Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico

Mathematical processes in the onto-semiotic approach

Vicenç Font[1], Norma Rubio[2]

[1]Universitat de Barcelona, [2]Pontificia Universidad Católica del Perú

Resumen

Primeramente, se reflexiona sobre la noción de proceso y sobre la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos. Se entiende por proceso una secuencia de acciones realizada para conseguir un objetivo. Con relación a la diversidad de procesos, se ha optado por considerar una lista de procesos agrupados por un aire de familia, los cuales se clasifican en procesos y megaprocesos. En la segunda parte, se consideran los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y se ponen algunos ejemplos. Estos 16 procesos dan origen a un grupo de familias de procesos que, metafóricamente, se pueden considerar como una base vectorial en la que se descomponen los procesos que se quieren estudiar. Dicha descomposición se ejemplifica para los procesos intuitivos. En la tercera parte, se resumen algunas investigaciones realizadas en el marco del EOS sobre diferentes procesos.

Palabras clave: procesos matemáticos, práctica matemática, enfoque ontosemiótico

Abstract

We firstly reflect on the notion of process, the diversity of processes and the different terms used to name them. A process is understood as a sequence of actions performed to achieve a goal. In relation to the diversity of processes, we decided to consider a list of processes grouped by a family relationship, which are classified in processes and mega-processes. In the second part, we consider the 16 processes associated to the object configurations and the dual facets proposed by the Onto-semiotic Approach (OSA), and we give some examples. These 16 processes give rise to a group of families of processes that, metaphorically, can be considered as a vector base in which the processes to be studied are decomposed. Such categorization is exemplified for intuitive processes. In the third part we summarize some researches on different processes carried out under the OSA framework.

Keywords: mathematical processes, mathematical practice, onto-semiotic approach

1. Algunas consideraciones sobre el término proceso matemático

El término proceso tiene diferentes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española , entre las cuales queremos destacar las siguientes: el concepto hace referencia a la acción de ir hacia adelante, al transcurso del tiempo, al conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial.

Tal como se señala en Font, Rubio, Giménez y Planas (2009), en las últimas décadas se ha producido a nivel internacional un “giro procesual” en el diseño de currículos de matemáticas. Dicho giro ha significado pasar de concebir currículos de matemáticas cuyos objetivos eran el aprendizaje, sobre todo, de conceptos, a pensar en currículos cuyos objetivos son el aprendizaje, sobre todo, de procesos. Este giro se ha producido, entre otras razones, debido a que las matemáticas actualmente se ven como una ciencia en la cual el método domina claramente sobre el contenido. Por esta razón, en las últimas décadas se ha dado una gran importancia al estudio de los procesos matemáticos, en particular los procesos de resolución de problemas y modelización.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Podemos observar este giro procesual, entre otros, en los Principios y Estándares del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), donde se propone el aprendizaje de los siguientes procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. El giro procesual que estamos comentando está presente en los currículos actuales de muchos países ya que, actualmente, hay una tendencia hacia currículos basados en procesos y competencias.

Este giro curricular hacia los procesos y las competencias plantea la demanda de investigar su desarrollo y evaluación en los procesos de instrucción. Un buen indicador de la investigación realizada en España sobre esta temática son las comunicaciones y ponencias presentadas a los simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En la revisión que se hace en Font (2011) de dichas comunicaciones y ponencias para el nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años), se observa que las investigaciones no se han preocupado por desarrollar un marco teórico general sobre procesos matemáticos, sino que se han dedicado a realizar investigaciones concretas sobre determinados procesos, en especial sobre argumentacón, generalización y resolución de problemas. En las investigaciones citadas en Font (2011) no hay una definición de proceso asumida mayoritariamente y los procesos particulares se nombran con términos diferentes.

Otra característica que se observa en la investigación sobre procesos es que éstos se suelen descomponer en otros procesos. Por ejemplo, en la Teoría de la Educación Matemática Realista se considera el proceso de modelización, el cual se descompone en dos subprocesos: matematización horizontal y vertical. La matematización horizontal, lleva del mundo real al mundo de los símbolos y hace posible el tratar matemáticamente un conjunto de problemas. En este subproceso son característicos los siguientes procesos: 1) identificar las matemáticas en situaciones problemas; 2) esquematizar; 3) formular y visualizar un problema de varias maneras; 4) descubrir relaciones y regularidades; 5) reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas; 6) transferir un problema real a uno matemático; 7) transferir un problema real a un modelo matemático conocido. Una descomposición similar se tiene para la matematización vertical.

Hay un hecho relevante de tipo empírico, observable tanto en la investigación en educación matemática como en los currículos oficiales. Nos referimos: 1) a la diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático; 2) a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos; y 3) a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos.

2. Los procesos en el Enfoque Ontosemiótico

Si bien hay diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, hay algunas características que son comunes a muchas de ellas, como son la idea de concatenación y de tiempo. En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) se considera que un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada).

Con relación a la caracterización de un proceso mediante su descomposición en otros procesos, en el EOS se ha considerado conveniente pensar en procesos más complejos (megaprocesos) y procesos más básicos. Ejemplos de megaprocesos son la resolución de problemas y la modelización.

Con relación a la diversidad de procesos y de términos para nombrarlos, es un hecho que hay una gran diversidad de procesos y que, además, muchos de ellos parecen sugerir ideas similares. Los procesos pueden aparecer con una cierta acepción dentro de un marco teórico, como es el caso del EOS que aquí nos ocupa; pero también aparecen en otros marcos teóricos y en documentos curriculares. Una opción que en el EOS ha permitido avanzar en esta diversidad de procesos ha sido: 1) diferenciar entre práctica, procedimiento y proceso; 2) distingir entre procesos y megaprocesos; y 3) agrupar los procesos por aire de familia (Wittgenstein, 1953).

2.1. Práctica, procedimiento y proceso

Para distinguir entre práctica, procedimiento y proceso, consideremos la activdad matemática realizada para resolver la tarea siguiente:

Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{3x - 4}$.

Para resolverla, el estudiante debe de realizar una secuencia de acciones (sujetas a reglas matemáticas) tales como: a) leer y entender el enunciado de la tarea, b) calcular la derivada aplicando una serie de pasos que se derivan de la regla de la derivada de un cociente de funciones: $f'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(3x-4) - 3(x^2 - 3x + 2)}{(3x-4)^2}$.

A esta serie de pasos (derivar el numerador, multiplicar por el denominador sin derivar, etc.) que nos dicen a priori cómo se deben de hacer las cosas, en el EOS se le llama procedimiento (también se podrían considerar otras acciones, como la simplificación de la expresión obtenida). A este conjunto de acciones realizadas es lo que se llama práctica y a los pasos que nos dicen a priori cómo se debe de realitzar dichas acciones se le llama procedimiento.

