La imagen por la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa

9 de abril de 2003

1. Generalidades.

En lo que sigue nos serán útiles ciertas relaciones entre objetos geométricos asociados a métricas conformes sobre una misma superficie diferenciable, como el gradiente, laplaciano, elemento de área o la curvatura de Gauss. Si las métricas se escriben $g, \overline{g}$, entonces usaremos una notación análoga para los objetos geométricos asociados, como $\nabla f, \overline{\nabla} f, K, \overline{K}$, etc. La métrica euclídea usual sobre un plano se denotará por $g_0 = |dz|^2$, y el mismo convenio de notación valdrá para los objetos geométricos asociados a la misma.

Lema 1.1 *Sean $g, \overline{g}$ dos métricas Riemannianas conformes sobre una superficie diferenciable M, con $\overline{g} = e^{2u} g$. Entonces:*

1. $K - e^{2u}\overline{K} = \Delta u$,
2. $d\overline{A} = e^{2u} dA$,
3. $\overline{\nabla} f = e^{-2u} \nabla f$, *donde* $f \in C^2(M)$,
4. $\overline{\Delta} f = e^{-2u} \Delta f$.

Demostración.

1. Ejercicio de Geometría Diferencial de 4º.
2. Dada $\{E_1, E_2\}$ base local g-ortonormal de TM, se tiene que $\{e^{-u}E_1, e^{-u}E_2\}$ es base $\overline{g}$-ortonormal. Por definición de 2-forma de volumen asociada a una métrica Riemanniana,

$$d\overline{A}(E_1, E_2) = e^{2u} d\overline{A}(e^{-u}E_1, e^{-u}E_2) = e^{2u} = e^{2u} dA(E_1, E_2).$$

3. Sean $f \in C^2(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. $g(X, \nabla f) = X(f) = \overline{g}(X, \overline{\nabla} f) = e^{2u} g(X, \overline{\nabla} f)$.

4. Sean $f \in C^2(M)$, $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Integrando por partes y usando los apartados 2 y 3,

$$\int_M \varphi \Delta f \, dA = -\int_M g(\nabla\varphi, \nabla f)\, dA = -\int_M \overline{g}(\overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla} f)\, d\overline{A} = \int_M \varphi \overline{\Delta} f \, d\overline{A} = \int_M \varphi e^{2u} \overline{\Delta} f \, dA.$$

Usando ahora la densidad de $C_0^\infty(M)$ en $L^2(M, g)$ se tiene que $\Delta f = e^{2u}\overline{\Delta} f$.

□

Lema 1.2 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con $0 \notin f(\Omega)$. Entonces, la métrica $ds^2 = |f|^2|dz|^2$ es llana.*

Demostración. Como f es holomorfa y no se anula en ningún punto de Ω, tendremos que f admite localmente un logaritmo holomorfo, cuya parte real será $\ln|f|$, que por tanto será una función armónica definida en todo Ω. Usando el apartado 1 del Lema 1.1, tenemos $K = \Delta \ln|f| = 0$ en Ω. □

Proposición 1.1 (Curvatura de Gauss de un grafo minimal)
Sea $M = \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$ el grafo de una función $h \in C^\infty(\Omega)$ definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si M es minimal, entonces su curvatura de Gauss de M es

$$K = \Delta \ln\left(1 + \frac{1}{W}\right), \qquad \text{donde } W = \sqrt{1 + \|\nabla_0 h\|_0^2}.$$

Demostración. Es claro que $W \in C^\infty(\Omega)$ y que $W \geq 1$, luego la fórmula tiene sentido. Sea $g = ds^2$ la métrica inducida sobre el grafo M por el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Consideremos la métrica conforme a ds^2 dada por $d\overline{s}^2 = \left(1 + \frac{1}{W}\right)^2 g$. Por el Lema 1.1, basta probar que $d\overline{s}^2$ es llana.

Sea $p \in M$, y $(g, f\,dz)$ la representación de Weierstrass local de M definida en un entorno simplemente conexo U de p. Así, $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ donde $\lambda = \frac{1}{2}(1+|g|^2)|f|$. Tomando como normal a $N = (\nabla_0 h, -\frac{1}{W})$ (en particular, N está valuada en el hemisferio inferior de $\mathbb{S}^2(1)$), se tiene

$$1 + \frac{1}{W} = 1 - N_3 = 1 - \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} = \frac{2}{|g|^2 + 1} = \frac{|f|}{\lambda},$$

luego en U tenemos $d\overline{s}^2 = \frac{|f|^2}{\lambda^2} ds^2 = |f|^2|dz|^2$. Por el Lema 1.2 (nótese que f no toma el valor cero porque g no tiene polos, y esto último se cumple porque N está valuada en el hemisferio inferior de $\mathbb{S}^2(1)$), $d\overline{s}^2$ es llana y el Lema está probado. □

2. El Teorema de Bernstein.

Usaremos el siguiente resultado clásico, que puede encontrarse en [6].

Teorema 2.1 (Liouville)
Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, subarmónica. Si u es acotada superiormente, entonces u es constante.

Teorema 2.2 (Bernstein [1])
Las únicas soluciones definidas en todo $\mathbb{R}^2$ de la ecuación de las superficies minimales son las funciones afines. Equivalentemente, si M es el grafo de una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y M es minimal, entonces M es un plano.

Demostración. (S. S. Chern [2])
Sea $M = \{(x, y, h(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Por la Proposición 1.1, tenemos $K = \ln(1 + \frac{1}{W})$ donde $W = \sqrt{1 + \|\nabla_0 h\|_0^2}$. Como M es minimal, K es no positiva luego $\ln\left(1 + \frac{1}{W}\right)$ es una función superarmónica definida en $\mathbb{R}^2$, y acotada inferiormente por cero. Por el Teorema de Liouville, $\ln\left(1 + \frac{1}{W}\right)$ es constante, luego su laplaciano es cero. Así, la curvatura de Gauss de la métrica inducida en M es idénticamente nula, luego M es un plano. □

3. Planteamiento del problema.

La aplicación de Gauss de un grafo cae en un hemisferio de $\mathbb{S}^2(1)$, luego el Teorema de Bernstein nos da información sobre la imagen de la aplicación de Gauss de una superficie minimal. Esto da pie a estudiar qué tipo de subconjuntos de $\mathbb{S}^2(1)$ pueden ser la imagen por la aplicación de Gauss de una superficie minimal. Enseguida uno se da cuenta de que hay que imponer condiciones de globalidad (la cuestión local no tiene sentido). La idea de globalidad en el Teorema de Bernstein viene dada al imponer que el grafo minimal lo sea sobre <u>todo</u> el plano. La condición geométrica natural de globalidad en Geometría es la completitud, así que se nos plantea el siguiente problema:

> ¿Qué tipo de subconjuntos de $\mathbb{S}^2(1)$ pueden ser la imagen por la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa de $\mathbb{R}^3$?

Como la aplicación de Gauss de una superficie minimal M es holomorfa (viendo M como superficie de Riemann), la pregunta anterior va en la línea de Teoremas tan conocidos como el los Teoremas de Liouville, Casorati, Picard... para el ámbito de las superficies minimales.

Antes de ver algunos resultados sobre este tema, examinemos qué ocurre con algunos ejemplos clásicos:

1. <u>EL PLANO.</u> En este caso, $N(M)$ es un sólo punto de $\mathbb{S}^2(1)$.

2. <u>La Catenoide.</u> $X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$, $u \in]0,2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$. Representación de Weierstrass: $g(z) = z$, $\omega = \frac{dz}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}^*$. $N(M)$ es toda la esfera menos dos puntos antípodas.

3. <u>La superficie de Enneper.</u> $X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$, $u, v \in \mathbb{R}$. Representación de Weierstrass: $g(z) = z$, $\omega = dz, z \in \mathbb{C}$. $N(M)$ es toda la esfera menos un sólo punto.

4. <u>La superficie de Scherk.</u> $X(u,v) = \left(\arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right), \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right), \ln\left|\frac{z^2+1}{z^2-1}\right|\right)$, $z \in \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm i\}$, o en forma de grafo: $z = f(x,y) = \ln \frac{\cos y}{\cos x}$, $|x|, |y| < \frac{\pi}{2}$. $N(M)$ es toda la esfera menos dos parejas ortogonales de puntos antípodas.

5. <u>Los ejemplos de Voss [14].</u> *Dados* $\{p_1, ..., p_k\}$ *(*$k \leq 4$*) puntos de* $\mathbb{S}^2(1)$*, existe una superficie minimal completa* $M \subset \mathbb{R}^3$ *con* $N(M) = \mathbb{S}^2 - \{p_1, \ldots, p_k\}$*.*

   Demostración. Salvo un giro en $\mathbb{R}^3$, podemos asumir que $p_k = (0,0,1)$. Si $k = 1$, entonces la superficie de Enneper resuelve el problema. Supongamos $k \geq 2$, y sean $w_1, \ldots, w_{k-1} \in \mathbb{C}$ las proyecciones estereográficas de $p_1, \ldots p_{k-1}$. Consideremos la representación de Weierstrass

$$g(z) = z, \quad f(z)\,dz = \frac{dz}{\prod_{i=1}^{k-1}(z - w_i)}, \quad z \in \mathbb{C} - \{w_1, \ldots, w_{k-1}\}.$$

   La métrica $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ con $\lambda = \frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)$ es completa, ya que si $z = z(t)$ es una curva divergente en $\mathbb{C} - \{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ entonces su longitud respecto a ds^2 es infinita (ejercicio). Nótese que no hemos resuelto el problema de períodos, pero la superficie estará bien definida en cierto recubridor de $\mathbb{C} - \{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$, conservando la misma imagen por la aplicación de Gauss. $\square$

A partir de los ejemplos anteriores, podemos reformular nuestra cuestión como

> ¿Existe alguna superficie minimal completa y no llana en $\mathbb{R}^3$ cuya aplicación de Gauss omita 5 o más puntos de $\mathbb{S}^2(1)$?

4. Tres teoremas de Osserman.

Salvo el ejemplo del plano, los demás ejemplos dan idea de que $\mathbb{S}^2(1) - N(M)$ debe ser muy pequeño. En matemáticas existen distintos conceptos de pequeñez. Entre ellos, está el de tener interior vacío (topológico). En esto se basa la conjetura de Nirenberg, resuelta por Osserman en 1959. Antes enunciaremos un resultado clásico de superficies de Riemann, que clasifica los modelos simplemente conexos de esta teoría. Puede encontrarse una demostración en [4].

Teorema 4.1 (Uniformización, Koebe)
Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces, M es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ o a la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$.

Teorema 4.2 (Osserman [9, 11]) [1] *La imagen por la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana de $\mathbb{R}^3$ es densa en $\mathbb{S}^2(1)$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que M es una superficie minimal completa y no llana, cuya aplicación de Gauss omite un abierto no vacío de $\mathbb{S}^2$. Pasando el recubridor universal, podemos suponer que M es simplemente conexa. Por el Teorema de uniformización, M es conformemente $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{D}$, ya que no existen superficies minimales compactas en $\mathbb{R}^3$. Como la composición de una inmersión minimal con un biholomorfismo sigue siendo una inmersión minimal, podemos suponer que $M = \mathbb{C}$ ó $M = \mathbb{D}$.

Supongamos primero que $M = \mathbb{C}$. En este caso, la aplicación de Gauss es $g : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ holomorfa. Salvo un giro en $\mathbb{R}^3$, podemos suponer que g omite un entorno de ∞, luego g es una función entera y acotada. Por el Teorema de Liouville, g es constante luego M está contenida en un plano, contradicción.

