Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática

Building a modular and inclusive system of theoretical tools for mathematics education

Juan D. Godino
Universidad de Granada
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

Resumen

La investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la realización competente de la práctica docente requieren aplicar herramientas teóricas y metodológicas que ayuden a describir, explicar y tomar decisiones instruccionales fundamentadas. El profesor o investigador debe abordar la problematización del propio contenido a enseñar (faceta epistémica), los procesos de aprendizaje (facetas cognitiva y afectiva), el currículo y factores condicionantes (faceta ecológica), el uso de recursos y los modos de interacción (faceta instruccional). Para abordar estas cuestiones es necesario disponer de un conjunto de nociones, principios y métodos específicos. En este artículo presentamos el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) como un sistema que incluye herramientas teóricas para cada una de las facetas mencionadas, partiendo de supuestos antropológicos, ontológicos y semióticos sobre el conocimiento matemático y los procesos de su enseñanza y aprendizaje. Se muestran, así mismo, algunas concordancias y complementariedades del EOS con otras teorías usadas en educación matemática, resaltando su carácter híbrido, dinámico e inclusivo.

Palabras clave: educación matemática, marcos teóricos, enfoque ontosemiótico, articulación de teorías.

Abstract

Research on mathematics teaching and learning and on the competent teaching practice, require theoretical and methodological tools that help to describing, explaining, and making informed instructional decisions. The teacher or researcher should problematize the teaching content (epistemic facet), learning processes (cognitive and affective facets), the curriculum and conditioning factors (ecological facet), the use of technological tools and modes of interaction (instructional facet). To address these issues a set of primitive concepts, principles, and methods is needed. In this paper we present the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction (OSA) as a system that includes theoretical tools for each of the mentioned facets, which it is based on anthropological, ontological and semiotic assumptions on mathematical knowledge and on the teaching, and learning processes. Some commonalities and complementarities of the OSA with other theories used in mathematics education are also shown, emphasizing its hybrid, dynamic, and inclusive character.

Keywords: mathematics education, theoretical frameworks, onto-semiotic approach, networking theories.

1. Introducción

Desde el nacimiento de la Didáctica de la Matemática en los años 70, la comunidad de investigadores viene elaborando diversas teorías que permitan describir y explicar los fenómenos relativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y ayuden también a mejorar tales procesos (Grugeon-Allys, Godino y Castela, 2016). La

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en,
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

complejidad de dichos fenómenos, los distintos factores que se deben tener en cuenta y la influencia de los diversos contextos culturales, desde los cuales se generan las teorías, explican la profusión de las mismas, lo cual genera dificultades de comunicación y de capitalización de los conocimientos. Esta es la razón por la que la articulación de marcos teóricos (networking theories) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008; Radford, 2008a), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la Didáctica de la Matemática, puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo, puede constituir una rémora para su consolidación como campo científico.

Prediger et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorarse entre sí, a la unificación global. Algunas estrategias intermedias sugeridas por estos autores serían hacer comprensibles entre sí las teorías, comparar y contrastar diferentes aproximaciones, coordinar y combinar perspectivas, para, finalmente, lograr una integración y síntesis local. Desafortunadamente, esa estrategia de integración y síntesis de teorías no se está aplicando a nivel internacional, como se puede ver en el resultado final de uno de los esfuerzos más destacados en esa dirección, como es el libro *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014). Como resalta Ruthven en dicho libro, a pesar de las limitaciones que la confrontación de las cinco teorías estudiadas revela al entrar en competición, cada una de ellas se esfuerza por defender su propia identidad. Una línea de progreso en la articulación de teorías puede venir de una estrategia no vislumbrada por el CERME Networking Group: la *hibridación* de teorías, esto es, la construcción de nuevas teorías a partir de otras, basada en la comparación racional de los principios, conceptos claves, métodos y cuestiones paradigmáticas de las mismas.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que el progreso en cualquier disciplina, y en particular en educación matemática, debe tener en cuenta el principio conocido como 'navaja de Occam', o principio de parsimonia, economía, o concisión, usado en lógica y resolución de problemas. Este principio afirma que, entre hipótesis competitivas, debería ser seleccionada la hipótesis con menos supuestos. En otras palabras, la explicación más simple es usualmente la mejor. La aplicación de la navaja de Occam al campo de la educación matemática justifica los esfuerzos realizados en el campo por comparar, articular y unificar teorías. Pero también es necesario tener en cuenta la frase atribuida a Einstein: "Todo se debería mantener lo más simple posible, pero no más", que puede considerarse como una formulación del principio conocido como 'anti-navaja de Chatton': "Si una explicación no determina satisfactoriamente la verdad de una proposición, y se está seguro de que es verdadera, se debe requerir alguna otra explicación". La existencia de una multiplicidad de teorías en educación matemática es una consecuencia de la aplicación implícita de la anti-navaja de Chatton, mientras que los esfuerzos de comparación, articulación y unificación de teorías es resultado de la aplicación, también implícita, de la navaja de Occam. Parece conveniente reconocer que ambos principios no son contrapuestos y que una posición racional ante la multiplicidad de teorías debe ser explorar la sinergia que pueda haber entre dichos principios.

Aunque no sea posible, o incluso deseable, tratar de construir una 'teoría holística que lo explique todo', la educación matemática puede progresar en la construcción de un sistema conceptual y herramientas metodológicas que hagan posible los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y sus interacciones. Como Ruthven (2014, p. 278) sugiere,

> Esto implica adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera.

Consideramos que la consolidación de la Didáctica de la Matemática como disciplina tecno-científica pasa por abordar cuestiones tales como:

- ¿Cuáles son los problemas, principios y metodologías que se abordan y usan en cada marco teórico?
- ¿Qué redundancias hay en las herramientas de estos marcos? ¿Son incompatibles entre sí?
- ¿Pueden convivir de manera sinérgica las herramientas cognitivas de un marco con las epistémicas de otro?
- ¿Sería útil construir un sistema teórico que tenga en cuenta las diversas dimensiones implicadas, evitando redundancias? ¿Cuáles serían las nociones primitivas y postulados básicos de dicho nuevo sistema?

