Análisis de significados personales e institucionales sobre prácticas de divisibilidad en el marco del enfoque ontosemiótico

Analysis of personal and institutional meanings on divisibility practices within the framework of the onto-semiotic approach

Silvia C. Etchegaray

Universidad Nacional de Río Cuarto-República Argentina

Resumen

En este trabajo aplicamos la noción de configuración ontosemiótica, en su doble versión, institucional y personal para analizarla actividad matemática implicada en la resolución de un problema de divisibilidad. Esto supone describir tanto las prácticas matemáticas, objetos y procesos implicados en la resolución experta o esperada del problema (configuración epistémica) como en las producciones de un grupo de estudiantes, ingresantes a la universidad (configuraciones cognitivas). La puesta en funcionamiento de estas herramientas posee, en este trabajo, un doble propósito. Por un lado, *caracterizar qué tipo de conocimiento* tienen disponibles los estudiantes del profesorado en matemática al egresar de la escuela secundaria en torno a saberes elementales de la divisibilidad, y por el otro, *lograr la sistematización de un proceso de investigación* contextualizado en la propia institución formadora con el objetivo de que se convierta en fuente de estudio y reflexión para los estudiantes avanzados del profesorado en Matemática.

Palabras claves: Significados institucionales, significados personales, divisibilidad, formación de profesores.

Abstract

In this paper, we apply the notion of onto-semiotic configuration, both in the institutional and personal facets to analyze the mathematical activity involved in solving a divisibility problem. This application involves describing the mathematical practices, objects and processes involved in the practices carried out in the expert resolution of the problem (epistemic configuration) and in the personal productions by a group of students, who are starting in the university (cognitive configurations). We implement these tools with a double purpose. On the one hand, *we characterize the kind* of mathematics knowledge available by the teachers when they graduate from secondary school around elementary divisibility, and on the other hand, we intend to *achieve the systematization of a research process*, contextualized in the educational institution with the aim that it becomes a source of study and reflection for advanced students' teachers of mathematics.

Keywords: Institutional meanings, personal meanings, divisibility, teacher education

1. Introducción

En este trabajo vamos a problematizar ciertos saberes matemáticos, específicamente correspondientes a la teoría de la divisibilidad, que imparten en el primer año del Profesorado en Matemática que se dicta en la Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC) (Argentina), usando herramientas conceptuales y metodológicas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, 2002;Godino, Batanero y Font, 2007) y que configuran distintos modelos epistemológicos, cognitivos e instruccionales.

Etchegaray, S. C. (2017). Análisis de significados personales e institucionales sobre prácticas de divisibilidad en el marco del enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Estas herramientas están siendo estudiadas y aplicadas en algunos espacios curriculares correspondientes a nuestro programa de formación de profesores de matemáticas al considerarlas útiles para la reflexión y análisis del diseño, implementación y evaluación de los conocimientos matemáticos puestos en juego por los estudiantes en sistemas de prácticas correspondientes a distintas áreas de la Matemática.

Comenzamos este artículo planteando una de tales situaciones-problema que vamos a utilizar para contextualizar las herramientas de análisis didáctico elaboradas en el marco del EOS. Se aplicarán aquí con el doble propósito de *caracterizar qué tipo de conocimiento* tienen disponibles los estudiantes del profesorado en matemática al egresar de la escuela secundaria en torno a saberes elementales de la divisibilidad. Así mismo, se aplicarán para *lograr la sistematización de un proceso de investigación* contextualizado en nuestra propia institución formadora para que se convierta en fuente de estudio y reflexión para los estudiantes de Matemática que estén cursando el último año de estudio. Creemos que es importante mencionar que estamos implicados tanto en la formación matemática del futuro profesor de matemática, así como en su formación en didáctica de las matemáticas, por lo que planificar nuevas actividades formativas en las cuales se articulen la formación matemática y la formación didáctica en torno a un problema de investigación didáctico-matemático[1] nos resulta de gran interés y utilidad

A continuación, en este trabajo, describimos los niveles de análisis de los procesos de estudio que tendremos en cuenta y las herramientas teóricas que propone el EOS para su realización. Las ponemos a funcionar a través del análisis ontosemiótico de prácticas “expertas” y de prácticas de estudiantes ingresantes ante la resolución de un problema, como ya anticipáramos, contextualizado en el ámbito de la teoría de la divisibilidad. Por último, finalizamos este artículo con algunas conclusiones referentes al problema de investigación estudiado y algunas reflexiones referidas a la relevancia de este tipo de estudios en la formación inicial de profesores.

2. Una situación problema como contexto de reflexión didáctico-matemático

En esta sección describimos brevemente la primera situación problema seleccionada que pone a funcionar nociones elementales de Divisibilidad y que se presentó para su resolución a futuros profesores de matemática en el primer año de la carrera. Más específicamente en dicha situación-problema intervienen determinados significados del máximo común divisor (M.C.D) y “exige” de ciertos procesos cognitivos que permiten evaluar contenidos aritméticos elementales que “traen” los estudiantes del secundario, lo que se logra desvelar haciendo funcionar herramientas de análisis didáctico correspondientes al EOS en el marco de una problemática profesional local.

