestionario de preguntas cerradas, el cual se aplicó a 98 estudiantes entre 15 y 16 años del primer semestre de bachillerato, quienes conocían la regla de tres y estaban familiarizados con el tipo de problemas. También se llevaron a cabo entrevistas con algunos de ellos con el objeto de esclarecer la racionalidad de su estrategia así como la interpretación de los resultados que obtuvieron. El objetivo de las preguntas fue observar la influencia en las estrategias realizadas por parte de los estudiantes ante situaciones que incluían magnitudes homogéneas y heterogéneas. El cuestionario usado constó de ocho reactivos, y para dar solución a éstos se les permitió usar sus propios recursos matemáticos, por lo que no se especificó una estrategia para dar solución a los problemas.

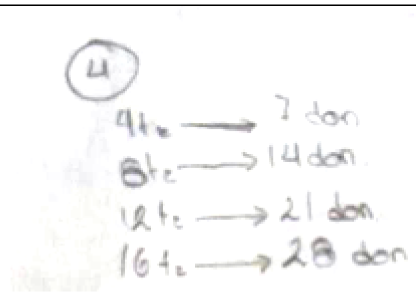
Desde una perspectiva experta, la solución de los problemas pueden presentar diferentes opciones de solución, tales como: establecer una razón entre las cantidades, el uso de la regla de tres y la construcción de un modelo lineal que generalice la situación. Es importante resaltar que desde una perspectiva experta el tipo de magnitud en el problema es irrelevante si se atiende únicamente al algoritmo de solución, es decir; se deberían resolver a través de las razones establecidas y el tipo de cantidad juega un papel secundario.

Respecto a las estrategias utilizadas por los estudiantes encontramos las siguientes: iteración, relación “unitaria” y la regla de tres. La primera de estas estrategias no fue considerada dentro de la perspectiva experta debido al grado de estudios de los estudiantes, pero pareciera ser de especial importancia para ellos; la relación que llamamos "unitaria" se refiere al proceso mediante el cual el estudiante manipula las cantidades hasta llegar a una que sirve para obtener las otras. A continuación presentamos ejemplos de estos tipos de estrategias.

Consideramos el siguiente problema:

> “Para hacer donas, María necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas. Usando el mismo recipiente ¿Cuántas donas puede hacer con 12 tazas de harina?”

Tabla 1. Configuración cognitiva de la estrategia llamada iteración.

Lenguaje: Se establecen relaciones de manera tabular, se observa el uso de flechas que indican la manera en que realizan la tabulación. *Conceptos:* Suma y multiplicación	 Iteración horizontal
Procedimientos y argumentos: Establecen relaciones de proporcionalidad al realizar procedimientos aditivos y/o multiplicativos	Se realizan operaciones aritméticas elementales sobre columnas o sobre filas, estableciendo relaciones entre las magnitudes presentadas; las magnitudes son declaradas al principio de la tabulación.

En la descripción anterior podemos apreciar procedimientos tanto aditivos como multiplicativos; la construcción de la relación de las flechas con sentido usadas aquí nos sugiere que la relación entre las cantidades se realiza de manera horizontal. Bajo esta perspectiva el estudiante establece la correspondencia entre las cantidades de la manera “tanto, de tanto”. Es decir, a cierta cantidad de tazas le corresponden cierta cantidad de donas, lo cual es un pensamiento cercano a los procedimientos multiplicativos, este planteamiento les permite establecer la razón de dos cantidades que se comparan.La relación se hace ostensiva mediante tablas de datos, las cuales se construyen comparando parejas de estos, ya sea que se vinculen de manera horizontal o vertical, lo que permite establecer la razón y llegar a la solución. Si hacemos uso de una trama encadenada de funciones semióticas como la usada por Rondero y Font (2015) tendríamos la Tabla 2.

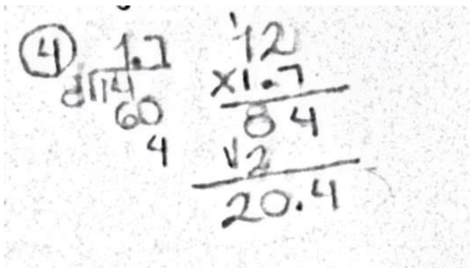
Observamos que la relación unitaria que el estudiante considera para la situación planteada se encuentra al dividir las cantidades involucradas e implícitamente relaciona las cantidades en el sentido “tanto de esto por uno de aquello”. Es decir, al realizar la operación de dividir, se interpreta el resultado obtenido en términos de la nueva unidad *“donas por cada taza*”. Lo anterior no siempre sucede debido a que se suelen generar conflictos de interpretación. Estos conflictos prácticamente no se manifestaron en los casos que se comparan cantidades homogéneas o heterogéneas llamadas familiares, como sucede cuando las cantidades son heterogéneas no familiares, hecho del que daremos cuenta más adelante.

Tabla 2. Articulación semiótica de una cadena

Expresión		Contenido
Expresión	Contenido	Razón entre cantidades
4 *tazas* → 7 *donas* 2 *tazas* → 3.5 *donas*	Relación entre parejas de cantidades proporcionales.	

Presentamos, a continuación, la configuración cognitiva de la estrategia llamada *relación unitaria* (Tabla 3)

Tabla 3. Configuración cognitiva de la estrategia relación unitaria

Lenguaje: Se establecen operaciones básicas tales como la división y multiplicación *Conceptos:* Razón	
Procedimientos y argumentos: Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema través de una razón entre ellas.	Operaciones aritméticas elementales Uso de decimales en la razón Adecuada multiplicación de esta razón por la cantidad de tazas para hacer donas No hace ostensiva una notación sobre las magnitudes

La relación entre las cantidades está dada por la expresión 14/8, esta expresión es el contenido de la nueva expresión que permite la solución de la situación en cuestión, como se muestra en la Tabla 4.

