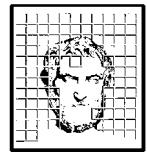




Números y calculadoras

Sesión 3



S.A.E.M. THALES

Material recopilado por:

Manuel Delgado
José María Chacón
Concha García
Encarnación Amaro
Agustín Carrillo de Albornoz

Las calculadoras que utilizaremos en esta sesión son por gentileza de

CASIO

Granada, 21 de octubre de 2006



Actividades para practicar con la calculadora

Actividad 1

Aunque suponemos que en más de una ocasión, los números te habrán creado quebraderos de cabeza, te proponemos la realización de algunas operaciones matemáticas, con ayuda de una calculadora, para determinar ciertas curiosidades y propiedades de algo tan necesario y sobre todo, tan presente en nuestra sociedad, como son los números.

- Comenzamos realizando operaciones con el número 37, multiplicándolo por los múltiplos de 3:

$$3 \times 37 = 111$$

$$6 \times 37 = 222$$

$$9 \times 37 = 333$$

Es fácil deducir qué ocurre al multiplicarlo por 12, 15, 18, 21, 24 y 27.
Si seguimos multiplicando, obtendremos:

$$30 \times 37 = 1110$$

$$33 \times 37 = 1221$$

$$36 \times 37 = 1332$$

¿Sabrías cuales serían los siguientes resultados?

¿Eres capaz de encontrar la razón por la que se obtienen las secuencias anteriores?

- Algo similar ocurre con otro número como es el número 3367 cuando se multiplica por los múltiplos de 33.



ESTALMAT-Andalucía

- Continuamos realizando nuevas operaciones, en este caso serán simples restas.
Efectúa:

9 - 1

98 - 21

987 - 321

9876 - 4321

- Conociendo los resultados anteriores, deduce los resultados que obtendrás al continuar la secuencia:

98765 - 54321

987654 - 654321

9876543 - 7654321

98765432 - 87654321

987654321 - 987654321

Al menos el último resultado es fácil de obtener.



Actividad 2

- Necesitarás una buena calculadora con muchos dígitos si no eres capaz de deducir los resultados de las siguientes operaciones:

$$1^2$$

$$11^2$$

$$111^2$$

$$1111^2$$

$$11111^2$$

- Repite las operaciones anteriores cambiando el 1 por un 9, e intenta adivinar el resultado.



Actividades con números y operaciones

Actividad 3

- Resta a tu año de nacimiento la suma de las cuatro cifras que lo componen. Obtendrás un número divisible por 9. ¿Por qué?
- Escribe un número de dos cifras que sean diferentes; cambia el orden de las cifras. Con los dos números anteriores, resta al mayor el menor. ¿Qué observas en el resultado obtenido?
- Escribe un número de tres cifras, de modo que no sean las tres iguales. Con las tres cifras anteriores formamos un nuevo número ordenándolas de mayor a menor y un nuevo número ordenándolas de menor a mayor. Restamos los dos números anteriores. Al resultado obtenido le damos la vuelta a las cifras y lo sumamos con el número anterior.
¿Cuál es el resultado?
¿Siempre ocurre lo mismo? Podrías averiguar por qué.



Actividades para investigar

- **El uno.** Al calcular $(1 + 2) : 3$ se obtiene como resultado 1.
Coloca entre cada dos cifras las operaciones que necesites y los paréntesis para obtener siempre 1 como resultado

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 = 1$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 = 1$$

- **Un número especial.** Multiplica el número 12345679 por cualquier cifra y el resultado lo multiplicas por 9. ¿Qué ocurre?
- **Productos con las nueve cifras.** En los productos siguientes aparecen una sola vez cada una de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

$$138 \times 42 = 5796$$

$$483 \times 12 = 5796$$

$$198 \times 27 = 5346$$

$$297 \times 18 = 5346$$

¿Podrías encontrar otros productos en los que ocurra lo mismo?