En este trabajo trataremos de mostrar la pertinencia y potencial utilidad de avanzar hacia un sistema teórico que articule de manera coherente los enfoques epistémicos, cognitivos, socioculturales y pedagógicos con el objetivo de lograr diseños instruccionales idóneos. La estrategia de hibridación, o construcción modular de teorías, es la que está en la base del denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción, que vienen desarrollando Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) en un intento de articulación de diversas teorías, desde una aproximación que describen como antropológica y ontosemiótica.

En la siguiente sección explicitamos los componentes que consideramos debe contemplar un marco teórico para la educación matemática, distinguiendo, además, el uso de una teoría como *herramienta* para abordar la solución de determinadas cuestiones paradigmáticas, y su uso como *sistema de conocimientos* que se han ido aportando como resultados de su aplicación. En la sección 3 se presenta el EOS como un sistema inclusivo, abierto y dinámico que tiene en cuenta las diversas dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se hace una síntesis de las principales herramientas, incluyendo referencias a los artículos donde se describen con más detalle, así como su puesta en funcionamiento en algunas investigaciones. Las concordancias y complementariedades con otros marcos teóricos se mencionan en la sección 4, citando algunos artículos donde se ha iniciado el estudio de articulación de teorías, el cual no se puede dar por concluido dado el carácter abierto y dinámico del EOS. Incluimos finalmente unas reflexiones finales sobre la estrategia de hibridación de teorías que está en la base de construcción del EOS y las dificultades de índole sociológica que este proyecto suscita.

2. Componentes de un marco teórico para la educación matemática

Parece necesario, como un primer paso, explicitar qué se entiende por una teoría. Para Radford (2008a, p. 320) una teoría se puede ver como un modo de producir comprensiones y modos de acción basado en:

— Un sistema, P, de *principios básicos*, que incluyen visiones implícitas y enunciados explícitos que trazan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.

— Una *metodología*, M, que incluye las técnicas de recogida de datos y su interpretación apoyada por P.

— Un conjunto, Q, de *cuestiones paradigmáticas* de investigación (patrones o esquemas que generan cuestiones específicas a medida que surgen nuevas interpretaciones, o se profundizan, extienden o modifican los principios).

Consideramos necesario ampliar la tripleta propuesta por Radford con un nuevo componente, formado por el conjunto de *resultados* (conocimientos, comprensiones, recursos) que las teorías producen. En consecuencia, las teorías se pueden entender desde un punto de vista restringido, como 'sistema de herramientas' (conceptos, principios y métodos) que se utilizan para responder un conjunto de cuestiones propias de un campo de indagación. En un sentido ampliado, las teorías incluyen, además, el *sistema de resultados* (saberes) que se van obteniendo como resultado de aplicar las herramientas a las cuestiones.

En principio, cualquier teoría puede producir conocimientos valiosos que ayudan a comprender el campo y actuar sobre el mismo de manera fundamentada. Pero las diversas teorías, pueden ser redundantes, contradictorias, insuficientes, o más o menos eficaces para realizar el trabajo pretendido. La clarificación, comparación y posible articulación de teorías se orienta, por tanto, a la elaboración de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas óptimo, que potencie la investigación en el campo. Se asume que tal articulación de teorías se puede hacer mediante el análisis racional de los elementos constituyentes de las mismas y la elaboración de nuevas herramientas, cuando la mera amalgama de las existentes no sea posible o pertinente.

Por otra parte, un marco teórico que permita tener en cuenta la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debería incluir herramientas que permitan abordar las cuestiones relativas a las siguientes facetas y sus interacciones:

— *Epistémica*: conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la diversidad de significados que pueden tener los objetos matemáticos según los diversos marcos institucionales y contextos de uso.

— *Cognitiva*: conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje (significados personales).

— *Afectiva*: conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

— *Interaccional*: conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización y gestión de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

— *Mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

— *Ecológica*: conocimiento de las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

3. El EOS como sistema teórico modular e inclusivo para la educación matemática

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas. Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas, estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto. Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino, 2002; Godino et al., 2007; Font et al., 2013) con una tipología de objetos y procesos matemáticos, así como con una interpretación de la noción de función semiótica que permite elaborar nociones operativas de conocimiento, significado, comprensión y competencia (Figura 1).

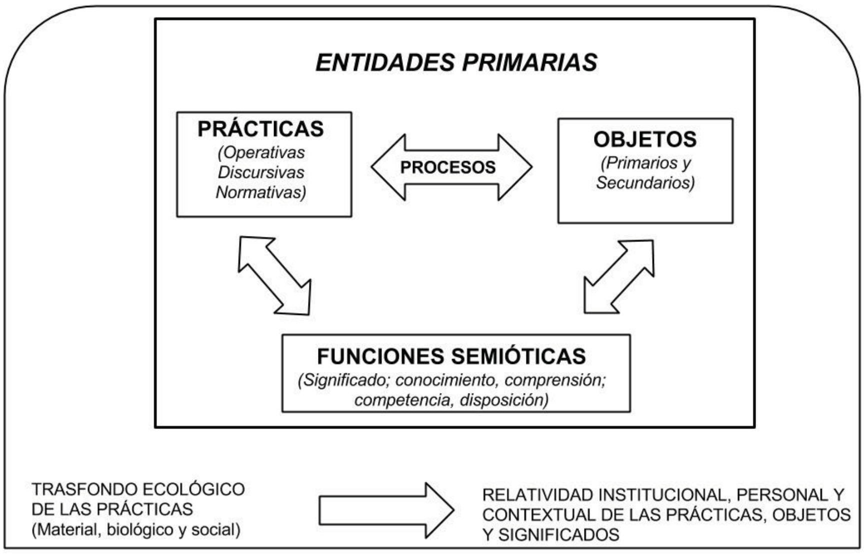

Figura 1. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS (Godino, 2014, p. 9)

En la Figura 1 se destacan como elementos claves de la modelización epistemológica y cognitiva del conocimiento matemático que propone el EOS las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades). La noción de función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia.

