Variación del volumen de un cono

Francisco A. Ocaña Lara
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa, UGR

Octubre 2007

1. Introducción

En el presente documento se ilustra el concepto de diferencial de una función de dos variables, a partir de su aplicación para aproximar los valores de una función y sus errores asociados. Como apoyo al presente documento, se va a hacer referencia al documento `ejDiferen.pdf`, que es una impresión de cálculos realizados con una hoja de cálculo, tal y como se irá proponiendo aquí. En ese sentido, el orden en la exposición coincide con el orden con el que aparecen las tablas en `ejDiferen.pdf`.

Comenzaremos presentando el problema que vamos a tratar y con el que vamos a experimentar. A continuación, iremos describiendo de forma progresiva los pasos a seguir.

2. Problema

El volumen V de un cono depende del radio r de su base y de su altura h, mediante la expresión

$$V \;=\; \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h \;=\; V(r,h)\,. \tag{1}$$

Descripción

¿Cuál es el volumen de un cono con $h = 30$ cm y $r = 10$ cm? A partir de ahora, los valores de $r = 10$ y $h = 30$, junto con el volumen asociado $V(10, 30)$, serán considerados como valores observados.

Como es sabido, los valores son usualmente observados con un cierto error; en concreto, $r = 10$ y $h = 30$. Teniendo en cuenta, por ejemplo, una variación positiva de h de 0.1 y otra negativa de r de 0.025, se ha construido una tabla con los valores del volumen asociados a los correspondientes valores de h y r (ver Tabla `Valores exactos de V(r,h)`), haciendo uso de la Ecuación (1). A modo de ejemplo, uno de los valores obtenidos de $V(r,h)$ se supondrá que es el valor teórico (real) del volumen en la medición realizada. Esto recrea un escenario que no es lo habitual en la realidad: el disponer de una malla de valores en los que se encuentra el valor teórico del volumen.

3. Aproximación del volumen del cono

A continuación, vamos a ilustrar la capacidad aproximativa a una función (volumen) de la diferencial. Con ese objetivo, se ha calculado una aproximación de cada uno de los valores de la tabla anterior haciendo uso del concepto de diferencial en $(10, 30)$:

$$V(r,h) \approx V(10,30) + (r-10)V'_r(10,30) + (h-30)V'_h(10,30)\,.$$

Los valores calculados aparecen en la tabla correspondiente. Compare los valores con los de la tabla citada anteriormente

4. Cuantificación de errores

Volvamos ahora al problema de la cuantificación del error de la observación. Para todos los posibles valores $V(r,h)$ (cualesquiera de ellos podría ser el valor teórico del volumen), obtenemos lo que sería el error (absoluto) de observación, el cuál se define mediante

$$V(r,h) - V(10,30)$$

Este tipo de errores podría ser calificado como teórico, debido a que, en la realidad, no es posible obtenerlos directamente, pues el valor teórico del volumen ($V(r,h)$) es siempre desconocido. Sin embargo, en nuestro ejemplo podemos calcular los errores asociados a todos los posibles valores $V(r,h)$.

Una forma de aproximar en la práctica los errores anteriores consistiría en utilizar $dV(10,30)$. Estos errores son los que se suelen conocer como *errores* *absolutos*. Compare estos *errores absolutos* con los de la tabla citada anteriormente

De nuevo podemos hacer en este ejercicio o experimento algo que en la práctica es imposible: calcular los errores relativos teóricos. En concreto, estos errores son calculados en la tabla correspondiente a partir de su definición, es decir,

$$(V(r,h) - V(10,30))/V(10,30)\,.$$

Tal y como hacemos en la práctica, a continuación aproximamos los errores relativos teóricos anteriores a partir de $d \ln V(10,30)$, obteniendo lo que hemos denominado en la asignatura como *errores relativos*. Compare estos errores relativos con los de la tabla citada anteriormente.

Referencias

[1] Valderrama Bonnet, Mariano J. (1995). *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*. Ediciones Pirámide, Madrid.