Soluciones de los ejercicios del examen Parcial de Cálculo
Primer curso de Ingeniería de Telecomunicación - febrero de 2007

Ejercicio 1

a) Para todo $x>0$ sea $f(x)=x-\log\dfrac{e^x-1}{x}$, y $f(0)=0$. Justifica que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Estudia el signo de la derivada de f para probar que para $x>0$ se verifican las desigualdades:

$$0<\log\frac{e^x-1}{x}<x \tag{1}$$

b) Dad0 $a>0$, se define:

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=\log\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

Justifica que la sucesión, $\{x_n\}$, así definida es convergente a 0.

Solución.

a) Sabemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (es la derivada de e^x calculada en $x=0$). Por tanto, como $\log x$ es una función continua, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x)=0-\log 1=0$.

Un fácil cálculo nos da

$$f'(x)=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

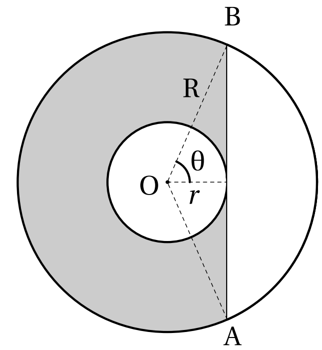
Suponemos en lo que sigue que $x>0$, en cuyo caso $e^x>1$, por lo que $x(e^x-1)>0$ y, por tanto, el signo de $f'(x)$ es el mismo que el de e^x-1-x. Pongamos $g(x)=e^x-1-x$. Tenemos que $g(0)=0$ y $g'(x)=e^x-1>0$. Luego g es creciente estrictamente en $\mathbb{R}_o^+$, y al ser $g(0)=0$, se sigue que $g(x)>0$ y, por tanto, también es $f'(x)>0$ para todo $x>0$. Luego f es creciente estrictamente en $\mathbb{R}_o^+$, y al ser $f(0)=0$, se sigue que $f(x)>0$. Hemos probado así que $\log\dfrac{e^x-1}{x}<x$. Pero también, al ser $g(x)>0$ se tiene que $\dfrac{e^x-1}{x}>1$, lo que implica que $0<\log\dfrac{e^x-1}{x}$.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. El teorema del valor medio aplicado a la función e^t en el intervalo $[0,x]$ nos dice que hay un punt $c\in]0,x[$ tal que $e^x-1=x\,e^c$, esto es $\dfrac{e^x-1}{x}=e^c$. Como $0<c<x$ es $1<e^c<e^x$ y deducimos enseguida la desigualdad (1).

b) Como $a>0$, la primera parte de la desigualdad (1) implica que $x_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Además, tenemos que $x_n-x_{n+1}=x_n-\log\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}=f(x_n)>0$, es decir, $x_n>x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos y, en consecuencia, es convergente. Sea $x=\lim\{x_n\}$. Deberá ser $x\geqslant 0$. Como f es continua y $x_n-x_{n+1}=f(x_n)$, deberá verificarse que $0=\lim\{f(x_n)\}=f(x)$, por tanto $f(x)=0$ lo que exige que $x=0$.

Ejercicio 2.

Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima.



Solución. Todo lo que hay que hacer es calcular el área de la parte sombreada de la arandela. Podemos hacer esto de forma completamente elemental introduciendo como variable la medida en radianes, θ, del ángulo indicado en la figura.

Con ello tenemos que $r = R\cos\theta$. El área buscada es igual al área del disco grande (πR^2) menos el área del disco pequeño ($\pi(R\cos\theta)^2$), menos el área del sector circular OBA (θR^2) más el área del triángulo OAB ($R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta$). Por tanto, la función a maximizar es

$$f(\theta) = \pi R^2 - \pi(R\cos\theta)^2 - \theta R^2 + R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta = R^2\big(\pi - \theta - \pi\cos^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big) = R^2\big(\pi\operatorname{sen}^2\theta - \theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big)$$

definida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Calculamos la derivada

$$f'(\theta) = 2R^2\operatorname{sen}\theta(\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