La noción de función semiótica se puede ver como una interpretación del signo Peirceano, el cual está formado por la triada: *representamen*, o signo en sí mismo, objeto e interpretante. “Una representación es aquel carácter de una cosa en virtud de la cual, para la producción de un cierto efecto mental, se puede poner en lugar de otra cosa. La cosa que tiene ese carácter la llamo un representamen, el efecto mental, o pensamiento, su interpretante, la cosa en cuyo lugar se pone, su objeto" (Peirce, CP 1.564).

En nuestro caso, el interpretante se concibe como la regla (hábito, norma) de correspondencia entre el representamen y el objeto, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo (significados personales o institucionales). Además, toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de significante, significado o interpretante. Los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De este modo se modeliza cualquier uso que se pueda dar a la palabra significado. La generalidad con la que se concibe la noción de objeto y significado puede ser de poca utilidad para analizar los fenómenos cognitivos, epistemológicos y semióticos que nos interesan. Ésta es la razón por la cual se hace un esfuerzo por elaborar un sistema detallado de categorías de objetos, teniendo en cuenta su diversa naturaleza y la función que desempeñan, lo cual nos lleva a hablar de ontosemiótica, y no solo de semiótica.

Se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social) que determina una relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, los objetos y significados, esto es, relatividad respecto de los juegos de lenguaje y formas de vida (Wittgenstein, 1953).

Aunque las entidades primarias mencionadas anteriormente (Figura 1) explicitan los fundamentos de los análisis epistémicos y cognitivos es necesario elaborar otras herramientas para poder realizar un *análisis didáctico integral* que sirva de fundamento para el diseño, implementación y evaluación de los procesos de estudio matemáticos. Como se sintetizan en la Figura 2, dicho análisis requiere tener en cuenta otras facetas, dimensiones, niveles y fases implicadas en dichos procesos.

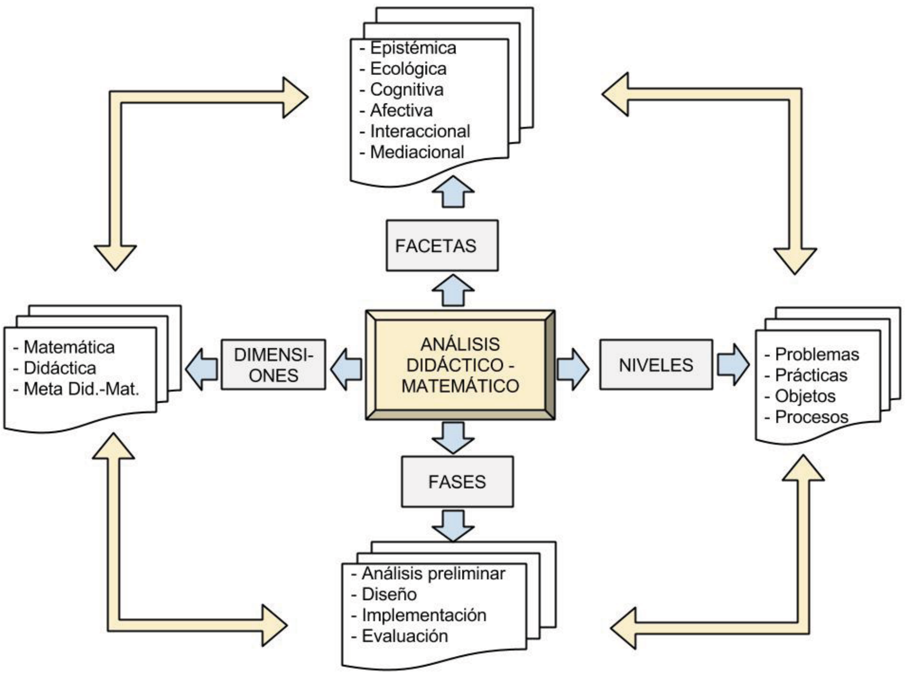

Figura 2. Focos de atención del análisis didáctico –matemático (Godino, 2014, p. 7)

En los siguientes apartados se describen las principales herramientas teóricas incluidas en el EOS para el análisis didáctico –matemático y referencias bibliográficas donde dichas herramientas se han introducido y donde se describen aplicaciones de las mismas.

3.1. Sistema de prácticas

Se asume una visión antropológica y pragmatista de las matemáticas, por lo que la actividad de resolución de problemas se considera como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Esta visión epistemológica se hace operativa con la noción de práctica matemática y asumiendo su relatividad institucional y personal. Se considera *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, ¿qué significa o representa la expresión *media aritmética*?, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos". Con esta formulación del significado el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista: "las categorías opuestas de sujeto y objeto pasan a un segundo plano, al asignárseles un estatuto derivado, y ceden su lugar privilegiado a la categoría de acción" (Faerna, 1996, p. 14).

La idea de significado institucional de referencia (Figura 3) de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global u holístico (Godino, Batanero y Font, 2007; Wilhelmi, Lacasta y Godino, 2007). Este significado global se considera como la población de referencia (de situaciones - problemas) de la cual se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos de enseñanza que se pretenden diseñar.

Con estas herramientas se trata de responder a las cuestiones ontológicas y epistemológicas siguientes:

- ¿Qué es un objeto matemático?, o de manera equivalente, ¿Cuáles son los diversos significados de un objeto matemático (número, derivada, …) en un contexto o marco institucional determinado?
- ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?
- ¿Cómo emergen los objetos a partir de las prácticas matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal?

