

Efectos de Temperatura Finita y Curvatura en QCD y Modelos de Quarks Quirales

Eugenio Megías Fernández

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear



Universidad de Granada

· Abril 2006 ·

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Cromodinámica Cuántica	6
1.2. Simetría del centro y transición de fase de QCD	7
1.3. Teorías quirales efectivas	9
1.4. Heat kernel y acción efectiva	9
1.5. Estructura de la tesis	10
2. Desarrollo del Heat Kernel	13
2.1. Potencial macrocanónico de un gas de partículas libres relativistas	13
2.2. Método de los Símbolos	14
2.3. Desarrollo del Heat Kernel a temperatura cero	16
2.4. Desarrollo del Heat Kernel a temperatura finita	19
2.4.1. Desarrollo del Heat Kernel: un caso simple	20
2.4.2. Coeficientes del desarrollo del Heat Kernel a temperatura finita	23
2.4.3. Traza de los coeficientes de Heat Kernel	27
2.5. Conclusiones	30
3. Acción efectiva de QCD a temperatura alta	33
3.1. Fundamentos de la Teoría de Yang-Mills a Temperatura Finita	33
3.2. Sector fermiónico	35
3.2.1. Acción efectiva con representación de Schwinger	36
3.2.2. Traza en espacio de Dirac	37
3.2.3. Integrales en tiempo propio	38
3.3. Sector gluónico	39
3.3.1. Método del Campo de Fondo	40
3.3.2. Acción efectiva a un loop	43
3.4. Renormalización	45
3.5. Divergencias infrarrojas	47
3.6. Teoría efectiva dimensionalmente reducida	48
3.6.1. Eliminación de los modos estáticos	49
3.6.2. Desarrollo en A_0 pequeño	49
3.7. Resultados en SU(2)	51
3.7.1. Traza en espacio de color	52

3.7.2. Invariancia gauge del resultado	54
3.7.3. Comparación con otros resultados	55
3.8. Resultados en SU(3)	56
3.8.1. Traza en espacio de color	56
3.8.2. Invariancia gauge del resultado	59
3.8.3. Comparación con otros resultados	60
3.9. Conclusiones	60
4. Efectos no perturbativos por encima de la transición de fase	63
4.1. Introducción	63
4.2. Loop de Polyakov perturbativo	64
4.2.1. Resultados perturbativos	65
4.2.2. Reducción dimensional	65
4.2.3. Resultados perturbativos a órdenes superiores	68
4.2.4. Ansatz gaussiano	70
4.3. Contribuciones no perturbativas en el loop de Polyakov	71
4.4. Comparación con datos del retículo	72
4.4.1. Resultados en gluodinámica	73
4.4.2. Resultados unquenched	75
4.4.3. Otros resultados quenched	77
4.4.4. Relación con otras determinaciones del condensado	80
4.5. Energía libre de un quark pesado	80
4.5.1. Contribuciones no perturbativas en la energía libre	81
4.5.2. Comparación con datos del retículo	82
4.5.3. Analogía entre el loop de Polyakov y el potencial quark-antiquark a temperatura cero	83
4.6. Conclusiones	85
5. Modelos de Quarks Quirales a Temperatura Finita	87
5.1. Transformaciones gauge grandes	88
5.1.1. Transformaciones gauge a temperatura finita	88
5.1.2. Simetría del centro	89
5.1.3. Rotura de la simetría del centro por fermiones	89
5.2. Modelos de Quarks Quirales	90
5.2.1. Modelo Quark de Nambu–Jona-Lasinio	90
5.2.2. Modelo Quark Espectral	93
5.3. Problemática de los modelos de quarks quirales a temperatura finita	95
5.3.1. Tratamiento estándar a temperatura finita	95
5.3.2. Generación de estados multi-quarks	96
5.3.3. Conflicto con Teoría Quiral de Perturbaciones	97
5.4. Acoplamiento del loop de Polyakov en los Modelos de Quarks Quirales	97
5.4.1. Acoplamiento mínimo del loop de Polyakov	98
5.4.2. Promedio sobre el grupo	99

5.4.3. Solución de la problemática	101
5.5. Lagrangiano Quiral a Temperatura Finita	102
5.5.1. Estructura del lagrangiano	102
5.5.2. LEC para el modelo de Nambu–Jona-Lasinio	103
5.5.3. LEC para el Modelo Quark Espectral	104
5.6. Correcciones de orden superior	106
5.6.1. Más allá de un loop de quarks	106
5.6.2. Correcciones gluónicas	110
5.6.3. Correcciones locales en el loop de Polyakov	111
5.6.4. Resultados más allá de la aproximación quenched	112
5.7. Implicaciones sobre la transición de fase de QCD	114
5.8. Conclusiones	119
6. Tensor Energía-Impulso de Modelos de Quarks Quirales a bajas energías	123
6.1. Tensor Energía-Impulso	123
6.2. Acoplamiento de un Modelo Quark con Gravedad	125
6.2.1. Formalismo de tétradas	125
6.2.2. Operador de segundo orden	128
6.3. Modelos de Quarks Quirales en presencia de Gravedad	130
6.3.1. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	130
6.3.2. Modelo de Georgi-Manohar	131
6.4. Cálculo de la acción efectiva	132
6.5. Ecuaciones de movimiento	134
6.5.1. Eliminación de los acoplamientos vector y axial	134
6.5.2. Eliminación de escalares	135
6.5.3. Ecuaciones de movimiento clásicas para pseudoescalares	136
6.6. Coeficientes de Gasser-Leutwyler-Donoghue	136
6.6.1. Modelo de Georgi-Manohar	137
6.6.2. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio	138
6.6.3. Resultados	140
6.7. Conclusiones	140
7. Modelo Quark Espectral y Acción Efectiva Quiral	143
7.1. Acción Efectiva del Modelo Quark Espectral	144
7.2. Anomalías Quirales	145
7.2.1. Cálculo de la anomalía quiral	145
7.2.2. Término de Wess-Zumino-Witten	147
7.3. Desarrollo quiral de la acción efectiva	148
7.4. Resultados para el Modelo de Dominancia Vectorial	150
7.5. Límite de N_c grande y Dualidad	153
7.6. Conclusiones	156

8. Conclusiones	159
8.1. Resumen y Conclusiones	159
8.2. Anexo de artículos publicados	161
A. Transformaciones Gauge	163
A.1. Definiciones	163
A.2. Gauges estacionarios	164
A.3. Particularización al grupo gauge $SU(N_c)$	165
A.3.1. Simetría del centro del grupo gauge	165
A.3.2. Rotura explícita de la simetría del centro	166
B. Integrales en tiempo propio con regularización dimensional	169
C. Lagrangiano Efectivo de QCD en $SU(2)$	173
D. Lagrangiano Efectivo del Modelo Quark Quiral acoplado con el loop de Polyakov	177
D.1. Operador de Klein-Gordon efectivo	177
D.2. Trazas de sabor e identidades útiles	179
D.3. Integrales en tiempo propio	180
D.4. Ecuaciones clásicas de movimiento	181
D.5. Lagrangiano Efectivo	182

Capítulo 1

Introducción

La extensión de la Teoría de Campos de temperatura cero a temperaturas y densidades finitas es un paso natural que se produjo hace medio siglo [1, 2, 3, 4]. La Teoría de Campos a Temperatura y Densidad Finitas (TCTDF) [5, 6, 7], se desarrolló a partir de la Teoría Relativista de Muchos Cuerpos, y constituye una amalgama de Teoría de Campos y Mecánica Estadística. Es aplicable en aquellos problemas de la física teórica de partículas que tienen características de muchos cuerpos. A nivel teórico se necesitan formulaciones apropiadas del problema térmico, para el cual se disponen de varios formalismos. Dos ejemplos son el formalismo de Tiempo Imaginario y el de Tiempo Real [8]. A pesar de la larga experiencia acumulada en este campo, muchos de los problemas planteados inicialmente aún siguen abiertos.

Muchos son los logros de la TCTDF y se esperan muchos más. Por una parte permite estudiar las teorías ya existentes más allá del contexto en el que inicialmente fueron creadas. Esto significa explorar las propiedades de la materia en condiciones extremas, con altas temperaturas y densidades. Un ejemplo de esto es la teoría de QCD [9], que se creó como un intento de desarrollar una teoría fundamental de las interacciones fuertes. La TCTDF aplicada a QCD [10] predice que cuando la temperatura y las densidades aumentan, existe una transición a una fase en la que los quarks y gluones están deconfinados (fase de desconfinamiento del color). TCTDF predice, por tanto, la existencia de un plasma de quarks y gluones que, de hecho, debería existir en los primeros instantes del universo, de acuerdo con los modelos cosmológicos actuales. Esto tiene importantes consecuencias en el campo de la astrofísica, ya que la transición de fase podría haber jugado un papel muy importante en la formación de materia oscura. Otro campo donde la TCTDF está dando frutos importantes es en el contexto de las colisiones de iones pesados a muy alta energía. El hecho de que la transición de fase de QCD ocurra a temperaturas no excesivamente altas $T_c \sim 200 \text{ MeV}$ hace que estas condiciones se puedan estudiar en el laboratorio. Existen estudios importantes de esta nueva fase de la materia en laboratorios actuales [BNL Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)] [11] y es previsible que se continúen posteriormente en futuras instalaciones: Large Hadron Collider (LHC) en el CERN, y Schwerionen-Synchrotron (SIS 200) en el GSI. Finalmente, un tercer lugar donde pueden surgir tales condiciones extremas es en el interior de estrellas de neutrones, donde la densidad es superior a la densidad nuclear.

Existen distintas técnicas para estudiar el comportamiento de QCD en función de la temperatura y la densidad. Estas técnicas se pueden agrupar en tres categorías diferentes: los métodos perturbativos, los modelos efectivos de QCD en el retículo y los métodos semicásicos (instantones) [10].

1.1. Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica (QCD, Quantum Chromodynamics) fue desarrollada al comienzo de los años setenta y responde al intento de mucha gente de crear una teoría fundamental que dé cuenta de las interacciones fuertes [12, 13, 14]. Se trata de una teoría cuántica de campos renormalizable. Sus campos fundamentales son espinores de Dirac que describen partículas de espín 1/2, llamados quarks, y campos gauge correspondientes a partículas de espín 1, llamados gluones. Al contrario que QED (Quantum Electrodynamics) que es una teoría abeliana, QCD es una teoría gauge no abeliana basada en el grupo gauge de color $SU(N_c)$, de modo que constituye una generalización de la teoría de QED para el electromagnetismo. Tanto los quarks como los gluones, que son las partículas intermedias de la interacción fuerte, llevan asociada una carga, llamada color. Como resultado los gluones pueden interaccionar consigo mismos y con los quarks. QCD viene descrita por el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_i (\gamma^\mu D_\mu + m_i) q_i, \quad (1.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu],$$

donde $A_\mu = A_\mu^a T_a$ son los campos de los gluones, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ es el tensor Field Strength de $SU(N_c)$, T_a son los generadores hermíticos de $SU(N_c)$ y q_i son campos de quarks de varios sabores. La teoría viene parametrizada por una única constante de acoplamiento g y por los parámetros m_i correspondientes a la masa desnuda de los quarks. La evidencia experimental indica que hay tres grados de libertad de color ($N_c = 3$), llamados tradicionalmente rojo, verde y azul, y seis sabores de quarks ($N_f = 6$). Los quarks de tipo up, down y strange son relativamente ligeros, mientras que charm, bottom y top son pesados.

Gran parte del éxito de la teoría reside en su habilidad para reproducir el comportamiento casi sin interacción de los quarks a muy cortas distancias [15]. Esta propiedad de la teoría, que se conoce como libertad asintótica, explica el escalamiento aproximado que se observa en las colisiones profundamente inelásticas de leptones con hadrones [16, 17]. QCD también parece consistente con mucha de la fenomenología existente sobre las interacciones fuertes, como la simetría quiral aproximada, la noción de confinamiento de color o ciertos modelos de hadrones como el bag o el string.

La teoría de QCD presenta varias simetrías. En primer lugar es invariante bajo el grupo de simetría local $SU(N_c)$, lo cual implica por ejemplo que la masa de los quarks es independiente de su color. Cuando la masa de los quarks es igual a cero, el lagrangiano de QCD (1.1) es invariante bajo el grupo de simetría global $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, el cual

se suele designar como grupo de simetría quiral [18]. Además existe una simetría global $U(1)_B$ relacionada con la conservación del número bariónico y una simetría global axial $U(1)_A$.

Los generadores del álgebra quiral son conservados y sería de esperar que las partículas formaran multipletes degenerados correspondientes a las representaciones irreducibles de este grupo. Pero no existe evidencia de que exista esta estructura de multipletes tan amplia, lo cual lleva a la idea de que la simetría $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ está espontáneamente rota. A temperatura cero, o en general a baja temperatura, el estado fundamental de la teoría rompe espontáneamente esta simetría al grupo $SU(N_f)_V$

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \xrightarrow{\text{RES}} SU(N_f)_V. \quad (1.2)$$

De acuerdo con el teorema de Goldstone esta rotura de la simetría implica la existencia de $N_f^2 - 1$ bosones de Goldstone pseudo-escalares sin masa. Para $N_f = 2$ estos son los tres piones π^+ , π^- y π^0 , y para $N_f = 3$ tenemos, además de los anteriores, los cuatro kaones K^+ , K^- , K^0 y \bar{K}^0 , y el mesón η . La rotura de esta simetría conduce además a la aparición de condensados de quarks de la forma $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Podemos pensar en $\langle \bar{q}q \rangle$ como en un parámetro de orden que caracteriza la rotura de la simetría quiral. Cuando la temperatura se incrementa por encima de un cierto valor T_c , la simetría se recupera y el condensado de quarks se hace cero.

1.2. Simetría del centro y transición de fase de QCD

En gluodinámica pura, esto es en ausencia de fermiones, la teoría presenta una simetría global extra asociada al centro $\mathbb{Z}(N_c)$ del grupo gauge de color $SU(N_c)$. En el formalismo de tiempo imaginario, la simetría $\mathbb{Z}(N_c)$ es generada por la acción de transformaciones gauge locales que son periódicas en la variable temporal, salvo un elemento arbitrario del centro

$$U(1/T, \vec{x}) = z U(0, \vec{x}), \quad z = e^{i2\pi n/N_c}. \quad (1.3)$$

La transición a la fase de desconfinamiento puede verse como la rotura espontánea de la simetría del centro a temperaturas suficientemente altas. Un parámetro de orden natural para la simetría $\mathbb{Z}(N_c)$ es el valor esperado del loop de Polyakov,¹ que se define como

$$L(T) := \langle \mathcal{P}(\vec{x}, T) \rangle = \left\langle \frac{1}{N_c} \text{tr}_c \mathcal{T} \left(e^{-\int_0^{1/T} dx_0 A_0(\vec{x}, x_0)} \right) \right\rangle, \quad (1.4)$$

donde $\langle \rangle$ indica valor esperado en el vacío, tr_c es la traza en espacio de color (en representación fundamental), y \mathcal{T} indica ordenación a lo largo del camino de integración. A_0 es la componente temporal del campo gluónico (en tiempo euclídeo). Bajo una transformación gauge con simetría del centro, el loop de Polyakov transforma $\mathcal{P} \rightarrow z\mathcal{P}$, de modo que

¹En esta memoria se hará uso en ocasiones de una terminología anglosajosa para algunas palabras, y se evitará su traducción con el fin de que el lector pueda identificar estos conceptos en la bibliografía. 'Loop de Polyakov' puede traducirse como 'bucle de Polyakov'.

en la fase en que la teoría presenta la simetría $\mathbb{Z}(N_c)$ (fase de confinamiento del color), el loop de Polyakov necesariamente vale cero. En la fase de desconfinamiento esta simetría estará espontáneamente rota, y eso vendrá caracterizado por un valor no nulo para el loop de Polyakov. Cálculos recientes muestran que en una teoría gluónica pura con $N_c = 3$ esta transición ocurre a una temperatura crítica $T_c \simeq 270$ MeV [19], y se trata de una transición de primer orden.

Físicamente el promedio térmico del loop de Polyakov en la representación fundamental determina la energía libre relativa al vacío de un único quark,

$$e^{-F_q(\vec{x})/T} = \langle \mathcal{P}(\vec{x}, T) \rangle, \quad (1.5)$$

y la función de correlación de dos loops de Polyakov conduce a la energía libre de un par quark-antiquark,

$$e^{-F_{\bar{q}q}(\vec{x}-\vec{y})/T} = \langle \mathcal{P}(\vec{x}, T) \mathcal{P}^\dagger(\vec{y}, T) \rangle. \quad (1.6)$$

La renormalización del loop de Polyakov es un problema que hoy en día está abierto [20]. Recientemente se ha desarrollado un método para renormalizar el loop de Polyakov en el retículo [21, 22], y consiste básicamente en el cálculo de la energía libre a partir de la función de correlación de dos loops de Polyakov, ec. (1.6). Los datos que se obtienen muestran un comportamiento que difiere claramente del predicho por teoría de perturbaciones [23] en la región cercana a la transición de fase, de modo que los efectos no perturbativos parecen ser dominantes en esta zona de temperaturas.

Un punto importante es qué efectos produce la inclusión de fermiones en una teoría gauge pura. En el caso de QCD, cuando se añaden quarks en la representación fundamental, la simetría del centro $\mathbb{Z}(N_c)$ se rompe explícitamente, y el loop de Polyakov no sirve, en principio, como parámetro para caracterizar la transición de desconfinamiento. Una de las consecuencias es la modificación de las condiciones en que se produce la transición de fase. En concreto, los quarks tienden a suavizar la transición, de tal modo que en la teoría SU(3) se convierte en una transición de fase de segundo orden [22].

En cuanto a la simetría quiral, ésta se encuentra espontáneamente rota a baja temperatura, pero por encima de un cierto valor se recupera. El parámetro de orden local en este caso es el condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$, que es diferente de cero a baja temperatura, donde la simetría quiral está rota, y cero por encima de la transición de fase quiral. Por tanto, desde un punto de vista teórico la transición de fase de QCD consiste en realidad en dos transiciones de fase distintas, que podemos llamar transición de desconfinamiento de color y transición de restablecimiento de la simetría quiral. Las simulaciones de QCD en el retículo sugieren que, cuando se consideran fermiones sin masa, las dos transiciones tienen lugar a la misma temperatura, al menos en el caso de potencial químico cero [24]. En este caso la temperatura de restablecimiento de la simetría quiral es $T_c \simeq 155 - 205$ MeV, donde el valor preciso depende del número de sabores. Cuando se consideran masas físicas para los quarks la situación no está completamente clara. Para valores moderados de la masa, la transición quiral no tiene un parámetro de orden bien definido, y no se produce una transición de fase pura sino únicamente un cambio rápido (crossover).

Obviamente, es de esperar que todos estos fenómenos de QCD a temperatura finita sean consistentes con invariancia gauge. La invariancia Lorentz se rompe explícitamente en cálculos a temperatura y densidad finitas, debido a que existe un sistema de referencia privilegiado, que es el baño térmico, y que se supone en reposo; no obstante, la invariancia gauge permanece como una simetría exacta. En cálculos concretos en teoría de perturbaciones, la conservación de la invariancia gauge a temperatura cero se consigue con un número finito de términos, sin embargo a temperatura finita es necesario considerar un número infinito de términos, lo cual obligaría en un principio a hacer un tratamiento no perturbativo.

1.3. Teorías quirales efectivas

Actualmente los grados de libertad hadrónicos se vienen tratando con teorías quirales efectivas en las cuales un ingrediente básico son los bosones de Goldstone generados en la rotura espontánea de la simetría quiral de QCD [25, 26]. La aproximación por excelencia es la Teoría Quiral de Perturbaciones (TQP) [25, 27]. Existen otras aproximaciones que se basan en la construcción de modelos de quarks quirales como el modelo sigma [28] o el modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) [29, 30, 31].

La TQP se fundamenta en la construcción de un lagrangiano efectivo invariante quiral como desarrollo en potencias de los momentos externos de los campos y de la masa de los quarks. Este lagrangiano debe satisfacer ciertos requisitos de simetría como invariancia gauge, invariancia Lorentz (a temperatura cero), paridad y conjugación de carga, y se escribe en términos de constantes de baja energía que se corresponden con funciones de Green de QCD. Los valores de estas constantes no pueden ser determinados a partir de argumentos de simetría exclusivamente.

Los modelos de quarks quirales aspiran, como TQP, a constituir una aproximación de la dinámica de QCD no perturbativa a baja energía. Estos modelos hacen uso explícito de grados de libertad de quarks. El modelo de Nambu–Jona-Lasinio ha sido muy utilizado en el pasado y aún se sigue utilizando. Las interacciones efectivas de cuatro fermiones del modelo NJL representan cierta aproximación a QCD. Sin embargo, desde un punto de vista teórico aún no está claro de qué modo estas interacciones de cuatro quarks surgen de QCD. En el caso de dos sabores uno de los mecanismos podría ser las llamadas interacciones de 't Hooft, que consisten en la interacción de quarks a través de los modos cero de instantones [32].

1.4. Heat kernel y acción efectiva

La acción efectiva, una extensión a teoría cuántica de campos del potencial termodinámico de mecánica estadística, juega un papel teórico muy importante pues está relacionada con cantidades de interés físico. A un loop tiene la forma $c \text{Tr} \log(\mathbf{K})$, donde \mathbf{K} es un operador diferencial que controla las fluctuaciones cuánticas cuadráticas sobre un fondo

clásico. Esta magnitud sufre algunas patologías matemáticas, tales como divergencias ultravioletas y multivaluación. Por ello resulta útil expresar la acción efectiva mediante la representación de tiempo propio de Schwinger²

$$-c \operatorname{Tr} \log(\mathbf{K}) = c \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \operatorname{Tr} e^{-\tau \mathbf{K}} = c \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int d^D x \operatorname{tr} \langle x | e^{-\tau \mathbf{K}} | x \rangle. \quad (1.8)$$

Al contrario que la acción efectiva, el heat kernel (o más concretamente su elemento de matriz) $\langle x | e^{-\tau \mathbf{K}} | x \rangle$ es univaluado y finito en la región ultravioleta para valores positivos del parámetro de tiempo propio τ .

El heat kernel fue introducido por Schwinger [33] en teoría cuántica de campos como una herramienta para regularizar divergencias ultravioletas de un modo que preserve invariancia gauge. El heat kernel y su desarrollo han sido aplicados también en el estudio de densidades espectrales e índices de operadores de Dirac (\mathbf{D}) [34, 35] en términos de operadores de Klein-Gordon ($\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}$), para el cálculo de la función ζ [36, 37] y anomalías de estos operadores [38], para definir la acción efectiva de teorías gauge quirales [39], para el efecto Casimir [40], etc. El heat kernel se puede calcular perturbativamente haciendo un desarrollo en potencias del tiempo propio. En la presente memoria va a constituir una herramienta fundamental para el cálculo de las diferentes teorías efectivas que vamos a considerar.

1.5. Estructura de la tesis

Esta tesis está estructurada del siguiente modo:

En el capítulo 2 se considera el heat kernel a temperatura cero, y se construye su generalización a temperatura finita, dentro del formalismo de tiempo imaginario. Con objeto de conseguir un desarrollo que preserve la invariancia gauge orden por orden, haremos uso de una generalización a temperatura finita del método de los símbolos [41], que permite calcular de un modo sencillo el desarrollo de una función en términos de operadores locales y covariantes gauge. Esto va a conducir a la definición del loop de Polyakov (sin traza), que es un objeto covariante gauge, y que aparece de manera natural en el desarrollo. El cálculo se hace para un gauge general y en presencia de campos escalares que pueden ser no abelianos y no estacionarios.

En el capítulo 3 se considera la teoría gauge $SU(N_c)$ de QCD, y se calcula su acción efectiva a nivel de un loop en el régimen de temperaturas grandes, haciendo uso del resultado del heat kernel del capítulo 2. Se calculan por separado el sector gluónico y el sector de quarks, y se hace un estudio de cómo los quarks rompen explícitamente la simetría

²La traza funcional de un operador \hat{A} se define

$$\operatorname{Tr} \hat{A} \equiv \int d^D x \operatorname{tr} \langle x | \hat{A} | x \rangle, \quad (1.7)$$

donde D es la dimensión del espacio-tiempo y tr indica traza en espacio interno (color, sabor, Dirac, etc). A lo largo de la tesis haremos uso de esta definición.

del centro $\mathbb{Z}(N_c)$. Esta rotura se va a manifestar en que algunos de los mínimos absolutos degenerados que presenta el potencial efectivo de la teoría como función del loop de Polyakov van a dejar de serlo, y se van a convertir en puntos estacionarios (mínimos o máximos locales). A temperaturas suficientemente grandes está justificado considerar una teoría efectiva dimensionalmente reducida, pues los modos de Matsubara no estáticos de los campos gauge se hacen muy pesados y desacoplan de la teoría. Dentro del problema de reducción dimensional obtendremos la estructura del lagrangiano dimensionalmente reducido.

En el capítulo 4 se hace un estudio fundamentado de los datos del loop de Polyakov renormalizado en la fase de desconfinamiento de color, obtenidos en el retículo. Se estudian las contribuciones no perturbativas existentes, en el marco de un modelo fenomenológico que las describe como generadas por condensados gluónicos invariantes BRST.

En el capítulo 5 se aborda la problemática que presenta el tratamiento estándar de los modelos de quarks quirales a temperatura finita. Discutimos el acoplamiento del loop de Polyakov de color con los quarks, y calculamos el lagrangiano quiral efectivo a bajas energías, con una predicción para las constantes de baja energía. Se estudian asimismo las implicaciones que tiene este modelo, sobre la transiciones de fase quiral y de desconfinamiento de color.

El capítulo 6 está dedicado a estudiar los efectos de curvatura sobre varios modelos de quarks quirales: Quark Constituyente, Georgi-Manohar y Nambu–Jona-Lasinio. En concreto, se estudia el acoplamiento de la gravedad en estos modelos de un modo que evite la introducción de nuevos campos aparte de los del caso plano y la métrica. Se estudia el tensor energía-impulso a bajas energías que se obtiene, con valores concretos para las constantes de baja energía estándar y una predicción para las constantes asociadas a términos no métricos con contribución de curvatura.

En el capítulo 7 se hace un estudio de la estructura de la acción efectiva del modelo quark espectral acoplado con gravedad. Por una parte se considera la contribución anómala, y por otra la parte no-anómala, con una predicción para las constantes de baja energía. Se estudian los resultados del modelo en el esquema de dominancia vectorial, y se compara con el cálculo en el límite de N_c grande en la aproximación de una única resonancia.

Por último, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones de la memoria.

Capítulo 2

Desarrollo del Heat Kernel

El desarrollo del heat kernel¹ [33, 39] se usa frecuentemente en el contexto de los métodos de integrales de caminos para integrar grados de libertad externos de un modo no perturbativo. El resultado es un desarrollo en los campos que corresponden a aquellos grados de libertad que no han sido integrados. Esto quiere decir que el desarrollo del heat kernel proporciona una teoría de campos efectiva. Los términos del desarrollo se clasifican de acuerdo con su dimensión.

Nuestro objetivo en este capítulo consiste en diseñar un método que permita mantener la invariancia gauge a temperatura finita de forma manifiesta orden por orden en el desarrollo dimensional. Para ello aplicaremos una técnica conocida como *método de los símbolos*, que fue desarrollado a temperatura cero [42] y extendido posteriormente a temperatura finita [41]. Hay que notar que el tratamiento es inevitablemente complejo pero necesario.

Como motivación, estudiaremos el potencial macrocanónico de un gas de partículas libres relativistas, donde el loop de Polyakov se reduce a la fugacidad $e^{\beta\mu}$, con $\beta = 1/T$ la temperatura inversa y μ el potencial químico. La idea consiste en respetar la propiedad de periodicidad de la exponencial bajo cambios periódicos del potencial químico $\mu \rightarrow \mu + i2\pi T$. Aunque este caso es trivial, ayudará a comprender mejor la idea subyacente del método de los símbolos.

Este capítulo está basado en las referencias [43, 44].

2.1. Potencial macrocanónico de un gas de partículas libres relativistas

Como ilustración y motivación del heat kernel, consideraremos el caso de un gas de partículas libres relativistas. Por claridad estudiaremos el caso bosónico. La acción euclídea

¹Heat kernel puede traducirse como 'Núcleo de la ecuación del calor', pues constituye la solución a esta conocida ecuación.

para esta teoría se escribe

$$S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \phi(x) (-D_\mu^2 + m^2) \phi(x), \quad (2.1)$$

donde $D = d + 1$ es la dimensión del espacio-tiempo. Consideramos las siguientes derivadas covariantes:

$$D_0 = \partial_0 - i\mu, \quad D_i = \partial_i. \quad (2.2)$$

μ es un potencial químico, y el loop de Polyakov correspondiente es $\Omega = e^{i\beta\mu}$. La función de partición de esta teoría se calcula fácilmente

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]} = (\det(-D_\mu^2 + m^2))^{-1}. \quad (2.3)$$

Usaremos aquí el convenio $Z = e^{-\Gamma}$, donde Γ es la acción efectiva. El potencial macrocanónico está relacionado con la acción efectiva a través de $\Gamma = \beta \Omega_{mc}$. Así pues, la acción efectiva se puede calcular a partir del heat kernel del siguiente modo

$$\Gamma = \log \det(-D_\mu^2 + m^2) = \text{Tr} \log(-D_\mu^2 + m^2) = -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \langle x | e^{-\tau(-D_\mu^2 + m^2)} | x \rangle, \quad (2.4)$$

donde hemos hecho uso de la representación de Schwinger de tiempo propio. $(-D_\mu^2 + m^2)$ es un operador de tipo Klein-Gordon, que será definido en ec. (2.16). Si hacemos uso de ec. (2.45), con la definición de la función φ_0 dada en ec. (2.46), sustraemos la parte de temperatura cero (que corresponde a considerar $\varphi_0 \rightarrow 1$), y se realizan las integrales, finalmente llegamos al resultado estándar [6]

$$\Gamma = N \int \frac{d^d x d^d k}{(2\pi)^d} \left[\log \left(1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)} \right) + \log \left(1 - e^{-\beta(\omega_k + \mu)} \right) \right]. \quad (2.5)$$

N es el número de especies y $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. El efecto de introducir otros campos externos puede ser tenido en cuenta mediante los sucesivos órdenes del desarrollo del heat kernel (ec. (2.45) corresponde al primer orden).

2.2. Método de los Símbolos

Consideremos un operador genérico

$$\hat{f} = f(M, D_\mu), \quad (2.6)$$

construido con M y D_μ en un sentido algebraico, esto es, es una combinación lineal (o serie) de productos de M y D_μ con coeficientes que son c-números. D_μ es la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x), \quad (2.7)$$

$A_\mu(x)$ es el campo gauge y $M(x)$ denota una o varias funciones matriciales de x que representan otros campos externos diferentes de los campos gauge. El método de los símbolos [41, 42] permite calcular de un modo sistemático los elementos diagonales del operador (2.6).

Consideraremos la siguiente normalización para los estados con posición y momento bien definidos

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx}, \quad \langle p|p'\rangle = (2\pi)^D \delta(p - p'), \quad (2.8)$$

y la relación de completitud

$$\mathbf{1} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} |p\rangle \langle p|. \quad (2.9)$$

D es la dimensión del espacio-tiempo. Denotaremos por $|0\rangle$ el estado de momento cero, el cual satisface

$$\langle x|0\rangle = 1, \quad \hat{p}_\mu|0\rangle = \langle 0|\hat{p}_\mu = 0, \quad \langle 0|0\rangle = \int d^D x. \quad (2.10)$$

En nuestra notación p_μ es real, $\int d^D p$ indica integración estándar en \mathbb{R}^D y $\delta(p - p')$ es la función delta correspondiente. p^2 significa $p_\mu p_\mu$. Si consideramos el elemento diagonal $\langle x|f(M, D_\mu)|x\rangle$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle x|f(M, D_\mu)|x\rangle &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle x|f(M, D_\mu)|p\rangle \langle p|x\rangle \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle p|x\rangle \langle x|e^{ip\hat{x}} e^{-ip\hat{x}} f(M, D_\mu) e^{ip\hat{x}} e^{-ip\hat{x}}|p\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En la primera igualdad hemos introducido la relación de completitud (2.9). Teniendo en cuenta que el operador posición \hat{x} es el generador de las traslaciones en momentos, tenemos las siguientes transformaciones de semejanza

$$e^{-ip\hat{x}} D_\mu e^{ip\hat{x}} = D_\mu + ip_\mu, \quad e^{-ip\hat{x}} M(x) e^{ip\hat{x}} = M(x), \quad (2.12)$$

o en general para \hat{f} , construida en sentido algebraico con M y D_μ ,

$$e^{-ip\hat{x}} f(M, D_\mu) e^{ip\hat{x}} = f(M, D_\mu + ip_\mu). \quad (2.13)$$

Basta considerar $\langle x|e^{ip\hat{x}} = e^{ipx}\langle x|$ y $e^{-ip\hat{x}}|p\rangle = |0\rangle$ en (2.11) para obtener la fórmula del método de los símbolos

$$\langle x|f(M, D_\mu)|x\rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle x|f(M, D_\mu + ip_\mu)|0\rangle. \quad (2.14)$$

Al elemento $\langle x|f(M, D_\mu + ip_\mu)|0\rangle$ se le denomina símbolo de \hat{f} , y es en realidad una matriz, pues M y D_μ son operadores en espacio interno (color, sabor, Dirac, etc.). El problema con (2.14) reside en que la covariancia gauge no se manifiesta de manera explícita cuando se usa una base en momentos. En efecto, $|0\rangle$ (o más generalmente $|p\rangle$) no es covariante

bajo transformaciones gauge locales. Por otra parte, el miembro derecho de la igualdad en ec. (2.14) es explícitamente invariante bajo transformaciones de tipo boost

$$D_\mu \rightarrow D_\mu + a_\mu, \quad (2.15)$$

donde a_μ son c-números constantes. Esto se debe a que el cambio en a_μ puede ser compensado mediante un cambio similar en la variable de integración p_μ . Esta propiedad es la condición necesaria y suficiente para que exista covariancia gauge, pues implica que en un desarrollo de f en los operadores, D_μ debe de aparecer sólo en el interior de conmutadores.

2.3. Desarrollo del Heat Kernel a temperatura cero

En esta sección aplicaremos el método de los símbolos para el cálculo del heat kernel. Consideramos el operador de Klein-Gordon²

$$\mathbf{K} = M(x) - D_\mu^2. \quad (2.16)$$

El heat kernel se define como el operador $e^{-\tau\mathbf{K}}$. Nosotros estamos interesados en el cálculo del elemento de matriz con puntos coincidentes $\langle x|e^{-\tau\mathbf{K}}|x\rangle$. A τ se le denomina parámetro de tiempo propio. Este objeto resulta en general difícil de calcular, y en la práctica interesa estudiar su comportamiento cuando τ es pequeño. El heat kernel admite un desarrollo (asintótico) en serie de potencias de τ alrededor de $\tau = 0$. Usando la notación estándar

$$\langle x|e^{-\tau\mathbf{K}}|x\rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\tau^n, \quad (2.17)$$

donde los coeficientes $a_n(x)$ son conocidos como *coeficientes de Seeley-DeWitt* [45, 46, 47], y son operadores locales construidos con una combinación lineal de productos de $M(x)$ y D_μ . Puesto que el heat kernel es covariante gauge, la expresión (2.17) debe ser covariante gauge orden por orden. El heat kernel $e^{-\tau\mathbf{K}}$ no tiene dimensiones si asignamos dimensiones de masa $-2, +1, +2$ a τ, D_μ y M , respectivamente. Por tanto, el desarrollo en potencias de τ es equivalente a un conteo de las dimensiones de masa de los operadores locales.

La aplicación de (2.14) conduce a

$$\begin{aligned} \langle x|e^{-\tau(M-D_\mu^2)}|x\rangle &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle x|e^{-\tau(M-(D_\mu+ip_\mu)^2)}|0\rangle \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} \langle x|e^{-\tau(M-D_\mu^2-2ip_\mu D_\mu)}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Notar que p_μ es un c-número, de modo que conmuta con todos los operadores. En este punto consideramos el desarrollo de la exponencial. Hasta $\mathcal{O}(4)$ en dimensiones de masa

²En este capítulo haremos uso de una métrica euclídea.

de los operadores locales se tiene³

$$\langle x | e^{-\tau(M - D_\mu^2)} | x \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} \langle x | \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \dots | 0 \rangle, \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 1, \\ \Delta_1 &= 2i\tau p_\mu D_\mu, \\ \Delta_2 &= -\tau(M - D_\mu^2) - 2\tau^2 p_\mu p_\nu D_\mu D_\nu, \\ \Delta_3 &= -i\tau^2 p_\mu \left(\{D_\mu, M\} - \{D_\mu, D_\nu^2\} \right) - i\frac{4}{3}\tau^3 p_\mu p_\nu p_\alpha D_\mu D_\nu D_\alpha, \\ \Delta_4 &= \frac{\tau^2}{2} \left(M^2 - \{D_\mu^2, M\} + D_\mu^4 \right) \\ &\quad - \frac{\tau^3}{3} p_\mu p_\nu \left(\{M, D_\mu D_\nu\} + D_\mu M D_\nu - \{D_\alpha^2, D_\mu D_\nu\} - D_\mu D_\alpha^2 D_\nu \right) \\ &\quad + \frac{2}{3}\tau^4 p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta D_\mu D_\nu D_\alpha D_\beta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se ha usado la notación estándar para el anticonmutador: $\{A, B\} = AB + BA$. En general, las integrales que aparecen son del tipo

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\tau p^2} p_{i_1} \cdots p_{i_{2n}} &\equiv \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \frac{1}{(2\tau)^n} \delta_{i_1 i_2 \cdots i_{2n-1} i_{2n}} \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \frac{1}{(2\tau)^n} (\delta_{i_1 i_2} \cdots \delta_{i_{2n-1} i_{2n}} + (\text{permutaciones})), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde $\delta_{i_1 i_2 \cdots i_{2n}}$ es el producto sin normalizar y completamente simétrico de $2n$ deltas de Kronecker (es decir, $(2n-1)!!$ términos). La integral en ec. (2.21) con un número impar de p 's vale cero. Tras integrar en momentos, únicamente sobreviven los términos con dimensión de masa par

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\tau(M - D_\mu^2)} | x \rangle &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \left\langle x \left| 1 - \tau M \right. \right. \\ &\quad + \left. \tau^2 \left(\frac{1}{2}M^2 - \frac{2}{3}\{D_\mu^2, M\} - \frac{1}{6}D_\mu M D_\mu + D_\mu^4 + \frac{1}{6}(D_\mu D_\nu)^2 + \frac{1}{3}D_\mu D_\nu^2 D_\mu \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{O}(6) \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Notar que el término $2\tau^2 p_\mu p_\nu D_\mu D_\nu$ ha cancelado el término τD_μ^2 en ec. (2.20), después de integrar en momentos. Notar que cada orden del desarrollo está formado por un número finito de términos. La invariancia del heat kernel bajo la transformación (2.15) implica que

³Como se verá más adelante, el conteo en τ es equivalente al conteo en dimensiones de masa únicamente después de integrar en momentos.

en ec. (2.22) solamente podrán aparecer términos con derivadas D_μ dentro de commutadores. En efecto, el cambio $D_\mu \rightarrow D_\mu + a_\mu$ no tiene efecto cuando D_μ está dentro de un commutador, pero da cuenta de las contribución procedente de términos con D_μ fuera de commutadores. Esto significa que los únicos términos que sobreviven son los multiplicativos en el espacio de posiciones.⁴ Como ejemplo, se puede comprobar que

$$\{D_\mu^2, M\} = [D_\mu, [D_\mu, M]] + 2[D_\mu, M]D_\mu + 2MD_\mu^2. \quad (2.24)$$

Los términos $2[D_\mu, M]D_\mu$ y $2MD_\mu^2$ no contribuirán en el desarrollo. El resultado final que se obtiene hasta $\mathcal{O}(4)$ en dimensiones de masa es

$$\langle x | e^{-\tau(M-D_\mu^2)} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \left(1 - \tau M + \tau^2 \left(\frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{6}M_{\mu\mu} + \frac{1}{12}F_{\mu\nu}^2 \right) + \mathcal{O}(\tau^3) \right). \quad (2.25)$$

Al pasar de ec. (2.22) a (2.25) hemos quitado $\langle x | | 0 \rangle$ por la propiedad (2.23). En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación. El tensor de fuerza se define como $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, y del mismo modo el campo eléctrico es $E_i = F_{0i}$. Además, la notación \widehat{D}_μ significa la operación $[D_\mu,]$. Por último decir que usaremos una notación con subíndices del tipo $X_{\mu\nu\alpha}$, lo que significa $\widehat{D}_\mu \widehat{D}_\nu \widehat{D}_\alpha X = [D_\mu, [D_\nu, [D_\alpha, X]]]$. Por ejemplo, $M_{00} = \widehat{D}_0^2 M$, $F_{\alpha\mu\nu} = \widehat{D}_\alpha F_{\mu\nu}$.

Los coeficientes de Seeley-DeWitt están calculados en la literatura. Las expresiones explícitas para los coeficientes $a_n(x)$ del desarrollo (2.17) hasta orden $n = 3$ son [39, 48]

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= -M, \\ a_2 &= \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{6}M_{\mu\mu} + \frac{1}{12}F_{\mu\nu}^2, \\ a_3 &= -\frac{1}{6}M^3 + \frac{1}{12}\{M, M_{\mu\mu}\} + \frac{1}{12}M_\mu^2 - \frac{1}{60}M_{\mu\mu\nu\nu} - \frac{1}{60}[F_{\mu\mu\nu}, M_\nu] - \frac{1}{30}\{M, F_{\mu\nu}^2\} \\ &\quad - \frac{1}{60}F_{\mu\nu}MF_{\mu\nu} + \frac{1}{45}F_{\mu\nu\alpha}^2 - \frac{1}{30}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha}F_{\alpha\mu} + \frac{1}{180}F_{\mu\mu\nu}^2 + \frac{1}{60}\{F_{\mu\nu}, F_{\alpha\alpha\mu\nu}\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

El desarrollo del heat kernel se usa frecuentemente para el cálculo de la acción efectiva, y en este caso resulta necesario calcular la traza del heat kernel $\text{Tr } e^{-\tau(M-D_\mu^2)}$. A temperatura cero los coeficientes con traza $b_n(x)$ se definen simplemente como

$$\text{Tr} \left(e^{-\tau(M-D_\mu^2)} \right) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{D/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int d^D x \text{tr} (b_n(x)) \tau^n. \quad (2.27)$$

⁴ $M(x)$ y $[D_\mu, D_\nu]$ son operadores multiplicativos, mientras que D_μ^2 no lo es. Si \widehat{h} es un operador multiplicativo en espacio de posiciones, $\widehat{h}|x\rangle = h(x)|x\rangle$, se tiene

$$\langle x | \widehat{h} | 0 \rangle = h(x). \quad (2.23)$$

Una propiedad importante es que el coeficiente a_n se puede obtener a partir de una variación en primer orden de b_{n+1} . En efecto, por la propia definición del heat kernel se tiene que

$$\langle x | e^{-\tau(M-D_\mu^2)} | x \rangle = -\frac{1}{\tau} \frac{\delta}{\delta M(x)} \text{Tr} \left(e^{-\tau(M-D_\mu^2)} \right). \quad (2.28)$$

Si hacemos uso del desarrollo en ambos miembros de la igualdad, a temperatura cero encontramos

$$a_n(x) = -\frac{\delta}{\delta M(x)} \text{tr} b_{n+1}(x). \quad (2.29)$$

Hay cierta libertad en la elección de los coeficientes b_n . Por supuesto, con tomar $b_n = a_n$ sería suficiente. No obstante, es conveniente explotar la propiedad cíclica de la traza y la integración por partes con el fin de obtener expresiones más compactas. Haciendo uso de estas dos propiedades, a temperatura cero se encuentra la siguiente forma canónica para los coeficientes

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= -M, \\ b_2 &= \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{12}F_{\mu\nu}^2, \\ b_3 &= -\frac{1}{6}M^3 - \frac{1}{12}M_\mu^2 - \frac{1}{12}F_{\mu\nu}MF_{\mu\nu} - \frac{1}{60}F_{\mu\mu\nu}^2 + \frac{1}{90}F_{\mu\nu}F_{\nu\alpha}F_{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.4. Desarrollo del Heat Kernel a temperatura finita

Es posible extender el método de los símbolos con objeto de realizar cálculos a temperatura finita [41].

En el formalismo de tiempo imaginario la coordenada temporal está compactificada a un círculo, de modo que el espacio-tiempo de $D = d + 1$ dimensiones tiene topología $\mathcal{M}_{d+1} = S^1 \times \mathcal{M}_d$. Las funciones de onda para bosones son periódicas en la dirección temporal con período β , la inversa de la temperatura, y antiperiódicas para fermiones. Con objeto de que M y D_μ sean operadores bien definidos en el espacio de Hilbert de las funciones de onda con grados de libertad espacio-temporales e internos, $M(x)$ y $A_\mu(x)$ deben ser funciones periódicas en x_0 .

En este formalismo usaremos la siguiente normalización

$$\langle x | p \rangle = e^{ipx}, \quad \langle p | p' \rangle = \beta \delta_{p_0 p'_0} (2\pi)^d \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.31)$$

La relación de completitud es

$$1 = \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |p\rangle \langle p|. \quad (2.32)$$

La frecuencia toma los valores de Matsubara $p_0 = 2\pi n/\beta$ para bosones y $p_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})/\beta$ para fermiones. El método de los símbolos se escribe en este formalismo⁵

$$\langle x|f(M, D_\mu)|x\rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \langle x|f(M, D_\mu + ip_\mu)|0\rangle. \quad (2.33)$$

Notar que $|0\rangle$ es periódico en la dirección temporal, de modo que la información de si estamos trabajando con bosones o fermiones se encuentra ahora contenida en los valores que toma p_0 .

2.4.1. Desarrollo del Heat Kernel: un caso simple

La aplicación práctica del método de los símbolos a temperatura finita resulta bastante más complicada que a temperatura cero. Con objeto de introducir los conceptos de manera gradual, vamos a considerar el heat kernel, y estudiaremos su desarrollo en un caso simple. Trataremos el caso en el que no exista potencial vector, el potencial escalar sea independiente de \vec{x} , y el término de masa sea un c-número constante:

$$\vec{A}(x) = 0, \quad A_0 = A_0(x_0), \quad M(x) = m^2, \quad [m^2,] = 0. \quad (2.34)$$

El resultado será el término de orden cero de un desarrollo en comutadores $[D_\mu,]$ y $[M,]$ del caso general. La aplicación del método de los símbolos (2.33) conduce a

$$\begin{aligned} \langle x|e^{-\tau \mathbf{K}}|x\rangle &= \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \langle x|e^{-\tau(m^2 + \vec{p}^2 - (D_0 + ip_0)^2)}|0\rangle \\ &= \frac{e^{-\tau m^2}}{(4\pi\tau)^{d/2}} \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \langle x|e^{\tau(D_0 + ip_0)^2}|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Notar que después de la transformación $D_j \rightarrow \partial_j + ip_j$, el operador $D_j = \partial_j$ puede hacerse cero pues actuará sobre $|0\rangle$.