Por último, si el estudiante realiza muchos cálculos similares llegará un momento en que podrá realizar este tipo de cálculos sin tener que poner mucha atención en cómo hacerlo. En este caso, podemos hablar de un proceso de automatización, en el sentido de que el alumno puede realizar este tipo de prácticas sin necesidad de mucha atención y reflexión sobre lo que está haciendo.

En las clases de matemáticas, sobre todo en primaria y secundaria, se presenta a los alumnos muchos procedimientos. Por ejemplo, en aritmética, multiplicación, división, resta, etc.; en geometría, procedimientos de construcción (mediatriz, etc.). Dichos procedimientos se practican en clase con la finalidad de que no exijan después muchos recursos atencionales. En nuestra opinión, en lugar de considerar un proceso de multiplicación, otro de división, otro de construcción de una mediatriz, etc. es más conveniente agruparlos todos en un solo proceso que se puede llamar algoritmización, mecanización (en el sentido de repetición), automatización, etc. Este hecho hace que un proceso como el de mecanización se pueda considerar como la realización repetida de un procedimiento sin la necesidad de dedicar muchos recursos atencionales.

Tal como se han caracterizado los términos de práctica y de proceso, se genera el problema de un solapamiento entre ambos constructos. En el EOS, en lugar de prescindir de uno de ellos se ha decidido mantener a los dos para poder realizar una mejor descripción de la actividad matemática. Dicha descripción se realiza en tres fases, primero se hace una narración (se cuenta una historia) matemática de la actividad realizada (se trata de un discurso en términos de prácticas matemáticas), en este discurso aparecen ciertos “personajes” (alguna propiedad, notación, etc.) que son objetos primarios. En una segunda fase, se hace un análisis más exhaustivo de los objetos primarios usados o emergentes en las prácticas descritas, con lo cual aparecen muchos otros “personajes secundarios” que no han aparecido en la descripción de las prácticas de la primera fase (se trata de una mirada estática sobre los objetos primarios de la configuración activada en las prácticas). Dado el solapamiento comentado entre prácticas y procesos, en el discurso sobre las prácticas realizadas ya se hallan algunos procesos, los cuales, en una tercera fase, se pueden complementar aplicando la dualidad proceso-producto a los objetos primarios y, por último, pensando en otros procesos que no aparecen fàcilmente en el discurso de las prácticas de la primera fase (por ejemplo, procesos metacognitivos, de generalización, de significación, etc.).

La opción que se acaba de presentar de no reducir el termino práctica al de proceso (o viceversa), tal como se ha dicho antes, se toma para poder realizar una mejor descripción de la actividad matemática. El discurso sobre prácticas se enfocaría más hacía las matemáticas, mientras que el discurso sobre procesos tendría un foco más cognitivo. De esta manera, manteniendo la autonomía entre ambas nociones, consideramos que se consigue una mejor descripción de la actividad matemática realizada.

Con relación a esta opción se puede objectar que queda pendiente cuál de las dos nociones es más básica. No entraremos en esta cuestión aquí, ya que consideramos más operativo mantener la autonomia de ambas nociones. Pero es plausible pensar en una teoría que tome como categoría básica la noción de proceso y derivar a partir de ella la noción de práctica, como es el caso la Teoría General de Procesos (TGP) (Vasco, 2014), desarrollada en Colombia por un grupo de investigadores dirigido por Carlos Vasco.

2.2. El grupo de los 16 procesos básicos derivados de los constructos del EOS

En la Figura 1 se sintetiza una parte de las nociones teóricas propuestas por el EOS.

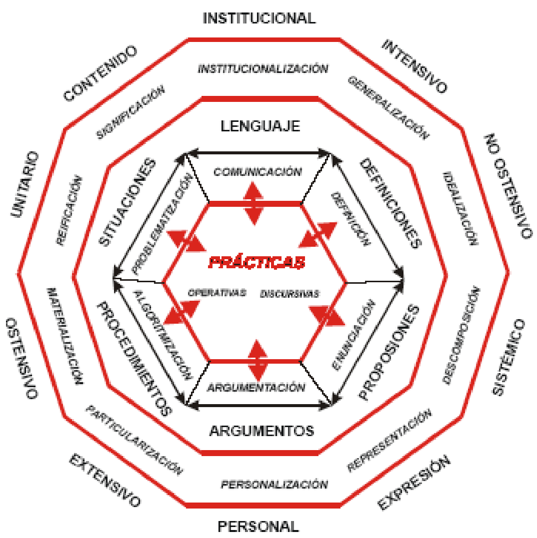


Figura 1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos. Fuente: Font, Planas y Godino (2010)

En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas. De las prácticas emergen los distintos tipos de objetos primarios matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones (hexágono). Por último, los objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) en que participan, pueden ser consideradas desde las diferentes maneras de “estar participando”, las cuales se agrupan en facetas o dimensiones duales (decágono).

Tanto las dualidades como los objetos primarios de la configuración se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los 16 procesos que se recogen en la Figura 1. Es decir, si en el análisis de la actividad matemática podemos identificar y segregar un objeto primario de la línea del movimiento al que pertenece, por ejemplo una representación, quiere decir que podremos encontrar un intervalo de tiempo en el que hay un inicio cuyo final es este objeto primario; y podemos considerar como un proceso de representación el que se ha realizado en este intervalo de tiempo. Por ejemplo, consideremos la siguiente transcripción de una clase sobre la mediatriz con alumnos de 11 años correspondiente a 37 segundos.

Profesora: (…) a ver, si yo hago una línea de esta manera, ¿esto es un segmento?

Alumnos: no

Profesora: no, ¿por qué no es un segmento?

Alumna: porque es una línea por un lado abierta y un segmento tiene que tener un punto donde…

Profesora: a ver, esto es una línea recta que no tiene ni principio ni fin. Yo la alargo por donde quiero. Y un segmento lo tengo que...

Alumnos: cerrar…

Profesora: que cerrar, le tengo que poner un origen y un final. Entonces aquí va el segmento.

A este segmento lo puede llamar origen A y tal,

lo puedo llamar segmento $\overrightarrow{AB}$, ¿de acuerdo?, ¿estáis de acuerdo?

Por una parte, podemos considerar que hay un proceso de representación durante estos 37 segundos y, por otra parte, podemos identificar y segregar un objeto primario de la línea del movimiento al que pertenece; es decir podemos segregar un objeto primario correspondiente a la categoría *lenguaje*, en concreto la representación simbólica $\overrightarrow{AB}$ de un segmento. Entre la entrada (la pregunta de la profesora ¿esto es un segmento) y la salida (la representación simbólica $\overrightarrow{AB}$) podemos considerar que se ha producido un proceso de representación.