Se sigue que el único cero de la derivada en el intervalo donde está definida f es es $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\pi \in]0, \pi/2[$. Como $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$, el signo de la derivada es igual al signo de $\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. Deducimos que $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \theta_0$ y $f'(\theta) < 0$ para $\theta_0 \leqslant \theta < \pi/2$. En consecuencia, f es creciente en $[0, \theta_0]$ y decreciente en $[\theta_0, \pi/2]$. Por tanto el valor máximo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en θ_0. El valor de r correspondiente es

$$r = R\cos\theta_0 = \frac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}$$

Alternativamente, podemos calcular directamente, en función de r, el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overline{AB}$, que viene dado por

$$2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

En consecuencia, el área de la parte sombreada de la arandela viene dada por

$$g(r) = \pi R^2 - \pi r^2 - 2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

donde $0 \leqslant r \leqslant R$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de g viene dada por

$$g'(r) = -2\pi r + 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Cuyo único cero es $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}$. Se justifica fácilmente que dicho valor corresponde al máximo absoluto de g en $[0, R]$.

Ejercicio 3.

Estudia la convergencia de las siguientes series.

$$\textbf{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n n!}{n^{\alpha}(1+a)\cdot(1+2a)\cdots(1+na)} \quad (a>0, \alpha\in\mathbb{R}), \quad \textbf{b)} \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\log\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n^2}$$

Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

$$\textbf{c)} \ \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1/2}+\mathrm{e}^{1/3}+\cdots+\mathrm{e}^{1/n}-n}{\log n}, \qquad \textbf{d)} \ n\,\frac{\operatorname{arc\,tg}(1/n)-\operatorname{sen}(1/n)}{1-\cos(1/n)}$$

Solución.

a) Pongamos $a_n = \dfrac{a^n n!}{n^{\alpha}(1+a)\cdot(1+2a)\cdots(1+na)}$. Se trata de una serie de términos positivos ($a>0$). Tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}\frac{an+a}{1+a+na}$$

Por tanto $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ y el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe. Para ello usaremos el criterio de equivalencia logarítmica según el cual

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim(-n)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\mathrm{L}\Longleftrightarrow \lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-n}=\lim\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\mathrm{L}}$$

En nuestro caso

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\alpha}\left(\frac{an+a}{1+a+na}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\alpha}\left(1+\frac{1}{1+a+na}\right)^{n}\longrightarrow \mathrm{e}^{\alpha}\,\mathrm{e}^{1/a}=\mathrm{e}^{\alpha+1/a}$$

El criterio de Raabe nos dice que si $\alpha+1/a>1$ la serie converge y si $\alpha+1/a<1$ la serie no converge (diverge positivamente). Cuando $\alpha+1/a=1$ este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

b) Pongamos $a_n=\left(1+\log\dfrac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n^2}$. Se trata de una serie de términos positivos. Aplicaremos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1+\log\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n}$$

Vemos que se trata de una indeterminación del tipo 1^{∞}. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Para ello calculamos el límite de la siguiente sucesión.

$$2n\log\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}=\log\left(\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n}=\log\left(1+\frac{-n-6}{3n^2+n+7}\right)^{2n}\longrightarrow\log(\mathrm{e}^{-2/3})$$

Deducimos que $\lim\sqrt[n]{a_n}=\mathrm{e}^{-2/3}<1$ por lo que la serie converge.

c) Pongamos $x_n=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1/2}+\mathrm{e}^{1/3}+\cdots+\mathrm{e}^{1/n}-n$, $y_n=\log n$. Para calcular el límite $\lim\dfrac{x_n}{y_n}$ aplicaremos el criterio de Stolz pues $\{y_n\}$ es estrictamente creciente y no mayorada.