Supongamos ahora que $M = \mathbb{D}$. Como $N(M)$ omite un disco en $\mathbb{S}^2$, salvo un giro en $\mathbb{R}^3$ podemos suponer que $N(M)$ omite un entorno del polo norte, i.e. $\exists \varepsilon > 0$ tal que $N_3 \leq 1 - \varepsilon$ en M. Sean ds^2 la métrica de M y $d\overline{s}^2 = (1 - N_3)^2 \, ds^2$. Nótese que $1 - N_3 \geq \varepsilon > 0$, luego $d\overline{s}^2$ es una métrica Riemanniana sobre M (esta es la misma métrica que aparecía en la demostración del Teorema de Bernstein). $d\overline{s}^2$ sigue siendo llana, por la misma razón que en la demostración anterior. Como $d\overline{s}^2 \geq \varepsilon^2 ds^2$ y ds^2 es completa, $d\overline{s}^2$ también es completa. Por el Teorema de Cartan de clasificación de las variedades Riemannianas completas, simplemente conexas y de curvatura seccional constante, existe una isometría $\phi : (\mathbb{R}^2, |dz|^2) \to (M, d\overline{s}^2)$. Componiendo con $1_M : (M, d\overline{s}^2) \to (M, ds^2)$ obtenemos que $\phi : (\mathbb{R}^2, |dz|^2) \to (M, ds^2)$ es una aplicación conforme y biyectiva, luego es un biholomorfismo ó un antibiholomorfismo. En el primer caso, M será conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, contradicción. En el segundo caso sólo tenemos que componer con la conjugación compleja para obtener la misma contradicción. $\square$

En el segundo Teorema de Osserman que presentamos se da una estimación de la curvatura para una superficie minimal cuya imagen por la aplicación de Gauss omita un abierto no trivial de $\mathbb{S}^2(1)$, sin imponer completitud. Una pequeña mejora en este segundo Teorema nos permitirá redemostrar el Teorema 4.2. Antes enunciaremos un resultado auxiliar, clásico en la teoría de una variable compleja.

Lema 4.1 (Schwarz) *Sea $G : \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con $G(0) = 0$ y $|G(\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{D}$. Entonces,*

[1] En [9], Osserman asumía que la superficie minimal es simplemente conexa; esta hipótesis fue eliminada por el mismo autor en [11].

1. $|G(\xi)| \leq |\xi|$, $\forall \xi \in \mathbb{D}$, *y*

2. $|G'(0)| \leq 1$.

Además, si se da la igualdad en 1 ó 2, entonces G es un giro de $\mathbb{D}$ alrededor del origen.

Teorema 4.3 (Osserman [10]) *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal simplemente conexa y $p \in M$. Supongamos que $\exists \beta \in]0, \pi[$ tal que $\sphericalangle(N_p, N_q) < \beta$, $\forall q \in M$. Entonces,*

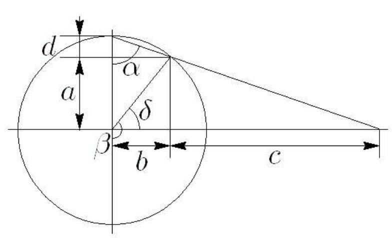
$$|K(p)| \leq \frac{1}{d(p, \partial M)^2} \left[\frac{2}{3} \tan \frac{\beta}{2} \left(3 + \tan^2 \frac{\beta}{2} \right) \right]^2 ,$$

donde $d(p, \partial M)$ denota la distancia intrínseca de p a ∂M. Además, la igualdad se da si y sólo si M está contenida en una superficie de Enneper.

Demostración. La idea es como sigue: según la expresión de la curvatura de Gauss usando la representación de Weierstrass, una estimación por arriba de $|g'(p)|$ puede llevar a una cota superior de $|K(p)|$ (aquí g es la aplicación de Gauss y $'$ denota derivada en el parámetro local conforme). Para estimar $|g'(p)|$ superiormente, usaremos el Lema de Schwarz.

Primero notemos tras un giro conveniente, podemos asumir que $N_p = (0, 0, -1)$. Como M es simplemente conexa, su estructura conforme es la de $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{D}$ (Teorema 4.1). Si M fuera conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ su aplicación de Gauss g podría verse como aplicación entera. Como $\sphericalangle(N_p, N) < \beta < \pi$, deducimos que $g(\mathbb{C})$ es acotada, luego g es constante por el Teorema de Liouville. En estas condiciones, la desigualdad del enunciado es trivial. Por tanto, en lo que sigue supondremos que M es conformemente $\mathbb{D}$.

Tomemos una coordenada conforme z centrada en p (es decir, $z(p) = 0$) definida sobre todo M (que existe por ser ésta simplemente conexa). Sea $(g(z), \omega = f(z)\, dz)$ la representación de Weierstrass de M en esta coordenada conforme. El giro que hicimos al principio obliga a que $g(0) = 0$.



Empezamos estimando $g(M)$ a partir de la hipótesis $\sphericalangle(N_p, N) < \beta$. Teniendo en cuenta que g es la proyección estereográfica de N desde el polo norte y que $g(0) = 0$, deducimos de la figura que $b = \cos\delta = \operatorname{sen}\beta$, $a = \operatorname{sen}\delta = -\cos\beta$, $\tan\alpha = \frac{b}{d} = \frac{b}{1-a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}$, $c = a\tan\alpha = -\cos\beta \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}$, luego $b + c = \operatorname{sen}\beta - \cos\beta \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \tan\frac{\beta}{2}$. En resumen, $|g(z)| < \tan\frac{\beta}{2}$, $\forall z \in M$.

Por otro lado, la condición $\beta < \pi$ implica que g no tiene polos en V, luego f no tiene ceros en V y la métrica

$$d\overline{s}^2 = |f|^2 |dz|^2, \quad z \in M,$$

(de nuevo la misma métrica de los Teoremas de Bernstein y el anterior de Osserman) está bien definida. Como f es holomorfa y sin ceros, $d\overline{s}^2$ es llana en M. Aplicando el Teorema local de Cartan, tenemos que siempre que $\rho > 0$ sea un radio geodésico en p respecto a $d\overline{s}^2$, la exponencial $\overline{\exp}_p$ para $d\overline{s}^2$ cumple que la composición $I \circ \overline{\exp}_p$ es una isometría en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(0,\rho) \subset (T_pM, d\overline{s}^2_p) & \xrightarrow{\quad I \quad} & \mathbb{D}(0,\rho) \subset (T_0\mathbb{R}^2, |dz|^2) \\ \Big\downarrow \overline{\exp}_p \text{ (difeom.)} & & \Big\downarrow \text{Identidad} \\ D_{d\overline{s}^2}(p,\rho) & & \mathbb{D}(0,\rho) \end{array}$$

donde I es cualquier isometría vectorial y $D_{d\overline{s}^2}(p,\rho)$ es el disco geodésico centrado en p, de radio ρ respecto a $d\overline{s}^2$. Sea $r > 0$ el mayor radio geodésico para $d\overline{s}^2$ en p (si $r = +\infty$ entonces $(M, d\overline{s}^2)$ es completa, simplemente conexa y llana luego es isométrica a $(\mathbb{R}^2, |dz|^2)$; pero al ser $d\overline{s}^2$ y ds^2 métricas conformes, concluimos que M es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, contradicción).

Como r es radio geodésico para $d\overline{s}^2$ en p, del esquema anterior deducimos que $\overline{\exp}_p$ es una isometría de $(\mathbb{D}(0,r), d\overline{s}^2_p)$ en $(D_{d\overline{s}^2}(p,r), d\overline{s}^2)$. Como $d\overline{s}^2, ds^2$ son conformes,

$$\overline{\exp}_p : \left(\mathbb{D}(0,r), d\overline{s}^2_p\right) \to \left(D_{d\overline{s}^2}(p,r), ds^2\right)$$

es una aplicación conforme y biyectiva. Salvo posiblemente un cambio en la orientación en el dominio, podemos ver $\overline{\exp}_p$ como biholomorfismo. Así, $z = \overline{\exp}_p(w)$ define una coordenada local holomorfa sobre $\mathbb{D}(0,r)$ para $D_{d\overline{s}^2}(p,r) \subset M$, y la representación de Weierstrass de M respecto a w es

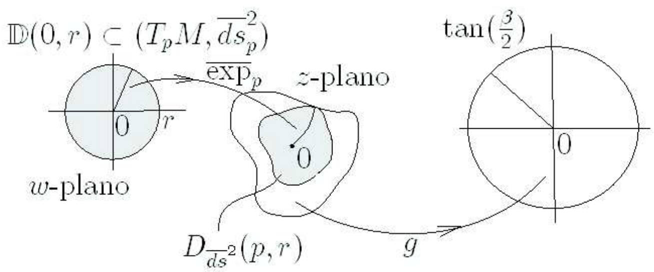
$$\widetilde{g}(w) = g(\overline{\exp}_p w), \qquad \widetilde{f}\,dw = f\,dz,$$

donde $\widetilde{f}(w) = f(\overline{\exp}_p w)z'(w)$. Así, $|\widetilde{f}|\,|dw| = |f|\,|dz| = d\overline{s} = |dw|$, siendo cierta esta última igualdad porque $\overline{\exp}_p$ es una isometría de la métrica llana $|dw| \equiv d\overline{s}^2_p$ en $d\overline{s}^2$. De lo anterior concluimos que $|\widetilde{f}| = 1$ en $\mathbb{D}(0,r)$. Por ser $\widetilde{f}$ holomorfa, existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $\widetilde{f}$ es constantemente $e^{i\theta}$ en $\mathbb{D}(0,r)$.

A continuación estimaremos la distancia intrínseca de p a ∂M. Para ello, afirmamos que existe $w_0 \in \partial\mathbb{D}(0,r)$ tal que $\alpha(t) := \overline{\exp}_p(tw_0)$, $t \in [0,1[$, es una curva divergente en M. Por reducción al absurdo, supongamos que $\forall w \in \partial\mathbb{D}(0,r)$ la curva $\overline{\exp}_p([0,1[w)$ no es divergente a M. Esto implica que tal curva tiene un punto límite q_w en el interior de M, y considerando geodésicas radiales en q_w respecto a $d\overline{s}^2$ podremos concluir que todas las geodésicas radiales en p respecto a $d\overline{s}^2$ suficientemente cercanas a $\overline{\exp}_p([0,1[w)$ pueden definirse en $[0, 1+\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$. Esto nos dice que $\overline{\exp}_p$ está definida en un entorno abierto de w en T_pM, y esto es cierto $\forall w \in \partial\mathbb{D}(0,r)$. Como $\mathbb{D}(0,r)$ es compacto, deducimos que $\overline{\exp}_p$ está definida en $\mathbb{D}(0,r+\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$ pequeño. Por definición de r, $\overline{\exp}_p$ no puede ser un difeomorfismo sobre $\mathbb{D}(0,r+\varepsilon)$ luego o bien falla su inyectividad en $\mathbb{D}(0,r+\varepsilon)$ o su diferencial en algún punto tiene núcleo. Como $d\overline{s}^2$ tiene curvatura cero, esté último caso es imposible, luego existen dos puntos distintos en $\mathbb{D}(0,r+\varepsilon)$ donde $\overline{\exp}_p$ toma el mismo valor. Como ε puede tomarse arbitrariamente pequeño, concluimos que existen $w_1, w_2 \in \partial\mathbb{D}(0,r)$ distintos tales que $q := \overline{\exp}_p w_1 = \overline{\exp}_p w_2$. Esto nos dice que podemos ir de p a q por dos geodésicas (respecto a $d\overline{s}^2$) distintas y minimizantes $\gamma_i(t) = \overline{\exp}_p(tw_i)$, $t \in [0,1]$, $i = 1,2$. Notemos que $\gamma_1'(1) = -\gamma_2'(1)$ (en caso contrario, construiríamos dos curvas transversales en q como imagen por $\overline{\exp}_p$ de sendos entornos de w_1, w_2 en $\partial\mathbb{D}(0,r)$, y el que ambas curvas sean transversales permite elegir un punto q' cercano a q para el que existen $w_1', w_2' \in \mathbb{D}(0,r)$ cercanos a w_1, w_2 siendo $\overline{\exp}_p w_i' = q'$, $i = 1,2$, lo que contradice que r sea radio geodésico en p respecto a $d\overline{s}^2$). Por tanto, $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ es diferenciable en el punto q luego es una geodésica que empieza y termina en p (donde posiblemente sea no C^∞). Como M es simplemente conexa, $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ es borde de un disco $D \subset M$. Aplicando la fórmula de Gauss-Bonnet a $(D, d\overline{s}^2)$, tenemos

$$\int_D \overline{K}\, d\overline{A} + \int_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \overline{\kappa}_g\, d\overline{s} + \theta = 2\pi\chi(D) = 2\pi,$$

donde $\overline{\kappa}_g$ es la curvatura geodésica de $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ respecto a $d\overline{s}^2$ y $\theta \in [0, 2\pi[$ es el ángulo externo de $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ en el punto p. Como $\overline{K} = \overline{\kappa}_g = 0$, la última ecuación implica $\theta = 2\pi$, contradicción. Esto prueba que existe $w_0 \in \partial\mathbb{D}(0,r)$ tal que $\overline{\exp}_p w_0 \in \partial M$.



