Descripción gráfica de la práctica de resolución de problemas en modelación matemática

Graphical description of problem solving practice in mathematical modelling

Nehemías Moreno Martínez, Manuel F. Aguilar Tamayo y Marco A. Villanueva Maldonado

Instituto de Investigación Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, UAEM-México

Resumen

Se presenta un estudio en el que se describe la práctica de resolución de un conjunto de problemas de modelación matemática realizada por un profesor universitario. Se emplea la técnica del mapa conceptual, interpretada a la luz del Enfoque Ontosemiótico, para describir gráficamente la configuración de objetos matemáticos organizada por el profesor durante la resolución de los problemas. Dicha configuración fue obtenida a partir de la producción oral y escrita que fue recabada mediante el empleo de una pluma electrónica. La visualización, a través del mapa conceptual, de las características de la red de conceptos y procesos puestos en juego en la resolución del problema permite tener un acercamiento a los significados asociados por el sujeto.

Palabras clave: Mapa conceptual, representación gráfica, resolución de problemas, modelación matemática.

Abstract

In this paper we present a study in which the practice of solving a set of mathematical modelling problems performed by a university lecturer is described. The conceptual map technique, interpreted in the light of the Onto-semiotic Approach, is used to graphically describe the configuration of mathematical objects organised by the lecturer during problem solving. This configuration was obtained from the oral and written production that was collected by the use of an electronic pen. The visualization, through the conceptual map, of the characteristics of the concepts and processes network brought into play in the problem solving allows having an approach to the meanings associated by the subject.

Keywords: Conceptual map, graphical representation, problem solving, mathematical modelling.

1. Introducción

Los mapas conceptuales han sido empleados en la planificación de la enseñanza y los planes de estudio, como instrumento de evaluación o como estrategia de instrucción (González, 1993; García, 1992; Morales, 1998; Gorbaneff y Cancino, 2009), entre otras aplicaciones. En otra investigación, García (1992) ha señalado que los mapas conceptuales tienen utilidad en la detección de los conocimientos previos del alumno.

En contraste con las múltiples aplicaciones de ésta herramienta, algunos investigadores han señalado dificultades con el empleo del mapa conceptual para representar la resolución de problemas (López, 1991). De acuerdo a ésta perspectiva, el mapa conceptual como instrumento instructivo podría ser más relevante en las ciencias blandas (e.g. ciencias sociales, biología, química) que en las ciencias duras

Moreno, N., Aguilar, M. F. y Villanueva, M. A. (2017). Descripción gráfica de la práctica de resolución de problemas de modelación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

(Matemáticas y Física), pues éstas últimas requieren mayor aportación de conocimiento procedimental.

En el presente trabajo se considera que en la enseñanza de la matemática escolar el mapa conceptual podría ser una herramienta que permitiría representar la práctica de resolución de problemas. Se parte de la idea de separar la técnica de la teoría como estrategia para reconstruir conceptualmente al mapa conceptual como objeto de investigación y mostrarlo visible desde otras perspectivas teóricas, en nuestro caso, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS a partir de ahora) (Godino, Batanero y Font, 2007). La forma de abordar a los mapas conceptuales desde la perspectiva de otra teoría no es nueva, por ejemplo Aguilar (2006a), presenta un estudio de los mapas conceptuales desde la perspectiva de la teoría sociocultural.

Se presenta una interpretación de la técnica del Mapa Conceptual tomando en cuenta algunos elementos teóricos del EOS. Desde esta perspectiva, se muestra la viabilidad de emplear la técnica del mapa conceptual (en particular, los mapas conceptuales híbridos) para representar gráficamente la práctica de resolución de problemas matemáticos. Se destaca en este punto que se ha evitado la suplantación en todo momento del sustento teórico del mapa conceptual. Es decir, no se confronta en ningún momento los supuestos teóricos de la teoría cognoscitiva del aprendizaje de Ausubel con respecto a los elementos teóricos del EOS.

Además de esta breve introducción, el trabajo incluye en la segunda sección una revisión de algunas investigaciones que han reportado algunos hallazgos en relación con el aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas. En la tercera sección se discute la base teórica del trabajo, en la que se describe a la técnica del mapa conceptual desde la perspectiva del EOS.

En la cuarta sección se presenta la metodología que considera un estudio de caso en el que se realiza una descripción e interpretación detallada, mediante la técnica del mapa conceptual, de las producciones de un docente universitario cuando resuelve un conjunto de problemas de matemáticas, concretamente de cálculo diferencial.

En la quinta sección se analiza la práctica llevada a cabo por el docente para resolver el conjunto de problemas. En dicho análisis se ha tomado en cuenta la perspectiva ontosemiótica de la red de conceptos representada mediante los mapas conceptuales híbridos. Por último, en la sexta sección se presentan algunas implicaciones para la enseñanza de las matemáticas.

2. Revisión de la literatura

El primer señalamiento sobre la importancia de la *resolución de problemas* para el aprendizaje de las matemáticas fue realizado por Polya (1945) que proponía la realización de un proceso que iniciaba con la comprensión del problema, la concepción de un plan, la ejecución del plan y la visión retrospectiva, junto con las preguntas que el resolutor debería plantearse en cada fase. Desde entonces el término resolución de problemas ha sido interpretado de diferentes maneras y ha sido objeto de estudio bajo distintos enfoques en numerosas investigaciones (Schoenfeld, 1985; Palacios, 1993; Alonso y Martínez, 2003).

En lo que respecta a este trabajo, el aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la resolución de problemas proporciona al sujeto aprendiz un procedimiento creativo que demanda la investigación y la generación de soluciones mediante la reflexión, la argumentación, la comunicación de ideas, el desarrollo de intuiciones y la anticipación de resultados (Valle y Curotto, 2008; Francisco, Aymemí y Rodríguez, 2015).