Figura 3. Significados como sistemas de prácticas (Godino, 2014, p. 13)

En síntesis, en el EOS se asumen los principios ontológicos y epistemológicos sobre el conocimiento matemático y su aprendizaje que concuerdan con los formulados por Radford (2008b, p. 10-12) como propios de las aproximaciones socioculturales:

> "p1: el conocimiento es históricamente generado durante el curso de la actividad matemática de los individuos".
>
> "p2: la producción del conocimiento no responde a un pilotaje adaptativo, sino que está inmerso en formas culturales de pensamiento imbricadas con una realidad simbólica y material que proporciona la base para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos y los conceptos e ideas que se forman de ellas".

3.2. Configuración ontosemiótica

La noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones – problemas. El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio. Con esta herramienta teórica se trata de responder a las cuestiones:

- ¿Cuáles son las configuraciones de objeto y procesos que se activan en las prácticas matemáticas necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (configuraciones epistémicas).
- ¿Qué objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (configuraciones cognitivas).
- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante, son válidas desde la perspectiva institucional?

La herramienta configuración ontosemiótica (Figura 4) incorpora de manera híbrida elementos de las nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica. En Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) se puede ver el desglose analítico que aporta la noción de configuración ontosemiótica, tanto para los conocimientos institucionales como personales, con un ejemplo relativo al concepto de número natural. También se ejemplifica el uso de la herramienta función semiótica para analizar un caso sobre el aprendizaje de la decena. Así mismo, en Font et al. (2013) se analiza la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas realizadas para resolver problemas matemáticos. Un objeto abstracto es entendido en el EOS como una entidad:

— Inmaterial (no ostensiva).

— General (intensiva).

— Que se puede considerar de manera:

  - Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos).
  - Personal (mental) o institucional (sociocultural).
  - Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

El proceso de abstracción mediante el cual emergen o se construyen los objetos abstractos conlleva el concurso de otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación, etc.

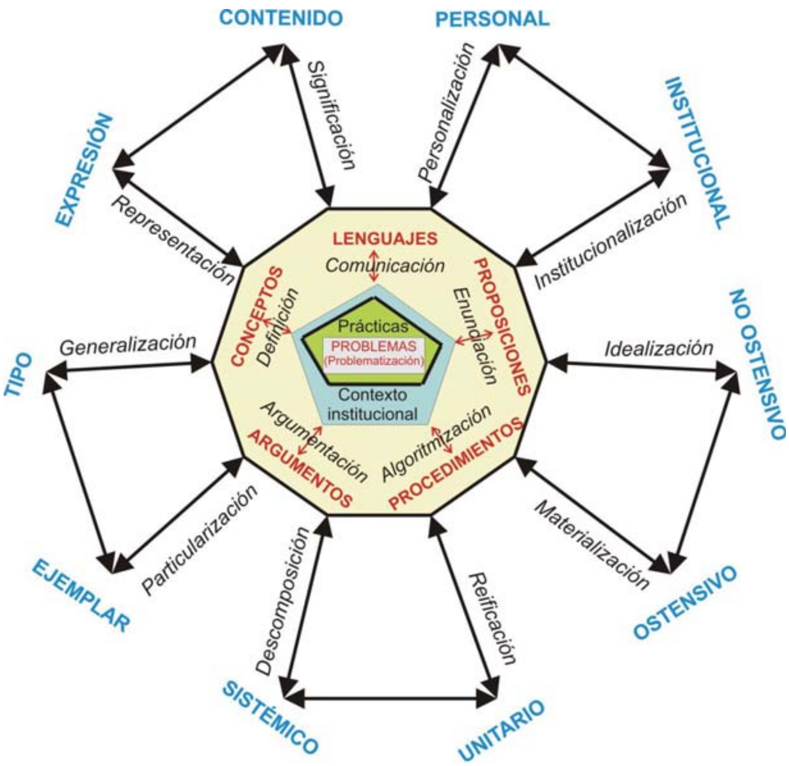

Figura 4. Configuración ontosemiótica (Godino, 2014, p. 23)

3.3. Configuración didáctica

Una vez elaboradas herramientas teóricas para analizar las dimensiones epistemológica y cognitiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el EOS debía abordar la cuestión central del diseño instruccional, que se pueden formular en los siguientes términos:

— ¿Qué tipos de interacciones didácticas entre personas, conocimientos y recursos se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?

El modelo de instrucción (relación entre enseñanza y aprendizaje de un contenido específico) que se asume está basado en los principios de la psicología cultural /discursiva (Lerman, 2001; Radford, 2008b), la cual atribuye un papel clave a la noción de "zona de desarrollo potencial" (Vigotsky, 1934). En consecuencia, contrariamente a los modelos constructivistas, la autonomía del estudiante en el proceso de aprendizaje es el resultado de dicho proceso y no un prerrequisito del mismo. No obstante, dado el papel central de los problemas y la actividad implicada en su resolución que se asume en la perspectiva antropológica del conocimiento, la búsqueda, selección y adaptación de buenas situaciones problemas y la implicación de los estudiantes en su resolución es también un principio de una instrucción matemática significativa. Se deriva de esto un modelo didáctico de tipo mixto, en el que la construcción y la transmisión del conocimiento se articulan de manera dialéctica (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014). El principio de aprendizaje formulado por Radford (2008b, p. 10) se puede asumir de manera natural en el EOS:

> "p3: el aprendizaje es el logro de una pieza de conocimiento culturalmente – objetiva que los estudiantes consiguen mediante un proceso social de objetivación mediadas por signos, lenguaje, artefactos e interacción social a medida que los estudiantes se implican en formas culturales de reflexión y acción".

Para el análisis a nivel micro de los procesos de instrucción la noción de *configuración didáctica* constituye la principal herramienta (Godino, Contreras y Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin de una tarea (situación – problema). Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. La secuencia de configuraciones didácticas constituye una *trayectoria didáctica,* donde uno de sus componentes es lo que otros autores describen como "trayectoria hipotética de aprendizaje" (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004), ya que se tiene en cuenta no solo los objetivos, tareas instruccionales e hipótesis sobre el proceso de aprendizaje sino también los roles docentes y discentes y los medios instruccionales empleados.