La regla de tres se activa al tener tres datos los cuales se operan aritméticamente de manera conveniente para encontrar la solución, los que son agrupados bajo el formato supuesto-pregunta. Usando este procedimiento no es necesario hacer una comparación proporcional entre las cantidades. La expresión “a” es a “b” como “x” es a “c” es en sí misma el contenido de una regla que permite encontrar la solución del problema planteado.

Tabla 4. Función semiótica del problema.

Expresión		*Contenido*
Expresión	*Contenido*	Proceso de Solución al multiplicar a la razón por la cantidad de tazas 1.75 donas/taza × (cantidad de tazas)
14/8	Razón: Relación entre cantidades Relación unitaria	

A continuación presentamos la configuración cognitiva de la regla de tres (Tabla 5):

Tabla 5. Configuración cognitiva de la regla de tres.

<table>
<tr>
<td>

Lenguaje:

Se establecen relaciones de la forma

a ⟶ b

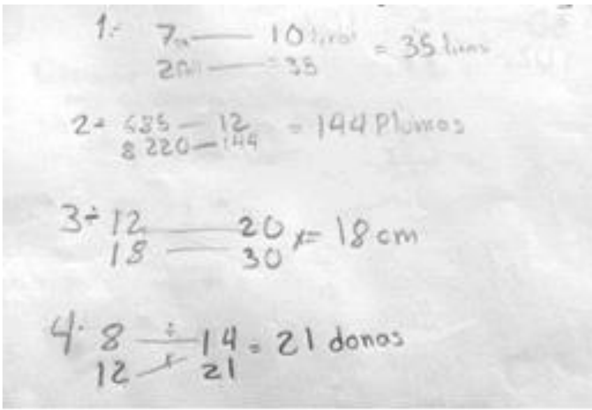
x ⟶ c

Se utilizan líneas como representaciones de las operaciones que el estudiante ha realizado.

Conceptos:

Regla de tres. Multiplicar de forma cruzada y dividir

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Procedimientos y argumentos:

Multiplican dos magnitudes de manera cruzada y dividen sobre la magnitud restante.

</td>
<td>

Se realizan operaciones aritméticas elementales, no existe un uso de unidades que permita inferir algún argumento sobre la solución del problema más allá del uso de la regla utilizada

</td>
</tr>
</table>

De lo anterior se desprende que:

1. La regla de tres es un proceso que se puede usar como una generalización para dar solución a problemas de valor faltante y no se sustenta en la interpretación de las relaciones de razón y proporción.
2. La regla de tres, por su tratamiento algorítmico, no parece claramente estar articulada con las nociones de razón y proporción.
3. Este algoritmo de solución no muestra elementos que contribuyan directamente al razonamiento proporcional.

Del análisis de las configuraciones encontramos que los estudiantes de nuestra muestra, que tienden a utilizar herramientas como la iteración, o establecer comparaciones a través de razones, pudieron interpretar *el todo en término de sus partes*, para después asociar las partes correspondientes. Estos estudiantes son capaces de justificar y argumentar su respuesta en términos del problema y no en términos únicamente de las operaciones realizadas para llegar a la solución. En cuanto al uso de la regla de tres, se observa que no está asociado necesariamente con una justificación convincente de su respuesta, y que la mayoría de éstos no pudieron explicar la relación que hay entre las cantidades, limitándose a indicar qué número multiplican por otro y por cuál deben dividir.

5. Reflexiones Finales

Las configuración cognitiva así como la dualidad expresión contenido proporcionan una herramienta adecuada para el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad de valor faltante. A partir del análisis realizado encontramos que:

1. La iteración mostró ser importante para la interpretación de los problemas y, aunque no fue considerado desde la óptica experta, esta estrategia parece ser una buena base

para la construcción del razonamiento proporcional. Con este procedimiento los estudiantes logran, no sólo la solución, sino también les permite encontrar una forma de comparar las cantidades involucradas al margen de su naturaleza homogénea o heterogénea. Con ella están en condiciones de establecer la razón, lo que les permite anticipar resultados para otras parejas de cantidades.

2. Consideramos que no es el tipo de problema el que delimita el razonamiento proporcional, más bien éste está relacionado con las prácticas y los procesos que los estudiantes llevan a cabo y donde estos procedimientos pueden ser la base que permita articular otros procesos, tales como la regla de tres.

Finalmente para continuar la investigación pretendemos articular las distintas configuraciones mencionadas, considerando aspectos epistémicos y cognitivos que permitan la articulación de todos los procesos encontrados.

Referencias

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10* (2), 191-218.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2-7.]

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1991). Variables affecting proportionality: understanding of physical principles, formation of quantitative relations, and multiplicative invariance. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of PME XV Conference* (pp. 125-133). Assisi, Italy.

Hart, K. (1984). *Ratio: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-NELSON.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En M. Behr and J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teachers and Mathematics.

Lesh, R., y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Post, T. R., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mellar, H. (1991). Modeling student’s thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *22* (1), 111-119.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Tjoe, H., y de la Torre, J. (2014a). The identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling framework. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 237-255.

Tjoe, H., y De la Torre, J. (2014b). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 1-7.