Desde una perspectiva curricular, la resolución de problemas tiene que ver con traducir los problemas desde el mundo real al matemático, lo cual implica entre otras cosas comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal, encontrar regularidades, relaciones y patrones, así como también traducir el problema a un modelo matemático. Sin embargo, la realización de dichos procesos no es inmediata para algunos estudiantes que se enfrentan a problemáticas donde sus conocimientos previos dificultan la identificación y la definición del problema (Barroso y Ortíz, 2007), o para aquellos estudiantes que son afectados por las creencias que tienen sobre lo que es la resolución de problemas (Villalobos, 2008). En otras investigaciones también se ha señalado además que algunos estudiantes tienen mayores dificultades cuando resuelven problemas en contexto reales en comparación con aquellos problemas que se proponen en un contexto puramente matemático (Quezada y Letelier, 2001).

Por otro lado, en la planificación y la resolución de los problemas, las dificultades más frecuentes suelen deberse a respuestas impulsivas en las que no se tiene en cuenta la reflexión sobre la demanda de la tarea antes de empezar la resolución del problema, mientras que en la verificación de la solución, las dificultades más comunes tienen que ver con un escaso conocimiento base que ayude a interpretar los resultados (Barroso y Ortíz, 2007).

En este contexto, otros investigadores (Pifarré y Sanuy, 2001; Barroso y Ortíz, 2007; Villalobos, 2008) han señalado que en el diseño de propuestas de enseñanza-aprendizaje que tengan como objetivo mejorar el proceso y las estrategias para resolver problemas matemáticos es necesario utilizar métodos que hagan visibles las acciones para resolver un problema, diseñar diferentes tipos de materiales didácticos que guíen la selección, la organización, la gestión y el control de los diferentes procedimientos para resolver un problema, así como también el de crear espacios de difusión y de reflexión alrededor de este proceso como, por ejemplo, el trabajo en pequeños grupos o en parejas (Nieto, Barona y Ignacio, 2006).

En esta dirección, en el presente trabajo se realiza una propuesta de aplicación del mapa conceptual para representar la práctica de resolución de problemas de la matemática escolar, que al igual como se ha observado en otros contextos, podría resultar de gran utilidad para la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas. Se trata del empleo de la técnica del mapa conceptual interpretada a la luz del EOS, que entre otras cosas permitiría: construir y negociar el significado entre alumnos o maestro-alumno, tomar en cuenta los conocimientos previos a partir de la estructura proposicional representada, abandonar estrategias de enseñanza y aprendizaje sustentadas en la práctica memorística de resolución de problemas, su empleo como técnica de estudio, desarrollar una categorización y codificación de datos cualitativos para la investigación sobre el aprendizaje de conceptos, representar los conocimientos de las personas y teorías de las disciplinas científicas, haciendo uso del recurso lingüístico y gráfico para mostrar de manera jerárquica y sintética las principales proposiciones o afirmaciones de conocimiento respecto a un tema o pregunta, etc.

3. Marco teórico

El enfoque teórico considera al mapa conceptual desde la perspectiva del EOS. A continuación se describe primeramente el EOS, posteriormente la técnica del mapa conceptual, y por último, se describe a la herramienta del mapa conceptual desde la perspectiva del EOS.

3.1. El Enfoque Ontosemiótico

Desde la perspectiva del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), la resolución de un problema matemático implica la realización de una práctica en la que participa un conjunto de objetos matemáticos primarios: conceptos, lenguaje, propiedades, procedimientos y argumentos. Las relaciones entre dichos objetos, establecida por el sujeto que realiza la práctica, son modeladas en el EOS a través de la llamada configuración de objetos matemáticos primarios. El EOS también señala que tanto los objetos primarios como las configuraciones pueden ser interpretados desde cinco perspectivas duales *personal/institucional*, *ostensivo/no ostensivo* y *expresión/contenido*, *unitario/sistémico* e *intensivo/extensivo*; también advierte la realización de ciertos procesos cognitivos tales como el de materialización (permite pasar de una representación no ostensiva a una ostensiva), idealización (permite ir de una representación ostensiva a una no ostensiva), argumentación (para justificar el procedimiento empleado en la resolución de un problema), representación, etc.

Por otra parte, el significado es entendido en el EOS de dos formas, mediante la noción de *función semiótica* o como *sistema de prácticas*. Mediante la primera, que considera la perspectiva *expresión/contenido*, el significado está dado a través de la correspondencia (relaciones de dependencia) entre un antecedente (significante o expresión) y un consecuente (significado o contenido) establecidos por un sujeto (persona o institución) de acuerdo a ciertos criterios (convenios, reglas matemáticas). Y mediante la segunda, el significado de un objeto matemático es entendido como el sistema de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización. En este último, el sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado *sentido* (perspectiva unitaria) del objeto matemático.

3.2. Los Mapas Conceptuales

El mapa conceptual es una red de conceptos ordenados jerárquicamente, en el que la interconexión de los conceptos, mediante las "ligas" y las "frases de enlace", produce una red de estructuras proposicionales donde el significado no sólo se encuentra en la relación entre concepto y concepto, sino que se extiende a las relaciones que a su vez estos conceptos tienen con otros conceptos; el orden de estas relaciones está orientado por un dominio de conocimiento a partir del cual es posible señalar las relaciones verdaderas conforme al conocimiento de referencia.