La suma sobre frecuencias de Matsubara implica que el operador $\frac{1}{\beta} \sum_{p_0} e^{\tau(D_0 + ip_0)^2}$ es una función periódica de D_0 con periodo $i2\pi/\beta$, y por tanto es una función univaluada de $e^{-\beta D_0}$. En efecto, si hacemos uso de la fórmula de Poisson para la sumatoria,⁶ se tiene

$$\frac{1}{\beta} \sum_{p_0} e^{\tau(D_0 + ip_0)^2} = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\pm)^k e^{-k\beta D_0} e^{-k^2\beta^2/4\tau} \quad (2.37)$$

⁵La demostración de (2.33) es similar a la realizada en la sec. 2.2 para el caso de temperatura cero.

⁶La fórmula de Poisson para la sumatoria es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) e^{i2\pi xm} \right\}. \quad (2.36)$$

(\pm para bosones y fermiones, respectivamente). En este momento estamos en condiciones de hacer uso de la siguiente identidad operatorial [41]

$$e^{\beta\partial_0}e^{-\beta D_0} = \Omega(x), \quad (2.38)$$

donde $\Omega(x)$ es la línea de Wilson térmica o loop de Polyakov sin traza:

$$\Omega(x) = \mathcal{T} \exp \left(- \int_{x_0}^{x_0+\beta} A_0(x'_0, \vec{x}) dx'_0 \right) \quad (2.39)$$

[\mathcal{T} indica ordenación temporal.] Si bien es esta sección estamos tratando el caso simple de ec. (2.34), la definición (2.39) es válida para un potencial escalar general $A_0(x)$. El loop de Polyakov surge aquí como la diferencia de fase entre traslaciones temporales covariantes y no covariantes gauge alrededor del tiempo euclídeo compactificado. Físicamente, el loop de Polyakov se puede interpretar como el propagador de partículas pesadas en el fondo del campo gauge. La identidad (2.38) es trivial si uno elige un gauge en el cual A_0 es independiente del tiempo (este gauge siempre existe), pues en este caso los operadores $\Omega = e^{-\beta A_0}$, D_0 , A_0 y ∂_0 comutan entre sí. Esta identidad es covariante gauge y es válida en cualquier gauge.⁷

Un punto importante es que el operador de traslación en tiempo euclídeo, $e^{\beta\partial_0}$, no tiene otro efecto que producir el cambio $x_0 \rightarrow x_0 + \beta$ y esta operación es la identidad en el espacio de funciones periódicas en que estamos trabajando

$$e^{\beta\partial_0} = \mathbf{1}, \quad (2.40)$$

(incluso en el caso fermiónico, ya que después de aplicar el método de los símbolos las derivadas actúan sobre los campos externos y no sobre las funciones de onda de las partículas). Llegamos así al resultado importante de que en este espacio

$$e^{-\beta D_0} = \Omega(x), \quad (2.41)$$

esto es, siempre y cuando el operador diferencial D_0 aparezca de manera periódica (con período $2\pi i/\beta$), puede ser reemplazado por el operador multiplicativo $-(1/\beta) \log[\Omega(x)]$. La multivaluación del logaritmo no es efectiva debido a la dependencia periódica.

Otro punto importante es que D_0 (o cualquier función de D_0) actúa como un operador covariante gauge sobre los campos externos $F(x_0, \vec{x})$, y por tanto transforma de acuerdo al grupo de transformaciones gauge locales en el punto (x_0, \vec{x}) . En particular, el loop de Polyakov ec. (2.39), que es también covariante gauge, comienza en el instante x_0 y no en cero. Esta diferencia sería irrelevante para el loop de Polyakov con traza, pero no en el contexto de ahora.

El uso de la regla (2.41) en ec. (2.37) conduce a

$$\frac{1}{\beta} \sum_{p_0} e^{\tau(D_0+ip_0)^2} = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\pm)^k \Omega^k e^{-k^2\beta^2/4\tau}. \quad (2.42)$$

⁷En el apéndice A se hace un estudio detallado de las transformaciones gauge a temperatura finita.

En general se tiene

$$\sum_{p_0} f(ip_0 + D_0) = \sum_{p_0} f(ip_0 - \frac{1}{\beta} \log(\Omega)) , \quad (2.43)$$

siempre y cuando la sumatoria sea absolutamente convergente, de modo que la suma es una función periódica de D_0 . Por futura conveniencia introduciremos el operador Q , que se define como

$$Q = ip_0 + D_0 = ip_0 - \frac{1}{\beta} \log(\Omega) . \quad (2.44)$$

Hay que mencionar que la segunda igualdad se aplica en expresiones de la forma de ec. (2.43). Las dos definiciones de Q no son equivalentes en otros contextos (por ejemplo, en $\sum_{p_0} f_1(Q) X f_2(Q)$, a menos que $[D_0, X] = 0$.)

El heat kernel en ec. (2.35) se puede escribir como

$$\langle x | e^{-\tau K} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-\tau m^2} \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} e^{\tau Q^2} = \frac{1}{(4\pi\tau)^{(d+1)/2}} e^{-\tau m^2} \varphi_0(\Omega) . \quad (2.45)$$

En la primera igualdad se ha hecho uso de que $\Omega(x)$ es un operador multiplicativo, de modo que es aplicable la ec. (2.23). En la segunda igualdad se ha aplicado la definición de las funciones $\varphi_n(\Omega)$, que aparecerán con frecuencia en lo sucesivo:

$$\varphi_n(\Omega; \tau/\beta^2) = (4\pi\tau)^{1/2} \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \tau^{n/2} Q^n e^{\tau Q^2} , \quad Q = ip_0 - \frac{1}{\beta} \log(\Omega) . \quad (2.46)$$

Notar que para cada función existe una versión bosónica y otra fermiónica, y las dos versiones están relacionadas por el cambio $\Omega \rightarrow -\Omega$. Como se ha indicado, estas funciones dependen sólo de la combinación τ/β^2 y son funciones univaluadas de Ω . En el límite de temperatura cero la suma sobre p_0 se transforma en una integral gaussiana

$$\frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{(2\pi)} , \quad (2.47)$$

y se tiene

$$\varphi_n(\Omega; 0) = \begin{cases} (-\frac{1}{2})^{n/2} (n-1)!! & (n \text{ par}), \\ 0 & (n \text{ impar}). \end{cases} \quad (2.48)$$

Como se puede ver en la expresión (2.42), para un valor finito de β las correcciones de τ pequeño son de orden $e^{-\beta^2/4\tau}$ o menor, y por tanto están exponencialmente suprimidas. La misma supresión exponencial existe para las correcciones de temperatura pequeña cuando se considera un valor finito de τ . Ya sea en el límite de temperatura cero o de tiempo propio cero, únicamente queda el modo $k = 0$.

Como motivación del heat kernel, en la sección 2.1 se calculó el potencial macrocanónico de un gas de partículas libres relativistas, que constituye una aplicación simple de los resultados obtenidos en esta sección. En vista de ecs. (2.2) y (2.5), es importante subrayar la relación entre el potencial químico μ y el loop de Polyakov. El potencial químico se

acopla al potencial escalar $A_0(x)$ como una constante aditiva. Puesto que es constante, μ no contribuye a los operadores locales, ya que $A_0(x)$ sólo aparece a través de la derivada covariante \widehat{D}_0 . Notar que si el loop de Polyakov no existiera en las fórmulas, μ no aparecería en la función de partición, lo cual obviamente constituye un resultado incorrecto. Asimismo hay que destacar que la dependencia periódica del heat kernel en $\log \Omega$ conduce al hecho bien conocido de que la función de partición es periódica en $\beta\mu$ con período $2\pi i$ (condición de consistencia debido a su acoplamiento con el operador de carga cuantizado). El loop de Polyakov aparece pues, como una generalización del factor $e^{\beta\mu}$ para campos gauge no abelianos y no constantes.

2.4.2. Coeficientes del desarrollo del Heat Kernel a temperatura finita

En esta sección consideraremos el desarrollo del heat kernel a temperatura finita en el caso totalmente general de campos gauge no abelianos $A_\mu(x)$ y términos de masa no triviales $M(x)$.

En primer lugar es necesario especificar el conteo del desarrollo. Como vimos en sec. 2.3, a temperatura cero el desarrollo se define en potencias de τ [después de extraer el factor geométrico $(4\pi\tau)^{(d+1)/2}$]. Este conteo en τ es equivalente a un conteo en las dimensiones de masa de los operadores locales.

A temperatura finita existe una magnitud dimensional adicional, β , de modo que los dos conteos no van a ser equivalentes y es necesario especificar un desarrollo concreto. Como veremos más adelante un desarrollo estricto del heat kernel en potencias de τ conduciría al mismo desarrollo asintótico que a temperatura cero. Con objeto de extraer correcciones de temperatura finita no triviales ordenaremos nuestro desarrollo de acuerdo con las dimensiones de masa de los operadores locales. Asignaremos dimensiones de masa 0, +1, +2 a Ω , D_μ y M , respectivamente. Consideraremos además un desarrollo en el cual el loop de Polyakov $\Omega(x)$ aparezca a la izquierda en todos los términos, lo cual es una cuestión de elección (de manera equivalente, se podría definir un desarrollo con $\Omega(x)$ a la derecha). Esto es necesario pues el conmutador de Ω con otros operadores genera conmutadores $[D_0,]$ que tienen dimensión 1 en nuestro conteo. Estas especificaciones son suficientes para definir de manera única el desarrollo del heat kernel para un grupo gauge genérico, de tal modo que la invariancia gauge sea manifiesta orden por orden.

El desarrollo así definido, en el cual cada término contiene funciones arbitrarias del loop de Polyakov pero sólo un número finito de derivadas covariantes (incluyendo derivadas temporales), constituye una extensión natural del desarrollo estándar en derivadas covariantes a temperatura cero. Los términos estarán ordenados en potencias de τ pero con coeficientes que dependen de τ/β^2 y Ω :

$$\langle x | e^{-\tau(M - D_\mu^2)} | x \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{(d+1)/2}} \sum_n a_n^T(x) \tau^n. \quad (2.49)$$

De la definición se deduce directamente que para una configuración general el término de

orden cero es precisamente

$$a_0^T(x) = \varphi_0(\Omega(x); \tau/\beta^2), \quad (2.50)$$

que fue calculado en la subsección 2.4.1. Esto es debido a que cuando el caso particular (2.34) es introducido en el desarrollo general, todos los términos de orden mayor, con una o más $[D_\mu,]$ o m^2 , se anulan.

El método que vamos a proponer para el cálculo del desarrollo del heat kernel a temperatura finita hace uso de los coeficientes de Seeley-DeWitt a temperatura cero. La idea consiste en aplicar la fórmula del método de los símbolos (2.33) en la dimensión temporal únicamente, lo cual conduce a

$$\langle x | e^{-\tau(M-D_\mu^2)} | x \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{p_0} \langle x_0, \vec{x} | e^{-\tau(M-Q^2-D_i^2)} | 0, \vec{x} \rangle, \quad Q = ip_0 + D_0. \quad (2.51)$$

Se puede definir el operador de Klein-Gordon efectivo

$$\mathcal{K} = \mathcal{Y} - D_i^2, \quad \mathcal{Y} = M - Q^2, \quad (2.52)$$

donde \mathcal{Y} juega el papel de un término de masa no abeliano. Podemos hacer uso del desarrollo del heat kernel a temperatura cero en d dimensiones (espaciales) con ese operador efectivo ya que el término de masa \mathcal{Y} , a pesar de contener derivadas temporales (en Q), no contiene derivadas espaciales, de manera que actúa como un operador multiplicativo en el espacio de Hilbert espacial. La aplicación directa de este argumento daría lugar al desarrollo

$$\langle x_0, \vec{x} | e^{-\tau(\mathcal{Y}-D_i^2)} | 0, \vec{x} \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\hat{D}_i, \mathcal{Y}) \tau^n, \quad (2.53)$$

donde los coeficientes $a_n(\hat{D}_i, \mathcal{Y})$ son polinomios de dimensión $2n$ construidos a partir de \mathcal{Y} y $\hat{D}_i = [D_i,]$. Los órdenes más bajos corresponden a la ec. (2.26), pero considerando la sustitución del término de masa M por el nuevo término de masa efectivo \mathcal{Y} , y los índices sólo corren en la dimensión espacial.

Notamos que para reproducir el primer orden en ec. (2.49), $a_0^T(x) = \varphi_0(\Omega(x)) \sim e^{\tau Q^2}$, sería necesario obtener el desarrollo a todos los órdenes en ec. (2.53), pues $e^{\tau Q^2}$ no es un polinomio en Q . Ésta es la razón por la cual ec. (2.53) introducida en ec. (2.51) no resulta útil. La manera correcta de proceder será extraer desde el principio la contribución $e^{\tau Q^2}$, lo cual nos llevará a definir un nuevo conjunto de coeficientes polinómicos \tilde{a}_n

$$\langle x_0, \vec{x} | e^{-\tau(M-Q^2-D_i^2)} | 0, \vec{x} \rangle = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tau Q^2} \tilde{a}_n(Q^2, M, \hat{D}_i) \tau^n. \quad (2.54)$$

Consideremos la sustitución de Q^2 por $Q^2 + \lambda$ donde λ un c-número constante. Es claro que los coeficientes \tilde{a}_n no deben cambiar, y por tanto en \tilde{a}_n el operador Q^2 debe aparecer sólo dentro de commutadores de la forma $[Q^2,]$. Para calcular los coeficientes \tilde{a}_n debemos tener en cuenta la relación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\hat{D}_i, \mathcal{Y}) \tau^n = e^{\tau Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(Q^2, M, \hat{D}_i) \tau^n. \quad (2.55)$$

El método consiste en partir del desarrollo de la izquierda de la ecuación (2.55) e ir moviendo los operadores Q^2 hacia la izquierda haciendo uso de commutadores $[Q^2,]$ (por ejemplo $MQ^2 = Q^2M - [Q^2, M]$). Al final se llega a una situación en la que existen dos clases de términos: (i) términos en que todos los operadores Q^2 están dentro de commutadores y (ii) términos con factores Q^2 no saturados a la izquierda (esto es, con Q^2 fuera de commutadores). Los términos del tipo (i) se corresponden con el desarrollo $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \tau^n$. Los del tipo (ii) se pueden identificar con el miembro derecho de la ecuación cuando se realiza un desarrollo de la exponencial $e^{\tau Q^2}$ y se consideran órdenes mayores que el primero. Siguiendo esta técnica, hasta \tilde{a}_2 se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 &= 1, \\ \tilde{a}_1 &= -M, \\ \tilde{a}_2 &= \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{6}M_{ii} + \frac{1}{12}F_{ij}^2 + \frac{1}{2}[Q^2, M] + \frac{1}{6}(Q^2)_{ii}.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Una vez que hemos construido por este procedimiento los coeficientes \tilde{a}_n , el siguiente paso consiste en redefinir ec. (2.54) como un desarrollo en potencias de M , \hat{D}_i y \hat{D}_0 . Para ello debemos expresar $[Q^2,]$ que aparece en el desarrollo, en términos de $[Q,] = [D_0,] = \hat{D}_0$. Se usa la siguiente propiedad:

$$[Q^2, X] = Q[Q, X] + [Q, X]Q = 2Q[Q, X] - [Q, [Q, X]] = 2QX_0 - X_{00}. \quad (2.57)$$

Se trata de mover todos los Q 's hacia la izquierda, de modo que aparecerán operadores \hat{D}_0 . Al final los operadores Q fuera de commutadores quedarán todos a la izquierda. Para \tilde{a}_2 se tiene:

$$\tilde{a}_2 = \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{6}M_{ii} + \frac{1}{12}F_{ij}^2 - \frac{1}{2}M_{00} + \frac{1}{3}E_i^2 + \frac{1}{6}E_{0ii} + Q \left(M_0 - \frac{1}{3}E_{ii} \right). \quad (2.58)$$

Notar que en \tilde{a}_2 existen dos tipos de contribuciones: aquellos términos con una Q a la izquierda, y aquellos que no la tienen. En nuestro conteo, estos dos tipos pertenecen a órdenes diferentes: dimensión de masa tres y cuatro, respectivamente. Cuando \tilde{a}_2 es introducido en ec. (2.54) (queda multiplicado por el factor $e^{\tau Q^2}$) y después en ec. (2.51) (suma sobre frecuencias de Matsubara), se obtienen las siguientes contribuciones

$$\tilde{a}_2 \rightarrow \varphi_0(\Omega) \left(\frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{6}M_{ii} + \frac{1}{12}F_{ij}^2 - \frac{1}{2}M_{00} + \frac{1}{3}E_i^2 + \frac{1}{6}E_{0ii} \right) \tau^2 + \varphi_1(\Omega) \left(M_0 - \frac{1}{3}E_{ii} \right) \tau^{3/2}, \quad (2.59)$$

donde se ha hecho uso de la definición de $\varphi_n(\Omega)$, ec. (2.46).

Como vemos cada coeficiente de heat kernel a temperatura cero a_k en ec. (2.53) con dimensión de masa $2k$ permite obtener un coeficiente correspondiente \tilde{a}_k . Este coeficiente va a dar contribución, en general, a varios coeficientes de heat kernel a_n^T (con dimensión de masa $2n$). Las diferentes contribuciones se deben a que pueden existir ciertos factores de Q a la izquierda de cada término que no actúan como \hat{D}_0 , de modo que son adimensionales. Por tanto para un valor de k dado, los valores de n permitidos deben satisfacer $n \leq k$, y la

igualdad corresponde a términos que tienen todos los Q 's dentro de conmutadores. Podemos encontrar una cota inferior para n si vemos que el número máximo de $[Q^2,]$'s en $\tilde{a}_k (k \geq 0)$ es $k - 1$, y por tanto éste va a ser el número máximo de Q 's fuera de conmutadores que queden a la izquierda. Esto conduce a la condición $k \leq 2n - 1$. Además notemos que un factor Q^ℓ va a dar lugar a un coeficiente $\varphi_\ell(\Omega)$ en a_n^T . En suma, para el cálculo de los coeficientes de heat kernel térmicos vamos a tener el siguiente esquema

$$\begin{aligned}
 a_0 &\sim \tilde{a}_0 \sim \varphi_0 a_0^T \\
 a_1 &\sim \tilde{a}_1 \sim \varphi_0 a_1^T \\
 a_2 &\sim \tilde{a}_2 \sim \varphi_0 a_2^T + \varphi_1 a_{3/2}^T \\
 a_3 &\sim \tilde{a}_3 \sim \varphi_0 a_3^T + \varphi_1 a_{5/2}^T + \varphi_2 a_2^T \\
 a_4 &\sim \tilde{a}_4 \sim \varphi_0 a_4^T + \varphi_1 a_{7/2}^T + \varphi_2 a_3^T + \varphi_3 a_{5/2}^T \\
 a_5 &\sim \tilde{a}_5 \sim \varphi_0 a_5^T + \varphi_1 a_{9/2}^T + \varphi_2 a_4^T + \varphi_3 a_{7/2}^T + \varphi_4 a_3^T \\
 &\dots \quad \dots \\
 a_k &\sim \tilde{a}_k \sim \varphi_0 a_k^T + \varphi_1 a_{(2k-1)/2}^T + \dots + \varphi_{k-1} a_{(k+1)/2}^T
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Esta mezcla de términos no ocurre a temperatura cero, no obstante no puede ser evitada a temperatura finita. Vemos que a Q no se le podría asignar dimensión de masa 1 ya que la suma sobre las frecuencias de Matsubara p_0 no converge para un polinomio en Q . Si p_0 se cuenta con dimensión cero pero D_0 siempre con dimensión 1 la invariancia gauge se perdería. En suma, el hecho de considerar Ω adimensional y \widehat{D}_0 con dimensión 1 es un pequeño precio que hay que pagar para tener un desarrollo covariante gauge orden por orden.

Del esquema anterior se deduce que para calcular los coeficientes de heat kernel térmicos completos hasta a_3^T debemos buscar contribuciones hasta a_5 . Como regla general, para a_n^T van a existir contribuciones de a_k , $n \leq k \leq 2n - 1$, excepto para a_0^T el cual sólo recibe la contribución trivial de a_0 . En particular a_3^T , aparte de la contribución que reciba de a_3 , sólo requiere términos \mathcal{Y}^n , con $n = 2, 3, 4$ en $a_4(\widehat{D}_i, \mathcal{Y})$ y $n = 4, 5$ en $a_5(\widehat{D}_i, \mathcal{Y})$.

Haciendo uso de este método se han calculado los coeficientes de heat kernel térmicos hasta dimensión de masa 6. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 a_0^T &= \varphi_0, \\
 a_{1/2}^T &= 0, \\
 a_1^T &= -\varphi_0 M, \\
 a_{3/2}^T &= \varphi_1 \left(M_0 - \frac{1}{3} E_{ii} \right), \\
 a_2^T &= \varphi_0 a_2^{T=0} + \frac{1}{6} \varphi_2 (E_i^2 + E_{0ii} - 2M_{00}), \\
 a_{5/2}^T &= \frac{1}{3} (2\varphi_1 + \varphi_3) M_{000} + \frac{1}{6} \varphi_1 M_{0ii} - \frac{1}{3} \varphi_1 (2M_0 M + M M_0) \\
 &\quad + \frac{1}{6} \varphi_1 (\{M_i, E_i\} + \{M, E_{ii}\}) - \left(\frac{1}{3} \varphi_1 + \frac{1}{5} \varphi_3 \right) E_{00ii} - \frac{1}{30} \varphi_1 E_{iijj}
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{5}{6} \varphi_1 + \frac{2}{5} \varphi_3 \right) E_{0i} E_i - \left(\frac{1}{2} \varphi_1 + \frac{4}{15} \varphi_3 \right) E_i E_{0i} + \frac{1}{30} \varphi_1 [E_j, F_{ij}] \\
& - \varphi_1 \left(\frac{1}{10} F_{0ij} F_{ij} + \frac{1}{15} F_{ij} F_{0ij} \right) , \\
a_3^T &= \varphi_0 a_3^{T=0} - \left(\frac{1}{4} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{10} \bar{\varphi}_4 \right) M_{0000} - \frac{1}{60} \bar{\varphi}_2 \left(3M_{00ii} - 15M_{00}M - 5MM_{00} - 15M_0^2 \right. \\
& + 4\{M, E_i^2\} + 2E_i M E_i + 4M E_{0ii} + 6E_{0ii}M + 4M_i E_{0i} + 6E_{0i}M_i \\
& \left. + 7M_0 E_{ii} + 3E_{ii}M_0 + 6M_{0i}E_i + 4E_i M_{0i} \right) \\
& + \left(\frac{3}{20} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{15} \bar{\varphi}_4 \right) E_{000ii} + \frac{1}{60} \bar{\varphi}_2 E_{0iijj} + \left(\frac{1}{2} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{5} \bar{\varphi}_4 \right) E_{00i} E_i \\
& + \left(\frac{7}{30} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{10} \bar{\varphi}_4 \right) E_i E_{00i} + \left(\frac{19}{30} \bar{\varphi}_2 - \frac{4}{15} \bar{\varphi}_4 \right) E_{0i}^2 \\
& + \frac{1}{180} \bar{\varphi}_2 \left(2\{E_i, E_{jji}\} + 4\{E_i, E_{ijj}\} + 5E_{ii}^2 + 4E_{ij}^2 + 4F_{0ij}E_j - 2E_j F_{0ij} - 2E_{0ij}F_{ij} \right. \\
& - [E_{ij}, F_{0ij}] - 4E_{0i}F_{jji} + 2F_{jji}E_{0i} + 2E_i F_{ij}E_j + 2\{E_i E_j, F_{ij}\} + 7F_{00ij}F_{ij} \\
& \left. + 3F_{ij}F_{00ij} + 8F_{0ij}^2 \right) .
\end{aligned}$$

En estas fórmulas $a_n^{T=0}$ indican los coeficientes a temperatura cero que aparecen en ec. (2.26). Por conveniencia hemos introducido las funciones auxiliares

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi_0 + 2\varphi_2, \quad \bar{\varphi}_4 = \varphi_0 - \frac{4}{3}\varphi_4, \quad \dots, \quad \bar{\varphi}_{2n} = \varphi_0 - \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!} \varphi_{2n}, \quad (2.62)$$

que se anulan en el límite $\tau/\beta^2 = 0$. Con nuestro criterio para calcular el desarrollo del heat kernel a temperatura finita conseguimos ordenar las derivadas de manera que las espaciales son las que actúan primero y las temporales son las más externas. Esta elección es óptima de cara a calcular la traza de los coeficientes $\text{Tr } a_n^T(x)$, pues por la propiedad $\widehat{D}_0 \Omega = 0$, los términos de la forma $\varphi_n X_0$ no contribuyen en la traza, como puede verse después de integrar por partes.

2.4.3. Traza de los coeficientes de Heat Kernel

En ec. (2.27) se definieron los coeficientes de heat kernel con traza a temperatura cero. A temperatura finita podemos definir de manera similar los coeficientes con traza $b_n^T(x)$

$$\text{Tr} \left(e^{-\tau(M - D_\mu^2)} \right) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{(d+1)/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\beta dx_0 \int d^d x \text{tr}(b_n^T(x)) \tau^n, \quad (2.63)$$

donde b_n^T presenta una estructura más simple que a_n^T . Vamos a elegir una forma canónica para estos coeficientes en la cual las funciones de Ω estén situadas a la izquierda de los operadores locales covariantes gauge. Además de la integración por partes y propiedad

cíclica de la traza, deberemos trabajar con comutadores del tipo $[X, f(\Omega)]$ (en particular $\widehat{D}_\mu f(\Omega)$).

Veamos cuáles son las reglas de conmutación. Consideremos dos operadores cualesquiera X e Y , y f una función genérica. Entonces el comutador $[X, f(Y)]$ admite el siguiente desarrollo en comutadores

$$\begin{aligned} [X, f(Y)] &= -f'(Y)[Y, X] + \frac{1}{2}f''(Y)[Y, [Y, X]] - \frac{1}{3!}f^{(3)}(Y)[Y, [Y, [Y, X]]] + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(Y) D_Y^n(X), \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde $D_Y = [Y,]$. Para probar esto es suficiente con probar que se cumple para funciones del tipo $f(Y) = e^{\lambda Y}$, donde λ es un c-número, ya que el caso general se obtiene por descomposición de Fourier. En este caso, el miembro derecho de (2.64) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n e^{\lambda Y} D_Y^n(X) = e^{\lambda Y} (e^{-\lambda D_Y} - 1) X = e^{\lambda Y} (e^{-\lambda Y} X e^{\lambda Y} - X) = [X, e^{\lambda Y}], \quad (2.65)$$

que coincide con el miembro izquierdo. En esta demostración hemos hecho uso de la identidad $e^{D_Y} X = e^Y X e^{-Y}$, que es bien conocida.

Particularicemos al caso en que f sea una función de Ω (por ejemplo $\varphi_n(\Omega)$). Con $f^{(n)}$ vamos a denotar su derivada n -ésima con respecto a la variable $-\log(\Omega)/\beta$. Entonces de estas fórmulas se obtiene

$$[X, f] = -f' X_0 + \frac{1}{2} f'' X_{00} - \frac{1}{3!} f^{(3)} X_{000} + \dots \quad (2.66)$$

En el caso de operadores $X = D_\mu$ tendremos

$$\widehat{D}_0 f = 0, \quad (2.67)$$

$$\widehat{D}_i f = -f' E_i + \frac{1}{2} f'' E_{0i} - \frac{1}{3!} f^{(3)} E_{00i} + \dots \quad (2.68)$$

La propiedad (2.67) se podría deducir directamente de $\widehat{D}_0 \Omega = [D_0, \Omega] = 0$. Estas fórmulas implican que a temperatura finita, al contrario que a temperatura cero, la propiedad cíclica de la traza mezcla términos de órdenes diferentes. Esto es debido a que \widehat{D}_0 tiene dimensiones de masa, mientras que Ω es adimensional. Así, por ejemplo $\varphi_0(\Omega)$ es de dimensión cero y \widehat{D}_i es de dimensión uno, mientras que $\widehat{D}_i \varphi_0(\Omega)$ contiene términos de todos los órdenes, comenzando con dimensión 2. Para aplicar estas reglas de conmutación a a_n^T vamos a necesitar además la relación

$$\varphi'_n = \sqrt{\tau} (n \varphi_{n-1} + 2 \varphi_{n+1}), \quad (2.69)$$

que se deduce fácilmente a partir de la definición de φ_n en ec. (2.46).

La integración por partes, la propiedad cíclica de la traza y estas reglas de conmutación nos van a permitir escribir expresiones más compactas para los coeficientes a_n^T , válidas bajo traza. Hasta dimensión de masa 6 obtenemos

$$\begin{aligned}
b_0^T &= \varphi_0, \\
b_{1/2}^T &= 0, \\
b_1^T &= -\varphi_0 M, \\
b_{3/2}^T &= 0, \\
b_2^T &= \varphi_0 b_2^{T=0} - \frac{1}{6} \bar{\varphi}_2 E_i^2, \\
b_{5/2}^T &= -\frac{1}{6} \varphi_1 \{M_i, E_i\}, \\
b_3^T &= \varphi_0 b_3^{T=0} + \frac{1}{6} \bar{\varphi}_2 \left(\frac{1}{2} M_0^2 + E_i M E_i + \frac{1}{10} E_{ii}^2 + \frac{1}{10} F_{0ij}^2 - \frac{1}{5} E_i F_{ij} E_j \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{6} \bar{\varphi}_2 - \frac{1}{10} \bar{\varphi}_4 \right) E_{0i}^2.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Escritos de esta forma, se ve explícitamente que en el límite de temperatura cero se recupera la simetría Lorentz. En estas fórmulas $b_n^{T=0}$ indican los coeficientes a temperatura cero que aparecen en ec. (2.30). El heat kernel es simétrico frente a la transposición de operadores $ABC \cdots \rightarrow \cdots CBA$, y los b_n^T han sido elegidos de manera que esta simetría se manifieste en cada orden.

Como hemos dicho, la integración por partes y la propiedad cíclica de la traza hace que exista cierta ambigüedad en la expresión de los coeficientes b_n tanto a temperatura cero como a temperatura finita. No obstante a temperatura finita la ambigüedad es mayor ya que estas dos propiedades mezclan órdenes diferentes. El desarrollo a temperatura finita lo podemos expresar en la forma

$$\text{Tr} \left(e^{-\tau(M - D_\mu^2)} \right) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{(d+1)/2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^T \tau^n, \quad B_n^T = \text{Tr} b_n^T(x). \tag{2.71}$$

A temperatura cero el desarrollo se define como un desarrollo en potencias del parámetro τ , de modo que $B_n^{T=0}$ no es ambiguo, la ambigüedad sólo existe en $b_n^{T=0}(x)$. Sin embargo a temperatura finita el desarrollo no está sujeto a un parámetro, sino que lo hemos definido como un desarrollo en conmutadores, de modo que existe ambigüedad no sólo en $b_n^T(x)$ sino también en B_n^T . En general la elección concreta de b_n^T va a afectar la forma de los órdenes superiores $b_{n+1/2}^T, b_{n+1}^T, \dots$. Por supuesto, la ambigüedad en B_n^T no afecta la suma de la serie, sino que únicamente se trata de una reorganización de ésta. Como ejemplo, consideremos que en $b_2^{T=0}$ añadimos el término $M_{\mu\mu}$. Nada cambia a temperatura cero, pues ese término es un conmutador puro. No obstante, a temperatura finita ese término conduciría a la contribución $\varphi_0 M_{\mu\mu}$ que no es un conmutador puro, y por tanto va a modificar el funcional B_2^T . De hecho $\varphi_0 M_{\mu\mu}$, que es formalmente de dimensión 4, se puede

expresar como una suma de términos de dimensión 5 y mayores, si hacemos uso de la integración por partes y de las reglas de conmutación (2.66)-(2.68).

El criterio básico que hemos seguido para elegir los coeficientes b_n^T ha consistido en llevarlos de manera recursiva a una forma compacta, comenzando por los de orden inferior. Por ejemplo, bajo traza $a_{3/2}^T$ se puede llevar a una suma de términos de dimensión 4 o mayor, después de integrar por partes y aplicar las reglas de conmutación. Haciendo esto conseguimos $b_{3/2}^T = 0$. El siguiente paso consistirá en llevar a_2^T (modificado con la contribución que recibe de $\text{Tr } a_{3/2}^T$) a la forma más compacta posible, lo cual en principio produciría contribuciones a $a_{5/2}^T$, y así sucesivamente. Por supuesto, ésta no es la única posibilidad ya que llevar b_n^T a la forma más simple posible va a implicar en general una mayor complicación en los órdenes superiores. Por ejemplo, se puede ver que es posible ordenar el desarrollo de modo que todos los coeficientes b_n^T de orden semi-impar se anulen. Así, podríamos eliminar $b_{5/2}^T$ con el coste de complicar b_2^T .

El análogo de ec. (2.29) a temperatura finita va a verse modificado por el hecho de que la variación de b_k^T contribuye no sólo a a_{k-1}^T , sino en general a todos los órdenes superiores, debido a la propiedad de conmutación (2.66). Por tanto podemos escribir

$$a_n^T(x) \simeq -\frac{\delta}{\delta M(x)} \sum_{1 \leq k \leq n+1} B_k^T \tau^{k-n-1}, \quad (2.72)$$

donde el símbolo \simeq indica que únicamente debemos considerar los términos de dimensión $2n$ en el miembro derecho de la ecuación. Notar que k puede tomar valores tanto enteros como semi-impares. Hemos comprobado nuestros resultados verificando que esta relación se cumple para todos los coeficientes.

2.5. Conclusiones

En este capítulo hemos construido el desarrollo del heat kernel en el contexto de teoría cuántica de campos a temperatura finita para espacio-tiempo plano. El desarrollo se ha hecho para un gauge general y en presencia de campos escalares que pueden ser no abelianos y no estacionarios. Se ha puesto un énfasis especial en el papel que juega el loop de Polyakov sin traza (o linea de Wilson térmica) para mantener la invariancia gauge explícita. Esto constituye un problema altamente no trivial, ya que para preservar la invariancia gauge a temperatura finita orden por orden se necesitan infinitos órdenes en teoría de perturbaciones.

Cuando se elige que el baño térmico esté en reposo, el loop de Polyakov es generado por la componente temporal del campo gauge, y éste se puede considerar como una generalización del potencial químico para campos gauge no constantes y no abelianos, mediante el factor $e^{\beta\mu}$. De hecho, hemos aportado argumentos que apoyan esta interpretación: si el loop de Polyakov no fuera tenido en cuenta, el número de partículas no podría ser fijo, lo cual está en contradicción con lo que se espera de los requisitos de la termodinámica.

En espacios tiempos curvos, además del loop de Polyakov de la conexión gauge A_μ , existe un loop de Polyakov asociado con la conexión de transporte paralelo Γ_μ , con importantes repercusiones en teoría de campos en presencia de campos gravitatorios.

Un ingrediente importante de nuestra técnica de cálculo es que, con objeto de garantizar la invariancia gauge explícita, una cierta combinación del loop de Polyakov y la temperatura debe tratarse como variable independiente, $-\log(\Omega)/\beta$. Esto puede hacerse sin necesidad de fijar el gauge.

Capítulo 3

Acción efectiva de QCD a temperatura alta

En este capítulo nos proponemos encontrar un lagrangiano efectivo de QCD a un loop, incluyendo fermiones sin masa, en la región de altas temperaturas. En el cálculo de los determinantes funcionales haremos uso del desarrollo del heat kernel a temperatura finita que hemos obtenido en el capítulo 2. Esto nos permitirá calcular el lagrangiano efectivo como un desarrollo en operadores, y aquí obtendremos los órdenes más bajos en este desarrollo.

Existen en la literatura otros métodos equivalentes como el cálculo de diagramas de Feynman a un loop con un número arbitrario de patas externas [49]. No obstante suelen ser técnicamente más complicados y no dan cuenta automáticamente de invariancia gauge con respecto al campo externo.

Comenzaremos este capítulo repasando algunos elementos básicos de la teoría de Yang-Mills a temperatura finita, para posteriormente entrar de lleno en el cálculo detallado de la acción de QCD a temperatura alta manteniendo la invariancia gauge de manera explícita. El capítulo está basado en la referencia [44].

3.1. Fundamentos de la Teoría de Yang-Mills a Temperatura Finita

En esta sección vamos a explicar los fundamentos de la teoría de Yang-Mills a temperatura finita. Partiremos del hamiltoniano cuántico del sistema y deduciremos la función de partición.

En una teoría de Yang-Mills el hamiltoniano cuántico es

$$H = -\frac{1}{g^2} \int d^3x \text{tr} [(\partial_0 A_i)^2 + B_i^2] , \quad (3.1)$$

donde B_i es el campo magnético, $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$. El espacio de Hilbert está formado por los estados $\{|A_i(x)\rangle\}$. Podemos escribir $e^{-\beta H}$ como $\lim_{N \rightarrow \infty} (e^{-\varepsilon H})^N$, $\varepsilon \equiv \beta/N$, y haciendo

uso de la relación de completitud repetidamente se llega a

$$\langle A'_i(\vec{x}) | e^{-\beta H} | A''_i(\vec{x}) \rangle = \int \mathcal{D}A_i(x_0, \vec{x}) \exp \left\{ \frac{1}{g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}[(\partial_0 A_i)^2 + B_i^2] \right\}, \quad (3.2)$$

donde la integral funcional se toma sobre trayectorias en las que las configuraciones inicial y final están fijas: $A_i(\beta, \vec{x}) = A'_i(\vec{x})$ y $A_i(0, \vec{x}) = A''_i(\vec{x})$. La traza de $e^{-\beta H}$ en el espacio de Hilbert completo es

$$\begin{aligned} Z_{\text{YM}} &= \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int \mathcal{D}A_i(\vec{x}) \langle A_i(\vec{x}) | e^{-\beta H} | A_i(\vec{x}) \rangle \\ &= \int \mathcal{D}A_i^{(0)}(\vec{x}) \int_{A_i(0, \vec{x}) = A_i^{(0)}}^{A_i(\beta, \vec{x}) = A_i^{(0)}} \mathcal{D}A_i(x_0, \vec{x}) \exp \left\{ \frac{1}{g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}[(\partial_0 A_i)^2 + B_i^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se trata de una integral funcional sobre campos gauge periódicos $A_i(0, \vec{x}) = A_i(\beta, \vec{x})$. No obstante, en una teoría gauge hay que sumar, no sobre todos los estados posibles, sino sobre los estados físicos solamente, esto es, los que satisfacen la ley de Gauss

$$\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{x}) |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0 \quad \forall \vec{x}, \quad (3.4)$$

donde $E_i(\vec{x}) = \partial_0 A_i(\vec{x})$. Esta relación expresa la conservación del flujo eléctrico. Para satisfacer (3.4) basta con que se verifique

$$\exp \left(\int d^3x \text{tr}[\vec{D}\Lambda(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x})] \right) |\psi_{\text{fis}}\rangle = |\psi_{\text{fis}}\rangle, \quad (3.5)$$

para todo $\Lambda(\vec{x})$ con soporte compacto. $\Omega(U) = \exp(\int \vec{D}\Lambda \cdot \vec{E})$ es un operador unitario que da lugar a las transformaciones gauge independientes del tiempo $U = e^\Lambda$. Esto significa que imponer la ley de Gauss es equivalente a exigir que los estados físicos sean invariantes frente a transformaciones gauge cuyos generadores se anulen en el infinito. Estos estados pueden ser seleccionados introduciendo el proyector $P = \int_{\Lambda(\infty)=0} \mathcal{D}\Lambda \Omega(e^\Lambda)$ dentro de la integral funcional

$$\begin{aligned} Z_{\text{YM}} &= \text{Tr}(Pe^{-\beta H}) = \int_{\Lambda(\infty)=0} \mathcal{D}\Lambda(\vec{x}) \mathcal{D}A_i(\vec{x}) \langle A_i^U(\vec{x}) | e^{-\beta H} | A_i(\vec{x}) \rangle \\ &= \int_{\Lambda(\infty)=0} \mathcal{D}\Lambda(\vec{x}) \int_{A_i(\beta, \vec{x}) = A_i^U(0, \vec{x})} \mathcal{D}A_i(x_0, \vec{x}) \exp \left\{ \frac{1}{g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}[(\partial_0 A_i)^2 + B_i^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde hemos considerado $\langle A_i | \Omega(U) = \langle A_i^U |$. Se trata de una integral funcional sobre campos periódicos salvo transformación gauge. Con objeto de derivar una expresión que sea estrictamente periódica introducimos el proyector P más de una vez, lo cual es factible ya que P y H commutan

$$\begin{aligned} Z_{\text{YM}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr}(Pe^{-\varepsilon H})^N \\ &= \int \mathcal{D}\Lambda(x_0, \vec{x}) \mathcal{D}A_i(x_0, \vec{x}) \exp \left\{ \frac{1}{g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}[(\partial_0 A_i - \hat{D}_i \Lambda)^2 + B_i^2] \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definiendo el campo $A_0(x_0, \vec{x}) = \Lambda(x_0, \vec{x})$, que se anula en \vec{x} infinito, llegamos a

$$Z_{\text{YM}} = \int_{A_\mu(\beta, \vec{x}) = A_\mu(0, \vec{x})} \mathcal{D}A_\mu(x_0, \vec{x}) \exp \left\{ \frac{1}{2g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} (F_{\mu\nu}^2) \right\} =: \int \mathcal{D}A_\mu(x) e^{-S_{\text{YM}}^E}. \quad (3.8)$$

La ecuación de movimiento e identidades de Bianchi vienen dadas por

$$\widehat{D}_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \widehat{D}_\lambda F_{\mu\nu} + \widehat{D}_\mu F_{\nu\lambda} + \widehat{D}_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (3.9)$$

En las integrales funcionales existe una condición de periodicidad temporal en el intervalo $[0, \beta]$ para los campos gauge, que son bosónicos. Además es necesario integrar sobre todos los valores en los extremos del intervalo. Si se consideran quarks en la teoría, estos deberán satisfacer condiciones de antiperiodicidad, por ser campos fermiónicos. La función de partición euclídea de QCD sin renormalizar se escribe

$$Z_{\text{QCD}} = \int_{A_\mu(\beta, \vec{x}) = A_\mu(0, \vec{x})} \mathcal{D}A_\mu(x_0, \vec{x}) \int_{q(\beta, \vec{x}) = -q(0, \vec{x})} \prod_{\alpha=1}^{N_f} \mathcal{D}\bar{q}_\alpha(x_0, \vec{x}) \mathcal{D}q_\alpha(x_0, \vec{x}) \exp(-S_E), \quad (3.10)$$

donde la acción euclídea es

$$S_E = -\frac{1}{2g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \sum_{\alpha=1}^{N_f} \bar{q}_\alpha (\not{D} + m_\alpha) q_\alpha. \quad (3.11)$$

$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ es la derivada covariante y A_μ es una matriz antihermítica de dimensión N_c , en la representación fundamental del álgebra de Lie del grupo gauge $SU(N_c)$. N_f es el número de sabores diferentes de quarks, y m_α es la masa desnuda de los quarks.

En el tratamiento que haremos para calcular la acción efectiva a un loop, las fluctuaciones cuánticas de los campos gauge no van a modificar el sector de los quarks. La contribución de este sector constituirá una corrección a la función de partición de Yang-Mills, de modo que podremos hacer uso de la siguiente factorización

$$Z_{\text{QCD}} = Z_q Z_{\text{YM}}, \quad (3.12)$$

donde Z_q y Z_{YM} corresponden a la función de partición del sector fermiónico y gluónico respectivamente. Esto se justificará en la sección 3.3. Calcularemos cada una de estas contribuciones por separado.

3.2. Sector fermiónico

La contribución de los quarks es más simple que la gluónica, de modo que la trataremos en primer lugar para así conseguir una mayor claridad en el desarrollo. Los resultados de esta sección serán válidos para cualquier grupo gauge. En la sección 3.3 se particularizarán las fórmulas para grupos gauge concretos. Consideraremos el caso particular de quarks sin masa ($m_\alpha = 0$).

La función de partición sin renormalizar es

$$Z_q[A] = \int_{q(\beta, \vec{x}) = -q(0, \vec{x})} \prod_{\alpha=1}^{N_f} \mathcal{D}\bar{q}_\alpha(x_0, \vec{x}) \mathcal{D}q_\alpha(x_0, \vec{x}) \exp(-S_q^E), \quad (3.13)$$

con la acción euclídea

$$S_q^E = \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \sum_{\alpha=1}^{N_f} \bar{q}_\alpha \not{D} q_\alpha. \quad (3.14)$$

La integral funcional de los campos de los quarks conduce a

$$Z_q[A] = \text{Det}(\not{D})^{N_f}, \quad (3.15)$$

y la acción efectiva euclídea es¹

$$\Gamma_q^{\text{desn}}[A] = -N_f \log \text{Det}(\not{D}) = -N_f \text{Tr} \log(\not{D}). \quad (3.16)$$

Esta expresión es formal debido a la presencia de divergencias ultravioletas. Únicamente después de regularizar y renormalizar estas divergencias se obtiene una acción efectiva finita y bien definida. Existe un gran número de métodos diferentes para obtener una versión renormalizada, pero un resultado estándar de teoría cuántica de campos perturbativa es que diferentes definiciones de Γ pueden diferir a lo sumo en términos que son polinomios locales de dimensión canónica $d + 1$ (donde $d + 1$ es la dimensión del espacio-tiempo), construidos con los campos externos y sus derivadas [18, 50]. Esto es debido a que todos los diagramas de Feynman son convergentes más allá de $d + 1$ derivadas en los campos o en los momentos externos [51]. En la práctica vamos a tener que cualquier método consistente con la expresión formal de la acción efectiva puede ser usado, puesto que todos ellos van a dar la misma contribución finita ultravioleta.

3.2.1. Acción efectiva con representación de Schwinger

De acuerdo con el tratamiento usual, elevaremos al cuadrado el operador de Dirac con objeto de obtener un operador de Klein-Gordon. Haciendo uso de la representación de Schwinger de tiempo propio podemos escribir la contribución del sector fermiónico a la acción efectiva de QCD a un loop como

$$\Gamma_q[A] = -\frac{N_f}{2} \text{Tr} \log(\not{D}^2) = \frac{N_f}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \text{Tr} e^{\tau \not{D}^2} =: \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \mathcal{L}_q(x), \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}_q(x) = \frac{N_f}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi\tau)^{D/2}} \sum_n \tau^n \text{tr}(b_{n,q}^T(x)). \quad (3.18)$$

Usamos regularización dimensional para regular las divergencias ultravioletas en $\tau = 0$, con el convenio $D = 4 - 2\epsilon$. El factor $\mu^{2\epsilon}$ restablece la dimensión 4 en masa del lagrangiano

¹Nuestro convenio para la acción efectiva es $Z = e^{-\Gamma}$.

efectivo. La traza de Dirac está incluida en $b_{n,q}^T$ y tr se refiere a traza en el espacio de color. Para aplicar nuestro desarrollo del heat kernel a temperatura finita al cálculo de la acción efectiva únicamente debemos identificar el operador de Klein-Gordon correspondiente. Usaremos el siguiente convenio para las matrices γ_μ :

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \text{tr}_{\text{Dirac}}(\mathbf{1}) = 4. \quad (3.19)$$

Se puede escribir

$$-\not{D}^2 = -D_\mu^2 - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

donde se ha usado $\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$. El operador de ec. (3.20) es de tipo Klein-Gordon, y podemos identificar el término de masa como $M(x) = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

3.2.2. Trazas en espacio de Dirac

El siguiente paso es hacer uso de los coeficientes de heat kernel (2.70) y calcular la traza en el espacio de Dirac. La traza en este espacio muestra que b_1^T y $b_{5/2}^T$ no van a contribuir, lo cual es extensible a todos los términos del heat kernel con una única M . Usamos las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\text{Dirac}}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2n+1}}) &= 0, \\ \text{tr}_{\text{Dirac}}(\gamma_\mu\gamma_\nu) &= 4\delta_{\mu\nu}, \\ \text{tr}_{\text{Dirac}}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) &= 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Existe otra propiedad que permite invertir el orden de las matrices γ_μ dentro de la traza

$$\text{tr}_{\text{Dirac}}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\cdots) = \text{tr}_{\text{Dirac}}(\cdots\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (3.22)$$

Hasta dimensión de masa 6 tenemos

$$\begin{aligned} b_{0,q}^T &= 4\varphi_0, \\ b_{2,q}^T &= -\frac{2}{3}(\varphi_0 F_{\mu\nu}^2 + \bar{\varphi}_2 E_i^2), \\ b_{3,q}^T &= \varphi_0 \left(\frac{32}{45} F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F_{\lambda\mu} + \frac{1}{6} F_{\lambda\mu\nu}^2 - \frac{1}{15} F_{\mu\nu\nu}^2 \right) + \bar{\varphi}_2 \left(\frac{1}{15} E_{ii}^2 - \frac{1}{10} F_{0ij}^2 - \frac{2}{15} E_i F_{ij} E_j \right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{5} \bar{\varphi}_4 - \bar{\varphi}_2 \right) E_{0i}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Las funciones φ_n corresponden a su versión fermiónica, esto es, la suma es sobre las frecuencias de Matsubara $p_0 = 2\pi(n + \frac{1}{2})/\beta$. Los términos que rompen simetría Lorentz se han separado explícitamente.

