Identificación de razonamiento algebraico elemental en tareas de recuento con patrones

Developing elementary algebraic reasoning through counting with patterns activities

Cecilia Gaita[1] y Miguel R. Wilhelmi[2]

[1]Pontificia Universidad Católica del Perú, [2]Universidad Pública de Navarra

Resumen

En este trabajo mostramos cómo se pueden adaptar los niveles de razonamiento algebraico elemental desarrollados en el EOS para tareas de recuento con patrones y emplear dicha caracterización para analizar respuestas de estudiantes a tareas de ese tipo. Se verifica que es posible diagnosticar el nivel algebraico de los estudiantes si se consideran como criterios de progresión la eficacia en la resolución de tareas, la consolidación en el uso gradual de los lenguajes, la adquisición de los distintos objetos y de su carácter dual (extensivo/intensivo), así como el progreso de la práctica según los procesos involucrados (particularización, generalización, unitarización y reificación). A partir de ello, se pueden construir procesos de estudio potenciales que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro.

Palabras clave: patrones, álgebra elemental, niveles de razonamiento.

Abstract

In this paper we propose to adapt the Elementary Algebraic Reasoning levels to counting with patterns activities and to employ this characterisation to analyse the students' answers to these tasks. The consideration of progression criteria based on efficiency in task resolution, consolidation in the gradual use of language, acquisition of different objects and their dual character (extensive/intensive), as well as the progress of practice according to the processes involved (particularization, generalization, unitization and reification) served to identify the student' algebraic levels. From this result, it is possible to design potential study processes that promote gradual progress from one algebraization level to another.

Keywords: patterns, elementary algebra, reasoning level.

1. Introducción

Las tareas con patrones generan un contexto apropiado para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental (RAE) (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). En la misma línea, Moss y London (2011) señalan que los resultados de las investigaciones realizadas muestran que, con una instrucción apropiada, el estudio de patrones puede fomentar el razonamiento algebraico en estudiantes con diferentes niveles de habilidades matemáticas.

La resolución clásica de este tipo de tareas contempla el análisis de unos casos particulares, la conjetura de una ley de formación general y la demostración de ésta, siguiendo un procedimiento formal. Sin embargo, este esquema, aunque es válido, no permite reconocer la génesis del conocimiento de quienes se introducen en la realización de dichas tareas, que no poseen ni la destreza suficiente en la manipulación simbólica ni los conocimientos teóricos necesarios.

Se hace necesario generar condiciones para que los estudiantes evolucionen en sus prácticas operativas y discursivas; evolución que debe partir de procedimientos y

Gaita, C. y Wilhelmi, M.R. (2017). Reconocimiento del Razonamiento Algebraico Elemental en tareas de recuento con patrones. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

argumentaciones previamente dominados y de la determinación de su campo de validez, eficacia y coste de ejecución. Asimismo, estas condiciones deben permitir distinguir a los estudiantes competentes por su capacidad de análisis y selección de los procedimientos mejor adaptados a las tareas que se debe resolver, es decir, aquellos que poseen un *Pensamiento Matemático Flexible* (PMF) (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007a; 2007b).

En ese mismo sentido, Callejo y Zapatera (2014), basándose en diversos autores (English y Warren, 1998; Krems, 1995; Lee, 1996; etc.), caracterizan la flexibilidad como "la modificación de las estrategias empleadas en la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea, en estudiantes de educación secundaria obligatoria (12-16 años)" (p.65).

De esa manera, serán los estudiantes que muestran un PMF, combinando métodos aritméticos y algebraicos, los que en general tengan el desempeño más alto. Por ello, de cara a la intervención en un proceso de enseñanza concreto, uno de los criterios que se puede tener en cuenta para interpretar el nivel de adquisición de razonamiento algebraico es si el sujeto muestra o no un PMF.

En este trabajo, se propone adaptar los niveles de razonamiento algebraico elemental para tareas de construcción y análisis de patrones, y emplear dicha caracterización para analizar respuestas de estudiantes a tareas de ese tipo e identificar aquellos que muestran un PMF. Se espera que de esa forma, los maestros cuenten con herramientas de control para el desarrollo del razonamiento algebraico.