Consideremos el segmento $\alpha(t) = tw_0$, $t \in [0,1[$, que está contenido en $\mathbb{D}(0,r)$. Como $\Gamma = \overline{\exp}_p \circ \alpha$ es una curva divergente en M partiendo de p, podemos estimar $d(p, \partial M)$ mediante

$$d(p,\partial M) \le \mathrm{Long}_{ds^2}(\Gamma) = \int_\Gamma |ds| = \frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} |\widetilde{f}(w)| \left(1 + |\widetilde{g}(w)|^2\right) |dw|$$

$$= \frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} \left(1 + |\widetilde{g}(w)|^2\right) |dw|.$$

Sabemos que $|\widetilde{g}| < \tan\frac{\beta}{2}$ en $\mathbb{D}(0,r)$. En vez de usar esta estimación, la mejoramos usando el Lema de Schwarz: consideremos la función holomorfa $G : \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{D}$ dada por $G(\xi) = \frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\widetilde{g}(r\xi)$. Como $G(0) = 0$, el Lema de Schwarz asegura que $|G(\xi)| \leq |\xi|\ \forall \xi \in \mathbb{D}$, luego $|\widetilde{g}(w)| \leq \frac{|w|}{r}\tan\frac{\beta}{2}\ \forall w \in \mathbb{D}(0,r)$. Así,

$$\frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} \left(1 + |\widetilde{g}(w)|^2\right)\,|dw| \leq \frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} \left(1 + \frac{|w|^2}{r^2}\tan^2\frac{\beta}{2}\right)|dw| = \frac{r}{2}\int_0^1 \left(1 + t^2\tan^2\frac{\beta}{2}\right)dt$$

$$= \frac{r}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\tan^2\frac{\beta}{2}\right). \qquad (1)$$

Por otro lado, la expresión de la curvatura de Gauss de M en términos de la representación de Weierstrass es

$$|K| = \left(\frac{4|\widetilde{g}'|}{|\widetilde{f}|(1 + |\widetilde{g}|^2)^2}\right)^2,$$

luego evaluando en $w = 0$ y teniendo en cuenta que $\widetilde{g}(0) = 0$, $|\widetilde{f}| = 1$ obtenemos

$$|K(p)| = 16|\widetilde{g}'(0)|^2 = \frac{16}{r^2}\tan^2\frac{\beta}{2}|G'(0)|^2 \leq \frac{16}{r^2}\tan^2\frac{\beta}{2}, \qquad (2)$$

donde de nuevo hemos usado el Lema de Schwarz. Finalmente, (1) y (2) implican

$$|K(p)|d(p,\partial M)^2 \leq 4\tan^2\frac{\beta}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\tan^2\frac{\beta}{2}\right)^2,$$

que es la desigualdad del enunciado. Supongamos ahora que la igualdad se da en el Teorema. Entonces se convierten en igualdades las aplicaciones anteriores del Lema de Schwarz, luego G ha de ser un giro, $G(\xi) = e^{i\alpha}\xi$ para cierto $\alpha \in [0,2\pi[$, de donde $\widetilde{g}(w) = \frac{1}{r}\tan\frac{\beta}{2}e^{i\alpha}w$. Como ya conocíamos $\widetilde{f} \equiv e^{i\theta}$, tenemos la representación de Weierstrass de una superficie de Enneper (salvo un giro y una homotecia). Nótese que en realidad hemos probado que un entorno de p en M está contenido en cierta superficie de Enneper. Por analiticidad, concluimos que M está contenida en una superficie de Enneper. $\square$

Queremos ahora redemostrar el Teorema 4.2 usando el Teorema 4.3. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal completa, con aplicación de Gauss N. Si $N(M)$ no es denso en $\mathbb{S}^2$, $N(M)$ omitirá un abierto no vacío de la esfera. Salvo un giro de M en $\mathbb{R}^3$ y tras pasar al recubridor universal, podemos suponer que $N(M)$ omite un disco $D(\infty,\varepsilon) \subset \mathbb{S}^2$ centrado en el polo norte y que M es simplemente conexa.

Supongamos primero que existe $p \in M$ tal que $N(p) = (0,0,-1)$. Como $D(\infty,\varepsilon)$ es abierto, podemos encontrar $\beta \in]0,\pi[$ tal que $\sphericalangle(N_p, N) < \beta$, en M. Como M es simplemente conexa, el Teorema 4.3 implica que

$$|K(p)| \leq \frac{1}{d(p,\partial M)^2}\left[\frac{2}{3}\tan\frac{\beta}{2}\left(3 + \tan^2\frac{\beta}{2}\right)\right]^2.$$

Pero el miembro de la derecha de la última expresión es 0 ($\beta > 0$ y $d(p, \partial M) = +\infty$ por ser M completa). Así, la curvatura de Gauss se anula en p. Este razonamiento lo hemos hecho en p suponiendo que $N(p) = (0, 0, -1)$, pero lo único necesario es que exista $\beta \in]0, \pi[$ tal que $\sphericalangle(N_p, N) < \beta$ para poder aplicar el Teorema 4.3.

Sea $A : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la aplicación antípoda. Supongamos que M no es un plano (y razonemos por reducción al absurdo). Por el Teorema de la aplicación abierta aplicado a la aplicación de Gauss de M, $N(M)$ es un abierto de $\mathbb{S}^2$. Supongamos que $N(M) \cap A(D(\infty, \varepsilon)) \neq \emptyset$. Para cada $p \in N(M) \cap A(D(\infty, \varepsilon))$, existe un ángulo $\beta \in]0, \pi[$ tal que $\sphericalangle(N_p, N) < \beta$, luego del razonamiento anterior deducimos que $K \equiv 0$ en $N(M) \cap A(D(\infty, \varepsilon))$. Por el principio de identidad, $K \equiv 0$ en M luego M es un plano, contradicción. Esto prueba el Teorema 4.2 bajo la hipótesis adicional de que el abierto $N(M) \cap A(D(\infty, \varepsilon))$ sea no vacío.

Para el caso general, necesitamos mejorar el Teorema 4.3 eliminando la hipótesis de que el punto donde se da la estimación esté en en antípoda del conjunto omitido por la aplicación de Gauss. El razonamiento será idéntico a la demostración del Teorema 4.3, por lo que sólo mencionaremos los cambios a realizar.

Teorema 4.4 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal simplemente conexa, cuya aplicación de Gauss omite un disco de radio (esférico) $\theta \in]0, \pi[$ centrado en $(0, 0, 1)$. Entonces, para todo $p \in M$ se tiene*

$$|K(p)| \leq \frac{1}{d(p, \partial M)^2} \left[\frac{2}{3} \frac{R + |g(p)|}{(1 + |g(p)|^2)^2} \left(3 + R^2 + 5R|g(p)| + 7|g(p)|^2\right) \right]^2, \qquad (3)$$

donde $d(p, \partial M)$ es la distancia intrínseca de p a ∂M, g es la aplicación de Gauss de M proyectada estereográficamente desde $(0, 0, 1)$ y $R = \cot \frac{\theta}{2}$.

Nota 4.1

i) Si suponemos $g(p) = 0$ y llamamos $\beta = \pi - \theta \in]0, \pi[$, tendremos las hipótesis del Teorema 4.3. En este caso, la desigualdad (3) se escribe $|K(p)| \leq \frac{1}{d(p, \partial M)^2} \left[\frac{2R}{3} (3 + R^2) \right]^2$ donde $R = \cot \frac{\theta}{2} = \tan \frac{\beta}{2}$, luego se obtiene la estimación del Teorema 4.3. Es decir, el Teorema 4.4 mejora el Teorema 4.3.

ii) El Teorema 4.4 permite redemostrar el Teorema 4.2 en toda su generalidad. En efecto, habíamos razonado que podemos suponer que M es simplemente conexa y que $N(M)$ omite un disco en $\mathbb{S}^2$ centrado en el polo norte. Fijado $p \in M$, la desigualdad (3) junto con la completitud de M implican que $K(p) = 0$, luego M debe ser un plano.

Demostración. La única modificación sustancial respecto a la prueba del Teorema 4.3 es al definir la función G a la que aplicaremos el Lema de Schwarz, ya que no podemos presuponer que $g(p) = 0$.

Razonando como en el Teorema 4.3, podemos suponer que M es conformemente $\mathbb{D}$. Sea $(g(z), f(z)\,dz)$ la representación de Weierstrass de M definida en $\mathbb{D}$. Fijemos $p \in M$ (no necesariamente $g(p) = 0$). Como N omite un disco de radio θ centrado en $(0, 0, 1)$, llamando $\beta = \pi - \theta$ y razonando como en la prueba del Teorema 4.3 se llega a:

- $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}(0, R)$, donde $R = \tan \frac{\beta}{2} = \cot \frac{\theta}{2}$.
- f no tiene ceros en $\mathbb{D}$, luego $d\overline{s}^2 = |f|^2|dz|^2$ es una métrica llana sobre M.
- Sea $r > 0$ el mayor radio geodésico para $d\overline{s}^2$ centrado en p. Entonces, $\overline{\exp}_p : \mathbb{D}(0, r) \subset (T_pM, d\overline{s}^2_p) \to (D_{d\overline{s}^2}(p, r), ds^2)$ es un biholomorfismo y $z = \overline{\exp}_p w$ es un cambio de coordenada local holomorfa, donde $w \in \mathbb{D}(0, r)$ está centrada en p, es decir, $p = w(0)$.
- Sea $(\widetilde{g}(w), \widetilde{f}(w)\,dw)$, $w \in \mathbb{D}(0, r)$, la representación de Weirestrass de M en w. Entonces, $|\widetilde{f}| \equiv 1$ en $\mathbb{D}(0, r)$.
- Existe $w_0 \in \partial\mathbb{D}(0, r)$ tal que $\Gamma = \overline{\exp}_p \circ \alpha$ es una curva divergente en M, y $d(p, \partial M) \leq \mathrm{Long}_{ds^2}(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} \left(1 + |\widetilde{g}(w)|^2\right)\,|dw|$.

