Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática

An initial study on binomial probability knowledge in mathematics teachers

Noemí Cid Chandía, Lidia Retamal Pérez y Hugo Alvarado Martínez

Universidad Católica de la Santísima Concepción

Resumen

En este trabajo se estudia el conocimiento acerca del modelo de probabilidad binomial que tienen 46 profesores en ejercicio y en formación matemática. Se analizan tres ítems de un cuestionario previa instrucción sobre la distribución binomial. Ambos grupos de profesores aplican el modelo binomial. Sin embargo, presentan dificultades en identificar la variable aleatoria binomial, no consideran el número de ensayos Bernoulli y manifiestan dificultades en la aplicación de la esperanza matemática.

Palabras clave: Distribución binomial, razonamiento probabilístico, formación de profesores.

Abstract

This paper studies the knowledge about binomial probability model with 46 teachers in math training exercise. We analyze three items of a previous questionnaire instruction on the binomial distribution to teachers. Both groups of teachers apply the binomial model. However, they present difficulties in the identifying of the binomial random variable, do not consider the number of Bernoulli trials and show difficulties in the application of mathematical hope.

Keywords: Binomial distribution, probabilistic reasoning, teacher training.

1. Introducción

El currículo de Chile actualizó su plan de formación en Matemática, desplazando algunos contenidos a la educación básica y ampliando nuevos conceptos con mayor profundización en la educación media. En el eje Datos y Azar del currículo de Chile las situaciones de modelo binomial se ubica en el nivel de tercer año medio (16 años) y la aproximación normal a distribución binomial en cuarto año medio (17 años). Su comprensión requiere la apropiación de conceptos previos como factorial de un número, combinación, población, parámetro, experimento Bernoulli, muestra, variable aleatoria, esperanza matemática, función de probabilidad, entre otros.

Actualmente, la distribución binomial forma parte del currículo de estadística de la educación media debido a la riqueza del sistema de conceptos relacionados, las múltiples situaciones de tipo binomial presente en la vida cotidiana y su modelación en aplicaciones de la ciencias básicas y ciencias de la ingeniería. Es un tópico de la estadística que presenta dificultades de comprensión para los estudiantes de secundaria y bachillerato (García, Medina y Sánchez, 2014; Landín y Sánchez, 2010), profesores en formación (Mayén, Salazar y Sánchez 2013) y estudiantes universitarios (Alvarado y Batanero, 2007; Alvarado y Retamal, 2010). Landín y Sánchez (2010) proponen una jerarquía de razonamiento de la probabilidad para evaluar las respuestas de estudiantes de bachillerato a tareas de

Cid, N., Retamal, L. y Alvarado, H. (2017). Un estudio inicial sobre conocimientos de probabilidad binomial en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

distribución binomial. Sánchez y Landín (2011) estudiaron la fiabilidad de esta jerarquía proporcionando una forma de evaluar el razonamiento probabilístico a través de la clasificación de respuestas a distintas tareas de la distribución binomial. Con el fin de indagar en profesores de matemática y en formación, sobre el pensamiento en ambientes de incertidumbre, se analizan tres ítems de un cuestionario con preguntas cuya solución considera elementos de la distribución binomial.

2. Fundamentación

2.1. Marco Teórico

A partir de la situación problema concebimos que el objeto matemático, en nuestro estudio la distribución binomial, emerge del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1998). Además, diferencian entre el conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas y el objeto matemático que evoluciona como consecuencia de tales prácticas. Godino, Font y Wilhelmi (2008) sugieren en primer lugar analizar el objeto matemático para explicitar el conocimiento especializado del contenido, seguido de un análisis de los procesos matemáticos y determinar los conflictos semióticos puesto en juego. De esta manera, la principal finalidad de la enseñanza sería el acoplamiento progresivo de los significados personales e institucionales. Dentro de los campos de problemas analizados en los ítems del cuestionario presentamos los conflictos semióticos en el conocimiento y uso de la distribución binomial, y la determinación de la esperanza matemática de este modelo.