2. Niveles de algebrización: su adaptación a soluciones de tareas de construcción y análisis de patrones

El razonamiento algebraico se desarrolla paulatinamente. Las investigaciones se han centrado en el tránsito de la aritmética al álgebra, que supone una ruptura epistemológica y un reto cognitivo. Así, Blanton y Kaput (2011) proponen un recorrido para el desarrollo del álgebra en los primeros grados escolares a través del pensamiento funcional (*functional thinking*).

En consonancia con esa propuesta, en el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) se prevé una evolución en distintos niveles de algebrización según: a) la función y uso de los distintos *lenguajes* involucrados, b) los procesos de *particularización y generalización* abordados y, por último, c) la dualidad *intensivo-extensivo*, que determina el significado contextual de los objetos movilizados, según el carácter bien de generalidad o indeterminación (*intensivo*), bien de concreción o ejemplificación (*extensivo*).

Así, en el RAE los objetos varían desde la operación con números particulares, en el nivel exclusivamente aritmético (nivel 0), a la manipulación de incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares, en un nivel consolidado de algebrización (nivel 3), produciéndose un introducción paulatina de extensivos transformados en diferentes grados y contextos.

El modelo RAE permite describir la práctica operativa y discursiva desarrollada por un sujeto en función de los objetos matemáticos involucrados. De hecho, las tareas no son *per se* de un determinado nivel, sino que un determinado sujeto puede afrontarlas de diferentes formas, con rasgos asociados a diferentes niveles. Es pues fundamentalmente la práctica operativa y discursiva la que es descrita y analizada, no las tareas ni sus enunciados.

Por ello, diremos que un sujeto utiliza de manera eficaz las herramientas propias de un determinado nivel de RAE si es capaz de adaptarlas a la tarea, usando estas o las de niveles inferiores de manera flexible, es decir, mediante

> el tránsito rutinario entre diferentes modelos asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos, [y estableciendo] nexos firmes entre dichos modelos y uno o varios contextos matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007a, p.106).

El pensamiento matemático flexible (PMF) permite evaluar la resolución de las tareas según los niveles de algebrización en términos de eficacia y coste (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007b). Así, por ejemplo, en tareas de patrones con un número concreto y reducido de objetos, la estrategia más eficaz y rápida es la determinación efectiva de los casos, dando una respuesta por extensión. Sin embargo, cuando el número de casos es elevado, se utiliza el estudio previo para determinar, por inducción empírica, una regla general que es formulada usualmente en lenguaje simbólico-literal y que es demostrada formalmente.

En las tareas de recuento con patrones se produce también una evolución en los objetos involucrados, el tipo de transformaciones, el lenguaje utilizado y el alcance de las conclusiones que se obtienen. A continuación se presenta una adaptación de los Niveles de RAE (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014, 215) a las tareas de construcción y análisis de patrones (Tablas 1a y 1b).

Tabla 1a. Niveles 0 y 1 de algebrización en tareas de construcción y análisis de patrones

Nivel	Descripción del nivel en tareas de construcción y análisis de patrones
0	Determinación de casos particulares a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas. Los recuentos son explícitos, basados en cálculos numéricos o figuras. El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Eventualmente, intervienen símbolos, que se refieren a objetos extensivos y suponen, en general, una forma abreviada de comunicar información, pero en ningún caso involucran la manipulación simbólica, abstracta o general.
1	Determinación de casos particulares a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas. A partir de recuentos explícitos, basados en cálculos numéricos o figuras, es posible determinar el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie, sin recurrir nuevamente al recuento efectivo ni a la representación del patrón completo (*generalización cercana*). El análisis y discusión se realizan en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, que incluye expresiones que se refieren a objetos intensivos y representan el caso general con un lenguaje no simbólico ni formal, pero necesariamente explícito. Eventualmente, se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón.