Como $g(\mathbb{D}) \subset D(0, R)$, tenemos $|\widetilde{g}(w) - g(p)| \leq R + |g(p)|$ $\forall w \in \mathbb{D}(0, r)$. Definimos $G : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mediante

$$G(\xi) = \frac{1}{R + |g(p)|}\left[\widetilde{g}(r\xi) - g(p)\right].$$

Como G es holomorfa y $G(0) = 0$, el Lema de Schwarz implica $|G(\xi)| \leq |\xi|$ $\forall \xi \in \mathbb{D}$, que ahora se traduce en $|\widetilde{g}(w) - g(p)| \leq (R + |g(p)|)\frac{|w|}{r}$, $\forall w \in \mathbb{D}(0, r)$. Usando la desigualdad triangular tendremos $|\widetilde{g}(w)| \leq |g(p)| + (R + |g(p)|)\frac{|w|}{r}$, $\forall w \in \mathbb{D}(0, r)$. Insertando esta estimación en la última integral e integrando queda

$$d(p, \partial M) \leq \frac{1}{2}\int_{[0,1[w_0} \left(1 + |\widetilde{g}(w)|^2\right)\,|dw| \leq \frac{r}{6}\left(3 + R^2 + 5R|g(p)| + 7|g(p)|^2\right). \tag{4}$$

Por otro lado,

$$|K|(p) = \left(\frac{4|\widetilde{g}'(0)|}{|\widetilde{f}(0)|(1 + |\widetilde{g}(0)|^2)^2}\right)^2 = \left(\frac{4|\widetilde{g}'(0)|}{(1 + |g(p)|^2)^2}\right)^2.$$

De nuevo por la desigualdad de Schwarz tenemos $|G'(0)| \leq 1$, que se traduce en $|\widetilde{g}'(0)| \leq \frac{R+|g(p)|}{r}$. Sustituyendo en la última expresión obtenemos

$$|K(p)| \leq \frac{16(R + |g(p)|)^2}{r^2(1 + |g(p)|^2)^4}. \tag{5}$$

Finalmente, (4) y (5) implican la desigualdad del Teorema 4.4. □

El tercer Teorema de Osserman que presentamos mejora la solución de la conjetura de Nirenberg, en el sentido que prueba que la imagen por la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana ha de ser aún más grande que lo que expresa la densidad en $\mathbb{S}^2(1)$. Este concepto topológico se cambiará por otro de naturaleza conforme, la *parabolicidad.* Para entender este último, necesitamos estudiar algunos preliminares de la teoría clásica de superficies de Riemann.

Definición 4.1 Sea M una superficie de Riemann y $u : M \to \mathbb{R}$ continua. u se dice *armónica* en M cuando la expresión local de u en cualquier coordenada local holomorfa de M sea una función armónica en el sentido usual para abiertos de $\mathbb{C}$.

- En la definición anterior puede cambiarse "cualquier coordenada local holomorfa" por "para cada punto existe una coordenada local holomorfa".
- Si u es armónica, entonces u es analítica. Sin embargo, los conceptos de subarmonicidad y superarmonicidad que siguen no conllevarán esta regularidad.

Definición 4.2 Sea M una superficie de Riemann, y $u : M \to R$ una función continua. u se dice *subarmónica* en M si cumple
$\forall D \subset M$ dominio, $\forall h : D \to \mathbb{R}$ armónica tal que $u \leq h$ en D, se tiene $u \equiv h$ ó $u < h$ en D.
$u \in C^0(M)$ se dice *superarmónica* cuando $-u$ es subarmónica.

- Los conceptos de armonicidad, subarmonicidad y superarmonicidad son invariantes por biholomorfismos conformes.
- El mínimo (resp. máximo) de dos funciones subarmónicas es una función subarmónica (resp. superarmónica). En particular, uno puede construir rápidamente funciones subarmónicas (resp. superarmónicas) no regulares. No obstante, es fácil probar que si $u \in C^2(M)$, entonces u es subarmónica si y sólo si $\Delta u \geq 0$, donde Δ es el operador laplaciano asociado a cualquier métrica en la estructura conforme de la superficie de Riemann.
- Toda función subarmónica $u : M \to \mathbb{R}$ cumple el principio del máximo en cualquier dominio relativamente compacto $D \subset M$, i.e. si $h \in C(\overline{D})$ es una función armónica en D y $u \leq h$ en ∂D, entonces $u \leq h$ en D: en caso contrario, el máximo de $u - h$ en $\overline{D}$ existe (por compacidad) y es un punto interior $p_0 \in D$ donde $(u-h)(p_0) > 0$. Así, $v = u - (u-h)(p_0)$ es subarmónica en M, $v \leq h$ en D y $v(p_0) = h(p_0)$, luego por definición de subarmonicidad tendremos $v \equiv h$ en D, luego $u - h \equiv (u-h)(p_0)$ en D y lo mismo es cierto en $\overline{D}$. Esto es imposible, sin más que evaluar en cualquier punto de ∂D. Un razonamiento análogo prueba que toda función subarmónica cumple el principio del mínimo en cualquier dominio relativamente compacto.

Definición 4.3 Sea M una superficie de Riemann (sin frontera).

1. M se dice *elíptica* si es compacta.

2. M se dice *hiperbólica* si existe una función subarmónica negativa y no constante definida en todo M.

3. M se dice *parabólica* cuando no es compacta, pero tampoco es hiperbólica.

Así, una superficie de Riemann no compacta será parabólica cuando verifique el Teorema de Liouville para funciones subarmónicas (el Teorema 2.1 nos dice que $\mathbb{C}$ es parabólico).

El resultado de Osserman que vamos buscando afirma que la imagen por la aplicación de Gauss de una superficie superficie minimal completa y no llana de $\mathbb{R}^3$ es toda la esfera $\mathbb{S}^2(1)$ o un subconjunto parabólico de ésta. Por lo tanto, lo primero que cabe preguntarse es si con este nuevo resultado mejoramos el Teorema 4.2. La respuesta es afirmativa.

Proposición 4.1 *Sea D un abierto parabólico de $\mathbb{S}^2(1)$. Entonces, D es denso en $\mathbb{S}^2(1)$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que D no es denso. Así, existe un abierto O de la esfera tal que $O \subset \mathbb{S}^2(1) - D$. Tras un giro, podemos suponer que $(0,0,1) \in O$. Como $D \subset \mathbb{S}^2(1) - O$, la proyección estereográfica F desde el polo norte aplica D en un abierto acotado de $\mathbb{C}$. Por tanto, existe $M > 0$ tal que $Re(z) < M$, $\forall z \in F(D)$. La función $z \mapsto Re(z) - M, \forall z \in F(D)$, es subarmónica y negativa en el dominio parabólico $F(D)$, luego constante. Esto contradice que D sea abierto en $\mathbb{S}^2(1)$. □

Definición 4.4 Sea M una superficie de Riemann y $p \in M$. La *función de Green para M con singularidad en p* es una función armónica y positiva G_p en $M - \{p\}$, tal que

- Dada una coordenada local holomorfa z centrada en p, $G_p(z) + \log|z|$ es armónica en un entorno de 0, y

- Si $\widetilde{G}$ es cualquier otra función armónica y positiva en $M - \{p\}$ verificando el punto anterior, entonces $G_p \leq \widetilde{G}$ en $M - \{p\}$.

(Caso de existir, la función de Green es claramente única).

Lema 4.2 ([4]) *Sea M una superficie de Riemann. Son equivalentes:*

i) M es hiperbólica.

ii) Dado p en M, existe la función de Green para M con singularidad en p.

Lema 4.3 *Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio. Son equivalentes:*

1. *D es hiperbólico.*

2. *$\exists h : D \to \mathbb{R}$ función armónica no constante tal que* $\log(1+|w|^2) \leq h(w)$, *$\forall w \in D$.*

Demostración.
1 ⇒2. Fijemos un punto $w_0 \in D$. Por se D hiperbólico, el Lema 4.2 asegura la existencia de la función de Green G_{w_0} para D con singularidad en w_0. Por definición de función de Green, existe una función g_{w_0} armónica en D tal que dado cualquier $w \in D-\{w_0\}$, se tiene $G_{w_0}(w) = -\log|w-w_0| + g_{w_0}(w)$. Como G_{w_0} es positiva en D, tenemos $\log|w-w_0| < g_{w_0}(w)$ $\forall w \in D - \{w_0\}$.

Sea $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(w_0, r) = \{|w-w_0| < r\} \subset D$. Definimos $B_{w_0} : \overline{\mathbb{C}} - \mathbb{D}(w_0, r) \to \mathbb{R}$,

$$B_{w_0}(w) = \log \frac{1+|w|^2}{|w-w_0|^2}.$$

B_{w_0} es continua en el compacto $\overline{\mathbb{C}} - \mathbb{D}(w_0, r)$, luego admitirá un máximo finito $C_{w_0} > 0$. Veamos que $\log\left(1+|w|^2\right) \leq 2g_{w_0}(w) + C_{w_0}$ en D: dado $w \in D - \mathbb{D}(w_0, r)$,

$$\log\left(1+|w|^2\right) - 2g_{w_0}(w) < \log\left(1+|w|^2\right) - 2\log|w-w_0| = B(w) \leq C_{w_0}. \qquad (6)$$

Pero $\log(1+|w|^2) - 2g_{w_0}(w)$ es subarmónica en D ($\Delta \log(1+|w|^2) = \frac{4}{(1+|w|^2)^2}$), luego el principio del máximo y (6) implican que $\log\left(1+|w|^2\right) \leq 2g_{w_0}(w) + C_{w_0}$ en D.

Así, hemos probado que $h_{w_0}(w) = 2g_{w_0} + C_{w_0}$ es una función armónica en D que acota superiormente a $\log\left(1+|w|^2\right)$. Si h_{w_0} no es constante en D hamos terminado. Y si h_{w_0} es constante en D lo mismo le ocurrirá a g_{w_0}. Esto y la definición de función de Green llevan a que D tiene que ser un disco centrado en w_0 de cierto radio positivo. Tomando ahora $w_1 \in D - \{w_0\}$ y repitiendo el razonamiento anterior en w_1, encontramos otra función h_{w_1} armónica en D que acota superiormente a $\log\left(1+|w|^2\right)$, pero ahora h_{w_1} no podrá ser constante.
2 ⇒1. Supongamos que $\exists h : D \to \mathbb{R}$ armónica no constante tal que $\log(1+|w|^2) \leq h(w), \forall w \in D$. Así, h es superarmónica no negativa y no constante en D luego D es hiperbólico. □

Lema 4.4 ([4]) *Sea M una superficie de Riemann hiperbólica y C un compacto de M con frontera regular (en el sentido de la existencia de funciones barrera). Entonces, existe una función continua $w : \overline{M - C} \to \mathbb{R}$, verificando*

i) w es armónica en $M - C$,

ii) $w_{|\partial C} \equiv 1$, y

iii) $0 < w < 1$ en $M - C$.

Lema 4.5 *Sea* $\{p_1, ..., p_n\} \subset \mathbb{S}^2(1)$*. Entonces,* $\mathbb{S}^2(1) - \{p_1, ..., p_n\}$ *es una superficie de Riemann parabólica.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{S}^2(1) - \{p_1, ..., p_n\}$ es hiperbólica. Sea D un disco conforme en $\mathbb{S}^2(1)$ cuyo cierre no contenga a ninguno de los puntos $p_i, \quad i = 1, ..., n$. Llamemos $C = \overline{D}$, compacto de $\mathbb{S}^2(1) - \{p_1, ..., p_n\}$ con frontera regular. Por el Lema 4.4, existe una función continua $w : \mathbb{S}^2(1) - (D \cup \{p_1, ..., p_n\}) \to \mathbb{R}$, verificando

- w es armónica en $\mathbb{S}^2(1) - \left(\overline{D} \cup \{p_1, ..., p_n\}\right)$,
- $w_{|\partial D} \equiv 1$, y
- $0 < w < 1$ en $\mathbb{S}^2(1) - \left(\overline{D} \cup \{p_1, ..., p_n\}\right)$.

En las proximidades de los puntos p_i, w es una función armónica y acotada, luego admite una extensión armónica a $\mathbb{S}^2(1) - D$, a la que seguiremos llamando w. Sea $\widetilde{w} : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\widetilde{w}(p) = \begin{cases} w(p) & \text{si } p \in \mathbb{S}^2(1) - D, \\ 1 & \text{si } p \in \overline{D}. \end{cases}$$

Como $\widetilde{w}$ es superarmónica en $\mathbb{S}^2(1)$ y ésta es compacta, $\widetilde{w}$ será constante. En particular, w es constante, contradicción con el apartado *iii)* del Lema 4.4. □

Teorema 4.5 (Osserman [12]) *Sea* $M \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie minimal y completa de* $\mathbb{R}^3$*, con aplicación de Gauss* N*. Entonces, se da una de las siguientes posibilidades:*

i) M *es un plano.*

ii) $N(M) = \mathbb{S}^2(1)$.

iii) $N(M)$ *es un abierto parabólico de* $\mathbb{S}^2(1)$.