El mapa conceptual puede ser elaborado a partir de un texto mediante una transformación de los registros, dando lugar a una representación interpretable desde una determinada teoría, así el mapa conceptual producido cambia su función para ser una representación válida que permite conocer acerca de la estructura cognitiva de los sujetos (Aguilar, 2006b).

Por otro lado, el desarrollo del mapa conceptual y su implementación en otros campos de conocimiento ha dado lugar a la fusión del mapa conceptual con otro tipo de representaciones, tal es el caso de los *mapas conceptuales híbridos* que resultan de la *fusión* de la red jerárquica de conceptos, característica del mapa conceptual, con la representación gráfica de procesos, característica de un diagrama de flujo.

En este trabajo se realiza la propuesta de emplear al mapa conceptual híbrido para describir de manera gráfica la práctica de resolución de problemas de la matemática escolar. En el mapa conceptual híbrido, mediante el empleo de lenguaje (nombres, expresiones algebraicas, índices, etc.), la componente del mapa conceptual deja ver la representación de objetos matemáticos tales como conceptos, propiedades y argumentos, mientras que la componente del diagrama de flujo incorpora a la representación la realización de cierto procedimiento que involucra procesos matemáticos como el de tratamiento algebraico, numérico, etc. Ambas componentes son organizadas por el sujeto con el propósito de resolver el problema.

3.3. Una mirada al Mapa Conceptual desde el Enfoque Ontosemiótico

Desde la perspectiva del EOS, el mapa conceptual híbrido es una representación ostensiva de la práctica de resolución de un problema de la matemática escolar en el sentido de que permite representar a los objetos matemáticos primarios y a su organización. En otras palabras, el mapa conceptual híbrido permite observar el empleo de: (1) *lenguaje*, para representar de manera ostensiva objetos no ostensivos (e.g. conceptos a través de nombres, propiedades mediante expresiones matemáticas, etc.); (2) *conceptos*, que se organizan jerárquicamente en el mapa conceptual híbrido; (3) *propiedades*, que se expresan mediante rutas de lectura que conforman enunciados sobre conceptos (e.g. propiedades algebraicas o geométricas); (4) *procedimiento*, representado a través de la componente procedimental del diagrama de flujo en el mapa conceptual y (5) *argumentos*, obtenidos de las diferentes rutas de lectura que conforman enunciados que validan o explican las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo. El mapa conceptual también da evidencia de la realización de ciertos procesos cuando se pasa de una jerarquía a otra, como por ejemplo el proceso de idealización, argumentación o el de tratamiento matemático.

Por otro lado, desde la perspectiva del EOS, el mapa conceptual puede ser visto desde la perspectiva *personal/institucional*, según se trate de un mapa conceptual obtenido a partir de las producciones de un experto (perspectiva institucional) o de un estudiante inexperto (perspectiva cognitiva) respectivamente.

Otra característica principal de los mapas conceptuales es la organización jerárquica de los conceptos, la cual va de los conceptos de mayor a menor generalidad. Se considera que, desde la perspectiva del EOS, el paso de una jerarquía a otra conlleva la realización de ciertos procesos tales como el de idealización, argumentación, tratamiento, etc.

En relación con la concepción de significado en el mapa conceptual híbrido, según el EOS, éste puede ser entendido desde una perspectiva unitaria/sistémica. Desde la perspectiva unitaria las representaciones que se muestran en el mapa conceptual dan cuenta del establecimiento de *funciones semióticas* establecidas por el sujeto que resuelve el problema. Por ejemplo, se tienen conceptos matemáticos que son representados en el mapa conceptual mediante nombres (perspectiva ostensiva) tales como el de *pendiente*, *función*, *derivada*, etc. o bien propiedades enunciadas a través de expresiones como "$m=tan(\alpha)$", "$a(b+c)=ab+ac$", etc. En general, en el mapa conceptual se establece una trama de funciones semióticas.

La ubicación de un concepto en particular en un mapa conceptual cognitivo podría no ser el mismo en el mapa conceptual de un experto. En éste último, el concepto podría estar relacionado a otros conceptos dando lugar a otras proposiciones y significados distintos a las relaciones significativas establecidas por el estudiante.

Por otro lado, según el EOS, el significado de un objeto matemático también está asociado a un sistema de prácticas en el que dicho objeto es determinante (perspectiva sistémica del significado). Esto es, tomando en cuenta que el mapa conceptual puede representar a la práctica de resolución de un problema matemático, un concepto en un mapa conceptual puede ser interpretado de una manera distinta en otro mapa (del sistema de mapas). Por ejemplo, en un mapa conceptual la derivada de una función puede ser concebida como la pendiente de la recta tangente a un punto de la gráfica de dicha función, sin embargo, en otro mapa conceptual que represente a una práctica más general, la derivada podría ser interpretada como la razón de cambio o tasa de variación de alguna cantidad a un tiempo dado.

4. Metodología

La investigación toma en cuenta un estudio cualitativo, puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación del tipo de solución a las tareas propuestas. La estrategia de indagación empleada en este trabajo fue un estudio de caso (Merrian, 1998) debido a que se tenía el interés de describir e interpretar la práctica de resolución de un conjunto de problemas matemáticos escolares. El estudio de caso es descriptivo pues se presentan con detalle las producciones (oral y escrita) realizadas por el sujeto a lo largo del proceso de la resolución de cada una de las tareas planteadas. También es interpretativo en el sentido de que los datos recabados (la producción del docente) son clasificados de acuerdo a las categorías de objetos matemáticos primarios señalados por el EOS, esto es, son clasificados según pertenezcan a: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumento. Una vez obtenida dicha categorización, los objetos son representados gráficamente mediante un mapa conceptual híbrido.

