Interpretación de las derivadas parciales y direccionales

Francisco A. Ocaña Lara
Depto. de Estadística e Investigación Operativa

Octubre de 2005

Resumen

Este ejercicio ilustrar el significado de las derivadas parciales y de las direccionales de una función de dos variables, con la idea de ayudar al lector a entender los conceptos de derivación parcial y derivada direccional. Los cálculos realizados aparecen en el fichero de Calc `InterpretaDerivada.ods`.

Consideremos la función derivable de dos variables dada por

$$f(x,y) = 2\,x^3\,y\,, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

cuyas derivadas parciales vienen dadas por

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 6x^2\,y \quad \text{y} \\ f'_y(x,y) &= 2\,x^3\,, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Dentro del dominio de f, consideraremos el punto $(1,1)$, sobre el que podemos evaluar $f(1,1)$ y, tras derivar parcialmente, $f'_x(1,1)$ y $f'_y(1,1)$.

Para entender el significado de $f'_x(1,1)$ y $f'_y(1,1)$, vamos a utilizar su definición matemática (Valderrama, 1995). En ese sentido, y comenzando por $f'_x(1,1)$, consideraremos como incrementos de x, en este caso, a los valores $H = \pm 0.5$, ± 0.02, ± 0.01,± 0.005,± 0.001, ordenándolos en orden creciente, para calcular los cocientes (variaciones) de la forma

$$\frac{f(1+H,1) - f(1,1)}{H}\,.$$

Se deja al lector que reflexione acerca del significado de los cocientes así calculados. Además, puede comprobar que, en este caso, estos cocientes se acercan al valor de $f'_x(1,1)$, cuando los incrementos de x, H, son próximos a cero. Por tanto, la derivada parcial $f'_x(1,1)$ heredaría un significado similar al de los cocientes anteriores. Por tanto, ¿cómo puede interpretarse el valor de $f'_x(1,1)$?

En la hoja `DerivParciales` del fichero de Calc `InterpretaDerivada.ods`, se han implementado todos los cálculos anteriores. Además, puede visualizarse el comportamiento límite de $\frac{f(1+H,1)-f(1,1)}{H}$, cuando H se acerca a cero, en la gráfica obtenida de $\frac{f(1+H,1)-f(1,1)}{H}$ frente a H.

De igual forma que para $f'_x(1,1)$, podemos trabajar con la otra derivada parcial, $f'_y(1,1)$. En concreto, calculamos ahora los cocientes

$$\frac{f(1,1+H)-f(1,1)}{H}.$$

Podemos comprobar que estos cocientes se aproximan ahora al valor de $f'_y(1,1)$, cuando el valor de H se acerca a cero. ¿Cómo puede interpretarse el valor de $f'_y(1,1)$?

Derivada direccional

Ahora, en lugar, de variar de forma independiente una de las variables, vamos a variar ambas pero manteniendo entre ambas una relación constante. En concreto, consideraremos valores de la forma

$$(1+Hcos(a), 1+Hsen(a)) = (1,1) + H(cos(a), \mathrm{sen}(a))\,,$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ (radianes), donde las variaciones que experimentan ambas variables cumplen que

$$\frac{H\,cos(a)}{H\,\mathrm{sen}(a)} \;=\; \mathrm{tg}(a),$$

es decir, ambas variables varían en la dirección del vector unitario $(cos(a), \mathrm{sen}(a))$. Así, calculamos las variaciones dadas por

$$\frac{f(1+H\,cos(a), 1+H\,\mathrm{sen}(a)) \;-\; f(1,1)}{H}$$

y las representamos frente a los valores de H, manteniendo a constante, tal y como aparece en la hoja `DerivDireccional`. Obsérvese cómo dichas variaciones se acercan al valor de la derivada direccional $D_a f(1,1)$, cuando H se aproxima a cero, que puede ser obtenido mediante

$$D_a f(1,1) \;=\; f'_x(1,1)\; cos(a) \;+\; f'_y(1,1)\; \mathrm{sen}(a)\,.$$

¿Cómo podría interpretar el valor de $D_a f(1,1)$?

Referencias

[1] Valderrama Bonnet, Mariano J. (1995), *Modelos Matemáticos en las Ciencias Experimentales*. Ediciones Pirámide: Madrid.