Tabla 1b. Niveles 2 y 3 de algebrización en tareas de construcción y análisis de patrones

Nivel	Descripción del nivel en tareas de construcción y análisis de patrones
2	Determinación de casos particulares a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas. A partir de recuentos, basados en cálculos numéricos y representaciones gráficas, se determina el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie, representando el patrón completo. El análisis y discusión se realizan, en primer lugar, en lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, y, en segundo lugar, se formaliza mediante símbolos, variables o parámetros, que refieren objetos intensivos y representan el caso general, que puede ser utilizado para la descripción del método de construcción del patrón. Se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón, pero no se manipula para ello la escritura formal, si no que se interpreta ésta mediante lenguaje natural o numérico.
3	Determinación de la regla general, expresada formalmente. Los casos particulares, a partir de representaciones concretas y descripción extensiva de las mismas, pueden aparecer en un análisis previo o como ejemplificación de la regla general. En casos simples, cuando la construcción efectiva es posible, eficaz y poco costosa, se puede optar por ella, pero, en general, el análisis y discusión se realizan, en primer lugar, en lenguaje simbólico literal formalizado, mediante símbolos, variables o parámetros, que refieren objetos intensivos y representan el caso general. Ocasionalmente, en segundo lugar, se utiliza un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual en la descripción del método de construcción del patrón. Se establecen relaciones entre figuras en la serie o propiedades del patrón. Además, si es necesario, se manipula la escritura formal para obtener expresiones más simples, sin necesariamente analizar su relación con el método de construcción.

3. Experimentación, resultados y su discusión

3.1. Diseño de la experimentación

Se construyen dos instrumentos, un pre-test y un post-test, con situaciones sobre recuento de patrones en figuras geométricas. Los estudiantes pueden responder a las primeras preguntas realizando recuentos, según una actividad puramente aritmética. Para responder a las demás, tienen que optar por la búsqueda de un patrón específico en función del lugar que ocupa el término en la serie o por soluciones aritméticas que involucren recuentos eficientes.

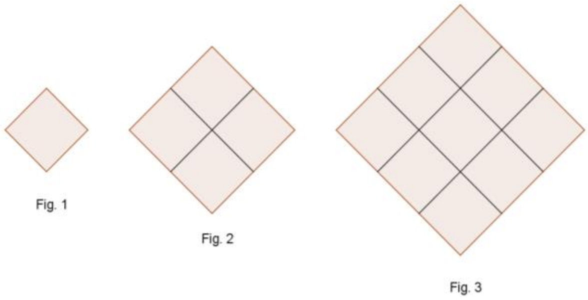
El pre-test se aplica antes del proceso de instrucción y el post-test después del mismo. Se pretende enfrentar a los estudiantes a actividades que exigen identificar una regla de formación (*unitarización*), reconocerla implícitamente al tener que determinar términos específicos en posiciones cercanas, y también reconocer la regla explícitamente al tener que hallar términos más alejados, para los cuales un procedimiento de recuento sería muy costoso; esta última actividad exige comunicar sus resultados a través de la verbalización o simbolización.

Se presentan las tareas consideradas en cada instrumento, acompañadas de algunas soluciones previstas en el pre-test (Figura 1a) y en el post-test (Figura 1b). La tarea 2 es una adaptación de la tarea 5 presentada en el cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental (Godino, Wilhelmi, Neto, Blanco, Contreras, Díaz-Batanero, Estepa y Lasa, 2015).

La investigación se realiza con 6 estudiantes de 16-17 años que provienen de comunidades nativas amazónicas y que han culminado su educación básica (primaria y secundaria) en el Sistema Educativo Peruano.

Tarea 1 (pre test)

Considera la siguiente secuencia de cuadraditos.