4.1 Participante

El participante fue un docente universitario con formación académica en ingeniería mecánica y con estudios de posgrado en ciencias aplicadas. El docente informó que contaba con cinco años de experiencia impartiendo la materia de cálculo en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México.

4.2 Diseño y recogida de datos

Los investigadores diseñaron un conjunto de dos problemas que fueron nombrados como "el problema del globo" y "el problema de la caja de madera", los cuales son abordados en los cursos de Cálculo diferencial, en el contexto de la modelación matemática, que se imparten en la universidad a la que se encuentra adscrito el docente investigado. Los problemas propuestos fueron los siguientes:

1. El primer problema está relacionado con la composición de funciones y plantea la siguiente situación: *Un globo sonda se expande conforme se eleva, debido a la disminución de la presión atmosférica. Suponga que el radio "r" aumenta a razón de 0.03 pulgadas por segundo y que r=48 pulgadas en el instante t=0. Determine una ecuación que modele el volumen "V" del globo en el instante "t" y determine el volumen cuando t=300 segundos.*
2. La segunda tarea que se propuso al docente fue la resolución de un problema de optimización y fue enunciado mediante: *Se ha de construir una caja de madera de base cuadrada y de 108 dm^3 de capacidad. La parte de arriba debe ser abierta. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima? Es decir, ¿Qué dimensiones exigirán menor costo?*

El procedimiento de recolección de datos se llevó a cabo en una sola sesión entre el investigador y el docente investigado, en dicha sesión se propuso al docente la resolución de los problemas, uno a la vez, y se le dio la oportunidad de resolverlos antes de que lo explicase y lo resolviese mediante el empleo de la pluma electrónica. La pluma electrónica *(Smartpen)* es una herramienta electrónica que permite el registro sincronizado de audio y trazo de escritura, el cual es almacenado en un archivo para reproducirse en la computadora. Dicha herramienta permite tener en cuenta el discurso del docente al mismo tiempo que representa la solución del problema sobre el papel.

La producción escrita como nombres, literales o las expresiones matemáticas empleadas dan cuenta del *lenguaje* ostensivo empleado por el sujeto en la resolución del problema. A través de dichas representaciones el sujeto hace referencia a los *conceptos*. Cuando el sujeto se refiere a alguna *propiedad* matemática ésta es enunciada a través de una proposición representada mediante una ruta de lectura corta en el mapa conceptual en la que no se justifica el procedimiento de solución pero si se establece una relación matemática entre conceptos. El *procedimiento* realizado por el sujeto es incorporado en el mapa conceptual a través de un diagrama de flujo, el cual muestra la aplicación de una serie de propiedades matemáticas (propiedades algebraicas, leyes de signos, etc.) que guían al sujeto hacia la solución del problema. Por otra parte, la *argumentación* oral proporciona la componente justificativa del procedimiento de solución del problema, el cual es representado a través de la trama de rutas de lectura del mapa. Los aspectos anteriores sirvieron de base para la elaboración del mapa conceptual híbrido correspondiente.

5. Análisis y discusión

5.1. El problema del globo

En la Figura 1 se muestra la producción del docente, que consiste del tratamiento algebraico y del discurso oral (obtenido de la transcripción del audio), éste último presentado mediante recuadros. Cabe señalar que el docente no se apoya en otro tipo de representaciones como en esquemas o en alguna representación pictórica.

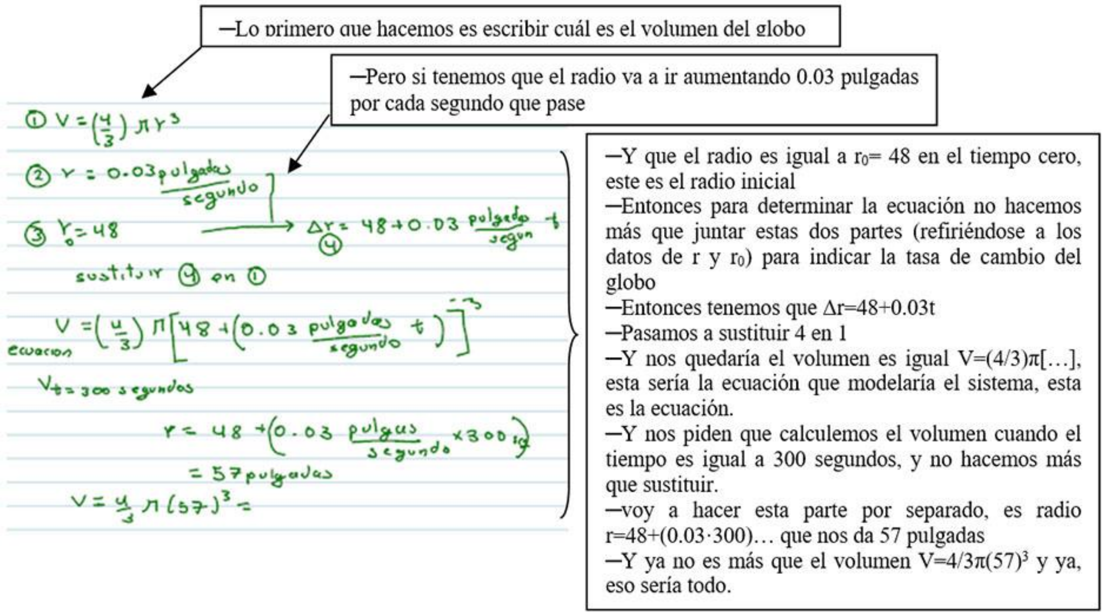

Figura 1. Producción del docente en la resolución del problema del globo.