La tarea que delimita una configuración didáctica puede estar formada por distintas subtareas, cada una de las cuales se puede considerar como una subconfiguración. En toda configuración didáctica hay: a) una *configuración epistémica* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una *configuración instruccional* (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una *configuración cognitiva - afectiva* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

La Figura 5 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático. También se refieren algunos *procesos didácticos* ligados a la conexión entre la configuraciones instruccional y cognitivo – afectica: planificación, motivación, institucionalización, evaluación, recepción, aceptación, indagación, ejercitación y aplicación.

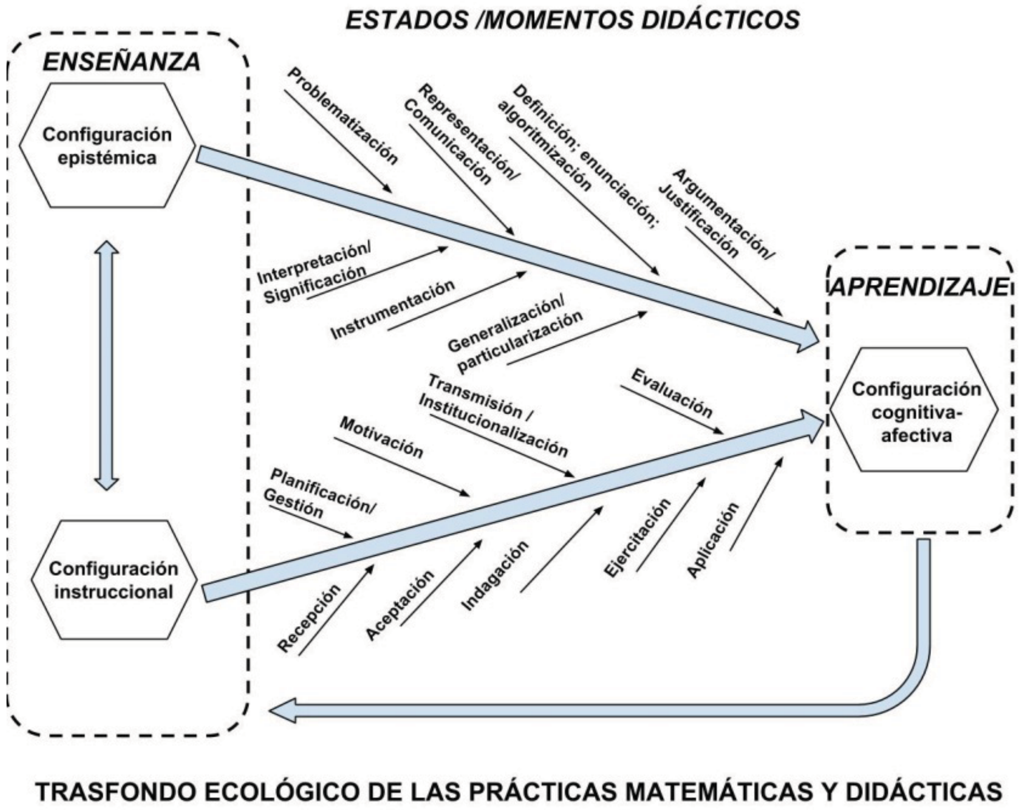

Figura 5. Componentes y dinámica interna de una configuración didáctica (Godino, 2014, p. 31)

En la Figura 5 se muestra, con la flecha inferior, que las relaciones no son lineales, sino cíclicas. En un momento de indagación, por ejemplo, el estudiante interacciona con la configuración epistémica sin intervención del docente (o con una influencia menor). Esta interacción condiciona las intervenciones docentes y, por lo tanto, deben estar previstas ya en la configuración instruccional, quizás no totalmente en su contenido, pero sí en su naturaleza, necesidad y utilidad. Esto, evidentemente, no es privativo de los momentos indagatorios o de los momentos en los tiene lugar transmisión de conocimientos. La trayectoria cognitiva produce ejemplos, significados, argumentos, etc., que condicionan el proceso de estudio y, en consecuencia, las configuraciones epistémica e instruccional, posibilitando o comprometiendo — en todo caso, condicionando —, los aprendizajes.

3.4. Dimensión normativa

Las normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de investigación en Didáctica de las Matemáticas, principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969), e introducen nociones como patrones de interacción, normas sociales y sociomatemáticas (Cobb y Bauersfeld, 1995; Yackel y Cobb, 1996). Así mismo, la noción de contrato didáctico ha sido desarrollada por Brousseau (1988) y constituye una pieza clave en la Teoría de Situaciones Didácticas. En todo caso, se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como 'micro-sociedad', que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes.

El foco de atención, en estas aproximaciones, ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. Consideramos que tanto el 'contrato interaccionista', como el 'brouseauniano', constituyen visiones parciales del complejo sistema de normas sobre las cuales se apoyan - y al mismo tiempo restringen - la educación en general y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular. Se considera necesario responder a las cuestiones:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

En Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva del EOS, tratando de identificar sus conexiones mutuas y complementariedades, así como el reconocimiento de nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figura 6).