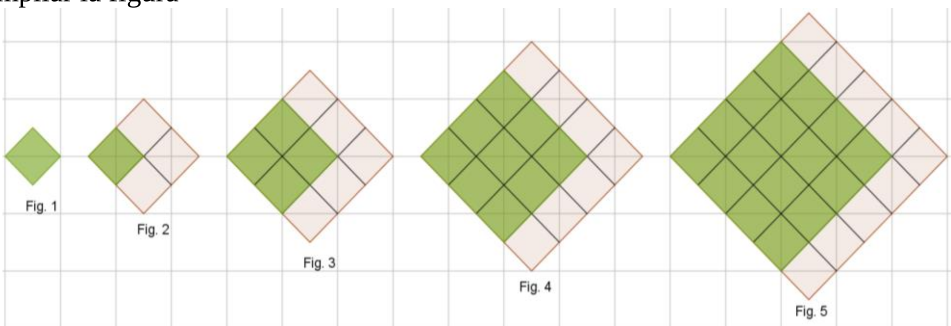


¿Cuántos cuadraditos se necesitan para formar la figura 5? ¿Y para la figura 8? ¿Y para la figura 30?¿Cuántos cuadraditos se necesitan para formar la figura n?

Soluciones previstas

Solución 1: Sin necesidad de realizar un recuento, se establece una relación entre la cantidad de cuadraditos y el cuadrado del número de la figura.

Solución 2: Otra forma de hacer el recuento es la siguiente: Se determina el número de cuadraditos que requiere cada término como la cantidad anterior más los que se necesitan para ampliar la figura



Así, se obtiene que para la figura 1 se necesita 1; para la figura 2: 1+3=4; para la figura 3: 4+5=9; para la figura 4: 9+7=16; para la figura 5 serán: 16+9=25. Para la figura 8 se necesitarían $7^2+(2(8)–1)=64$, para la figura n: $(n–1)^2+(2n–1)=n^2$

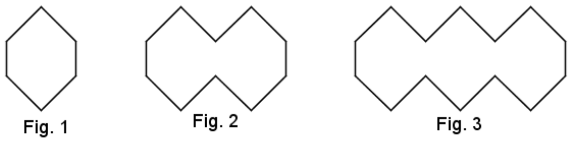
Solución 3: Otra solución recursiva sería obtener, a partir de recuentos, las cantidades de cuadraditos para las primeras figuras: 1; 1+3=4; (1+3)+5=9; (1+3+5)+7=16; para la figura 5 serían (1+3+5+7)+9=25; …; para la figura 8 serían: (1+3+5+7+9+11+13)+15=64

Y asociar esa cantidad con la suma de los *n* primeros números impares. Así, para la figura *n* se necesitan $(n–1)^2+(2n–1)=n^2$

Figura 1a. Tareas propuestas en pre test y soluciones previstas

Tarea 2(post test)

Considera la siguiente sucesión de figuras.

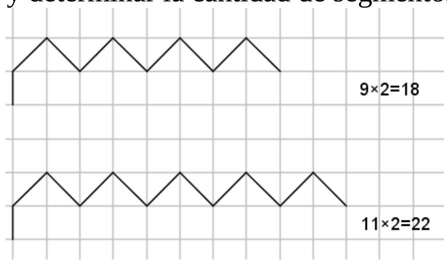


Si se mantiene el mismo patrón:
¿Cuántos segmentos se requieren para construir la figura 4? ¿y para la figura 5? ¿y para la figura 6?
¿Qué ocurre cada vez que construyes una nueva figura?, ¿notas alguna regularidad?
¿Cuántos segmentos se requieren para construir la figura 20?

Soluciones previstas

Solución 1: La figura 1 se forma con 2+4 segmentos. En cada figura el número de segmento se incrementa en 4. La figura se formará con 2+2(4)=10 segmentos. La figura 20 se formará con 2+20(4)=82 segmentos.

Solución 2: Otra forma de hacer el recuento es considerar que la figura se genera uniendo dos filas y determinar la cantidad de segmentos que genera cada fila.



Para la figura 6, se necesitan 13×2=26. Luego deberá concluir que la fila superior de una figura necesita el doble del número de la figura más un segmento y para la fila inferior una cantidad igual. De esa manera, para la figura 20 se necesitan 2(2(20)+1) para la fila superior y una cantidad similar para la inferior. Para la figura n se requieren $2(2n+1)$ segmentos.

Solución 3: Considerar los 6 segmentos que forman la figura 1 e incrementar 4 segmentos más en cada nueva figura. De esa manera, para la figura n, se necesitarán 6+4(n–1).