Demostración. No perdemos generalidad suponiendo que M es simplemente conexa. Supongamos que $N(M) \neq \mathbb{S}^2(1)$ y que $N(M)$ no es parabólico, y veamos que M es necesariamente un plano.

Como $N(M) \neq \mathbb{S}^2(1)$, podemos suponer que $(0, 0, 1) \notin N(M)$. Sea g la proyección estereográfica de N desde $(0, 0, 1)$. Como $g(M) \subset \mathbb{C}$ no es parabólico, deberá ser hiperbólico. Por el Lema 4.3, existe $h : g(M) \to \mathbb{R}$ armónica no constante tal que $\log(1 + |w|^2) \leq h(w)$, $\forall w \in g(M)$. De aquí obtenemos

$$\log\left(1 + |g(z)|^2\right) \leq h(g(z)), \quad \forall z \in M,$$

siendo $M = \mathbb{C}$ ó $M = \mathbb{D}$ (Teorema de uniformización).

Por otro lado, sea ds^2 la métrica inducida en M por el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, y $(g(z), f(z)\,dz)$ la representación de Weierstrass de M. Como g no tiene polos en M, f no podrá tener ceros en M. Definimos la métrica conforme a ds^2

$$d\overline{s}^2 = \left(\frac{|f|}{2}e^{h\circ g}\right)^2 |dz|^2.$$

Veamos que $d\overline{s}^2$ es completa: $\frac{1}{2}\left(1+|g|^2\right)|f| = \frac{|f|}{2}e^{\log\left(1+|g|^2\right)} \leq \frac{|f|}{2}e^{h\circ g}$, de donde $ds^2 \leq d\overline{s}^2$. Como ds^2 es completa, $d\overline{s}^2$ también lo será.

Veamos que $d\overline{s}^2$ es llana: Consideremos la métrica auxiliar $d\xi^2 = \left(\frac{|f|}{2}\right)^2 |dz|^2$. Como f es holomorfa y sin ceros, $d\xi^2$ es llana (Lema 1.2). Además, $d\overline{s}^2 = e^{2(h\circ g)}d\xi^2$, luego llamando $\overline{K}$ a la curvatura de Gauss de $d\overline{s}^2$, el Lema 1.1 nos dice que $\overline{K} = -e^{-2(h\circ g)}\Delta_{d\xi^2}(h\circ g)$, donde $\Delta_{d\xi^2}$ denota el laplaciano respecto a $d\xi^2$. De nuevo por el Lema 1.2, los laplacianos $\Delta^2_{d\xi}$ y Δ_0 (euclídeo) se relacionan mediante $\Delta^2_{d\xi} = \left(\frac{2}{|f|}\right)^2 \Delta_0$. Como $\Delta_0(h\circ g) = 0$ (h es armónica y g holomorfa), concluimos que $\overline{K} = 0$ en M, esto es, $d^{\overline{s}^2}$ es llana.

Así, $(M, d\overline{s}^2)$ es una superficie Riemanniana completa, llana y simplemente conexa, luego es isométrica a $(\mathbb{R}^2, g_0)$. En particular, M es biholomorfa a $\mathbb{C}$ luego podemos ver la aplicación de Gauss como función entera $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Por el Teorema pequeño de Picard, g toma todos los valores complejos con una posible excepción, salvo cuando g sea constante. Si g no fuera constante, tendríamos que $N(M)$ es la esfera salvo a lo más dos puntos, siendo uno de ellos $(0,0,1)$. Tras proyectar estereográficamente, $g(M)$ es $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}$ menos un punto, y ambos abiertos son parabólicos por el Lema 4.5. Esto contradice la hipótesis y prueba que g es constante, luego M es un plano. $\square$

5. El Teorema de Xavier.

Usando métodos distintos a los expuestos anteriormente, Xavier mejoró en 1981 los teoremas de Osserman sobre la aplicación de Gauss de una superficie minimal. Necesitaremos bastantes preliminares de teoría de integración en variedades Riemannianas.

Lema 5.1 (Fatou) *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana y $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas c.p.d. en M (posiblemente tomando el valor $+\infty$). Entonces,*

$$\int_M \underline{\lim} f_m\, dv_g \leq \underline{\lim} \int_M f_m\, dv_g.$$

Lema 5.2 *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana y $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$. Entonces, $\Delta \log u = \frac{1}{u^2}\left(u\Delta u - \|\nabla u\|^2\right)$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

En lo que sigue usaremos la formulación débil para expresar ciertas expresiones diferenciales en forma integral.

Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana. Tomemos una función $u \in C^1(M)$ y un campo $X \in \mathfrak{X}_0(M)$. La divergencia de uX es $\text{div}(uX) = g(\nabla u, X) + u \ \text{div}(X) = g(\nabla u, X) + u \ \text{div}(X)$, donde ∇u es el gradiente de u (que es un campo continuo). Estas condiciones de regularidad son suficientes para aplicar el Teorema de la divergencia, concluyendo que

$$\int_M [g(\nabla u, X) + u \ \text{div}(X)] \, dv_g = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}_0(M).$$

La ecuación anterior justifica la siguiente

Definición 5.1 Sean $u \in L^2(M, g)$ y $Z \in \mathcal{L}^2(M, g)$ (campo de cuadrado integrable). Z se dice un *gradiente débil* de u si cumple

$$\int_M [g(Z, X) + u \ \text{div}(X)] \, dv_g = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}_0(M). \tag{7}$$

A (7) se le llama la *condición de compatibilidad* para u y α.

Caso de existir, el gradiente débil de una función $u \in L^2(M, g)$ es único, por lo que suele denotarse a Z como ∇u.

Definición 5.2 En la situación anterior, se define el *espacio de Sobolev*

$$H^1(M, g) = \left\{ u \in L^2(M, g) \ / \ \exists \ \nabla u \in \mathcal{L}^2(M, g) \text{ gradiente débil de } u \right\}.$$

Es fácil comprobar que si Ω es un abierto de M y $u \in H^1(M, g)$, entonces $u|_\Omega \in H^1(\Omega, g)$ (y $\nabla(u|_\Omega) = (\nabla u)|_\Omega$). Por otro lado, $H^1(M, g)$ tiene una estructura natural de espacio de Hilbert, con el producto escalar

$$\begin{array}{rccl} (\cdot,\cdot)_{H^1(M,g)} : & H^1(M,g) \times H^1(M,g) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v)_{L^2(M,g)} + (\nabla u, \nabla v)_{\mathcal{L}^2(M,g)}, \end{array}$$

donde

$$(u, v)_{L^2(M,g)} = \int_M uv \, dv_g, \quad (X, Y)_{\mathcal{L}^2(M,g)} = \int_M g(X, Y) \, dv_g.$$

La norma asociada a este producto escalar recibe el nombre de *norma de Sobolev* en (M, g), $\| \cdot \|_{H^1(M,g)}$, que hace a $H^1(M, g)$ un espacio normado completo (luego de Hilbert).

Un hecho estándar de la teoría de integración es el espacio $C_0^\infty(M)$ es denso en $L^2(M, g)$ con la norma $\| \cdot \|_{L^2}$. Como $C_0^\infty(M) \subset H^1(M, g) \subset L^2(M, g)$, tomando adherencias en la topología generada por dicha norma llegaremos a que $C_0^\infty(M)$ es denso en $H^1(M, g)$ con la norma $\| \cdot \|_{L^2}$ (y $H^1(M, g)$ es denso en $L^2(M, g)$ con $\| \cdot \|_{L^2}$). Sin embargo, $C_0^\infty(M)$ no es, en general, denso en $H^1(M, g)$ respecto de $\| \cdot \|_{H^1}$. Esto nos lleva a la siguiente

Definición 5.3 *Dada una variedad Riemanniana* (M^n, g)*, se define*

$$H_0^1(M,g) = \overline{C_0^\infty(M)}^{\|\cdot\|_{H^1}}.$$

Como en todo espacio vectorial topológico el cierre de un subespacio vectorial vuelve a ser un subespacio vectorial, $H_0^1(M,g)$ es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(M,g)$, y por tanto $\big(H_0^1(M,g), (\cdot,\cdot)_{H^1}\big)$ también es un espacio de Hilbert.

Lema 5.3 ([13]) *Si* $u \in H^1(M,g)$ *y* $\operatorname{sop}(u)$ *es compacto, entonces* $u \in H_0^1(M,g)$.

La teoría de espacios de Sobolev es una poderosa herramienta para estudiar ecuaciones diferenciales sobre variedades Riemannianas. Como ése no es nuestro objetivo, nos limitaremos a presentar aquí un par de resultados que serán útiles en lo que sigue.

Definición 5.4 Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana completa, $p_0 \in M$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$. Llamaremos *función meseta centrada en* $p_0 \in M$ *con radios* a, b a la función $\varphi_{a,b} : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$p \in M \longmapsto \varphi_{a,b}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad d(p,p_0) < a, \\ \frac{b-d(p,p_0)}{b-a} & \text{si} \quad a \leq d(p,p_0) \leq b, \\ 0 & \text{si} \quad d(p,p_0) > b, \end{cases}$$

Lema 5.4 ([13]) *En la situación anterior, se cumplen*

i) $\varphi_{a,b} \in H_0^1(M,g)$.

ii) El soporte de $\varphi_{a,b}$ *es la bola métrica cerrada centrada en* p_0 *y de radio* b.

iii) El gradiente débil de $\varphi_{a,b}$ *es*

$$\nabla\varphi_{a,b} = \begin{cases} -\frac{1}{b-a}\nabla d_{p_0} & si \quad a < d(p,p_0) < b \\ 0 & si \quad d(p,p_0) \leq a \;\; ó \;\; d(p,p_0) \geq b \end{cases}$$

Lema 5.5 ([13]) *Sea* (M,g) *una variedad Riemanniana y* $q_1, q_2 \in L^\infty(M)$*. Entonces, el funcional* $F : H^1(M,g) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$F(u) = \int_M (q_1\|\nabla u\|^2 + q_2 u^2)\, dv_g, \qquad u \in H^1(M,g),$$

es continuo respecto a $\|\cdot\|_{H^1}$.

Proposición 5.1 *Sea* (M^n, g) *una variedad Riemanniana completa y conexa, y* $h, u \in C^\infty(M)$ *verificando*

1. *$u > 0$ en M, $h > 0$ c.p.d. en M.*
2. *$\Delta \log h = 0$ siempre que $h > 0$.*
3. *Para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$, se tiene $\int_M \left(\|\nabla\varphi\|^2 + \varphi^2 \Delta \log u\right) dv_g \geq 0$.*

Entonces, $uh^p \notin L^2(M,g)$ $\forall p > 0$, a menos que M tenga volumen finito, $\Delta \log u = 0$ y uh^p sea constante.