Actividad 4

Encuentra multiplicaciones que cumplan estas condiciones:

- Las tres cifras del multiplicando son diferentes
- De la cifra del multiplicador no se sabe nada
- Las tres cifras del resultado del producto son iguales.

--	--	--

X

--	--	--



Actividad 5

Un número natural se dice que es un cuadrado perfecto si es el resultado de elevar al cuadrado otro número natural, por ejemplo 4 por ser el cuadrado de 2, 9 por ser el cuadrado de 3.

- ¿El número 14^{15} es un cuadrado perfecto?, ¿por qué?
- Escribe todos los cuadrados perfectos entre 1 y 100
- Calcula a continuación cuántos números entre 1 y 100 son múltiplos de algún cuadrado perfecto.



Actividad 6

Divide por 7 los números del 1 al 10 y anota los resultados obtenidos para contestar a las cuestiones siguientes:

¿Cuántos decimales distintos pueden obtenerse?

El resultado obtenido tiene alguna relación con el hecho de dividir por 7.

¿Podrías predecir el resultado de $\frac{27}{7}$? ¿Y el de $\frac{45}{7}$?

Intenta determinar el número a conociendo que $\frac{a}{7} = 10,285714$



Actividad 7

Alicia ha tratado de investigar el periodo obtenido al dividir por 17. Después de dividir por 17 los números 1, 2, 3, 4 y 5, cree que ya tiene el periodo completo, que supone tiene 16 cifras. Compruébalo utilizando la calculadora.

Intenta escribir el resultado que se obtendría al dividir 36 entre 17 con veinte cifras decimales.



Actividad 8

Como tuve la indiscreción de preguntar a mi amigo por la edad de su sobrina Elvira, él me respondió: “Multiplica el nº de sus brazos por el de sus piernas y luego por el nº primo de sus adoradores y obtendrás la edad de mi sobrina, que resulta ser un nº *perfecto*, ya que ella es perfecta”

- Recordemos qué es un *nº primo*.
 - Continuamos calculando los *divisores* de un *nº*, proceso que puede hacerse sistemáticamente: Calcula todos los divisores de 28, de 60, de 180, de 392.
 - Un número natural se dice que es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores propios (Todos los divisores menos el propio número): Comprueba que 6 es *perfecto* y que 20 no lo es.
 - Si llamamos p al *nº primo* de sus adoradores, calcula los divisores propios de la edad de Elvira e imponle la condición de que dicha edad sea un *nº perfecto*.
-
- ¿Y si el *nº* de sus brazos se multiplica por 7 y por el *nº* de sus adoradores, ¿sería también “perfecta” la edad de mi sobrina?



Actividad 9

1. El cuadrado de $a0$ es a^200 : termina en dos ceros. Calcula los cuadrados de 15, 25, 35, 45, 55. ¿En qué terminan? ¿por qué ocurre?
 2. Calcula mentalmente según la regla anterior los cuadrados de 65, 75, 85 ,95, 105, 195.
 3. 1473 no puede ser un cuadrado perfecto. La terminación de un cuadrado debe ser una de las siguientes:
 4. Calcula los cuadrados de 11, 21, 31, 41, 51. Todos acaban en 1. Da una regla que permita calcular el resto del cuadrado relacionándolos con los cuadrados de 10, 20, 30, ...
 5. Las dos últimas cifras del cuadrado de un número que acaba en 1 deben de ser unas de las siguientes:



6. Calcula mentalmente los cuadrados de 61, 71, 81, 91, 101, 151, 251.
 7. Calcula los cuadrados de 19, 29, 39, 49. Todos acaban en 1. Da una regla que permita calcular el resto del cuadrado relacionándolos con los cuadrados de 20, 30, 40, 50.
 8. Calcula mentalmente los cuadrados de 59, 69, 79, 89, 99, 159, 259.
 9. Las dos últimas cifras de los cuadrados de números que acaban en 9 deben ser:

Actividad para investigar

Podríamos intentar calcular mentalmente los cuadrados de números de dos cifras que acaban en otras terminaciones. De momento te pedimos que te fijes en los métodos anteriores y deduzcas cuáles son las terminaciones posibles de dos cifras al elevar un número al cuadrado (Hay 22).