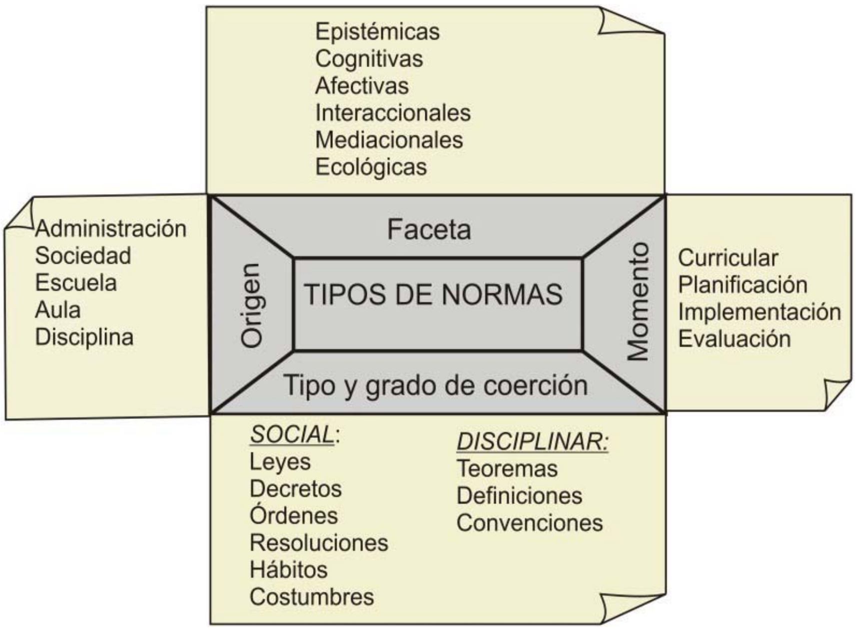

Figura 6. Dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009)

La identificación de las diferentes facetas de la dimensión normativa (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) permite:

— Valorar la pertinencia de las intervenciones de profesores y alumnos teniendo en cuenta el conjunto de normas que condicionan la enseñanza y los aprendizajes.

— Sugerir cambios en los tipos de normas que ayuden a mejorar el funcionamiento y control de los procesos de estudio, con vistas a una evolución de los significados personales hacia los significados institucionales pretendidos.

3.5. Idoneidad didáctica

La *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *óptimo* o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Figura 7) (Godino et al., 2007; Godino, 2013). El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

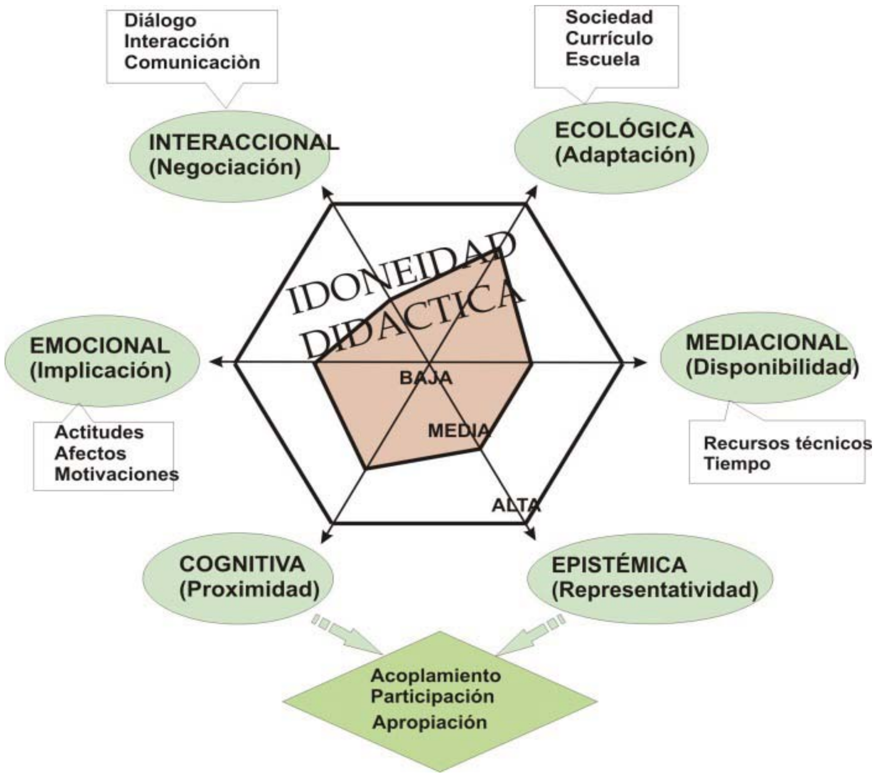

Figura 7. Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116)

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo.

La reflexión sobre las normas y metanormas (D'Amore, Font y Godino, 2007) que condicionan los procesos de estudio matemático, así como la valoración de la idoneidad didáctica forman parte de la dimensión metadidáctica del análisis e intervención didáctica.

3.6. Modelo de competencias y conocimientos didáctico - matemáticos

En el marco del EOS las nociones de *competencia y conocimiento* se relacionan teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

En la Figura 8 se representan cinco sub-competencias que componen la competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas, las cuales están asociadas a las cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS que se han descrito en los apartados anteriores.

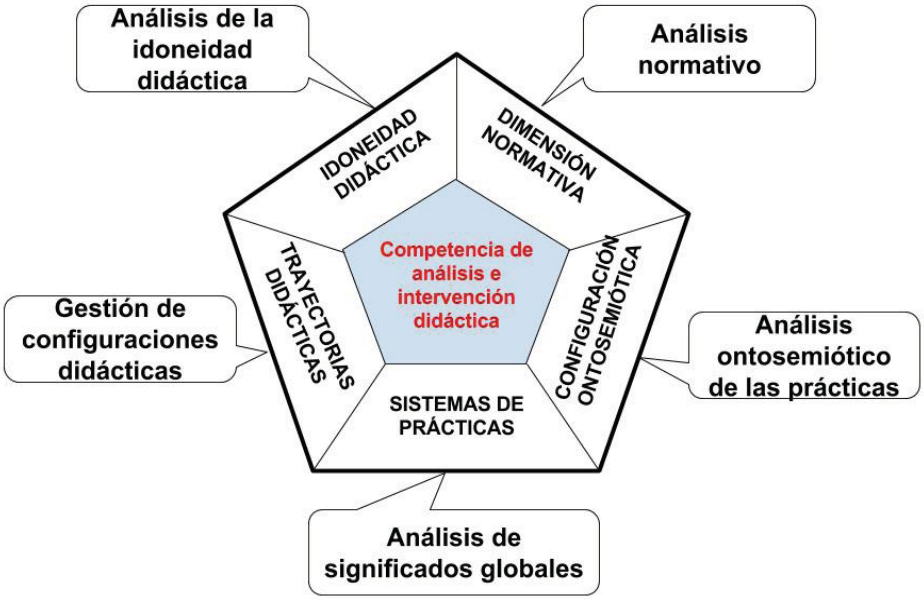

Figura 8. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 283)