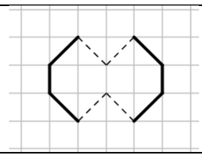


Figura 1b. Tareas propuestas en post test y soluciones previstas

3.2. Resultados y su discusión

A continuación se ejemplifica el uso de la Tabla 1 para analizar respuestas de estudiantes a las tareas del pre-test (Figura 1a) y el post-test (Figura 1b) de dos estudiantes.

El estudiante A resuelve la tarea 1 (Figura 2) empleando diferentes métodos: calcula el número de cuadraditos multiplicando el número de filas y columnas; luego verifica sus respuestas considerando el resultado de sumar al número de cuadraditos de la figura anterior, aportando el número necesario de estos en la nueva figura. Esto es señal de que el propio estudiante busca medios de control para verificar que su solución es correcta. Además, adapta sus procedimientos a la tarea, de modo que para determinar el número de cuadraditos que requiere la figura 30 opta solo por el método más eficiente; a saber: elevar al cuadrado. Finalmente, aporta una solución general simbólico-literal. Es claro que el estudiante tiene un PMF de nivel 2 de algebrización.

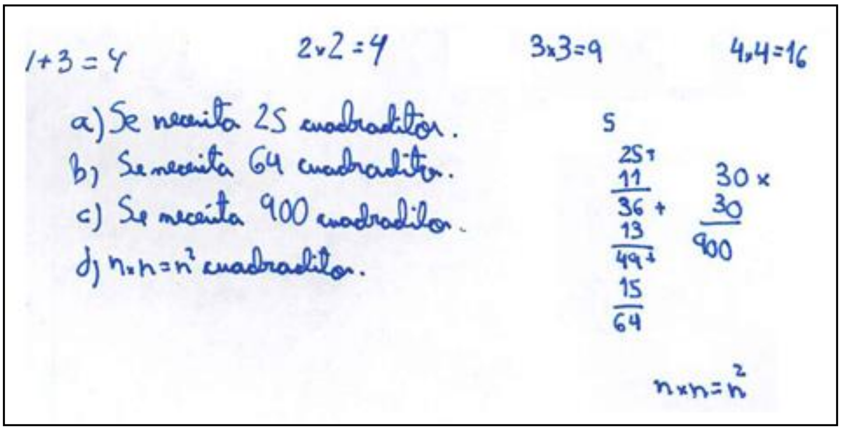


Figura 2. Solución del estudiante A a la tarea 1

Este mismo estudiante, ya no utiliza varias formas al resolver la tarea 2. La consolidación del nivel algebraico y su operativización flexible le han permitido seleccionar los procesos según la tarea, desde un punto de vista de eficacia y coste. La ley de formación presentada muestra que ha considerado que cada hexágono aporta seis segmentos y luego se deben restar todos los segmentos que conectan dos hexágonos, tal como se detalla en la Figura 3.