3.2.3. Integrales en tiempo propio

Como hemos indicado, vamos a hacer uso de la regularización dimensional en la integral sobre τ , ec. (3.18). Las integrales van a ser del tipo

$$I_{\ell,n}^\pm(\Omega) := \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} (4\pi\mu^2\tau)^\epsilon \tau^\ell \varphi_n^\pm(\Omega), \quad |\Omega| = 1, \quad (3.24)$$

donde φ_n^\pm se refiere a la versión bosónica o fermiónica, respectivamente. En el sector fermiónico Ω es el loop de Polyakov en la representación fundamental. A nivel práctico Ω en realidad va a indicar cada uno de los autovalores del loop de Polyakov. En el apéndice B se calculan estas integrales y se discuten algunas de sus propiedades. Para el sector de los quarks nos va a interesar la versión fermiónica de las integrales, y hasta dimensión 6 en masa necesitamos sólo valores pares de n :

$$\begin{aligned} I_{\ell,2n}^-(e^{i2\pi\nu}) &= (-1)^n (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell+n+\epsilon+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left[\zeta(1+2\ell+2\epsilon, \frac{1}{2}+\nu) + \zeta(1+2\ell+2\epsilon, \frac{1}{2}-\nu) \right], \\ &\quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde hemos hecho uso de la notación $\Omega = e^{i2\pi\nu}$. $\Gamma(z)$ es la función Gamma de Euler y $\zeta(z, q)$ la función de Riemann generalizada [52]. En general las integrales $I_{\ell,n}^\pm(\Omega)$ van a ser funciones univaluadas en Ω , esto es, periódicas en ν con período 1. La fórmula (3.25) se ha escrito de manera que sea directamente aplicable en el intervalo $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$. Fuera de este intervalo debe considerarse una extensión periódica de la función. Además $I_{\ell,2n}^-(\Omega)$ son funciones pares en ν .

Calculemos a continuación la contribución al lagrangiano efectivo. El orden cero requiere $I_{-2,0}^-$. Obtenemos

$$I_{-2,0}^- = -\frac{2}{3} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^4 B_4(\frac{1}{2}+\nu) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.26)$$

donde hemos hecho uso de la relación $\zeta(1-n, q) = -B_n(q)/n$, $n = 1, 2, \dots$, y $B_n(q)$ es el polinomio de Bernoulli de orden n . Por tanto, tenemos que el potencial efectivo va a ser

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = \frac{\pi^2 N_f}{\beta^4} \left(\frac{2N_c}{45} - \frac{1}{12} \text{tr} [(1-4\nu^2)^2] \right), \quad \Omega(x) = e^{i2\pi\nu}, \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \quad (3.27)$$

donde $N_c = \text{tr}(\mathbf{1})$ indica el número de colores. tr es la traza en la representación fundamental del grupo gauge de color, y ν es la matriz $\log(\Omega)/(2\pi i)$ en esta representación y con valores propios en la rama $|\nu| < 1/2$.

Notar que $z = 1$ es el único punto singular de la función $\zeta(z, q)$ (se trata de un polo simple). Únicamente las integrales $I_{0,2n}^-$ tienen el polo estándar $1/\epsilon$, con lo cual éste sólo

va a aparecer en los términos con dimensión de masa 4, esto es $b_{2,q}^T$. Para estos términos necesitamos

$$\begin{aligned} I_{0,0}^- &= \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E + 2 \log(\mu\beta/4\pi) - \psi\left(\frac{1}{2} + \nu\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \nu\right) + \mathcal{O}(\epsilon), \\ I_{0,\overline{2}}^- &:= I_{0,0}^- + 2I_{0,2}^- = -2 + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Las integrales $I_{\ell,\overline{2n}}^\pm$ se definen de forma análoga a $I_{\ell,2n}^\pm$ pero usando $\overline{\varphi}_{2n}$ en lugar de φ_{2n} . $\psi(q)$ es la función digamma, y aquí hemos hecho uso de la relación

$$\zeta(1+z, q) = \frac{1}{z} - \psi(q) + \mathcal{O}(z). \quad (3.29)$$

Notar que las funciones $\overline{\varphi}_{2n}$ se definieron de manera que se anulasen en el límite $\tau/\beta^2 = 0$, de modo que las integrales correspondientes van a estar libres de divergencias ultravioletas. Los términos $1/\epsilon + \log(4\pi) - \gamma_E$ que aparecen en $I_{0,0}^-$ son eliminados si adoptamos el esquema de regularización $\overline{\text{MS}}$. Después de renormalizar, punto que explicaremos en la sección 3.4, tendremos

$$\mathcal{L}_{2,q}(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} N_f \text{tr} \left[\left(2 \log(\mu\beta/4\pi) - \psi\left(\frac{1}{2} + \nu\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \right) F_{\mu\nu}^2 - 2E_i^2 \right]. \quad (3.30)$$

Para los términos con dimensión de masa 6 vamos a necesitar las integrales

$$\begin{aligned} I_{1,0}^- &= -\left(\frac{\beta}{4\pi}\right)^2 \left(\psi''\left(\frac{1}{2} + \nu\right) + \psi''\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \\ I_{1,\overline{2}}^- &= -2I_{1,0}^- + \mathcal{O}(\epsilon), \quad I_{1,\overline{4}}^- = -4I_{1,0}^- + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde hemos hecho uso de la relación $\psi^{(n)}(q) = (-1)^{n+1} n! \zeta(n+1, q)$. Esto conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3,q}(x) &= -\frac{2}{(4\pi)^4} N_f \beta^2 \text{tr} \left[\left(\psi''\left(\frac{1}{2} + \nu\right) + \psi''\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{8}{45} F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F_{\lambda\mu} + \frac{1}{24} F_{\lambda\mu\nu}^2 - \frac{1}{60} F_{\mu\nu\lambda}^2 + \frac{1}{20} F_{0\mu\nu}^2 - \frac{1}{30} E_{ii}^2 + \frac{1}{15} E_i F_{ij} E_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Notar que cada orden del heat kernel está asociado a una potencia en temperatura, $\mathcal{L}_0 \sim T^4$, $\mathcal{L}_2 \sim T^0$, $\mathcal{L}_3 \sim T^{-2}$, lo cual quiere decir que el desarrollo del heat kernel a temperatura finita es esencialmente un desarrollo en potencias de k^2/T^2 , donde k es el momento gluónico típico. Los términos de orden T^2 están prohibidos ya que no existen operadores invariantes gauge de dimensión 2 disponibles.

3.3. Sector gluónico

A continuación nos vamos a centrar en el término de Yang-Mills, para el cual consideraremos específicamente el grupo $SU(N_c)$ (matrices unitarias, una única constante de acoplamiento y matrices del álgebra de Lie con traza cero en cualquier representación).

La función de partición sin renormalizar es

$$Z_g = \int_{A_\mu(\beta, \vec{x}) = A_\mu(0, \vec{x})} \mathcal{D}A_\mu(x_0, \vec{x}) \exp(-S_{\text{YM}}^E) \quad (3.33)$$

con la acción euclídea

$$S_{\text{YM}}^E = -\frac{1}{2g^2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}(F_{\mu\nu}^2). \quad (3.34)$$

Se trata de una integral funcional entre configuraciones periódicas.

3.3.1. Método del Campo de Fondo

Para el cálculo de la acción efectiva haremos uso del Método del Campo de Fondo [53, 54] que consiste en separar el campo gluónico, que por claridad denotaremos aquí como \bar{A}_μ , en un campo clásico A_μ más una fluctuación cuántica a_μ en la acción (3.34). La fluctuación es presumiblemente pequeña.

$$\bar{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + a_\mu(x). \quad (3.35)$$

Esto va a inducir una separación en el tensor $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}[\bar{A}] = F_{\mu\nu}[A] + \hat{D}_\mu a_\nu - \hat{D}_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu]. \quad (3.36)$$

En ec. (3.36) la derivada covariante es la asociada al campo clásico, esto es $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$. En nuestra notación $\hat{D}_\mu = [D_\mu, \cdot]$. Notar que los campos de los quarks se eligen como una fluctuación pura, de modo que a_μ no modifica el sector fermiónico a un loop. Esto justifica la factorización de ec. (3.12)

Una transformación gauge infinitesimal de \bar{A}_μ con parámetro Λ puede ser distribuida de muchas maneras sobre los campos A_μ y a_μ , pero las elecciones más convenientes van a ser la *transformación cuántica*

$$\delta A_\mu = 0, \quad \delta a_\mu = \hat{D}_\mu \Lambda + [a_\mu, \Lambda] \quad (3.37)$$

y la *transformación del campo de fondo*

$$\delta A_\mu = \hat{D}_\mu \Lambda, \quad \delta a_\mu = [a_\mu, \Lambda]. \quad (3.38)$$

La clave consiste ahora en añadir a la acción clásica un término que fije el gauge (gauge-fixing term) el cual va a romper la invariancia gauge cuántica, pero respetará la invariancia gauge del campo clásico de fondo

$$S_{\text{fix}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr}(G^2), \quad (3.39)$$

donde la función G transforma de modo covariante bajo (3.38). El término de Faddeev-Popov asociado es

$$S_{\text{FP}} = 2 \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} \left(C^* \frac{\delta G}{\delta \Lambda} C \right), \quad (3.40)$$

donde $\delta G/\delta\Lambda$ indica la variación de G bajo una transformación gauge cuántica. C y C^* son los campos ghost y antighost respectivamente, que son objetos que anticommutan (si bien son periódicos en tiempo euclídeo) y son matrices en la representación fundamental de $\text{su}(N_c)$. La acción total $S_{\text{tot}} = S_{\text{YM}}^E + S_{\text{fix}} + S_{\text{FP}}$ aparece en el funcional generador de todas las funciones de Green

$$Z_g[A, J, \eta^*, \eta] = N \int \mathcal{D}a \mathcal{D}C^* \mathcal{D}C \exp(-S_{\text{tot}} + J \cdot a + \eta^* \cdot C + C^* \cdot \eta), \quad (3.41)$$

donde J , η y η^* son fuentes y el factor de normalización N se elige de modo que se verifique $Z_g[A, 0, 0, 0] = 1$. Notar que el campo clásico de fondo no está acoplado con la fuente J . El funcional generador para los diagramas conexos viene dado por

$$W_g[A, J, \eta^*, \eta] = \log Z_g[A, J, \eta^*, \eta]. \quad (3.42)$$

Los valores esperados de todos los campos se definen como

$$\tilde{a} = \frac{\delta W_g}{\delta J}, \quad \tilde{C} = \frac{\delta W_g}{\delta \eta^*}, \quad \tilde{C}^* = \frac{\delta W_g}{\delta \eta}, \quad (3.43)$$

y a partir de ellos, la acción efectiva se define

$$\Gamma_g[A, \tilde{a}, \tilde{C}^*, \tilde{C}] = J \cdot \tilde{a} + \eta \cdot \tilde{C}^* + \tilde{C} \cdot \eta^* - W_g[A, J, \eta^*, \eta]. \quad (3.44)$$

Los funcionales Z_g y W_g serán invariantes bajo transformaciones gauge del campo de fondo, ec. (3.38), si todas las fuentes y campos ghost transforman igual que a . Lo mismo se puede decir de la acción efectiva Γ_g si uno exige que \tilde{a} , \tilde{C} y \tilde{C}^* transformen igual que a . Una buena elección es el gauge de Gervais-Neveu generalizado

$$G = \hat{D}_\mu a_\mu + \lambda a_\mu^2, \quad (3.45)$$

pero aquí nos vamos a restringir al gauge de Feynman covariante $\alpha = 1$, $\lambda = 0$, con un término de Faddeev-Popov asociado

$$S_{\text{FP}} = 2 \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} \left(C^* \hat{D}_\mu (\hat{D}_\mu C + [a_\mu, C]) \right). \quad (3.46)$$

Descompongamos la corriente J_μ en

$$J_\mu = \mathcal{J}_\mu + j_\mu \quad (3.47)$$

donde definimos

$$j_\mu = \frac{\delta S_{\text{tot}}[A, a]}{\delta a_\mu} \Big|_{a=0}. \quad (3.48)$$

Podemos escribir la acción total como

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}}[A, a] - J \cdot a &= S_{\text{YM}}^E[A] + \frac{1}{2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} (a_\mu \Delta_{\mu\nu}[A] a_\nu) \\ &\quad - \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} (C^* \Delta[A] C) - S_{\text{int}}[A, a] - \mathcal{J} \cdot a, \end{aligned} \quad (3.49)$$

con las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu}[A] &= -\left(\delta_{\mu\nu}\widehat{D}_\lambda^2 + 2\widehat{F}_{\mu\nu}\right), \quad \Delta[A] = -\widehat{D}_\mu^2, \\ S_{\text{int}}[A, a] &= \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \text{tr} \left((\widehat{D}_\mu a_\nu)[a_\mu, a_\nu] + \frac{1}{4}[a_\mu, a_\nu]^2 + C^* \widehat{D}_\mu [a_\mu, C] \right),\end{aligned}\quad (3.50)$$

donde $\widehat{D}_\mu = [D_\mu,]$ y $\widehat{F}_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu},]$. Notar que la constante de acoplamiento g puede ser absorbida en la normalización de los campos. De este modo obtenemos el nuevo funcional generador

$$\begin{aligned}Z_g[A, \mathcal{J}, \eta^*, \eta] &= \int \mathcal{D}a \mathcal{D}C^* \mathcal{D}C \exp \left[-S_{\text{YM}}^E[A] - \frac{1}{2} \int_0^\beta dx_0 \int d^3x a_\mu \Delta_{\mu\nu} a_\nu + \int_0^\beta dx_0 \int d^3x C^* \Delta C \right. \\ &\quad \left. - S_{\text{int}}[A, a] + \mathcal{J} \cdot a + \eta^* \cdot C + C^* \cdot \eta \right],\end{aligned}\quad (3.51)$$

que depende de la nueva corriente \mathcal{J} . Notar que el único término lineal en el campo gauge a_μ que aparece en el exponente es el que está acoplado con la corriente \mathcal{J} .

Si imponemos ahora las condiciones $\tilde{a} = \tilde{C} = \tilde{C}^* = 0$, la acción efectiva se puede escribir como

$$\Gamma_g[A, 0, 0, 0] = -W_g[A, \mathcal{J}, \eta^*, \eta] \Big|_{\delta W_g / \delta \mathcal{J} = \delta W_g / \delta \eta^* = \delta W_g / \delta \eta = 0} \quad (3.52)$$

y es todavía invariante respecto a la transformación gauge del campo de fondo dada en (3.38). El desarrollo perturbativo de esta acción efectiva solamente contiene diagramas de vacío, que son 1PI.

El desarrollo de la acción efectiva de Yang-Mills en términos de \hbar viene dado por

$$\Gamma_g[A, 0, 0, 0] = S_{\text{YM}}^E[A] + \frac{1}{2} \text{Tr} \log(-\delta_{\mu\nu} \widehat{D}_\lambda^2 - 2\widehat{F}_{\mu\nu}) - \text{Tr} \log(-\widehat{D}_\mu^2) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.53)$$

El término $S_{\text{YM}}^E[A]$ es la contribución clásica, y los términos segundo y tercero son las contribuciones cuánticas a $\mathcal{O}(\hbar)$. En (3.53) se puede ver que el operador de Klein-Gordon sobre los campos cuánticos a_μ (segundo término del miembro derecho de la igualdad) actúa sobre un espacio interno de dimensión $D \times \widehat{N}_c$, donde en regularización dimensional $D = 4 - 2\epsilon$, que es el número de polarizaciones del gluón (físicas o no).² D se corresponde con el índice de Lorentz μ . Los operadores \widehat{D}_μ y $\widehat{F}_{\mu\nu}$ actúan en la representación adjunta. Notar que la derivada covariante en este operador de Klein-Gordon es la identidad en el espacio de Lorentz, mientras que el término de masa es una matriz en dicho espacio, esto es $(M)_{\mu\nu} = -2\widehat{F}_{\mu\nu}$. Por otra parte, el operador de Klein-Gordon de los campos ghost (tercer término del miembro derecho de la igualdad) actúa sobre un espacio interno de dimensión \widehat{N}_c . La derivada covariante es D_μ en la representación adjunta y el término de masa es cero.

² \widehat{N}_c es el número de generadores del grupo gauge ($N_c^2 - 1$ en $SU(N_c)$) y se corresponde con la dimensión de la representación adjunta del grupo.

3.3.2. Acción efectiva a un loop

La acción efectiva total de QCD quiral hasta nivel de un loop queda

$$\Gamma[A] = -\frac{\mu^{-2\epsilon}}{2g_0^2} \int d^4x \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \Gamma_q[A] + \Gamma_g[A], \quad (3.54)$$

donde el primer término es la acción de la teoría de Yang-Mills a nivel árbol teniendo en cuenta la renormalización (g_0 es una constante adimensional). El segundo término es la contribución de los quarks, que ha sido calculada en la sección 3.2. El tercer término corresponde a las contribuciones que surgen después de integrar los ghosts y las fluctuaciones cuánticas de los campos gauge

$$\Gamma_g[A] = \frac{1}{2} \text{Tr} \log(-\delta_{\mu\nu} \widehat{D}_\lambda^2 - 2\widehat{F}_{\mu\nu}) - \text{Tr} \log(-\widehat{D}_\mu^2) =: \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \mathcal{L}_g(x). \quad (3.55)$$

Haciendo uso del desarrollo del heat kernel podemos escribir

$$\mathcal{L}_g(x) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi\tau)^{D/2}} \sum_n \tau^n \widehat{\text{tr}}(b_{n,g}^T(x)). \quad (3.56)$$

La traza sobre el espacio de Lorentz para los gluones está incluida en los coeficientes $b_{n,g}^T$. En esta fórmula $\widehat{\text{tr}}$ se refiere a traza en el espacio de color en la representación adjunta. Se puede comprobar explícitamente en el cálculo que el efecto de los ghosts es quitar dos grados de polarización del gluón, esto es $D \rightarrow D - 2$. Debido a la traza de Lorentz todos los términos con una única M se van a anular, en particular $b_{1,g}^T$ y $b_{5/2,g}^T$ no van a contribuir. Hasta dimensión de masa 6 tenemos

$$\begin{aligned} b_{0,g}^T &= (D-2)\varphi_0(\widehat{\Omega}), \\ b_{2,g}^T &= \left(-2 + \frac{D-2}{12}\right)\varphi_0(\widehat{\Omega})\widehat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{D-2}{6}\overline{\varphi}_2(\widehat{\Omega})\widehat{E}_i^2, \\ b_{3,g}^T &= \varphi_0(\widehat{\Omega}) \left(\left(\frac{4}{3} + \frac{D-2}{90}\right)\widehat{F}_{\mu\nu}\widehat{F}_{\nu\lambda}\widehat{F}_{\lambda\mu} + \frac{1}{3}\widehat{F}_{\lambda\mu\nu}^2 - \frac{D-2}{60}\widehat{F}_{\mu\mu\nu}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\overline{\varphi}_2(\widehat{\Omega}) \left(-2\widehat{F}_{0\mu\nu}^2 + \frac{D-2}{10} \left(\widehat{E}_{ii}^2 + \widehat{F}_{0ij}^2 - 2\widehat{E}_i\widehat{F}_{ij}\widehat{E}_j \right) \right) \\ &\quad + (D-2) \left(\frac{1}{10}\overline{\varphi}_4(\widehat{\Omega}) - \frac{1}{6}\overline{\varphi}_2(\widehat{\Omega}) \right) \widehat{E}_{0i}^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En estas fórmulas las funciones φ_n corresponden a su versión bosónica, esto es, la suma es sobre las frecuencias de Matsubara $p_0 = 2\pi n/\beta$. A diferencia del sector fermiónico, el argumento de estas funciones, $\widehat{\Omega}$, y las derivadas covariantes están en la representación adjunta. Notar que los términos con $D - 2$ proceden de términos del heat kernel que no tienen masa. Los términos que rompen simetría Lorentz se han separado explícitamente.

Para calcular el lagrangiano efectivo deberemos introducir los coeficientes (3.57) en (3.56). Las integrales en τ que aparecen son del tipo (3.24). Como sabemos, las versiones

bosónica y fermiónica de las funciones φ_n están relacionadas por el cambio $\Omega \rightarrow -\Omega$, esto es $\varphi_n^+(\Omega) = \varphi_n^-(-\Omega)$. De aquí tenemos que las integrales $I_{\ell,2n}^+$ van a ser las mismas que $I_{\ell,2n}^-$ de (3.25) excepto por el cambio $\nu \rightarrow \hat{\nu} - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I_{\ell,2n}^+(e^{i2\pi\hat{\nu}}) &= (-1)^n (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell+n+\epsilon+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left[\zeta(1+2\ell+2\epsilon, \hat{\nu}) + \zeta(1+2\ell+2\epsilon, 1-\hat{\nu}) \right], \\ &\quad 0 < \hat{\nu} < 1, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde hemos hecho uso de la notación $\hat{\Omega} = e^{i2\pi\hat{\nu}}$. Esta fórmula se ha escrito para que sea válida en el intervalo $0 < \hat{\nu} < 1$. Fuera de este intervalo debe considerarse la extensión periódica de la función. Las integrales $I_{\ell,2n}^+(e^{i2\pi\hat{\nu}})$ son pares bajo el cambio $\hat{\nu} \rightarrow 1 - \hat{\nu}$.

El orden cero requiere

$$I_{-2,0}^+ = -\frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^4 (B_4(\hat{\nu}) + B_4(1-\hat{\nu})) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.59)$$

El potencial efectivo va a ser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0,g}(x) &= \frac{\pi^2}{3\beta^4} \hat{\text{tr}}(B_4(\hat{\nu}) + B_4(1-\hat{\nu})) \\ &= -\frac{\pi^2}{45\beta^4} \hat{N}_c + \frac{2\pi^2}{3\beta^4} \hat{\text{tr}}[\hat{\nu}^2(1-\hat{\nu})^2], \quad \hat{\Omega}(x) = e^{i2\pi\hat{\nu}}, \quad 0 < \hat{\nu} < 1, \end{aligned} \quad (3.60)$$

donde $\hat{N}_c := \hat{\text{tr}}(\mathbf{1}) = N_c^2 - 1$ es el número de generadores del grupo gauge. $\hat{\nu}$ es la matriz $\log(\hat{\Omega})/(2\pi i)$ con valores propios en la rama $0 < \hat{\nu} < 1$. Si se considera $\hat{\nu} = 0$ en ec. (3.60) se obtiene la presión de un gas ideal de gluones.

Para los términos con dimensión de masa 4 vamos a necesitar

$$\begin{aligned} I_{0,0}^+ &= \frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E + 2\log(\mu\beta/4\pi) - \psi(\hat{\nu}) - \psi(1-\hat{\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon), \\ I_{0,\bar{2}}^+ &:= I_{0,0}^+ + 2I_{0,2}^+ = -2 + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.61)$$

$I_{0,0}^+$ es divergente ultravioleta e $I_{0,\bar{2}}^+$ es finito. Notar que en las D 's que aparecen en nuestras expresiones tras hacer la traza de Lorentz también existen ϵ 's que hay que tener en cuenta. La parte finita del lagrangiano efectivo, en el esquema $\overline{\text{MS}}$, es

$$\mathcal{L}_{2,g}(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \hat{\text{tr}} \left[\frac{11}{12} \left(2\log(\mu\beta/4\pi) + \frac{1}{11} - \psi(\hat{\nu}) - \psi(1-\hat{\nu}) \right) \hat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} \hat{E}_i^2 \right]. \quad (3.62)$$

En esta fórmula no hemos considerado las contribuciones divergentes. Éstas serán tratadas en la sección 3.4, donde abordaremos el problema de la renormalización.

Para los términos con dimensión de masa 6 necesitamos las integrales

$$I_{1,0}^+ = -\left(\frac{\beta}{4\pi}\right)^2 \left(\psi''(\widehat{\nu}) + \psi''(1-\widehat{\nu})\right) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.63)$$

$$I_{1,\overline{2}}^+ = -2I_{1,0}^+ + \mathcal{O}(\epsilon), \quad I_{1,\overline{4}}^+ = -4I_{1,0}^+ + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.64)$$

Esto conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3,g}(x) &= \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{(4\pi)^4} \widehat{\text{tr}} \left[\left(\psi''(\widehat{\nu}) + \psi''(1-\widehat{\nu}) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{61}{45} \widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{F}_{\nu\lambda} \widehat{F}_{\lambda\mu} + \frac{1}{3} \widehat{F}_{\lambda\mu\nu}^2 - \frac{1}{30} \widehat{F}_{\mu\mu\nu}^2 + \frac{3}{5} \widehat{F}_{0\mu\nu}^2 - \frac{1}{15} \widehat{E}_{ii}^2 + \frac{2}{15} \widehat{E}_i \widehat{F}_{ij} \widehat{E}_j \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.4. Renormalización

Para la renormalización deberemos considerar todas las contribuciones divergentes que hemos obtenido, tanto del sector de quarks como del sector gluónico. El lagrangiano a nivel árbol junto con estas divergencias conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{árbol}}(x) + \mathcal{L}_q^{\text{div}}(x) + \mathcal{L}_g^{\text{div}}(x) &= \\ &= -\frac{1}{2g_0^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E \right) \left(\frac{11}{12} \widehat{\text{tr}}(\widehat{F}_{\mu\nu}^2) - \frac{N_f}{3} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2g^2(\mu)} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Hacemos uso de la siguiente identidad

$$\widehat{\text{tr}} \left(\widehat{F}_{\mu\nu}^2 \right) = 2\text{tr}(\mathbf{1})\text{tr}(F_{\mu\nu}^2) - 2(\text{tr}(F_{\mu\nu}))^2 = 2N_c \text{tr}(F_{\mu\nu}^2), \quad (3.67)$$

donde se ha considerado que el grupo gauge es $SU(N_c)$. De aquí obtenemos en el esquema $\overline{\text{MS}}$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g_0^2} - \beta_0 \left(\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E \right), \quad \beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right), \quad (3.68)$$

lo cual garantiza la independencia en escala de ec. (3.66). Notar que nos hemos limitado a renormalizar la constante de acoplamiento. Por invariancia gauge, los campos clásicos A_μ no necesitan ser renormalizados, si bien para el problema de la reducción dimensional, en general ésta funciona mejor si los campos se renormalizan de tal modo que todas las contribuciones a E_i^2 y B_i^2 , que proceden de loops no estáticos, son canceladas mediante contraterminos [55].

Si consideramos todos los términos con dimensión de masa 4, (ecs. (3.30), (3.62) y (3.66)), para ellos el lagrangiano renormalizado de QCD quiral hasta un loop es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,\text{QCD}}(x) = & \left(-\frac{1}{2g^2(\mu)} + \beta_0 \log(\mu\beta/4\pi) + \frac{1}{6} \frac{1}{(4\pi)^2} N_c \right) \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) \\ & - \frac{11}{12} \frac{1}{(4\pi)^2} \hat{\text{tr}} \left[(\psi(\hat{\nu}) + \psi(1 - \hat{\nu})) \hat{F}_{\mu\nu}^2 \right] \\ & + \frac{1}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} N_f \text{tr} \left[(\psi(\frac{1}{2} + \nu) + \psi(\frac{1}{2} - \nu)) F_{\mu\nu}^2 \right] \\ & - \frac{2}{3} (N_c - N_f) \frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr} [E_i^2], \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}, \quad 0 < \hat{\nu} < 1. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Otra posibilidad es usar el método de Pauli-Villars para regular las divergencias ultravioletas [56]. La regularización de Pauli-Villars consiste básicamente en la introducción, en el funcional generador, de nuevos campos a'_μ y C' que transforman como a_μ y C , pero tienen una masa M que posteriormente se considerará en el límite $M \rightarrow \infty$. Por conveniencia consideramos que los dos campos tienen la misma masa. La aplicación de este procedimiento conduce a la siguiente función de partición regulada

$$Z[A]|_{\text{reg}} = \frac{Z[A]}{Z'[A, M^2]}. \quad (3.70)$$

$Z'[A, M^2]$ tiene la misma forma que $Z[A]$ excepto que los términos de masa están incluidos. Para un operador genérico \mathbf{K} , la expresión regulada para el determinante funcional es

$$\text{Det}(\mathbf{K})|_{\text{reg}} = \frac{\text{Det}(\mathbf{K})}{\text{Det}(\mathbf{K} + M^2)} = \exp \left[- \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left(1 - e^{-\tau M^2} \right) \text{Tr} e^{-\tau \mathbf{K}} \right], \quad (3.71)$$

donde hemos hecho uso de la representación de tiempo propio de Schwinger. Por tanto la regularización de Pauli-Villars corresponde a insertar el factor $(1 - e^{-\tau M^2})$ en la integración en τ . Todas las integrales convergentes (incluidas $I_{0,\bar{2}}^\pm$) quedan igual que en regularización dimensional (en el límite $M \rightarrow \infty$), y las integrales que divergen son

$$\begin{aligned} I_{0,0}^{+,\text{PV}} &= 2 \log(M/\mu) + 2 \log(\mu\beta/4\pi) - \psi(\hat{\nu}) - \psi(1 - \hat{\nu}) + \mathcal{O}(M^{-1}), \quad 0 < \hat{\nu} < 1, \\ I_{0,0}^{-,\text{PV}} &= 2 \log(M/\mu) + 2 \log(\mu\beta/4\pi) - \psi(\frac{1}{2} + \nu) - \psi(\frac{1}{2} - \nu) + \mathcal{O}(M^{-1}), \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

El lagrangiano a nivel árbol tiene la siguiente constante de acoplamiento desnuda (para cutoff M),

$$\frac{1}{g_0^2(M)} = \frac{2}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \log \frac{M}{\mu}. \quad (3.73)$$

El lagrangiano a nivel árbol junto con todas las contribuciones divergentes del sector gluónico y del sector fermiónico conduce a (en este esquema de regularización)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{árbol}}(x) + \mathcal{L}_q^{\text{div}}(x) + \mathcal{L}_g^{\text{div}}(x) &= -\frac{1}{2g_0^2(M)} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) + \frac{1}{(4\pi)^2} \log(M) \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \text{tr}(F_{\mu\nu}^2) \\ &= -\frac{1}{2g^2(\mu)} \text{tr}(F_{\mu\nu}^2), \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde hemos hecho uso de la identidad (3.67), válida en $SU(N_c)$. Notar que el término divergente ultravioleta $\log(M)$ es cancelado por la constante de acoplamiento desnuda, de modo que al final el cutoff M es reemplazado por el parámetro finito μ . Si, como es usual, el parámetro Λ en cada esquema es definido como la escala $\mu = \Lambda$ para la cual $1/g^2(\mu)$ se anula, encontramos que los dos esquemas $\overline{\text{MS}}$ y PV dan idénticos resultados cuando

$$\log \left(\Lambda_{\text{PV}}^2 / \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^2 \right) = \frac{1}{11 - \frac{2N_f}{N_c}}. \quad (3.75)$$

Si se hace uso de otro esquema de regularización, la escala deberá modificarse en consecuencia [57, 58].

3.5. Divergencias infrarrojas

En el cálculo del sector gluónico de la acción efectiva existe un problema de divergencias infrarrojas relacionadas con el modo estático de Matsubara. En la representación adjunta, $N_c - 1$ valores propios de $\widehat{\Omega}$ son necesariamente la unidad, de modo que el valor $\widehat{\nu} = 0$ va a aparecer siempre al tomar la traza adjunta. Notar que para integrales $I_{\ell,n}^+$ con $n \neq 0$, el modo estático no va a contribuir. Sin embargo en $I_{\ell,0}^+$ este modo puede producir divergencias infrarrojas y ultravioletas. En concreto la singularidad de $I_{\ell,n}^+(e^{i2\pi\widehat{\nu}})$ para valores de $\widehat{\nu}$ enteros procede de la divergencia infrarroja del modo estático. En regularización dimensional la integral $I_{\ell,0}^+(1)|_{p_0=0}$ se define como cero ya que no tiene una escala natural [59]. Tal y como se explica en el apéndice B, las integrales $I_{\ell,2n}^+$ sin el modo estático vienen dadas por las mismas expresiones que (3.58) después de la sustitución $\widehat{\nu} \rightarrow 1 + \widehat{\nu}$ en la primera ζ . En consecuencia, la prescripción va a ser usar las fórmulas de $\mathcal{L}_{2,g}$ y $\mathcal{L}_{3,g}$ con las sustituciones

$$\begin{aligned} \psi(\widehat{\nu}) + \psi(1 - \widehat{\nu}) &\Big|_{\widehat{\nu}=0} \rightarrow \psi(1 + \widehat{\nu}) + \psi(1 - \widehat{\nu}) \Big|_{\widehat{\nu}=0} = -2\gamma_E, \\ \psi''(\widehat{\nu}) + \psi''(1 - \widehat{\nu}) &\Big|_{\widehat{\nu}=0} \rightarrow \psi''(1 + \widehat{\nu}) + \psi''(1 - \widehat{\nu}) \Big|_{\widehat{\nu}=0} = -4\zeta(3), \end{aligned} \quad (3.76)$$

realizadas únicamente en el subespacio $\widehat{\Omega} = 1$. Esta prescripción preserva la periodicidad de la acción efectiva como función de $\log(\widehat{\Omega})$, de modo que es consistente con la invariancia gauge.

Un modo alternativo de tratar las divergencias infrarrojas es regulándolas añadiendo en las integrales en τ una función cutoff $e^{-\tau m^2}$. Los modos que son finitos en el régimen infrarrojo no se ven afectados en el límite $m \rightarrow 0$. El modo estático en φ_0 da lugar a divergencias que deberán ser añadidas al resultado obtenido previamente en regularización dimensional. Esto produce la contribución

$$I_{\ell,0}^+(1)|_{p_0=0} = \frac{\sqrt{4\pi}\Gamma(\frac{1}{2} + \ell)}{\beta m^{2\ell+1}}. \quad (3.77)$$

Puesto que las divergencias infrarrojas proceden exclusivamente del modo estático de φ_0 , las relaciones de escala del tipo (3.64) para $I_{\ell,2n}^+$ no serán válidas. Los términos divergentes

infrarrojos que obtenemos son:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2,\text{IR}} &= \frac{1}{48\pi m} \frac{T}{m} \text{tr} [11F_{\mu\nu\perp}^2 + 2E_{i\perp}^2] , \\ \mathcal{L}_{3,\text{IR}} &= \frac{1}{240\pi m^3} \frac{T}{m^3} \text{tr} \left[-\frac{61}{3} F_{\mu\nu\perp} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu} + E_{i\perp} F_{ij} E_{j\perp} + E_i F_{ij\parallel} E_j \right. \\ &\quad \left. - 5F_{\mu\nu\lambda\perp}^2 + \frac{1}{2} F_{\mu\mu\nu\perp}^2 + \frac{9}{2} F_{0\mu\nu\perp}^2 + 3E_{0i\perp}^2 - \frac{1}{2} E_{ii\perp}^2 \right].\end{aligned}\quad (3.78)$$

En nuestra notación, $F_{\mu\nu\parallel}$ indica la parte de $F_{\mu\nu}$ que commuta con Ω , y $F_{\mu\nu\perp}$ el resto. Si bien son contribuciones gluónicas, se han expresado en la representación fundamental, que suele ser preferible. En concreto, en el gauge en que Ω es diagonal, $F_{\mu\nu\parallel}$ es la parte diagonal de $F_{\mu\nu}$. Únicamente términos con al menos una componente perpendicular pueden ser divergentes infrarrojos.

3.6. Teoría efectiva dimensionalmente reducida

Desde mediados de la década de los noventa la mayor parte del esfuerzo que se ha dedicado en QCD perturbativa a temperatura alta ha sido en calcular la presión, y sólo recientemente se ha obtenido el orden perturbativo más alto posible [60], mediante el uso de ideas de reducción dimensional [61, 62, 63, 64, 65]. Estas ideas se basan en el hecho de que a temperatura suficientemente alta el comportamiento de la teoría puede ser descrito, en principio, por una teoría efectiva en tres dimensiones.

Como sabemos, a temperatura finita los campos periódicos se pueden descomponer en modos de Fourier

$$A_\mu(x_0, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu(\omega_n, \vec{x}) e^{i\omega_n x_0}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}. \quad (3.79)$$

Cada modo lleva asociado un propagador de la forma $[\vec{p}^2 + \omega_n^2]^{-1}$. Para valores de n diferentes de cero, ω_n juega el papel de una masa. En el límite $T \rightarrow \infty$ todas las frecuencias de Matsubara no nulas son infinitamente grandes. Puesto que las partículas infinitamente pesadas se desacoplan en una teoría de campos a temperatura cero, se puede esperar que ocurra lo mismo para los modos no estáticos $n \neq 0$ en teorías de campos a temperatura alta, de modo que una teoría efectiva en tres dimensiones sería suficiente para explicar el comportamiento.

En la sección 3.3 hemos obtenido la acción efectiva haciendo una separación del campo gluónico en un background clásico más una fluctuación cuántica, e integrando ésta última a un loop. Se puede adaptar esta técnica para calcular la acción de la teoría dimensionalmente reducida (que denotaremos en lo sucesivo como $\mathcal{L}'(\vec{x})$), haciendo lo siguiente:

- considerar un background estacionario;
- considerar fluctuaciones puramente no estacionarias.

La integración de los modos fermiónicos y los modos gluónicos no estacionarios va a dar lugar a una teoría efectiva para los restantes modos estacionarios (independientes del tiempo), que consiste en una teoría gauge $SU(N_c)$ en tres dimensiones acoplada con un campo escalar A_0 . A esto se le llama *reducción dimensional*

$$\int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}(x) \longrightarrow \int d^3x \mathcal{L}'(\vec{x}) . \quad (3.80)$$

La segunda condición implica eliminar los modos estáticos $n = 0$ en todas las sumas de Matsubara. Hay que mencionar que $\mathcal{L}'(\vec{x})$ no es la acción efectiva de la teoría dimensionalmente reducida, sino que es la acción verdadera (en la aproximación de un loop), en el sentido de que la integral funcional sobre las configuraciones estacionarias con $\mathcal{L}'(\vec{x})$ da lugar a la función de partición.

3.6.1. Eliminación de los modos estáticos

La eliminación del modo estático sólo afecta al sector gluónico, y resulta irrelevante en el sector de quarks, de modo que $\mathcal{L}'_q(\vec{x}) = \beta \mathcal{L}_q(\vec{x})$.³ El sector gluónico a nivel árbol tampoco se ve afectado, de modo que para el nivel árbol renormalizado se tiene

$$\mathcal{L}'_{\text{árbol}}(\vec{x}) = \beta \mathcal{L}_{\text{árbol}}(\vec{x}) . \quad (3.81)$$

La eliminación del modo estático en el sector gluónico (para $|\hat{\nu}| < 1$) corresponde a la sustitución $\hat{\nu} \rightarrow \hat{\nu} + 1$ en la primera ζ de (3.58). Esto conduce trivialmente a las siguientes fórmulas:

$$\mathcal{L}'_{0,g}(\vec{x}) = \frac{2\pi^2}{3} T^3 \hat{\text{tr}} [\hat{\nu}^2 (1 + \hat{\nu}^2)] , \quad \hat{\nu} = \log(\hat{\Omega})/(2\pi i) , \quad -1 \leq \hat{\nu} \leq 1 . \quad (3.82)$$

$$\mathcal{L}'_{2,g}(\vec{x}) = \frac{1}{(4\pi)^2 T} \hat{\text{tr}} \left[\frac{11}{12} \left(2 \log(\mu/4\pi T) + \frac{1}{11} - \psi(\hat{\nu}) - \psi(-\hat{\nu}) \right) \hat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} \hat{E}_i^2 \right] , \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{3,g}(\vec{x}) = & \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{T^3} \hat{\text{tr}} \left[\left(\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(-\hat{\nu}) \right) \right. \\ & \times \left. \left(\frac{61}{45} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}_{\nu\lambda} \hat{F}_{\lambda\mu} + \frac{1}{3} \hat{F}_{\lambda\mu\nu}^2 - \frac{1}{30} \hat{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{3}{5} \hat{F}_{0\mu\nu}^2 - \frac{1}{15} \hat{E}_{ii}^2 + \frac{2}{15} \hat{E}_i \hat{F}_{ij} \hat{E}_j \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.84)$$

En el potencial efectivo se ha desechado un término que es independiente de A_0 . Para los términos con dimensión de masa cuatro y seis se ha hecho uso de la identidad $\psi(1 + \hat{\nu}) + \psi(1 - \hat{\nu}) = \psi(\hat{\nu}) + \psi(-\hat{\nu})$. En estas fórmulas, $\hat{F}_{0\mu\nu}$ indica $[A_0, \hat{F}_{\mu\nu}]$. Notar que la eliminación del modo estático permite que $\mathcal{L}'(\vec{x})$ esté libre de divergencias infrarrojas.

3.6.2. Desarrollo en A_0 pequeño

Además de tomar A_μ estacionario, consideraremos que A_0 es pequeño (en particular $|\hat{\nu}| < 1$). Esto es válido a temperatura alta, pues en este régimen el potencial efectivo produce una supresión en las configuraciones de $\Omega(\vec{x})$ que están lejos de la unidad. En ausencia

³Notar que existe un factor β extra en $\mathcal{L}'(\vec{x})$.

de quarks, esto se puede ver como que $\Omega(\vec{x})$ vive cerca de un elemento del centro del grupo gauge (la rotura espontánea de la simetría del centro indica la fase de desconfinamiento). Siempre va a ser posible hacer una transformación gauge para llevar una configuración a la región $|\hat{\nu}| < 1$. El considerar esta configuración es importante, pues únicamente cuando A_0 es pequeño ($|\hat{\nu}| < 1$) las fluctuaciones no estáticas son las más pesadas. Si A_0 es pequeño, podremos desarrollar $\mathcal{L}'(\vec{x})$ en potencias de A_0 . Notar que en el conteo en dimensiones de masa, el A_0 procedente de Ω tiene dimensión 1 (Ω no tiene dimensiones de masa). Este nuevo conteo no es compatible con invariancia gauge explícita bajo transformaciones grandes, aunque sí bajo transformaciones estacionarias topológicamente pequeñas (próximas a la identidad).

El potencial efectivo es un polinomio en A_0 . De ec. (3.27) y (3.82), se obtiene

$$\mathcal{L}'_0(\vec{x}) = - \left(\frac{N_c}{3} + \frac{N_f}{6} \right) T \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{4\pi^2 T} \langle A_0^2 \rangle^2 + \frac{1}{12\pi^2 T} (N_c - N_f) \langle A_0^4 \rangle. \quad (3.85)$$

En el resto de esta sección usaremos la notación $\langle X \rangle := \text{tr}(X)$, para la traza en la representación fundamental.

El resultado que se obtiene para los términos con dimensión de masa cuatro se puede escribir como⁴

$$\mathcal{L}'_{(4)}(\vec{x}) = - \frac{1}{T g_E^2(T)} \langle E_i^2 \rangle - \frac{1}{T g_M^2(T)} \langle B_i^2 \rangle, \quad (3.88)$$

con las siguientes constantes de acoplamiento cromoeléctricas y cromomagnéticas

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_E^2(T)} &= \frac{1}{g^2(\mu)} - 2\beta_0(\log(\mu/4\pi T) + \gamma_E) + \frac{1}{3(4\pi)^2} \left(N_c + 8N_f \left(\log 2 - \frac{1}{4} \right) \right), \\ \frac{1}{g_M^2(T)} &= \frac{1}{g^2(\mu)} - 2\beta_0(\log(\mu/4\pi T) + \gamma_E) + \frac{1}{3(4\pi)^2} (-N_c + 8N_f \log 2). \end{aligned} \quad (3.89)$$

El valor de $g_M^2(T)$ coincide con [65] para $N_c = 3$. También coincide con [55] (con $N_f = 0$) si se considera un factor adecuado dependiente de N_c entre la escala Λ usada en este artículo y nuestra μ .

Podemos introducir los parámetros térmicos Λ eléctricos y magnéticos como [66]

$$\frac{1}{g_{E,M}^2(T)} = 2\beta_0 \log(T/\Lambda_{E,M}^T). \quad (3.90)$$

⁴Mediante un reescalamiento de la constante de acoplamiento g y de los campos gauge con factores de renormalización convenientemente elegidos, se puede conseguir que $\mathcal{L}'_{(4)}(\vec{x})$ presente el mismo aspecto que el nivel árbol renormalizado a temperatura cero (ec. (3.66)). Es necesario considerar factores diferentes para la componente espacial y temporal de los campos: $g \rightarrow Z_g^{-1/2} g$, $A_i \rightarrow Z_M^{1/2} A_i$ y $A_0 \rightarrow Z_E^{1/2} A_0$.

$$Z_M = Z_g = 1 + 2g^2 \beta_0(\log(\mu/4\pi T) + \gamma_E) - \frac{g^2}{3(4\pi)^2} (-N_c + 8N_f \log 2), \quad (3.86)$$

$$Z_E = Z_M - \frac{2g^2}{3(4\pi)^2} (N_c - N_f). \quad (3.87)$$

Estos parámetros fijan la escala de ambas constantes de acoplamiento a temperatura alta. De ec. (3.89) se tiene

$$\begin{aligned}\log(\Lambda_E^T/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}) &= \gamma_E - \log(4\pi) - \frac{N_c + 8N_f(\log 2 - 1/4)}{22N_c - 4N_f}, \\ \log(\Lambda_M^T/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}) &= \gamma_E - \log(4\pi) + \frac{N_c - 8N_f \log 2}{22N_c - 4N_f}.\end{aligned}\quad (3.91)$$

Los términos con dimensión de masa seis proceden de $\mathcal{L}'_2(\vec{x})$ (desarrollando la función digamma hasta orden dos en ν) y de $\mathcal{L}'_3(\vec{x})$ (a orden cero). Se obtiene⁵

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{(6)}(\vec{x}) &= -\frac{2}{15} \frac{\zeta(3)}{(4\pi)^4 T^3} \left[\left(\frac{2}{3}N_c - \frac{14}{3}N_f \right) \langle F_{\mu\nu} F_{\nu\lambda} F_{\lambda\mu} \rangle + (19N_c - 28N_f) \langle F_{\mu\mu\nu}^2 \rangle \right. \\ &\quad + (18N_c - 21N_f) \langle F_{0\mu\nu}^2 \rangle + (110N_c - 140N_f) \langle A_0^2 F_{\mu\nu}^2 \rangle - (2N_c - 14N_f) \langle E_{ii}^2 \rangle \\ &\quad \left. + (4N_c - 28N_f) \langle E_i F_{ij} E_j \rangle + 110 \langle A_0^2 \rangle \langle F_{\mu\nu}^2 \rangle + 220 \langle A_0 F_{\mu\nu} \rangle^2 \right].\end{aligned}\quad (3.94)$$

Este resultado coincide con el obtenido en [55], calculado en el sector gluónico y con N_c arbitrario. El lagrangiano de dimensión seis ha sido calculado asimismo en [49] para el sector de quarks y en $SU(3)$, en ausencia de campo cromomagnético ($A_i = 0$) y eliminando términos con más de dos derivadas espaciales (por ejemplo E_{ii}^2). Nuestro cálculo reproduce también este resultado. En esta misma referencia se hace el cálculo para el sector gluónico, y tanto nuestro resultado como el de [55] se muestran en desacuerdo con él.