Tal situación fue seleccionada, como un tipo de situación que relaciona 2 de los modelos del *significado global* de máximo común divisor, denominados en el estudio epistémico

[1] En este caso el foco de nuestro problema de investigación se centra en cómo evaluar los conocimientos disponibles de los ingresantes al profesorado en matemática en torno a saberes elementales de divisibilidad.

realizado por Etchegaray, Colombo y Peparelli (2005) como *pre-aritmético* y *aritmético*[2] respectivamente.

Situación-problema[3]

> Un camino une en el plano los puntos (0;0) y (120;84). Los tramos que lo componen son horizontales o verticales, todos de igual longitud, y todos tienen sus extremos en puntos de coordenadas enteras.
>
> a) Obtener al menos tres recorridos distintos, siempre que fuera posible.
>
> b) ¿Habrá alguna forma de que se realice el camino con la mínima cantidad de tramos?
>
> c) La regla obtenida, ¿será válida para algún otro par de números?

Este problema fue presentado para su resolución a 21 estudiantes de primer año del Profesorado de matemática de la UNRC en el marco de la asignatura Matemática Discreta. Vale mencionar que no se realizaron momentos de aprendizajes previos de los contenidos básicos de divisibilidad que intervienen en dicho problema, justamente para recuperar de la forma más genuina posible los significados personales de los alumnos que se inician en la universidad, es decir, aquellos conocimientos disponibles en el área de la Aritmética, como consecuencia de lo aprendido en la escuela secundaria

Simultáneamente, alumnos del último año del profesorado llevan a cabo la denominada resolución experta de la situación. Se adjunta, en el anexo 1, una síntesis de las diferentes resoluciones esperadas, con el objetivo de disponerlas para su posterior análisis.

En los dos siguientes apartados (3 y 4) se explicarán y efectuarán los diferentes niveles de análisis didácticos realizados, tanto a las dos resoluciones expertas (o resoluciones esperadas) llevadas a cabo por los estudiantes del último año, como a las respuestas de los estudiantes de primer año.

3. Niveles del análisis didáctico

Dentro del marco del EOS se pueden llevar a cabo distintos niveles de análisis (Godino, Font y Wilhelmi, 2007; Font, Planas y Godino; 2010) de los sistemas de prácticas que genera la "resolución experta" de estas situaciones – problemas, o las resoluciones de alumnos, que en este caso están cursando su primer año de estudio. El EOS propone que el investigador realice cinco niveles de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático, los cuales constituyen una ampliación progresiva de la capacidad de análisis de dichos procesos de estudio matemático. En este trabajo desarrollaremos los dos primeros niveles de análisis didácticos propuestos, agregándole un primer momento de estudio y reflexión con los estudiantes del último año de estudio, en tanto "hacedores" de las denominadas "resoluciones expertas". Consideramos que se torna necesario incorporar en la descripción de este trabajo, este momento especial de estudio ya que se puede entender como el momento de explicación de la producción matemática realizada por el novel experto, en este caso el estudiante de

[2] En el modelo pre-aritmético se consideran los problemas de cálculo del MCD entre dos números enteros dados, mientras que en el modelo aritmético los problemas que se resuelven permiten determinar resultados aritméticos a partir de propiedades del MCD. En la publicación citada se especifican las diferencias de todos los elementos de significado que caracterizan cada uno de los modelos.

[3] Tomada de Becker, Pietrocola y Sanchez (2001, p. 27); aquí se presenta como problema introductorio para el aprendizaje del máximo común divisor.

cuarto año del profesorado, al comunicar al docente formador lo que ha pensado, registrado, y reflexionado desde el punto de vista matemático sobre la situación problema seleccionada. Este momento se caracteriza por movilizar un modo de *hacer* y de *decir* por parte de los estudiantes del último año de estudio que permitan explicitar lo implícito de las clásicas y muy naturalizadas prácticas matemáticas que resuelven la situación. En otras palabras, este momento tiene como objetivo esencial que se abandone el rol de "*informante*" que normalmente poseen todos los sujetos en formación para convertirse en "*proponentes*" (Brousseau, 1998)ya que estamos convencidos que el futuro profesor necesita reflexionar sobre su práctica matemática, fundamentar sus decisiones didáctico-matemáticas, en otras palabras desnaturalizar los órdenes preestablecidos como consecuencia de una clásica formación disciplinar. Creemos que hacer explícito lo que implícitamente regula la actividad matemática personal es un proceso necesario de incentivar por quienes estamos a cargo de la formación de profesores y de alto carácter formativo profesional.

El momento siguiente corresponde al desarrollo del nivel reconocido por el EOS como el primer nivel de análisis didáctico ya que está ligado a *los sistemas de prácticas efectivamente realizados y describe los objetos matemáticos intervinientes y emergentes*. En este nivel de análisis y en este trabajo particular la *configuración epistémica y la configuración cognitiva* son las herramientas metodológicas que se utilizan del EOS, (Godino, 2002) las cuales permiten poner al descubierto la "red de relaciones" aritméticas entre los elementos primarios de significado, producidos tanto por la resolución "experta" de estas situaciones – problemas (lo esperado en este caso por los estudiantes avanzados) como la de los alumnos de primer año del profesorado (lo declarado). Se aplica a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio matemático y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso. Además, permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal. En nuestro caso particular dicho procesos se descompuso en tres episodios, uno para cada inciso que se plantea en el problema seleccionado para estudiar en este artículo.