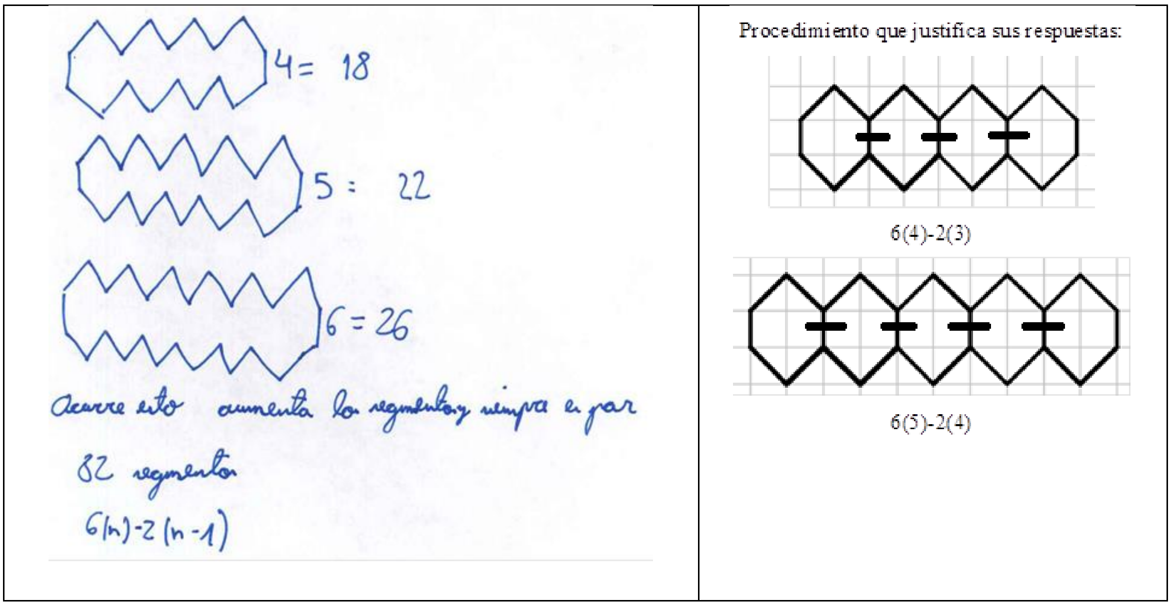


Figura 3. Solución del estudiante A a la tarea 2

El estudiante B reconoce la regla de formación mediante extensivos; presenta una solución que se basa en la solución 2, mostrada en la Figura 1. En la generalización, intenta, sin éxito, una solución basada en el uso de expresiones que han formado parte del proceso instruccional (Figura 4).

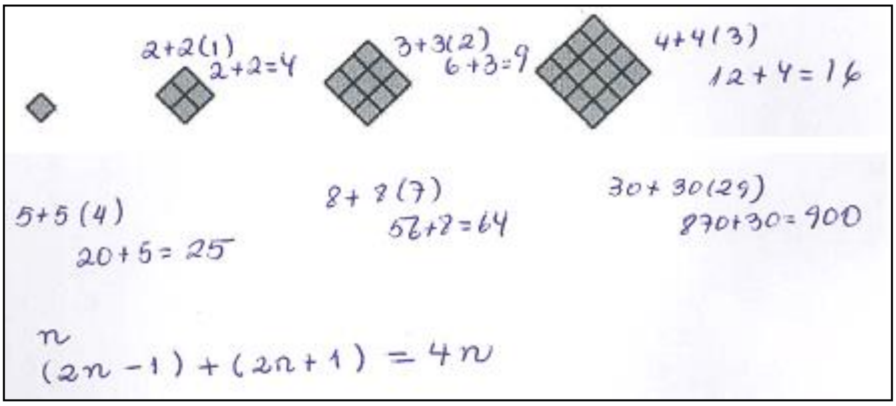


Figura 4. Solución del estudiante B a la tarea 1

Sin embargo, pese al proceso de instrucción desarrollado, en la solución que presenta el estudiante B a la tarea 2, su respuesta es consistente con la anterior, y aún sigue sin poder formalizar el caso general mediante símbolos. Su razonamiento es pues de nivel 1, sin una evolución hacia la representación formal (Figura 5).