Los 16 procesos de la Figura 1 forman una primera lista de procesos que se derivan de los constructos teóricos del EOS (configuración de objetos primarios y facetas duales). Ahora bien, en ella no se pretende incluir a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a los más importantes, entre otros motivos porque algunos de ellos (por ejemplo, el proceso de comprensión, el de resolución de problemas o el de modelización) más que procesos son hiper o megaprocesos.

De momento tenemos la práctica matemática, la configuración formada por seis objetos primarios (problema, argumento, definición, propiedad, proposición, y representación) y una lista de 16 procesos (derivados de la configuración de objetos primarios y facetas duales) como herramientas para el anáLisis de la actividad matemática.

Dada una tarea − si bien el análisis de la actividad matemática necesaria para su resolución necesita para ser descrita, además de las prácticas, muchos procesos y objetos (por ejemplo, en la transcripción anterior, además del objeto primario $\overrightarrow{AB}$ tenemos, entre otros, el objeto primario representación gráfica del segmento) − podemos considerar que, según el contexto, se puede priorizar un solo proceso considerado el principal. En Font, Rubio y Contreras (2008), se ponen ejemplos de esta priorización, de los cuales reproducimos aquí algunos (Figura 2). La primera columna es la tarea presentada a los alumnos (entrada), la tercera columna sería el resultado de la acción del sujeto, su respuesta (salida). La segunda columna sería el proceso que ha permitido pasar de la entrada a la salida.

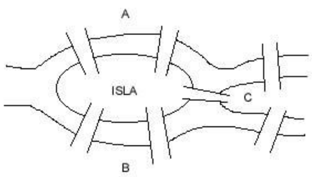
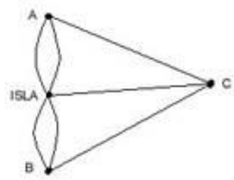
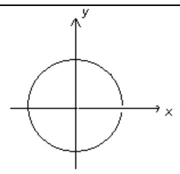
Entrada	**Procesos**	Salida
Puentes de Königsberg: Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida? 	**Idealización**	El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas? 
Circunferencia con centro (0, 0) y radio r.	**Representación**	 $x^2 + y^2 = r^2$
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	**Descomposición**	Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando $h \to 0$, y después focalizamos nuestra atención en esta clase.

Figura 2. Ejemplos de algunos procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales. Fuente: Font, Rubio y Contreras (2008)

2. 3. Megaprocesos

En el EOS se consideran procesos (por ejemplo, los 16 de la Figura 1) y megaprocesos (por ejemplo resolución de problemas o modelización). Existe un consenso amplio en considerar que, tanto la resolución de problemas como la modelización, son megaprocesos, pero dicho consenso no es claro para otros procesos. Una manera de investigar sobre los megaprocesos es estudiar su relación con los procesos más básicos que los componen. La consideración de un proceso como un megaproceso es algo sobre lo que no hay consenso. Por otra parte, de la misma manera que los megaprocesos, un proceso se puede considerar formado, a su vez, por otros procesos.

2.4. Aire de familia en los procesos y lista de procesos

Otra opción que se toma en el EOS, para organizar la reflexión sobre los procesos, es pensar en términos de grupos de procesos que tienen un aire de familia entre ellos. Los procesos agrupados en una familia tienen alguna característica en común si los comparamos dos a dos, pero quizás no haya ninguna característica común a todos ellos. Por ejemplo, entre demostrar, justificar, argumentar, explicar, etc. hay muchas diferencias, pero también podemos encontrar un aire de família entre todos ellos, lo cual hace razonable que a veces los tratemos como un grupo.

Además de agrupar los procesos en familias que tiene un parecido, cada uno de estos procesos también se puede considerar como una familia. Por ejemplo, el proceso de demostración lo podemos considerar como un miembro de una família en la que están también la argumentación o la justificación. Pero, a su vez, hay muchos tipos de procesos de demostración (reducción al absurdo, inducción completa, razonamiento por elemento genérico, etc.).

De esta manera se puede generar una lista no cerrada de procesos. Esta lista comienza con los 16 procesos dervados de la Figura 1. Dado un nuevo proceso o bien se agrupa en una familia con uno de los 16 procesos o bien genera una nueva familia. En esta lista, algunas de las familias se pueden considerar magaprocesos (por ejemplo, la resolución de problemas).

2.4. Relación entre procesos

En el EOS, para el estudio de un determinado proceso se considera útil la metáfora de la base vectorial. La mirada que permite dicha metáfora, consiste primero en situar el proceso que nos interesa en el centro de la Figura 1 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación/ significación). En Font (2007) se aplica dicha técnica a los procesos metafóricos, en Malaspina (2008) y Malaspina y Font (2010) a los procesos intuitivos, en Godino y Font (2010) y en Font y Rubio (2016) al proceso de representación, en Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012) a los procesos de visualización y en Sala (2016) a los procesos creativos.

Por ejemplo, en Malaspina (2008) y Malaspina y Font (2010) se utiliza la metáfora vectorial, en la que el proceso intuitivo es un vector con tres componentes (alguna de ellas podría ser “cero” en determinados casos), en la que las tres componentes son procesos que pertenecen al grupo de los 16 procesos considerados en el EOS:

Intuición = (idealización, generalización, argumentación)

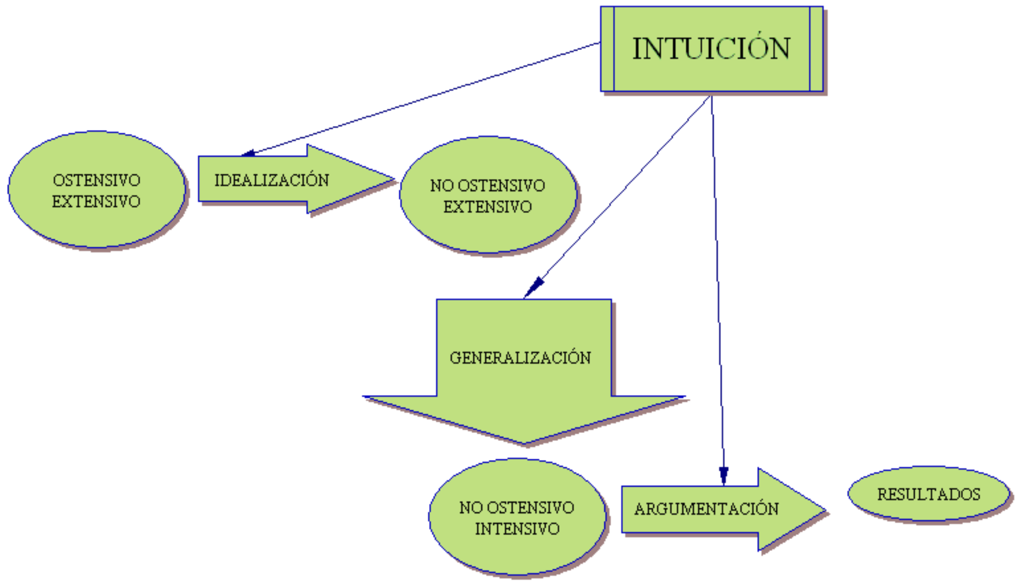


Figura 3. Componentes de la intuición. Fuente: Malaspina (2008)

Con este esquema (Figura 3), se visualiza que la intuición actúa sobre ideas matemáticas universales (que están presentes por medio de sus ostensivos asociados), para llegar a resultados que se consideran verdaderos sin (o casi sin) una argumentación explícita. De hecho, las diferentes maneras de entender la intuición difieren en el énfasis que dan a cada una de las tres componentes del "vector intuición".