3.7. Resultados en $SU(2)$

En las secciones precedentes hemos encontrado resultados generales, válidos para cualquier grupo gauge en el sector fermiónico (sección 3.2), y para $SU(N_c)$ en el sector gluónico (sección 3.3). Para el cálculo de las trazas en espacio de color es necesario particularizar nuestras fórmulas a un grupo gauge concreto. Consideraremos aquí específicamente el grupo $SU(2)$.

En esta sección sólo mostraremos los órdenes $\mathcal{L}_0(x)$ y $\mathcal{L}_2(x)$. Los resultados completos $\mathcal{L}_{0,2,3}(x)$ en ambos sectores aparecen en el apéndice C.

⁵Se ha hecho uso de las identidades siguientes:

$$\widehat{\text{tr}} \left(\widehat{X}^2 \right) = 2N_c \langle X^2 \rangle, \quad X \in \text{su}(N_c), \quad (3.92)$$

$$\widehat{\text{tr}} \left(\widehat{X}^2 \widehat{Y}^2 \right) = 2N_c \langle X^2 Y^2 \rangle + 2 \langle X^2 \rangle \langle Y^2 \rangle + 4 \langle XY \rangle^2, \quad X, Y \in \text{su}(N_c). \quad (3.93)$$

3.7.1. Traza en espacio de color

Usaremos como base de $\text{su}(2)$ las matrices $\vec{t} = \vec{\sigma}/2i$, donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

$$A_0 = A_0^a t_a = -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{A}_0, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t_a = -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}, \quad \dots \quad (3.95)$$

En esta base

$$[t_a, t_b] = \epsilon_{abc} t_c, \quad \text{tr}(t_a t_b) = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (3.96)$$

En el gauge de Polyakov A_0 es independiente del tiempo y diagonal en la representación fundamental, de modo que resulta especialmente conveniente para nuestro cálculo. Para $\text{SU}(2)$, en este gauge tenemos

$$A_0 = -\frac{i}{2} \sigma_3 \phi, \quad \phi = \sqrt{A_0^a A_0^a}, \quad (3.97)$$

de modo que los valores propios del loop de Polyakov en la representación fundamental $\Omega = \exp(-\beta A_0)$, son $\exp(\pm i\beta\phi/2)$. En la representación adjunta

$$\widehat{A}_0 = A_0^a T_a, \quad (T^a)_{bc} = f_{bac} = -\epsilon_{abc} \quad (3.98)$$

y de aquí se tiene que los valores propios del loop de Polyakov en la representación adjunta $\widehat{\Omega} = \exp(-\beta \widehat{A}_0)$, son $\exp(\pm i\beta\phi)$ y 1.

Para el sector fermiónico, tras calcular la traza en el espacio de color, obtenemos

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = \frac{2\pi^2}{3} T^4 N_f \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{4} (1 - 4\bar{\nu}^2)^2 \right), \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,q}(x) = & \frac{N_f}{48\pi^2} \left(2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \bar{\nu}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \bar{\nu}\right) - 1 \right) \vec{E}_i^2 \\ & + \frac{N_f}{48\pi^2} \left(2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \bar{\nu}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \bar{\nu}\right) \right) \vec{B}_i^2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

donde

$$\bar{\nu} = \left(\frac{\beta\phi}{4\pi} + \frac{1}{2} \right) \pmod{1} - \frac{1}{2}. \quad (3.101)$$

En el sector gluónico se obtiene

$$\mathcal{L}_{0,g}(x) = \frac{\pi^2}{3} T^4 \left(-\frac{1}{5} + 4\widehat{\nu}^2 (1 - \widehat{\nu})^2 \right), \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,g}(x) = & -\frac{11}{48\pi^2} \left(2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \frac{1}{11} - \psi(\widehat{\nu}) - \psi(1 - \widehat{\nu}) \right) \vec{E}_{i\parallel}^2 \\ & - \frac{11}{48\pi^2} \left(\frac{12\pi T}{11m} + 2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \frac{1}{11} + \gamma_E - \frac{1}{2} \psi(\widehat{\nu}) - \frac{1}{2} \psi(1 - \widehat{\nu}) \right) \vec{E}_{i\perp}^2 \\ & - \frac{11}{48\pi^2} \left(2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) + \frac{1}{11} - \psi(\widehat{\nu}) - \psi(1 - \widehat{\nu}) \right) \vec{B}_{i\parallel}^2 \\ & - \frac{11}{48\pi^2} \left(\frac{\pi T}{m} + 2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) + \frac{1}{11} + \gamma_E - \frac{1}{2} \psi(\widehat{\nu}) - \frac{1}{2} \psi(1 - \widehat{\nu}) \right) \vec{B}_{i\perp}^2, \end{aligned} \quad (3.103)$$

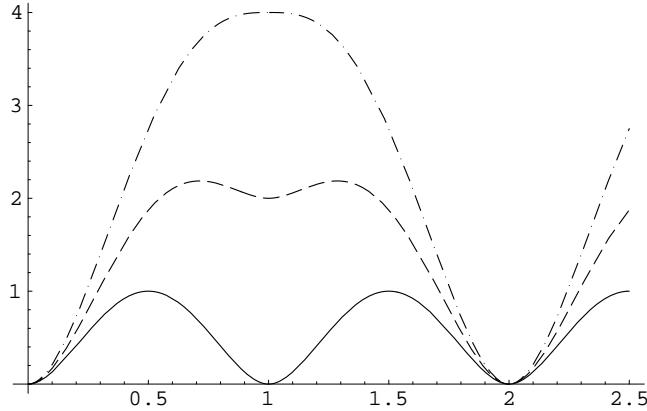


Figura 3.1: Potencial efectivo a un loop para $SU(2)$ como función de $\beta\phi/2\pi$, en ausencia de fermiones (línea continua), con un fermión sin masa (rayada) y con dos fermiones (puntos y rayas). Se ha graficado $12\beta^4\mathcal{L}_0/\pi^2$ y se ha eliminado el término constante.

donde

$$\widehat{\nu} = \frac{\beta\phi}{2\pi} \pmod{1}. \quad (3.104)$$

Hemos hecho uso del esquema $\overline{\text{MS}}$, y hemos considerado explícitamente un cutoff infrarrojo (ver sec. 3.5). Nuestros resultados son periódicos en ϕ . En estas expresiones se ha hecho la separación de los sectores eléctrico y magnético. $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$ es el campo magnético, y

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp}, \quad \vec{B}_i = \vec{B}_{i\parallel} + \vec{B}_{i\perp}, \quad (3.105)$$

es la descomposición de los campos eléctrico y magnético en la dirección paralela y perpendicular a \vec{A}_0 . Esta descomposición es invariante gauge, siempre y cuando se considere que, en un gauge general, la dirección paralela es aquella que venga indicada por el loop de Polyakov (esto es, aquella que commuta con el loop de Polyakov), y la perpendicular el resto. En la expresión de $\mathcal{L}_{2,g}(x)$ vemos que las componentes paralelas de los campos están libres de divergencias infrarrojas. Solamente las componentes perpendiculares pueden presentar este tipo de divergencias.

En la figura 3.1 se muestra el comportamiento del potencial efectivo (orden cero del lagrangiano). Observamos que las periodicidades del sector fermiónico y del sector gluónico se diferencian en un factor 2.

Los lagrangianos efectivos $\mathcal{L}_{2,q}(x)$ y $\mathcal{L}_{2,g}(x)$ presentan la siguiente estructura

$$\mathcal{L}_{2,q}(x) = -f_{1,q}(\overline{\nu})\vec{E}_{i\perp}^2 - f_{2,q}(\overline{\nu})\vec{E}_{i\parallel}^2 - h_{1,q}(\overline{\nu})\vec{B}_{i\perp}^2 - h_{2,q}(\overline{\nu})\vec{B}_{i\parallel}^2, \quad (3.106)$$

$$\mathcal{L}_{2,g}(x) = -f_{1,g}(\widehat{\nu})\vec{E}_{i\perp}^2 - f_{2,g}(\widehat{\nu})\vec{E}_{i\parallel}^2 - h_{1,g}(\widehat{\nu})\vec{B}_{i\perp}^2 - h_{2,g}(\widehat{\nu})\vec{B}_{i\parallel}^2. \quad (3.107)$$

Para el sector de quarks se tiene $f_{1,q} = f_{2,q} \equiv f_q$, $h_{1,q} = h_{2,q} \equiv h_q$.

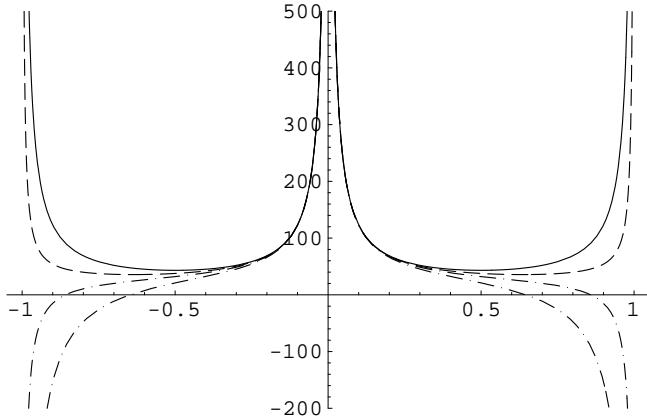


Figura 3.2: Gráfico de $96\pi^2(f_{1,q} + f_{1,g})$ como función de $\beta\phi/2\pi$, en ausencia de fermiones (línea continua), con dos fermiones sin masa (rayada) y con cuatro y ocho fermiones en orden sucesivo (puntos y rayas). Se han eliminado los términos constantes.

En la figura 3.2 aparece graficada la función $f_{1,q}(\bar{\nu}) + f_{1,g}(\hat{\nu})$. Notar que $f_{1,g}(\hat{\nu})$ es singular en $\nu = 0$ lo cual es debido a la contribución del modo cero. El resto de funciones: $f_{2,q}(\bar{\nu}) + f_{2,g}(\hat{\nu})$, $h_{1,q}(\bar{\nu}) + h_{1,g}(\hat{\nu})$ y $h_{2,q}(\bar{\nu}) + h_{2,g}(\hat{\nu})$; presentan un comportamiento similar.

3.7.2. Invariancia gauge del resultado

Después de fijar el gauge de Polyakov (A_0 diagonal e independiente del tiempo), aún queda una simetría abeliana residual que consiste en rotaciones gauge arbitrarias independientes del tiempo sobre los generadores de Cartan (σ_3 en el caso de SU(2)), y de una rotación gauge dependiente del tiempo (también sobre los ejes de Cartan) que va a ser discreta para ser compatible con la periodicidad de $A_i(x_0, \vec{x})$ (ver apéndice A). Para una teoría gauge pura SU(2) esta simetría residual corresponde a la siguiente transformación

$$A_\mu \rightarrow U^{-1} \partial_\mu U + U^{-1} A_\mu U, \quad U(x_0, \vec{x}) = \exp \left[-i \frac{\sigma_3}{2} (\alpha(\vec{x}) + x_0 2\pi n / \beta) \right], \quad (3.108)$$

donde n es un entero. Notar que no podemos hacer rotaciones sobre un eje que no sea el eje diagonal, ya que esto haría que A_0 fuera no diagonal. La dependencia en el tiempo debe ser lineal, ya que en caso contrario se generaría una dependencia temporal en A_0 . La transformación gauge (3.108) verifica $U(x_0 + \beta, \vec{x}) = (-1)^n U(x_0, \vec{x})$. La fase $(-1)^n$ se debe a la simetría del centro del grupo gauge, que es $\mathbb{Z}(2)$. En componentes esta transformación es

$$\begin{aligned} A'_0(\vec{x}) &= A_0^3(\vec{x}) + 2\pi n / \beta, \\ A'_i(x_0, \vec{x}) &= A_i^1 \cos \chi + A_i^2 \sin \chi, \\ A'_i(x_0, \vec{x}) &= -A_i^1 \sin \chi + A_i^2 \cos \chi, \\ A'_i(x_0, \vec{x}) &= A_i^3 + \partial_i \alpha(\vec{x}), \end{aligned} \quad (3.109)$$

donde $\chi(x_0, \vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + x_0 2\pi n / \beta$. Notar que la primera ecuación es equivalente a $\tilde{\nu}' = \tilde{\nu} + n$.

En la figura 3.1 vemos que cuando no hay fermiones los mínimos absolutos del potencial efectivo ocurren para valores enteros de $\beta\phi/2\pi$, y todos ellos son transformaciones gauge de $A_0 = 0$.

Se puede comprobar que las combinaciones de campos $\vec{E}_{i\parallel}^2$, $\vec{E}_{i\perp}^2$, $\vec{B}_{i\parallel}^2$, y $\vec{B}_{i\perp}^2$ quedan invariantes bajo la transformación (3.109). Por tanto el sector gluónico de la acción efectiva es invariante gauge.

Al introducir fermiones en la teoría la situación se modifica ligeramente. En general hay más transformaciones residuales permitidas en una teoría gauge pura $SU(N_c)$ que en una teoría $SU(N_c)$ con fermiones. Los fermiones rompen la simetría del centro del grupo gauge, y la forma más general de la transformación U en este caso es

$$U(x_0, \vec{x}) = \exp \left[-i \frac{\sigma_3}{2} (\alpha(\vec{x}) + x_0 4\pi n / \beta) \right], \quad (3.110)$$

que es un subgrupo de la anterior. Esta transformación produce $\tilde{\nu}' = \tilde{\nu} + n$, lo cual respeta la periodicidad de todas las funciones (notar que (3.108) no respeta la periodicidad de las funciones $\mathcal{L}_{0,g}(\tilde{\nu})$, $f_q(\tilde{\nu})$ y $h_q(\tilde{\nu})$). Como función de x_0 , la transformación gauge (3.110) es estrictamente periódica en $[0, \beta]$.

En la figura 3.1 se observa cómo la inclusión de fermiones da lugar a la rotura de la simetría $\mathbb{Z}(2)$. Esta rotura se manifiesta en que los puntos $\beta\phi/2\pi = 2n + 1$ dejan de ser mínimos absolutos del potencial efectivo y pasan a ser puntos estacionarios. Los mínimos absolutos $\beta\phi/2\pi = 2n$ son transformaciones gauge (3.110) de $A_0 = 0$.

3.7.3. Comparación con otros resultados

Podemos comparar nuestros resultados en $SU(2)$ en el sector gluónico con los que aparecen en [67], donde se calcula la acción efectiva de una teoría de Yang-Mills $SU(2)$ a altas temperaturas haciendo un desarrollo en derivadas covariantes. Este desarrollo es para configuraciones gauge estacionarias, es a todos los órdenes en A_0 y se calculan algunos términos con hasta cuatro derivadas espaciales. Aquí hemos calculado únicamente los órdenes más bajos en \hat{D}_0 , pues así es como está construido el desarrollo del heat kernel, y nuestras configuraciones son generales (no necesariamente estáticas).

El resultado de ref. [67] presenta la estructura de $\mathcal{L}_{2,g}$ en (3.107). Puesto que el nuestro no es estrictamente un desarrollo en A_0 (el loop de Polyakov no se ha desarrollado, con objeto de preservar invariancia gauge), no es posible hacer una comparación directa con [67]. Sin embargo en nuestro tratamiento vemos que si la teoría fuera estacionaria, todos los términos de la forma $(\hat{D}_0^n F_{\mu\nu})_{\parallel}$, $n \geq 1$, serían cero, pues A_0 es diagonal. Esto quiere decir que nuestras funciones $f_{2,g}$ y $h_{2,g}$ no reciben ninguna contribución adicional más allá de $\mathcal{L}_{2,g}$. Estas funciones coinciden con las correspondientes de [67]. Por supuesto, el potencial efectivo es correcto a todos los órdenes en A_0 .

Por otra parte nuestras funciones $f_{1,g}$ y $h_{1,g}$ contienen divergencias infrarrojas, mientras que en el cálculo de [67] sólo $h_{1,g}$ es divergente.

3.8. Resultados en $SU(3)$

En esta sección consideraremos específicamente el grupo gauge $SU(3)$. Calcularemos el lagrangiano efectivo hasta términos con dimensión de masa 4.

3.8.1. Traza en espacio de color

Usaremos como base de $su(3)$ las matrices $t_a = \lambda_a/2i$, donde λ_a , $a = 1, \dots, 8$, son las matrices de Gell-Mann

$$A_0 = A_0^a t_a = -\frac{i}{2} \lambda_a A_0^a, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t_a = -\frac{i}{2} \lambda_a F_{\mu\nu}^a, \quad \dots \quad (3.111)$$

En esta base

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c, \quad \text{tr}(t_a t_b) = -\frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (3.112)$$

Al igual que en la sección 3.7, elegimos el gauge de Polyakov, de modo que A_0 va a ser diagonal en la representación fundamental,

$$A_0 = -i \frac{\lambda_3}{2} \phi_3 - i \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8 \phi_8. \quad (3.113)$$

Los valores propios del loop de Polyakov en esta representación son

$$\omega_1 = \exp\left(i \frac{\beta}{2} (\phi_3 + \phi_8)\right), \quad \omega_2 = \exp\left(i \frac{\beta}{2} (-\phi_3 + \phi_8)\right), \quad \omega_3 = \exp(-i \beta \phi_8), \quad (3.114)$$

y si definimos las magnitudes ν_A mediante $\omega_A = \exp(i 2\pi \nu_A)$, $A = 1, 2, 3$, vamos a poder expresar el sector fermiónico del lagrangiano efectivo en términos de

$$\nu_1 = \frac{\beta}{4\pi} (\phi_3 + \phi_8), \quad \nu_2 = \frac{\beta}{4\pi} (-\phi_3 + \phi_8), \quad \nu_3 = -\frac{\beta}{2\pi} \phi_8. \quad (3.115)$$

Tras calcular la traza en el espacio de color, obtenemos

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = -\frac{\pi^2 T^4 N_f}{12} \left(-\frac{8}{5} + (1 - 4\bar{\nu}_1^2)^2 + (1 - 4\bar{\nu}_2^2)^2 + (1 - 4\bar{\nu}_3^2)^2 \right), \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,q}(x) = & \frac{N_f}{24\pi^2} \left[\log\left(\frac{\mu}{4\pi T}\right) - \frac{1}{2} \right] \vec{E}_i^2 + \frac{N_f}{24\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{4\pi T}\right) \vec{B}_i^2 \\ & - \frac{N_f}{12(4\pi)^2} (f^-(\nu_1) + f^-(\nu_2)) ((F_{\mu\nu}^1)^2 + (F_{\mu\nu}^2)^2 + (F_{\mu\nu}^3)^2) \\ & - \frac{N_f}{12(4\pi)^2} (f^-(\nu_1) + f^-(\nu_3)) ((F_{\mu\nu}^4)^2 + (F_{\mu\nu}^5)^2) \\ & - \frac{N_f}{12(4\pi)^2} (f^-(\nu_2) + f^-(\nu_3)) ((F_{\mu\nu}^6)^2 + (F_{\mu\nu}^7)^2) \\ & - \frac{N_f}{36(4\pi)^2} (f^-(\nu_1) + f^-(\nu_2) + 4f^-(\nu_3)) (F_{\mu\nu}^8)^2 \\ & - \frac{N_f}{6\sqrt{3}(4\pi)^2} (f^-(\nu_1) - f^-(\nu_2)) F_{\mu\nu}^3 F_{\mu\nu}^8, \end{aligned} \quad (3.117)$$

donde

$$f^-(\nu) = \psi\left(\frac{1}{2} + \bar{\nu}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \bar{\nu}\right), \quad \bar{\nu} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pmod{1} - \frac{1}{2}. \quad (3.118)$$

Para el sector gluónico debemos calcular la traza en la representación adjunta. En esta representación

$$(\widehat{A}_0)_{ab} = (A_0^c T_c)_{ab} = -f_{abc} A_0^c = -f_{ab3} \phi_3 - f_{ab8} \sqrt{3} \phi_8, \quad (3.119)$$

donde hemos hecho uso de $(T^c)_{ab} = f_{acb} = -f_{abc}$. De aquí se tiene que los valores propios del loop de Polyakov en la representación adjunta $\widehat{\Omega} = \exp(-\beta \widehat{A}_0)$ son

$$1, \quad 1, \quad \exp(\pm i\beta\phi_3), \quad \exp\left(\pm i\frac{\beta}{2}(\phi_3 + 3\phi_8)\right), \quad \exp\left(\pm i\frac{\beta}{2}(\phi_3 - 3\phi_8)\right). \quad (3.120)$$

El sector gluónico del lagrangiano efectivo se va a poder expresar en términos de los invariantes

$$\nu_{12} = \frac{\beta}{2\pi} \phi_3, \quad \nu_{31} = \frac{\beta}{4\pi} (\phi_3 + 3\phi_8), \quad \nu_{23} = \frac{\beta}{4\pi} (\phi_3 - 3\phi_8). \quad (3.121)$$

Una vez que se calcula la traza en el espacio de color, se obtiene

$$\mathcal{L}_{0,g}(x) = \frac{4}{3}\pi^2 T^4 \left(-\frac{2}{15} + \widehat{\nu}_{12}^2 (1 - \widehat{\nu}_{12})^2 + \widehat{\nu}_{31}^2 (1 - \widehat{\nu}_{31})^2 + \widehat{\nu}_{23}^2 (1 - \widehat{\nu}_{23})^2 \right), \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,g}(x) = & -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 \log\left(\frac{\mu}{4\pi T}\right) - \frac{1}{2} \right) \vec{E}_i^2 - \frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 \log\left(\frac{\mu}{4\pi T}\right) + \frac{1}{2} \right) \vec{B}_i^2 \\ & - \frac{T}{4\pi m} \left(\vec{E}_{i\perp}^2 + \frac{11}{12} \vec{B}_{i\perp}^2 \right) \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{12} \left(f^+(0) + f^+(\nu_{12}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{31}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{23}) \right) ((F_{\mu\nu}^1)^2 + (F_{\mu\nu}^2)^2) \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{12} \left(f^+(0) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{12}) + f^+(\nu_{31}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{23}) \right) ((F_{\mu\nu}^4)^2 + (F_{\mu\nu}^5)^2) \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{12} \left(f^+(0) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{12}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{31}) + f^+(\nu_{23}) \right) ((F_{\mu\nu}^6)^2 + (F_{\mu\nu}^7)^2) \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{12} \left(2f^+(\nu_{12}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{31}) + \frac{1}{2} f^+(\nu_{23}) \right) (F_{\mu\nu}^3)^2 \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{8} (f^+(\nu_{31}) + f^+(\nu_{23})) (F_{\mu\nu}^8)^2 \\ & + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{4\sqrt{3}} (f^+(\nu_{31}) - f^+(\nu_{23})) F_{\mu\nu}^3 F_{\mu\nu}^8, \end{aligned} \quad (3.123)$$

donde

$$\begin{aligned} f^+(\nu) &= \psi(\widehat{\nu}) + \psi(1 - \widehat{\nu}) \quad (\nu \notin \mathbb{Z}), \quad \widehat{\nu} = \nu \pmod{1}, \\ f^+(0) &= -2\gamma_E. \end{aligned} \quad (3.124)$$

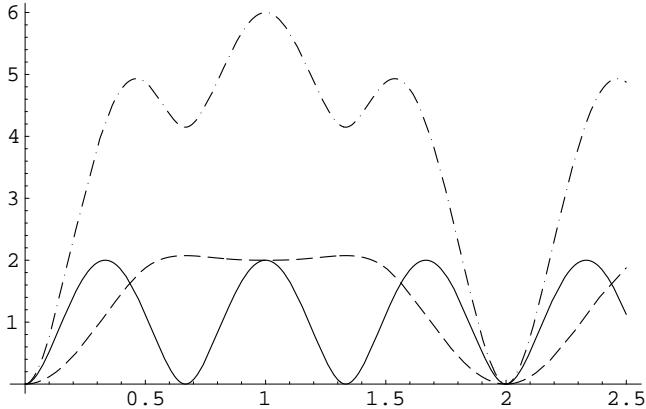


Figura 3.3: Potencial efectivo a un loop para $SU(3)$ como función de ρ . Se considera $\theta = 0$ y se muestra el caso en que no hay fermiones (línea continua), dos fermiones sin masa (puntos y rayas), y fermiones solamente (rayada). Se ha graficado $12\beta^4\mathcal{L}_0/\pi^2$ y se ha eliminado el término constante.

Al igual que hicimos en $SU(2)$, podemos considerar la descomposición de los campos en la dirección paralela y perpendicular a \vec{A}_0 . La dirección paralela $\vec{F}_{\mu\nu\parallel}$ da cuenta de las componentes 3 y 8. La dirección perpendicular $\vec{F}_{\mu\nu\perp}$ da cuenta de las componentes 1, 2, 4, 5, 6 y 7. Notar que el subespacio paralelo está libre de divergencias infrarrojas.

El nivel árbol renormalizado es

$$\mathcal{L}_{\text{árbol}}(x) = \frac{1}{4g^2(\mu)} \vec{F}_{\mu\nu}^2. \quad (3.125)$$

En las fórmulas hasta orden 4 en masa las componentes 1 y 2 juegan el mismo papel. Lo mismo ocurre con las componentes 4 y 5, y con las componentes 6 y 7. Hasta este orden, la estructura que encontramos es de cuatro planos bien definidos: el plano paralelo a \vec{A}_0 , y tres planos transversales; esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,q}(x) + \mathcal{L}_{2,g}(x) = & f_{12}(\phi_3, \phi_8)((E_i^1)^2 + (E_i^2)^2) + f_{45}(\phi_3, \phi_8)((E_i^4)^2 + (E_i^5)^2) \\ & + f_{67}(\phi_3, \phi_8)((E_i^6)^2 + (E_i^7)^2) + f_{33}(\phi_3, \phi_8)(E_i^3)^2 + f_{88}(\phi_3, \phi_8)(E_i^8)^2 \\ & + f_{38}(\phi_3, \phi_8)(E_i^3 E_i^8) \\ & + (\text{misma estructura para } B_i B_i). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Se puede comprobar que, eligiendo los generadores del álgebra del grupo de manera conveniente, la estructura general que se obtiene para $SU(N_c)$ en nuestro desarrollo hasta orden 4 es de un plano paralelo con $N_c - 1$ componentes, y $N_c(N_c - 1)/2$ planos transversales, cada uno de ellos formado por dos componentes. Las divergencias infrarrojas solamente van a afectar a estos últimos.

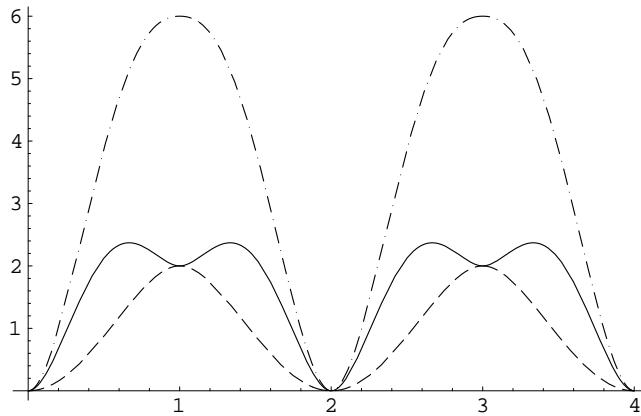


Figura 3.4: Potencial efectivo a un loop para $SU(3)$ como en fig. 3.3, pero en la dirección de λ_3 . Se ha graficado como función de θ y se considera $\rho = 0$.

3.8.2. Invariancia gauge del resultado

Con el fin de graficar las funciones definimos las magnitudes θ y ρ como

$$\theta = \frac{\beta}{2\pi}\phi_3, \quad \rho = \frac{\beta}{2\pi}\phi_8. \quad (3.127)$$

En la figura 3.3 se muestra el potencial efectivo en la dirección de λ_8 . Cuando no hay fermiones los únicos mínimos del potencial en esta dirección ocurren en los puntos $\rho = 2n/3$ que son justamente transformaciones gauge de $\rho = 0$. En la figura 3.4 aparece el potencial efectivo en la dirección de λ_3 . Los mínimos absolutos son nuevamente transformaciones gauge de $\theta = 0$, pero aparecen además mínimos locales en $\theta = 2n + 1$. En una gráfica del potencial efectivo en dos dimensiones (figura 3.5) se puede observar que estos mínimos locales en realidad son cráteres que caen hacia mínimos absolutos en $(\theta, \rho) = (2n + 1, 1/3)$. En todos estos mínimos la matriz $\Omega = \exp(-\beta A_0)$ tiene los mismos valores propios, de modo que todos ellos son transformaciones gauge de $\Omega = 1$.

Como se comenta en el apéndice A la introducción de fermiones rompe la simetría del centro del grupo gauge. La rotura de esta simetría se manifiesta en la aparición de mínimos locales. En la figura 3.3 podemos observar que el mínimo absoluto en $\rho = 2/3$ para la teoría sin fermiones se transforma, con la inclusión de éstos, en un mínimo local. Esto es así ya que el mínimo absoluto de la parte gauge del potencial efectivo coincide con el máximo de la parte fermiónica. En general, como podemos observar en las figuras 3.5 y 3.6, cada mínimo local de la teoría gauge con fermiones se corresponde exactamente con un mínimo absoluto de la teoría gauge pura. Con el fin de ilustrar el comportamiento de las funciones que aparecen en \mathcal{L}_2 , en la figura 3.7 se muestra la función f_{45} en la dirección de λ_8 . La parte bosónica de la función presenta singularidades en $\rho = 2n/3$ lo cual es debido a la contribución del modo cero. El comportamiento en la dirección de λ_3 es parecido al de la figura 3.2.

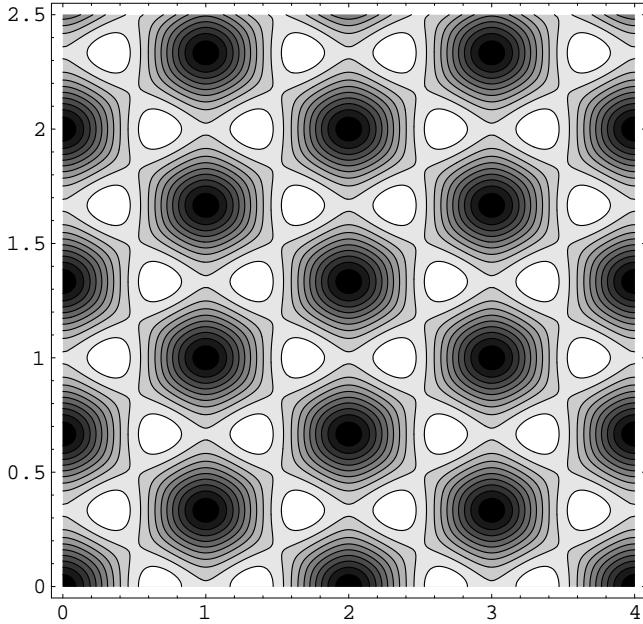


Figura 3.5: Gráfico de contorno del potencial efectivo a un loop para $SU(3)$ como función de θ (eje horizontal) y ρ (eje vertical) para una teoría gauge pura.

3.8.3. Comparación con otros resultados

En [68], al igual que en [55], se calcula la acción efectiva a un loop de una teoría de Yang-Mills $SU(N_c)$ haciendo un desarrollo en derivadas covariantes. El resultado no es covariante gauge pues se considera un desarrollo en potencias de $A_0(\vec{x})$. Como consecuencia de ello el potencial efectivo que se obtiene no es periódico y sólo se aproxima al exacto cuando $A_0 \rightarrow 0$. De todas formas en [68] se considera el potencial efectivo exacto, que es conocido y ha sido calculado por nosotros, y se hace un estudio en el caso específico de una teoría gauge $SU(3)$ incluyendo fermiones. Hemos comprobado que sus resultados coinciden con los nuestros.

3.9. Conclusiones

En este capítulo se ha hecho un estudio de la acción efectiva de QCD a un loop a temperatura finita en la región de interés fenomenológico correspondiente a la fase de plasma de quarks y gluones. Para tal fin hemos usado la técnica del heat kernel del capítulo 2, que nos ha permitido calcular el determinante fermiónico y el determinante bosónico correspondiente a fluctuaciones gluónicas cuánticas en torno a un background clásico (es el conocido como Método del Campo de Fondo).

El desarrollo del heat kernel se corresponde en este caso con un desarrollo en derivadas, organizado de un modo muy eficiente. Hemos conseguido reproducir resultados parciales

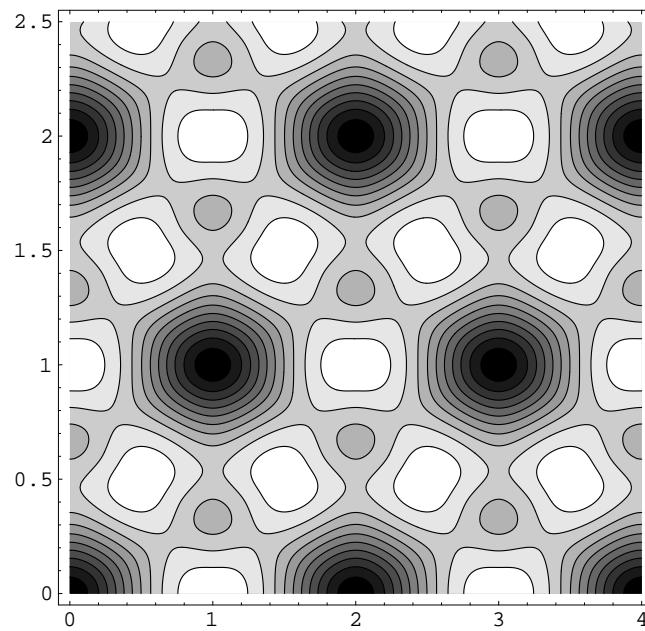


Figura 3.6: Igual que fig. 3.5, pero con dos fermiones sin masa.

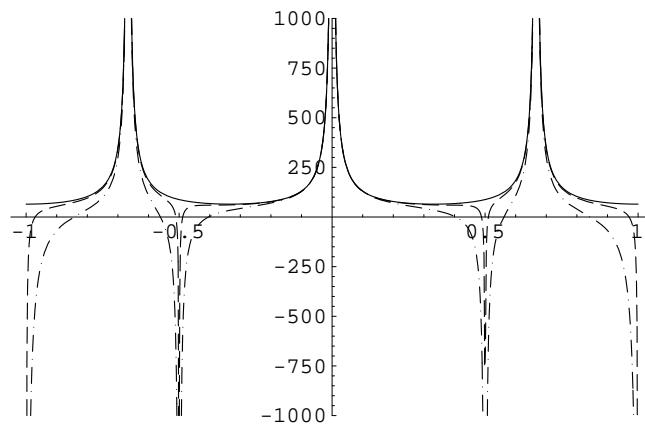


Figura 3.7: Gráfico de $-96\pi^2 f_{45}$ como función de ρ . Se considera $\theta = 0$ y se muestra el caso en que no hay fermiones (línea continua), un fermión sin masa (rayada), y ocho fermiones (puntos y rayas). Se han eliminado los términos constantes y ciertas divergencias que surgen al tomar $\theta = 0$.

previos, y extenderlos hasta orden T^{-2} incluyendo los efectos del loop de Polyakov, para un grupo gauge general $SU(N_c)$. Se ha calculado la acción de la teoría efectiva dimensionalmente reducida hasta ese mismo orden. Finalmente se han particularizado las fórmulas para los grupos gauge $SU(2)$ y $SU(3)$, lo cual ha permitido comparar con trabajos previos.

Un punto de especial relevancia es la invariancia gauge de nuestros resultados. Hemos estudiado la invariancia frente a la simetría del centro $\mathbb{Z}(N_c)$ del grupo gauge $SU(N_c)$ en la teoría sin fermiones, y se ha estudiado explícitamente el mecanismo por el cual los fermiones rompen esta simetría del centro.

Capítulo 4

Efectos no perturbativos por encima de la transición de fase

4.1. Introducción

El loop de Polyakov juega un papel teórico muy importante en QCD a temperatura finita. Representa el propagador de un quark estático test y por tanto es crucial para entender el mecanismo de la transición confinamiento-desconfinamiento. En [69, 70] se encuentra su relación con la energía libre de un quark pesado, de tal modo que un valor esperado nulo del loop de Polyakov en quenched QCD indica la fase de confinamiento. La simetría global $\mathbb{Z}(N_c)$ se encuentra espontáneamente rota en la fase de desconfinamiento [71]. El loop de Polyakov constituye un parámetro de orden natural para esa transición de fase; bajo transformaciones de gauge periódicas L es un objeto invariante, pero bajo una transformación de 't Hooft adquiere un factor, que es un elemento del centro del grupo gauge. Diversas teorías efectivas para el loop de Polyakov han sido propuestas en [72]. (Para un análisis detallado ver, por ejemplo, [20]).

Al comienzo de los años ochenta, el cálculo perturbativo del loop de Polyakov hasta segundo orden (NLO) fue hecho por Gava y Jengo [23]. Estos resultados muestran que a temperaturas suficientemente grandes el loop de Polyakov renormalizado se aproxima a uno por encima.¹ No se han hecho muchos progresos desde este primer resultado. Actualmente no existen cálculos perturbativos del loop de Polyakov más allá de NLO. Tal y como se menciona en [23], un cálculo directo conduciría a la aparición de un gran número de diagramas de Feynman debido a las divergencias infrarrojas [73]. En este capítulo discutiremos una aproximación diferente, relacionada con la técnica de reducción dimensional.

Desde el punto de vista no perturbativo, el loop de Polyakov desnudo ha sido frecuentemente estudiado en cálculos numéricos de teorías gauge en el retículo. No obstante, sólo recientemente se ha conseguido una definición conveniente del loop de Polyakov renormalizado. El método introducido en ref. [21] para QCD quenched permite calcular el loop de Polyakov a partir del potencial quark-antiquark a temperatura finita, obtenido de la fun-

¹El valor esperado del loop de Polyakov desnudo se anula en el límite al continuo en cualquier fase.

ción de correlación de dos loops de Polyakov separados. La comparación con el potencial a temperatura cero para separaciones pequeñas permite una determinación muy precisa de la autoenergía del quark, que debe ser extraída.

Las temperaturas grandes están relacionadas con regiones cinemáticas donde se manifiesta la rotura de la simetría Lorentz, y se corresponden con momentos euclídeos grandes para una teoría cuántica de campos a temperatura cero. En regularización dimensional en el esquema $\overline{\text{MS}}$ se encuentra que a una temperatura dada T le corresponde una escala euclídea $\mu \sim 4\pi T$ [66], de modo que para $T_c = 270$ MeV se tiene $\mu = 3$ GeV. En este régimen es de esperar que las ideas del desarrollo en producto de operadores (en inglés Operator Product Expansion, OPE) se puedan aplicar, y más específicamente a temperaturas no tan grandes los condensados y las correcciones en potencias de la temperatura deberían de jugar un papel importante. En realidad, siguiendo algunas sugerencias antiguas [74], requisitos fenomenológicos [75], estudios teóricos [76] y análisis en el retículo [77, 78, 79] hay actualmente una evidencia creciente de que el condensado invariante BRST de orden más bajo es de dimensión 2. Este condensado es en general no local, pero en el gauge de Landau se convierte en un operador local $\langle A_{\mu,a}^2 \rangle$, donde $A_{\mu,a}$ es el campo del gluón. El condensado $\langle A_{0,a}^2 \rangle$ también aparece como un parámetro en el cálculo de la presión a temperatura finita [80].

El loop de Polyakov está estrechamente relacionado con el valor esperado de $A_{0,a}^2$ (como veremos, el resultado perturbativo a NLO se puede obtener de esta manera), de modo que las contribuciones del condensado a esta magnitud tendrán un impacto inmediato sobre el loop de Polyakov. En este capítulo estudiaremos la existencia de contribuciones no perturbativas a este condensado gluónico. La situación es similar a lo que ocurre con el potencial quark-antiquark en QCD a temperatura cero, como función de la separación del quark y el antiquark. En este caso, la teoría de perturbaciones describe bien la región de cortas distancias, donde la teoría es débilmente interactuante y el intercambio de un gluón produce un potencial tipo Coulomb. A distancias grandes surge el confinamiento y los datos del retículo sugieren un potencial de tipo lineal [81].

En la sección 4.4 se analizarán los datos en el retículo del loop de Polyakov en base a estas ideas.

Este capítulo está basado en la referencia [82].

4.2. Loop de Polyakov perturbativo

Con objeto de incluir posteriormente posibles contribuciones provenientes de condensados, trataremos de reproducir en esta sección el resultado perturbativo a orden más bajo para el loop de Polyakov mediante la técnica de reducción dimensional. Además, esto nos permitirá discutir algunas propiedades de las contribuciones perturbativas de orden superior.

4.2.1. Resultados perturbativos

El (valor esperado del) loop de Polyakov se define como

$$L(T) = \left\langle \frac{1}{N_c} \text{tr}_c \mathcal{T} \left(e^{ig \int_0^{1/T} dx_0 A_0(\vec{x}, x_0)} \right) \right\rangle, \quad (4.1)$$

donde $\langle \rangle$ indica valor esperado en el vacío, tr_c es la traza de color (en representación fundamental), y \mathcal{T} indica ordenación a lo largo del camino de integración. A_0 es la componente temporal del campo gluónico (en tiempo euclídeo). El campo gauge $A_0(x)$ es un elemento del álgebra de Lie de $SU(N_c)$, y puede ser representado como $A_0 = \sum_a T_a A_{0,a}$, donde T_a son los generadores hermíticos del álgebra de Lie de $SU(N_c)$ en la representación fundamental. En lo sucesivo consideraremos la normalización estándar $\text{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2$.

Al ser un operador compuesto, el loop de Polyakov es susceptible de ser renormalizado. En refs. [83, 84, 85, 86] se estudia la renormalizabilidad del loop de Polyakov en el contexto de teoría de perturbaciones, donde se muestra el hecho de que se puede renormalizar perturbativamente, sin mezcla con otros operadores. El cálculo perturbativo de $L(T)$ en gluodinámica pura a temperaturas altas fue realizado a comienzos de los años ochenta por Gava y Jengo [23]. Tras incluir efectos de polarización de vacío a temperatura finita a través de la inserción de la masa de Debye, el término de orden más bajo resulta ser el $\mathcal{O}(g^3)$, en lugar del que en un principio cabría esperar $\mathcal{O}(g^2)$. Este cálculo se hizo en el gauge de Landau hasta NLO ($\mathcal{O}(g^4)$). El resultado es

$$L(T) = 1 + \frac{1}{16\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} g^2 \frac{m_D}{T} + \frac{N_c^2 - 1}{32\pi^2} g^4 \left(\log \frac{m_D}{2T} + \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}(g^5). \quad (4.2)$$

Este resultado es muy antiguo, y hoy en día no se dispone de cálculos a órdenes superiores. La masa de Debye m_D controla el apantallamiento de los modos cromoeléctricos en el plasma, y a un loop se escribe [63]

$$m_D = gT(N_c/3 + N_f/6)^{1/2}. \quad (4.3)$$

La dependencia en temperatura de la constante de acoplamiento g se obtiene del análisis estándar del grupo de renormalización, y es de esperar que (4.2) constituya una buena aproximación a temperatura suficientemente alta. Notemos que $L(T)$ se hace mayor que 1, lo cual implica que el loop de Polyakov renormalizado no es una matriz unimodular.

4.2.2. Reducción dimensional

En la sección 3.6 se obtuvo la acción de la teoría efectiva dimensionalmente reducida de QCD a un loop y en el gauge de Landau. Esta teoría queda descrita por la acción tridimensional $\int d^3x \mathcal{L}_3(\vec{x})$ [44, 55, 65, 66], donde

$$\begin{aligned} T\mathcal{L}_3(\vec{x}) = & m_D^2 \text{tr}(A_0^2) + \frac{g^4(\mu)}{4\pi^2} (\text{tr}(A_0^2))^2 + \frac{g^4(\mu)}{12\pi^2} (N_c - N_f) \text{tr}(A_0^4) \\ & + \frac{g^2(\mu)}{g_E^2(T)} \text{tr}([D_i, A_0]^2) + \frac{g^2(\mu)}{g_M^2(T)} \frac{1}{2} \text{tr}(F_{ij}^2) + T\delta\mathcal{L}_3. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$g(\mu)$ es la constante de acoplamiento de QCD en el esquema $\overline{\text{MS}}$ (usada también en la fórmula del loop de Polyakov (4.2) y en la masa de Debye (4.3))

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = 2\beta_0 \log(\mu/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}) , \quad \beta_0 = (11N_c/3 - 2N_f/3)/(4\pi)^2 \quad (4.5)$$

y las constantes de acoplamiento cromoeléctricas y cromomagnéticas vienen dadas por ec. (3.89). El término restante $\delta\mathcal{L}_3$ es no renormalizable y contiene operadores de dimensión 6 o mayores (ver ec. (3.94)). Además existen términos que contribuyen más allá de un loop y términos constantes (indpendientes de los campos) que son relevantes para el cálculo de la presión.

Para obtener el loop de Polyakov a orden más bajo necesitaremos únicamente los términos de masa y de energía cinética del campo A_0 (términos primero y cuarto respectivamente en ec. (4.4)). Para simplificar la notación, en el resto del capítulo trabajaremos con un campo A_0 reescalado

$$A_0(\vec{x}) = \frac{g(\mu)}{g_E(T)} A_0^{\overline{\text{MS}}}(\vec{x}) , \quad (4.6)$$

donde $A_0^{\overline{\text{MS}}}$ es el campo gluónico que aparece en fórmulas previas. A todos los efectos, el uso de la masa de Debye y la fórmula del loop de Polyakov ec. (4.1) que depende del producto de gA_0 , es equivalente al uso del nuevo campo A_0 junto con $g_E(T)$ como constante de acoplamiento. A partir de ahora denotaremos esta constante como $g(T)$ o simplemente g ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(\vec{x}) &= \frac{m_D^2}{T} \text{tr}(A_0^2) + \frac{1}{T} \text{tr}([D_i, A_0]^2) + \dots , \\ \frac{1}{g^2(T)} &= 2\beta_0 \log(T/\Lambda_E) , \end{aligned} \quad (4.7)$$

con

$$\Lambda_E = \frac{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}}{4\pi} \exp\left(\gamma_E - \frac{N_c + 8N_f(\log 2 - 1/4)}{22N_c - 4N_f}\right) . \quad (4.8)$$

En el cálculo de la presión de QCD se puede fijar el gauge de cualquier forma para integrar los modos no estacionarios. Por esta razón se suelen utilizar los gauges covariantes, pues los cálculos resultan más fáciles en estos gauges. Para el loop de Polyakov la situación es diferente, pues los gauges estáticos resultan más convenientes [63]. Tal y como se muestra en el apéndice A, un gauge estático es aquel en el que $\partial_0 A_0 = 0$, y no implica pérdida de generalidad ya que este gauge siempre existe. En el gauge estático la ec. (4.1) se escribe

$$L(T) = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr} e^{igA_0(\vec{x})/T} \rangle . \quad (4.9)$$

Notar que L únicamente depende de los modos estacionarios de A_0 , de modo que si integramos los modos no estacionarios no existirá pérdida de información en el loop de Polyakov. El modo estacionario $A_0(\vec{x})$ coincide con el logaritmo de loop de Polyakov únicamente en el gauge estático. Por desgracia, el resultado perturbativo de $\mathcal{L}_3(\vec{x})$, ec. (4.7), sólo

se conoce en los gauges covariantes. Por tanto, en un gauge covariante la acción efectiva de los modos estacionarios resulta insuficiente para obtener los valores esperados del loop de Polyakov. El uso del modo estacionario en (4.9) equivale a eliminar el operador de ordenación a lo largo del camino de integración \mathcal{T} en la definición del loop de Polyakov (4.1), dando lugar a una dependencia en el gauge. No obstante, como mostraremos en la subsección siguiente, la dependencia en el gauge únicamente afectará más allá de NLO, y seremos capaces de reproducir los dos términos de (4.2) mediante el uso de las fórmulas de [60] para la densidad de energía de vacío.