2.2. La distribución binomial en el currículo escolar

El Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2012), con motivo de proporcionar orientaciones a las Facultades y Escuelas de Educación sobre los contenidos disciplinarios y pedagógicos que debe saber todo profesor o profesora para ser competente en el ejercicio de su profesión, impulsó la elaboración de un conjunto de estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. En el eje de Datos y Azar se han definido cinco estándares para los seis niveles escolares (12 a 17 años), uno de ellos contempla que el profesor debe tener la capacidad de conducir con éxito el aprendizaje de las variables aleatorias discretas de los estudiantes de enseñanza media. En el tópico del modelo de probabilidad binomial los desafíos no son menores en cuanto a la implementación y apropiación de conceptos relacionados con el tema. El futuro profesor(a) debiera dar cuenta de los estándares y mostrarlo cuando:

- Calcula esperanza, varianza y desviación estándar de variables aleatorias discretas.
- Elabora y analiza problemas para la enseñanza de la distribución binomial.
- Conoce elementos del desarrollo histórico del teorema central del límite.
- Conoce dificultades que tienen los estudiantes con conceptos de variables aleatorias y de aproximación para muestras grandes.
- Planifica actividades en base a problemas que permitan explicar e ilustrar la convergencia de la distribución de probabilidad binomial a la distribución de probabilidad normal.

- Es capaz de conducir actividades para que los estudiantes comprendan la aproximación de la distribución binomial por una distribución normal.

2.3. Razonamiento probabilístico

Landín y Sánchez (2010) señalan que una persona que sabe razonar probabilísticamente reconoce situaciones de azar y es capaz de modelarlas, cuida que sus creencias y concepciones no estén en contradicción con el razonamiento, puede determinar la probabilidad de eventos, construye e interpreta distribuciones de probabilidad y las utiliza para hacer inferencias. Los autores presentan componentes de razonamiento de la distribución binomial en cuanto a:

Construcción: Reconocimiento de las situaciones Bernoulli - representación de las secuencias de éxito y fracasos - reconocimiento de la variable aleatoria - reconocimiento de la combinatoria y conteo de combinaciones - uso de la definición clásica de la probabilidad - conocimiento y regla del producto - relación entre las combinaciones y la probabilidad de las secuencias de éxito y fracaso.

Desarrollo y aplicación: Reconocimiento de las situaciones binomiales y conocimiento y uso de $bin(n,p)$ - cálculo y uso de la media y desviación estándar de la distribución binomial, asimilación y uso del lenguaje asociado de la distribución binomial - conocimiento y manejo de propiedades de la distribución binomial - reconocimiento de los patrones de variación binomial - utilización de la distribución binomial en inferencias estadísticas - ubicación de la distribución binomial en relación con otras distribuciones.

Mayén, Salazar y Sánchez (2013) realizaron un estudio con 77 estudiantes pertenecientes a tres grupos; un grupo de alumnos sin curso previo de probabilidad, otro grupo de bachillerato y el tercero de profesores de secundaria en formación inicial. A estos grupos se les aplicó un cuestionario de 10 problemas de probabilidad, dos de ellos son de aplicación de la distribución binomial. Mediante los niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO, los resultados mostraron mayor deficiencias en estudiantes que no tienen estudios de probabilidad, en el segundo grupo hay respuestas uniestructurales y el tercer grupo los resultados mejoraron. De igual forma García, Medina y Sánchez (2014) en su estudio con estudiantes de secundaria y de bachillerato encontraron en las respuestas a problemas de tipo binomial dificultades en la descripción de la variable aleatoria y el espacio muestral. Consideramos que los estudios deben tener presente el trabajo inicial con los diagramas de árbol y la modelización a través de situaciones de urnas y la simulación computacional. Por otro lado, encontramos estudios empíricos con estudiantes de secundaria y formación de profesores (Chalikias, 2009; García, Medina y Sánchez, 2014; Maxara y Biehler, 2010; Landín y Sánchez, 2010; Van Dooren et al, 2003) y estudiantes universitarios (Alvarado y Retamal, 2010). La enseñanza y aprendizaje de la distribución binomial ha sido poco estudiada en Chile.