3. Investigaciones sobre procesos en el marco del EOS

En el marco del EOS se han realizado numerosas investigaciones que se han interesado por la dialéctica entre significados personales e institucionales. En estas investigaciones se focaliza la atención, sobre todo, en los procesos de personalización e institucionalización y también en el de significación.

Con relación al proceso de significación, en el EOS ante una pregunta como, por ejemplo, ¿cuál es el significado de $f'(x)$? se considera que una respuesta razonable es: $f'(x)$ es un símbolo que cualquier persona con unos mínimos conocimientos de cálculo diferencial, conoce como una notación que representa a la función derivada y esta persona, a su vez, conoce su definición. Por tanto, es razonable concluir, de entrada, que el significado de $f'(x)$ es la definición de función derivada. Esta concepción, se puede considerar como una manera "elemental" de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar el significado de $f'(x)$ basta dar una definición.

Si entendemos el significado como una definición, nos podemos preguntar en qué consiste la comprensión de una definición. Nuestra respuesta es que para comprender la definición, un alumno tiene que activar una trama de funciones semióticas como la descrita en Font y Contreras (2008) para la definición de función derivada.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con él. Esta concepción, que se puede considerar pragmatista, nos da una perspectiva "sistémica" ya que se considera que el significado, por ejemplo, de $f'(x)$ es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de esta expresión (u otras que se consideran equivalentes) es determinante para su realización. En el marco del EOS se ha profundizado sobre la mirada sistémica de los objetos matemáticos y su significado, introduciendo la idea de significados parciales y su descripción en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios activados en dichas prácticas. Esta mirada compleja se ha aplicado a diferentes objetos matemáticos, en particular en Pino, Godino y Font (2011) para la derivada.

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista se considera un objeto matemático con existencia independiente de las personas (por ejemplo, la derivada), en el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se explica como un objeto secundario complejo que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. globalmente (holísticamente) sobre los objetos primarios de diferentes configuraciones. Dicho en otros términos, este objeto sería el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícita o implícitamente, el par (prácticas matemáticas, configuración epistémica de objetos primarios activada en dichas prácticas).

Por ejemplo, para el objeto (secundario) matemático derivada, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite.

Si entendemos el significado como uso, diremos que una persona comprende, entiende, sabe, etc. el significado de $f'(x)$ cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas matemáticas. Desde esta perspectiva sistémica, un sujeto comprende el significado de $f'(x)$ cuando realiza prácticas correctas en las que ha de poner en funcionamiento diferentes significados parciales de la derivada (como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente a la gráfica de f, como velocidad instantánea, etc.).

En el EOS también se han realizado investigaciones que tienen relación con otros procesos. Resumimos brevemente algunas de estas últimas.

3.1. Proceso de representación

En Godino y Font (2010) y Font y Rubio (2016) se reflexiona sobre el proceso de representación a partir de situarlo en el centro de la Figura 1 para relacionarlo con los 16 procesos que en ella se contemplan y en Font (2001) se hace una reflexión general sobre las representaciones. Un resultado importante de esta reflexión sobre el proceso de representación que queremos resaltar es el siguiente: ha permitido explicitar un posicionamiento de tipo ontológico/epistemológico general que antes estaba implícito en el EOS; nos referimos a un cierto posicionamiento (o al menos en una posición no contradictoria) del EOS en un punto de vista ontológico/epistemológico que podríamos llamar antirepresentacionista (Rortry, 1983).

En el EOS se considera que la clasificación en *representaciones mentales o internas* y *representaciones externas* no es una clasificación transparente. La ambigüedad de la clasificación interna/externa ha sido señalada por diversos investigadores. El motivo es que los objetos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos con soporte material que forman parte del mundo real, y, puesto que se presupone que el sujeto se relaciona con el mundo real por medio de representaciones mentales, resulta que lo que se ha considerado como externo en cierta manera también es interno. Además, la clasificación entre representaciones internas y externas obliga a preguntarse qué antecede a qué, si las representaciones internas a las externas o viceversa. La mayoría de los psicólogos cognitivistas consideran más básicas las representaciones internas puesto que consideran que para que las representaciones externas sean representaciones han de ser representadas mentalmente por sus usuarios y, por otro lado, las representaciones mentales pueden existir sin un duplicado público; por ejemplo, muchos de nuestros recuerdos no son comunicados jamás. En cambio, la mayoría de los científicos sociales y muchos filósofos, a menudo inspirados en Wittgenstein, no están de acuerdo con ello.

En el EOS se considera que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias importantes para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje. En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que se consideran más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo- no ostensivo y personal-institucional.

Utilizando constructos teóricos del EOS se ha realizado investigaciones sobre los procesos de tratamiento y conversión de representaciones (por ejemplo, Font, 2000; Rojas, 2015). Este último autor, muestra casos en los que los alumnos reconocen la equivalencia sintáctica entre dos expresiones (en las que una deriva de un tratamiento sobre la otra) pero no la semántica (entendida como trama de funciones semióticas) al resolver una tarea de probabilidad o de geometría analítica.

3.2. Proceso de argumentación

Con relación al proceso de argumentación, Recio y Godino (2001), utilizando el marco ontosemiótico, analizaron los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Su conclusión es que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la prueba, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.

3.3. Procesos de materialización e idealización

En Font y Contreras (2008) se utilizan las dualidades, ostensivo–no ostensivo y extensivo–intensivo para tratar de manera separada los procesos de materialización e idealización y los de particularización y generalización. Se trata de una distinción importante que permite una mejor comprensión de cada proceso y, sobre todo, de su presencia conjunta en la actividad matemática. Para Font y Contreras (2008) los procesos de materialización-idealización están asociados a la dualidad ostensivo-no ostensivo. Los objetos matemáticos son, en general, no perceptibles. Sin embargo, son usados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (notaciones, signos, gráficos, etc.). La distinción entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) en el cual toman parte. Los objetos ostensivos también pueden ser pensados o imaginados por un sujeto o bien estar implícitos en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicación en la notación algebraica).