Si hacemos un desarrollo en serie de $L(T)$ en ec. (4.9), se obtiene

$$L(T) = 1 - \frac{g^2}{2T^2} \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}(A_0^2) \rangle + \frac{g^4}{24T^4} \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}(A_0^4) \rangle + \dots \quad (4.10)$$

En esta fórmula hemos usado que $\text{tr}(A_0)$ es cero. Es de esperar que el resto de órdenes impares en el campo gluónico se anulen debido a la simetría de conjugación de QCD, $A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu^T(x)$. La contribución de orden más bajo $\langle \text{tr}(A_0^2) \rangle$ tiene dimensiones de masa al cuadrado, de modo que esta contribución no existiría en un cálculo a temperatura cero. A temperatura finita debe de escalar como T^2 (módulo correcciones radiativas con una débil dependencia en T , que incluyen el running de la constante de acoplamiento y dimensiones anómalas).

Sea $D_{00}(\vec{k})\delta_{ab}$ la componente temporal del propagador en espacio de momentos para los campos gauge normalizados canónicamente $T^{-1/2}A_{0,a}(\vec{x})$. Integrando el propagador obtenemos el valor esperado de los campos

$$\langle A_{0,a}^2 \rangle = (N_c^2 - 1)T \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} D_{00}(\vec{k}) . \quad (4.11)$$

A orden más bajo en teoría de perturbaciones, el propagador se escribe

$$D_{00}^{\text{Pert}}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m_D^2} . \quad (4.12)$$

Si introducimos (4.12) en (4.11) obtenemos la contribución perturbativa de orden más bajo para el condensado gluónico de dimensión dos (hacemos uso de las reglas de regularización dimensional)

$$\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{Pert}} = -(N_c^2 - 1) \frac{T m_D}{4\pi} . \quad (4.13)$$

Este resultado introducido en ec. (4.10) (y usando que $\text{tr}(A_0^2) = A_{0,a}^2/2$) reproduce el valor perturbativo de $L(T)$ hasta orden $\mathcal{O}(g^3)$.

En la figura 4.1 se compara el valor perturbativo de $L(T)$ en ec. (4.2) con datos del retículo obtenidos recientemente en gluodinámica pura y $N_c = 3$ [21]. Podemos observar que en la región de temperatura alta, T próximo a $6T_c$, los valores del retículo para $L(T)$ son mayores que 1, tal y como predice el cálculo perturbativo. Además el valor numérico en esta región es consistente con teoría de perturbaciones. Este acuerdo desaparece rápidamente a medida que nos aproximamos a la temperatura crítica: los datos del retículo

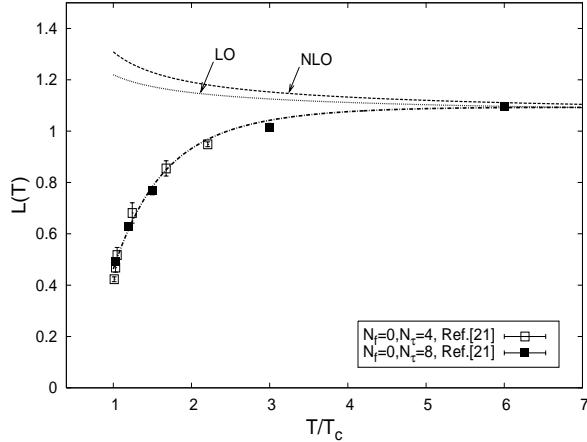


Figura 4.1: Dependencia en temperatura del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica ($N_c = 3$). Los datos en el retículo son de ref. [21]. Para comparar, se muestran los resultados perturbativos LO y NLO de ec. (4.2). La curva es un ajuste del parámetro b en ec. (4.32) con los datos del retículo.

decrecen hasta producir una transición de fase (en este caso de primer orden), mientras que la curva perturbativa crece ligeramente. Como es de esperar, el resultado perturbativo es lentamente variable con la temperatura, pues esta variación procede de correcciones radiativas logarítmicas.

4.2.3. Resultados perturbativos a órdenes superiores

En la sección (4.2.2) discutimos la técnica de reducción dimensional y llegamos a obtener el valor perturbativo de $L(T)$ a orden más bajo en teoría de perturbaciones $\mathcal{O}(g^3)$. En este apartado vamos a hacer una discusión de las contribuciones de órdenes superiores al loop de Polyakov.

El lagrangiano renormalizable tridimensional tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{\text{ren}}(\vec{x}) &= \frac{1}{2} \text{tr}(F_{ij}^2) + \text{tr}([D_i, \mathcal{A}_0]^2) + m_3^2 \text{tr}(\mathcal{A}_0^2) + \lambda_1 (\text{tr}(\mathcal{A}_0^2))^2 + \lambda_2 \text{tr}(\mathcal{A}_0^4), \\ D_i &= \partial_i - ig_3 \mathcal{A}_i. \end{aligned} \quad (4.14)$$

con $\mathcal{A}_\mu \sim T^{-1/2} A_\mu$, $m_3 \sim gT$, $g_3 \sim T^{1/2} g$, y $\lambda_1 \sim \lambda_2 \sim g^4 T$. Para $N_c = 2$ y $N_c = 3$ el término λ_2 es redundante y podemos considerar $\lambda_2 = 0$.

La densidad de energía de vacío de esta teoría, $\epsilon(g_3, m_3, \lambda_1)$, ha sido calculada hasta cuatro loops en [60], con g_3 , m_3 y λ_1 como parámetros independientes. Esto permite calcular los condensados $\langle A_0^2 \rangle$ y $\langle A_0^4 \rangle$ tomando derivadas de ϵ con respecto a m_3^2 y λ_1 respectivamente, lo cual va a permitir obtener sucesivos órdenes perturbativos del loop de Polyakov mediante ec. (4.10).

La estructura general de la densidad de energía de vacío es [60]

$$\epsilon(g_3, m_3, \lambda_1) = \sum_{\ell \geq 1} \sum_{k=0}^{\ell-1} f_{\ell k} m_3^{4-\ell} g_3^{2k} \lambda_1^{\ell-k-1}, \quad (4.15)$$

donde ℓ indica el número de loops y los coeficientes $f_{\ell k}$ dependen logarítmicamente de m_3 . Para las magnitudes que aparecen en (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{T^2} \langle \text{tr}(A_0^2) \rangle &\sim \frac{g^2}{T} \frac{\partial \epsilon(g_3, m_3, \lambda_1)}{\partial m_3^2} \sim \sum_{\ell \geq 1} \sum_{n=\ell+2}^{3\ell} g^n, \\ \frac{g^4}{T^4} \langle \text{tr}(A_0^4) \rangle &\sim \frac{g^4}{T^2} \frac{\partial \epsilon(g_3, m_3, \lambda_1)}{\partial \lambda_1} \sim \sum_{\ell \geq 2} \sum_{n=\ell+4}^{3\ell} g^n. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Teniendo en cuenta que en ref. [60] se calcula la densidad de energía de vacío hasta 4 loops, la primera contribución a $L(T)$ que no se tendría en cuenta sería $\mathcal{O}(g^7)$, correspondiente a $\ell = 5$ en el término $\langle \text{tr}(A_0^2) \rangle$. La contribución de orden más bajo de $\langle \text{tr}(A_0^4) \rangle$ a 5 loops es $\mathcal{O}(g^9)$, y la primera contribución de $\langle \text{tr}(A_0^6) \rangle$, no disponible en el cálculo, comenzaría en $\mathcal{O}(g^9)$ a 3 loops. Esto quiere decir que en principio, con el resultado de [60] se podría extender el resultado perturbativo de $L(T)$ hasta $\mathcal{O}(g^6)$. Desafortunadamente las relaciones que conectan los parámetros de la teoría dimensionalmente reducida m_3 , g_3 y λ_1 con los correspondientes de QCD en cuatro dimensiones solamente se conocen en gauges covariantes, para los cuales la relación (4.9) no se cumple. En particular, la razón $g(\mu)/g_E(T)$ tiene una dependencia en el gauge que comienza en $\mathcal{O}(g^2)$ para las contribuciones de dos loops, lo cual daría lugar a una dependencia en el gauge a $\mathcal{O}(g^5)$ en $L(T)$.

Deberíamos estudiar asimismo la contribución de los términos no renormalizables $\delta\mathcal{L}_3$. Los términos de orden más bajo de ese tipo son [44, 55]

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{g^2}{T^2} \text{tr}([D_i, F_{\mu\nu}]^2) + \frac{g^3}{T^{3/2}} \text{tr}(F_{\mu\nu}^3) + \frac{g^4}{T} \text{tr}(A_0^2 F_{\mu\nu}^2). \quad (4.17)$$

Si tenemos en cuenta la relación efectiva $D_i \sim gT$, el primer término corresponde a una corrección $\mathcal{O}(g^4)$ en la energía cinética, de modo que comenzará a contribuir a $\mathcal{O}(g^7)$ como una corrección del LO en $L(T)$. Los otros términos son de orden superior.

Teniendo en cuenta las relaciones (4.16) y la ecuación (4.10), reproducimos el término de orden $\mathcal{O}(g^4)$ que aparece en el resultado de Gava y Jengo, ec. (4.2). Encontramos asimismo la siguiente contribución de orden $\mathcal{O}(g^5)$ en $L(T)$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(g^5) &= \frac{(N_c^2 - 1)g^4 T m_D}{384\pi^3} \left[-\frac{m_D^2}{(gT)^2} (9Q + 3c_m + 4N_f + 2N_c(6\zeta - 7)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N_c^2}{4} (89 + 4\pi^2 - 44\log 2) \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$Q = \frac{22}{3} N_c \log \frac{\mu}{\mu_T} - \frac{4}{3} N_f \log \frac{4\mu}{\mu_T}, \quad c_m = \frac{10N_c^2 + 2N_f^2 + 9N_f/N_c}{6N_c + 3N_f}, \quad (4.19)$$

y $\mu_T = 4\pi e^{-\gamma_E} T$ es la escala térmica estándar que surge en la reducción dimensional perturbativa en el esquema $\overline{\text{MS}}$. m_D viene dada por ec. (4.3). ζ es un parámetro que depende del gauge.

Si bien los términos $\mathcal{O}(g^5) + \mathcal{O}(g^6)$ tienen una dependencia en el gauge, numéricamente se observa que no producen una contribución sustancial a $L(T)$, pues son cualitativamente y cuantitativamente similares a los obtenidos en [23]. Nuevamente la naturaleza radiativa de estos términos perturbativos produce una dependencia logarítmica en temperatura que es muy plana.

Encontramos que teoría de perturbaciones resulta ser incapaz de explicar el comportamiento que se observa en el retículo del loop de Polyakov en el régimen $T_c < T < 6T_c$ (ver figura 4.1), y este hecho refuerza la necesidad de incluir en el cálculo efectos no perturbativos.

4.2.4. Ansatz gaussiano

Con objeto de simplificar el tratamiento, consideraremos que en la fase de desconfinamiento el campo $A_0(\vec{x})$ se encuentra suficientemente bien descrito por una distribución gaussiana. En este caso, todos los valores esperados conexos de A_0 más allá de $\langle A_0^2 \rangle$ se anulan, y haciendo uso del desarrollo estándar en cumulantes, se encuentra

$$L = \exp \left[-\frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle}{4N_c T^2} \right] \quad (4.20)$$

de modo que²

$$\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{Pert}} = -\frac{N_c^2 - 1}{4\pi} m_D T - \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{8\pi^2} g^2 T^2 \left(\log \frac{m_D}{2T} + \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}(g^3). \quad (4.21)$$

De (4.16) se observa que la contribución a $L(T)$ proveniente de $\langle A_0^4 \rangle$ comienza en $\mathcal{O}(g^6)$, de modo que el ansatz gaussiano será válido hasta orden $\mathcal{O}(g^5)$ a temperatura suficientemente alta, donde la teoría se convierte en débilmente interactuante debido a la propiedad de libertad asintótica. Es exacto en el límite de N_c grande ya que los valores esperados conexos de órdenes mayores se encuentran suprimidos por potencias de $1/N_c$. $A_{0,a}^2$ escala como $N_c^2 - 1$, de modo que L tiene un límite bien definido para $N_c \rightarrow \infty$, con la prescripción estándar de mantener fijo $g^2 N_c$.

Los cálculos en el retículo muestran una distribución gaussiana para el loop de Polyakov [87]. El ansatz gaussiano es equivalente a desarrollar la exponencial en ec. (4.9), promediar sobre grados de libertad de color y finalmente hacer uso de la hipótesis de saturación de vacío ($\langle A_0^{2k} \rangle = (2k-1)!! \langle A_0^2 \rangle^k$), usada habitualmente en las reglas de suma de QCD a temperatura cero. En este contexto el loop de Wilson fue discutido en ref. [88] mediante el uso del condensado gluónico estándar de dimensión 4, dando como resultado un término

²Esta fórmula es válida también para la teoría unquenched, puesto que hasta este orden N_f únicamente aparece a través de la masa de Debye.

proporcional al cuadrado del área del contorno para contornos pequeños. El problema fue discutido nuevamente en ref. [89] en el contexto de condensados de dimensión 2, dando lugar a una ley proporcional al área. Esto se muestra de acuerdo con la observación de ref. [75] de que los condensados de dimensión 2 podrían considerarse de manera efectiva como masas gluónicas taquiónicas, lo cual proporciona el comportamiento a cortas distancias de las fuerzas que son confinantes a distancias grandes.

4.3. Contribuciones no perturbativas en el loop de Polyakov

En la sección 4.2 de este capítulo hemos hecho un estudio de las contribuciones perturbativas para el loop de Polyakov, y encontramos que teoría de perturbaciones reproduce únicamente los datos del retículo a temperaturas suficientemente altas ($T \sim 6T_c$). Este hecho aparece ilustrado en la figura 4.1.

Nuestra motivación para dar cuenta de las contribuciones no perturbativas puede entenderse bien si se muestra la analogía que existe con el potencial quark-antiquark a temperatura cero en QCD quenched. Este potencial se puede obtener a partir de la función de correlación de dos líneas de Wilson. El régimen perturbativo del potencial $V_{\bar{q}q}(r)$ es el correspondiente a separaciones pequeñas, donde el potencial es aproximadamente coulombiano. Para separaciones del orden de $1/\Lambda_{\text{QCD}}$ (no existe otra escala en gluodinámica) surge un término lineal confinante que comienza a ser dominante [81]. Estas dos contribuciones del potencial evolucionan bajo el grupo de renormalización siguiendo una ley logarítmica. Por tanto, módulo correcciones radiativas, $rV_{\bar{q}q}(r)$ está formado por una parte perturbativa que es constante y por un término del tipo $\Lambda_{\text{QCD}} r^2$ que es no perturbativo. De manera análoga, a temperaturas grandes podemos considerar el comportamiento de la magnitud adimensional $\langle \text{tr}(A_0^2) \rangle / T^2$, que también está directamente relacionada con la función de correlación de dos líneas de Wilson térmicas. El análogo de la escala r en el caso anterior es aquí la escala $1/T$, y por supuesto para T grande la magnitud $\langle \text{tr}(A_0^2) \rangle / T^2$ es perturbativa y plana (módulo una dependencia logarítmica). A temperaturas no tan grandes habría que considerar la posibilidad de que surjan términos no perturbativos en potencias del tipo $\Lambda_{\text{QCD}}^2 / T^2$.

Con objeto de dar cuenta de contribuciones no perturbativas provenientes de condensados gluónicos, consideraremos en el propagador $D_{00}(\vec{k})$ nuevos términos fenomenológicos con parámetros dimensionales positivos. En concreto

$$D_{00}(\vec{k}) = D_{00}^{\text{Pert}}(\vec{k}) + D_{00}^{\text{No Pert}}(\vec{k}), \quad (4.22)$$

con el término no perturbativo

$$D_{00}^{\text{No Pert}}(\vec{k}) = \frac{m_G^2}{(\vec{k}^2 + m_D^2)^2}. \quad (4.23)$$

Este ansatz es equivalente al que se realiza a temperatura cero en presencia de condensados [74, 75]. Si introducimos ec. (4.23) en ec. (4.11), podemos ver que este término nuevo genera

una contribución no perturbativa para el condensado:

$$\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} = \frac{(N_c^2 - 1) T m_G^2}{8\pi m_D}. \quad (4.24)$$

Si suponemos que el parámetro m_G es independiente de la temperatura (salvo correcciones radiativas), el condensado será asimismo T-independiente (módulo esas mismas correcciones radiativas). En términos del condensado, la contribución no perturbativa al propagador se escribe

$$D_{00}^{\text{No Pert}}(\vec{k}) = \frac{8\pi}{N_c^2 - 1} \frac{m_D}{T} \frac{\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}}{(\vec{k}^2 + m_D^2)^2}. \quad (4.25)$$

Notar que un condensado positivo $\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$ indica lo que sería una masa gluónica taquiónica $-m_G^2$, al igual que en ref. [75].

Si hacemos uso del ansatz gaussiano, ec. (4.20), y sumamos las contribuciones perturbativa y no perturbativa de $\langle A_{0,a}^2 \rangle$, se obtiene

$$-2 \log L = \frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{Pert}}}{2N_c T^2} + \frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}}{2N_c T^2}. \quad (4.26)$$

El hecho de que $\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{Pert}}$ escale como T^2 mientras que $\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$ sea independiente de la temperatura (módulo correcciones radiativas), sugiere que la fórmula anterior se pueda reescribir de la siguiente forma

$$-2 \log L = a + b \left(\frac{T_c}{T} \right)^2, \quad (4.27)$$

donde se espera que los parámetros a y b tengan una dependencia débil en temperatura. Esta fórmula muestra que la contribución no perturbativa da lugar a una dependencia en temperatura que sigue una ley de potencia, la cual no está presente en los cálculos perturbativos.

4.4. Comparación con datos del retículo

Recientemente se han desarrollado diferentes métodos para renormalizar el loop de Polyakov en el retículo. Por supuesto, estos cálculos son completamente no perturbativos. Uno de los procedimientos de renormalización se basa en el cálculo de funciones de correlación singlete y octete a temperatura finita de una pareja de quark y antiquark pesados [21, 22]

$$\begin{aligned} e^{-F_1(\vec{x}, T)/T + C(T)} &= \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr } \Omega^{\text{desn}}(\vec{x}) \Omega^{\dagger \text{desn}}(0) \rangle, \\ e^{-F_8(\vec{x}, T)/T + C(T)} &= \frac{1}{N_c^2 - 1} \langle \text{Tr } \Omega^{\text{desn}}(\vec{x}) \text{Tr } \Omega^{\dagger \text{desn}}(0) \rangle - \frac{1}{N_c(N_c^2 - 1)} \langle \text{Tr } \Omega^{\text{desn}}(\vec{x}) \Omega^{\dagger \text{desn}}(0) \rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

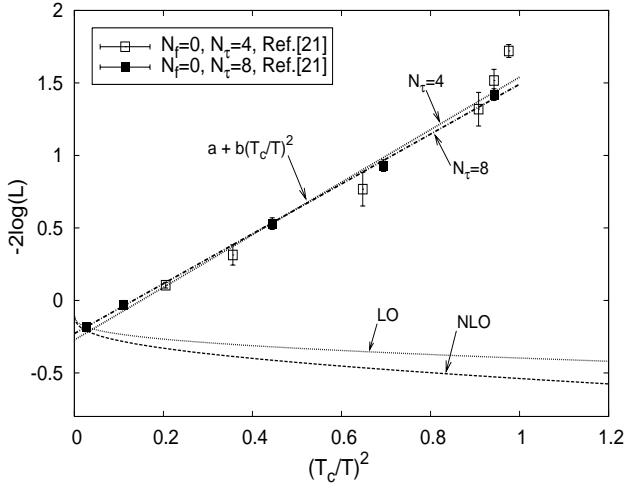


Figura 4.2: Logaritmo del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica ($N_c = 3$) frente al cuadrado de la inversa de la temperatura en unidades de la temperatura de transición de fase. Los datos del retículo son de ref. [21]. En los ajustes se usa ec. (4.27) con a y b como parámetros libres, y datos del retículo por encima de $1,03 T_c$ para $N_\tau = 4$ y $N_\tau = 8$. Para comparar, se muestran los resultados perturbativos LO y NLO para $N_f = 0$.

En estas fórmulas $\Omega^{\text{desn}}(\vec{x})$ indica el operador loop de Polyakov desnudo (sin renormalizar) localizado en el punto \vec{x} . Los dos loops de Polyakov se renormalizan mediante la extracción de la autoenergía del quark (que es dependiente de T , pero independiente de la separación), de tal modo que se reproduzca a pequeñas distancias el potencial quark-antiquark estándar a temperatura cero. El valor esperado del loop de Polyakov se obtiene considerando en las fórmulas anteriores el límite de separación grande. Si $\Omega_{\mathcal{R}}(\vec{x})$ denota el loop de Polyakov renormalizado en el punto \vec{x} ,

$$\frac{1}{N_c} \langle \text{Tr} \Omega_{\mathcal{R}}(\vec{x}) \Omega_{\mathcal{R}}^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{N_c} e^{-C(T)} \langle \text{Tr} \Omega^{\text{desn}}(\vec{x}) \Omega^{\dagger\text{desn}}(0) \rangle = e^{-F_1(r,T)/T} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} L^2(T). \quad (4.29)$$

Tal y como muestran los autores de [21], existe una ambigüedad en su procedimiento, que corresponde a añadir una constante al potencial quark-antiquark a temperatura cero. Esta ambigüedad se traduce en una ambigüedad aditiva en $F_1(r,T)$ en ec. (4.29), lo cual conduciría a un término del tipo $1/T$ en $\log(L(T))$. Para eliminar esta ambigüedad los autores han adoptado la prescripción de Cornell, que consiste en elegir $v_1 = 0$ en $V_{\bar{q}q}(r) \sim v_0/r + v_1 + v_2 r$.

4.4.1. Resultados en gluodinámica

En ref. [21] se hace un estudio del loop de Polyakov renormalizado, siguiendo el método señalado anteriormente, para gluodinámica pura y $N_c = 3$. Motivado por el resultado de nuestro modelo, ec. (4.27), en la figura 4.2 mostramos los datos en el retículo de $-2 \log L(T)$

frente a $(T_c/T)^2$. Se observa que los datos presentan un comportamiento prácticamente lineal. Este patrón es claramente diferente del que predice teoría de perturbaciones, que es mucho más plano, y muestra de manera inequívoca la existencia de la corrección en potencias de temperatura típica de un condensado de dimensión 2.

Si identificamos (4.27) con (4.26) obtenemos las siguientes relaciones:

$$a = -\frac{1}{8\pi} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} g^2 \frac{m_D}{T} - \frac{N_c^2 - 1}{16\pi^2} g^4 \left(\log \frac{m_D}{2T} + \frac{3}{4} \right) + \mathcal{O}(g^5), \quad (4.30)$$

$$g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} = 2N_c T_c^2 b. \quad (4.31)$$

Haremos un primer ajuste de los datos del retículo considerando para a el valor que predice teoría de perturbaciones a NLO (4.30), y dejando b como parámetro libre

$$-2 \log L = a^{\text{NLO}} + b \left(\frac{T_c}{T} \right)^2. \quad (4.32)$$

El resultado se muestra en la tabla 4.1.

N_τ	b	$g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} (\text{GeV})^2$	χ^2/DOF
4	2.20(6)	$(0.98(2))^2$	0.75
8	2.14(4)	$(0.97(1))^2$	1.43

Cuadro 4.1: Resultado del ajuste con ec. (4.32) de los datos en el retículo del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica [21]. Se han incluido datos por encima de $1,03 T_c$. El valor del condensado se ha obtenido a partir de b y la ecuación (4.31).

En el ajuste hemos incluido datos del retículo para temperaturas por encima de $1,03 T_c$. Hacemos uso de $T_c/\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 1,14(4)$ [81, 90], y $T_c = 270(2)$ MeV [90]. En el resto de esta sección usaremos la constante de acoplamiento que se obtiene de la función beta hasta tres loops y Λ_E de ec. (4.8) como parámetro de escala. Si suponemos que la diferencia entre los dos resultados del retículo ($N_\tau = 4$ y $N_\tau = 8$) es debida únicamente a efectos de cutoff finito, y consideramos que el efecto principal va como $1/N_\tau$, encontramos como estimación para $g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$ en el límite del continuo $(0.95(4) \text{ GeV})^2$.

Hemos considerado también un segundo ajuste de los datos del retículo considerando a y b parámetros libres. El resultado se muestra en la tabla 4.2.

N_τ	a	b	$g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} (\text{GeV})^2$	χ^2/DOF
4	-0.27(5)	1.81(13)	$(0.89(3))^2$	1.07
8	-0.23(1)	1.72(5)	$(0.87(2))^2$	0.45

Cuadro 4.2: Igual que tabla 4.1, con a y b como parámetros libres.

Los valores de χ^2/DOF son ligeramente mejores que los correspondientes al ajuste con a^{NLO} , y los valores del condensado son un poco más pequeños que antes. La correspondiente estimación del límite del continuo es $g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} = (0,84(6) \text{ GeV})^2$.

La identificación de a con el resultado perturbativo debe de funcionar mejor a temperaturas grandes. De ec. (4.30) se obtiene para la temperatura más alta $6T_c$

$$a^{\text{NLO}} = -0,22(1) \quad (T = 6T_c), \quad (4.33)$$

lo cual muestra un acuerdo razonable con los valores ajustados. Notar que las correcciones no perturbativas en potencias de T contribuyen poco a esta temperatura ($\sim 20\%$). Se puede concluir que el resultado perturbativo NLO evoluciona a temperaturas pequeñas más rápidamente de lo que sugiere el ajuste. Sería interesante tener en cuenta correcciones logarítmicas al valor del condensado y quizás ciertas correcciones de dimensión anómala para éste. Sin embargo, los datos actuales del retículo no permiten una extracción limpia de esos detalles.

En un intento por determinar una posible corrección de tipo $1/T^4$, hemos considerado en ec. (4.27) el término extra $c(T_c/T)^4$. El resultado del ajuste de los datos del retículo para $N_\tau = 8$ se muestra en la tabla 4.3.

N_τ	a	b	c	χ^2/DOF
8	a^{NLO}	2.18(20)	-0.04 ± 0.24	1.89
8	-0.22(2)	1.61(24)	0.13 ± 0.28	0.42

Cuadro 4.3: Resultado del ajuste de los datos del retículo del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica [21], con ec. (4.27) y un término extra $c(T_c/T)^4$. En la primera fila se han tomado b y c como parámetros libres, y se considera para a el valor perturbativo a NLO, ec. (4.30). En la segunda fila se toman a , b y c como parámetros libres.

El valor de c es compatible con cero en los dos casos, y los errores se superponen con los valores centrales de a y b ($N_\tau = 8$), en tab. 4.1 y tab. 4.2 respectivamente. Es necesario disponer de datos más precisos con objeto de identificar posibles contribuciones de condensados de dimensión 4.

Un ajuste de los datos excluye por completo la existencia de un término del tipo $1/T$ en $\log(L(T))$. Este término no tiene base teórica, pues no existe un condensado de dimensión uno. La ausencia de este término en los datos se debe a que los autores han adoptado la prescripción de Cornell para el potencial quark-antiquark.

4.4.2. Resultados unquenched

El loop de Polyakov renormalizado ha sido calculado también en ref. [22] en el caso unquenched para QCD con dos sabores, siguiendo el método explicado al comienzo de la sección 4.4. En la figura 4.3 mostramos estos datos para $N_\tau = 4$. En este caso, los datos siguen un comportamiento prácticamente lineal para temperaturas por encima de

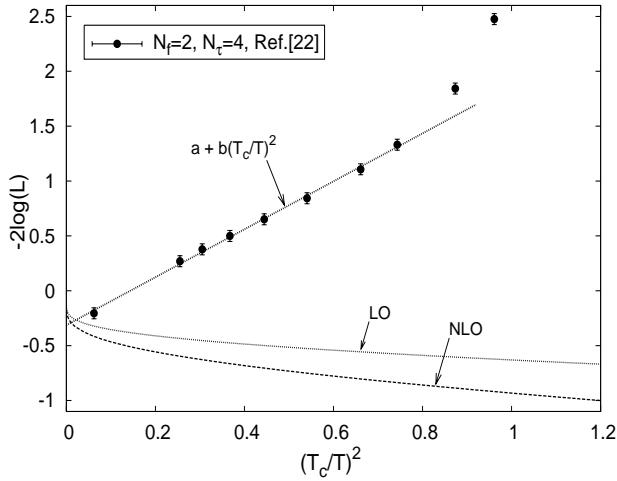


Figura 4.3: Logaritmo del loop de Polyakov renormalizado en QCD unquenched con dos sabores frente al cuadrado de la inversa de la temperatura en unidades de la temperatura de transición de fase. Los datos del retículo son de ref. [22]. En los ajustes se usa ec. (4.27) con a y b como parámetros libres, y datos del retículo por encima de $1,15 T_c$ para $N_\tau = 4$. Para comparar, se muestran los resultados perturbativos LO y NLO para $N_f = 2$.

$1,15 T_c$. Cerca de la temperatura de transición los datos comienzan a salirse del patrón de la ec. (4.27), lo cual es señal de que se hace necesaria una descripción más rica a medida que nos aproximamos a la transición de fase.

En la tabla 4.4 se muestran los resultados del ajuste de los datos del retículo para $T > 1,15 T_c$.

N_τ	a	b	$g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} (\text{GeV})^2$	χ^2/DOF
4	a^{NLO}	2.99(12)	$(0.86(2))^2$	1.87
4	-0.31(6)	2.19(13)	$(0.73(3))^2$	0.25

Cuadro 4.4: Resultado del ajuste con ec. (4.27) de los datos en el retículo del loop de Polyakov renormalizado en QCD con dos sabores [22]. Se han incluido datos por encima de $1,15 T_c$. En la primera fila se ha tomado b como parámetro libre, y se considera para a el valor perturbativo a NLO, ec. (4.30). En la segunda fila se toman a y b como parámetros libres.

Hemos usado $T_c/\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 0,77(9)$, con $T_c = 202(4)$ MeV [91] y $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 261(31)$ MeV [92]. En el ajuste hemos considerado el mismo peso para todos los puntos, y el valor de χ^2 corresponde a un error representativo de $\pm 0,05$ en $2 \log(L(T))$ (similar al caso quenched).

Al igual que en el caso quenched, el valor de a es consistente con el valor perturbativo

a temperatura grande

$$a^{\text{NLO}} = -0,35(2) \quad (T = 6 T_c). \quad (4.34)$$

La pérdida del patrón lineal para temperaturas por debajo de $1,15 T_c$ no se explica convenientemente si consideramos nuevos condensados de dimensión mayor. En efecto, hemos sido incapaces de extraer de los datos un condensado de dimensión 4. En la tabla 4.5 se muestra el resultado del ajuste para $T > 1,0 T_c$ al considerar en ec. (4.32) el término extra $c(T_c/T)^4$.

N_τ	a	b	c	χ^2/DOF
4	a^{NLO}	2.44(21)	1.07(19)	12.8

Cuadro 4.5: Ajuste de los datos en el retículo del loop de Polyakov renormalizado en QCD con dos sabores [22], con ec. (4.27) y un término extra $c(T_c/T)^4$. Se han incluido datos por encima de $1,0 T_c$.

El ajuste no es bueno, y la gran correlación que encontramos entre b y c hace que no se pueda extraer información fiable de este nuevo parámetro.

4.4.3. Otros resultados quenched

Recientemente ha aparecido en la literatura un método alternativo para renormalizar el loop de Polyakov en el retículo. En ref. [93] los autores consideran loops de Polyakov aislados en gluodinámica pura, y hacen una renormalización multiplicativa mediante la extracción de la autoenergía del quark. Si $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{x})$ denota el loop de Polyakov renormalizado en una representación irreducible arbitraria \mathcal{R} en el punto \vec{x} , se tiene³

$$\langle \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}} \langle \mathcal{P}^{\text{desn}}(\vec{x}) \rangle, \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{R}} = \exp \left(-\frac{m_{\mathcal{R}}^{\text{div}}}{T} \right), \quad (4.35)$$

donde se ha dividido por una constante de renormalización apropiada $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}}$. $\mathcal{P}^{\text{desn}}(\vec{x})$ indica el operador loop de Polyakov desnudo. Éste es un tipo estándar de renormalización de masa, si bien aquí se debe tener en cuenta que, puesto que la línea de Wilson es un operador no local, la constante de renormalización dependerá de la longitud del camino: en general, para un camino de longitud ℓ se tiene $\mathcal{Z}_{\mathcal{R}} = \exp(-m_{\mathcal{R}}^{\text{div}} \ell)$.

El problema principal reside en cómo determinar las masas divergentes de un modo no perturbativo. En un espacio-tiempo de cuatro dimensiones la masa divergente para un quark test $m_{\mathcal{R}}^{\text{div}}$ es lineal con el cutoff ultravioleta, el cual es proporcional al inverso del espaciado del retículo, a , esto es:

$$m_{\mathcal{R}}^{\text{div}} \sim \frac{1}{a}. \quad (4.36)$$

³En nuestra notación $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \Omega_{\mathcal{R}}(\vec{x})$.

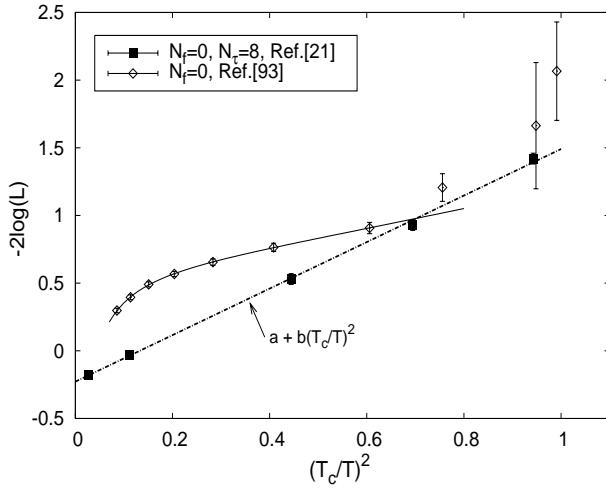


Figura 4.4: Logaritmo de loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica ($N_c = 3$) frente al cuadrado de la inversa de la temperatura en unidades de la temperatura de transición de fase. Los datos del retículo son de refs. [21] y [93]. Los ajustes usan ec. (4.27) con a y b como parámetros libres para [21], y ec. (4.39) con a como parámetro libre para [93].

Los autores consideran diferentes retículos, todos a la misma temperatura física T , pero con diferentes valores del espaciado a . Puesto que el número de puntos en la dirección temporal $N_\tau = 1/(aT)$ es diferente en estos retículos, obtienen la masa divergente am_R^{div} mediante comparación de los valores del loop de Polyakov desnudo en los diversos retículos.

Siguiendo este método, los autores de [93] calculan el loop de Polyakov renormalizado en varias representaciones de SU(3). Nuestro interés se centra en la representación fundamental, y cuando comparamos con los datos de [21] encontramos que ambos resultados difieren cualitativamente, principalmente para temperaturas por encima de $1,3 T_c$. En la figura 4.4 se muestran los dos conjuntos de datos.

El origen de la discrepancia entre ambos resultados no está del todo claro, aunque los autores de [93] no excluyen la posibilidad de que se deba a efectos del espaciado finito del retículo, que no hayan sido tenidos en cuenta de manera conveniente.

Existen varias razones para pensar que los resultados de [21] son más fiables. Por una parte este método resulta técnicamente más simple y susceptible de ser comprobado. Los autores pueden comprobar que a cortas distancias los dos loops de Polyakov reproducen de una manera muy precisa el potencial quark-antiquark a temperatura cero como función de r para todas las temperaturas. El contacto entre el potencial a temperatura cero y el correspondiente a temperatura finita es casi total hasta una separación $r(T)$, relacionada con la masa de Debye, lo cual permite una determinación muy precisa del contratérmino $C(T)$ de ec. (4.29). Además, el cálculo está hecho para dos tamaños diferentes del retículo, $N_\tau = 4$ y $N_\tau = 8$ (también $N_\tau = 16$ en [94]), y los resultados muestran una dependencia muy pequeña en el cutoff, lo cual significa que el límite del continuo ha sido alcanzado.

El método de ref. [93] es técnicamente más complicado, pues necesita comparar tamaños

diferentes del retículo a la misma temperatura física T . La extracción del contratérmino es asimismo más compleja, pues el análogo de $C(T)$ en ec. (4.29) se escribe como una serie en potencias de T con coeficientes que deben de ser ajustados con los datos del loop de Polyakov desnudo. Por otra parte, desde el punto de vista del modelo que proponemos en nuestro trabajo, esperamos que las correcciones no perturbativas sean despreciables a las temperaturas más altas de los dos datos del retículo, pero únicamente [21] parece ser consistente con teoría de perturbaciones [23] a esas temperaturas.

El método de [93] renormaliza el logaritmo del loop de Polyakov siguiendo este esquema⁴

$$-\log L^{\text{desn}}(T) = f^{\text{div}} N_\tau + f^{\text{ren}} + f^{\text{lat}} N_\tau^{-1}, \quad (4.37)$$

donde

$$L^{\text{desn}}(T) = \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr } \Omega^{\text{desn}}(\vec{x}) \rangle, \quad L(T) = \frac{1}{N_c} \langle \text{Tr } \Omega_{\mathcal{R}}(\vec{x}) \rangle = e^{-f^{\text{ren}}}. \quad (4.38)$$

Podemos especular con esta fórmula suponiendo que los términos que dependen del cutoff no han sido extraídos completamente en los datos, o bien que después de haber sido extraídos permanezcan términos del mismo tipo a los extraídos. En concreto, consideraremos el siguiente patrón de ajuste

$$-2 \log L = a + b \left(\frac{T_c}{T} \right)^2 + \delta a_{-1} \frac{T_c}{T} + \delta a + \delta a_1 \frac{T}{T_c}. \quad (4.39)$$

En la tabla 4.6 se muestran los resultados del ajuste de los datos del retículo (figura 8 de ref. [93]) para el loop de Polyakov en la representación fundamental, en el régimen $1,3 T_c < T < 3,5 T_c$.

a	δa	$a + \delta a$	b	δa_{-1}	δa_1	χ^2/DOF
a^{NLO}	1.8 ± 1.8	—	1.4 ± 2.6	-1.0 ± 3.8	-0.29 ± 0.26	0.0349
—	—	1.6 ± 1.8	1.3 ± 2.6	-1.4 ± 3.8	-0.28 ± 0.26	0.0350

Cuadro 4.6: Resultado del ajuste con ec. (4.39) de los datos en el retículo del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica [93]. En la primera fila se ha tomado para a el valor a^{NLO} de ec. (4.30), y en la segunda se ha considerado a como parámetro libre.

Un hecho alentador es que el valor del condensado parece ser compatible con el obtenido en la sección 4.4.1 a partir de los datos de ref. [21]. No obstante, esta especulación no es totalmente concluyente y sería deseable un acuerdo entre los resultados de ambos grupos antes de sacar nuevas consecuencias.

⁴Nos vamos a limitar a analizar los datos correspondientes al loop de Polyakov en representación fundamental. En sec. 5.7 se discute el comportamiento del loop de Polyakov adjunto obtenido en el contexto de modelos de quarks quirales a temperatura finita.

4.4.4. Relación con otras determinaciones del condensado

Si bien nuestra determinación del condensado se ha hecho en el gauge estático y a temperatura finita, resulta tentador comparar con condensados a temperatura cero $g^2\langle A_{\mu,a}^2 \rangle$, calculados en la literatura en quenched QCD y en el gauge de Landau. En la tabla 4.7 se muestran algunos valores de este condensado obtenidos recientemente por diferentes procedimientos. El acuerdo entre ellos es aceptable.

Referencia	$g^2\langle A_{\mu,a}^2 \rangle$ (GeV) ²
Del propagador del gluón [77]	$(2,4 \pm 0,6)^2$
Del vértice simétrico de tres gluones [77]	$(3,6 \pm 1,2)^2$
De la cola del propagador del quark [78]	$(2,1 \pm 0,1)^2$
De la cola del propagador del quark [79]	$(3,0 - 3,4)^2$

Cuadro 4.7: Valores del condensado $g^2\langle A_{\mu,a}^2 \rangle$ a temperatura cero, en el gauge de Landau en quenched QCD.

A temperatura cero todas las componentes de Lorentz contribuyen de igual forma, lo cual sugiere un factor de conversión 4 al pasar de $g^2\langle A_{\mu,a}^2 \rangle$ a $g^2\langle A_{0,a}^2 \rangle$. Sin embargo, de acuerdo con ref. [74], en el gauge de Landau el condensado total escala como $D-1$, donde D es la dimensión del espacio euclídeo, lo cual sugiere un factor de conversión 3. En cualquier caso, si tenemos en cuenta tanto las incertidumbres de los datos del retículo como las teóricas, el acuerdo es significativo, pues estamos comparando resultados a temperaturas y gauges diferentes.

Podemos comparar asimismo nuestro resultado para el condensado gluónico con cálculos realizados a temperatura finita basados en el estudio de contribuciones no perturbativas de la presión en gluodinámica pura [80, 95]. Estos resultados conducen a

$$g^2\langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}} = (0,93(7) \text{ GeV})^2, \quad (4.40)$$

en el gauge de Landau.⁵ Todos estos análisis muestran un esquema coherente en su conjunto.

4.5. Energía libre de un quark pesado

El potencial quark-antiquark a temperatura finita se puede obtener a partir de la función de correlación de dos loops de Polyakov separados. Como sabemos, si se toma el límite de separación grande se obtiene el valor esperado del loop de Polyakov, ec. (4.29). En el límite de separación pequeña los efectos térmicos son despreciables, y este potencial coincide con el potencial quark-antiquark a temperatura cero.

⁵Este valor ha sido obtenido a partir de los datos del retículo de la figura 2 de ref. [80], y también de la figura 1 de ref. [95], en la región de temperaturas usada en nuestros ajustes de la sección 4.4.1.

Hasta ahora hemos aplicado nuestro modelo fenomenológico de ecs. (4.22)-(4.23) para dar cuenta de las correcciones no perturbativas en el loop de Polyakov. En esta sección aplicaremos este modelo para describir los datos del retículo de la energía libre de un quark pesado.

4.5.1. Contribuciones no perturbativas en la energía libre

El potencial quark-antiquark puede relacionarse con la amplitud de scattering correspondiente al intercambio de un único gluón. En el límite no relativista, para la energía libre en el canal singlete se tiene

$$F_1(\vec{x}, T) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} D_{00}(\vec{k}). \quad (4.41)$$

Podemos estudiar contribuciones no perturbativas en la energía libre aplicando el modelo que desarrollamos en la sección 4.3. Si sustituimos (4.22) en (4.41) obtenemos además de las contribuciones perturbativas a LO ($\mathcal{O}(g^2)$) y NLO ($\mathcal{O}(g^3)$), nuevas contribuciones no perturbativas⁶

$$F_1(r, T) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \left(\frac{g^2}{4\pi r} + \frac{1}{N_c^2 - 1} \frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}}{T} \right) e^{-m_D r} - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g^2 m_D}{4\pi} + \frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}}{2N_c T}. \quad (4.42)$$

Si consideramos el límite $r \rightarrow \infty$ en (4.42), se obtiene esencialmente el logaritmo del loop de Polyakov

$$F_\infty(T) \equiv F_1(r \rightarrow \infty, T) = -2T \log L(T) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g^2 m_D}{4\pi} + \frac{g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}}{2N_c T} + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.43)$$

Esta expresión coincide con ec. (4.27), teniendo en cuenta ec. (4.31) para b y ec. (4.30) hasta $\mathcal{O}(g^3)$ para a .

En el límite de temperatura cero, para lo cual consideramos $m_D r \rightarrow 0$ en (4.42), se tiene

$$F_1(r, T) \xrightarrow{T \rightarrow 0} -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g^2}{4\pi r} + \sigma r \equiv V_{\bar{q}q}(r), \quad (4.44)$$

donde

$$\sigma = \left(\frac{N_c}{3} + \frac{N_f}{6} \right)^{1/2} \frac{g^3 \langle A_{0,a}^2 \rangle_{T=0}}{2N_c}. \quad (4.45)$$

En esta expresión, $\langle A_{0,a}^2 \rangle_{T=0}$ denota el condensado a temperatura cero. En este límite se llega obviamente a la expresión del potencial quark-antiquark a temperatura cero [96]. El término de Coulomb es el resultado perturbativo estándar a LO, mientras que el segundo término es una contribución lineal no perturbativa bien conocida en la literatura. Ec. (4.44)

⁶Hacemos uso de las reglas de regularización dimensional y consideramos g independiente de \vec{k} .

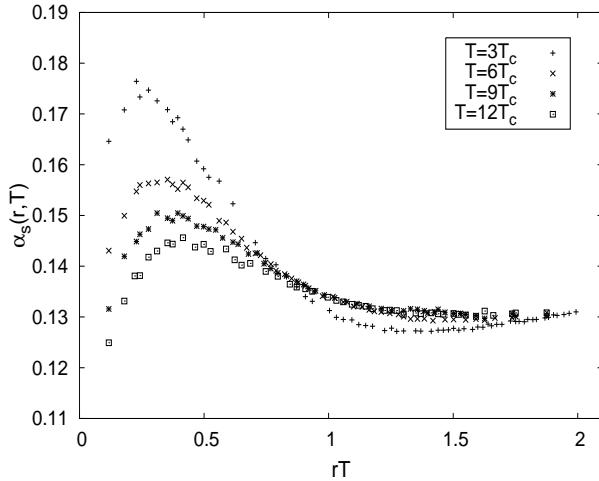


Figura 4.5: Constante de acoplamiento α_s frente a rT en gluodinámica pura ($N_c = 3$), para diferentes valores de T . Datos obtenidos a partir del ajuste de ec. (4.42) con los datos del retículo de la figura 5 de ref. [97].

con $g = \pi/2$ corresponde al modelo de cuerda bosónica, y reproduce los datos del retículo para $V_{\bar{q}q}(r)$ en el rango $0,75 \text{ GeV}^{-1} \leq r \leq 4 \text{ GeV}^{-1}$ con un error del 1% [96]. Nuestro modelo predice un valor concreto para la tensión de la cuerda σ .