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por el Lema 5.2, $\Delta \log(h^2+\varepsilon) = \frac{(h^2+\varepsilon)\Delta(h^2) - \|\nabla(h^2)\|^2}{(h^2+\varepsilon)^2}$. Pero $\|\nabla(h^2)\|^2 = 4h^2\|\nabla h\|^2$, $\Delta(h^2) = 2(\|\nabla h\|^2 + h\Delta h)$. Sustituyendo y operando, tenemos

$$\Delta \log(h^2+\varepsilon) = \frac{2\varepsilon(\|\nabla h\|^2 + h\Delta h) + 2h^2(h\Delta h - \|\nabla h\|^2)}{(h^2+\varepsilon)^2}$$

$$\stackrel{(A)}{=} \frac{2\varepsilon(2\|\nabla h\|^2 + h^2\Delta \log h) + 2h^4 \Delta \log h}{(h^2+\varepsilon)^2},$$

donde en (A) hemos usado de nuevo el Lema 5.2. Usando ahora las hipótesis 1 y 2, lo anterior se transforma en

$$\Delta \log(h^2+\varepsilon) = \frac{4\varepsilon\|\nabla h\|^2}{(h^2+\varepsilon)^2} \geq 0. \tag{8}$$

Fijemos ahora $p > 0$ y sea $v_\varepsilon = u(h^2+\varepsilon)^{p/2} \in C^\infty(M)$, $v_\varepsilon > 0$. Por el Lema 5.2, $v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon - \|\nabla v_\varepsilon\|^2 = v_\varepsilon^2 \Delta \log v_\varepsilon = v_\varepsilon^2 \left[\Delta \log u + \frac{p}{2}\Delta \log(h^2+\varepsilon)\right]$. Usando (8), tenemos

$$v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon - \|\nabla v_\varepsilon\|^2 \geq v_\varepsilon^2 \Delta \log u. \tag{9}$$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(M)$. Usando $\varphi v_\varepsilon \in C_0^\infty(M)$ en la hipótesis 3, sale

$$0 \leq \int_M \left(\|\nabla(\varphi v_\varepsilon)\|^2 + \varphi^2 v_\varepsilon^2 \Delta \log u\right) dv_g.$$

Pero $\|\nabla(\varphi v_\varepsilon)\|^2 = v_\varepsilon^2\|\nabla\varphi\|^2 + 2\varphi v_\varepsilon \langle \nabla\varphi, \nabla v_\varepsilon\rangle + \varphi^2\|\nabla v_\varepsilon\|^2$, de donde

$$0 \leq 2\int_M \varphi v_\varepsilon \langle \nabla\varphi, \nabla v_\varepsilon\rangle \, dv_g + \int_M \left(v_\varepsilon^2\|\nabla\varphi\|^2 + \varphi^2\|\nabla v_\varepsilon\|^2 + \varphi^2 v_\varepsilon^2 \Delta \log u\right) dv_g. \tag{10}$$

Pero

$$2\int_M \varphi v_\varepsilon \langle \nabla\varphi, \nabla v_\varepsilon\rangle \, dv_g = \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla(\varphi^2), \nabla(v_\varepsilon^2)\rangle \, dv_g \stackrel{(B)}{=} -\frac{1}{2}\int_M \varphi^2 \Delta(v_\varepsilon^2) \, dv_g$$

$$= -\int_M \varphi^2 \left(\|\nabla v_\varepsilon\|^2 + v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon\right) dv_g,$$

donde en (B) hemos integrado por partes. Sustituyendo esto en (10) queda

$$0 \leq \int_M \left[v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \varphi^2 \left(v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon - v_\varepsilon^2 \Delta \log u\right)\right] dv_g \overset{(9)}{\leq} \int_M \left(v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 - \varphi^2 \|\nabla v_\varepsilon\|^2\right) dv_g,$$

luego

$$\int_M \varphi^2 \|\nabla v_\varepsilon\|^2 \, dv_g \leq \int_M v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g. \tag{11}$$

Vamos a tomar límites cuando $\varepsilon \to 0$ en la última expresión. Puntualmente, $v_\varepsilon \to uh^p$. Además, donde h sea positiva (es decir, c.p.d. en M) se tiene $\nabla v_\varepsilon = (h^2+\varepsilon)^{p/2}\nabla u + pu(h^2+\varepsilon)^{\frac{p}{2}-1} h \nabla h \to h^p \nabla u + puh^{p-1}\nabla h = \nabla(uh^p)$. Así,

$$\int_M \varphi^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g = \int_M \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi^2 \|\nabla v_\varepsilon\|^2 \, dv_g = \int_M \underline{\lim} \varphi^2 \|\nabla v_\varepsilon\|^2 \, dv_g$$

$$\overset{\text{(Fatou)}}{\leq} \underline{\lim} \int_M \varphi^2 \|\nabla v_\varepsilon\|^2 \, dv_g \overset{(11)}{\leq} \underline{\lim} \int_M v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g.$$

Como v_ε depende de forma monótona creciente de ε, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona en la última integral:

$$\underline{\lim} \int_M v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_M v_\varepsilon^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g = \int_M (uh^p)^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g.$$

En resumen,

$$\int_M \varphi^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g \leq \int_M (uh^p)^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{12}$$

Como M es completa, fijado $p_0 \in M$ podemos considerar funciones meseta $\varphi_{a,b} \in H_0^1(M,g)$. Queremos extender (12) a este tipo de funciones. Para ello, fijemos $a, b > 0$ con $a < b$. Como $uh^p \in C^0(M)$ y $\overline{B(p_0, 2b)}$ es compacto, tenemos $uh^p \in L^\infty(B(p_0, 2b))$. Usando el Lema 5.5 en $B(p_0, 2b)$, cada uno de los funcionales

$$\varphi \in C_0^\infty(B(p_0,2b)) \mapsto \int_M \varphi^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g, \quad \varphi \in C_0^\infty(B(p_0,2b)) \mapsto \int_M (uh^p)^2 \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g$$

es continuo en la norma de Sobolev. Como $\varphi_{a,b} \in H_0^1(M,g)$, tenemos $\varphi_{a,b} \in H^1(B(p_0,2b), g)$. Como $\mathrm{sop}(\varphi_{a,b}) = \overline{B(p_0, b)}$, que es un compacto de $B(p_0, 2b)$, el Lema 5.3 implica que $\varphi_{a,b} \in H_0^1(B(p_0, 2b), g)$. Por tanto, podemos tomar límites en (12) y concluir que

$$\int_M \varphi_{a,b}^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g \leq \int_M (uh^p)^2 \|\nabla\varphi_{a,b}\|^2 \, dv_g, \quad \text{siempre que } 0 < a < b. \tag{13}$$

Fijemos ahora $a > 0$.

$$\int_{B(p_0,a)} \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g = \int_{B(p_0,a)} \varphi_{a,b}^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g \leq \int_M \varphi_{a,b}^2 \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g$$

$$\stackrel{(13)}{\leq} \int_M (uh^p)^2 \|\nabla\varphi_{a,b}\|^2 \, dv_g \stackrel{\text{(Lema 5.4)}}{=} \frac{1}{(b-a)^2} \int_{B(p_0,b)-B(p_0,a)} (uh^p)^2 \, dv_g$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_{B(p_0,b)} (uh^p)^2 \, dv_g.$$

Resumiendo,

$$\int_{B(p_0,a)} \|\nabla(uh^p)\|^2 \, dv_g \leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_{B(p_0,b)} (uh^p)^2 \, dv_g. \tag{14}$$

Supongamos que $uh^p \in L^2(M, g)$ para un $p > 0$. Tomando $b \to \infty$ en (14) deducimos que uh^p es constante en $B(p_0, a)$. Como a es arbitrario y M es conexa, uh^p será constante (positiva) en M. Como $uh^p \in L^2(M, g)$, (M, g) debe tener volumen finito. Por último,

$$\Delta \log u = \Delta \log(uh^p h^{-p}) = \Delta \left(\log(uh^p) - p \log h\right) = -p\Delta \log h = 0.$$

□

La tesis del último lema admite dos posibilidades. Sin embargo, cuando M es una superficie minimal la segunda opción es imposible:

Proposición 5.2 *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana completa, conexa, simplemente conexa y con curvatura seccional $K \leq 0$. Entonces, (M, g) tiene volumen infinito.*

Demostración. Por el Teorema de Hadamard, dado cualquier $p \in M$ la exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo. Dado $R > 0$, consideremos la bola geodésica $B(p_0, R) \subset M$. Por el primer Teorema de Bishop sobre comparación de volúmenes, se tiene $\mathrm{Vol}(B(p_0, R), g) \geq \mathrm{Vol}(\mathbb{B}(0, R), g_0)$, siendo este último el volumen de una bola de radio R en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual. Tomando $R \to \infty$ se concluye el Lema. □

También necesitaremos algunos resultados de variable compleja. Recordemos que los automorfismos conformes del disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ son

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z} \Big/ \theta \in [0, 2\pi[, z_0 \in \mathbb{D} \right\}.$$

También denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ al espacio de funciones meromorfas en $\mathbb{D}$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

Definición 5.5
- Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$ se dice *invariante* cuando $f \circ \varphi \in \mathcal{F}$, $\forall f \in \mathcal{F}, \forall \varphi \in \mathbb{D}$.

- Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$ se dice *normal (en el sentido de Montel)* cuando $\mathcal{F}$ sea relativamente compacto en $\mathcal{M}(\mathbb{D})$.
- Una función $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ se dice *normal* cuando la familia invariante $\mathcal{F} = \{f \circ \varphi \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\}$ sea normal.

Teorema 5.1 ([7]) *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Entonces, $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si para todo compacto $C \subset \mathbb{D}$, existe $A > 0$ tal que*

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq A, \quad \forall z \in C, \forall f \in \mathcal{F}.$$

(El Teorema 5.1 es válido cambiando $\mathbb{D}$ por cualquier dominio de $\mathbb{C}$).

Proposición 5.3

i) Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$ una familia invariante. Entonces, $\mathcal{F}$ es normal si y sólo si existe $A > 0$ tal que

$$\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} \leq A, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

ii) Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. Entonces, f es una función normal si y sólo si existe $A > 0$ tal que

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq \frac{A}{1-|z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración.

i) La condición necesaria es aplicar el Teorema 5.1 para el compacto $\{0\}$. Para la condición suficiente, sea $C \subset \mathbb{D}$ un compacto, $z \in C$ y $f \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es invariante, dada $\varphi(w) = \frac{w+z}{1+\bar{z}w} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tenemos $f \circ \varphi \in \mathcal{F}$, luego por hipótesis

$$A \geq \frac{|(f\circ\varphi)'(0)|}{1+|(f\circ\varphi)(0)|^2} = \frac{|f'(z)|(1-|z|^2)}{1+|f(z)|^2}, \tag{15}$$

luego $\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq \frac{A}{A_C}$, siendo $A_C = \mathrm{mín}_C(1-|z|^2) > 0$. Como $\frac{A}{A_C}$ es independiente de z y de f, el Teorema 5.1 prueba que $\mathcal{F}$ es una familia normal.

ii) Condición necesaria: si f es una función normal, $\mathcal{F} = \{f \circ \varphi \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\}$ será una familia normal. Como también es invariante, el apartado *i)* implica que existe $A > 0$ tal que $\frac{|(f\circ\varphi)'(0)|}{1+|(f\circ\varphi)(0)|^2} \leq A$, $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Fijemos $z \in \mathbb{D}$ y llamemos $\varphi(w) = \frac{w+z}{1+\bar{z}w} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Así, (15) prueba la desigualdad en *ii)*.

Condición suficiente: Si f satisface la desigualdad en *ii)* entonces (15) demuestra que $\frac{|(f\circ\varphi)'(0)|}{1+|(f\circ\varphi)(0)|^2} \leq A$, $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Como $\mathcal{F}$ es una familia invariante, el apartado *i)* implica que $\mathcal{F}$ es normal, luego f es una función normal.

$\square$

Teorema 5.2 (Montel-Caratheodory [3]) *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ tal que existen tres valores en $\overline{\mathbb{C}}$ que no son tomados por ninguna función de $\mathcal{F}$. Entonces, $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Lema 5.6 *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa que no toma los valores 0 y $a \in \mathbb{C}^*$. Entonces,*

$$\frac{|f'|}{|f|^{1-\frac{1}{k}} + |f|^{1+\frac{1}{k}}} \in L^p(\mathbb{D}, g_0), \ \forall p \in]0,1[, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Por el Teorema de Montel-Caratheodory, $f^{1/k}$ es una función normal ($f \circ \varphi$ omite los valores $0, a^{1/k}, \infty$ para toda $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$). Por la Proposición 5.3, existe $A > 0$ tal que $\frac{|(f^{1/k})'(z)|}{1+|f^{1/k}(z)|^2} \leq \frac{A}{1-|z|^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Operando queda $\frac{|f'|}{|f|^{1-\frac{1}{k}}+|f|^{1+\frac{1}{k}}} \leq \frac{kA}{1-|z|^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Pero es fácil comprobar que $\frac{1}{1-|z|^2} \in L^p(\mathbb{D}, g_0)$ $\forall p \in]0,1[$. $\square$

Teorema 5.3 (Xavier [15]) *La aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en $\mathbb{R}^3$ no puede omitir siete puntos de $\mathbb{S}^2(1)$.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal, completa y no llana, cuya aplicación de Gauss omite 7 puntos distintos de la esfera. Tras pasar al recubridor universal, podemos suponer que M es simplemente conexa. Por el Teorema de Uniformización, M es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ ó a $\mathbb{D}$. El primer caso es imposible, sin más que aplicar el Teorema de Picard a la aplicación de Gauss $g : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ de M. Tenemos por tanto $M = \mathbb{D}$. Tras un giro, podemos suponer que uno de los siete valores omitidos por el normal a M es el polo Norte. Llamando $(g, f\,dz)$ a la representación de Weierstrass de M (definida en $\mathbb{D}$), tenemos que $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa que omite seis números complejos distintos, $w_1, \ldots, w_6 \in \mathbb{C}$.