En comparación con los libros de texto que presentan el tratamiento algebraico separado del discurso justificativo, dejando al lector la lectura y la visualización de la información textual sobre el tratamiento algebraico, como se ilustra en la Figura 2, la perspectiva ontosemiótica de los mapas conceptuales híbridos provee de una herramienta que permite representar de manera conjunta tanto el tratamiento algebraico como la información que proporciona la transcripción del discurso oral justificativo.

En el mapa conceptual de la Figura 2 se pueden observar diversos conceptos (algunos han sido señalados mediante números 1, 2,…,5 y otros de letras A, B, B1,…,F) articulados y organizados de manera jerárquica. Dicha jerarquía va de conceptos que pueden leerse directamente del problema como el concepto de globo (concepto 2), sus características físicas (conceptos 3 y A), y se llega hasta conceptos más complejos tales como el de magnitud (concepto E), tasa de cambio (concepto C) o función (concepto 4) los cuales son tomados en cuenta por el experto con el propósito de resolver el problema.

Por otra parte, en la Figura 2 también se puede observar el empleo de lenguaje a través de palabras que re refieren a conceptos (por ejemplo *globo*, *radio*, *volumen*, *razón*, etc.) o bien expresiones matemáticas que representan a otros conceptos más complejos como el de *función* representado mediante “$V(r)=4/3\pi r^3$”, *tasa de cambio* representado por la expresión $\Delta r=48+0.03t$ o el concepto al que se refirió el experto mediante *ecuación del sistema* “$V(t)=4/3\pi[48+0.03t]^3$”. Todas éstas expresan a su vez el establecimiento de funciones semióticas entre una etiqueta ya sea palabra, literal, expresión, etc. con algún concepto correspondiente.

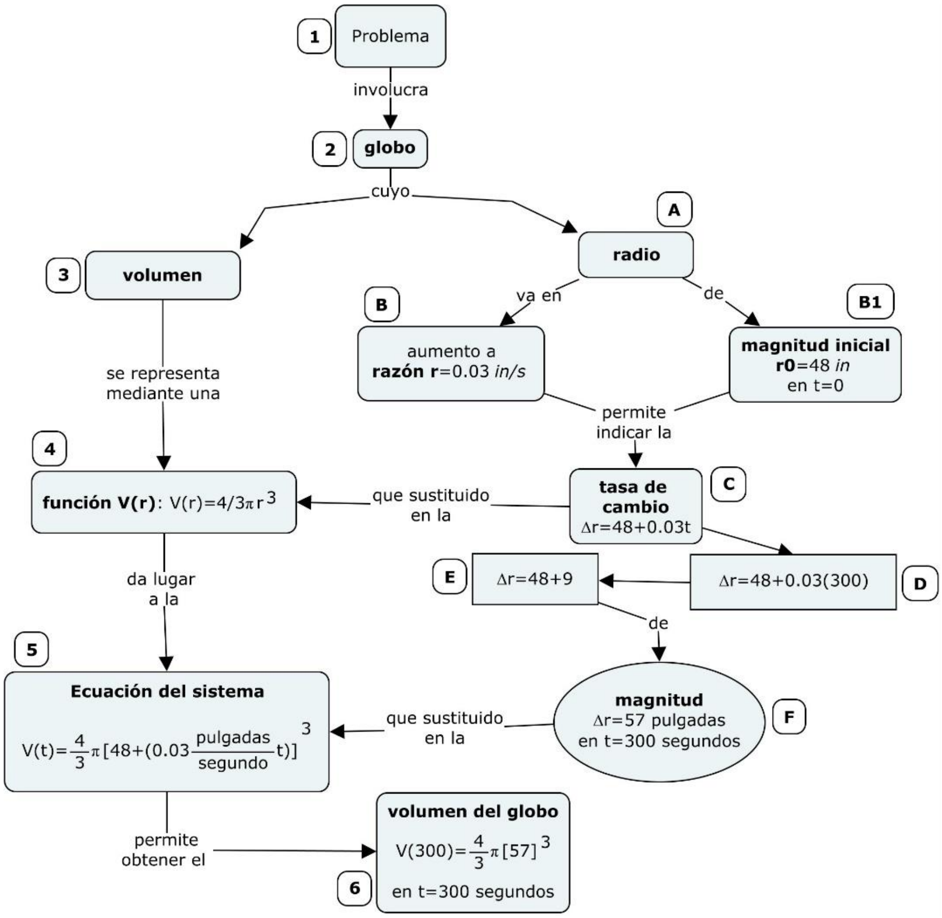

Figura 2. Mapa conceptual híbrido epistémico correspondiente a la solución del problema del globo (elaboración propia mediante el software CmapTools).

También es posible observar el empleo de algunas propiedades, por ejemplo, la propiedad señalada por la ruta de lectura que va del concepto A al B (ruta A-B) que dice que "*el radio va en aumento a razón r=0.03 in/s*", también la propiedad que señala la composición de funciones mediante la ruta C-4 "*la tasa de cambio* $\Delta r=48+0.03t$ *sustituida en la función* $V(r)=4/3\pi r^3$" o bien la propiedad señalada en la ruta A-B1 que se refiere a la condición inicial "*el radio de magnitud inicial* $r_0= 48$ *in en t=0*".

En esta dirección, la Figura 2 también deja ver la realización de un procedimiento en el que se parte al indicar el volumen del globo esférico en función del radio "*V(r)*" (ruta 2-4), luego deduce una ecuación para el radio del globo en función del tiempo "*r(t)*" (concepto 5). Después, sin señalarlo explícitamente, realiza la composición de funciones *V(r(t))* (ruta C-4), lo cual le permite determinar el volumen del globo al tiempo t=300 s (concepto 6). Sin embargo, aunque el docente llega a la solución correcta del problema, cabe señalar que comete un error al señalar explícitamente que va a sustituir Δr (como si fuese "*r*") en la función *V(r)*, es decir, sustituye la ecuación 4 en la ecuación 1 en el texto de la Figura 1. Desde nuestra perspectiva, esta situación no representa ningún inconveniente para el propósito del presente trabajo el cual está enfocado en mostrar la viabilidad de representar la práctica de resolución de problemas de la matemática escolar mediante la técnica de mapas conceptuales.