Actividad 10

- Un aficionado a los caballos quiere comprar un magnífico ejemplar pero su dueño no quiere venderlo. Después de mucho insistir, el propietario le propone: "Mi caballo está herrado y cada herradura está clavada con 6 clavos. Sólo lo vendo si me da Vd. 1 euro por el primer clavo, 2 euros por el segundo, 4 euros por el tercero, 8 euros por el cuarto, y así doblando el precio hasta llegar al clavo 24º."

¡De acuerdo!, dijo el aficionado. ¿Debe estar contento? ¿Cuánto acabará pagando?



Actividad 11

En las tres actividades que siguen hay que trabajar con alguna estrategia de búsqueda.

- 15.252 es el producto de dos números naturales consecutivos. Halla dichos números.
 - 357627 es el producto de tres números impares consecutivos. Halla dichos números.
 - 206.725 es la suma de dos cuadrados perfectos consecutivos ¿Cuáles son?



Actividad 12

- Calcula $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \dots$ ¿Cuál es la última cifra de 3^{26} ?
- Calcula $7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \dots$ ¿Cuáles son las dos últimas cifra de 7^{123} ?
- ¿Cuál es la última cifra del número resultante de la siguiente operación:
 $17^{1983} + 11^{1983} - 7^{1983}$



Actividad 13

- Usa la calculadora para obtener $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
- Y ahora para obtener $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$
- Con esa secuencia debes obtener con la mayor aproximación que te permita la calculadora el valor de :

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

(Los puntos suspensivos indican que se prosigue así indefinidamente)

- Calcula el valor de $\sqrt{2}$. Tu calculadora lo expresa con un número de cifras decimales que queremos ampliar. ¿Qué proceso tenemos que realizar para determinar las siguientes cifras decimales que la calculadora no nos ha dado?



Definiendo números

Actividad 14

Cada una de las siguientes afirmaciones describe un número entero positivo:

A Es par	B Es impar	C Es primo
D Es un cuadrado	E Es un cubo	F Tiene una cifra
G Tiene dos cifras	H Es divisible por tres	I Su cifra de las unidades es 3
J Es el producto de dos números primos diferentes	K Es divisible por 6	L Es divisible por 5
M Es múltiplo de 11	N La suma de sus cifras es 10	O Cuando se divide entre 4 , da resto 1
P Es un número triangular	Q Tiene un factor (distinto de 1 y el mismo), que es un cuadrado	R Es menor que 20
S Es mayor que 20	T Es múltiplo de 7	U La cifra de las unidades es mayor que 5
V La suma de sus cifras es 9	W Es un divisor de 60	X Es la suma de dos números primos
Y La cifra de sus unidades es menor que 5	Z El producto de sus cifras es par	



ESTALMAT-Andalucía

Asegúrate de entender cada una de las afirmaciones antes de contestar las cuestiones que proponemos:

1.
 - a. Las afirmaciones **D**, **G**, **O** pueden aplicarse al nº 25. ¿Qué otras afirmaciones cumple también el nº 25?
 - b. Elige un nº entre 1 y 50 y encuentra todas las afirmaciones en las que encaja dicho número. Discute tus respuestas con los otros compañeros de grupo.
2.
 - a. ¿Qué números menores o iguales a 30 responden a la afirmación **J**?
 - b. ¿Qué afirmaciones son ciertas para el nº 15?
 - c. ¿Qué números menores o iguales a 30 responden a las afirmaciones **G** y **Q**?
 - d. ¿Qué números menores o iguales a 30 responden a las afirmaciones **B**, **C** y **S**?
 - e. ¿Qué afirmaciones son ciertas para tres números exactamente entre el 1 y el 30?
3.
 - a. ¿Qué número encaja con las afirmaciones **A** y **C**?
 - b. He pensado un nº menor que 1000 que encaja con las tres afirmaciones **B**, **D** y **L** a la vez. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay para este número?
 - c. Practica el siguiente juego en parejas:
 - ✓ Cada uno elige un nº menor o igual que 30 y lo oculta a su compañero.
 - ✓ Ahora cada uno hace una lista con las letras correspondientes a todas las afirmaciones que son ciertas para su nº elegido.
 - ✓ Se trata de que con la lista de su compañero trate de adivinar el nº que él pensó.Gana, naturalmente, el que antes acierte el nº oculto.
4. ¿Puedes encontrar dos números menores o iguales que 30 que encajen exactamente con las mismas afirmaciones?
5. Encuentra un nº entre 1 y 50 que encaje con el máximo número de afirmaciones.
6. ¿Qué números menores que 30 **no** verifican la afirmación **X**?
7. ¿Qué números menores que 50 verifican las afirmaciones **N** y **Z** a la vez?
8. Cualquier número que verifica las afirmaciones **A** y **H** a la vez, también verifica la afirmación **K**. Supón que un número verifica las afirmaciones **B** y **D** a la vez, ¿qué otra afirmación también habrá de verificar? ¿Por qué?
9.
 - a. Enumera todas las afirmaciones que verifica el número 1. ¿Cuántas afirmaciones se necesitan como mínimo para definir, de manera única, el número 1?
 - b. ¿Cuántas afirmaciones se necesitan como mínimo para definir, de manera única, el número 2?
 - c. Repite la búsqueda para todos los números del 3 al 12.



Números primos. Divisores

Actividad 15

- Si el nº A no es divisible por 3 ¿Es posible que el nº 2A sea divisible por 3?
 - El nº A es par. ¿Es cierto que 3A es divisible por 6?
 - El nº 5A es divisible por 3 . ¿Es cierto que A debe ser divisible por 3?
 - El nº 15A es divisible por 6. ¿Es cierto que A debe ser divisible por 6?
 - Completa estas frases:

Dos números naturales son primos entre sí si

Si un número natural es divisible por p y q primos entre sí, entonces es divisible por

Si el número pA es divisible por q , siendo p y q siendo primos entre sí, entonces A es divisible por



- Si p y q son primos distintos, calcula el nº de divisores de:
a) pq , b) $p^2 q$ c) $p^2 q^2$ d) $p^n q^m$

- Prueba que el producto de cinco números naturales consecutivos cualesquiera es divisible por :
a) 30 b) 120

- Escribe algunos números a y b tales que $56a = 65b$. Observa que en ningún caso $a + b$ es primo. Demuéstralos, es decir, si $56^a = 65^b$, entonces $a + b$ es compuesto.

- Encuentra todos los números naturales x e y tales que :
a) $x^2 - y^2 = 31$ b) $x^2 - y^2 = 303$



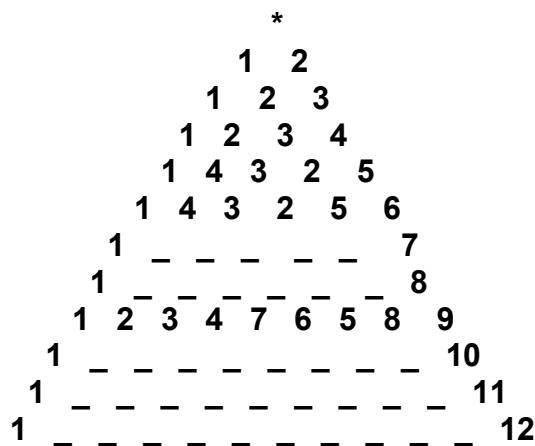
Triángulo primo

Actividad 16

El triángulo de números de abajo se llama **triángulo primo**, no porque esté formada por números primos (unos lo son como 2, 3 o 5 y otros no como 4, 6 u 8) sino porque la suma de dos números “vecinos” de cualquier fila es un número primo.

Fíjate en sus propiedades:

- Cada fila del triángulo comienza por 1 y termina por el número de la fila.
- En cada fila están todos los números naturales desde el 1 hasta el número de la fila.
- La suma de cada par de números vecinos es un número primo.