Como resultado del proceso de idealización se pasa de un ostensivo, que a su vez es un extensivo, a un no ostensivo que sigue siendo un extensivo. La otra cara de la moneda es que para poder manipular los objetos no ostensivos necesitamos representaciones ostensivas, las cuales son el resultado de un proceso de materialización (y también de representación). El proceso de materialización sitúa el conocimiento matemático en el *"territorio del artefacto"* (Radford, 2006) puesto que sus productos son artefactos culturales que mediatizan y materializan el pensamiento.

El proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido, y se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo). Esto ocurre, entre otros motivos, porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la "existencia" del objeto matemático como algo independiente de su representación. Wittgenstein (1978) ha sido, probablemente, quien más claramente ha llamado la atención sobre este peligro; para este filósofo, la concepción de que los términos matemáticos son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

En el EOS se considera que los procesos de materialización e idealización son consustanciales a la actividad matemática. Dicho de otra manera, sin la materialización en símbolos y artefactos no es posible realizar la actividad matemática y, por otra parte, en el discurso que se hace sobre estos símbolos se sugiere explícita o implícitamente que estos símbolos materiales están en representación de objetos ideales.

En Moreno, Font y Ramírez (2016) se explica una investigación en la que se analiza la solución de un grupo de estudiantes universitarios a un problema mecánico que involucra a un cuerpo deformable (el problema del corredor). El análisis de los diagramas muestra la importancia de llevar a cabo un proceso de idealización, en el que el corredor es pensado como un punto sobre el cual actúan tres fuerzas, como condición necesaria para la solución de la tarea.

3.4. Procesos de particularización-generalización

Los procesos de particularización-generalización en el EOS están asociados a la dualidad extensivo-intensivo. Un objeto extensivo es usado como un caso particular (por ejemplo, la función $y = 2x + 1$), mientras que un intensivo es una clase (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$). Los términos extensivo e intensivo están sugeridos por las dos maneras de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por tanto, por extensivo entendemos un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo una clase o conjunto de objetos. Los mecanismos que nos ofrece el lenguaje para permitir la particularización o individualización de objetos matemáticos son variados (por ejemplo, los deícticos gramaticales –que sirven para indicar otros elementos–: éste, ése, aquel, ahí, allí, acá, etc. o los determinativos indefinidos: uno, alguno, cualquiera, etc.). También son variados los procesos de generalización (o abstracción) que permiten obtener intensivos. Font y Contreras (2008) consideran tres tipos de procesos: la abstracción reflexiva o constructiva, la eliminativa y la aditiva.

La abstracción reflexiva (Piaget, 2001) es un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Una de las características de la abstracción reflexiva es que es constructiva, en el sentido que construye intensivos a partir de la reflexión sobre la acción.

Ahora bien, podemos considerar otros mecanismos diferentes para obtener intensivos, uno de tipo eliminativo y otro de tipo aditivo. La abstracción empírica funciona por medio de un mecanismo eliminativo, se trata de eliminar o separar aspectos o notas de lo concreto. En este caso, se llega a un intensivo por la aplicación básicamente de la relación tipo/ejemplar, la cual se basa en la aplicación de un mecanismo de tipo eliminativo en base a la relación parte/todo, es decir el intensivo (tipo) se considera una de las partes que componen el extensivo (todo), ya que éste último es un ejemplar concreto que tiene muchas notas o atributos diferentes.

Otro mecanismo diferente para obtener intensivos consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos. Por ejemplo, puedo considerar la mediatriz de un segmento dibujada en la pizarra como un miembro (un extensivo) que forma parte, junto a otras mediatrices, de una clase o conjunto (un intensivo). En este último caso se llega a un intensivo también por la relación parte/todo, pero entendida de manera inversa a como se entiende en el caso de la abstracción empírica, la parte (el extensivo) es un miembro de un todo, una clase (el intensivo).

Estas tres maneras de generar intensivos juegan un papel diferente en las matemáticas, la abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas que se fundamenta sobre la teoría de conjuntos.

3.5. Procesos metacognitivos

En Gusmão (2006) se ha utilizado el EOS para analizar la resolución de problemas, dedicando especial atención a los procesos metacognitivos activados en la resolución. Según Gusmão, para resolver un problema que le represente un grado de dificultad importante, un resolutor experto pone en funcionamiento una configuración cognitiva, pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión de los componentes de la configuración a lo largo del proceso de resolución (coordinación, planificación/organización, supervisión/control, regulación y revisión/evaluación que pueden ser automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles, etc.). Gusmão, si bien considera que para cada problema dichos procesos de gestión serán diferentes, propone una reconstrucción hipotética de una configuración metacognitiva general de referencia (de un resolutor ideal), que se toma como referencia para evaluar las configuraciones metacognitivas personales de los estudiantes.

Gusmão afirma que, para una mejor comprensión de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el contexto de las tareas propuestas en su investigación, es necesario contemplar una unidad mínima de análisis compuesta por las configuraciones cognitiva y metacognitiva conjuntamente, las cuales se pueden analizar a partir de configuraciones epistémicas y metacognitivas de referencia. Según Gusmão, la perspectiva institucional, desde la cual se analizaría y valoraría la resolución de problemas de los alumnos, se representa mediante el siguiente esquema (Figura 4):

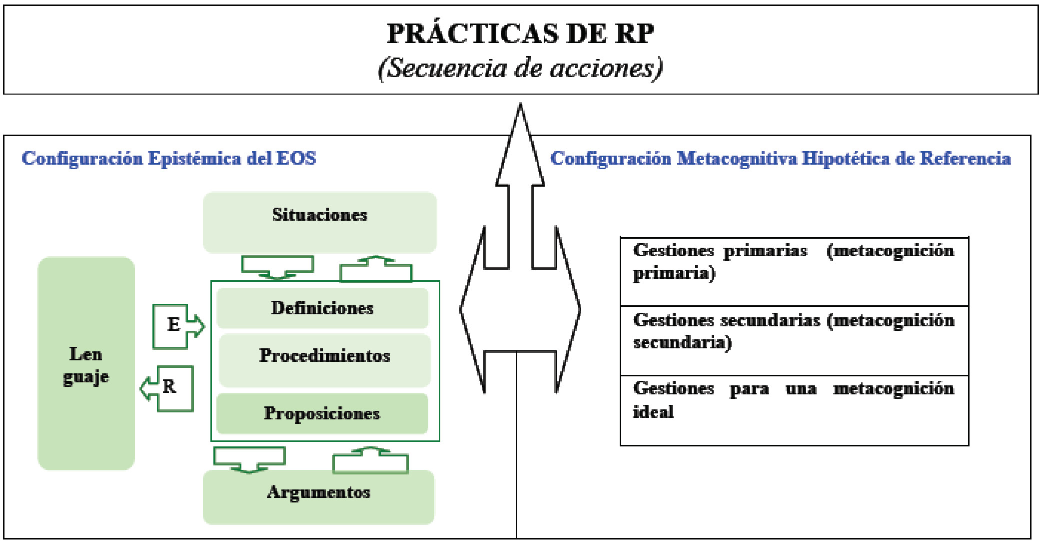


Figura 4. Configuración cognitiva y metacognitiva. Fuente: Gusmão (2006)

Con este esquema Gusmão quiere representar que si bien, por una parte conviene, para el análisis de las prácticas de resolución de problemas de un alumno, considerar por separado los constructos configuración cognitiva y metacognitiva, que a su vez están descompuestas en sus elementos constitutivos, hay que "ver" estos constructos formando parte de un todo integrado que, en su conjunto, contribuye a explicar la realización de dicha práctica.