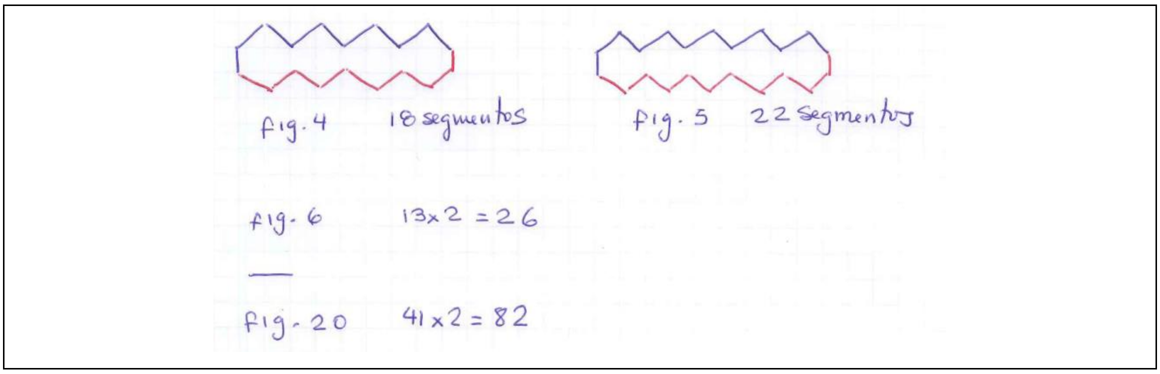


Figura 5. Solución del estudiante B a la tarea 2

En resumen, estos dos estudiantes son reflejo del comportamiento general. La mayoría de los estudiantes ha podido identificar regularidades a partir de casos particulares y representaciones concretas. Estas regularidades les permiten determinar el valor de patrones específicos en función del lugar que ocupan en la serie. Sin embargo, excepto uno de ellos, todavía no cuentan con recursos para determinar la regla general de formación de manera explícita, empleando un lenguaje simbólico y menos aún para demostrarla.

4. Conclusiones y comentarios finales

Las actividades con patrones geométricos permiten ser abordadas con herramientas aritméticas y también con álgebra. Más aún, dependiendo del término solicitado en una serie, los recursos necesarios varían:

- Desde la representación efectiva y el simple conteo a la necesidad de determinación de reglas generales.
- Desde el lenguaje natural, icónico y meramente aritmético al lenguaje simbólico-literal y su manipulación sintáctica.

- Desde la prueba empírica con extensivos a la demostración formal.

Por ello, es posible diagnosticar el nivel algebraico de estudiantes resolviendo situaciones de este tipo y construir procesos de estudio potenciales que propicien el progreso gradual de un nivel de algebrización a otro.

Se sugiere que luego de las actividades iniciales que pueden resolverse con recuentos, se proponga a los estudiantes sistematizar los hallazgos a través de una Tabla. Ello permite determinar la fórmula general que puede ser representada formalmente mediante símbolos o variables. Además esta puede ser reutilizada y particularizada, a la vez que se puede discutir las equivalencias y su relación con el recuento pictórico. Aquí es necesario observar que si bien un patrón pictórico puede describirse de distintas formas y asociarles distintas fórmulas, también una única fórmula puede ser representada mediante construcciones distintas (Samson, 2011, p.32).

Evidentemente, la eficacia en la resolución de tareas, la consolidación en el uso gradual de los lenguajes, la adquisición de los distintos objetos y de su distinto carácter (extensivo/intensivo), así como el progreso de la práctica según los procesos involucrados (particularización, generalización, unitarización y reificación), requieren la rutinización en la resolución de las tareas. Así, es necesario proponer situaciones diversas sobre patrones que involucren los procedimientos introducidos.

Agradecimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto "Conocimientos matemáticos y didácticos del profesor para el desarrollo del pensamiento algebraico" (Referencia CAP337 / PUCP).

Referencias

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization*, *Advances in Mathematics Education* (pp. 5-23). Heidelberg: Springer-Verlag.

Callejo, M. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *Bolema*, *28*(48), 64-88.

English, L. D. y Warren, E. A. (1998) Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, Reston, VA, *91*(2), p. 166-170

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219. Disponible en, https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlca2014v32n1/edlca2014v32n1p199.pdf

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Neto, T., Blanco, T. F., Contreras, A., Díaz-Batanero, C., Estepa, A. y Lasa, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de Educación*, *370*, 199-228. Disponible en, http://www.mecd.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/2015/370/370_8.html

Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. En P. A. Frensch y J. Funke (Eds.), *Complex problem solving: The European Perspective* (pp. 201-218). Hillsdale, NJ: LEA.

Lee, L. (1996). An initation into algebra culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Moss, J. y London, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. En J. Cai y E. Knut (Eds.). *Early algebrization. Advanced in Mathematics Education* (pp. 277-302) Berlin: Springer.

Samson, D. (2011). Capitalising on inherent ambiguities in symbolic expressions of generality. *The Australian Mathematics Teacher*, *67*(1), 28–32. Disponible en, http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ921983.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007a). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *27*(1), 77-120.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007b). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 72-90. Disponible en, http://www.iejme.com/makale/77/didactic-effectiveness-of-mathematical-definitions-the-case-of-the-absolute-value