- Busca los números que faltan en el triángulo primo.
- ¿Qué patrones observas en el triángulo?
- ¿Cuál es tu estrategia para completar el triángulo?



Actividad 17

¿CÓMO AVERIGUAR SI UN CIERTO NÚMERO ES PRIMO?

Un procedimiento sencillo para averiguar si un número N es primo sería comprobar, realizando la división, que no es divisible por los números primos más pequeños que éste.

Realmente no es necesario probar con todos los números primos más pequeños que N , basta con probar los que sean más pequeños que la raíz cuadrada de N .

Además bastará con llegar a una división en la que el cociente sea menor o igual que el siguiente número primo por el que hay que dividir. Si esa división no es exacta, el número N resultará ser primo.

- Comprueba, utilizando el método de la división, si los siguientes números son primos, anotando en tu cuaderno los resultados:

239	1621	1999	2001
1067	2011	911	769
677	279	387	771

- Con el paso del tiempo hemos aprendido muchas cosas sobre los números primos. Pero sin embargo no se ha descubierto una fórmula que permita obtener todos los números primos desde 2 en adelante. Deberán continuarse los intentos para encontrar dicha fórmula. Una fórmula para obtener algunos números primos es:

$$P_n = n^2 - n + 41$$

P_n es un número primo si n toma valores desde 1 hasta 40: $P_1 = 41$, $P_2 = 43$, $P_3 = 47$.

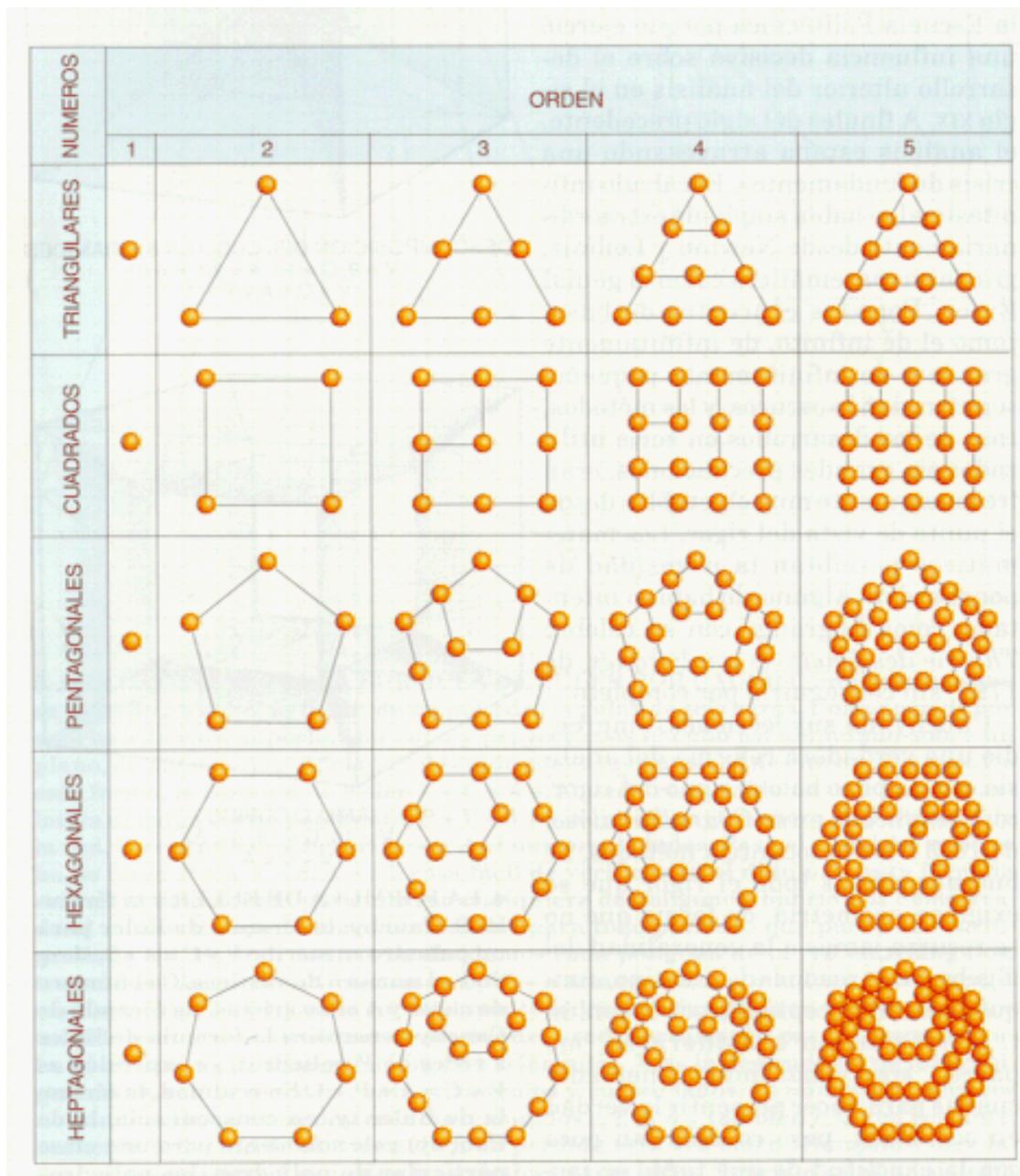
✓ Calcula P_4 , P_5 , P_6 , ..., P_{40} con una calculadora.