Primero notemos que f no tiene ceros en $\mathbb{D}$ ya que $\infty \notin g(\mathbb{D})$. Consideremos la función

$$F = \frac{g'}{f^{2/p} \prod_{i=1}^{6} (g - w_i)^\alpha} : \mathbb{D} \to \mathbb{C},$$

donde $p, \alpha > 0$ a determinar. Nótese que $f^{2/p}$, $(g-w_i)^\alpha$ existen como funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ porque éste es simplemente conexo y f, $g - w_i$ son funciones holomorfas y sin ceros (luego admiten logaritmo en $\mathbb{D}$). Además, F es holomorfa en $\mathbb{D}$ y sus ceros son los ceros de g' (que forman un conjunto discreto de $\mathbb{D}$ por el principio de identidad; en particular, $|F| > 0$ c.p.d. en $\mathbb{D}$). Por el tanto, $\Delta_0 \log |F| = 0$ c.p.d. en $\mathbb{D}$. Como ds^2 y $|dz|^2$ son conformes, el Lema 1.1 asegura que $\Delta \log |F| = 0$ c.p.d. en $\mathbb{D}$.

Afirmación 5.1 $|F| \notin L^p(M, ds^2), \ \forall p > 0.$

Demostración de la Afirmación 5.1. Usaremos la Proposición 5.1 en (M, ds^2). Consideremos las funciones $u = 1, h = |F|^2 \in C^\infty(M)$. Así, $u > 0$ en M y $h > 0$ c.p.d. en M, $\Delta \log h = 2\Delta \log |F| = 0$ siempre que $h > 0$, y la hipótesis *3* de la Proposición 5.1 se reduce a $\int_M \|\nabla\varphi\|^2 \, dv_g \geq 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(M)$. Por la Proposición 5.1, tenemos $uh^q \notin L^2(M, ds^2)$ $\forall q > 0$ (porque (M, ds^2) no tiene área finita gracias a la Proposición 5.2). Equivalentemente, $|F|^{2q} \notin L^2(M, ds^2)$ $\forall q > 0$, o también $|F| \notin L^p(M, ds^2)$ $\forall p > 0$. $\square$

Relacionando las medidas dA, dA_0 asociadas a ds^2 y $|dz|^2$ (Lema 1.1), tenemos

$$+\infty = \int_M |F|^p \, dA = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} |F|^p (1 + |g|^2)^2 |f|^2 \, dA_0 = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0. \qquad (16)$$

La contradicción estará en que podemos elegir $p, \alpha > 0$ tales que la última integral es finita. Para ver esto, tomemos δ tal que $0 < \delta < \frac{1}{4} \min_{i \neq j} |w_i - w_j|$. Dado $j = 1, \ldots, 6$, sea

$$D_j = \{z \in \mathbb{D} \mid |g(z) - w_j| \leq \delta\}.$$

Por la desigualdad triangular, $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Llamemos $\Omega = \mathbb{D} - \cup_{j=1}^6 D_j$. Así,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0 = \int_\Omega \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0 + \sum_{j=1}^6 \int_{D_j} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0.$$

Afirmación 5.2 *Tomando* $\delta < 1$, $p \in]0, 1[$ *y* $\alpha = 1 - \frac{1}{k} \in]0, 1[$ *para cualquier* $k \in \mathbb{N}$, *es*

$$\int_{D_j} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0 < \infty, \quad \forall j = 1, \ldots, 6.$$

Demostración de la Afirmación 5.2. Fijemos $j \in \{1, \ldots, 6\}$. Para $i \neq j$, en D_j se tiene $|g - w_i| > \delta$ luego

$$\frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \leq \frac{1}{\delta^{5p\alpha}} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{|g - w_j|^{p\alpha}} \leq \text{cte.} \left(\frac{|g'|}{|g - w_j|^\alpha} \right)^p,$$

donde hemos usado en la última desigualdad que $|g|$ está acotada en D_j. Si suponemos $\delta < 1$, entonces $|g - w_j| < 1$ en D_j. Eligiendo $\alpha < 1$, tendremos $|g - w_j|^\alpha > |g - w_j|^{2-\alpha}$ en D_j, luego $|g - w_j|^\alpha > \frac{1}{2}(|g - w_j|^\alpha + |g - w_j|^{2-\alpha})$ y

$$\int_{D_j} \frac{|g'|^p (1 + |g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0 \leq \text{cte.} \int_{D_j} \left(\frac{|g'|}{|g - w_j|^\alpha} \right)^p dA_0 \leq \text{cte.} \int_{D_j} \left(\frac{|g'|}{|g - w_j|^\alpha + |g - w_j|^{2-\alpha}} \right)^p dA_0$$

A continuación, aplicaremos el Lema 5.6 a la función $g - w_j : D \to \mathbb{C}$, que no toma los valores 0 y w_k con $k \neq j$. Por tanto, tenemos

$$\frac{|g'|}{|g-w_j|^{1-\frac{1}{k}} + |g-w_j|^{1+\frac{1}{k}}} \in L^p(\mathbb{D}, g_0),\ \forall p \in]0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando α de la forma $1 - \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N}$ (recordemos que teníamos $\alpha \in]0,1[$), la Afirmación 5.2 está probada. $\square$

Afirmación 5.3 *Tomando* $\alpha = 1 - \frac{1}{k} \in]\frac{10}{11}, 1[$ *y* $p = \frac{5}{6\alpha}$, *es* $\displaystyle\int_\Omega \frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g-w_i|^{p\alpha}}\, dA_0 < \infty.$

Demostración de la Afirmación 5.3. Fijemos $i \neq 6$ y trabajemos en Ω. Usando la desigualdad triangular y que $|g - w_i| > \delta$ en Ω,

$$\left|\frac{g-w_6}{g-w_i}\right| \leq 1 + \frac{|w_i - w_6|}{|g-w_i|} < 1 + \frac{|w_i-w_6|}{\delta},$$

luego $\left|\frac{g-w_6}{g-w_i}\right|$ es acotada en Ω, y

$$\frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g-w_i|^{p\alpha}} = \frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{|g-w_6|^{6p\alpha}} \prod_{i=1}^5 \left|\frac{g-w_6}{g-w_i}\right|^{p\alpha} \leq \text{cte.} \frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{|g-w_6|^{6p\alpha}}$$

Por otro lado, la función $\frac{(1+|g|^2)^2}{|g-w_6|^4}$ es acotada en Ω, luego

$$\frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{|g-w_6|^{6p\alpha}} \leq \text{cte.} \frac{|g'|^p}{|g-w_6|^{6p\alpha-4}} \overset{(\star)}{=} \text{cte.} \frac{|g'|^p}{|g-w_6|}$$

donde en $(\star)$ hemos sustituido $p = \frac{5}{p\alpha}$.

Vamos a aplicar el Lema 5.6 a la función $g - w_6$ otra vez. Para ello, necesitaremos una acotación en Ω del tipo

$$\frac{1}{|g-w_6|} \leq \frac{A}{(|g-w_6|^\alpha + |g-w_6|^{2-\alpha})^p}, \tag{17}$$

para cierta constante $A > 0$ (seguimos con $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$). La acotación (17) equivale a

$$A^{1/p} \geq |g-w_6|^{\alpha - \frac{1}{p}} + |g-w_6|^{2-\alpha-\frac{1}{p}} = |g-w_6|^{-\frac{\alpha}{5}} + |g-w_6|^{2-\frac{11\alpha}{5}}. \tag{18}$$

Tomando $\alpha > \frac{10}{11}$, el miembro de la derecha de (18) puede acotarse superiormente en Ω por $\delta^{-\frac{\alpha}{5}} + \delta^{2-\frac{11\alpha}{5}}$, luego podemos elegir $A := (\delta^{-\frac{\alpha}{5}} + \delta^{2-\frac{11\alpha}{5}})^p$ y se tendrá (18). De todo lo anterior, tenemos

$$\frac{|g'|^p(1+|g|^2)^2}{\prod_{i=1}^6 |g-w_i|^{p\alpha}} \leq \text{cte.} \left(\frac{|g'|}{|g-w_6|^\alpha + |g-w_6|^{2-\alpha}} \right)^p \in L^1(\mathbb{D}, g_0),$$

y la Afirmación 5.3 está probada. □

Uniendo las Afirmaciones 5.2 y 5.3 tenemos que la integral en (16) es finita, lo que termina de probar el Teorema de Xavier. □

6. El Teorema de López y Ros.

El Teorema 5.3 puede mejorarse si se usa la Proposición 5.1 con toda su potencia. Para ello necesitamos una función $u \in C^\infty(M)$ sobre nuestra superficie minimal, que verifique las condiciones de dicha Proposición (en el Teorema de Xavier se tomó $u = 1$). Esto permitirá rebajar la hipótesis del Teorema de 7 puntos a 6, manteniendo una demostración análoga a la anterior.

Lema 6.1 *Sea $\delta > 0$ y $\phi \in C^1([0,\delta])$ tal que $\phi(\delta) = 0$. Entonces,*

$$\frac{1}{4}\int_0^\delta \phi^2(t) \operatorname{senh} t\, dt \leq \int_0^\delta (\phi'(t))^2 \operatorname{senh} t\, dt.$$

Demostración. Como $\cosh t \geq \operatorname{senh} t \ \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}\int_0^\delta \phi^2 \sinh t\, dt \leq \frac{1}{2}\int_0^\delta \phi^2 \cosh t\, dt \overset{(A)}{=} -\int_0^\delta \phi\phi' \operatorname{senh} t\, dt$$

$$\overset{(B)}{\leq} \left(\int_0^\delta \phi^2 \operatorname{senh} t\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\delta (\phi')^2 \operatorname{senh} t\, dt \right)^{1/2}$$

donde en (A) hemos integrado $\left(\frac{1}{2}\phi^2 \operatorname{senh} t\right)' = \phi\phi' \operatorname{senh} t + \frac{1}{2}\phi^2 \cosh t$ y usado que $\phi(\delta) = 0$, y en (B) hemos usado la desigualdad de Schwarz en $L^2([0,\delta]), dt)$. Simplificando y elevando al cuadrado se tiene el Lema. □

Consideremos en el disco unidad $\mathbb{D}$ la métrica hiperbólica $ds^2_{-1} = \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2 |dz|^2$, que es completa y de curvatura constante -1. Denotaremos por $\bullet_h$ a cualquier objeto geométrico que se calcule respecto a ds^2_{-1}.