En un nuevo momento de análisis, reconocido por el EOS como el segundo nivel de análisis, nos centramos en identificar *Procesos matemáticos y potenciales conflictos semióticos*. En toda práctica se identifica un *sujeto agente* (institución o persona) y un *medio* en el que dicha práctica se realiza (que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el sujeto agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema es necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis se centra en los objetos y, sobre todo, en los procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también en los que emergen de ellas. La finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

4. Aplicación de los dos niveles de análisis a la situación-problema de la sección 2

4.1. Primer nivel de análisis: sistemas de prácticas y objetos matemáticos

Este nivel de análisis se basa en la aplicación de las nociones de *práctica matemática* ligada a la solución de un tipo de problemas, *objetos emergentes* (e *intervinientes*), *significados sistémicos* institucionales y personales. Estas nociones están desarrolladas en Godino y

Batanero (1994), ampliadas en Godino, Batanero y Font (2007) y precisadas en Godino y Font (2007a).

La puesta en funcionamiento de estas herramientas conceptuales nos permite en la búsqueda del significado institucional de referencia, formular nuevas cuestiones como las siguientes en torno a la situación-problema y nos ayudan a sistematizar la reflexión guiada (Godino y Batanero, 2009) sobre las prácticas matemáticas desplegadas por los estudiantes avanzados en sus roles de "expertos".

> *¿Qué problemáticas y prácticas se prevén y se realizan en la situación analizada?¿Cómo se secuencian?*

La situación propuesta lleva a que emerjan, a partir de cada inciso, tres objetos matemáticos ontológicamente diferentes. En el primero se prevé la formulación de *una proposición que refiere a casos particulares*, en el segundo la emergencia de *una noción* como la de divisor común mayor entre dos números especiales y la formulación de *una proposición que refiere a un particular "tipo",* mientras que el tercer inciso plantea la necesidad de describir una *técnica general*, lo que nos habilita a desarrollar tres configuraciones diferentes.

La posible representación gráfica de los recorridos solicitados en el primer inciso, y sobre un mismo sistema de coordenadas, permite *visualizar* la dependencia de la longitud de los tramos respectos a ambas coordenadas y de *identificar* la presencia de invariantes, así como *justificar* la necesidad de que los tramos tengan longitud igual al mayor de los divisores comunes, dado lo que se solicita en el inciso 2. Sin embargo, este sistema de prácticas operativas y discursivas no se reduce a la realización de cálculos y/o gráficos matemáticos particulares, sino que hay que seleccionar cuál o cuáles de las propiedades que lo caracterizan será útil para responder a una problemática general, pero en un ejemplo particular y, finalmente, generalizar todos los elementos que pueden variar en la situación. Por tanto, se transita con esta situación por las diversas fases de un proceso de construcción de un objeto matemático (en este caso el MCD) entendido como un "modelo".

El problema se puede usar como situación de contextualización y de emergencia de objetos elementales que estructuran la Teoría de la Divisibilidad en el nivel de educación secundaria (divisor, mayor divisor común, cálculo del MCD), y también como aplicación de dichos conocimientos para el nivel superior.

Además, dado que la situación requiere en su tercer inciso una doble generalización (de los números que componen el par ordenado: (a, b) *objeto interviniente* y de la longitud de los tramos: M.C.D *objeto emergente*) es necesario que los estudiantes produzcan matemática basculando entre dos modelos el pre-aritmético y el aritmético (Etchegaray, Colombo y Peparelli, 2005).

> *¿Qué objetos (lenguajes, problemas, propiedades, conceptos, procedimientos y argumentos) intervienen en las prácticas? ¿Cuáles son previos y cuáles emergentes?*

En este artículo describiremos sólo la tercera configuración (como síntesis y ejemplo del análisis realizado a la situación-problema presentada), que sintetiza y operativiza, en tanto marco de referencia institucional, las dos resoluciones expertas del tercer inciso del problema, presentadas en el anexo 1. Vale observar que como en la configuración epistémica se trata de atrapar sintéticamente las relaciones que el experto (en este caso los estudiantes de cuarto año) prevén al tratar de resolver la situación, se ha decidido presentar el análisis de cada elemento de significado en forma tabular (Tabla 1), diferenciando cada resolución con las abreviaturas R.1 y R.2 respectivamente, como así también, los objetos previos o intervinientes diferenciándolos de los emergentes correspondientes.

El problema en este caso es:
La regla obtenida en la situación anterior, ¿será válida para algún otro par de números?

Tabla 1. Configuración epistémica de las resoluciones expertas (R.1 y R.2)