De la investigación de Gusmão hay que resaltar, por una parte, que propone un instrumento que muestra toda su potencia en los detallados análisis que hace en su investigación de los protocolos de resolución de problemas de los alumnos y, por otra parte, que algunos de los procesos considerados en la Figura 1 son incorporados en el nivel de metacognición ideal de su herramienta de análisis.

3.6. Contextualización

Según Ramos y Font (2006), hay básicamente dos usos del término contexto. Uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro consiste en enmarcarlo en el entorno. En el primer caso, se trata de ver que la situación cae dentro del campo de aplicación de un objeto matemático. En el segundo caso, se trata de un "uso" que vamos a llamar, metafóricamente, "ecológico". La idea que interesa del uso ecológico del término contexto es que da a entender que hay diferentes "lugares" en los que se puede situar el objeto matemático.

Puesto que la resolución de cada problema se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente se puede entender, de manera metafórica, que la situación-problema "sitúa" el objeto que contextualiza en un "lugar" o en "otro" — es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos, un tipo de argumento, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades—. Desde esta perspectiva, cada situación problema sitúa al objeto que contextualiza en un determinado "nicho". De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo-intensivo y otra, de tipo "ecológico", al situar el objeto matemático que contextualiza en un "nicho", o bien en otro.

El hecho de contemplar la situación problema en el marco de la configuración epistémica asociada permite relacionar las dos maneras de entender el término "contexto": (1) como caso particular de un objeto matemático y (2) como entorno del objeto y entender que, de hecho, las dos actúan simultáneamente.

Uno de los dilemas que plantea el uso de la contextualización extra matemática, para conseguir la construcción de los objetos matemáticos, es el siguiente: los problemas contextualizados que se les presentan a los alumnos, una vez resueltos, permiten obtener casos particulares. Por ejemplo, del objeto matemático "función afín" (por ejemplo, $y = 2x+3$), pero no el objeto matemático "función afín" ($y = ax+ b$). Es decir, después de resolver un problema contextualizado hemos pasado de una situación extra matemática a un extensivo (caso particular) de un objeto matemático, pero queda pendiente el problema de saber cómo este extensivo se puede considerar un caso particular de un objeto matemático *OM*, si *OM* todavía no se conoce. Para abordar este problema es necesario entender los procesos de descontextualización a partir de contextos extra matemáticos en términos de la siguiente quíntupla:

(*S*, *R*, *S'*, la relación extensivo-intensivo "es", *OM*)

Se parte de una situación de contexto extra matemático *S*, que podemos poner en relación (*R*) con la situación *S'*, la cual, a su vez, se considera como un caso particular del objeto matemático *OM*. La relación *R*, que permite relacionar *S* con *S'*, puede ser de muchos tipos diferentes. Ahora bien, en todos los casos se suele terminar considerando *R* como una relación de representación. Por otra parte, *S'* se considera un caso particular de un objeto matemático más general (*S'* es *OM*).

La modelización es un proceso complejo que implica, primero, partir de la situación real para, gracias a un proceso descontextualizador, obtener un objeto matemático y después, gracias a un proceso de contextualización, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. En Ramos y Font (2006) se considera conveniente, (1) utilizar el término "matemáticas contextualizadas" cuando se pretende que el alumno realice alguno –o ambos- de estos procesos, (2) utilizar el término "descontextualización" para referirnos al proceso que va de la realidad al objeto matemático y de "contextualización" para indicar el proceso que va del objeto matemático a la realidad y (3) de "modelización" cuando se presenta a los alumnos una situación suficientemente rica que tenga por objetivo la realización de los 5 pasos siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

3.7. Procesos metafóricos

En Acevedo, Font y Bolite Frant (2006) y Acevedo (2008) se realiza una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a los diez procesos derivados de las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico (expresión-contenido, institucional-personal, elemental-sistémica, extensivo-intensivo y ostensivo-no ostensivo) (Figura 1). Para ello, utilizan como contexto de reflexión el objeto matemático “función” y, más en concreto, su representación gráfica.

Con relación a la dimensión dual “personal / institucional”, la metáfora estática, “la gráfica de una función $f(x)$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$”, se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales y, por otra parte, la metáfora dinámica, “la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre la gráfica”, es un recurso utilizado por el profesor que produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista. Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas, hay alumnos que no logran hacerlo. Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

Con relación a la dimensión dual “extensivo / intensivo”, una objeción importante que se puede poner a la afirmación de que “entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$” es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización. Se trata de una objeción importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones sólo un análisis histórico permite afirmar que “entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$” es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Con relación a la dimensión “expresión / contenido” la metáfora actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto.

Con relación a las dimensión dual “elemental / sistémica, si bien la metáfora se presenta de manera elemental (*A* es *B*), el hecho de que ahora *B* estructure *A* permite aplicar a *A* un conjunto de prácticas que son el significado de *B*. Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

Con relación a la dimensión dual “ostensivo / no ostensivo” la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos permitiendo la realización de inferencias.

3.8. Procesos de visualización

En Godino, Cajaraville, Fenández y Gozato (2012) se analiza la noción de visualización aplicando las herramientas del EOS. Estos autores distinguen entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Para ello, fijan la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la *percepción visual*.

Los "objetos visuales" y los procesos de visualización de donde provienen, forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relacionan los objetos constituyentes de la configuración).

En este trabajo, la visualización es analizada, en primer lugar, desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan, esto es, los tipos de situaciones-problemas (tareas), elementos lingüísticos y materiales, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales se dice que hay visualización. Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.

En segundo lugar, la visualización es analizada aplicando las dualidades consideradas en el EOS desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados. En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos), e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados). Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido).

Como síntesis del análisis realizado en este trabajo sobre la visualización afirman que la configuración de objetos y procesos puestos en juego en la realización de una práctica matemática por un sujeto: 1) Siempre involucra lenguajes analíticos en mayor o menor medida, aunque la tarea refiera a situaciones sobre el mundo perceptible. Esto es así por el carácter esencialmente regulativo-sentencial de los conceptos, proposiciones y procedimientos matemáticos. 2) Una tarea no visual puede ser abordada, al menos parcialmente, mediante lenguajes visuales los cuales permiten expresar de manera eficaz la organización o estructura de la configuración de objetos y procesos puestos en juego, especialmente mediante diagramas o con el uso metafórico de iconos e índices.