Lema 6.2 (McKean) *Dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{D})$, se tiene*

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \varphi^2 \, dA_h \leq \int_{\mathbb{D}} \|\nabla_h \varphi\|_h^2 \, dA_h.$$

Demostración. Como $\mathrm{sop}(\varphi)$ es compacto, existe $\delta \in]0,1[$ tal que $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \mathbb{D}(0,\delta)$. Usando la fórmula de integración en coordenadas polares geodésicas en la métrica hiperbólica,

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \varphi^2 \, dA_h = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}(0,\delta)} \varphi^2 \, dA_h = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^1(1)} \left(\int_0^\delta \varphi^2(t\xi) \operatorname{senh} t \, dt \right) d\xi,$$

donde $d\xi$ es el elemento de longitud para la métrica estándar en $\mathbb{S}^1(1) \subset \mathbb{R}^2$. Aplicando el Lema 6.1 a $\phi(t) = \varphi(t\xi)$ con $\xi \in \mathbb{S}^1(1)$ fijo, lo anterior es menor o igual que

$$\int_{\mathbb{S}^1(1)} \left(\int_0^\delta \left(\tfrac{d}{dt}(\varphi(t\xi)) \right)^2 \operatorname{senh} t \, dt \right) d\xi \leq \int_{\mathbb{S}^1(1)} \left(\int_0^\delta \|\nabla_h \varphi\|_h^2 \operatorname{senh} t \, dt \right) d\xi = \int_{\mathbb{D}} \|\nabla_h \varphi\|_h^2 \, dA_h.$$

□

Lema 6.3 *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal conformemente equivalente a $\mathbb{D}$, cuya aplicación de Gauss g es una función normal. Entonces, existe $c > 0$ tal que*

$$\int_M \left(\|\nabla \varphi\|^2 + cK\varphi^2 \right) dA \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Demostración. Recordemos que en términos de la representación de Weierstrass $(g, f\,dz)$ de M (definida en $\mathbb{D}$), la métrica inducida es $ds^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2|dz|^2$ y la curvatura de Gauss $K = -\left(\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$. Usando esto y el Lema 1.1, queda

$$K \, dA = -\frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2} dA_0. \tag{19}$$

Por otro lado, la Proposición 5.3 aplicada a la función normal g asegura que $\exists A > 0$ tal que $\frac{|g'|}{1+|g|^2} \leq \frac{A}{1-|z|^2}$, $\forall z \in \mathbb{D}$. Uniendo esto con (19) queda

$$K \, dA \geq -\frac{4A^2}{(1-|z|^2)^2} dA_0 \overset{\text{(Lema 1.1)}}{=} -A^2 dA_h. \tag{20}$$

Tomemos ahora $\varphi \in C_0^\infty(M)$.

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(Lema 6.2)}}{\leq} \int_{\mathbb{D}} \|\nabla_h \varphi\|_h^2 \, dA_h - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \varphi^2 \, dA_h \overset{\text{(Lema 1.1)}}{=} \int_{\mathbb{D}} \|\nabla \varphi\|^2 \, dA - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{D}} \varphi^2 \, dA_h \\ &\overset{(20)}{\leq} \int_{\mathbb{D}} \|\nabla \varphi\|^2 \, dA + \frac{1}{4A^2}\int_{\mathbb{D}} K\varphi^2 \, dA, \end{aligned}$$

y sólo queda tomar $c = \frac{1}{4A^2}$ para que el enunciado esté probado. □

Teorema 6.1 (López-Ros [8]) *La aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en $\mathbb{R}^3$ no puede omitir seis puntos de $\mathbb{S}^2(1)$.*

Demostración. Seguiremos un razonamiento muy parecido a la demostración del Teorema de Xavier. Podemos suponer M simplemente conexa, luego conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ ó a $\mathbb{D}$. En el primer caso, el Teorema de Picard demuestra el enunciado. Supongamos a partir de ahora que $M = \mathbb{D}$. Sea $(g, f\,dz)$ la representación de Weierstrass de M, definida en $\mathbb{D}$. Tras un giro, podemos asumir que la aplicación de Gauss g omite ∞ más 5 valores complejos $w_1, \ldots, w_5 \in \mathbb{C}$.

Como g deja de tomar 3 valores en $\overline{\mathbb{C}}$, el Teorema de Montel-Caratheodory junto con la Definición 5.5 implican que g es una función normal. Por el Lema 6.3, existe $c > 0$ tal que

$$\int_M \left(\|\nabla\varphi\|^2 + cK\varphi^2\right) dA \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(M). \tag{21}$$

Por otro lado, f no tiene ceros en $\mathbb{D}$ porque $\infty \notin g(\mathbb{D})$. Fijemos $p, \alpha > 0$ a determinar. Consideremos las funciones

$$u = \frac{1}{(1+|g|^2)^c |f| \prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{\frac{p\alpha}{2}}}, \quad h = |g'|^2.$$

Así, $u, h \in C^\infty(M)$, $u > 0$, $h > 0$ c.p.d. en M (porque g no puede ser constante). Relacionando los laplacianos de $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ (aquí $\lambda = \frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)$) y de $|dz|^2$ mediante el Lema 1.1, tenemos $\Delta = \lambda^{-2}\Delta_0$, luego $\Delta \log h = 2\Delta \log |g'| = 2\lambda^{-2}\Delta_0 \log |g'| = 0$ siempre que $h > 0$. Análogamente,

$$\Delta \log u = -c\Delta \log(1+|g|^2) - \Delta \log |f| - \frac{p\alpha}{2} \sum_{i=1}^5 \Delta \log |g - w_i| = -c\Delta \log(1+|g|^2). \tag{22}$$

Usando el apartado 1 del Lema 1.1, tenemos

$$K = \Delta \log(\lambda^{-1}) = -\Delta \log\left(\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)\right) = -\Delta \log(1+|g|^2). \tag{23}$$

De (22) y (23) se tiene $\Delta \log u = cK$. Así, la condición 3 de la Proposición 5.1 se reduce a (21). Usando la Proposición 5.1, tenemos $uh^q \notin L^2(M, ds^2)$ $\forall q > 0$ (de nuevo el área de (M, ds^2) es infinita por la Proposición 5.2). Tomando $q = p/4$, queda

$$+\infty = \int_M (uh^{p/4})^2 \, dA = \int_M (uh^{p/4})^2 \lambda^2 \, dA_0 = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} dA_0. \tag{24}$$

(Compárese con (16)). Como en el Teorema de Xavier, a continuación veremos que la última integral es finita para ciertas elecciones de $p, \alpha > 0$, y tendremos la contradicción deseada.

Sea δ con $0 < \delta < \frac{1}{4} \operatorname{mín}_{i \neq j} |w_i - w_j|$. Así, los conjuntos $D_j = \{z \in \mathbb{D} \mid |g(z) - w_j| \leq \delta\}$ $(j = 1, \ldots, 5)$ son disjuntos dos a dos. Sea $\Omega = \mathbb{D} - \cup_{j=1}^{5} D_j$.

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} dA_0 = \int_{\Omega} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} dA_0 + \sum_{j=1}^{5} \int_{D_j} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} dA_0.$$

Afirmación 6.1 *Tomando $\delta < 1$ y α de la forma $\alpha = 1 - \frac{1}{k} \in]0,1[$ para algún $k \in \mathbb{N}$, es*

$$\int_{D_j} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} dA_0 < \infty, \quad \forall j = 1, \ldots, 5.$$

Demostración de la Afirmación 6.1. Fijemos $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Para $i \neq j$, en D_j se tiene $|g - w_i| > \delta$ luego

$$\frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} \leq \frac{1}{\delta^{4p\alpha}} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{|g - w_j|^{p\alpha}} \leq \text{cte.} \left(\frac{|g'|}{|g - w_j|^{\alpha}} \right)^p$$

Y ahora se termina como en la demostración de la Afirmación 5.2. □

Afirmación 6.2 *Existen $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$ y $p > 0$ tales que* $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} \, dA_0 < \infty.$

Demostración de la Afirmación 6.2. El argumento será similar al de la Afirmación 5.3. Fijemos $i \neq 5$. Por la desigualdad triangular y ya que $|g - w_i| > \delta$ en Ω,

$$\left| \frac{g - w_5}{g - w_i} \right| \leq 1 + \frac{|w_i - w_5|}{|g - w_i|} < 1 + \frac{|w_i - w_5|}{\delta},$$

luego $\left| \frac{g - w_5}{g - w_i} \right|$ es acotada en Ω, y

$$\frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{\prod_{i=1}^5 |g - w_i|^{p\alpha}} = \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{|g - w_5|^{5p\alpha}} \prod_{i=1}^{5} \left| \frac{g - w_5}{g - w_i} \right|^{p\alpha} \leq \text{cte.} \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{|g - w_5|^{5p\alpha}}$$

Por otro lado, la función $\frac{(1+|g|^2)^{2-2c}}{|g - w_5|^{4-4c}}$ es acotada en Ω, luego

$$\frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2c}}{|g - w_5|^{5p\alpha}} \leq \text{cte.} \frac{|g'|^p}{|g - w_5|^{5p\alpha - 4 + 4c}}.$$

Se trata ahora de acotar superiormente la última expresión en Ω por una del tipo

$$\frac{A |g'|^p}{(|g - w_5|^{\alpha} + |g - w_5|^{2-\alpha})^p} \qquad (A > 0),$$

y así aplicar de nuevo el Lema 5.6 a la función $g - w_5$. Operando,

$$\frac{|g'|^p}{|g-w_5|^{5p\alpha-4+4c}} \leq B \frac{|g'|^p}{(|g-w_5|^{\alpha}+|g-w_5|^{2-\alpha})^p} \iff$$

$$|g-w_5|^{\frac{4-4c}{p}-4\alpha} + |g-w_5|^{\frac{4-4c}{p}-6\alpha+2} \leq B^{1/p} \tag{25}$$

(B es una constante positiva). Como $|g - w_5| > \delta$ en Ω, para que (25) se cumpla para una cierta constante $B > 0$ basta que los exponentes del miembro de la izquierda sean no positivos. Es decir, necesitamos elegir $\alpha = 1 - \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$), $p > 0$ tales que

$$\frac{1-c}{p} - \alpha \leq 0, \qquad 2\frac{1-c}{p} - 3\alpha + 1 \leq 0. \tag{26}$$

La desigualdad de la derecha implica la de la izquierda (si $2\frac{1-c}{p} - 3\alpha + 1 \leq 0$ entonces $\frac{1-c}{p} \leq \frac{3\alpha-1}{2} = \frac{\alpha-1}{2} + \alpha \leq \alpha$). Y si α, p tienden a 1, la desigualdad de la derecha se verifica. Por tanto, existen α, p adecuados y la Afirmación 6.2 está probada.

□

Finalmente, las Afirmaciones 6.1 y 6.2 implican que la integral en (24) es finita, contradicción. □

El problema de cuántos puntos puede omitir la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en $\mathbb{R}^3$ fue resuelto por H. Fujimoto en 1988 [5], probando el siguiente

Teorema 6.2 *La aplicación de Gauss de una superficie minimal completa y no llana en* $\mathbb{R}^3$ *no puede omitir 5 puntos distintos de* $\mathbb{S}^2(1)$.

Referencias

[1] S. Bernstein, *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aunx dérivées partielles du type elliptique,* Comm. de la Soc. Mat. de Kharkov (2éme sér.) **15** (1915-1917) 38–45. También en Math. Z. **26** (1927) 551–558.

[2] S. S. Chern, *Simple proofs of two theorems on minimal surfaces,* L'Enseign. Math. II **15** (1969) 53–61.

[3] J. B. Conway, *Functions of one complex variable,* Springer-Verlag (1973).

[4] H. M. Farkas & I. M. Kra, *Riemann surfaces*, Springer-Verlag (1979).

[5] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss maps of minimal surfaces,* J. Math. Soc. Japan **40 (2)** (1988) 235–247.

[6] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2nd ed.), A series of comprehensive studies in Mathematics **224**, Springer-Verlag (1983).

[7] W. K. Hayman, *Meromorphic functions,* Oxford Mathematical Monographs (1964).

[8] F. J. López, A. Ros, *On the Gauss map of complete minimal surfaces,* preprint (1988).

[9] R. Osserman, *Proof of a conjecture of Nirenberg,* Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959) 229–232.

[10] R. Osserman, *On the Gauss curvature of minimal surfaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960) 115–128.

[11] R. Osserman, *Minimal surfaces in the large,* Comment. Math. Helv. **35** (1961) 65–76.

[12] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n,* Ann. of Math. **2 (80)** (1964) 340–364.

[13] J. Pérez, *Notas sobre Geometría Riemanniana global*, 2000.

[14] K. Voss, *Über vollständige Minimalflächen,* L'Enseign. Math. **10** (1964) 316–317.

[15] F. Xavier, *The Gauss map of a complete nonflat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere,* Ann. Math. **113** (1981) 211–214.