Conceptos – Definiciones

Objeto	Significado
Previos o intervinientes	
R.1 y R.2: divisor	Dados dos números enteros a y b, a es divisor de b (a|b) sí y sólo sí ∃ k∊Z: b=a.k.
R.1: divisor común de dos números	Se dirá que un número es divisor común de dos enteros si divide a cada uno de ellos, o es divisor de cada uno de ellos.
Emergente	
R.1 y R.2: Divisor común mayor (concepto emergente del procedimiento realizado en el inciso anterior)	Dados a y b números enteros, el mayor de sus divisores comunes se llama divisor común mayor (dcm) de a y b.
Procedimientos	*Argumentos*
Intervinientes	
R.1 y R.2: Transformación/evolución de la situación-problema al siguiente enunciado: Unir en el plano los puntos (0;0) y (a;b), a,b ∊Z, con la mínima cantidad de tramos horizontales y verticales, todos de igual longitud y sus extremos deben ser coordenadas enteras	La pregunta: ¿La regla es válida para *algún otro* par de números? solicita trabajar con un razonamiento análogo a los problemas anteriores, pero ya no con ciertos números sino con cualesquiera dos números enteros a y b.
R.1: Búsqueda de divisores comunes dea y b.	Independientemente del orden de ejecución de los movimientos, se debe avanzar a lugares hacia la derecha a través de puntos de coordenadas enteras y en todos los tramos la misma longitud, por lo tanto, la longitud de cada tramo debe ser un número entero divisor de *a*. Se realiza el mismo razonamiento para los movimientos verticales, luego la longitud de cada tramo del recorrido debe ser un divisor común de a y b
R.1: Detección del mayor divisor común de a y b, llámese c	Además, para que el camino se realice con la mínima cantidad de tramos se debe tomar la longitud más grande que sea posible, es decir, considerar el mayor valor posible de los divisores comunes de a y b, llamado c
R.2: Generalización de la técnica usada para el cálculo de MCD usada en el primer inciso y que lo llamaremos c, entre cualquier par de números, a y b.	Además, para que el camino se realice con la mínima cantidad de tramos se debe tomar la longitud determinada por el MCD. llamado c

Propiedades – Proposiciones

Objeto	Significado
R.1 y R.2: Puesta a funcionar: $c \mid a$ y $c \mid b \Rightarrow \exists r \in Z$: $a=c.r$ y $\exists s \in Z$: $b=c.s$ y c es mayor que cualquier otro número que también divida al a y al b.	Hace referencia a que el valor que se busca debe ser un divisor común a ambos números y ser el mayor que cumple con esa doble relación.
Emergente: Dados a y b dos números enteros cualesquiera siempre se puede hallar un camino que una los puntos del plano (0;0) y (a;b) con la mínima cantidad de tramos	R.1: Basta buscar los divisores comunes entre a y b y elegir el más grande. R.2: Una vez hallada la técnica, se puede afirmar este enunciado que es la respuesta al problema.

4.2. Segundo nivel de análisis: procesos matemáticos y potenciales conflictos semióticos

Como se sabe, este nuevo nivel de análisis aporta información sobre la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática desplegada, y por tanto, desvela posibles explicaciones sobre los conflictos semióticos que se pueden producir en su desarrollo.

Se basa en la aplicación de la noción de proceso matemático y la tipología de procesos elaborada teniendo en cuenta los tipos de objetos primarios y secundarios (dualidades o atributos contextuales). Estas nociones están desarrolladas en Godino (2002) y precisadas en Godino y Font (2007b).

La aplicación de estas herramientas permite formular, entre otras, las cuestiones siguientes relacionadas a los tres incisos de la situación problema en la que se contextualiza este proceso de estudio.

> *¿Qué procesos y objetos matemáticos son activados en las prácticas matemáticas y didáctico-matemáticas de referencia realizadas por los estudiantes avanzados?*

En la red de relaciones que conforma el sistema de prácticas que se desarrolla como respuesta al primer inciso del problema detectamos:

Procesos de materialización – idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo):

- La longitud de los tramos es un objeto ostensivo que evoca el objeto no ostensivo “divisor común”.
- El gráfico de las coordenadas es un objeto ostensivo que evoca el objeto no ostensivo “proposición emergente”: un recorrido especial con los tramos iguales, también especiales.

Procesos de descomposición – reificación (dualidad elemental/unitario-sistémico):

- Las nuevas propiedades emergentes ligadas a cada recorrido, deberían ser tratadas como *un sistema*; sin embargo, es necesario utilizarlas como *objetos unitarios* cuando son aplicadas a la solución de las nuevas cuestiones que a continuación se plantean en el problema (por ejemplo, los problemas del camino con la mínima cantidad de tramos o con algún par de números). En otras palabras, se exige la aplicación de estos procesos actuando dialécticamente en los tres incisos del problema.

En la práctica matemática experta correspondiente al segundo inciso, detectamos:

Procesos de materialización – idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo):

- La *longitud mayor* de los tramos es un objeto ostensivo que evoca el objeto no ostensivo "*divisor* común *mayor*".

Finalmente, utilizando la tercera configuración epistémica (que se desplegó en la sección anterior), identificamos:

Procesos de particularización – generalización (dualidad ejemplar – tipo):

- Este problema con el tercer inciso exige transitar un proceso de generalización al actuar en forma dual *el ejemplo* como un *particular* y a su vez, como un *tipo de ejemplo* cuando se tiene que pensar sobre *cualquier otro par* de números.

Procesos de materialización – idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo):

- *La regla* que se logra obtener como válida es el *objeto ostensivo* que evoca el *no ostensivo* "divisor común mayor" cuando éste *funciona* como respuesta general al problema. Se debe materializar mediante una regla el objeto ideal que cumple con las exigencias del problema, a saber: un número que sea el mayor divisor común a ambas coordenadas del punto de llegada.