En consecuencia, la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente (Figura 5). El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones. El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá del carácter visual o no de la tarea y también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve.

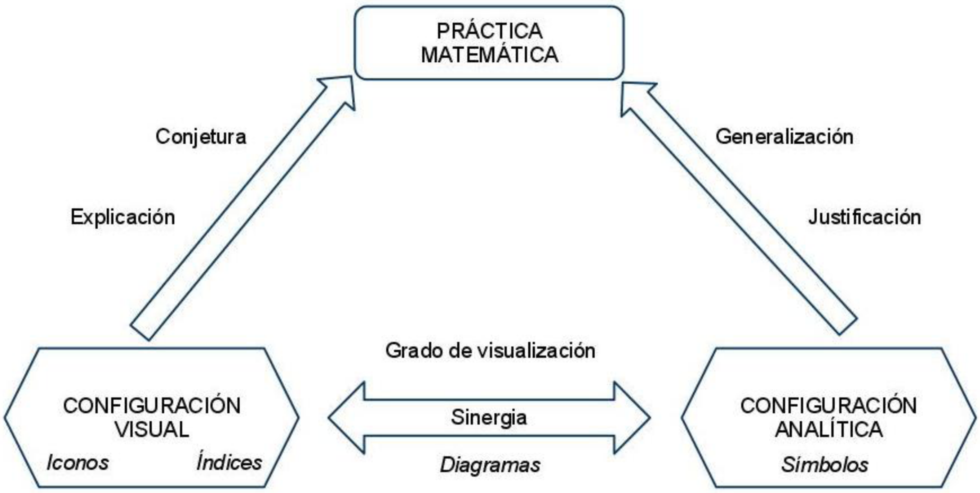


Figura 5. Sinergia entre configuraciones visuales y analíticas. Fuente: Godino, Cajaraville, Fenández y Gozato (2012)

3.9. Procesos creativos

En Sala (2016) se realizó una investigación sobre el proceso matemático creativo (PMC) desarrollada en el contexto del proyecto europeo “MCSquared” (MC2) (Mathematical Creativity Squared) de la Comunidad Europea. Dicho proyecto se centró en el proceso de diseño colaborativo de un nuevo tipo de recurso educativo digital, los llamados c-libros, compuesto por las denominadas *c*-unidades (*c* en referencia a creatividad). Equipos mixtos de diseñadores con distintas formaciones, ámbitos profesionales e intereses se encargaron del diseño conjunto y colaborativo de las *c*-unidades con el objetivo de producir un diseño innovador de unidades didácticas que promuevan la creatividad matemática y el pensamiento matemático creativo (PMC) en sus futuros usuarios. Este proyecto también desarrolló la tecnología y las herramientas necesarias para dar soporte a, por un lado, el proceso de diseño colaborativo de las c- unidades y, por otro lado, la evaluación del potencial que estas presentan para promover el PMC en los futuros estudiantes que usan estas c-unidades

En el contexto del MC2 y de los proyectos que le dan continuación, para investigar sobre el desarrollo del PMC, se construyó una herramienta, basada en la manera de entender los procesos que nos ofrece el EOS, que fue utilizada en la evaluación del potencial de las c-unidades diseñadas para desarrollar el PMC.

Como resultado de una revisión de la literatura al respecto (por ejemplo, Guilford, 1950, 1967a, 1967b; Hayes, 1989), se consideró que el PMC es aquel en el cuál se producen procesos creativos y que una primera manera de caracterizarlo, es descomponerlo en fases, que se pueden considerar subprocesos. Así pues, al concluir que la forma de conceptualizar el proceso creativo en matemáticas consiste en descomponerlo en otros procesos, se consideró, conjuntamente con el equipo de MC2, que la mejor forma de profundizar en su investigación era adoptar la metodología propuesta por el EOS, mencionada anteriormente, pero con una variante importante. En lugar de partir de una “base” de procesos *a priori* definida por el marco teórico, se partiría de la “base” resultante de la lluvia de ideas producida por los participantes del proyecto MC2 al explicar, cada uno de sus miembros, que entendía por “proceso creativo”. En primer lugar, se consiguió un consenso en el equipo de investigación de la Universidad de

Barcelona y, posteriormente, un consenso entre los diferentes equipos internacionales participantes en el proyecto.

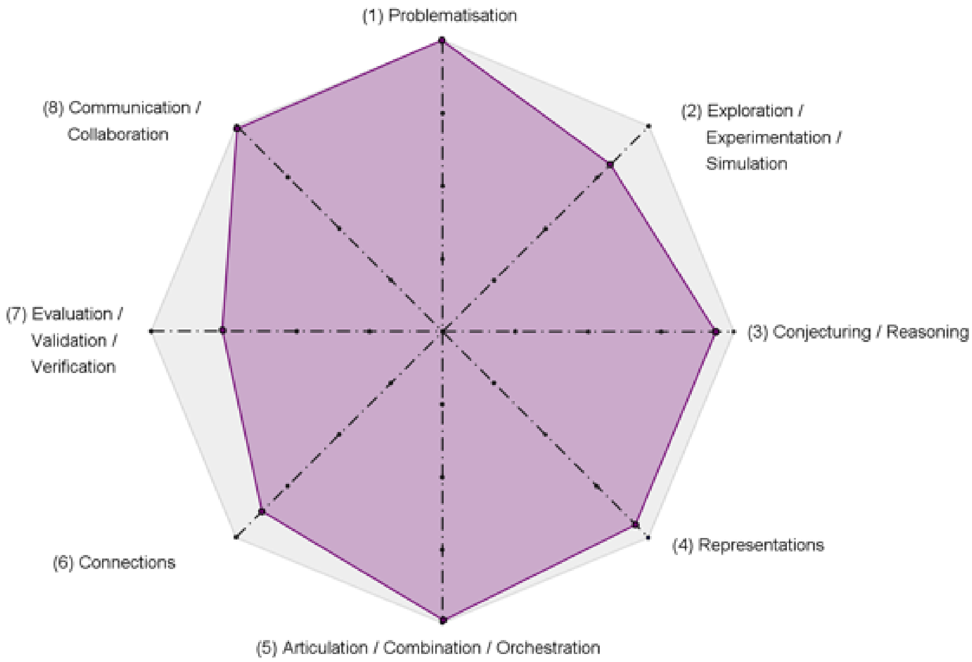


Figura 6. Representación de las dimensiones seleccionadas para la evaluación del potencial de PMC de una c-unidad. Fuente: Sala (2016)

La Figura 6 muestra una representación de la evaluación obtenida de una c-unidad diseñada en este segundo ciclo del proyecto. En ella, se puede observar un polígono de 8 vértices que representan las 8 dimensiones en que se puede descomponer el PMC, según el acuerdo del equipo de investigación de la Universitat de Barcelona.