✓ ¿Cuál es el valor de P_{41} ? ¿Es primo o compuesto? ¿Por qué?



Números Poligonales

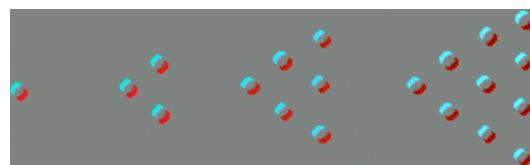
Actividad 18





Números triangulares.

Podemos representar los números enteros mediante colecciones de puntos. Cada punto representa una unidad. Los siguientes números se pueden disponer formando un triángulo. Se les llama números triangulares.



1 3 6 10

Observa en los cuatro primeros números triangulares cómo se forma cada triángulo a partir del anterior. Para contar todos los puntos de un número triangular basta con que cuentes los puntos por columnas empezando por la columna de la izquierda y sumes los puntos de cada nueva columna.

a) Escribe los tres siguientes números triangulares:

b) Rodea con círculo los números que sean triangulares:

34 45 55 86 132

c) ¿Cuál es el décimo número triangular?

d) ¿Y el décimo quinto?

e) Escribe, sin dibujarlo, el que ocupa el lugar 31

f) Escribe una fórmula general para obtener cualquier número triangular :



Números cuadrados

Los números cuadrados son aquellos cuyos puntos forman un cuadrado. Coincidirán con los cuadrados de los números enteros. Comprueba que todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos empezando por 1:

$$1 = 1; \quad 1 + 3 = 4; \quad 1 + 3 + 5 = 9; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

- a) Escribe los 6 primeros términos de las secuencias de los números triangulares y cuadrados:

Nos Triangulares: _____, _____, _____, _____, _____, _____

Nos Cuadrados: _____, _____, _____, _____, _____, _____

- b) Utilizaremos las abreviaturas S_4 para indicar el cuarto número cuadrado y T_2 para el segundo número triangular. Completa entonces la siguiente tabla hasta $n = 20$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T_n	1	3	6	10																
S_n	1	4	9	16																

- c) Dibuja una estructura que represente el n^o cuadrado S_7 . ¿Puedes partirla en dos que representen números triangulares consecutivos?