También es posible observar en la Figura 2 diversos argumentos que vienen a justificar el procedimiento empleado. Estos argumentos se muestran a través de las siguientes rutas de lectura: (i) ruta 1-6, *el problema involucra un globo cuyo volumen se representa mediante una función V(r) la cual da lugar a la ecuación del sistema V(t) que permite obtener el volumen del globo V(300) en t=300 segundos* y (ii) ruta A,B,B1,C-F, *el radio va en aumento a razón r=0.03 in/s y junto con el radio inicial r_0 permite indicar la tasa de cambio Δr=48+0.03t de magnitud Δr=57 pulgadas en t=300 segundos*.

Por último, cabe señalar también la realización de ciertos procesos cognitivos como el *proceso de idealización*, el cual se deja ver en el paso del concepto 2 al 4, que permite al experto suponer a la sonda con una forma esférica. Se lleva a cabo el *proceso de generalización*, que va del concepto A al C, que lleva al experto al planteamiento de una ecuación lineal para la "tasa de cambio Δr" a partir del dato de razón r=0.03 in/s y la condición inicial r_0. También se realiza el *proceso de argumentación* son el propósito de justificar el procedimiento empleado para resolver el problema, o bien el *proceso de tratamiento* que va del concepto C al F y que se corresponde con la componente del diagrama de flujo del mapa conceptual híbrido. Consideramos que algunos de los procesos permiten el paso de una jerarquía a otra de conceptos o la organización de cierto grupo de rutas de lectura.

5.2. El problema de la caja de madera

En la Figura 3 se ilustra la producción del docente, la cual se refiere a un texto sobre el tratamiento algebraico, la representación pictórica de la caja y el discurso oral, presentado mediante recuadros enumerados, obtenido de la transcripción del audio.

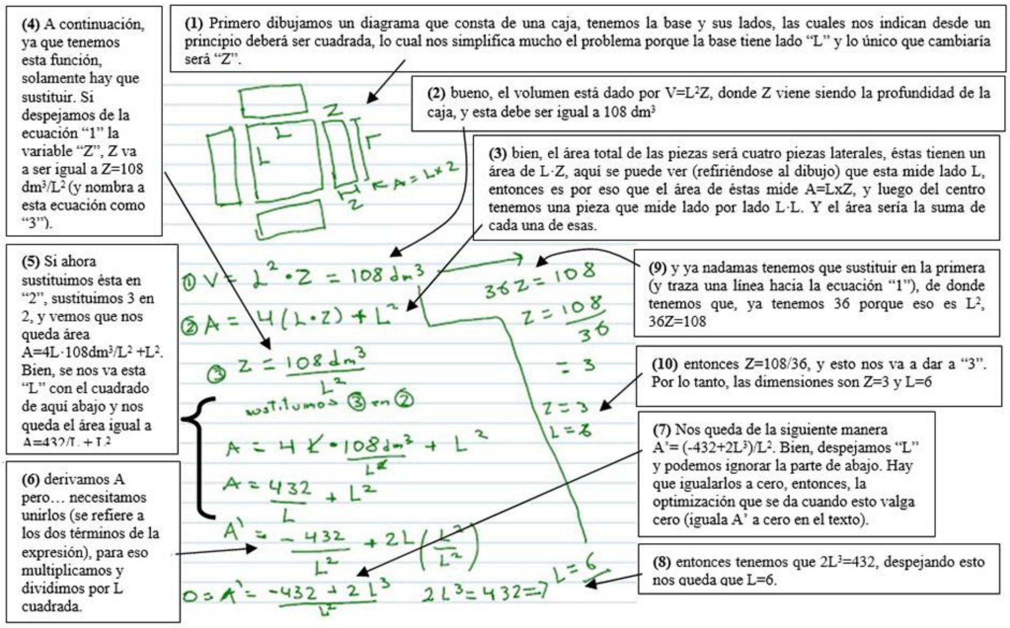

Figura 3. Producción del docente en la resolución del problema de la caja de madera.

En la Figura 3 se puede apreciar que el docente inicia con la elaboración de una representación pictórica de la caja, posteriormente obtiene una expresión para el área total de la caja considerando la suma del área de la base y las caras. Emplea el criterio de la primera derivada para encontrar el mínimo de dicha área, sin embargo, no toma en cuenta la segunda derivada para verificar si el resultado obtenido corresponde a un mínimo o máximo del área.

En la Figura 4 se muestra el mapa conceptual híbrido correspondiente, el cual integra a los elementos más importantes del texto presentado por el experto y el discurso obtenido a través del audio. La lectura de dicho mapa se apoya, además, sobre los datos que han sido considerados en la representación pictórica de la caja, se trata de los lados de la base cuadrada de tamaño “L” y la profundidad “Z” de la caja (altura).

El mapa conceptual de la Figura 4 muestra diversos conceptos (conceptos 1-13, A-E, P, K y R), algunos de ellos obtenidos por el experto a partir de la lectura del problema, como el de caja de madera, área, volumen, etc., y otros que pueden señalarse en el mapa y que son considerados implícitamente en la producción del experto como sería el caso del concepto de función, ecuación, primera derivada, etc.

