Función logística

Francisco A. Ocaña Lara
Departamento de Estadística e Investigación Operativa,
Universidad de Granada

23 de marzo de 2009

Introducción

La clase de funciones logísticas es utilizada para modelar la evolución del crecimiento de poblaciones, del tamaño de tumores, etc. En definitiva, el *tamaño* de cualquier entidad, y, cuyo aumento está sujeto a limitaciones de diversa índole (alimentos, espacio físico, etc.).

En esta sección presentaremos y deduciremos las formas que puede adoptar la función logística. Asimismo, haciendo uso de una hoja de cálculo visualizaremos algunos aspectos interesantes de dicha función. Cálculos y representaciones gráficas realizadas con la función logística se encuentran disponibles en el fichero `logistica.xls`.

1. Planteamiento

Desde un punto de vista matemático, una función logística $y = y(t)$ viene dada por la *Ecuación de Verhulst*, descrita por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\,y\left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad \forall\, t. \tag{1}$$

En la práctica, la magnitud t suele ser el tiempo, por lo que suele afirmarse que la *Ecuación de Verhulst* describe la evolución de y, donde

- r es un factor de proporcionalidad, que se denomina *tasa de crecimiento*, y

- $K \in \mathbb{R}^+$ es el tamaño límite de la población.

Resolviendo la ecuación diferencial que define a la función logística, se obtiene su forma general (solución general) dada por

$$y(t) \;=\; \frac{K\, e^{C}\, e^{r\,t}}{K + e^{C} e^{r\,t}}\,, \qquad \forall\, t\,, \tag{2}$$

para cualquier $C \in \mathbb{R}$. Sin embargo, podemos encontrarnos la función logística re–escrita de otras formas, tal y como veremos en párrafos siguientes.

Considerando el valor o tamaño inicial en $t = 0$, $y_0 = y(0)$, podemos re–escribir la Ecuación (2) mediante

$$y(t) \;=\; \frac{y_0\, K\, e^{r\,t}}{K + y_0 (e^{r\,t} - 1)}\,, \qquad \forall\, t\,, \tag{3}$$

donde no es necesario exigir ninguna condición especial al valor y_0, respecto a K ó r.

En el caso de proceder a realizar su ajuste con datos experimentales, se razona como sigue. En principio, la Ecuación (2) puede ser re–escrita mediante

$$y(t) \;=\; \frac{K}{1 + \alpha e^{-rt}}\,, \qquad \forall\, t\,, \tag{4}$$

donde $\alpha = K e^{-C}$. Sin embargo, el ajuste a datos experimentales de esta expresión, utilizando el método de linealización, obligaría a estimar tres parámetros (K, α y r). Para simplificar el problema, es habitual considerar el ajuste de otra función, a saber, la dada por

$$z(t) \;=\; \frac{y(t)}{K} \;=\; \frac{1}{1 + \alpha e^{-rt}}\,, \qquad \forall\, t\,,$$

que cuantificaría algo así como la proporción del tamaño de la población, del tumor etc.

Finalmente, haciendo uso de la Ecuación (4), es fácil deducir el comportamiento asintótico de $y(t)$. En el caso de que $r > 0$, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} y(t) &= K \\ \lim_{t \to -\infty} y(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Si, por el contrario, $r < 0$, se tendría un comportamiento similar al anterior, pero intercambiando los valores límites.

2. Cálculos con hoja de cálculo

A continuación vamos a construir la gráfica de dos funciones logísticas.

1. Construimos una columna que contenga los valores de t donde evaluaremos, más adelante, la función. En concreto, calculamos los valores (nodos) de abcisas dados por

$$t_i = -10 + i * 0.2\,, \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, 100\,.$$

   Obsérvese que $\Delta x = 0.2$. De esta forma, obtendremos una secuencia de valores en el intervalo $[-10, 10]$, que será el intervalo en el que centraremos el estudio de la función. Aunque en la práctica t suele ser el tiempo, por lo que debería ser $t_i \geq 0$, hemos optado por obtener una representación de la función logística sobre todo su dominio, con la idea de proporcionar una visión global de dicha función.

2. Podríamos construir una tabla para almacenar los posibles valores de los parámetros y_0, K y r, situándola en la primeras filas de la hoja de cálculo. Así, podremos variar dichos parámetros con objeto de comparar sus correspondientes gráficas.