- d) ¿A qué número cuadrado es igual $T_9 + T_{10}$? ¿Y $T_n + T_{n+1}$?



e) Completa la tabla hasta $n = 10$

N	1	2	3	4	5	6				
T_n	1	3								
1 + 8T_n	9	25								

f) ¿Qué observas en los números de la fila tercera?. Intenta demostrar eso que conjeturas, sea cual fuera n.

g) Escribe las fracciones S_n / S_{n+1} y T_n / T_{n+1} por lo menos hasta $n=10$ y conjetura si se pueden o no simplificar-

h) Completa la tabla y enuncia lo que parece observarse en las filas 3^a y 4^a

n	1	2	3	4
S_n				
(n+S_n)/2				
(n - S_n)/2				



Números pentagonales y hexagonales

- Escribe los diez primeros números pentagonales. Intenta encontrar una fórmula para obtener cualquier número pentagonal.
- Haz lo mismo con los números hexagonales.



Un número especial

Frases en torno a π

- "En la circunferencia, el comienzo y el fin coinciden." Heráclito (544-480 a. C.); filósofo griego
- "Inútil es la labor del que se fatiga intentando cuadrar el círculo." Stiffel (1544)
- "La naturaleza se reduce a un número: π . Quien descubra el misterio de π , comprenderá el pensamiento de Dios..." Isaac Newton
- "El rostro de π estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y enigmáticos." Bertrand Russell, *Nightmares of Eminent Persons* (*Pesadillas de personas ilustres*)

Curiosidades

- En 1983, Rajan Mahadevan fue capaz de recitar de memoria 31.811 decimales de π .
- Los pies de un elefante tienen forma circular. Multiplica el diámetro de su pie por 2π , y el resultado obtenido es la altura del elefante (de los pies a la espalda)
- Si quisieramos escribir en línea recta los 200.000 millones de decimales de pi calculados por Kanada y Takahasi en 1999, el papel necesario tendría una longitud tal, que podría dar una vuelta a la circunferencia de la Tierra.
- Con sólo unos 40 decimales del número pi se podría calcular la longitud de una circunferencia que abarcara a todo el universo visible, con un error menor que el radio de un átomo de hidrógeno.

Poemas

Si en este poema cuentas las letras de cada palabra tendrás las primeras veinte cifras de π :

Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

Esta otra frase nos da las diez primeras cifras decimales de π :

Con 1 hilo y 5 mariposas
se pueden hacer mil cosas.



Número Pi

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno
todas sus cifras siguientes también son iniciales
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco
con un cálculo ocho nueve
con la imaginación siete nueve
o en broma tres dos tres, es decir, por comparación
cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pi
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono la talla de tu camisa
año mil novecientos setenta y tres sexto piso
número de habitantes sesenta y cinco décimos
la medida de la cadera dos dedos la charada y el código
en la que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pi, éste no,
él es todavía un buen cinco
no es un ocho cualquiera
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

Wislawa Szymborska
Premio Nobel de Literatura 1996



Algunos valores de π obtenidos antes de 1600

Matemático - Lugar	año	valor
La Biblia (Reyes-I-7-23)		3
Papiro de Ahmes (Egipto)	1650 a.C.	3,16
Tablilla de Susa (Babilonia)	1600 a.C.	3,125
Bandhayana (India)	500 a.C.	3,09
Arquímedes de Siracusa	(287-212 a.C)	entre 223/71 y 220/70
Liu Hui (China)	260	3,1416
Tsu Chung Chih	480	Entre : 3,145926 y 3,1415927
Al-Kashi (Persia)	1429	3,1415926535897932
Franciscus Vieta (Francia)	(1540-1603)	3,1415926536

Para conocer más sobre el número π



<http://ciencianet.com/pi.html>

http://estudiantes.uam.es/fernando.dominguez/cazapi_pi.htm

http://www.portalplanetasedna.com.ar/numero_pi.htm

<http://www.iescarrus.com/edumat/taller/numeropi/numeropi.htm>

<http://www.xtec.es/~bfiguera/curioso6.html>

<http://webs.adam.es/rillorens/pihome.htm>

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/nombres/pi_historia/pi_hist.htm

<http://www.elmundo.es/elmundo/2006/10/05/ciencia/1160047374.html>