El conocimiento se interpreta como la trama de funciones semióticas que establece un sujeto entre los objetos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas y didácticas. Las facetas y componentes descritas en el modelo de análisis de la idoneidad didáctica proporcionan un sistema de categorías de conocimientos del profesor de matemáticas. En particular la faceta epistémica, y los diversos componentes de la misma (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos), puestos en juego en los diversos significados parciales de un objeto matemático, aportan criterios para identificar y categorizar el conocimiento especializado del profesor sobre el propio contenido matemático (Godino, et al., 2016).

4. Concordancias y complementariedades con otros marcos teóricos

La existencia de diversas teorías para abordar los problemas didáctico-matemáticos puede ser un factor positivo, dada la complejidad de tales problemas. No obstante, si cada teoría aborda un aspecto parcial de los mismos, con lenguajes y supuestos distintos, se pueden obtener resultados dispares e incluso contradictorios, que pueden dificultar el progreso de la disciplina. Parece necesario tratar de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes, respetando el principio fundamental de la parsimonia metodológica. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

— Dadas las teorías T_1, T_2, ... T_n, focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i ($1 \leq i \leq n$)?

Este es otro de los problemas centrales que dio origen al EOS: el intento de comprender, comparar, coordinar e integrar teorías usadas en Didáctica de la Matemática, tales como, la Teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 1998), Teoría de los campos conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990), Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999), Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) (Duval, 1995), entre otras.

El diagrama de Figura 9 pretende indicar, no que las diversas teorías usadas en educación matemáticas están incluidas en el EOS, sino que cada una de las teorías parciales del EOS guarda un 'parecido de familia' con otras teorías existentes y que, en cierto sentido, podrían ser 'acomodadas' en el EOS con adaptaciones más o menos intensas en algunos de los presupuestos y métodos de las teorías implicadas.

Este trabajo de asimilación y acomodación de teorías se ha iniciado en diversos artículos, aunque sin duda no se puede dar por concluido. En Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) y D'Amore y Godino (2007) se analizaron las concordancias y complementariedades con varias teorías de la 'escuela francesa' de didáctica de la matemática (Teoría de situaciones, Campos conceptuales, Teoría antropológica, Registros de representación semiótica). Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2015) han estudiado las conexiones entre la teoría APOS con el EOS. En Godino et al. (2009) se generalizan las nociones de contrato didáctico y norma socio-matemática en la dimensión normativa. Las relaciones entre el EOS y la Teoría de la génesis instrumental han sido abordadas en Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013). La comparación del EOS con la Etnomatemática se ha iniciado en Oliveras y Godino (2015). En Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) se trata de mostrar la potencial sinergia entre TRRS y la herramienta de Configuración ontosemiótica, a partir del análisis de una tarea matemática y de una solución aportada por un alumno.

Las investigaciones de ingeniería didáctica (Artigue, 2011) son interpretadas en Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta, Wilhelmi (2013) como un tipo de diseño didáctico (Kelly, Lesh y Baek, 2008) cuya teoría base es la TSD. En Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014) se muestra un ejemplo en el que se aplican de manera sistemática las herramientas del EOS como apoyo de las fases de análisis preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo de una investigación de diseño sobre enseñanza de la estadística con profesores de educación primaria.

5. La hibridación como estrategia de reducción de la multiplicidad de teorías

Como hemos indicado, con el EOS no se trata de construir una *teoría holística, que lo explique todo*, sino de avanzar en la construcción de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas que permitan hacer los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las interacciones entre las mismas. En el caso de las nociones epistémicas y cognitivas se considera que la mera superposición o amalgama de herramientas teóricas no es posible, dada su heterogeneidad y parcialidad, por lo que se ha procedido a la elaboración de una nueva entidad con un claro carácter *híbrido*. El constructo teórico configuración ontosemiótica (Figura 4) guarda un *parecido de familia* con las nociones de concepto, concepción, registro de representación semiótica, saber, conocimiento, praxeología matemática, pero no es reducible a ninguna de ellas, por lo que requiere una designación específica. Consideramos que esta noción puede hacer más eficaz el trabajo de las nociones matrices, al permitir analizar al nivel macro y micro la actividad matemática institucional y personal, y comprender mejor las relaciones entre ambas dimensiones del conocimiento matemático. Esta afirmación requiere, no obstante, un trabajo analítico y experimental más profundo que el realizado en este breve trabajo de síntesis y el aportado en Godino, Font et al. (2006).

