Ejemplo de aproximación de una función de dos variables mediante polinomios de Taylor

Francisco A. Ocaña Lara
Depto. de Estadística e Investigación Operativa

Octubre de 2008

1. Planteamiento

Dada la función

$$f(x,y) \; = \; cos(2x+\ln(y)), \qquad \forall \; (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+} \, ,$$

vamos a ilustrar la utilidad de los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 en el punto $(0,1)$, a los que denotaremos con $p_2(x,y)$ y $p_3(x,y)$, respectivamente.

Haciendo uso del Teorema de Taylor (Valderrama, 1995), dichos polinomios vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} p_2(x,y) \; = \; & f(0,1) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \\ & + \frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + (y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) + 2x(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x,y) \; = \; & f(0,1) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \\ + \; & \frac{1}{2}\left[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + (y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) + 2x(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)\right] \\ & + \frac{1}{6}\left[x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,1) + 3x^2(y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,1) \right. \\ & \left. + 3x(y-1)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,1) + (y-1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,1)\right] \, . \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} p_3(x,y) &= p_2(x,y) + \frac{1}{6}\left[x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,1) + 3x^2(y-1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,1)\right. \\ &\quad \left. +3x(y-1)^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,1) + (y-1)^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,1)\right] . \end{aligned}$$

2. Descripción de los cálculos

Obteniendo las derivadas parciales de f en $(0,1)$ que aparecen en las ecuaciones anteriores, se obtienen las expresiones de los mencionados polinomios de Taylor,

$$\begin{aligned} p_2(x,y) &= 1 - 2x^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 - 2x(y-1) \\ p_3(x,y) &= p_2(x,y) + x(y-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^3 . \end{aligned}$$

Para ilustrar la utilidad de estos polinomios, se analizan los valores de la función f y de sus polinomios de Taylor calculados. Para tal fin, se ha considerado una malla de pares de valores (x_i, y_j) próximos al punto $(0,1)$, sobre los que se han evaluado tanto la función como los mencionados polinomios. Los resultados obtenidos aparecen recogidos en un documento adjunto.

La malla de pares de valores (x_i, y_j) consiste en considerar una partición de nodos para x en el intervalo $[-0{,}5, 0{,}5]$ y, por otro lado, otra partición para y en el intervalo $[0{,}5, 1{,}5]$, tomando como incrementos $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}1$. De esta forma, obtenemos una malla de pares de valores en la región $[-0{,}5, 0{,}5] \times [0{,}5, 1{,}5]$ que contiene al punto $(0,1)$.

Referencias

[1] Valderrama Bonnet, Mariano J. (1995). *Modelos matemáticos en las ciencias experimentales*. Ediciones Pirámide, Madrid.