Como vemos, el modelo predice para la energía libre unos comportamientos asintóticos totalmente coherentes con la fenomenología conocida. Esto refuerza nuestra suposición de existencia de contribuciones no perturbativas dadas por condensados gluónicos.

4.5.2. Comparación con datos del retículo

Podemos comparar nuestro resultado, ec. (4.42), con datos del retículo existentes para la energía libre. Puesto que conocemos el valor del condensado $g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$, esto nos va a permitir obtener la dependencia en r y T de la constante de acoplamiento $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$. En la figura 4.5 se muestra el valor de α_s frente a rT para diferentes valores de la temperatura. Las curvas se han obtenido tras ajustar ec. (4.42) con los datos de ref. [97] (figura 5) para gluodinámica ($N_c = 3$). Como valor de $g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$ consideramos el de la tabla 4.2 con $N_\tau = 8$.

Se observa un comportamiento suave para α_s y los valores son relativamente pequeños, lo cual contrasta con análisis recientes en el retículo a temperatura finita [22, 97]. Estos autores tienen en cuenta los efectos no perturbativos que observan en los datos del retículo de la energía libre mediante el uso de dos constantes: α_s y $\bar{\alpha}_s$; y esta última se diferencia del valor perturbativo por un factor multiplicativo:

$$\bar{\alpha}_s(r, T) = \lambda \alpha_s^{\text{Pert}}(r, T), \quad \lambda > 1. \quad (4.46)$$

Esto no tiene justificación teórica, y se trata en realidad de un esquema de análisis dema-

siado forzado, pues la constante λ no es tal, sino que tiene una dependencia en temperatura, de tal modo que vale 1 en el límite $T \rightarrow \infty$.⁷ Los valores que obtienen para las α_s 's son excesivamente grandes. Por el contrario, al considerar nuestro modelo, el ajuste de los datos del retículo de la energía libre resulta más natural. Notar que el comportamiento $r \rightarrow \infty$ de $\alpha_s(r, T)$ que se observa en fig. 4.5 es consistente con el hecho de que nuestro mejor ajuste de los datos del loop de Polyakov renormalizado sea con $a = \text{constante}$.

4.5.3. Analogía entre el loop de Polyakov y el potencial quark-antiquark a temperatura cero

Al comparar (4.43) con (4.44) se observa que las expresiones son similares desde un punto de vista formal, con la identificación $r \leftrightarrow 1/m_D$. Si consideramos que no existe dependencia en r y T para la constante de acoplamiento g y el condensado $\langle A_{0,a}^2 \rangle$, de ec. (4.43) a LO y de ec. (4.44) se deduce la siguiente propiedad

$$F_\infty(T) = V_{\bar{q}q}(r) \Big|_{r=1/m_D} . \quad (4.48)$$

Notar que (4.48) es válida sólo a LO en teoría de perturbaciones. Con objeto de comprobar numéricamente esta propiedad debemos tener en cuenta los diferentes comportamientos asintóticos de α_s . Usaremos la siguiente notación:

$$\alpha_s(r) \equiv \alpha_s(r, T = 0) , \quad \alpha_s(T) \equiv \alpha_s(r \rightarrow \infty, T) . \quad (4.49)$$

La propiedad (4.48) se escribirá ahora⁸

$$BF_\infty(T) = V_{\bar{q}q}(r) \Big|_{r=\gamma/T} , \quad (4.51)$$

donde

$$B = \left(\frac{\alpha_s(r)}{\alpha_s(T)} \right)^{3/4} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{4\pi(N_c/3 + N_f/6)}} \left(\frac{\alpha_s(r)}{\alpha_s(T)^3} \right)^{1/4} . \quad (4.52)$$

⁷El ajuste que se considera en ref. [22, 97] se hace en base a la fórmula

$$F_{\text{fit}}(r, T) = -\frac{4\alpha(T)}{3r} \exp\left(-\sqrt{4\pi\bar{\alpha}(T)} rT\right) + b(T) , \quad (4.47)$$

donde $\alpha(T)$ y $\bar{\alpha}(T)$ se usan como dos parámetros de ajuste independientes. Esta fórmula únicamente les permite ajustar el comportamiento de $F_1(r, T)$ a grandes distancias, en contraste con ec. (4.42), que reproduce correctamente también el comportamiento a r pequeño, que viene dado por $V_{\bar{q}q}(r)$.

⁸Esta propiedad también se puede expresar como

$$\rho F_\infty(T)/T = rV_{\bar{q}q}(r) \Big|_{r=\gamma/T} , \quad \rho = \gamma B , \quad (4.50)$$

donde B y γ están definidos en ec. (4.52).

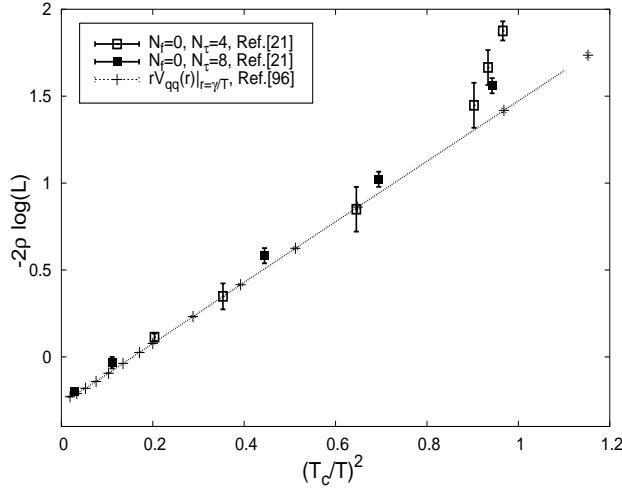


Figura 4.6: Logaritmo del loop de Polyakov renormalizado en gluodinámica ($N_c = 3$), reescalado con ρ , ec. (4.50), frente al cuadrado de la inversa de la temperatura en unidades de la temperatura de transición de fase. Los cuadrados negros y blancos corresponden a datos del retículo para el loop de Polyakov de ref. [21]. Las cruces corresponden a datos en el retículo del potencial quark-antiquark a temperatura cero, $rV_{\bar{q}q}(r)$, de ref. [96], y modificados con el cambio $r = \gamma/T$. La línea continua representa el modelo de cuerda bosónica que reproduce muy bien los datos del retículo para $rV_{\bar{q}q}(r)$ en la región $0,75 \text{ GeV}^{-1} \leq r \leq 4 \text{ GeV}^{-1}$. Con el cambio $r = \gamma/T$, esta región corresponde a $0,06 \leq (T_c/T)^2 \leq 1,6$.

La propiedad (4.51), con los valores de los parámetros B y γ dados en ec. (4.52), se ha deducido suponiendo que se cumple

$$\alpha_s(T) \langle A_{0,a}^2 \rangle_T^{\text{No Pert}} = \alpha_s(r) \langle A_{0,a}^2 \rangle_{T=0}. \quad (4.53)$$

El miembro izquierdo de la igualdad $\alpha_s(T) \langle A_{0,a}^2 \rangle_T^{\text{No Pert}}$ ha sido ajustado en la sección 4.4.1. El valor de $\alpha_s(r) \langle A_{0,a}^2 \rangle_{T=0}$ puede obtenerse a partir del valor conocido para la tensión de la cuerda, $\sigma = (0,42 \text{ GeV})^2$, y la ecuación (4.45). Numéricamente encontramos que ec. (4.53) es correcta con un error del 9 %. En la figura 4.6 se muestran los datos del retículo en gluodinámica para $-2\rho \log L$ frente a $(T_c/T)^2$ (ref. [21]), y se comparan con el potencial quark-antiquark a temperatura cero $rV_{\bar{q}q}(r)$ [96] después de haber considerado el cambio de variable que se especifica en ec. (4.50). Se observa un acuerdo excelente. Esta dualidad sugiere la existencia de una profunda analogía entre el potencial quark-antiquark a temperatura cero y el loop de Polyakov.

4.6. Conclusiones

Tres son los resultados importantes de este capítulo. Por una parte, tras analizar de manera conveniente los datos en el retículo del loop de Polyakov renormalizado por encima de la transición de fase de QCD, encontramos la contribución inequívoca de un condensado de dimensión 2 no perturbativo. Estas contribuciones no han sido consideradas hasta ahora en el contexto del loop de Polyakov, pero de hecho son dominantes en la región cercana a la transición de fase y permiten describir los datos de [21] en la fase de desconfinamiento hasta $1,03 T_c$ para gluodinámica y de [22] hasta $1,15 T_c$ para dos sabores.

En segundo lugar, hemos sugerido identificar este condensado con el condensado gluónico de dimensión 2 invariante BRST. El valor numérico de $g^2 \langle A_{0,a}^2 \rangle^{\text{No Pert}}$ que obtenemos a partir del loop de Polyakov es totalmente consistente con el valor que se deduce de la presión en gluodinámica [80, 95]. Además, aun habiendo definido el condensado en un gauge estático, su valor es significativamente próximo al valor de $g^2 \langle A_{\mu,a}^2 \rangle / 4$, obtenido a temperatura cero y en el gauge de Landau.

En tercer lugar, a la luz de estos resultados hemos encontrado una analogía entre el potencial quark-antiquark a temperatura cero y el loop de Polyakov, la cual se manifiesta en la relación que predice nuestro modelo entre la tensión de la cuerda y la pendiente del loop de Polyakov.

Capítulo 5

Modelos de Quarks Quirales a Temperatura Finita

En este capítulo estudiaremos algunos modelos de quarks quirales en el contexto de temperatura finita. Haciendo uso de nuestra técnica del heat kernel del capítulo 2, obtendremos el acoplamiento mínimo entre el loop de Polyakov gluónico y los quarks, lo cual solucionará algunas inconsistencias presentes en el tratamiento estándar de estos modelos a temperatura finita a nivel de un loop de quarks.

En primer lugar se estudiarán algunas propiedades de las transformaciones gauge a temperatura finita, lo cual nos llevará a considerar la simetría del centro como aquella que es generada por la acción de transformaciones gauge locales que son periódicas en la variable temporal salvo un elemento arbitrario del centro del grupo gauge. Para más detalles sobre este punto, ver apéndice A.

Posteriormente introduciremos dos modelos: modelo de Nambu–Jona-Lasinio y modelo quark espectral. Con ellos ilustraremos la problemática del tratamiento estándar a temperatura finita que se viene haciendo en los modelos de quarks quirales, y definiremos un modelo quark quiral con acoplamiento del loop de Polyakov que permitirá compatibilizar los resultados con los conocidos de Teoría Quiral de Perturbaciones. Calcularemos el lagrangiano quiral efectivo en estos modelos hasta $\mathcal{O}(p^4)$ en un desarrollo en momentos externos, y se estudiará la estructura que presenta este lagrangiano a temperatura finita.

Se hará un estudio de algunas correcciones de orden mayor, tales como correcciones más allá de un loop de quarks, correcciones gluónicas y correcciones locales en el loop de Polyakov. Finalmente se calcularán dos observables de interés: condensado quiral y valor esperado del loop de Polyakov; para lo cual se hará un tratamiento unquenched, y se estudiará el mecanismo de rotura de la simetría del centro que conduce a la transición de fase de QCD.

El capítulo está basado en las referencias [98, 99].

5.1. Transformaciones gauge grandes

En el apéndice A discutimos las transformaciones gauge en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos a temperatura finita. Al comienzo de este capítulo vamos a hacer un repaso de las principales propiedades de estas transformaciones, y la importancia que tienen para el estudio de los procesos de desconfinamiento de color en QCD. Esta sección podría haberse incluido igualmente en el capítulo 3, pero hemos preferido ponerla aquí para que el capítulo quede autoconsistente, pues como veremos los modelos de quarks quirales nos van a permitir una descripción de la transición de fase de QCD.

5.1.1. Transformaciones gauge a temperatura finita

En el formalismo de Tiempo Imaginario el espacio-tiempo es un cilindro topológico, de tal modo que el tiempo imaginario euclídeo está compactificado y las integrales funcionales se evalúan bajo la condición de que los campos sean periódicos para bosones y antiperiódicos para fermiones en el intervalo temporal $[0, \beta]$, donde $\beta = 1/T$. En un principio, sólo estarían permitidas las transformaciones gauge periódicas

$$g(x_0, \vec{x}) = g(x_0 + \beta, \vec{x}), \quad (5.1)$$

pues los campos de los quarks y los bosones son estables frente a este tipo de transformaciones. Un ejemplo de tal transformación para el grupo gauge $SU(N_c)$, en el gauge de Polyakov, $\partial_0 A_0 = 0$, con A_0 una matriz diagonal $N_c \times N_c$ de traza cero, es

$$g(x_0) = e^{i2\pi x_0 \Lambda / \beta}, \quad (5.2)$$

donde Λ es una matriz diagonal de enteros, de traza cero, en el espacio de color, esto es $\Lambda_{ij} = n_i \delta_{ij}$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{j=1}^{N_c} n_j = 0$. Esta transformación no puede estar próxima a la identidad, y en este sentido se considera una *transformación gauge grande*. Bajo ella, el campo A_0 transforma

$$A_0 \rightarrow A_0 + \frac{2\pi}{\beta} \Lambda, \quad (5.3)$$

de modo que en este gauge, la invariancia gauge se manifiesta en la periodicidad del campo gluónico A_0 . El problema de teoría de perturbaciones radica en que esta invariancia a temperatura finita se rompe explícitamente si se hace un desarrollo perturbativo de A_0 , ya que el desarrollo de una función periódica da lugar a un polinomio, que no es periódico.

Esta problemática de la invariancia gauge a temperatura finita conduce a la necesidad de tratar el campo A_0 de una manera no perturbativa, y a tales efectos se considera el loop de Polyakov (o línea de Wilson sin traza) como grado de libertad independiente $\Omega(x)$. Transforma de manera covariante en x bajo una transformación gauge periódica

$$\Omega(x) \rightarrow g^{-1}(x) \Omega(x) g(x), \quad (5.4)$$

y en el gauge de Polyakov, $\Omega(x) = e^{i\beta A_0(\vec{x})}$, es invariante gauge.

5.1.2. Simetría del centro

En gluodinámica pura a temperatura finita la condición (5.1) resulta en realidad demasiado restrictiva, y es posible considerar transformaciones gauge aperiódicas

$$g(x_0 + \beta, \vec{x}) = z g(x_0, \vec{x}), \quad z^{N_c} = 1. \quad (5.5)$$

z es un elemento de $\mathbb{Z}(N_c)$, que es el centro del grupo gauge $SU(N_c)$, esto es $z = e^{i2\pi n/N_c}$, $n \in \mathbb{Z}(N_c)$. Un ejemplo de esa transformación, en el gauge de Polyakov, es

$$g(x_0) = e^{i2\pi x_0 \Lambda / N_c \beta}, \quad (5.6)$$

donde $z = e^{i2\pi / N_c}$. El campo A_0 y el loop de Polyakov transforman bajo (5.6) como

$$A_0 \rightarrow A_0 + \frac{2\pi}{N_c \beta} \Lambda, \quad \Omega \rightarrow z\Omega. \quad (5.7)$$

Ω transforma como la representación fundamental del grupo $\mathbb{Z}(N_c)$. Físicamente el promedio térmico del loop de Polyakov (con traza) en la representación fundamental determina la energía libre relativa al vacío de un único quark,

$$e^{-\beta F_q(x)} = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}_c \Omega(x) \rangle. \quad (5.8)$$

De ec. (5.7) se deduce (por invariancia gauge) que

$$\langle \text{tr}_c \Omega(x) \rangle = z \langle \text{tr}_c \Omega(x) \rangle, \quad (5.9)$$

y por tanto $\langle \text{tr}_c \Omega(x) \rangle = 0$ en la fase en que la simetría del centro se preserva (fase de confinamiento). De manera más general, se obtiene

$$\langle \text{tr}_c \Omega^n(x) \rangle = 0 \quad \text{para} \quad n \neq mN_c, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.10)$$

La simetría del centro está espontáneamente rota por encima de una cierta temperatura ($T_D \approx 270$ MeV para $N_c = 3$), lo cual indica una fase de desconfinamiento. En esta fase $\langle \text{tr}_c \Omega(x) \rangle$ puede tomar valores diferentes de cero.

5.1.3. Rotura de la simetría del centro por fermiones

Las funciones de onda de los fermiones deben satisfacer condiciones antiperiódicas en la dirección temporal, esto es $q(\beta, \vec{x}) = -q(0, \vec{x})$, de modo que bajo una transformación del tipo (5.5)

$$q(\beta, \vec{x}) \rightarrow g(\beta, \vec{x})q(\beta, \vec{x}) = -zg(0, \vec{x})q(0, \vec{x}), \quad (5.11)$$

en lugar de $-g(0, \vec{x})q(0, \vec{x})$. Notar que $\bar{q}(n\beta)q(0) \rightarrow z^{-n}\bar{q}(n\beta)q(0)$, lo cual implica que en la fase confinante (con simetría del centro)

$$\langle \bar{q}(n\beta)q(0) \rangle = 0 \quad \text{para} \quad n \neq mN_c, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.12)$$

Esto genera una regla de selección en gluodinámica pura.

Los fermiones no son estables bajo las transformaciones del tipo (5.5) (únicamente lo son bajo transformaciones periódicas), de modo que rompen explícitamente la simetría del centro. Esto significa que la regla de selección (5.12) no se realiza en la práctica. No obstante, esta regla será importante en el contexto de modelos de quarks quirales en el límite de N_c grande, tal y como veremos más adelante.

5.2. Modelos de Quarks Quirales

En esta sección explicaremos dos modelos de quarks quirales de especial relevancia: el modelo de Nambu–Jona-Lasinio [29] y el modelo quark espectral [100].

5.2.1. Modelo Quark de Nambu–Jona-Lasinio

El lagrangiano euclídeo del modelo de Nambu–Jona-Lasinio generalizado es

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(\not{D} + \hat{m}_0)q + \frac{1}{2a_s^2} \sum_{a=0}^{N_f^2-1} ((\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}\lambda_a i\gamma_5 q)^2) + \frac{1}{2a_v^2} \sum_{a=0}^{N_f^2-1} ((\bar{q}\lambda_a \gamma_\mu q)^2 + (\bar{q}\lambda_a \gamma_\mu \gamma_5 q)^2), \quad (5.13)$$

donde $q = (u, d, s, \dots)$ representa el campo de los quarks con N_c colores y N_f sabores. Las λ 's son las matrices de Gell-Mann del grupo $U(N_f)$ y $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ es la matriz de masa de los quarks. $1/a_s^2$ y $1/a_v^2$ son las constantes de acoplamiento. Este lagrangiano es invariante bajo simetría global de color $SU(N_c)$.

El funcional generador en presencia de campos externos bosónicos (s, p, v, a) y fermiónicos ($\eta, \bar{\eta}$) es

$$Z_{\text{NJL}}[s, p, v, a, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \exp \left[- \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{NJL}} + \bar{q}(\not{\psi} + \not{a} \gamma_5 + s + i\gamma_5 p)q + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta) \right]. \quad (5.14)$$

Los símbolos s, p, v_μ y a_μ indican campos externos (en espacio de sabor) de tipo escalar, pseudoescalar, vector y axial, respectivamente. En función de los generadores del grupo de sabor $U(N_f)$, estos se escriben

$$s = \sum_{a=0}^{N_f^2-1} s_a \frac{\lambda_a}{2}, \quad \dots \quad (5.15)$$

La acción del modelo puede ser bosonizada mediante la introducción de campos bosónicos auxiliares, lo cual va a transformar la interacción local de cuatro puntos en un acoplamiento

tipo Yukawa [101]. El nuevo funcional generador es

$$Z_{\text{NJL}}[s, p, v, a, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \mathcal{D}S \mathcal{D}P \mathcal{D}V \mathcal{D}A \exp \left[- \int d^4x \left(\bar{q}(\mathcal{D} + \mathcal{V} + \mathcal{A}\gamma_5 + \mathcal{S} + i\gamma_5\mathcal{P})q \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_s^2}{4} \text{tr}((S - \hat{m}_0)^2 + P^2) - \frac{a_v^2}{4} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) + \bar{\eta}q + \bar{q}\eta \right) \right], \quad (5.16)$$

donde hemos escrito en notación corta $\mathcal{S} = s + S$, $\mathcal{P} = p + P$, $\mathcal{V} = v + V$, $\mathcal{A} = a + A$. En esta fórmula (S, P, V, A) representan campos bosónicos dinámicos internos de tipo escalar, pseudoescalar, vector y axial respectivamente. Los campos $\mathcal{S}(x)$, $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{V}_\mu(x)$ y $\mathcal{A}_\mu(x)$ son matrices en espacio interno (que se entiende como espacio de sabor), son la identidad en espacio de Dirac y operadores multiplicativos en el espacio x . $\mathcal{S}(x)$ es hermítico y $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{V}_\mu(x)$ y $\mathcal{A}_\mu(x)$ son antihermíticos. En la sección 5.4 extenderemos los campos $\mathcal{A}_\mu(x)$ y $\mathcal{V}_\mu(x)$ para que sean matrices no triviales en espacio de color, lo que nos permitirá acoplar el loop de Polyakov de color en el modelo. Por conveniencia en nuestro desarrollo hemos incluido la rotura explícita de la simetría quiral (proporcional a \hat{m}_0) en el término bosónico local. Podemos integrar formalmente sobre fermiones, lo cual conduce a

$$Z_{\text{NJL}}[s, p, v, a, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}P \mathcal{D}V \mathcal{D}A \text{Det}(\mathbf{D})^{N_c} \exp(\langle \bar{\eta} | \mathbf{D}^{-1} | \eta \rangle) \\ \exp \left[- \int d^4x \left(\frac{a_s^2}{4} \text{tr}((S - \hat{m}_0)^2 + P^2) - \frac{a_v^2}{4} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right) \right] \quad (5.17)$$

donde

$$\mathbf{D} = \mathcal{D} + \mathcal{V} + \mathcal{A}\gamma_5 + \mathcal{S} + i\gamma_5\mathcal{P} \quad (5.18)$$

es un operador de Dirac. Este operador se puede escribir en la forma

$$\mathbf{D} = \mathcal{D}_V + \mathcal{A}\gamma_5 + MU^{\gamma_5}, \quad (5.19)$$

donde $D_\mu^\nu = \partial_\mu + \mathcal{V}_\mu$ es la derivada covariante vector, M es la masa constituyente de los quarks, y U es una matriz en espacio de sabor que representa los octetos pseudoescalares de los mesones en la representación no lineal. Para tres sabores, $N_f = 3$, se escribe $U = e^{i\sqrt{2}\Phi/f_\pi}$, con

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

f_π es la constante de desintegración débil del píon en el límite quiral.

En lo que sigue consideraremos la acción efectiva a nivel de un loop de quarks y a nivel árbol para los mesones. En este caso

$$\Gamma_{\text{NJL}} = \Gamma_q[\mathbf{D}] + \Gamma_m, \quad (5.21)$$

donde

$$\Gamma_q[\mathbf{D}] = -N_c \text{Tr} \log(\mathbf{D}), \quad (5.22)$$

$$\Gamma_m = \int d^4x \left\{ \frac{a_s^2}{4} \text{tr}(S^2 + P^2) - \frac{a_s^2}{2} \text{tr}(\hat{m}_0 S) + \frac{a_s^2}{4} \text{tr}(\hat{m}_0^2) - \frac{a_v^2}{4} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right\} \quad (5.23)$$

En adelante nos vamos a referir al término $\Gamma_q[\mathbf{D}]$ como la contribución de los quarks a un loop. Éste será el término que calculemos como aplicación de nuestro desarrollo del heat kernel a temperatura finita.

La contribución de los quarks a la acción efectiva se puede separar en una parte γ_5 -par y otra γ_5 -impar, correspondiente a procesos de paridad normal y anormal, respectivamente. En espacio euclídeo, la primera corresponde a la parte real de la acción efectiva, y la segunda a la parte imaginaria. Introduciremos el operador

$$\mathbf{D}_5[\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{A}] = \gamma_5 \mathbf{D}[\mathcal{S}, -\mathcal{P}, \mathcal{V}, -\mathcal{A}] \gamma_5, \quad (5.24)$$

que en espacio euclídeo se corresponde con el hermítico conjugado \mathbf{D}^\dagger . La contribución de paridad normal es cuadráticamente divergente y puede ser regularizada de un modo invariante gauge quiral mediante el esquema de Pauli-Villars [56]

$$\Gamma_q^+[\mathbf{D}] = -\frac{N_c}{2} \text{Tr} \sum_i c_i \log(\mathbf{D}_5 \mathbf{D} + \Lambda_i^2), \quad (5.25)$$

donde los reguladores de Pauli-Villars satisfacen $c_0 = 1$, $\Lambda_0 = 0$ y $\sum_i c_i = 0$, $\sum_i c_i \Lambda_i^2 = 0$, lo cual permitirá hacer finitas las divergencias logarítmicas y las cuadráticas, respectivamente. Haciendo uso de la representación de Schwinger de tiempo propio, esta contribución se escribe

$$\Gamma_q^+[\mathbf{D}] = \frac{N_c}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \text{Tr} e^{-\tau \mathbf{D}_5 \mathbf{D}}, \quad (5.26)$$

donde

$$\phi(\tau) = \sum_i c_i e^{-\tau \Lambda_i^2}. \quad (5.27)$$

Las funciones de Green se pueden obtener a partir de (5.21) derivando respecto a los campos medios mesónicos. De particular interés es la función a un punto. Si en (5.21) consideramos solamente la parte real de la contribución de los quarks a un loop, esto es (5.25), esta acción presenta un punto estacionario invariante translacional en $(S, P) = (\Pi, 0)$, $(V_\mu, A_\mu) = (0, 0)$

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{NJL}}^+[S]}{\delta S(x)} \Big|_{S(x)=\Pi} = \frac{a_s^2}{2} \text{tr}(\Pi - \hat{m}_0) - \frac{N_c}{2} \text{Tr} \left((\mathbf{D}_5 \mathbf{D})^{-1} \frac{\delta(\mathbf{D}_5 \mathbf{D})}{\delta S(x)} \right)_{S(x)=\Pi} = 0. \quad (5.28)$$

El punto estacionario Π se identifica con el valor esperado en el vacío del campo S en la aproximación de un loop de quarks. Introduciendo la acción efectiva regularizada (5.26) en (5.28) obtenemos la siguiente ecuación para Π

$$a_s^2(\Pi - \hat{m}_0) - 8N_c \Pi g(\Pi) = 0, \quad (5.29)$$

donde

$$g(\Pi) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \phi(\tau) e^{-\tau(p^2 + \Pi^2)}. \quad (5.30)$$

En adelante nos referiremos a (5.29) como ecuación del gap pues esta ecuación determina el gap de energía 2Π entre los estados de quarks con energía positiva y negativa. Π juega el papel de la masa constituyente de los quarks.

El condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ viene dado por $\langle \bar{q}q \rangle = \delta\Gamma_{\text{NJL}}^+/\delta\hat{m}_0$. De (5.23) se obtiene inmediatamente

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{a_s^2}{2} \text{tr}(\Pi - \hat{m}_0). \quad (5.31)$$

5.2.2. Modelo Quark Espectral

El Modelo Quark Espectral, desarrollado recientemente por E. Ruiz Arriola y W. Broniowski [100], es aplicable a física hadrónica en el rango de baja energía. La novedad reside en el uso de una regularización espectral basada en la introducción a nivel formal de la representación de Lehmann [50] del propagador del quark. Esta regularización permite resolver de una manera simple las identidades de Ward-Takahashi quiral y electromagnética mediante el uso de la llamada *prescripción gauge* [102]. Consideraremos el modelo a nivel de un loop fermiónico y en el límite quiral en que la masa de los quarks es cero.

En esta sección vamos a seguir la referencia [100]. El punto de partida es el propagador del quark, que en espacio de momentos se define

$$S(p) = \int d^4 x e^{-px} \langle 0 | T\{q(x)\bar{q}(0)\} | 0 \rangle. \quad (5.32)$$

Consideraremos una representación espectral para el propagador

$$S(p) = \int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{\rho(\omega)}{p - \omega}, \quad (5.33)$$

donde $\rho(\omega)$ es la función espectral y \mathcal{C} indica un contorno de integración en el plano complejo ω elegido de un modo conveniente. Este propagador puede ser parametrizado en la forma estándar

$$S(p) = A(p) \not{p} + B(p) = Z(p) \frac{\not{p} + M(p)}{p^2 - M^2(p)}, \quad (5.34)$$

donde

$$A(p) = \int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{\rho(\omega)}{p^2 - \omega^2}, \quad B(p) = \int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{\rho(\omega)\omega}{p^2 - \omega^2}. \quad (5.35)$$

La masa y factor de renormalización vienen dados por

$$M(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad Z(p) = (p^2 - M^2(p))A(p), \quad (5.36)$$

respectivamente. Notar que si $\rho(\omega) = \rho(-\omega)$ tendríamos $M(p) = 0$ y no existiría rotura espontánea de la simetría quiral. Por tanto es de esperar que $\rho(\omega)$ no sea una función par en general. La función espectral debe ser tal que proporcione valores finitos para los observables hadrónicos. Esto dará lugar a una serie de condiciones que deben cumplir los momentos y los momentos logarítmicos de $\rho(\omega)$,

$$\rho_n = \int_C d\omega \omega^n \rho(\omega), \quad \rho'_n = \int_C d\omega \log(\omega^2/\mu^2) \omega^n \rho(\omega), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.37)$$

Aquí μ es una cierta escala. Notar que por normalización $\rho_0 = 1$. Como ejemplo consideremos el condensado de quarks (por el momento trabajaremos a temperatura cero)

$$\langle \bar{q}q \rangle = -N_c \int_C d\omega \rho(\omega) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}_{\text{Dirac}} \frac{1}{\not{p} - \omega}. \quad (5.38)$$

Tras tomar la traza en el espacio de Dirac, la integral es cuadráticamente divergente. Un modo de regularizarla es haciendo uso de un cutoff tridimensional con la siguiente sustitución

$$\int d^4 p \longrightarrow 4\pi \int dp_0 \int_0^\Lambda dp p^2, \quad p = |\vec{p}|. \quad (5.39)$$

Con esta regularización obtenemos

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{N_c}{4\pi^2} \int_C d\omega \omega \rho(\omega) \left[2\Lambda^2 + \omega^2 \log\left(\frac{\omega^2}{4\Lambda^2}\right) + \omega^2 \right]. \quad (5.40)$$

Puesto que el resultado debe ser finito en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, es necesario imponer las condiciones $\rho_1 = 0$ y $\rho_3 = 0$, lo cual conduce a $\langle \bar{q}q \rangle = -N_c \rho'_3 / (4\pi^2)$. El cálculo de otros observables va a dar lugar a condiciones adicionales. En general todos los observables van a ser proporcionales a los momentos inversos y a los momentos logarítmicos, y para que sean finitos se debe cumplir $\rho_n = 0$, $n > 0$. El modelo espectral no se ha desarrollado más allá de un loop.

La prescripción gauge fue usada en el pasado en la obtención de soluciones de las ecuaciones de Schwinger-Dyson. Haciendo uso de ella se pueden resolver en este modelo las identidades de Ward-Takahashi. Sin embargo en situaciones en las que las líneas de propagadores de los quarks están cerradas es más conveniente el formalismo de la acción efectiva. Consideraremos, como en el modelo de Nambu-Jona-Lasinio, acoplamientos escalar, pseudo-escalar, vector y axial. El acoplamiento quark-pión debe satisfacer la relación de Goldberger-Treiman [18]. Con estas premisas, la acción efectiva de este modelo a nivel de un loop de quarks se puede escribir como

$$\Gamma_{\text{SQM}} = -N_c \int d^4 x \int_C d\omega \rho(\omega) \text{tr} \log(\not{D}_V + A\gamma_5 + \omega U^{\gamma_5}), \quad (5.41)$$

donde $\not{D}_\mu^V = \partial_\mu + V_\mu$ es la derivada covariante vector. En el modelo NJL, M jugaba el papel de la masa constituyente de los quarks. En el modelo espectral M se convierte en

la variable de integración ω de la función espectral. La diferencia esencial con el modelo NJL, y en general con todos los modelos de quarks quirales, es que aquí no consideramos un cutoff que separe el régimen de baja energía, donde se supone que el modelo funciona, y el régimen de alta energía.

En el capítulo 7 se hará un estudio más extenso del modelo espectral considerando un espacio-tiempo curvo, y se introducirá el *esquema de dominancia del mesón vectorial*, que constituye una realización simple del modelo y proporciona una forma explícita para la función espectral.

5.3. Problemática de los modelos de quarks quirales a temperatura finita

El tratamiento estándar de los Modelos de Quarks Quirales a Temperatura Finita presenta algunas inconsistencias. Por una parte, en el cálculo de observables aparecen involucrados estados excitados con cualquier número de quarks, y esto ocurre incluso para temperaturas bajas. Sorprendentemente, durante mucho tiempo no ha habido demasiada preocupación por parte de los autores en resolver este problema, y normalmente lo han atribuido a fallos del propio modelo, tales como falta de confinamiento.

5.3.1. Tratamiento estándar a temperatura finita

El tratamiento estándar consiste en pasar de las fórmulas con $T = 0$ hasta otras fórmulas para $T \neq 0$, mediante la aplicación de la regla

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} F(k_0, \vec{k}) \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(iw_n, \vec{k}), \quad (5.42)$$

donde F puede representar el propagador de un quark, en espacio de momentos. ω_n son las frecuencias de Matsubara fermiónicas, $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$. Si aplicamos esta regla en el condensado quiral, a temperatura finita y a un loop se tiene

$$\langle \bar{q}q \rangle = -iN_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \text{tr}_{\text{Dirac}} S(x)|_{x_0=in\beta} = 4MT \text{tr}_c \sum_{\omega_n} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + M^2}. \quad (5.43)$$

Después de hacer la integración en momentos, y aplicar la fórmula de Poisson para la sumatoria, ec. (2.36), queda

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle_T &= \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} - 2 \frac{N_c M^2 T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} K_1(nM/T) \\ &\stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} - \frac{N_c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2MT}{n\pi} \right)^{3/2} e^{-nM/T}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde se ha hecho uso del comportamiento asintótico de la función de Bessel $K_n(z)$ para el régimen de temperatura pequeña $K_n(z) \sim e^{-z} \sqrt{\pi/2z}$.

5.3.2. Generación de estados multi-quarks

Ec. (5.44) se puede interpretar en términos del propagador del quark en espacio de coordenadas

$$S(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k - M} = (i \not{D} + M) \frac{M^2}{4\pi^2 i} \frac{K_1(\sqrt{-M^2 x^2})}{\sqrt{-M^2 x^2}}. \quad (5.45)$$

El comportamiento de (5.45) a temperatura pequeña es

$$S(\vec{x}, i\beta) \stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} e^{-M/T}, \quad (5.46)$$

lo cual representa la supresión exponencial a temperatura pequeña correspondiente al propagador de un único quark. Si nos fijamos en ec. (5.44), esto significa que el condensado de quarks se puede escribir en términos de factores de Boltzmann estadísticos con masa $M_n = nM$. Esto constituye un problema, pues significa que el baño térmico está formado por quarks constituyentes libres, sin ningún confinamiento de color.¹

El condensado de quarks a temperatura finita no es invariante gauge (en el sentido de transformaciones gauge grandes). En efecto, del ejemplo del condensado se tiene

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \langle \bar{q}(x_0)q(0) \rangle|_{x_0=in\beta}, \quad (5.48)$$

o sea, el condensado a temperatura finita se puede escribir como una suma coherente de condensados de quarks no locales a temperatura cero. Notar que la contribución de temperatura cero corresponde al término $n = 0$ en la sumatoria. Bajo una transformación gauge de tipo central se tiene

$$\langle \bar{q}q \rangle_T \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-z)^n \langle \bar{q}(x_0)q(0) \rangle \Big|_{x_0=in\beta}. \quad (5.49)$$

Esto significa que (5.48) no es invariante gauge, y el condensado se puede descomponer en una suma de representaciones irreducibles con una trialidad dada n , lo cual genera estados con cualquier número de quarks $\sim e^{-n\beta M}$.

¹Este cálculo se puede extender a cualquier observable que sea singlete de color en el límite de temperatura cero, y el resultado general que se obtiene es que los cálculos en modelos de quarks a temperatura finita en la aproximación de un loop van a generar todos los estados posibles de quarks, esto es

$$\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{T=0} + \mathcal{O}_q e^{-M/T} + \mathcal{O}_{qq} e^{-2M/T} + \dots \quad (5.47)$$

Notar que, si bien el término \mathcal{O}_q corresponde al estado de un quark aislado, el siguiente término \mathcal{O}_{qq} tiene que ser un estado diquark qq , correspondiente a un único quark que se propaga dando dos vueltas alrededor del cilindro térmico. Este término no puede ser un estado mesónico $\bar{q}q$, puesto que a un loop este estado viene de la línea de un quark que primero sube y después baja en tiempo imaginario. En este caso el camino no da ninguna vuelta alrededor del cilindro térmico, y por tanto su contribución está ya incluida en el término de temperatura cero $\mathcal{O}^{T=0}$.

Este problema se puede evitar imponiendo a mano que el condensado sea invariante gauge. Esto se haría eliminando de la suma en (5.49) los términos que no tienen trialidad cero, esto es

$$\langle \bar{q}q \rangle_T \Big|_{\text{singlete}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \langle \bar{q}(x_0)q(0) \rangle \Big|_{x_0=iN_c n\beta}. \quad (5.50)$$

Esta fórmula genera como primera corrección un término bariónico $N_c e^{-N_c \beta M}$. El factor N_c es generado por el loop de quarks.

5.3.3. Conflicto con Teoría Quiral de Perturbaciones

A parte del problema de la generación de estados multi-quarks que no preservan trialidad, surge otra problemática cuando comparamos nuestros resultados con los de Teoría Quiral de Perturbaciones a temperatura finita. En el límite quiral, esto es para $m_\pi \ll 2\pi T \ll 4\pi f_\pi$, las correcciones térmica de orden más bajo al condensado de quarks (por ejemplo, para $N_f = 2$), vienen dadas por

$$\langle \bar{q}q \rangle_T \Big|_{\text{TQP}} = \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} \left(1 - \frac{T^2}{8f_\pi^2} - \frac{T^4}{384f_\pi^4} + \dots \right). \quad (5.51)$$

Puesto que $f_\pi \sim \sqrt{N_c}$, las correcciones de temperatura finita están suprimidas en N_c en relación a la contribución de temperatura cero. Este hecho contradice el resultado de ec. (5.48), pues de ahí se obtiene que todas las correcciones térmicas son del mismo orden en un conteo en N_c .

El resultado de TQP, ec. (5.51), se ha obtenido considerando loops piónicos, los cuales son dominantes para $T \ll M$. El problema reside en que incluso sin loops piónicos los modelos de quarks quirales predicen una transición de fase quiral en torno a $T_c \sim 170$ MeV, lo cual concuerda bien, aunque de manera injustificada, con los resultados en el retículo.

5.4. Acoplamiento del loop de Polyakov en los Modelos de Quarks Quirales

A temperatura cero es posible preservar la invariancia gauge mediante el acoplamiento de los gluones con el modelo. Dentro del espíritu del modelo, estos grados de libertad deberían tratarse de un modo perturbativo, pues los quarks constituyentes llevan cierta información sobre efectos gluónicos no perturbativos.

A temperatura finita la situación es diferente pues, como hemos dicho ya, un tratamiento perturbativo de la componente cero del campo gluónico rompería explícitamente la invariancia gauge. Por tanto, tiene sentido considerar aquí el loop de Polyakov gluónico y su acoplamiento con los modelos quirales. K. Fukushima [103] sugiere este acoplamiento en virtud de la analogía que existe entre el loop de Polyakov y el potencial químico (ver

sec. 2.1). El tratamiento que vamos a considerar nosotros parte del uso del heat kernel a temperatura finita (capítulo 2). Nuestra aproximación es similar a la de Fukushima, excepto por el hecho de que consideraremos un loop de Polyakov local $\Omega(\vec{x})$ sujeto a fluctuaciones cuánticas. Un tratamiento de campo medio no permitiría tener en cuenta estas fluctuaciones, y al final del capítulo veremos que éstas pueden ser importantes para que los resultados del modelo se muestren compatibles con estudios recientes en el retículo.

5.4.1. Acoplamiento mínimo del loop de Polyakov

En los modelos de quarks quirales debemos considerar quarks con grados de libertad de sabor y de color. A partir de ahora consideraremos el operador de Dirac, ec. (5.19), como un operador no trivial en espacio de color. Lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \not{D}_V + \mathcal{A}_\mu^f \gamma_5 + M U^{\gamma_5}, \quad (5.52)$$

donde $\mathcal{D}_\mu^V = \partial_\mu + \mathcal{V}_\mu^f + g \mathcal{V}_\mu^c \delta_{\mu 0}$ es la derivada covariante vector. \mathcal{V}_μ^f y \mathcal{A}_μ^f son matrices antihermíticas en espacio de sabor y la identidad en el espacio de color. \mathcal{V}_μ^c es la identidad en espacio de sabor y matriz antihermítica en espacio de color. Los acoplamientos gauge de sabor darán lugar a loops de Polyakov con quiralidades right y left.² Los acoplamientos gauge de color darán lugar al loop de Polyakov con grados de libertad de color,

$$\Omega_c(x_0, \vec{x}) = \mathcal{T} \exp \left(-g \int_{x_0}^{x_0 + \beta} dx'_0 \mathcal{V}_0^c(x'_0, \vec{x}) \right). \quad (5.55)$$

Ω_c es una matriz en espacio de color, y la identidad en espacio de sabor. En esta tesis únicamente nos vamos a preocupar del loop de Polyakov de color, que denotaremos como lo venimos haciendo hasta ahora, Ω , de modo que el loop de Polyakov de sabor lo consideraremos igual a la identidad.

Si nos fijamos en ec. (5.26), podemos hacer uso del desarrollo del heat kernel a temperatura finita (capítulo 2) para obtener el lagrangiano efectivo como un desarrollo en derivadas covariantes. El lagrangiano va a tener la forma

$$\mathcal{L}(x) = \sum_n \text{tr}[f_n(\Omega(x)) \mathcal{O}_n(x)], \quad (5.56)$$

²El *loop de Polyakov quiral de sabor* se define

$$\Omega_f(x_0, \vec{x}) = \mathcal{T} \exp \left(- \int_{x_0}^{x_0 + \beta} dx'_0 (\mathcal{V}_0^f(x'_0, \vec{x}) + \gamma_5 \mathcal{A}_0^f(x'_0, \vec{x})) \right). \quad (5.53)$$

Ω_f es una matriz en espacio de sabor, y la identidad en espacio de color. En términos de campos right y left se escribe como $\Omega_f = \Omega_R P_R + \Omega_L P_L$, donde

$$\Omega_{R,L}(x_0, \vec{x}) = \mathcal{T} \exp \left(- \int_{x_0}^{x_0 + \beta} dx'_0 (\mathcal{V}_0^f(x'_0, \vec{x}) \pm \mathcal{A}_0^f(x'_0, \vec{x})) \right), \quad (5.54)$$

y $P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$. Notar que la simetría gauge grande en espacio de sabor a temperatura finita precisa del uso del *loop de Polyakov quiral*.

donde tr es la traza sobre todos los grados de libertad internos, n etiqueta todos los operadores locales covariantes gauge \mathcal{O}_n (esto es, que contienen derivadas covariantes), y $f_n(\Omega(x))$ son funciones dependientes de la temperatura y del loop de Polyakov. Estas funciones reemplazan los coeficientes numéricos presentes en el caso de temperatura cero.

En estos cálculos, el loop de Polyakov aparece mínimamente acoplado a través de las frecuencias de Matsubara fermiónicas modificadas³

$$\hat{\omega}_n = 2\pi T(n + 1/2 + \hat{\nu}), \quad \hat{\nu} = (2\pi i)^{-1} \log \Omega. \quad (5.57)$$

En nuestra notación $\Omega = e^{i2\pi\hat{\nu}}$, donde $\hat{\nu}(\vec{x}) = ig\mathcal{V}_0(\vec{x})/(2\pi T)$. El efecto de este cambio en las frecuencias de Matsubara da lugar a la siguiente regla para pasar a las fórmulas con $T \neq 0$

$$\tilde{F}(x; x) \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\Omega(\vec{x}))^n \tilde{F}(\vec{x}, x_0 + in\beta; \vec{x}, x_0). \quad (5.58)$$

$F(x; x)$ es el propagador fermiónico a temperatura finita que comienza y acaba en el mismo punto. En ec. (5.58) aparece el factor $(-\Omega(\vec{x}))^n$, en lugar del factor $(-1)^n$ que se obtiene de la regla estándar, ec. (5.42), después de usar la fórmula de Poisson para la sumatoria, ec. (2.36), y considerar la transformada de Fourier.

La interpretación de ec. (5.58) se puede visualizar en fig. 5.1. En un loop de quarks a temperatura finita con un número arbitrario de campos externos y con una línea de Wilson no trivial, cada vez que los quarks dan una vuelta alrededor de la dirección temporal compatificada, estos adquieren una fase (-1) debido a la estadística de Fermi-Dirac, y un factor no abeliano de Aharonov-Bohm⁴ Ω . La contribución total del diagrama se obtiene sumando sobre todas las vueltas y calculando la traza en espacio de color.

5.4.2. Promedio sobre el grupo

En la sección 5.4.1 se ha considerado el acoplamiento mínimo del loop de Polyakov con el modelo quark quiral, que consiste simplemente en hacer la sustitución

$$\partial_0 \rightarrow \partial_0 + g\mathcal{V}_0^c, \quad (5.59)$$

en el operador de Dirac, ec. (5.19). El modelo quark quiral acoplado con el loop de Polyakov se obtiene considerando el acoplamiento mínimo de ec. (5.59), y una integración del campo gluónico \mathcal{V}_0 de un modo que preserve invariancia gauge. Esto va a generar una función de partición de la forma

$$Z = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} e^{-\Gamma_Q[U, \Omega]}, \quad (5.60)$$

³En nuestro tratamiento, $\hat{\omega}_n$ es el único sitio donde aparece la dependencia explícita en los grados de libertad de color, de modo que se puede pensar en $\hat{\nu}$ como el conjunto de sus autovalores.

⁴Ésta es una fase de tipo eléctrico, diferente a la fase magnética estándar. No obstante, el nombre es apropiado puesto que la fase eléctrica fue discutida por primera vez en el artículo original AB.

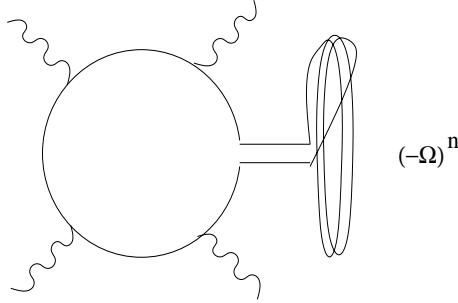


Figura 5.1: Diagrama típico de un loop de quarks con una línea de Wilson no trivial. Para n vueltas alrededor de la dirección temporal compactificada U(1), surge un factor topológico Ω^n además del factor estadístico de Fermi-Dirac $(-1)^n$. Las líneas onduladas son campos externos. La contribución total del diagrama se obtiene sumando sobre todas las vueltas y calculando la traza en espacio de color.

donde $\mathcal{D}U$ es la medida de Haar del grupo quiral de sabor $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, y $\mathcal{D}\Omega$ la medida de Haar del grupo de color $SU(N_c)$. Γ_G es la acción efectiva gluónica y Γ_Q corresponde a la acción efectiva de los quarks. Ec. (5.60) es una expresión genérica, válida tanto para el modelo NJL como para el modelo espectral, siempre y cuando se considere la correspondiente acción efectiva de los quarks: ec. (5.21) en el primer caso y ec. (5.41) para el segundo.