3. Metodología

3.1. Participantes

En este estudio participaron 46 profesores diferenciados en dos grupos; 21 profesores de matemática en ejercicio de distintos colegios de la octava región de Chile (G1) y 25 profesores en formación (G2) que cursan segundo año de la carrera de pedagogía en educación media en matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Ambos grupos recibieron una instrucción previa sobre el tema con ejercicios propuestos de construcción y aplicación del modelo binomial. El grupo de profesores G1 trabajó en dos sesiones de 4 horas con apoyo informático y se aplicó el cuestionario en el laboratorio de computación. El grupo de estudiantes G2 fueron tres sesiones de 3 horas en aula y 1 en el laboratorio de computación y contestaron el cuestionario en aula con apoyo de la calculadora.

3.2. Instrumento

Se diseñó un cuestionario de construcción y aplicación de la distribución binomial, y para este trabajo presentamos tres ítems propiciando aspectos de reconocimiento de la variable aleatoria de esta distribución, la variación de sus parámetros, el cálculo de probabilidad binomial y la aplicación de la esperanza matemática. A continuación, se enuncian las situaciones-problemas y se describen sus soluciones.

> **Ítem 1.** En una empresa de seguro de vida la probabilidad de que reclame un cliente es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?
>
> a. **Que entre los próximos 15 clientes seleccionados 10 o más reclamen a la empresa.**
> b. Que entre los próximos 150 clientes seleccionados 100 o más reclamen a la empresa.
> c. Los dos casos anteriores son igual de probables.

Se espera que el estudiante reconozca que la situación puede ser modelada por la distribución binomial identificando sus parámetros, es decir, defina la variable aleatoria X como el número de clientes que reclama en una empresa, asociada a una distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0{,}5$. En el caso (a) la probabilidad de que 10 o más clientes reclamen en la empresa es 0,1509 obtenida con la calculadora o el programa Geogebra. Para el caso (b) considerando los parámetros $n = 150$ y $p = 0{,}5$, la probabilidad de que 100 o más clientes reclamen en la empresa es aproximadamente 0. Por lo tanto, la respuesta correcta es la alternativa (a), pues tiene mayor probabilidad de ocurrir. Cabe destacar, que este ítem corresponde a una variante del problema de Kahneman, Slovic y Tversly (1982) sobre heurística de la representatividad, en contexto financiero, y donde el profesor en formación o ejercicio debe justificar su elección. La opción c) pone a prueba si el profesor tiene en cuenta el tamaño de la muestra (o número de ensayos Bernoulli) en el cálculo de la probabilidad binomial, y su elección pone un sesgo de representatividad. De igual manera la opción b) conlleva a pensar siempre que mayores muestras tomadas implican mayor chance de ocurrencia en el cálculo de probabilidades, tienen más variabilidad y fue encontrada en las investigaciones de (Serrano, 1996; Alvarado y Batanero, 2007). Es así, que la respuesta correcta es la alternativa a) que considera más probable el caso de muestra más pequeña, en este caso para n=10 ensayos Bernoulli. Para hallar la solución se procede mediante el cálculo de la probabilidad binomial.

> **Ítem 2.** Una variable aleatoria X tiene distribución binomial con los siguientes parámetros, n = 6 y p = 0,5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?
>
> **I. La probabilidad que hayan exactamente 4 éxitos es igual a la probabilidad que hayan 2 fracasos**.

II. La mayor probabilidad ocurre si hay exactamente 4 éxitos.
III. La probabilidad que hayan exactamente 5 éxitos es igual a la probabilidad que hayan 1 éxito.