3. Calculamos los valores $y(t_i)$ en una columna adyacente, procurando que cada valor de t_i se encuentre al lado de su imagen, $y(t_i)$. Como se obtendrán varias columnas de esta forma, implementaremos los cálculos en términos de los parámetros y_0, K y r. Por seguir un cierto orden, sería interesante que los valores de $y(t_i)$ apareciesen situados en una columna, justo debajo de los valores de sus correspondientes parámetros. Esto no es obligado en la hoja de cálculo, tan sólo es aconsejable para no perdernos.

4. Podemos obtener representaciones de datos de la forma $\{(t_i, y_i)\}_i$ en el menú `Gráfico`, el tipo de gráfico `XY Dispersión` y la opción `Dispersión de puntos conectados por líneas suavizadas...`. Cuando realice la representación de cada función, no olvide indicar un nombre distinto para que aparezca como `label` en la hoja que contiene los datos. Asimismo, se recomienda que cada gráfica aparezca como una hoja aparte.

5. Puede repetir los últimos dos puntos una vez más. De esta forma, podrá comparar dos funciones logísticas asignando valores a sus correspondientes parámetros y_0, K y r.

Cuestión:

1. En base a las representaciones gráficas, ¿cuál es el significado de los parámetros y_0, K y r de la función logística?

   Para responder a estar cuestiones, se ha elaborado en la hoja `Graffun` la representación gráfica de la función logística y, incluyendo los distintos elementos que intervienen en su definición. Asimismo, para visualizar el efecto de sus parámetros, en la hoja `Graffun2` aparecen superpuestas dos funciones logísticas, y e $y1$.

A continuación, vamos a obtener la derivada de la función logística denotada con y, sobre el intervalo de t considerado y utilizando la Ecuación (1). Esta función es evaluada sobre los nodos t_i, denotándola en el fichero con `Dy`.

1. Obtenga una representación gráfica en la que aparezca la derivada de la función logística (ver hoja `GrafDfun`).

2. En la hoja `GraffunD` se encuentran representadas la función logística junto con su derivada. Obsérvese que el comportamiento de la función logística puede ser explicada a través de su derivada. En concreto, fíjese en el diferente ritmo de crecimiento (derivada) que exhibe la función logística

3. Demostraciones

Resolución de la ED

Teniendo en cuenta que la Ecuación diferencial (1) es de variables separadas, se tiene que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-K^{-1}y)} \;=\; \int r\,\mathrm{d}t \;+\; C\,,$$

siendo $C \in \mathbb{R}$. Por otra parte, haciendo uso de que

$$\frac{1}{y(1-K^{-1}y)} \;=\; \frac{1}{y} \;+\; \frac{K^{-1}}{1-K^{-1}y},$$

se obtiene que

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-K^{-1}y)} \;=\; \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \;-\; \int \frac{-K^{-1}}{1-K^{-1}y}\mathrm{d}y \;=\; \ln\left(\frac{y}{1-K^{-1}y}\right)\,.$$

Finalmente, se obtiene que

$$\ln\left(\frac{y}{1-K^{-1}y}\right) \;=\; r\,t \;+\; C\,,$$

$$\frac{y}{1-K^{-1}y} \;=\; e^{r\,t}e^{C} \;\Rightarrow\; y \;=\; e^{r\,t}e^{C}\left(1-K^{-1}y\right)$$

$$y\left(1+e^{r\,t}e^{C}K^{-1}\right) \;=\; e^{r\,t}e^{C} \;\Rightarrow\; y \;=\; \frac{e^{r\,t}e^{C}}{1+e^{r\,t}e^{C}K^{-1}}$$

de donde se concluye con la Ecuación (2).

Deducción de la Ecuación (3)

A partir de la Ecuación (2), se tiene que

$$y_0 = y(0) = \frac{K\,e^C}{K+e^C}\,,$$

es decir, $y_0(K+e^C) = K\,e^C$ y, por tanto, despejando e^C, se obtiene que

$$y_0 K \;=\; e^C(K-y_0)\,.$$

Con esta expresión, la Ecuación (2) se puede formular como sigue:

$$\begin{aligned} y(t) \;&=\; \frac{K\,e^C\,e^{r\,t}}{K+\frac{y_0 K}{K-y_0}e^{r\,t}} \;=\; \frac{e^C\,e^{r\,t}}{1+\frac{y_0}{K-y_0}e^{r\,t}} \;=\; \frac{(K-y_0)e^C\,e^{r\,t}}{K-y_0+y_0e^{r\,t}} \\ &=\; \frac{y_0 K\,e^{r\,t}}{K+y_0\left(e^{r\,t}-1\right)}\,. \end{aligned}$$

Referencias

[1] Valderrama Bonnet, Mariano J. (1995). *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*. Ediciones Pirámide, Madrid.