Por último, reconocimos *Procesos de representación – significación (dualidad expresión – contenido)*que se consideran "densos" en la trama de configuraciones epistémicas y procesos matemáticos que se ponen en juego en la resolución del problema, y pueden ser motivo de potenciales conflictos semióticos. Por ello ante la pregunta,

> *Qué conflictos (a priori) pueden tener los estudiantes para la realización de las prácticas matemáticas asociadas a la situación problema con sus tres consignas*

comenzamos sistematizando en la Tabla 2 los diferentes elementos lingüísticos, diferenciando para cada resolución (R.1 y R.2), objetos y significados de uso de esos objetos.

Esta descripción nos permitió prever los siguientes conflictos semióticos:

- En las prácticas del primer episodio: Reconocer la relación (diferencia y semejanzas) entre *tramos* y *recorrido*. Además de comprender que los tramos serán todos iguales requiere reconocer que su longitud es un número entero que sea divisor de 120 y 84 *conjuntamente*.
- En el segundo episodio: Reconocer que la *mínima* cantidad de tramos se obtiene considerando el divisor común más *grande* **(**relación opuesta**)**. Y entender que la relación entre *longitud* de los tramos *y cantidad* de tramos, exige saber cuántos tramos hay de acuerdo a las longitudes, para luego comparar y quedarse con la menor cantidad.

Por último, en la tercera cuestión que plantea el último inciso identificamos que interpretar (otorgar un significado) a la frase: *"algún otro par de números"* del enunciado del problema, a partir de reconocer lo que sucede con el 120 y 84, exige identificar la propiedad invariante del objeto que había funcionado como solución en el inciso anterior.

Tabla 2. Elementos lingüísticos en las resoluciones expertas R.1 y R.2

Objetos	Significados
Intervinientes:	
Tramos horizontales o verticales, todos de igual longitud.	R. 1 Divisores comunes entre 120 y 84. R. 2MCD entre 120 y 84 calculado con alguna técnica.
Tres recorridos distintos.	R. 1 Tres divisores comunes distintos. R. 2 Divisor común más grande, generando tres disposiciones diferentes de los tramos.
a|b	R.1 y R.2: ∃k∈Z: b=a.k
Camino con la mínima cantidad de tramos.	R. 1 y R. 2 Divisor común más grande.
Algún otro par de números.	R. 1 y R. 2 (a, b) con a y b enteros.
Regla obtenida.	R. 1 y R. 2 Encontrar el divisor común más grande para dos números cualesquiera.
Emergentes:	
R. 1: Gráfico con distintas longitudes de los tramos	Representación de los tres recorridos correspondientes a tres divisores comunes distintos.
R.2: Gráfico con igual longitud de tramos)	Representación de los tres recorridos que difieren por la disposición de los tramos, y cuyas longitudes son el divisor común más grande.
MCD (120, 84)=12	R. 1 De todos los divisores comunes es el más grande. R. 2 Resultado del producto de primos comunes con el menor exponente.

Es por esto que transformar la situación inicial particular a la proposición siguiente: “unir en el plano los puntos (0;0) y (a;b), a,b € Z, con la mínima cantidad de tramos horizontales y verticales, todos de igual longitud y sus extremos deben ser coordenadas enteras”, que es la que otorga la respuesta experta al problema, exige transitar no sólo por un camino de traducción de números a letras sino por un proceso de generalización basado en la reflexión de un caso particular como un ejemplo tipo. Dicho proceso necesita hacer explícita la propiedad pre-aritmética del máximo común divisor que recuperan Etchegaray, Colombo y Peparelli (2005), es decir, comprender al máximo común divisor como una relación de orden total en N, entre los divisores comunes. Incluso en las configuraciones lo denotamos como dcm, divisor común mayor, ya que esta notación representa con mayor claridad el significado del procedimiento realizado, que es el que le otorga al objeto en cuestión su significado contextual.

Una vez evaluada la idoneidad de esta situación problema para “levantar” el significado del objeto, máximo común divisor, basculando entre dos modelos diferentes, a saber, *pre-aritmético, y aritmético,* es necesario preguntarnos por el alcance de los significados personales que la misma pone al descubierto en alumnos de primer año del profesorado en matemática en la UNRC. Esto es debido al interrogante general que regula el estudio planteado, ¿qué tipo de conocimiento tienen disponibles los estudiantes del profesorado en matemática, al egresar de la escuela secundaria, en torno a saberes elementales de la divisibilidad? Cabe volver a mencionar que este trabajo particular solo intenta compartir un análisis de significados institucionales y personales correspondiente a sólo uno de los problemas seleccionados para avanzar en la investigación propuesta.

5. Continuación del recorrido de investigación: inicios de análisis de significados personales

La situación – problema presentada para su resolución a los alumnos de primer año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto, en el marco de la asignatura Matemática Discreta, con un total de 21 alumnos, generó sendas producciones personales que son las que se analizan con los estudiantes avanzados de la carrera.

Se llevaron a cabo con los citados futuros profesores, cuatro momentos de actividad didáctico-matemática tomando siempre como referencia herramientas conceptuales y metodológicas del EOS.

El primer momento constó de una identificación de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de primer año, a partir de las resoluciones efectivas realizadas a la situación problemática. Se puede entender como un primer nivel de análisis somero y descriptivo acerca de estas prácticas, en el cual se visibilizaron distintos usos y funcionamientos por parte de los alumnos ingresantes, de los elementos de significados (objetos intervinientes y emergentes) que conforman el significado situacional del MCD, objeto de indagación de esta investigación.