Se considera que los participantes indiquen los casos I y III como correctos usando el cálculo de probabilidades y la esperanza matemática de la distribución binomial. Para el caso I deben definir la variable aleatoria X con distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0{,}5$. Luego, la probabilidad de obtener 4 éxitos y por tanto dos fracasos es $P(X = 4) = 0{,}2344$. De igual forma para el caso III deben considerar la variable aleatoria X con distribución binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0{,}5$ siendo iguales las probabilidades $P(X = 5) = P(X = 1) = 0{,}0938$. Sin embargo, el caso II es incorrecto ya que la mayor probabilidad ocurre en la esperanza matemática $E(X) = 6\times 0{,}5 = 3$.

Otra solución posible, sin realizar el cálculo de probabilidades del modelo, es mediante el triángulo de Pascal; comparando los coeficientes binomiales $\binom{6}{x}$ en la fila 6 y donde es constante el término $\left(\frac{1}{2}\right)^6$:1, 6 , 15, 20, 15, 6, 1. La probabilidad de obtener 1 éxito tiene por coeficiente binomial 6 que es el mismo para la probabilidad de 5 éxitos (caso III). Además, la probabilidad más alta está en 3 éxitos cuyo coeficiente binomial es 20 (caso II).

Ítem 3. En el experimento del lanzamiento de una moneda n veces, a cuál de las 3 situaciones apostaría tu iphone 6S:

a. Para $n = 10$ Obtener entre 2 y 3 caras
b. Para $n = 300$ Obtener entre 155 y 165 caras
c. **Para $n = 2500$ Obtener entre 1200 y 1300 caras**

Esta situación sugiere definir la variable aleatoria X como el número de veces que se lanza una moneda y aparece cara, que puede ser modelada por una distribución binomial de parámetros n y $p = ½$. La solución de obtener la mayor probabilidad por rango de valores para distintos números de ensayos Bernoulli consiste en determinar si la esperanza matemática de la variable binomial está contenida en la probabilidad pedida del rango de valores. Para el caso (a) la mayor probabilidad ocurre en $E(X) = 10 \times 0{,}5 = 5$, en el caso (b) corresponde a $150 = E(X) = 300 \times 0{,}5$, y para el caso (c) ocurre en $E(X) = 2500 \times 0{,}5 = 1250$. Po lo tanto, la respuesta correcta es la (c) con la mayor probabilidad debido a que 1250 caras está dentro del intervalo 1200 y 1300 caras. Al realizar el cálculo de la probabilidad en los tres casos se obtienen los valores 0,1611, 0,265 y 0,9566 respectivamente.

4. Resultados

Se presentan los resultados del análisis de las respuestas del cuestionario compuesto de tres ítems sobre la distribución binomial, para ambos grupos de participantes, por medio de tablas de frecuencias de aciertos y errores.

El ítem 1 propicia identificar la variable aleatoria con distribución binomial de parámetros $bin(n=15, p=0{,}5)$ y $bin(n=150, p=0{,}5)$ respectivamente y comparar los valores del cálculo de la probabilidad binomial. La Tabla 1 muestra que sólo un 14,2% de los profesores y un 16% de los estudiantes contestó correctamente considerando más probable el caso de muestra más pequeña como la de n=15 de la distribución binomial. Los profesores utilizaron el programa Geogebra para calcular ambas probabilidades y mostraron que eran distintas y en el caso de los estudiantes usaron la calculadora.