Al igual que el mapa de la Figura 2, los conceptos son representados mediante etiquetas, a través de expresiones matemáticas o de la representación pictórica. Por ejemplo, el concepto de volumen (concepto A) es representado mediante la literal “V” y por la ecuación $L^2Z=108$, el concepto de área (concepto K) mediante la literal “A” y a través de la expresión $A(L,Z)=4(L\cdot Z)+L^2$, la profundidad o altura (concepto 4) mediante “Z”, etc. Sin embargo, en comparación con el problema anterior, la práctica de resolución realizada por el experto hace uso de una representación pictórica para representar el concepto de caja y lo que considera como las dimensiones físicas.

Por otra parte, en el mapa conceptual también se observa el empleo de propiedades tales como el de la composición de funciones (ruta de lectura K, 6-8), la derivada de una función (conceptos 8 y 9), la multiplicación por el elemento neutro L^2/L^2, entre otras cosas.

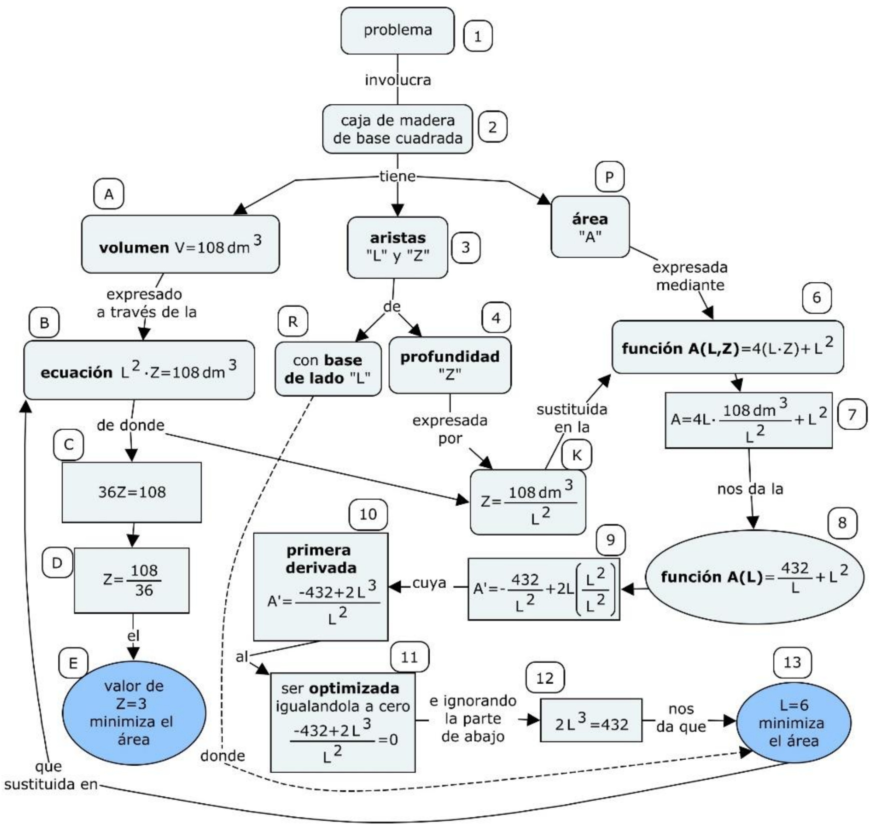

Figura 4. Mapa conceptual híbrido epistémico correspondiente a la solución del problema de la caja de madera (elaboración propia mediante CmapTools).

A partir del mapa, también pueden señalarse algunos argumentos que vienen a justificar el procedimiento de solución empleado por el experto. Por ejemplo, mediante la *ruta de lectura 1,2, A-E* se señala que "*el problema involucra una caja de madera de base cuadrada que tiene volumen* $V=108dm^3$ *representada a través de la ecuación* $L^2Z=108dm^3$ *de donde el valor de* $Z=3$ *es tal que minimiza el área*". La ruta 2, P, 6-13 advierte que "*la caja de madera de base cuadrada tiene área A expresada mediante la función* $A(Z,L)=4(L\cdot Z)+L^2$ *que puede ser reescrita como la función* $A(L)=432/L+L^2$ *cuya primera derivada* $A'=(-432+2L^3)/L^2$ *al ser optimizada, igualada a cero e ignorada la parte de abajo, nos da* $L=6$ *que minimiza el área*".

En comparación con el mapa de la Figura 2, este mapa muestra la realización de varios procesos. Se realiza un *proceso de tratamiento* para obtener la función compuesta (ruta 6-8) y otro para obtener el mínimo de la función área (ruta 8-13 en conjunto con la ruta 13, B-E). Cabe señalar que la realización del proceso de tratamiento requiere de la consideración de propiedades matemáticas tales como el conocimiento de propiedades algebraicas para realizar los despejes correspondientes, reglas de derivación, etc.

Por otra parte, el experto nuevamente realiza el *proceso de idealización* cuando supone que la caja posee espesor despreciable y no lo considera en el proceso de solución, reduciendo el problema al tratamiento de un problema en el plano (ruta 2, P y 6). El experto realiza el *proceso de argumentación*, lo cual puede observarse a través de las diferentes rutas de lectura en el mapa conceptual (tanto para enunciar propiedades como argumentos justificativos). Por último, cabe señalar que si bien el experto no realizó la comprobación de que el resultado $Z=3$ y $L=6$ corresponde al mínimo de una función, lo cual desde nuestro punto de vista fue debido a la realización de un *proceso de generalización* en el que el problema de la caja fue catalogado como un problema de optimización y el resultado como aquel que corresponde al de un mínimo. En otras palabras, tomando en cuenta su experiencia, el docente dio por hecho de que se trataba del mínimo de una función.