En un segundo momento se realizó una categorización de tales prácticas personales basándonos en una de las dualidades identificadas que atraviesa en su totalidad la situación-problema y que claramente se manifiesta como una problemática en las resoluciones efectivas, la *elemental/unitario – sistémico*, sostenida por los procesos de *descomposición y de reificación*. Esta categorización tiene el propósito de seleccionar sistemas de prácticas especiales para continuar con un análisis más profundo de las mismas y, así, desvelar cómo una herramienta de análisis didáctico sirve para desnaturalizar relaciones y hacer visibles diferencias en la actividad matemática desarrollada entre una variedad de prácticas personales

En un tercer momento se describe la "red de relaciones" que intervienen en las resoluciones elegidas de acuerdo a la categorización realizada en el momento anterior, mediante la construcción de sus respectivas *configuraciones cognitivas.*

Dada la posibilidad de extensión de este trabajo, se recurre en el siguiente sub-apartado a ejemplos concretos de este tipo de respuestas que permitieron efectuar la categorización mencionada comunicando una síntesis del análisis realizado.

El cuarto y último momento está caracterizado por contrastar el análisis epistémico llevado a cabo en las secciones 2 y 3 con el análisis cognitivo, actual. Ello, con el propósito de enriquecer o refutar las cuestiones / aspectos /hipótesis planteadas en el significado institucional esperado que se había construido con los estudiantes avanzados, a través de sus resoluciones expertas.

5.1. Segundo y tercer momento

En el análisis de las resoluciones de los estudiantes de primer año de Matemática se observó un aspecto que consideramos muy positivo: sobre un total de 21 alumnos, todos (excepto 2 estudiantes) pudieron plantear algún abordaje a los tres incisos del problema e intentar avanzar en sus resoluciones.

La categorización de las prácticas personales se sustenta en que los objetos matemáticos intervinientes y emergentes en dichas prácticas, según el juego de lenguaje generado en el contexto del problema, pueden ser considerados desde la *dualidad elemental – sistémico*, dualidad reconocida por el EOS. Teniendo en cuenta además *el proceso de descomposición – reificación* que la sostiene, y que por ende tensiona esta dualidad, se categorizaron dichos sistemas de prácticas en tres grupos. A saber: un primer grupo caracterizado por un tipo de práctica en la cual prevalece en su totalidad una perspectiva elemental, un segundo grupo en el cual prevalece desde el comienzo de la situación una perspectiva sistémica y un tercer grupo integrado por prácticas que transitan/basculan de una perspectiva a otra.

Se adjuntan en el anexo 2 ejemplos de producciones de cada grupo considerado y a continuación se realiza una síntesis del análisis llevado a cabo para cada grupo de producciones.

5.1.1. Síntesis del análisis al primer grupo

En el primer grupo, caracterizado como se anticipó por una preponderancia de su perspectiva elemental (o unitaria) sobre lo que exige desarrollar la situación, las expresiones “cantidad de tramos”, “igual longitud de los tramos”, entre otras, se ponen en juego de manera transparente; como si se tratara de entidades unitarias (o elementales) y no se observa la estrecha relación y diferencia entre ambos. El argumento que sustenta estas prácticas es del tipo inductivo, explorando con aquellos números que dividan a 120 y 84; esto está regulado por un lenguaje más cotidiano, coloquial, casi sin abreviaturas ni símbolos. En este grupo, pasar a la segunda tarea (inciso 2) la cual requiere de comparar aquellos números que encontraron comunes a 120 y 84 para establecer aquel que es mayor y por ende la cantidad de tramos del recorrido sea menor, es realizada como un ejemplo más.

En estas resoluciones predomina la exploración mediante el gráfico de sistemas de coordenadas con diferentes colores los recorridos, indagando cuáles son aquellos divisores de 120 y 84 para que los tramos tengan la misma longitud en todo el recorrido. En general, los tres recorridos se establecen cambiando el divisor, es decir la longitud de los tramos, y no tanto disponiendo de modos distintos los tramos.

En otras palabras, todas las acciones realizadas están reguladas principalmente por el proceso de *descomposición*, no logrando que se ponga a funcionar la *reificación* de los elementos trabajados, lo que impide lograr una perspectiva sistémica del objeto máximo común divisor.

5.1.2. Síntesis del análisis al segundo grupo

En el segundo grupo se puede observar que prevalece una mirada sistémica del problema desde su abordaje. En efecto, se consideran desde el inicio a los números 120 y 84 como un *sistema*, a la cantidad tramos y la longitud de los mismos como entidades compuestas que refieren a múltiplo, divisor y divisor común mayor, y que entre estos objetos matemáticos hay siempre una determinada relación. En estos sistemas de prácticas predomina la técnica de factorización de números primos de 120 y 84 para hallar el objeto que da solución al problema. Aquí la técnica utilizada les asegura que el MCD es el divisor común mayor de dos números, pero no se hace visible ninguna otra relación de este número con los divisores comunes. No hay argumentación aclaratoria de las propiedades aritméticas que posee el número 12 en este caso. Esta práctica matemática está regulada por un lenguaje más resumido y más simbólico. En este grupo, pasar del inciso primero al siguiente no requiere, en cuanto a procedimiento y argumento, de gran dificultad pues ya lo han hallado antes al número que funciona como divisor común que es el 12 y lo han identificado como el objeto que soluciona la situación en su conjunto.