Tabla 1. Respuestas de profesores y profesores en formación respecto al ítem 1

	Profesores n=21		Estudiantes n=25	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a. Que entre los próximos 15 clientes seleccionados 10 o más reclamen a la empresa	3	14,2	4	16,0
b. Que entre los próximos 150 clientes seleccionados 100 o más reclamen a la empresa	6	28,5	1	4,0
c. Los dos casos anteriores son igual de probables	12	57,1	20	80,0

Los errores registrados indican que un 28,5% de los docentes y un 4% de los estudiantes atribuyen mayor probabilidad al evento reclamos de clientes (ensayos Bernoulli) asociada a un mayor número de clientes; resultados similares a los encontrados por Alvarado y Batanero (2007) con estudiantes universitarios y Serrano (1996) en su investigación con futuros profesores. También, se observa que un 80% de los estudiantes, no evidenció la diferencia del número de ensayos o clientes en el cálculo de la probabilidad binomial, lo que se puede justificar por la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversly, 1982). En el caso de los profesores fue menor, con un 57,1% y se puede justificar debido a que comprobaron los cálculos de probabilidad con el programa computacional. Los estudiantes tuvieron dificultad con obtener la probabilidad binomial cuando n=150 y por ende asumieron que eran iguales ambas probabilidades. Otros justificaron "son igual de probables, pues el número de clientes de a) es proporcional al número de clientes de b)".

En este ítem las justificaciones fueron diferentes en las tres opciones, describiendo cuatro conflictos semióticos encontrados:

a. A mayor número de ensayos Bernoulli disminuye la probabilidad de ocurrencia de reclamos de clientes (justificación correcta con Geogebra). Algunos profesores calcularon la probabilidad binomial para los dos valores de n mediante el dispositivo computacional. En términos de las componentes de razonamiento de aplicación de la distribución binomial (Landín y Sánchez, 2010) esto supone reconocer la situación de reclamos de clientes como éxitos de ensayos Bernoulli y definir la variable aleatoria con distribución binomial. También, se requiere el conocimiento y uso del modelo $bin(n,p)$ en este contexto.

b. A mayor número de ensayos Bernoulli disminuye la probabilidad de ocurrencia de reclamos de clientes (justificación algebraica correcta). Varios profesores en formación calcularon la probabilidad binomial para n=15 con calculadora. No obstante, para el cálculo de probabilidad de n=150 identificaron el modelo binomial pero quedaron sin el desarrollo del cálculo debido a la limitación para valores grandes de la calculadora. Frente a este los estudiantes optaron por la opción a). De acuerdo a las componentes de razonamiento del modelo los estudiantes identifican la variable aleatoria con distribución binomial y calculan con acierto la probabilidad binomial en valores pequeños.

c. A mayor número de ensayos Bernoulli mayor probabilidad de ocurrencia (justificación verbal incorrecta). Algunos profesores optaron por la opción b) pensando que debido a la convergencia en probabilidad, al crecer el número de ensayos Bernoulli aumentarán las posibilidades de éxito.

d. Heurística de representatividad: No se tiene en cuenta el número de ensayos Bernoulli (justificación verbal incorrecta). Los profesores presentaron insensibilidad al número de clientes, considerando que en los dos casos n=15 y n=150 el porcentaje de reclamos de clientes a la empresa es el mismo. Según las componentes de razonamiento los profesores no reconocen una situación binomial y por consiguiente la modelación y aplicación de la binomial en contexto financiero. Responden el inciso c) al considerar iguales las razones 10 es a 15 como 100 es a 150 para este problema.

Tabla 2. Respuestas de profesores y profesores en formación respecto al ítem 2

		Profesores n=21		Estudiantes n=25	
		Frecuencia	%	Frecuencia	%
a.	Solo I	2	9,5	0	0
b.	Solo I y II	0	0	1	4,0
c.	**Solo I y III**	12	57,1	21	84,0
d.	I,II y III	7	33,3	3	12,0