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\mathrm{e}^{1/n+1}-1}{\log(n+1)-\log n}=\frac{\mathrm{e}^{1/n+1}-1}{\log(1+1/n)}\sim\frac{1/(n+1)}{1/n}\longrightarrow 1$$

Donde hemos usado las equivalencias asintóticas $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$ y $\log(1+z_n) \sim z_n$ siempre que $z_n \to 0$. Concluimos que el límite pedido es igual a 1.

d) Pongamos $x_n = n\dfrac{\operatorname{arctg}(1/n) - \operatorname{sen}(1/n)}{1-\cos(1/n)}$. Podemos asociar a esta sucesión la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}$$

Con lo cual $x_n = f(1/n)$ y, por tanto, $\lim\{x_n\} = \lim_{x\to 0} f(x)$. Este límite puede calcularse usando las reglas de L'Hôpital, pero antes conviene simplificarlo algo. Para ello recordamos que $1-\cos x \sim x^2/2$ para $x \to 0$. Por tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Este último límite se calcula fácilmente por L'Hôpital o, más fácilmente aún, si recuerdas que para $x \to 0$ es $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3 + o(x^3)$ y $\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^3)$, con lo que $\operatorname{arctg} x - \operatorname{sen} x = -x^3/6 + o(x^3)$, por lo que el límite pedido es igual a $-1/3$.

Ejercicio 4. La región bajo la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, $(0 \leqslant x < +\infty)$ se hace girar alrededor del eje OX. Calcula el volumen del sólido de revolución resultante.

Solución. Sabemos que el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\mathrm{I} = \pi\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \pi\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

Para calcular esta última integral procedemos a la descomposición en fracciones simples. Como $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ pondremos

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{x^2-x+1}$$

Reduciendo a denominador común resulta:

$$1 = \mathrm{A}(x^2-x+1) + (\mathrm{C}x+\mathrm{D})(x+1) \tag{2}$$

Haciendo $x=-1$ en (2) obtenemos que $\mathrm{A} = 1/3$. Haciendo $x=0$ en (2) obtenemos que $1 = \mathrm{A}+\mathrm{D}$, por lo que $\mathrm{D} = 2/3$. Igualando en (2) el coeficiente de x^2 a cero, resulta $\mathrm{A}+\mathrm{C} = 0$, por lo que $\mathrm{C} = -1/3$. Por tanto

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\log(1+t) - \frac{1}{3}\int_0^t \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\log(1+t) - \frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Como

$$x^2-x+1 = (x-1/2)^2 + 3/4 = 3/4\left(\left(2x/\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}\right)^2 + 1\right)$$

Tenemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(2x/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(2t/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right)\right) \tag{4}$$

De las igualdades (3) y (4) se sigue que

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{3}\log(1+t) - \frac{1}{6}\log(t^2-t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(2t/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right)\right)$$

Para tomar límites para $t \to +\infty$ en esta expresión debemos escribirla de forma apropiada como sigue

$$F(t) = \frac{1}{3}\log\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\operatorname{arc\,tg}\big(2t/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}\big) + \operatorname{arc\,tg}\big(1/\sqrt{3}\big)\Big)$$

Deducimos que

$$I = \pi \lim_{t\to+\infty} F(t) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}\big(1/\sqrt{3}\big)\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$$

Ejercicio 5. Calcula la suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ y deduce la igualdad

$$\log 3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}$$

Explica con detalle lo que haces.

Solución. Lo primero es calcular el intervalo de convergencia de la serie. Usaremos el criterio del cociente. Pongamos $a_n = \dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$. Tenemos que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 \longrightarrow |x|^2$$

Deducimos que si $|x|^2 < 1$ o, lo que es equivalente, $|x| < 1$, la serie converge absolutamente. Si $|x| > 1$ el criterio del cociente nos dice que el término general a_n no converge a 0 por lo que la serie no es convergente. En consecuencia, el intervalo de convergencia de la serie es $]-1,1[$. La función suma de la serie es la función $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (|x|<1)$$

Sabemos que las funciones definidas por series de potencias son derivables y su derivada se calcula derivando la serie término a término. Por tanto:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad (|x|<1)$$

Como $f(0) = 0$, se sigue que para todo $x \in]-1,1[$ es

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

Finalmente, si $x = 1/2$ obtenemos que $\log 3 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(2n+1)}$.