6. Implicaciones para la enseñanza de las matemáticas

Como se ha podido observar, desde la perspectiva del EOS, el mapa conceptual híbrido puede ser considerado como una representación ostensiva del conocimiento matemático del sujeto en el contexto de la resolución de problemas. Dicha representación permite visualizar a los diversos objetos matemáticos primarios y su organización, así como también algunos procesos cognitivos necesario para el éxito de la práctica de resolución del problema.

Contrario a la postura de algunos señalamientos de que los mapas conceptuales no resultan de utilidad para la enseñanza de las matemáticas o la física por la gran cantidad de contenido procedimental en la resolución de problemas, consideramos que la perspectiva del EOS sobre los mapas conceptuales brinda una herramienta para representar la práctica de resolución de problemas, permitiendo pasar de una interpretación de los mapas conceptuales como una herramienta de representación declarativa de conocimiento a una interpretación como herramienta de representación declarativa-procedimental.

Por otro lado, en lo que respecta a este trabajo, la perspectiva personal/institucional del mapa conceptual híbrido también podría proporcionar una herramienta de investigación para analizar la comprensión de los estudiantes en el contexto de la resolución de problemas de la matemática escolar. Se trata de una técnica de análisis, similar a la propuesta por algunos investigadores (Malaspina, 2007; Malaspina y Font, 2010), en el sentido de la elaboración y comparación sistemática de un mapa conceptual híbrido epistémico con el correspondiente mapa conceptual híbrido cognitivo que se desea analizar.

De este modo, soluciones correctas de los estudiantes revelarían en el mapa conceptual cognitivo una articulación adecuada entre los conceptos, un empleo adecuado de los propiedades de los objetos que participan, procedimientos y argumentaciones muy similares a las de un experto, mientras que soluciones erróneas mostrarían quizá ciertas conexiones entre conceptos relacionadas a proposiciones incorrectas o incompletas desde la perspectiva de la matemática escolar. Esta herramienta resultaría de gran utilidad en el contexto de la investigación en matemática educativa ya que no sólo toma en cuenta a la organización de objetos matemáticos primarios señalada por el EOS sino que también se apoya en la gran cantidad de investigaciones que han señalado las ventajas del uso de los mapas conceptuales como medio de representación del conocimiento.

Por otra parte, en el contexto del aula, es bien sabido que en la práctica de resolución de problemas que se presenta en los libros de texto el tratamiento matemático se muestra separado del texto justificativo, dejando al lector la tarea de la lectura del texto, la interpretación y visualización de la información sobre la secuencia de operaciones matemáticas señaladas en algún lugar de la página del libro. En contraste, los mapas conceptuales híbridos a través del sistema de rutas de lectura permiten representar gráficamente en la misma región el discurso del sujeto (experto o novato), tanto la forma oral como la escrita.

Cabe señalar que este trabajo presenta una forma de abordar la técnica del mapa conceptual desde la mirada del EOS. Se ha evitado la suplantación del sustento teórico, es decir, no se han confrontado los supuestos teóricos de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (Coll, 1988) con respecto a los elementos teóricos del EOS. Eso último es debido a la diversidad y amplitud de las prácticas del mapa conceptual que van más allá de estas dos formas de abordar el problema del aprendizaje de la matemática escolar.

Por último, consideramos que la propuesta de emplear a los mapas conceptuales híbridos como un medio para representar gráficamente la práctica de resolución de problemas matemáticos también podría ser empleada en el contexto de la física escolar. Ésta es una línea de investigación que se está desarrollando actualmente por nuestro equipo de trabajo.

Referencias

Aguilar, M. F. (2006a). El mapa conceptual y la teoría sociocultural. En *Concept Maps: Theory, Methodology, Techonology Proceedings of the Second Int. Conference on Concept Mapping*, San José, Costa Rica.

Aguilar, M. F. (2006b). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar. *Plasticidad y restauración neurológica*, *5*(1), 62-72. Disponible en, http://new.medigraphic.com/cgi-bin/resumen.cgi?IDARTICULO=9331

Alonso, I. y Martínez, N. (2003). La resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la matemática. *Pedagógica Universitaria*, *6*(3), 81-88.

Barroso, J. J., y Ortiz, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, (342), 257-286.

Coll, C. (1988). Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. *Infancia y Aprendizaje*, 11(41), 131-142.

Valle, C. y Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *7*(2), 463-479.

Francisco, M. G., Aymemí, J. M. y Rodríguez, Á. G. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Canguro. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 29-46.

García, F. M. (1992). Los mapas conceptuales de JD Novak como instrumentos para la investigación en didáctica de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(2), 148-158.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127-135.

González, L. C. (1993). Mapas conceptuales y resolución de problemas. *Investigación en la Escuela*, *19*, 79-88.

Gorbaneff, Y., y Cancino, A. (2009). Mapa conceptual para el aprendizaje basado en problemas. *Estudios Gerenciales*, *25*(110), 111-124.

López, R. F. (1991). *Organización del conocimiento y resolución de problemas en física*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(3), 365-399.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107-130.

Merrian, S. R. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. Second Edition. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Morales, E. (1998). Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(2), 77-91.

Nieto, L. J., Barona, E. G. y Ignacio, N. G. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, *340*, 551-569.

Palacios, F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, *11*(2), 170-178.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(2), 297-308.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press: Nueva Jersey.

Quezada, M. V. y Letelier, A. P. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-42.

Schoenfeld, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la Resolución de Problemas Matemáticos. En *La enseñanza de la matemática a debate*. (pp.13-47). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Villalobos, F. (2008). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *REICE. Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *6*(3), 36-58