El ítem 2, evalúa el desarrollo y aplicación del modelo binomial. Se muestra en el caso de los docentes que un 57,1% calculan correctamente la probabilidad binomial para el valor del recorrido en 4 éxitos y es lo mismo que tener 2 fracasos en 6 ensayos Bernoulli. De igual forma desarrollaron el cálculo de probabilidades comprobando que son iguales para 1 éxito y 5 éxitos. A su vez, un 33,3% se equivoca al señalar que la probabilidad más alta del recorrido de esta distribución se alcanza para 4 éxitos, cuando lo correcto es en 3 éxitos que es el valor de la esperanza matemática del modelo *bin*(6, 0,5). Respecto de los estudiantes, un 84% realizaron bien los cálculos de probabilidades comprobando como verdaderas las afirmaciones I y III. Fueron menores los errores cometidos por los estudiantes usando la calculadora en comparación con los profesores que utilizaron Geogebra; denotando sólo un 12% de los estudiantes que consideraron el máximo valor de probabilidad para 4 éxitos; que lo cierto se alcanza en el valor esperado del modelo *bin*(6, 0,5), conflicto semiótico que fue presentado también por los profesores en ejercicio.

Tabla 3. Respuestas de profesores y profesores en formación respecto al ítem 3

		Profesores n=21		Estudiantes n=25	
		Frecuencia	%	Frecuencia	%
e.	n =10 obtener entre 2 y 3 caras	1	4,8	10	40,0
a.	n =300 obtener entre 155 y 165 caras	4	19,0	6	24,0
b.	***n*=2500 obtener entre 1200 y 1300 caras**	16	76,2	9	36,0

El ítem 3 propicia la aplicación de la esperanza matemática de una variable aleatoria con distribución binomial. En la Tabla 3 se observa que el 76,2% de los profesores estiman que la probabilidad más alta se obtiene para muestras más grande, para ello calcularon las probabilidades binomiales en los tres casos. En contraste con los estudiantes que sólo alcanzaron un 36% de aciertos argumentando mediante la comparación en el cálculo de la esperanza matemática de la variable aleatoria de distribución binomial variando el número de ensayos. Al parecer el uso del programa computacional de los profesores ha permitido obtener las probabilidades binomiales para diferentes valores del parámetro *n*; en cambio, fue una limitación el uso de calculadora de los estudiantes para valores grandes de ensayos repetidos. Un 19% de los docentes no justificó o no utilizó bien la definición de probabilidad binomial, y en el caso de los estudiantes aplicaron equivocadamente la regla de Laplace o bien calcularon frecuencias relativas. Un 4,8% de los profesores estima que mientras el tamaño de la muestra es pequeña la probabilidad es mayor, en el caso de los estudiantes alcanzó un 40%. Las respuestas declaradas por los profesores que conducen a conflictos semióticos sobre percepción de experimentos binomiales, al no tener presente los distintos valores para el número de ensayos Bernoulli, se sitúan en las siguientes categorías:

a. A mayor número de ensayos Bernoulli mayor es la probabilidad de ocurrencia de éxitos sin tener en cuenta el recorrido de valores de la probabilidad binomial.
b. A mayor cantidad de éxitos mayor es su probabilidad de ocurrencia sin considerar el recorrido de valores de la probabilidad binomial.
c. A menor probabilidad de ocurrencia de éxitos menor es el riesgo de perder y por tanto aumenta la probabilidad de ganar.

A continuación, se presenta una síntesis de las respuestas correctas de los ítems del grupo de profesores según niveles de razonamiento (Landín y Sánchez, 2010) y errores presentes en las componentes de razonamiento de la distribución binomial.

Tabla 4. Componentes de razonamiento de la distribución binomial

Problema	% aciertos profesores	% aciertos estudiantes	Niveles de razonamiento	Errores descritos en las componentes de razonamiento del modelo binomial
Ítem 1	14	16	Desarrollo y aplicación	Reconocer situaciones binomiales Reconocer variación de parámetros binomial
Ítem 2	57	84	Desarrollo y Aplicación	Conocimiento y uso de la función de probabilidad binomial Cálculo y uso de la esperanza
Ítem 3	76	36	Desarrollo y Aplicación	Conocimiento y uso de la binomial Reconocer variación de parámetros Cálculo y uso de la esperanza

5. Conclusiones

En este trabajo se ha evaluado situaciones donde emerge la distribución binomial a una muestra de profesores por medio de un cuestionario compuesto de tres problemas cuya solución es modelada por esta distribución de probabilidad, desarrollada y aplicada en contextos. Los resultados indican, tanto en profesores en formación y ejercicio, que hay dificultades en la construcción y aplicación del modelo binomial.