Se debería analizar con los estudiantes si el argumento que sustenta el procedimiento de la técnica aporta información acerca de que ese número es o no el correcto que realiza la mínima cantidad de tramos. La técnica de factorización que utilizaron pareciera que les da la seguridad de lo que pide el problema y por ende naturalizan todo argumento para justificar su proceder.

En general, en este tipo de prácticas, los tres recorridos poseen todos los tramos de longitud 12 pero cambiando la posición de los tramos. Al prevalecer la técnica de factorización, el lenguaje gráfico deja de ser una herramienta útil para “explorar” cuál es la longitud de los tramos, sino que es sólo un medio para expresar los distintos recorridos obtenidos de combinar de diversas maneras los tramos horizontales y verticales y que además no es siempre utilizado.

En otras palabras, el proceso dialéctico de *descomposición-reificación* es puesto a funcionar desde el comienzo por estos estudiantes, más allá de que valdría profundizar sobre las prácticas argumentativas respecto al uso dado a cada técnica y/o a cada definición utilizada, lo que permitiría hacer más visible el significado personal otorgado al objeto que se problematiza con esta situación-problema.

5.1.3. Síntesis del análisis al tercer grupo

Por último, se logró identificar un grupo formado por aquellas prácticas que no se ubican plenamente ni en una perspectiva esencialmente elemental (o unitaria) ni en la sistémica, sino que hay una cierta composición de ambas, o más bien transitan de una perspectiva a la otra.

Esto es así pues el abordaje del problema (inciso a) se caracteriza por la aplicación de una clara *perspectiva elemental* de la situación y es recién en el segundo inciso que logran reconocer las propiedades que regulan al objeto específico (el dcm) para resolverla y lograr así mediante un proceso de *reificación* identificar la relación conjunta que exige comprender que es el divisor común mayor, el objeto aritmético que da solución a la situación. El tercer inciso que requiere por parte de los estudiantes que resuelven un doble proceso de generalización pueden realizarlo mediante la argumentación referida a la generalización del objeto interviniente. No logran explicitar cómo obtendrían ese divisor común necesario, o sea la generalización del objeto emergente.

6. Primeras conclusiones sobre el problema de investigación planteado

Este análisis sobre significados personales realizado a prácticas matemáticas personales en torno a este problema de divisibilidad, que fuera resuelto sin ninguna intervención docente, nos permiten hacer visible ciertos "puntos clave" para una posterior gestión docente que intente hacer reflexionar sobre el alcance y limitaciones del significado aritmético del MCD en la primera asignatura de la carrera del profesorado. Indudablemente el inciso 2 de esta situación problema elegida para analizar, es el que funciona como "punto de inflexión" para que emerja el necesario *doble proceso de generalización* que exige la construcción de la regla general que solicita esta situación y que conforma el alcance del *significado aritmético* del MCD (Etchegaray, Colombo, Peparelli, 2005).

Justamente la última categorización expuesta (la compuesta: entre lo elemental y lo sistémico) podría ser considerada como el material de discusión colectiva en una clase posterior de Matemática Discreta[4]. En efecto, explicitar la red de relaciones que le permitieron a este/esos/ alumno/s alternar entre una mirada elemental o unitaria y una perspectiva sistémica puede ayudar a evolucionar, tanto la exclusiva perspectiva elemental que no había permitido generalizar ambos objetos (ni el interviniente, ni el emergente), como hacer explícita las propiedades aritméticas que caracterizan el objeto emergente en las prácticas reguladas por una total perspectiva sistémica, las que se naturalizaron totalmente, tal como se puede observar en las segundas producciones que se anexan. En otras palabras, hacer avanzar al conjunto de la clase desde sus propias producciones, con una gestión sostenida esencialmente por la intencionalidad docente que se visibiliza en el análisis de las resoluciones esperadas (sección 3).

7. Reflexiones finales

El análisis de las tres tareas (los tres incisos de la situación-problema) sobre las que se organizaron las correspondientes configuraciones epistémicas y cognitivas, a nivel de prácticas operativas y discursivas y de procesos duales relativos al contexto institucional seleccionado, tal como lo exponen Godino, Font y Wihelmi (2008), es un paso previo necesario para la elaboración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes. El modelo epistémico y cognitivo que caracteriza al "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático y que intenta ponerse a funcionar en dos niveles, en este trabajo, proporciona herramientas de análisis que permiten planificar clases e instrumentos de evaluación con *validez ecológica*, esto es, adaptadas al contexto, a los conocimientos disponibles de los estudiantes y a las intencionalidades docentes.

Por último, consideramos importante introducir en la formación inicial de profesores espacios que creen las condiciones necesarias para la construcción, por parte de los estudiantes avanzados, de significados institucionales que, funcionando como marcos referenciales, permitan otorgar sentido a herramientas conceptuales tales como las configuraciones ontosemióticas y los análisis de procesos. Estas herramientas con muy útiles para mejorar su práctica profesional y la cual no es homologable a ninguna técnica para

[4] Asignatura que, como ya se anticipara, es en la que se implementó este estudio y que corresponde al primer año del profesorado en Matemática de la UNRC.

enseñar. Tales prácticas formativas conjugan y relacionan dialécticamente conocimiento matemático y conocimiento didáctico, en su faceta epistémica.