3.10. Proceso de problematización

En la figura 1 se contempla el proceso de problematización, el cual engloba tanto el proceso de resolución de problemas como el de creación de problemas. Con relación a la creación de problemas, en el marco del EOS se ha investigado (Mallart, Font y Malaspina, 2015; Font, Malaspina y Mallart, 2016)) la estrecha vinculación entre la competencia de análisis e intervención didáctica con la capacidad de crear problemas de los profesores que faciliten los aprendizajes de sus alumnos. Para que los profesores creen problemas se utiliza la estrategia ERPP que contempla las siguientes fases: 1) Presentar a los participantes un problema previamente elaborado, en el marco de un episodio de una clase de un profesor (E). En tal episodio se mencionan brevemente las reacciones de algunos alumnos para resolver el problema. 2) Solicitar a los participantes resolver el problema dado y hacer una configuración cognitiva de su resolución y – basándose en ella – reflexionar sobre su práctica a través de una breve narración (dirigida a un colega) de los pasos fundamentales que hay que tener en cuenta para resolver el problema (R). 3) Haciendo modificaciones al problema del episodio, crear problemas que faciliten la resolución del problema dado y ayuden a aclarar las reacciones descritas de los alumnos, estos problemas se llaman “problemas pre” (P); los profesores deben elaborar una configuración cognitiva de sus soluciones, y luego hacer comentarios sobre cómo están convencidos de que el problema planteado contribuirá a la correcta comprensión y solución del problema del episodio. 4) Haciendo modificaciones al problema del episodio, crear problemas que desafíen a los alumnos del episodio más allá de la obtención de una solución correcta del problema dado. Tales problemas son llamados “problemas pos” (P).

4. Herramientas para visualizar procesos

En Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013) se presenta un instrumento que permite visualizar los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase (definiciones, proposiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). Para estos autores, en un momento en el que hay una tendencia a organizar los currículos en términos de procesos y competencias, es especialmente útil para la formación del profesorado disponer de instrumentos que permitan entre otros aspectos, evidenciar y hacer tangibles los procesos matemáticos que intervienen en la actividad matemática.

Este instrumento consiste en una gráfica en la que en el eje horizontal se representan tiempos y en el eje vertical objetos primarios de la configuración y también procesos:

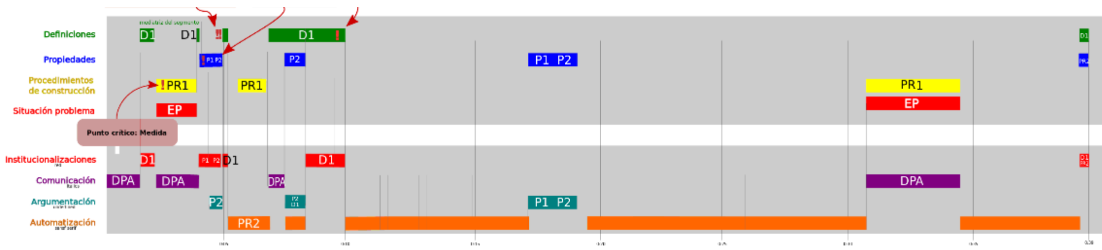


Figura 7. Visualización de procesos. Fuente: Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013)

La figura 7, correspondiente a una clase magistral, muestra que la mayoría de objetos primarios son presentados por la profesora en los cinco primeros minutos. En términos de procesos, se visualiza que se invierte un mayor tiempo (75%) en la automatización del procedimiento de construcción de la mediatriz (trabajo individual del alumno sin discusión colectiva). El proceso de comunicación que predomina es del tipo exposición de la profesora y se dedica muy poco tiempo al proceso de argumentación (que consiste en la comprobación de las propiedades de la construcción geométrica de la mediatriz utilizando instrumentos de medidas). La comunicación entre alumnos y profesora está dirigida únicamente a la exposición de la definición (D_1) y las propiedades (P_1 y P_2). Los intervalos de tiempo que se dedican a la institucionalización son muy breves. Concretamente se destina un único intervalo de dos minutos aproximadamente para las propiedades P_1 y P_2.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) del Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España y REDICE16-1520 (ICE-UB).

Referencias

Acevedo, J. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. Tesis Doctoral no publicada, Universitat de Barcelona.

Acevedo, J., Font, V., y Bolite Frant, J. (2006). Metáforas y funciones semióticas: El caso de la representación gráfica de funciones. En A. Contreras, L. Ordóñez, y C.

Batanero (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 384–399). Jaén, Universidad de Jaén.

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013): Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *31* (3), 207-225.

Font,V. (2000) *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral no publicada. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2001). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *14*, 1-35

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, *19* (2), 95-128.

Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. En M. Marín Rodríguez, G. García, L. Blanco, M. Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 33-52.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Font, V., Malaspina, U. y Mallart, A. (2016). Creación de problemas como medio para desarrollar competencias docentes. *Revista del Congreso Internacional de Docencia Universitaria i Innovación (CIDUI)*, 3. Disponible en, http://www.cidui.org/revistacidui/index.php/cidui/article/view/1035/999

Font, V. y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica*, *24* (1-2), 97-123.

Font, V., Rubio, N y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Font, V., Rubio, N., Giménez, J. y Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria, *UNO*, *51*, 9-18.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T., y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 163-184.

Godino, J. D., y Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 189–210.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, *5*, 444-454.

Guilford, J. P. (1967a). *The Nature of Human Intelligence*. Nueva York: McGraw-Hill

Guilford, J. P. (1967b). Creativity: Yesterday, today, and tomorrow. *Journal of Creative Behavior*, 1, 3-14.

Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las* *prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Santiago de Compostela.

Hayes, J. R. (1989). Cognitive processes in creativity. En J. A. Glover, R. R. Ronning y C. R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 135-145). New York: Plenum Press.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis Doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U., y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(1), 107-130.

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, *38*(152), 14-30.

Moreno, N., Font, V. y Ramírez, J. C. (2016). La importancia de los diagramas en la resolución de problemas de cuerpos deformables en Mecánica: el caso de la fuerza de fricción. Ingeniare. *Revista Chilena de Ingeniería*, *24*(1), 158-172.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA and National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. Hove, UK: Psychology Press.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103-129.

Ramos, A. B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*, *20* (4), 535-556

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 83-99.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151-165.

Rorty, R. (1983). *La filosofía y el espejo de la naturaleza*, Madrid, Cátedra.

Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona. Disponible en, http://www.tdx.cat/handle/10803/388035.

Vasco, C. E. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En, C. J. Mosquera Suárez (Ed.), *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales* (25-79). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. New York: The MacMillan Company.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematics*. Oxford, UK, Blackwell.