Hacemos notar debilidades en la construcción y desarrollo del modelo binomial; un grupo de profesores, no consideran el número de ensayos Bernoulli (ítem 1), no reconocen tanto las situaciones binomiales como la variación de sus parámetros (ítem 2), y no utilizan adecuadamente la esperanza de una variable aleatoria binomial (ítem 3). Consideramos que el trabajo de construcción, desarrollo y aplicación de la distribución binomial es un proceso de modelización, donde el estudio de la sensibilidad de los parámetros mediante las formas tabular, simbólica-algebraica y gráfica favorece el razonamiento probabilístico. Llama la atención que los futuros profesores responden mejor a situaciones algebraicas. El uso de dispositivos computacionales de los profesores de matemática, si bien es un recurso de exploración y comunicación ampliando las representaciones de la distribución binomial, no son suficientes para mejorar las dificultades de aplicar adecuadamente la combinatoria, la esperanza matemática y considerar el número de ensayos en situaciones de experimentos binomiales.

Debemos poner énfasis y reforzar, de acuerdo a los estándares de formación de profesores de matemática, la capacidad de conducir con éxito el aprendizaje en la identificación de elementos la variable aleatoria binomial, considerar la cantidad de ensayos Bernoulli (ítem 1), y el cálculo de la esperanza matemática (ítems 3). Esto se condice con las orientaciones curriculares de estadística en cuanto a desarrollar contenidos relacionados con este modelo haciendo uso de herramientas tecnológicas para la interpretación gráfica de representaciones de variables binomiales.

Si bien, la investigación es escasa en Chile sobre las dificultades de comprensión de la distribución binomial, en esta investigación se ha realizado un primer diagnóstico con profesores de matemática de la octava región. Es de esperar ampliar la muestra de profesores así como validar el cuestionario con nuevas situaciones de construcción, desarrollo y aplicación del modelo de probabilidad binomial, y por cierto dedicar más tiempo a la instrucción de probabilidad.

Determinar las dificultades de comprensión de este objeto matemático y junto a un análisis de contenido en libros de texto nos permitirá avanzar en una propuesta alternativa de enseñanza de la distribución binomial; que de acuerdo a Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) corresponde a la idoneidad epistémica y cognitiva, componentes que deben desarrollarse en la formación didáctica del conocimiento del profesor de matemáticas.

Referencias

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial. *Números*, 67. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/67/ideas_01.php

Alvarado, H. y Retamal, L. (2010). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma, XXXI* (2), 89-108.

Chalikias, M. (2009). The binomial distribution in shooting. *Teaching Statistics, 31*(3), 87-89.

García, J. I., Medina, M. y Sánchez. E. (2014). Niveles de razonamiento de estudiantes de secundaria y Bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6,* 5-23.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through proyect work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A Rossman (Eds.), Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Monterrey, Mexico:

International Commission on Mathematical Instriction and International Association for Statistical Education. Disponible en, http://iase-web.org/documents/papers/rt2008/T3P1_Godino.pdf

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*, 25-48.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educacao Matemática Pesquisa*, *12*(3), 598-618.

Mayén, S., Salazar, A. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 409-416. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Maxara, C. y Biehler, R. (2010). Students´ understanding and reasoning about sample size and the law of large numbers after a computer-intensive introductory course on stochastics. En C. Reading (Ed.), *Proceeding of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* Ljubljana, Slovenia: Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. Disponible en http://iase-web.org/documents/papers/icots8/ICOTS8_3C2_MAXARA.pdf

MINEDUC (2012). Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. Ministerio de Educación de Chile. Disponible en http://portales.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Sánchez, E. y Landín, P. R. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. *Investigación en Educación Matemática XV*, 533-542. ISBN 978-84-694-5590-6.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 113-138.