Referencias

Becker, M. E., Pietrocola, N. y Sanchez, C., (2001) *Aritmética*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Brousseau,G. (1998).*La theorie des situations didactiques*. Grenoble: La PenséeSauvage.

Etchegaray, S., Colombo, S. y Peparelli, S. (2005). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de máximo común divisor.En A. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.), *Actas delPrimer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*(pp. 345-356). Universidad de Jaén.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2), 89-105.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education.ZDM.*The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135

Godino, J. D. y Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile).Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf

Godino, J. D. y Font, V. (2007a). Algunos desarrollos de la teoría de los significadossistémicos. Disponible en,http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. y Font, V. (2007b). Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008) Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-49.

Anexo 1: Resoluciones esperadas

Resolución experta R.1

Inciso a) *Buscar los divisores comunes entre 120 y 84* para asegurarnos que los tramos sean de igual longitud. Con cada divisor común hallar la cantidad de tramos verticales y horizontales para unir los puntos (0; 0) y (120; 84) con un recorrido.

Inciso b) *Elegir el divisor común más grande entre 120 y 84* para encontrar el camino con la mínima cantidad de tramos, porque al considerar el divisor común más grande la longitud del tramo es la mayor posible y por lo tanto se forma el recorrido con la menor cantidad posible.

Inciso c) *Buscar los divisores comunes entre a y b y elegir el más grande*, que lo llamaremos c, análogamente a lo realizado antes.

Resolución experta R.2

Inciso a*) Calcular el MCD entre 120 y 84 con alguna técnica* (factorización en primos, división entera, u otra) y construir los tres recorridos solicitados con la misma longitud de los tramos, pero disponiéndolos distintos.

Inciso b) *Si, cualquiera de las del inciso a)*

Inciso c) *Generalizar la técnica de cálculo de MCD* que llamaremos *c* y que haya sido usada en el inciso a**)** *para cualquier par de números a y b.*

Anexo 2

1) Respuestas del inciso c)correspondientes al grupo 1 (perspectiva elemental)

c) Si es Valila para Otro Par de Números : ej: (20 ; 30)

20	2	30	2
10	2	15	3
5	5	5	5
1		1	

M.C.M = 20.

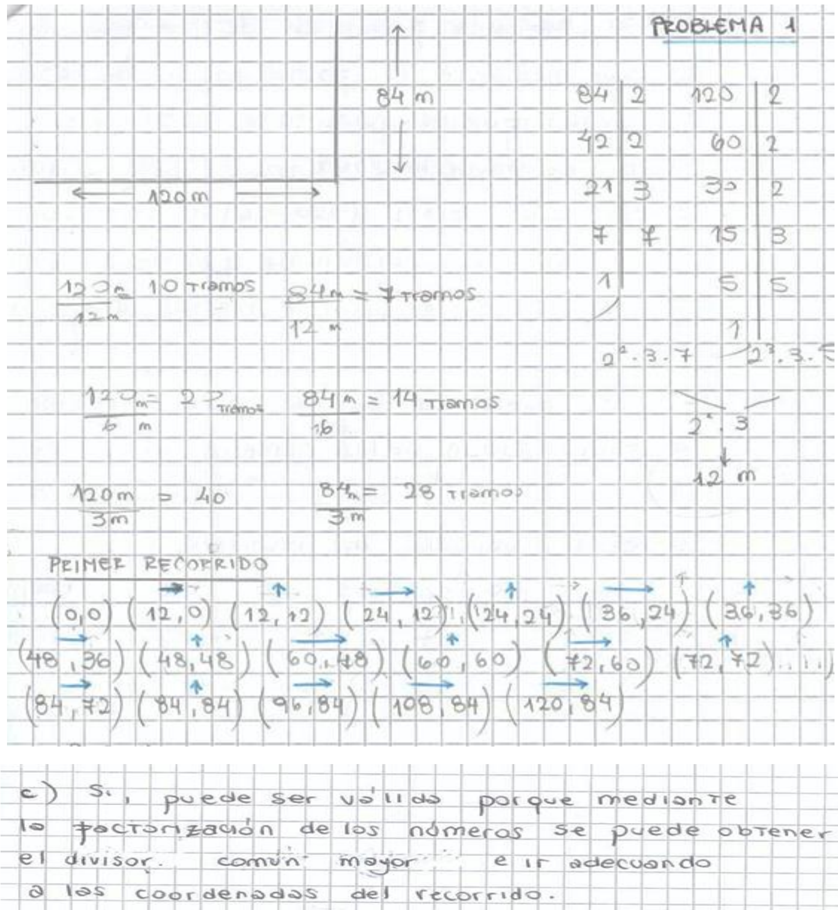
$2^2 . 5$ $\quad$ $2 . 3 . 5$

$2^2 . 5 . = 20$

c) _ Serviría si los n° son multiplos de 120 y 84.

c) Si los números de los pares, o sea de los puntos por donde pasa el camino, son divibles por 12, entonces vale para cualquier otro par de números.

2) Respuesta a toda la situación-problema correspondiente al grupo 2 (perspectiva sistémica)



3) Respuesta correspondiente al grupo 3 (perspectiva que bascula entre lo elemental y lo sistémico)