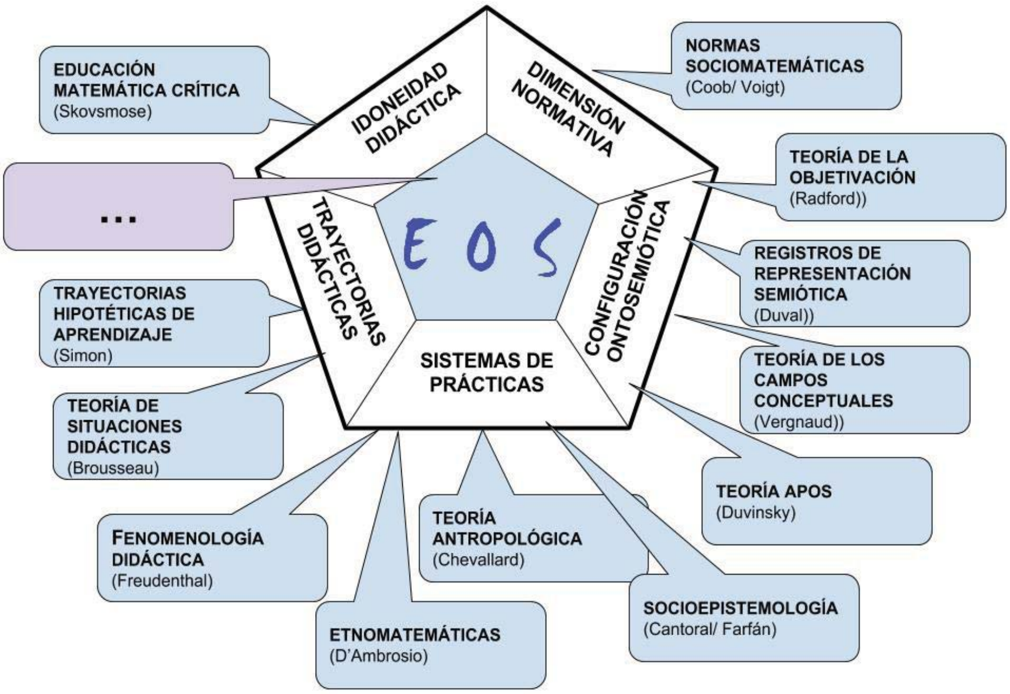

Figura 9. Asimilación y acomodación de teorías

Es claro que las nuevas herramientas introducidas entran en *competición* con las ya existentes, teniendo ante sí el difícil problema de probar su eficacia relativa para resolver las cuestiones paradigmáticas del campo. Es necesario avanzar en la comparación de los *resultados* que se puedan obtener con los marcos teóricos matrices y los nuevos constructos emergentes, lo que constituirá la evidencia de su posible supervivencia.

6. Reflexiones finales

La construcción del sistema teórico EOS, iniciada a partir de la publicación del artículo "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos" (Godino y Batanero, 1994), tiene un carácter progresivo y dinámico, como se muestra en los artículos posteriores publicados en diversas revistas especializadas y actas de congresos. Es fruto, además de la reflexión sobre los marcos teóricos usados en educación matemática, de múltiples investigaciones experimentales realizadas en el seno de diversos proyectos y programas de doctorado, como se puede ver reflejado en la siguiente dirección web, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

Como se ha indicado en la introducción se propone tener en cuenta las diferentes dimensiones y niveles de análisis requeridos por la investigación sobre los procesos de estudio matemáticos en los diversos contextos en que tienen lugar. Por esta razón se prefiere describir como un enfoque, o *sistema teórico*, y no como una teoría local, intermedia o global. Las diversas herramientas conceptuales y metodológicas introducidas, sin duda sujetas a refinamiento y ampliación, para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, semióticos, cognitivos, instruccionales de la educación matemática, aportan un carácter inclusivo y abierto al EOS. Esto permite introducir una nueva perspectiva en el problema de la articulación de teorías en educación matemática.

Aunque desde el inicio de la construcción del EOS se han tratado de mostrar las concordancias y complementariedades con otras teorías, en particular, con teorías que forman parte de la 'escuela francesa de didáctica de la matemática', como la TSD, TAD, TCC, TRRS, y se ha continuado con otros estudios comparativos, el problema continúa abierto. Somos conscientes de las dificultades de esta empresa, porque en el fondo se está proponiendo una estrategia para aplicar el principio de la 'navaja de Occam': construir un sistema teórico híbrido, no una gran teoría superficial e ineficaz, que permita suprimir, por ser confusas, redundantes, o poco eficientes, algunas de las teorías existentes.

Puesto que cada teoría conlleva una comunidad de fervorosos practicantes, que comparten no solo ideas sino también intereses de diversa índole, es de suponer que las resistencias para su eliminación serán muy fuertes. La Didáctica de la Matemática, como campo de investigación, tiene como finalidad epistémica comprender una parcela de la realidad y producir enunciados verdaderos sobre ella, gracias a las reglas específicas de la indagación científica. Pero el campo de juego de la investigación científica tiene, además, una dimensión social y es también una competición entre agentes, "lo que resulta en una distribución desigual de algunas formas específicas de capital – una fuente de ventaja en el propio juego y una fuente de poder sobre los otros agentes" (Grugeon-Allys et al., 2016, p. 83). Tomar conciencia de la tensión existente entre la necesidad epistemológica de simplificar las teorías y los condicionantes sociológicos planteados por el juego de poder implicado en cualquier campo científico puede ser el primer paso para superar el dilema.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).

Referencias

Artigue M. (2011) L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. New York: Springer.

Blumer, H. (1969). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora, 1982.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191-218.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V. y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 23-49.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentis-sages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Faerna, A. M. (1996). *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*. Madrid: Siglo XXI.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E. y Rubio, N. (2015). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics.* DOI 10.1007/s10649-015-9639-6.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Disponible en, http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *CERME 9, TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research.* (Versión ampliada en español: Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Universidad de la Sabana, Colombia).

Godino J. D., Batanero C., Contreras A., Estepa A. Lacasta E. & Wilhelmi M.R. (2013) Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *CERME 8, Turquía.*

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2): 127-135.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59-76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 10, 91-110.

Grugeon-Allys, B., Godino, J. D. y Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. En A. Kuzniak, B. R. Hodgson and J-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57- 86). Berlin: Springer.

Kelly A. E., Lesh R. A. y Baek J. Y. (Eds.) (2008) *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York, NY: Routledge.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 87-113.

Oliveras, M. L. y Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 432-449.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* 1931-1935. Cambridge, MA: Harvard UP.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 317-327.

Radford, L. (2008b). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. The notion and role of theory in mathematics education research.* Disponible en, https://www.researchgate.net/publication/253274896

Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? En A. Bikner-Ahsbahs. y S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267-279). New York; Springer.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Vygotski, L. (1986) [1934]. *Thought and language*. Cambridge, MA.: MIT Press [Trad. cast.: *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós, 1995.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27(1), 77-120.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica, 1973.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.