Si no se tuviera en cuenta la medida de Haar de color, y se considerara $\mathcal{V}_0^c = 0$ y $\Omega = 1$, se obtendría la forma original del modelo quark quiral, donde existe una relación uno a uno entre el desarrollo en loops y el desarrollo en N_c grande, tanto a temperatura cero como a temperatura finita. De manera equivalente se podría considerar una aproximación de punto de silla y sus correcciones. En presencia del loop de Polyakov tal correspondencia no existe, de modo que consideraremos un desarrollo en loops de quarks, esto es, una aproximación de punto de silla para el campo bosónico U , y mantendremos la integración en el loop de Polyakov (constante) Ω . En el trabajo de [103] se hace uso de la aproximación de punto de silla para Ω .

La integración del loop de Polyakov Ω debe realizarse de acuerdo con la dinámica de QCD. Esto implica un promedio sobre el loop de Polyakov local con cierto peso normalizado $\rho(\Omega; \vec{x}) \mathcal{D}\Omega$. Aquí $\rho(\Omega; \vec{x})$ es la distribución de probabilidad (independiente de la temperatura) de $\Omega(\vec{x})$ en el grupo gauge. Para una función general $f(\Omega)$, se tiene⁵

$$\left\langle \frac{1}{N_c} \text{tr}_c f(\Omega) \right\rangle = \int_{\text{SU}(N_c)} \mathcal{D}\Omega \rho(\Omega) \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} f(e^{i\phi_j}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \hat{\rho}(\phi) f(e^{i\phi}), \quad (5.61)$$

⁵ $f(\Omega)$ se entiende como una función ordinaria $f(z)$ evaluada en $z = \Omega$.

donde $e^{i\phi_j}$, $j = 1, \dots, N_c$ son los valores propios de Ω y

$$\hat{\rho}(\phi) := \int_{\text{SU}(N_c)} \mathcal{D}\Omega \rho(\Omega) \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} 2\pi\delta(\phi - \phi_j). \quad (5.62)$$

A temperatura suficientemente pequeña, la distribución del loop de Polyakov se encuentra muy cercana a la medida de Haar de $\text{SU}(N_c)$.⁶ En este caso la función $\hat{\rho}(\phi)$ es simplemente

$$\hat{\rho}(\phi) = 1 - \frac{2(-1)^{N_c}}{N_c} \cos(N_c\phi). \quad (5.63)$$

Introduciendo ec. (5.63) en ec. (5.61) se obtienen fácilmente las siguientes fórmulas para el promedio sobre la medida de Haar de $\text{SU}(N_c)$

$$\langle \text{tr}_c(-\Omega)^n \rangle_{\text{SU}(N_c)} = \begin{cases} N_c, & n = 0 \\ -1, & n = \pm N_c \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (5.64)$$

5.4.3. Solución de la problemática

Si aplicamos este formalismo al condensado de quarks, nuestro modelo conduce a⁷

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}_c(-\Omega)^n \rangle \langle \bar{q}(x_0)q(0) \rangle|_{x_0=0} \quad (5.65)$$

Si tenemos en cuenta ec. (5.64), observamos que en nuestro modelo el loop de Polyakov no sólo permite eliminar los términos que rompen trialidad, sino que las contribuciones térmicas están suprimidas en N_c en relación al valor de temperatura cero, tal y como se espera de TQP. Esto resuelve la problemática que discutimos en la sección 5.3.

El condensado de quarks a temperatura finita, a un loop de quarks es

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} + \frac{2M^2T}{\pi^2 N_c} K_1(N_c M/T) + \dots \stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} + 4 \left(\frac{MT}{2\pi N_c} \right)^{3/2} e^{-N_c M/T}. \quad (5.66)$$

Los puntos indican efectos gluónicos o del mar de quarks de orden superior. Notar que debido a la supresión exponencial, las correcciones térmicas de orden más bajo a nivel de un loop de quarks comienzan sólo a temperaturas cercanas a la transición de fase de desconfinamiento. Hemos denominado a este efecto el *enfriamiento de Polyakov* [98, 99], ya que es generado por el promedio de los loops de Polyakov sobre el grupo. Esto significa que en la aproximación quenched, no se debe de esperar ningún efecto térmico importante sobre los observables de los quarks por debajo de la transición de fase, y el cambio más grande debería de provenir de loops de bosones pseudoescalares a bajas temperaturas. Esto es justo lo que se espera de TQP. Veremos más adelante cómo estas propiedades se modifican en presencia del determinante fermiónico.

⁶Esto se justificará en sec. 5.6.2.

⁷La fórmula (5.65) es la análoga a ec. (5.48), pero considerando la fase no abeliana Ω y el promedio sobre el grupo.

5.5. Lagrangiano Quiral a Temperatura Finita

La estructura de QCD a bajas energías se puede describir muy bien en teoría quiral de perturbaciones. El desarrollo quiral corresponde a un desarrollo en potencias de los momentos externos de los campos. Los campos pseudoescalares U son de orden $\mathcal{O}(p^0)$, los campos vector \mathcal{V}_μ , axial \mathcal{A}_μ y cualquier derivada ∂_μ son de orden $\mathcal{O}(p)$. Los campos externos escalar \mathcal{S} , pseudoescalar \mathcal{P} y la matriz de masa de los quarks \hat{m}_0 son de orden $\mathcal{O}(p^2)$.

Como se muestra en trabajos previos a temperatura cero [104, 105, 106, 107, 108], los modelos de quarks quirales permiten entender de un modo cuantitativo y microscópico la estructura del lagrangiano efectivo a bajas energías que se deduce de TQP para los mesones pseudoescalares a *nivel árbol*. En concreto, proporcionan valores numéricos para las contribuciones de orden más bajo en N_c de las constantes de baja energía.

En esta sección vamos a extender los resultados de temperatura cero a temperatura finita, y consideraremos la influencia del loop de Polyakov. Siguiendo el método desarrollado en el capítulo 2, y que ya aplicamos en el capítulo 3 para el cálculo de la acción efectiva de QCD en el régimen de temperatura alta, se puede escribir la estructura del lagrangiano efectivo a baja energía para los mesones pseudoescalares a temperatura finita a nivel árbol, mediante un desarrollo de tipo heat kernel para los modelos de quarks quirales a nivel de un loop. En TQP a temperatura finita se considera en general que las constantes de baja energía son *independientes de la temperatura*. Ésta es una suposición bastante razonable, ya que la aplicabilidad de TQP se basa en la existencia de un gap de masa entre los bosones de Goldstone y el resto del espectro hadrónico. Para mesones no extraños el gap viene dado por la masa del mesón ρ , M_V , de modo que es de esperar que la dependencia en temperatura de las constantes de baja energía sea del orden de $e^{-M_V/T}$. En un modelo quark quiral, los mesones pseudoescalares son partículas compuestas de quarks constituyentes con una masa M , y los efectos términos también deberían de influir en su estructura microscópica. El cálculo que realizaremos en esta sección va a permitir analizar esto de una manera cuantitativa.

5.5.1. Estructura del lagrangiano

El cálculo del lagrangiano quiral efectivo a temperatura finita en los modelos de quarks quirales se limita, desde un punto de vista técnico, al cálculo de trazas en espacio de Dirac y en espacio de sabor. En el apéndice D se hace en detalle. Mostraremos aquí el resultado final.

El lagrangiano efectivo a baja energía escrito en la notación de Gasser-Leutwyler [27]

y en espacio euclídeo se escribe

$$\mathcal{L}_q^{*(0)} = \frac{2N_f}{(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-2}(\Lambda, M, \hat{\nu}) \rangle, \quad (5.67)$$

$$\mathcal{L}_q^{*(2)} = \frac{f_\pi^{*2}}{4} \text{tr}_f \left(\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}_\mu U - (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) \right), \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{*(4)} = & -L_1^* (\text{tr}_f (\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}^\mu U))^2 - L_2^* \text{tr}_f (\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}_\nu U) \text{tr}_f (\hat{D}^\mu U^\dagger \hat{D}^\nu U) \\ & - L_3^* \text{tr}_f (\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}^\mu U \hat{D}_\nu U^\dagger \hat{D}^\nu U) - L_3^* \text{tr}_f (\hat{D}_0 U^\dagger \hat{D}^0 U \hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}^\mu U) \\ & + L_4^* \text{tr}_f (\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}^\mu U) \text{tr}_f (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) \\ & + L_5^* \text{tr}_f (\hat{D}_\mu U^\dagger \hat{D}^\mu U (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)) + \bar{L}_5^* \text{tr}_f (\hat{D}_0 U^\dagger \hat{D}^0 U (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)) \\ & + \bar{L}_5^* \text{tr}_f (\hat{D}_0 \hat{D}^0 U^\dagger \chi + \hat{D}_0 \hat{D}^0 U \chi^\dagger) - L_6^* (\text{tr}_f (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger))^2 - L_7^* (\text{tr}_f (\chi^\dagger U - \chi U^\dagger))^2 \\ & + \bar{L}_7^* \text{tr}_f (U^\dagger \hat{D}_0 \hat{D}^0 U - U \hat{D}_0 \hat{D}^0 U^\dagger) \text{tr}_f (\chi^\dagger U - \chi U^\dagger) \\ & - L_8^* \text{tr}_f (\chi^\dagger U \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \bar{\chi} U^\dagger) \\ & - L_9^* \text{tr}_f (F_{\mu\nu}^R \hat{D}^\mu U^\dagger \hat{D}^\nu U + F_{\mu\nu}^L \hat{D}^\mu U \hat{D}^\nu U^\dagger) \\ & - \bar{L}_9^* \text{tr}_f (E_i^R (\hat{D}^0 U^\dagger \hat{D}^i U - \hat{D}^i U^\dagger \hat{D}^0 U) + E_i^L (\hat{D}^0 U \hat{D}^i U^\dagger - \hat{D}^i U \hat{D}^0 U^\dagger)) \\ & - \bar{L}_9^* \text{tr}_f (\hat{D}_0 E_i^R U^\dagger \hat{D}^i U + \hat{D}_0 E_i^L U \hat{D}^i U^\dagger) \\ & + L_{10}^* \text{tr}_f (U^\dagger F_{\mu\nu}^L U F^{\mu\nu R}) \\ & + H_1^* \text{tr}_f ((F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2) + \bar{H}_1^* \text{tr}_f ((E_i^R)^2 + (E_i^L)^2) - H_2^* \text{tr}_f (\chi^\dagger \chi). \end{aligned} \quad (5.69)$$

tr_f es la traza en espacio de sabor. Las derivadas covariantes quirales son

$$\begin{aligned} \hat{D}_\mu U &= D_\mu^L U - U D_\mu^R = \partial_\mu U + l_\mu U - U r_\mu, \\ F_{\mu\nu}^R &= [D_\mu^R, D_\nu^R] = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu + [r_\mu, r_\nu], \\ F_{\mu\nu}^L &= [D_\mu^L, D_\nu^L] = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu + [l_\mu, l_\nu], \end{aligned} \quad (5.70)$$

donde $r_\mu = \mathcal{V}_\mu + \mathcal{A}_\mu$, y $l_\mu = \mathcal{V}_\mu - \mathcal{A}_\mu$. $\langle \dots \rangle$ indica promedio sobre el grupo gauge de color $\text{SU}(N_c)$. La estructura de este lagrangiano resulta bastante interesante. Por una parte existen términos que se pueden escribir como los del lagrangiano a temperatura cero, pero con acoplamientos efectivos dependientes de la temperatura. Además de estos, existen nuevos términos que rompen invariancia Lorentz. Curiosamente, en el lagrangiano aparecen menos términos del segundo tipo de los que en un principio se podría pensar en base a las simetrías conocidas. Todavía no entendemos del todo este hecho, que parece sugerir la existencia de alguna simetría accidental. Si bien sospechamos que esta simetría existe sólo a un loop, sería interesante encontrarla explícitamente.

5.5.2. LEC para el modelo de Nambu–Jona–Lasinio

Si bien ésta es la estructura general que se ha encontrado para los modelos de quarks quirales, los valores de los coeficientes de baja energía dependen del modelo en particular.

Mostramos aquí los valores de las constantes de baja energía (LEC) obtenidas para el modelo de Nambu–Jona-Lasinio. Para evitar complicaciones con el loop de Polyakov, hemos considerado el modelo NJL sin integración de los campos de espín 1 (vector y axial).⁸

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q^{*(0)} &= \frac{2N_f}{(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-2} \rangle, \quad f_\pi^{*2} = \frac{M^2}{4\pi^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle, \quad f_\pi^{*2} B_0^* = \frac{M}{4\pi^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle, \\
L_1^* &= \frac{M^4}{24(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_2 \rangle, \quad L_2^* = 2L_1^*, \quad L_3^* = -8L_1^* + \frac{1}{2}L_9^*, \\
\bar{L}_3^* &= -\frac{M^2}{6(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \bar{\mathcal{J}}_1 \rangle, \quad L_4^* = 0, \quad L_5^* = \frac{M}{2B_0^*} \left(\frac{f_\pi^{*2}}{4M^2} - 3L_9^* \right), \\
\bar{L}_5^* &= \frac{1}{2}\bar{L}_3^*, \quad \bar{L}_5^{*'} = \frac{1}{2}\bar{L}_3^*, \quad L_6^* = 0, \quad L_7^* = \frac{1}{8N_f} \left(-\frac{f_\pi^{*2}}{2B_0^* M} + L_9^* \right), \\
\bar{L}^{*'} &= -\frac{1}{4N_f} \bar{L}_3^*, \quad L_8^* = \frac{1}{16B_0^*} \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{B_0^*} \right) f_\pi^{*2} - \frac{1}{8}L_9^*, \\
L_9^* &= \frac{M^2}{3(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle, \quad \bar{L}_9^* = -\bar{L}_3^*, \quad \bar{L}_9^{*'} = -\bar{L}_3^*, \quad L_{10}^* = -\frac{1}{2}L_9^*, \\
H_1^* &= -\frac{f_\pi^{*2}}{24M^2} + \frac{1}{4}L_9^*, \quad \bar{H}_1^* = -\frac{1}{6(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \bar{\mathcal{J}}_0 \rangle, \quad H_2^* = -\frac{f_\pi^{*2}}{8B_0^{*2}} + \frac{1}{4}L_9^*,
\end{aligned} \tag{5.71}$$

donde las integrales \mathcal{J}_l están definidas en ecs. (D.22)-(D.26). Los coeficientes de Gasser-Leutwyler estándar se pueden expresar en términos de f_π^{*2} , B_0^* , L_1^* y L_9^* , o de manera equivalente, en términos de las integrales $\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle$, $\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle$, $\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle$ y $\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_2 \rangle$. Notar que todos los términos que rompen la simetría Lorentz, excepto \bar{H}_1^* , son proporcionales.

Si el loop de Polyakov Ω se considera igual a la unidad, las expresiones (5.71) siguen siendo válidas, salvo por el hecho de que el promedio en el grupo y la traza de color deben sustituirse por un factor N_c .

5.5.3. LEC para el Modelo Quark Espectral

En este modelo se debe hacer un promedio sobre la masa constituyente de los quarks con una función espectral $\rho(\omega)$ que actúa como peso (ver sec. 5.2.2). Notar que M no sólo aparece como argumento de las integrales \mathcal{J}_l , sino que también aparece en forma de factores multiplicativos. Esto dará lugar a un número mayor de funciones independientes

⁸En el capítulo 6 se calculará la acción efectiva del modelo NJL generalizado a temperatura cero con integración en estos campos.

en comparación con el modelo NJL.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q^{*(0)} &= \frac{2N_f}{(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-2} \rangle, \quad f_\pi^{*2} = \frac{1}{4\pi^2} \langle \omega^2 \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle, \quad f_\pi^{*2} B_0^* = \frac{1}{4\pi^2} \langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle, \\
L_1^* &= \frac{1}{24(4\pi)^2} \langle \omega^4 \text{tr}_c \mathcal{J}_2 \rangle, \quad L_9^* = \frac{1}{3(4\pi)^2} \langle \omega^2 \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle, \quad \bar{L}_3^* = -\frac{1}{6(4\pi)^2} \langle \omega^2 \text{tr}_c \bar{\mathcal{J}}_1 \rangle, \\
L_5^* &= \frac{1}{2(4\pi)^2 B_0^*} (\langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle - \langle \omega^3 \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle), \\
L_7^* &= \frac{1}{2(4\pi)^2 N_f} \left(-\frac{1}{2B_0^*} \langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle + 4\pi^2 L_9^* \right), \\
L_8^* &= \frac{1}{4(4\pi)^2 B_0^*} \langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle - \frac{f_\pi^{*2}}{16B_0^{*2}} - \frac{1}{8} L_9^*, \\
H_1^* &= -\frac{1}{6(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle + \frac{1}{4} L_9^*, \\
\bar{H}_1^* &= -\frac{1}{6(4\pi)^2} \langle \text{tr}_c \bar{\mathcal{J}}_0 \rangle, \\
H_2^* &= \frac{1}{2(4\pi)^2 B_0^*} \left(\frac{1}{B_0^*} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle - \langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle \right) - \frac{f_\pi^{*2}}{8B_0^{*2}} + \frac{1}{4} L_9^*. \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Para simplificar la notación, con $\langle \dots \rangle$ indicamos tanto el promedio sobre el loop de Polyakov como el promedio espectral $\int_C d\omega \rho(\omega) \dots$. El resto de coeficientes satisfacen las mismas relaciones geométricas que se obtuvieron para el modelo NJL. En ambos modelos se obtiene la relación

$$L_7^* = -\frac{1}{N_f} \left(\frac{f_\pi^{*2}}{16B_0^{*2}} + L_8^* \right). \tag{5.73}$$

Podemos calcular explícitamente las integrales haciendo uso del esquema de dominancia vectorial de la función espectral $\rho(\omega)$ (ver sec. 7.4 y ref. [100]). Después de calcular el promedio en el grupo $\text{SU}(N_c)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-2} \rangle &= -\frac{N_c}{2} \rho'_4 - \frac{2M_V^4}{3x_V^4} (48 + 24x_V + 6x_V^2 + x_V^3) e^{-x_V/2}, \\
\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle &= N_c \rho'_2 - \frac{2M_V^2}{3x_V^2} (12 + 6x_V + x_V^2) e^{-x_V/2}, \\
\langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle &= \rho'_3 (N_c - 2e^{-x_S/2}), \\
\langle \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle &= -N_c (\rho_0 + \rho'_0) + 2\gamma_E - 4 \log(4) + 4 \log(x_V) - 2\psi(5/2) \\
&\quad - \frac{x_V^5}{1800} {}_1F_2 \left[\left\{ \frac{5}{2} \right\}, \left\{ \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \left(\frac{x_V}{4} \right)^2 \right] \\
&\quad - \frac{x_V^2}{12} {}_2F_3 \left[\{1, 1\}, \left\{ -\frac{1}{2}, 2, 2 \right\}, \left(\frac{x_V}{4} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \omega \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle &= -N_c \rho'_1 - \frac{2\rho'_3}{M_S^2} (2 + x_S) e^{-x_S/2}, \\
\langle \omega^2 \text{tr}_c \mathcal{J}_0 \rangle &= -N_c \rho'_2 - \frac{M_V^2}{6} (2 + x_V) e^{-x_V/2}, \\
\langle \omega^2 \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle &= N_c \rho_0 - \frac{1}{6} (12 + 6x_V + x_V^2) e^{-x_V/2}, \\
\langle \omega^3 \text{tr}_c \mathcal{J}_1 \rangle &= -\frac{\rho'_3 x_S^2}{2M_S^2} e^{-x_S/2}, \\
\langle \omega^4 \text{tr}_c \mathcal{J}_2 \rangle &= N_c \rho_0 - \frac{1}{24} (48 + 24x_V + 6x_V^2 + x_V^3) e^{-x_V/2}, \\
\langle \text{tr}_c \overline{\mathcal{J}}_0 \rangle &= -\frac{1}{3} (12 + 6x_V + x_V^2) e^{-x_V/2}, \\
\langle \omega^2 \text{tr}_c \overline{\mathcal{J}}_1 \rangle &= -\frac{x_V^2}{12} (2 + x_V) e^{-x_V/2}, \tag{5.74}
\end{aligned}$$

con la notación

$$x_V := N_c \beta M_V, \quad x_S := N_c \beta M_S, \tag{5.75}$$

donde M_V es la masa del mesón vectorial (masa del ρ), y M_S es la masa del escalar. ${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z]$ son las funciones hipergeométricas generalizadas [52].

5.6. Correcciones de orden superior

En las secciones 5.4 y 5.5 hemos considerado los modelos de quarks quirales a nivel de un loop de quarks. Esto corresponde a la aproximación quenched dentro del modelo. Asimismo se ha hecho uso de que a temperaturas suficientemente pequeñas basta con considerar el promedio sobre el grupo gauge de color $SU(N_c)$. En esta sección discutiremos algunas consecuencias importantes que se obtienen al ir más allá de estas aproximaciones.

5.6.1. Más allá de un loop de quarks

El ir más allá de la aproximación de un loop de quarks puede conducir a cálculos bastante tediosos (ver refs. [109, 110] para cálculos explícitos del modelo NJL estándar sin loop de Polyakov). Aquí no nos vamos a preocupar de hacer un cálculo explícito, no obstante se pueden deducir algunas consecuencias importantes basadas en ciertas reglas de conteo en N_c a temperatura finita.

Consideremos, por ejemplo, el diagrama a tres loops de la figura 5.2, que contribuye al condensado quiral en el modelo NJL en términos de los propagadores de los quarks. La contribución de este diagrama se escribe⁹

$$\text{Fig.}(2a) = \sum_{w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}} S(w^{(1)}) \otimes S(w^{(1)}) \otimes S(w^{(2)}) \otimes S(w^{(3)}) \otimes S(w^{(1)} + w^{(3)} - w^{(2)}).$$

⁹Por simplicidad, escribimos únicamente las frecuencias de Matsubara.

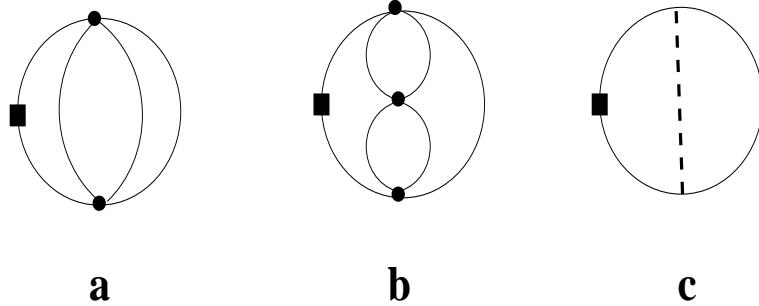


Figura 5.2: Diagrama típico más allá de un loop para el operador del condensado de quarks $\bar{q}q$. Las líneas de los quarks con momentos independientes pueden dar n vueltas alrededor del tiempo euclídeo compactificado, dando lugar al factor de Fermi-Polyakov $(-\Omega)^n$. La conservación de trialidad solamente permite que las líneas internas de quark-antiquark den una única vuelta y en sentidos opuestos, lo cual genera una supresión exponencial $e^{-2M\beta}$ para el diagrama a). Una supresión similar ocurre para el diagrama b) si las vueltas del quark-antiquark ocurren en cada una de las burbujas. El diagrama c) se corresponde con una suma de todos los estados intermedios con los mismos números cuánticos, y puede interpretarse como la línea de un mesón.

Haciendo uso de la fórmula de Poisson para la sumatoria, ec. (2.36), y yendo a espacio euclídeo se tiene

$$\begin{aligned} \text{Fig.(2a)} &= \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle \Omega^{n_1+n_2+n_3} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_3 S(\tau_1) \otimes S(-\tau_1 - \tau_3 + n_1\beta + n_3\beta) \otimes \\ &\quad \otimes S(-\tau_3 + n_2\beta + n_3\beta) \otimes S(\tau_3) \otimes S(\tau_3 - n_3\beta) \\ &\stackrel{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n_1, n_2, n_3} \langle \Omega^{n_1+n_2+n_3} \rangle e^{-\beta M(|n_1| + |n_2| + |n_3|)}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

La conservación de trialidad para este diagrama implica, $n_1 + n_2 + n_3 = kN_c$, y el valor mínimo del exponente se consigue con $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, que es la contribución de temperatura cero. La primera corrección térmica a temperatura pequeña viene dada por $n_1 = 0$, $n_2 = -n_3 = 1$, de modo que el diagrama a 3 loops de fig.(2a) se encuentra suprimido en un factor $\sim e^{-2\beta M}$, en comparación con la supresión de un loop de quarks $\sim e^{-N_c\beta M}$. Una supresión térmica similar se obtiene si introducimos la suma estándar sobre burbujas, que puede acoplarse a los números cuánticos de los mesones transformando el argumento del exponente en $2M \rightarrow M_{\bar{q}q}$. Obviamente, esta contribución resulta más importante para el pión más ligero. En realidad, el diagrama quark-mesón de la fig.(2b) es similar al diagrama bosonizado de dos loops que se muestra en fig.(2c). Para este diagrama bosonizado los argumentos previos resultan más simples, ya que el número de loops es igual al número de propagadores de quarks. El operador de polarización del pión, proporcional al propagador del pión, se puede tomar a temperatura cero, ya que la supresión más importante viene de las líneas de quarks que no están acopladas a los números cuánticos del pión.

Para un diagrama bosonizado con L loops de quarks, tenemos que considerar L generalizaciones de las correcciones a nivel de un loop de quarks, ec. (5.58). El análisis es más simple en espacio de coordenadas. En lugar del número total de propagadores de quarks, consideramos la suma de Poisson de L propagadores. Esto se puede hacer mediante la fórmula

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\beta} dx_4 F(x_4 + n\beta + m\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 F(x_4 + n\beta). \quad (5.77)$$

Esto significa que es posible eliminar tantas sumas de Poisson como integrales en coordenadas aparecen en las expresiones. Haciendo uso de $L = I - (V - 1)$ y $4V = E + 2I$ tenemos¹⁰

$$\prod_{i=0}^L \int d^4 z_i G^{2L} \sum_{n_1, \dots, n_L} \prod_{i=1}^L (-\Omega)^{n_i} S(\vec{x}_i, t_i + in_i\beta). \quad (5.78)$$

En realidad, esta regla no depende de la forma precisa de la interacción de los quarks. A bajas temperaturas, cada línea de quark con un índice de Poisson independiente genera una supresión dada por una masa constituyente de quark. Por tanto, la contribución a un observable se puede descomponer esquemáticamente del siguiente modo

$$\mathcal{O}^T = \sum_L \sum_{n_1, \dots, n_L} \mathcal{O}_{n_1 \dots n_L} \langle \Omega^{n_1 + \dots + n_L} \rangle e^{-M\beta(|n_1| + \dots + |n_L|)}. \quad (5.79)$$

La conservación de trialidad de la medida $\Omega \rightarrow z\Omega$ a este nivel conduce a

$$n_1 + \dots + n_L = kN_c \quad (5.80)$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$. El término dominante en el desarrollo de ec. (5.79) es aquel para el que $n_1 = \dots = n_L = 0$ con un número arbitrario de loops de quarks L , y se corresponde con la contribución de temperatura cero. Además, se ve que para $L = 1$ únicamente se tienen contribuciones de $n_1 = kN_c$, lo cual da lugar a correcciones $e^{-N_c M \beta}$, que permiten reproducir los resultados de las secciones 5.4 y 5.5. A partir de la ec. (5.79) podemos ver cómo se organiza el desarrollo térmico para temperaturas bajas. Las contribuciones térmicas más importantes vienen de minimizar $\sum_{i=1}^L |n_i|$, sujeto al requerimiento de conservación de trialidad, ec. (5.80). A temperatura finita y para $N_c \geq 3$ se tiene que la primera corrección térmica viene dada por $L = 2$ y $n_1 = -n_2 = 1$ con $n_3 = \dots = n_L = 0$, lo cual da el factor $e^{-2\beta M}$ y se corresponde con un estado mesónico $\bar{q}q$. Esta contribución está suprimida por un factor $1/N_c$ en relación con la contribución de temperatura cero. Para $N_c = 3$ el siguiente término en el desarrollo correspondería a $L \geq 3$ y $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, lo cual da lugar a una supresión térmica $e^{-N_c \beta M}$. Para $N_c \geq 5$ se tendría $L \geq 4$ con $n_1 = -n_2 = n_3 = n_4 = 1$

¹⁰ L es el número de loops de quarks, V el número de vértices, I el número de líneas de quarks y E el número de patas externas.

y $n_5 = \dots = n_L = 0$. Si consideramos el caso $N_c = 3$ se tiene¹¹

$$Z_{\bar{q}q} \sim \frac{1}{N_c} e^{-2M/T}, \quad (5.81)$$

$$Z_{qqq} \sim e^{-N_c M/T}, \quad (5.82)$$

$$Z_{qqq\bar{q}q} \sim \frac{1}{N_c} e^{-(2+N_c)M/T}, \quad (5.83)$$

$$\dots \quad (5.84)$$

$$Z_{(\bar{q}q)^{N_M} (qqq)^{N_B}} \sim \frac{1}{N_c^{N_M}} e^{-(2N_M + N_B N_c)M/T}. \quad (5.85)$$

Obviamente, para $N_c = 3$ la contribución del loop mesónico es más dominante que la del loop bariónico. Los argumentos previos se han hecho sin tener en cuenta el efecto de confinamiento de los quarks, de modo que en realidad deberíamos considerar la masa física del mesón m , y en este caso se tendría

$$\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{T=0} + \sum_m \mathcal{O}_m \frac{1}{N_c} e^{-m/T} + \sum_B \mathcal{O}_B e^{-M_B/T} + \dots. \quad (5.86)$$

Así es como funciona la dualidad quark-hadrón en los modelos de quarks quirales a temperatura finita. Como vemos, las contribuciones de los loops piónicos son las más importantes, incluso si se tiene en cuenta que están suprimidas en $1/N_c$. La siguiente contribución al observable total a temperatura finita viene dada por los estados mesónicos sucesivos. En su conjunto, esto es lo que se espera como consecuencia de la inclusión del loop de Polyakov en los modelos de quarks quirales, teniendo en cuenta la proyección sobre el sector singlete de color invariante gauge.

En definitiva, a temperatura finita se tiene una supresión estándar $\frac{1}{N_c} e^{-2M/T}$ proveniente de loops mesónicos y una supresión $e^{-N_c M/T}$ de loops bariónicos. Obviamente, las contribuciones más importantes para N_c grande o T pequeño son las debidas a loops mesónicos.

La discusión anterior está centrada en observables que contienen quarks. Para el valor esperado del loop de Polyakov, por ejemplo, se tiene

$$\sum_L \sum_{n_1, \dots, n_L} \mathcal{O}_{n_1 \dots n_L} \langle \Omega^{1+n_1 + \dots + n_L} \rangle e^{-M\beta(|n_1| + \dots + |n_L|)} \quad (5.87)$$

y

$$1 + n_1 + \dots + n_L = kN_c. \quad (5.88)$$

La contribución térmica de orden más bajo (no existe contribución de temperatura cero) es $n_1 = -1, n_2 = \dots = n_L = 0$, que se corresponde con un único loop de antiquark que

¹¹En el caso en que no se considerara la existencia del loop de Polyakov, se tendría $Z_{q^{N_q}(\bar{q}q)^{N_M}} \sim \frac{1}{N_c^{N_M}} e^{-(2N_M + N_q)M/T}$, de modo que las contribuciones de orden más bajo corresponderían a estados de un quark.

apantalla la carga del loop de Polyakov test. Este término escala como $e^{-M/T}$. Al contrario que para observables con quarks como el condensado quiral, este comportamiento no se ve afectado por loops piónicos. En sec. 5.6.4 obtendremos expresiones explícitas para estos observables en el modelo NJL.

5.6.2. Correcciones gluónicas

Hasta ahora hemos considerado simplemente una integración sobre la medida del grupo gauge. Desafortunadamente, no conocemos ningún argumento general por el cual tenga que existir una supresión exponencial de los grados de libertad gluónicos a temperaturas bajas, y por tanto dejando la medida de Haar como único vestigio de los gluones. No obstante, los resultados basados en desarrollos con acoplamientos grandes [111, 112] y en la aproximación de gluones masivos a un loop [113, 114] proporcionan esta supresión, y de hecho los resultados recientes en el retículo confirman una sorprendente universalidad en todas las representaciones de los grupos, y favorece el mecanismo dominante del promedio simple sobre el grupo [93].

De manera más específica, de los datos del retículo [93] y de la medida del grupo se encuentra que

$$\langle |\text{tr}_c \Omega|^2 \rangle = 1, \quad (5.89)$$

en la fase de confinamiento, o de manera equivalente $\langle \hat{\text{tr}}_c \hat{\Omega} \rangle = 0$, para la representación adjunta. Notar que en la aproximación de campo medio [103] $\langle |\text{tr}_c \Omega|^2 \rangle$ se anula, debido a la ausencia de fluctuaciones.

El potencial gluónico a orden más bajo que se deduce del desarrollo con acoplamientos grandes viene dado por [111, 112]

$$\Gamma_G[\Omega] = V_{\text{glue}}[\Omega] \cdot a^3/T = -2(d-1) e^{-\sigma a/T} |\text{tr}_c \Omega|^2, \quad (5.90)$$

para $N_c = 3$ con la tensión de la cuerda $\sigma = (425 \text{ MeV})^2$. A nivel de campo medio $V_{\text{glue}}[\Omega]$ da lugar a una transición de fase de primer orden con el acoplamiento crítico $2(d-1)e^{-\sigma a/T_D} = 0,5153$. Se puede fijar la temperatura de transición a su valor empírico $T_D = 270 \text{ MeV}$ mediante la elección $a^{-1} = 272 \text{ MeV}$ [103]. La masa correspondiente es $m_G = \sigma a = 664 \text{ MeV}$. A temperaturas pequeñas se puede desarrollar la exponencial en potencias de la acción gluónica

$$e^{-\Gamma_G[\Omega]} = 1 - \Gamma_G[\Omega] + \frac{1}{2} \Gamma_G[\Omega]^2 + \dots, \quad (5.91)$$

lo que genera una supresión exponencial del tipo $e^{-m_G/T}$. Esto da lugar a la siguiente fórmula de masas para el argumento de Boltzmann en la exponencial

$$\mathcal{M} = n N_c M_q + m M_{\bar{q}q} + l m_G, \quad (5.92)$$

que muestra claramente que las contribuciones térmicas de orden más bajo a temperaturas bajas vienen dadas nuevamente por los loops térmicos piónicos, lo cual corresponde a tomar $n = l = 0$ y $m = 1$, pues $N_c M_q \gg m_G \gg M_{\bar{q}q} = m_\pi$. Notar que numéricamente, incluso la contribución de dos loops piónicos resultaría más importante que las correcciones gluónicas.

En una serie de trabajos recientes [113, 114] se ha obtenido la ecuación de estado para un gas de gluones masivos con una masa dependiente de temperatura en presencia del loop de Polyakov, lo cual permite reproducir los datos del retículo de manera bastante precisa por encima de la transición de fase. La densidad de energía de vacío se escribe

$$V_{\text{glue}}[\Omega] = T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{\text{tr}}_c \ln \left[1 - e^{-\beta \omega_k} \hat{\Omega} \right], \quad (5.93)$$

donde $\omega_k = \sqrt{k^2 + m_G^2}$, con m_G la masa del gluón. La dependencia en temperatura que se considera en estos trabajos es $m_G(T) = T g(T) \sqrt{2}$, que en la transición de fase ($T = T_D$) toma el valor $m_G(T_D) = 1,2 - 1,3 T_D$. Si se toma un valor constante para la masa del gluón por debajo de la transición de fase, a bajas temperaturas se obtiene

$$V_{\text{glue}}[\Omega] = -T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (|\text{tr}_c \Omega^n|^2 - 1) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-n\beta \omega_k}, \quad (5.94)$$

donde se ha hecho uso de la identidad

$$\hat{\text{tr}}_c \hat{\Omega}^n = |\text{tr}_c \Omega^n|^2 - 1. \quad (5.95)$$

Haciendo uso de la representación asintótica de las funciones de Bessel, se obtiene una supresión similar a la que se encuentra en el límite de acoplamientos grandes.

5.6.3. Correcciones locales en el loop de Polyakov

Vamos a considerar aquí un tratamiento preliminar de las correcciones locales en el loop de Polyakov. Hasta ahora se ha considerado un campo Ω constante en el espacio. De manera general, el loop de Polyakov depende tanto del tiempo euclídeo como de las coordenadas espaciales. En el gauge de Polyakov la dependencia en tiempo euclídeo es simple, pero aún queda una dependencia en coordenadas que es desconocida. En tal caso, las reglas anteriores deben ser modificadas, ya que las inserciones del loop de Polyakov llevarán un momento, y el resultado depende de su ordenamiento. Si seguimos considerando, como hasta ahora, que el loop de Polyakov es la única fuente de color en el problema, nos vamos a encontrar con funciones de correlación de loops de Polyakov. En la fase de confinamiento es de esperar una descomposición basada en la existencia de propiedades de agrupamiento para cada par de variables. Por ejemplo, se tiene

$$\langle \text{tr}_c \Omega(\vec{x}_1, \beta) \text{tr}_c \Omega^{-1}(\vec{x}_2, \beta) \rangle \simeq e^{-\beta \sigma |\vec{x}_1 - \vec{x}_2}|. \quad (5.96)$$

Por tanto, valores muy diferentes en la coordenada espacial están suprimidos, de modo que tiene sentido considerar una aproximación local dentro de la longitud de correlación, y desarrollar las funciones de correlación en gradientes dentro de esta región. En una primera aproximación, esto se corresponde con la sustitución del volumen cuatridimensional por un dominio de correlación, mediante la regla

$$V = \frac{1}{T} \int d^3 x \longrightarrow \frac{1}{T} \int d^3 x e^{-\sigma r/T} = \frac{8\pi T^2}{\sigma^3}. \quad (5.97)$$

En el lagrangiano quiral a bajas energías, que se obtiene desarrollando la acción efectiva en derivadas de los campos mesónicos, aparecen también gradientes del loop de Polyakov. Este hecho comenta en ref. [99]. En realidad, puesto que estamos acoplando el loop de Polyakov de manera efectiva como un potencial químico de color dependiente de x , nuestra aproximación es similar a una generalización no abeliana de la aproximación de densidad local en teoría de muchos cuerpos de física nuclear y materia condensada, dentro del espíritu de la teoría del funcional de la densidad.

5.6.4. Resultados más allá de la aproximación quenched

En esta sección nos proponemos ir más allá de la aproximación quenched en el cálculo de algunos observables concretos, y para ello deberemos tener en cuenta la contribución del determinante fermiónico. El modelo quark quiral completo con acoplamiento del loop de Polyakov viene dado por ec. (5.60). La contribución de los quarks a la función de partición del modelo NJL se escribe como

$$Z_Q[U, \Omega] := e^{-\Gamma_Q[U, \Omega]} = \text{Det}(\mathbf{D}) \exp \left(-\frac{a_s^2}{4} \text{tr}_f \int d^4x (M - \hat{m}_0)^2 \right), \quad (5.98)$$

que se obtiene a partir de ecs. (5.22)-(5.23) donde se ha aplicado la ecuación del gap, ec. (5.28). En la sección 5.5 se calculó del determinante fermiónico en presencia de un loop de Polyakov (lentamente variable), como un desarrollo en momentos externos de los campos

$$\text{Det}(\mathbf{D}) = e^{-\int d^4x \mathcal{L}_q^*(x)} = \exp \left(- \int d^4x (\mathcal{L}_q^{*(0)}(x) + \mathcal{L}_q^{*(2)}(x) + \mathcal{L}_q^{*(4)}(x) + \dots) \right). \quad (5.99)$$

De acuerdo con la discusión de la sección 5.6.3, la aproximación de loop de Polyakov lentamente variable tiene sentido en una región donde existen correlaciones fuertes entre loops de Polyakov. Para nuestros propósitos, bastará con considerar aquí la contribución de vacío $\mathcal{L}_q^{*(0)}$. En el modelo de NJL esta contribución se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{*(0)}(x) &= -\frac{N_c N_f}{(4\pi)^2} \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2)^2 \log(\Lambda_i^2 + M^2) \\ &\quad + \frac{N_f}{\pi^2} (MT)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{K_2(nM/T)}{n^2} (\text{tr}_c \Omega^n(x) + \text{tr}_c \Omega^{-n}(x)), \\ &= \mathcal{L}_q^{(0)}(T=0) + \mathcal{L}_q^{(0)}(\Omega(x), T), \end{aligned} \quad (5.100)$$

que se obtiene a partir de ec. (5.67) y ec. (D.25). El lagrangiano se ha escrito separando dos contribuciones: temperatura cero y temperatura finita. Esta última contiene el loop de Polyakov. Notar que en este punto aún no hemos considerado la integración en el grupo gauge $SU(N_c)$, de modo que no escribimos los corchetes $\langle \dots \rangle$ como hicimos en la sección 5.5. En ec. (5.60) la integración en $\mathcal{D}U$ la hemos realizado a nivel clásico, mediante el uso de las

ecuaciones clásicas de movimiento del campo U , ec. (D.30), (para detalles, ver apéndice D). La función de partición se puede escribir

$$Z = \int \mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} \exp \left(- \int d^4x \left\{ \frac{a_s^2}{4} \text{tr}_f(M - \hat{m}_0)^2 + \mathcal{L}_q^{(0)}(T=0) + \mathcal{L}_q^{(0)}(\Omega(x), T) \right\} \right).$$

El valor esperado del loop de Polyakov se escribe

$$L = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}_c \Omega \rangle = \frac{1}{N_c Z} \int \mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} e^{-\Gamma_Q[\Omega]} \text{tr}_c \Omega(x), \quad (5.101)$$

donde no indicamos dependencia de Γ_Q en U , pues nos limitamos a considerar $\mathcal{L}_q^{*(0)}$ que no tiene dependencia en los campos mesónicos. El cálculo de ec. (5.101) puede hacerse analíticamente en el límite de temperatura pequeña. En este régimen pueden despreciarse las correcciones gluónicas $e^{-\Gamma_G[\Omega]}$ (ver sección 5.6.2), de modo que en el promedio sobre el grupo solamente contribuirá la medida de Haar $\mathcal{D}\Omega$. Cuando T es suficientemente pequeño, se puede considerar el desarrollo del término $\mathcal{L}_q^{(0)}(\Omega, T)$ en la exponencial de ec. (5.101). A primer orden en este desarrollo aparecen las siguientes funciones de correlación entre loops de Polyakov¹²

$$\int d^4x \int \mathcal{D}\Omega \text{tr}_c \Omega(\vec{x}) \text{tr}_c \Omega(\vec{y}) = 0, \quad (5.105)$$

$$\int d^4x \int \mathcal{D}\Omega \text{tr}_c \Omega(\vec{x}) \text{tr}_c \Omega^{-1}(\vec{y}) = \int d^4x e^{-\sigma|\vec{x}-\vec{y}|/T} = \frac{8\pi T^2}{\sigma^3}. \quad (5.106)$$

La primera expresión es cero por conservación de trialidad. La segunda expresión constituye la regla que mencionamos en ec. (5.97), que permite sustituir el cuadrvolumen infinito $\int d^4x$, por un volumen efectivo que especifica un dominio de correlación $8\pi T^2/\sigma^3$. Con todo esto se llega finalmente al siguiente resultado en el modelo NJL

$$L(T) \stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} \frac{4N_f}{N_c \sigma^3} \sqrt{\frac{2M^3 T^9}{\pi}} e^{-M/T}. \quad (5.107)$$

Notar que la trialidad no se preserva, debido a la presencia de quarks dinámicos, y la escala relevante es la masa constituyente de los quarks. Gracias a esta supresión exponencial,

¹²Si se considera un loop de Polyakov independiente de x , se tiene la siguiente fórmula de integración sobre el grupo $\text{SU}(N_c)$

$$\int \mathcal{D}\Omega \Omega_{ij} \Omega_{kl}^* = \frac{1}{N_c} \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (5.102)$$

que conduce trivialmente a

$$\int \mathcal{D}\Omega \text{tr}_c \Omega \text{tr}_c \Omega^{-1} = 1. \quad (5.103)$$

Al considerar correcciones locales, se tiene

$$\int \mathcal{D}\Omega \text{tr}_c \Omega(\vec{x}) \text{tr}_c \Omega^{-1}(\vec{y}) = e^{-\sigma|\vec{x}-\vec{y}|/T}. \quad (5.104)$$

está justificado usar de manera efectiva el loop de Polyakov como un parámetro de orden para la simetría del centro incluso en el caso unquenched. En realidad, nuestro análisis sugiere que un cálculo del loop de Polyakov en QCD completo podría constituir un método para extraer una masa constituyente de los quarks invariante gauge. En cualquier caso, sería deseable disponer de datos en el retículo del loop de Polyakov para temperaturas bajas, $T \leq 50$ MeV, con objeto de hacer un análisis preciso.

Para el condensado de quarks, hacemos uso de

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = -f_\pi^{*2} B_0^* = -\frac{M}{4\pi^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1} \rangle, \quad (5.108)$$

que obtuvimos en ec. (5.71). Al tener en cuenta la contribución del determinante fermiónico, se tiene

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = -\frac{M}{4\pi^2} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} e^{-\Gamma_Q[\Omega]} \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1}(M, \Omega). \quad (5.109)$$

La expresión de \mathcal{J}_{-1} viene dada en ec. (D.24). A partir de aquí, el procedimiento para hallar el comportamiento de $\langle \bar{q}q \rangle_T$ a baja temperatura es idéntico al caso del valor esperado del loop de Polyakov. En el régimen de T pequeño, nuevamente $e^{-\Gamma_G[\Omega]}$ se puede despreciar, y podemos desarrollar el término $\mathcal{L}_q^{(0)}(\Omega, T)$ que aparece en $e^{-\Gamma_Q[\Omega]}$. Teniendo en cuenta las integrales (5.105)-(5.106), se llega a

$$\langle \bar{q}q \rangle_T \stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} \langle \bar{q}q \rangle_{T=0} + \frac{8N_f}{\pi^2} \frac{M^3 T^6}{\sigma^3} e^{-2M/T}. \quad (5.110)$$

En el modelo quark espectral se obtiene el resultado de ec. (5.110), con la sustitución $2M \rightarrow M_V$ (la masa del mesón ρ), y un factor multiplicativo ligeramente diferente.

Como vemos, en el cálculo unquenched el enfriamiento de Polyakov persiste, aunque es un poco menos efectivo que en el cálculo quenched. Este mismo análisis se puede hacer para otros observables, por ejemplo las constantes de baja energía del lagrangiano efectivo quiral tienen un comportamiento $L_i^T - L_i^{T=0} \stackrel{T \text{ pequeño}}{\sim} e^{-M_V/T}$ [99].

Finalmente, sería necesario incluir más loops de quarks, o equivalentemente excitaciones mesónicas. Esto daría exactamente el resultado de TQP con piones sin masa dominando en la región de temperaturas pequeñas. Por tanto, vemos que cuando el loop de Polyakov se acopla de manera conveniente a los modelos de quarks quirales, se obtiene una explicación natural de los resultados encontrados hace tiempo en modelos puramente hadrónicos.

5.7. Implicaciones sobre la transición de fase de QCD

En la sección 5.6 se hizo un estudio analítico del comportamiento a baja temperatura del loop de Polyakov y del condensado quiral en QCD unquenched. Resultaría interesante estudiar el comportamiento que predice nuestro modelo para estos observables en la región de la transición de fase, y para ello deberemos integrar numéricamente las ecuaciones (5.101) y (5.109). A diferencia de nuestro tratamiento, en ref. [103] se hace un estudio en la aproximación de campo medio, en el cual la probabilidad de encontrar un loop de Polyakov dado

es una función delta. La integral en el grupo permite tener en cuenta una dispersión de esa probabilidad debido a efectos cuánticos.

Para $N_c = 3$ el loop de Polyakov contiene dos variables independientes. En el gauge de Polyakov, $\partial_0 A_0 = 0$, se puede parametrizar como una matriz diagonal del siguiente modo

$$\Omega = \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{-i(\phi_1+\phi_2)}). \quad (5.111)$$

Con esta parametrización, podemos calcular la función de partición como

$$Z = \int \mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} e^{-\Gamma_Q[\Omega]} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \rho_G(\phi_1, \phi_2) \rho_Q(\phi_1, \phi_2), \quad (5.112)$$

donde

$$\mathcal{D}\Omega e^{-\Gamma_G[\Omega]} = \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \rho_G(\phi_1, \phi_2), \quad e^{-\Gamma_Q[\Omega]} = \rho_Q(\phi_1, \phi_2). \quad (5.113)$$

En $\Gamma_Q[\Omega]$ no indicamos dependencia en los campos mesónicos U , pues al igual que en sec. 5.6.4 nos limitaremos a considerar la contribución de vacío $\mathcal{L}_q^{(0)}$ del lagrangiano quiral, ec. (5.100). Para una función general $f(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}_c f(\Omega) \rangle &= \frac{1}{Z} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \rho_G(\phi_1, \phi_2) \rho_Q(\phi_1, \phi_2) (f(e^{i\phi_1}) + f(e^{i\phi_2}) + f(e^{-i(\phi_1+\phi_2)})) \\ &= \frac{1}{Z} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_1}{2\pi} \hat{\rho}(\phi_1) f(e^{i\phi_1}), \end{aligned} \quad (5.114)$$

donde

$$\hat{\rho}(\phi_1) = 3 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \rho_G(\phi_1, \phi_2) \rho_Q(\phi_1, \phi_2). \quad (5.115)$$

Por invariancia gauge, tanto la medida de Haar $\mathcal{D}\Omega$, como las correcciones gluónicas $e^{-\Gamma_G[\Omega]}$, las contribuciones fermiónicas $e^{-\Gamma_Q[\Omega]}$, y $\text{tr}_c f(\Omega)$ son invariantes frente al intercambio de los autovalores del loop de Polyakov. Esto permite expresar $\langle \text{tr}_c f(\Omega) \rangle$ como una integral en un único parámetro, tal y como se expresa en ec. (5.114), con la función peso adecuada, ec. (5.115).

En nuestro tratamiento consideraremos la integración sobre el grupo $SU(3)$ y una minimización con respecto a M , lo cual se corresponde con ec. (5.28). Esto último permite calcular la dependencia en temperatura de la masa constituyente, y de ahí obtener el condensado quiral

$$\langle \bar{q}q \rangle_T = -\frac{a_s^2}{2} \text{tr}_f(M(T) - \hat{m}_0). \quad (5.116)$$

Puesto que la constante de acoplamiento de cuatro quarks a_s parametriza información sobre los gluones, debería de tener una dependencia en Ω . No obstante, a_s incorpora información sobre todos los grados de libertad gluónicos, de modo que no debería de verse muy afectado por la contribución de Ω , donde Ω viene dado únicamente por la componente temporal de los gluones.

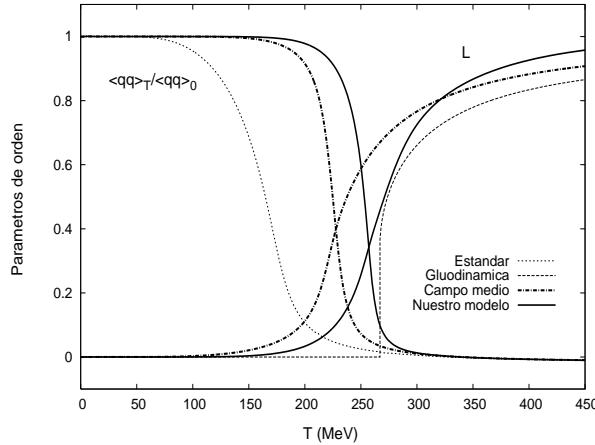


Figura 5.3: Dependencia en temperatura del condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$ en unidades relativas, y del valor esperado del loop de Polyakov $L = \langle \text{tr}_c \Omega \rangle / N_c$. El resultado estándar de $\langle \bar{q}q \rangle_T$ se corresponde con el modelo NJL sin acoplamiento con el loop de Polyakov. Se compara también por una parte con la aproximación de campo medio de ref. [103], donde el loop de Polyakov es clásico y está acoplado con los quarks, y por otra con nuestro modelo basado en la integración sobre el grupo de color SU(3) y considerando correcciones locales en el loop de Polyakov. Se muestra asimismo el comportamiento de L en gluodinámica dentro del esquema de desarrollo con acoplamientos grandes, ec. (5.90). Se ha considerado $N_f = 2$.

En fig. 5.3 se muestra el comportamiento del condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle_T$ y el valor esperado del loop de Polyakov $L = \langle \text{tr}_c \Omega \rangle / N_c$ en diferentes tratamientos del modelo NJL. Se compara la predicción estándar del modelo NJL, con el cálculo en aproximación de campo medio de ref. [103], que corresponde a minimizar la energía de vacío como función de la masa constituyente M y del valor esperado del loop de Polyakov L . Comparamos asimismo con el resultado que obtenemos al considerar una integración en el loop de Polyakov Ω con correcciones locales. En la figura se muestra además el comportamiento de L que se obtiene en gluodinámica, con el modelo de ec. (5.90) en su tratamiento de campo medio, lo cual conduce a una transición de fase de primer orden en $T_D = 270$ MeV. En nuestros cálculos estamos considerando el modelo quark quiral con dos sabores $N_f = 2$, y para la masa desnuda de los quarks $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_u, m_d)$ consideramos el límite en que hay simetría de isospín, $m_u = m_d \equiv m_q$. En los tres modelos hemos tomado $m_q = 5,5$ MeV, y $a_s^2 = 76,2 \cdot 10^{-3}$ GeV 2 . La integración en momentos está regulada por un cut-off $\Lambda_{\text{PV}} = 828$ MeV con regularización de Pauli-Villars. Este valor es el que se necesita para reproducir el valor experimental de la constante de desintegración débil del pión $f_\pi = 93,2$ MeV, con la masa constituyente $M = 300$ MeV. Para la tensión de la cuerda consideramos su valor a temperatura cero $\sigma = (425 \text{ MeV})^2$. Este parámetro aparece cuando se calculan funciones de correlación de loops de Polyakov (por ejemplo, ec. (5.106)).

El efecto neto de la integración sobre el grupo de color SU(3) consiste en un desplazamiento de la temperatura de transición quiral a valores mayores, respecto a las tempera-

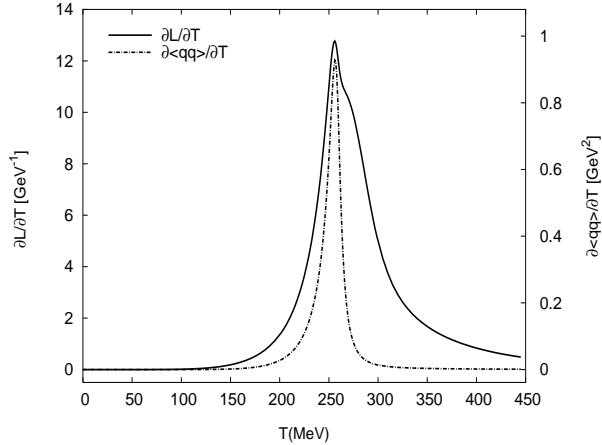


Figura 5.4: Dependencia en temperatura de $\partial\langle\bar{q}q\rangle/\partial T$ y $\partial L/\partial T$, obtenida con el modelo NJL basado en la integración sobre el grupo de color SU(3) y considerando correcciones locales en el loop de Polyakov. Se ha tomado $N_f = 2$.

turas que se obtienen en los tratamientos estándar y de campo medio. Por tanto, el modelo basado en la integración sobre el grupo de color proporciona un enfriamiento efectivo, no sólo en el régimen de temperaturas pequeñas (ver secciones 5.4.3 y 5.6.4), sino también en el régimen de la transición de fase. Como se ve en fig. 5.3, el acoplamiento del modelo quark quiral con gluodinámica modifica la transición de fase de primer orden de gluodinámica en una transición de fase de segundo orden. Un estudio de la susceptibilidad de los parámetros de orden quiral $\langle\bar{q}q\rangle$ y de desconfinamiento L , permite ver que con nuestro modelo ambas transiciones de fase (quiral y de desconfinamiento) se producen simultáneamente: $T_\chi = T_D = 256(1)$ MeV; (ver fig. 5.4).

En fig. 5.5 se compara el comportamiento del loop de Polyakov obtenido en nuestro modelo, con cálculos en el retículo para QCD unquenched ($N_f = 2$) en la zona de transición de fase. Estos datos se han calculado en un retículo de tamaño $16^3 \times 4$, con $m_q/T = 0,4$ [22]. Se muestra asimismo el comportamiento del condensado quiral. Hemos comprobado que una dependencia en temperatura de la tensión de la cuerda σ permite compatibilizar los resultados de nuestro modelo con los obtenidos en el retículo. Esto conduce a un rango de incertidumbre en la tensión de la cuerda, $\sigma = 0,181 \pm 0,085$ GeV², que da cuenta en cierto sentido de la incertidumbre existente en el modelo. En fig. 5.5 la banda de error asociada a esta incertidumbre conduce a una temperatura de transición de $T_\chi = T_D = 255 \pm 50$ MeV. Si se ignoraran en el modelo las correcciones gluónicas dadas por ec. (5.90), no existiría un efecto apreciable por debajo de la transición de fase, si bien ésta aumentaría en 30 MeV, un valor que se encuentra dentro de nuestra estimación del error.

Con objeto de comprender el mecanismo de rotura de la simetría del centro en nuestro modelo, podemos estudiar cómo evoluciona la distribución $\hat{\rho}(\phi)$, ec. (5.115), a través de la transición de fase, y observar explícitamente los efectos generados por las contribuciones fermiónicas $e^{-\Gamma_Q[\Omega]}$. En fig. 5.6 se muestra esta evolución. Por debajo de la transición de

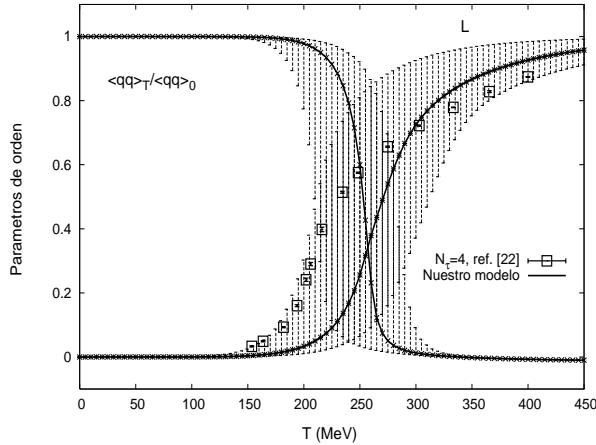


Figura 5.5: Dependencia en temperatura del condensado quiral $\langle\bar{q}q\rangle$ y del valor esperado del loop de Polyakov $L = \langle\text{tr}_c\Omega\rangle/N_c$, obtenido con el modelo NJL basado en la integración sobre el grupo de color SU(3) y considerando correcciones locales en el loop de Polyakov. Se ha tomado $N_f = 2$. Las bandas de error corresponden a una incertidumbre en la tensión de la cuerda $\sigma = 0,181 \pm 0,085 \text{ GeV}^2$. Se compara con los datos del retículo para QCD con 2 sabores, obtenidos en [22].

fase la función de distribución $\hat{\rho}(\phi)$ presenta tres mínimos en valores de ϕ equidistantes, tal y como exige la simetría del centro $\mathbb{Z}(3)$. En este caso el determinante fermiónico no produce una modificación importante. Cuando la transición de fase tiene lugar, aparece una concentración interesante de ángulos en la región cercana al origen $\phi = 0$, debida a los quarks, lo que genera una fuerte rotura de la simetría del centro. A medida que la temperatura aumenta, la distribución del loop de Polyakov tiende a ser más picuda en torno a $\phi = 0$, y este pico domina la integral en ϕ . Notar que la distribución $\hat{\rho}_G(\phi)$ en gluodinámica no presenta rotura explícita de la simetría del centro para ningún valor de T , de modo que el único mecanismo posible en este caso es la rotura espontánea.

Nuestro modelo permite calcular el valor esperado del loop de Polyakov en otras representaciones. En fig. 5.7 se muestra el comportamiento del valor esperado del loop de Polyakov en representación adjunta, $\langle\hat{\text{tr}}_c\hat{\Omega}\rangle/(N_c^2 - 1)$. Para ello hemos hecho uso de la identidad (5.95) con $n = 1$. De acuerdo con los datos del retículo obtenidos con el modelo matricial de ref. [93], el valor esperado se anula por debajo de la transición de fase. Notar que este hecho no se cumple en el tratamiento de campo medio, para el cual se obtiene el valor $-1/(N_c^2 - 1)$ (de ec. (5.95)). El considerar la integración sobre el grupo conduce a unos resultados acordes con lo que se espera de los estudios en el retículo. En fig. 5.7 se muestra también el comportamiento del loop de Polyakov en representación fundamental, y la fluctuación total del loop de Polyakov, que definimos como

$$\delta \equiv \frac{1}{N_c} \sqrt{\langle \text{tr}_c\Omega \text{tr}_c\Omega^{-1} \rangle - \langle \text{tr}_c\Omega \rangle^2} = \frac{1}{N_c} \sqrt{1 + \langle \hat{\text{tr}}_c\hat{\Omega} \rangle - \langle \text{tr}_c\Omega \rangle^2}. \quad (5.117)$$

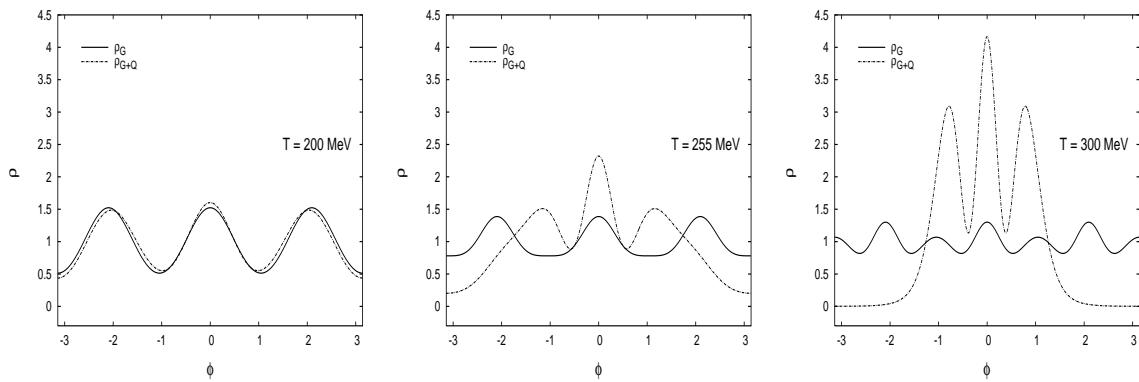


Figura 5.6: Dependencia en temperatura de la distribución del loop de Polyakov $\hat{\rho}(\phi)$, ec. (5.115). $\hat{\rho}_G$ corresponde a la distribución en gluodinámica (sin contribución de quarks) procedente de la medida de Haar junto con el esquema del desarrollo en acoplamientos grandes a orden más bajo, ec. (5.90), y $\hat{\rho}_{G+Q}$ incluye contribuciones de quarks de acuerdo con el modelo NJL. Se toma $N_f = 2$. Se consideran tres temperaturas: $T = 200, 255, 300$ MeV; por debajo de la transición de fase, en la transición y por encima, respectivamente.

δ da cuenta de manera conjunta de las fluctuaciones en la parte real e imaginaria de Ω . Esta fluctuación tiende a cero a temperaturas grandes, lo cual es compatible con el hecho de que la distribución $\hat{\rho}(\phi)$ se hace muy picuda en torno a $\phi = 0$ en el régimen de T grande.

5.8. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado cómo la introducción del loop de Polyakov permite resolver los problemas que presentan los modelos de quarks quirales a temperatura finita en su tratamiento estándar. Con objeto de preservar la invariancia gauge explícita a temperatura finita es necesario mantener de un modo no perturbativo ciertos grados de libertad gluónicos. En la práctica, y en gauges particulares tales como el gauge de Polyakov, esto se corresponde con tratar la componente cero del campo del gluón como un potencial químico dependiente del color en el propagador del quark. Esto da lugar a una fuente de color que va a generar todos los estados posibles de quarks, los cuales pueden no ser singletes de color (incluso a bajas temperaturas, en la fase de confinamiento de color). Para evitar este problema, es necesario proyectar sobre los estados físicos que son singletes de color, lo cual se consigue de un modo elegante haciendo la integral funcional sobre el campo \mathcal{V}_0^c de un modo que se preserve la invariancia gauge.

De este análisis en la aproximación quenched y a nivel de un loop de quarks, encontramos que existe una supresión de los efectos térmicos en los observables hadrónicos por debajo de la transición de fase, que surge de la conservación de la trialidad en una fase

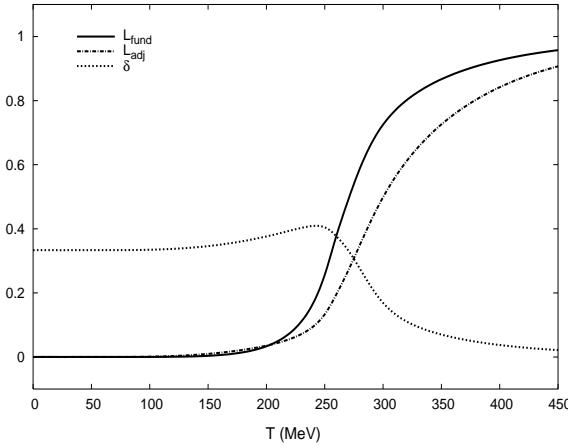


Figura 5.7: Dependencia en temperatura del valor esperado del loop de Polyakov en representación fundamental $\langle \text{tr}_c \Omega \rangle / N_c$ y en representación adjunta $\langle \hat{\text{tr}}_c \hat{\Omega} \rangle / (N_c^2 - 1)$, y fluctuación total del loop de Polyakov δ . Resultados obtenidos en el modelo NJL con integración en el grupo de color SU(3). Se considera $N_f = 2$.

en que la simetría quiral está espontáneamente rota. A este efecto lo hemos denominado *enfriamiento de Polyakov* de las excitaciones de los quarks. En particular, la transición de fase quiral no puede ocurrir antes que la transición de desconfinamiento del color. En esta situación, el mayor cambio a bajas temperaturas en los observables tales como el condensado de quarks debe de provenir de los loops de pseudoscalares, y quizás a temperaturas intermedias de resonancias mesónicas de orden mayor. Esto es precisamente lo que se espera de TPQ o de las aproximaciones unitarias con inclusión efectiva de estos loops en las resonancias.

Nuestros argumentos muestran también cómo, debido al enfriamiento de Polyakov, los modelos de quarks quirales se muestran de acuerdo con las suposiciones teóricas de TQP a temperatura finita. Para ver cómo se materializa esto en la práctica hemos calculado el lagrangiano quiral a temperatura finita a nivel de un loop de quarks y a nivel árbol para los mesones. El lagrangiano resultante se puede descomponer en una parte con la misma estructura que a temperatura cero, pero con constantes de baja energía dependientes de la temperatura, y otra parte con nuevos términos que rompen la invariancia Lorentz, que surgen como consecuencia de que el baño térmico está en reposo. En cualquier caso, los efectos térmicos en las constantes de baja energía a este nivel de aproximación muestran el enfriamiento de Polyakov. En otras palabras, por debajo de la transición de fase cualquier dependencia en temperatura sobre las constantes de baja energía a nivel árbol puede ser despreciada. Ésta es precisamente la suposición inicial de TQP.

En el capítulo hemos analizado algunas consecuencias que se obtienen al considerar el tratamiento de los modelos de quarks quirales acoplados con el loop de Polyakov, más allá de un loop de quarks. Como consecuencia de la integración en el grupo gauge de color $SU(N_c)$, encontramos que para observables que contienen quarks las contribuciones más

importantes a temperaturas pequeñas proceden de loops mesónicos, con una supresión estándar a bajas temperaturas de $\frac{1}{N_c}e^{-2M/T}$. Los loops bariónicos producen contribuciones más pequeñas $e^{-N_cM/T}$. Un análisis de las correcciones gluónicas permite ver que éstas tienden a contribuir de manera apreciable únicamente por encima de la transición de fase.

Hemos estudiado cómo se modifican los resultados al considerar la introducción del determinante de quarks en el cálculo de observables como el condensado quiral y el valor esperado del loop de Polyakov, y se ha hecho asimismo un tratamiento preliminar de las correcciones locales en el loop de Polyakov. Este determinante conduce a una rotura explícita de la simetría del centro, que es más acentuada a temperaturas grandes. Éste es el mecanismo por el cual el modelo quark acoplado con loop de Polyakov genera la transición de fase de desconfinamiento. Un análisis de los resultados muestra que ambas transiciones de fase (quiral y de desconfinamiento) se producen simultáneamente. En el tratamiento unquenched el enfriamiento de Polyakov persiste, aunque es menos efectivo que en el caso quenched. El cálculo del valor esperado del loop de Polyakov en representación adjunta es un ejemplo de que el tratamiento del modelo quark con integración en el grupo gauge de color es más adecuado que el tratamiento de campo medio de ref. [103].

Capítulo 6

Tensor Energía-Impulso de Modelos de Quarks Quirales a bajas energías

El tensor energía-impulso (TEI) juega un papel muy importante en teoría cuántica de campos, pues surge como una corriente de Noether del grupo de Poincaré. Es conservado en todas las teorías locales relativistas, incluso cuando no existen otras cargas conservadas. En QCD, el TEI da cuenta de la interacción de los quarks y gluones con los gravitones.

Desde un punto de vista fenomenológico, las colisiones profundamente inelásticas proporcionan información relevante sobre la fracción de momento que llevan los quarks y los gluones dentro de un hadrón a una escala dada [115]. Las determinaciones basadas en el intercambio de un gravitón están fuera de lugar debido a que la constante de gravitación resulta pequeñísima en comparación con los procesos débiles y fuertes. El factor de forma gravitacional del pión se puede usar para determinar la anchura de desintegración de un bosón de Higgs ligero en dos piones [116]. En el pasado hubo algunos intentos de calcular el TEI en el retículo [117], pero no se han encontrado resultados de interés práctico para los elementos de matriz entre estados hadrónicos con momentos diferentes.

En este capítulo vamos a estudiar la estructura del TEI en varios modelos de quarks quirales.¹ En concreto trataremos el Modelo Quark Constituyente, el Modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [29] y el Modelo de Georgi-Manohar (GM) [119]. El capítulo está basado en la referencia [108].

6.1. Tensor Energía-Impulso

El tensor energía-impulso en cualquier teoría se puede calcular añadiendo una métrica externa $g_{\mu\nu}(x)$ que se acople con los campos de materia de un modo completamente covariante. El TEI se obtiene de calcular la derivada funcional de la acción con respecto a

¹Consideraremos gravedad de Einstein. Esto quiere decir que haremos uso de la conexión de Riemann, definida sin torsión y preservando la métrica. Una extensión a gravedad con torsión es posible [118].

$g_{\mu\nu}(x)$, en torno a la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$,²

$$\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}(x) = \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Big|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} \quad (6.1)$$

donde

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(x). \quad (6.2)$$

A nivel cuántico el comportamiento a alta energía de $\theta_{\mu\nu}$ se puede mejorar si se realizan ciertas correcciones transversales convenientemente elegidas. Al hacer esto se pone de manifiesto una anomalía de la traza que relaciona θ_μ^μ con la divergencia de la corriente de dilatación, lo cual señala la rotura anómala de la invariancia de escala. Un valor esperado diferente de cero para $\langle 0|\theta_\mu^\mu|0 \rangle$ está relacionado con la existencia de un condensado gluónico, que genera identidades de Ward de escala [120].

En el desarrollo en potencias de los momentos externos de los campos que se considera en Teoría Quiral de Perturbaciones, los campos pseudoescalares U y la métrica $g_{\mu\nu}$ son orden $\mathcal{O}(p^0)$. La estructura más general de $\theta_{\mu\nu}$ hasta correcciones de orden cuatro, es [121]

$$\theta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu}^{(0)} + \theta_{\mu\nu}^{(2)} + \theta_{\mu\nu}^{(4)} + \dots \quad (6.3)$$

con

$$\theta_{\mu\nu}^{(0)} = -\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}^{(0)}, \quad (6.4)$$

$$\theta_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{f_\pi^2}{2}\langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}^{(2)}, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}^{(4)} = & -\eta_{\mu\nu}\mathcal{L}^{(4)} + 2L_4\langle D_\mu U^\dagger D_\nu U \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \\ & + L_5\langle D_\mu U^\dagger D_\nu U + D_\nu U^\dagger D_\mu U \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \\ & - 2L_{11}(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)\langle D_\alpha U^\dagger D^\alpha U \rangle \\ & - 2L_{13}(\eta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)\langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \\ & - L_{12}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\partial^2 + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\partial_\beta - \eta_{\nu\alpha}\partial_\mu\partial_\beta)\langle D^\alpha U^\dagger D^\beta U \rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle A \rangle = \text{tr } A$ indica la traza en espacio de sabor. El desarrollo quiral del lagrangiano presenta una estructura del tipo [121]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2,g)} + \mathcal{L}^{(2,R)} + \mathcal{L}^{(4,g)} + \mathcal{L}^{(4,R)} + \dots, \quad (6.6)$$

donde el superíndice g indica contribuciones métricas (acoplamiento mínimo con gravedad), y R indica contribuciones que contienen el tensor de curvatura de Riemann (o sus contracciones). Las contribuciones métricas se pueden obtener directamente del cálculo del lagrangiano quiral efectivo en espacio-tiempo plano. Sin embargo, los términos con $L_{11} - L_{13}$ son contribuciones genuinas de curvatura, pues no se pueden obtener del caso plano. Estos coeficientes de baja energía surgen a nivel hadrónico debido a efectos cuánticos.

²Usaremos el convenio $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

6.2. Acoplamiento de un Modelo Quark con Gravedad

El acoplamiento de fermiones con gravedad es bien conocido [122], pero no en el contexto de modelos de quarks quirales. En esta sección haremos un estudio de este acoplamiento, de modo que no se introduzcan nuevos campos aparte de los del caso plano y la métrica. Usaremos el formalismo de tétradas para espacio-tiempo curvo.³

6.2.1. Formalismo de tétradas

Dado el tensor métrico $g^{\mu\nu}(x)$, introducimos una base local de vectores ortogonales (tétrada)

$$g^{\mu\nu}(x) = e_A^\mu(x) e_B^\nu(x) \eta^{AB}. \quad (6.7)$$

Las tétradas satisfacen ciertas relaciones de ortogonalidad

$$\delta_\nu^\mu = \eta^{AB} e_A^\mu e_{\nu B} = e_A^\mu e_\nu^A, \quad \delta_B^A = g^{\mu\nu} e_\mu^A e_{\nu B} = e_\mu^A e_\nu^B. \quad (6.8)$$

Bajo transformaciones generales de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ y de Lorentz $x^A \rightarrow \Lambda_B^A x^B$, las tétradas se transforman respectivamente como

$$e_\mu^A \rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^A, \quad e_\mu^A \rightarrow \Lambda_B^A(x) e_\mu^B. \quad (6.9)$$

Las tétradas transforman tensores de coordenadas en tensores de Lorentz (que se transforman de manera covariante bajo transformaciones de Lorentz locales), por ejemplo

$$T^{AB} = e_\mu^A e_\nu^B T^{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Los tensores de Lorentz son invariantes bajo transformaciones de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$. Para un tensor general, por ejemplo $T_{\nu A}^\alpha$, los índices griegos se transforman de manera covariante bajo transformaciones de coordenadas mientras que los latinos lo hacen bajo transformaciones de Lorentz, de modo que

$$T_{\nu A}^\alpha \rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \Lambda_A^B(x) T_{\mu B}^\beta. \quad (6.11)$$

La derivada covariante se define como

$$d_\mu T_{\nu A}^\alpha = \partial_\mu T_{\nu A}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda T_{\lambda A}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha T_{\nu A}^\lambda + \omega_{AB\mu} T_{\nu}^{\alpha B}, \quad (6.12)$$

donde la conexión de Riemann viene dada por los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \{ \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} \}, \quad (6.13)$$

³Para convenios, ver ref. [123]

que son simétricos en los índices inferiores, $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$ (no tiene torsión). La derivada covariante d_μ se define con la conexión adecuada actuando sobre cada índice. Se tiene

$$d_\mu e_{\nu A} = \partial_\mu e_{\nu A} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_{\lambda A} + \omega_{AB\mu} e_\nu^B = 0. \quad (6.14)$$

Además, la condición $d_\mu g^{\mu\nu} = 0$, implica en particular

$$d_\mu \eta_{AB} = \omega_{AB\mu} + \omega_{BA\mu} = 0, \quad (6.15)$$

lo cual impone la restricción de que la conexión de espín sea antisimétrica $\omega_{AB\mu} = -\omega_{BA\mu}$. Ésta viene dada por

$$\omega_{AB\mu} = e_A^\nu [\partial_\mu e_{\nu B} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_{\lambda B}] . \quad (6.16)$$

La derivada covariante d_μ actúa de manera diferente dependiendo del espín de los campos correspondientes. Para un campo de espín-0 U , espín-1/2 Ψ , espín-1 A_μ y espín-3/2 Ψ_μ , las propiedades de transformación son las siguientes

$$\begin{aligned} U(x) &\rightarrow U(x), \\ \Psi(x) &\rightarrow S(\Lambda(x))\Psi(x), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x), \quad (6.18)$$

$$\Psi_\mu(x) \rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} S(\Lambda(x))\Psi_\nu(x). \quad (6.19)$$

En el caso de transformaciones de Lorentz infinitesimales $\Lambda_B^A = \delta_B^A + \epsilon_B^A$ con $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$, se tiene $S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{AB}\epsilon^{AB}$ donde $\sigma_{AB} = \frac{i}{2}[\gamma_A, \gamma_B]$. Para un campo escalar de espín-0 se tiene la definición estándar

$$d_\mu U = \partial_\mu U . \quad (6.20)$$

Para un vector (espín-1), se tiene

$$A_{\nu;\mu} := d_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A_\lambda , \quad (6.21)$$

que satisface además la propiedad⁴

$$[d_\mu, d_\nu] A_\alpha = R_{\alpha\mu\nu}^\lambda A_\lambda . \quad (6.24)$$

⁴El tensor de curvatura de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$ se define

$$-R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha , \quad (6.22)$$

y sus contracciones permiten definir el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, y el de curvatura escalar R

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (6.23)$$

Notar el signo opuesto de nuestra definición para el tensor de Riemann en comparación con ref. [121]. Aquí seguimos ref. [123].

En el caso de fermiones de Dirac (espín-1/2) la derivada covariante se define como

$$d_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi(x) - i\omega_\mu \Psi(x), \quad (6.25)$$

donde ω_μ es la conexión de Cartan de espín,

$$\omega_\mu = \frac{1}{4} \sigma^{AB} \omega_{AB\mu}. \quad (6.26)$$

Las matrices de Dirac γ_A se encuentran en una representación fija independiente de x , y satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación

$$\gamma^A \gamma^B + \gamma^B \gamma^A = 2\eta^{AB}. \quad (6.27)$$

Las matrices se pueden elegir

$$\gamma_\mu(x) = \gamma_A e_\mu^A(x) \quad (6.28)$$

y satisfacen

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x). \quad (6.29)$$

La derivada covariante de una matriz de Dirac (independiente de x) es

$$d_\mu \gamma_A = \partial_\mu \gamma_A - i[\omega_\mu, \gamma_A] + \omega_{AB\mu} \gamma^B = 0. \quad (6.30)$$

Teniendo en cuenta ec. (6.14) y (6.30) se obtiene la siguiente identidad para las matrices de Dirac dependientes de x

$$d_\mu \gamma_\nu(x) = 0, \quad (6.31)$$

lo cual quiere decir que para el operador de Dirac libre, el orden de colocación es irrelevante $d\Psi = \gamma^\mu(x) d_\mu \Psi = d_\mu \gamma^\mu(x) \Psi$. Para un tensor de espín-3/2

$$\Psi_{\nu;\mu} := d_\mu \Psi_\nu = \partial_\mu \Psi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Psi_\lambda - i\omega_\mu \Psi_\nu. \quad (6.32)$$

Si aplicamos las definiciones anteriores a $d_\mu \Psi$ se obtienen las siguientes fórmulas, que serán de utilidad

$$[d_\mu, d_\nu] \Psi = \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} \Psi, \quad (6.33)$$

$$d^\mu d_\mu \Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \{ (\partial_\mu - i\omega_\mu) [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu - i\omega_\nu)] \Psi \}, \quad (6.34)$$

donde $\sigma^{\alpha\beta} = e_A^\alpha e_B^\beta \sigma^{AB}$ es una matriz antisimétrica dependiente de x .

Los campos gauge pueden ser incluidos mediante la regla estándar de sustitución mínima, lo cual da lugar a la derivada covariante de un fermión

$$\nabla_\mu \Psi = (d_\mu - iV_\mu) \Psi. \quad (6.35)$$

Con esta notación, el operador de Dirac completo $i\mathbf{D}$ en presencia de campos externos de tipo vector, axial, escalar, pseudoescalar y gravitacionales se escribe⁵

$$i\mathbf{D} = i\cancel{d} - MU^5 - \hat{m}_0 + (\cancel{p} + \cancel{d}\gamma_5 - s - i\gamma_5 p), \quad (6.37)$$

donde la barra indica

$$\cancel{V} = \gamma^\mu(x)V_\mu(x). \quad (6.38)$$

M es la masa constituyente de los quarks y hemos considerado la notación $U^5 = U^{\gamma_5}$. La derivada covariante bajo transformaciones generales de coordenadas, de Lorentz, y quirales, actúa sobre los campos pseudoescalares (espín-0), espinores de Dirac (espín-1/2) y espinores de Rarita-Schwinger (espín-3/2) de acuerdo con las fórmulas siguientes

$$\begin{aligned} \nabla_\mu U &= \hat{D}_\mu U = \partial_\mu U - i[v_\mu, U] - i\{a_\mu, U\}, \\ \nabla_\mu \Psi &= \hat{D}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - i(\omega_\mu + v_\mu + \gamma_5 a_\mu)\Psi, \\ \nabla_\mu \Psi_\nu &= \partial_\mu \Psi_\nu - i(\omega_\mu + v_\mu + \gamma_5 a_\mu)\Psi_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Psi_\lambda, \end{aligned} \quad (6.39)$$

y se corresponden con sustituir la derivada parcial por la derivada covariante $\partial_\mu \rightarrow d_\mu$, dentro de la derivada covariante quiral D_μ . La notación \hat{D}_μ significa la operación $[D_\mu,]$, preservando la quiralidad del objeto (ver ec. (5.70)). Notar que con esta definición, ni el objeto $\hat{D}_\mu \hat{D}_\nu \Psi (\neq \nabla_\mu \nabla_\nu \Psi)$ ni $\hat{D}_\mu \hat{D}_\nu U$ son covariantes coordenados, ya que la segunda derivada no incluye la conexión de Riemann $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

6.2.2. Operador de segundo orden

Cuando no existen fuentes gravitatorias, la contribución de paridad normal a la acción efectiva se obtiene a partir del operador de segundo orden

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_5 \mathbf{D} &= [\cancel{D}_L^2 + i\mathcal{M}^\dagger \cancel{D}_L - i\cancel{D}_R \mathcal{M}^\dagger + \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}] P_R \\ &+ [\cancel{D}_R^2 + i\mathcal{M} \cancel{D}_L - i\cancel{D}_R \mathcal{M} + \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger] P_L, \end{aligned} \quad (6.40)$$

donde \mathbf{D}_5 se define como en ec. (5.24),

$$\mathbf{D}_5[s, p, v, a, U] = \gamma_5 \mathbf{D}[s, -p, v, -a, U^\dagger] \gamma_5. \quad (6.41)$$

\mathbf{D}_5 corresponde a rotar \mathbf{D} a espacio euclídeo, tomar su hermítico conjugado y volver a rotar a espacio de Minkowski. En la expresión (6.40), $P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$, las derivadas covariantes

⁵La matriz pseudoescalar de Dirac en el caso curvo se define

$$\gamma_5(x) = \frac{1}{4! \sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu(x) \gamma_\nu(x) \gamma_\alpha(x) \gamma_\beta(x) = \frac{1}{4!} \epsilon^{ABCD} \gamma_A \gamma_B \gamma_C \gamma_D = \gamma_5. \quad (6.36)$$

quirales son

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i(v_\mu + \gamma_5 a_\mu) = D_\mu^R P_R + D_\mu^L P_L, \\ D_\mu^R &= \partial_\mu - i(v_\mu + a_\mu), \\ D_\mu^L &= \partial_\mu - i(v_\mu - a_\mu), \end{aligned} \quad (6.42)$$

y el término de masa

$$\mathcal{M} = M U^5 + (s + i\gamma_5 p) + \hat{m}_0. \quad (6.43)$$

Los campos gravitatorios se acoplan mediante covariantización del operador de Dirac, esto es con la sustitución $\partial_\mu \rightarrow d_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu^\cdot - i\omega_\mu$ en ec. (6.42). Para fijar la notación, definimos en ec. (6.39) la actuación de la derivada covariante quiral sobre un espinor de Dirac Ψ

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - i(\omega_\mu + v_\mu + \gamma_5 a_\mu). \quad (6.44)$$

Teniendo en cuenta que, puesto que un espinor es un escalar en coordenadas, se tiene

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu \Psi = \nabla_\mu \Psi, \quad (6.45)$$

donde $\nabla_\mu = d_\mu - i(v_\mu + \gamma_5 a_\mu)$. Para el campo escalar en coordenadas $\nabla \Psi$ se puede aplicar el mismo razonamiento, lo cual conduce a

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu \nabla \Psi = \nabla_\mu \nabla \Psi. \quad (6.46)$$

Esto significa que podemos considerar $\mathcal{D}_{L,R} = \nabla_{L,R}$ siempre y cuando actúe sobre campos espinoriales del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_5 \mathbf{D} \Psi &= [\nabla_L^2 + i\mathcal{M} \nabla_L - i\nabla_R \mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}] P_R \Psi \\ &+ [\nabla_R^2 + i\mathcal{M}^\dagger \nabla_L - i\nabla_R \mathcal{M}^\dagger + \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger] P_L \Psi. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Si incluimos los campos gauge, se obtienen dos teorías tipo vector, una para campos left V_μ^L y otra para campos right V_μ^R . Si suprimimos momentáneamente las etiquetas left y right, se tiene

$$\mathcal{D}^2 \Psi = \nabla^2 \Psi = \left[\nabla^\mu \nabla_\mu - \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} R \right] \Psi, \quad (6.48)$$

donde hemos hecho uso de la identidad

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \Psi &= [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \Psi \\ &= [D_\mu, D_\nu] \Psi + \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} \Psi. \end{aligned} \quad (6.49)$$

En la segunda igualdad de ec. (6.49) se ha hecho uso de ec. (6.33). El laplaciano invariante coordenado y Lorentz para un espinor de Dirac viene dado por

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{D}_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu \Psi), \quad (6.50)$$

donde se ha aplicado ec. (6.34). Con la notación quiral de campos right y left, el operador de segundo orden se escribe

$$\mathbf{D}_5 \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\mathcal{D}_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu)] + \mathcal{V}, \quad (6.51)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}_R P_R + \mathcal{V}_L P_L & (6.52) \\ \mathcal{V}_R &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{4} R - i\gamma^\mu \nabla_\mu \mathcal{M} + \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}, \\ \mathcal{V}_L &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^L + \frac{1}{4} R - i\gamma^\mu \nabla_\mu \mathcal{M}^\dagger + \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger. \end{aligned}$$

6.3. Modelos de Quarks Quirales en presencia de Gravedad

En esta sección aprovecharemos los resultados obtenidos en sec. 6.2 y estudiaremos el acoplamiento con gravedad de dos modelos quirales concretos, que tienen en común la incorporación de la rotura dinámica de la simetría quiral a nivel de un loop: el modelo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) y el modelo de Georgi-Manohar.

En estos modelos, los quarks tienen una masa constituyente $M \sim 300$ MeV. La principal diferencia entre ellos tiene que ver con la presencia o no de campos escalares dinámicos $\bar{q}q$, respectivamente. Además, mientras que el modelo NJL genera de manera dinámica la rotura espontánea de la simetría quiral, el modelo GM comienza de por sí en una fase de rotura de la simetría quiral.

6.3.1. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

El modelo de Nambu–Jona-Lasinio se introdujo en la sección 5.2.1. La acción del modelo en espacio-tiempo curvo de Minkowski con tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ se escribe

$$S_{\text{NJL}} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{NJL}}, \quad (6.53)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ y el lagrangiano viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} &= \bar{q}(i\partial^\mu + \psi - \hat{m}_0)q + \frac{1}{2a_s^2} \sum_{a=0}^{N_f^2-1} ((\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}\lambda_a i\gamma_5 q)^2) \\ &\quad - \frac{1}{2a_v^2} \sum_{a=0}^{N_f^2-1} ((\bar{q}\lambda_a \gamma_\mu q)^2 + (\bar{q}\lambda_a \gamma_\mu \gamma_5 q)^2). \end{aligned} \quad (6.54)$$

La derivada $\partial_\mu - i\omega_\mu$ es covariante bajo transformaciones generales de coordenadas y bajo transformaciones de Lorentz, e incluye la conexión de espín

$$\omega_\mu(x) = \frac{i}{8} [\gamma^\nu(x), \gamma_{\nu;\mu}(x)] , \quad (6.55)$$

donde la derivada covariante $\gamma_{\nu;\mu} = d_\mu \gamma_\nu$ se define de la manera usual, ec. (6.21). Haciendo uso del procedimiento estándar de bosonización [101], como se vio en sec. 5.2.1, se introducen campos bosónicos dinámicos internos auxiliares (S, P, V, A) , de modo que después de integrar formalmente los quarks se obtiene el funcional generador

$$Z_{\text{NJL}}[g; s, p, v, a] = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}P \mathcal{D}V \mathcal{D}A e^{i\Gamma_{\text{NJL}}[g; \bar{S}, \bar{P}, \bar{V}, \bar{A}]} , \quad (6.56)$$

con $\bar{S} = s + S$, $\bar{P} = p + P$, $\bar{V} = v + V$, $\bar{A} = a + A$. La acción efectiva es

$$\Gamma_{\text{NJL}}[g; \bar{S}, \bar{P}, \bar{V}, \bar{A}] = \Gamma_q[\mathbf{D}] + \Gamma_m[g; S, P, V, A] , \quad (6.57)$$

donde las contribuciones de los quarks a un loop y de los mesones a nivel árbol se escriben respectivamente

$$\Gamma_q[\mathbf{D}] = -iN_c \text{Tr} \log(i\mathbf{D}) , \quad (6.58)$$

$$\Gamma_m[g; S, P, V, A] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{a_s^2}{4} \text{tr}(S^2 + P^2) + \frac{a_v^2}{4} \text{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) \right\} . \quad (6.59)$$

El operador de Dirac viene dado por

$$i\mathbf{D} = i\partial + \psi - \hat{m}_0 + (\bar{V} + \bar{A} \gamma_5 - \bar{S} - i\gamma_5 \bar{P}) . \quad (6.60)$$

Para que la integral funcional en los campos bosónicos esté bien definida en espacio de Minkowski, es necesario usar la prescripción $a_s^2 \rightarrow a_s^2 - i\epsilon$, $a_v^2 \rightarrow a_v^2 - i\epsilon$. La contribución γ_5 -par de los quarks a la acción efectiva puede ser regularizada mediante el esquema de Pauli-Villars

$$\Gamma_q^+[\mathbf{D}] = -i \frac{N_c}{2} \text{Tr} \sum c_i \log(\mathbf{D}_5 \mathbf{D} + \Lambda_i^2 + i\epsilon) . \quad (6.61)$$

Para más detalles, ver sec. 5.2.1.

6.3.2. Modelo de Georgi-Manohar

En presencia de gravedad, el lagrangiano del modelo de Georgi-Manohar [119] se escribe

$$\mathcal{L}_{\text{GM}} = \bar{q} \left(i\partial + \psi - MU^5 - \hat{m}_0 + \frac{1}{2}(1 - g_A)U^5 i\partial U^5 \right) q =: \bar{q} i\mathbf{D} q , \quad (6.62)$$

donde g_A es el acoplamiento axial de los quarks, que consideraremos diferente de uno, tal y como se sugiere en [119]. La acción efectiva de este modelo es

$$\Gamma_{\text{GM}} = -iN_c \text{Tr} \log(i\mathbf{D}) , \quad (6.63)$$

y por comparación directa con ec. (6.57) se puede ver que se corresponde con un modelo similar al NJL, sin término de masa Γ_m y con un operador de Dirac como ec. (6.60) con una elección específica de los campos dinámicos de espín 1

$$V_\mu = \frac{1}{4}(1 - g_A) [U^\dagger \partial_\mu U - \partial_\mu U^\dagger U], \quad (6.64)$$

$$A_\mu = \frac{1}{4}(1 - g_A) [U^\dagger \partial_\mu U + \partial_\mu U^\dagger U]. \quad (6.65)$$

En ec. (6.63) implementaremos la misma regularización de Pauli-Villars que en el modelo NJL.

6.4. Cálculo de la acción efectiva

En un desarrollo quiral de la acción, la métrica dependiente del espacio-tiempo es de orden cero y la derivada ∂_μ de orden uno. Esto implica en particular que $R^{\mu\nu\alpha\beta}$, $R^{\mu\nu}$, y R son de orden 2. A nivel de un loop de quarks el desarrollo quiral se corresponde con un desarrollo en derivadas que debe de ser invariante bajo transformaciones gauge, de coordenadas y de Lorentz. Este desarrollo a baja energía se puede obtener haciendo uso de la representación de tiempo propio del logaritmo

$$\sum_i c_i \text{Tr} \log (\mathbf{D}_5 \mathbf{D} + \Lambda_i^2) = -\text{Tr} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\tau \mathbf{D}_5 \mathbf{D}} \phi(\tau), \quad (6.66)$$

donde $\phi(\tau) = \sum_i c_i e^{-\tau \Lambda_i^2}$. El operador que está dentro del logaritmo es de tipo Klein-Gordon en espacio-tiempo curvo, y presenta cierta estructura espinorial, como se ve en ec. (6.51). La forma de este operador es la adecuada para hacer un desarrollo del heat kernel en espacio-tiempo curvo. Para el elemento de matriz diagonal se tiene

$$\langle x | e^{-i\tau \mathbf{D}_5 \mathbf{D}} | x \rangle = e^{-i\tau M^2} \langle x | e^{-i\tau (\mathbf{D}_5 \mathbf{D} - M^2)} | x \rangle = \frac{i}{(4\pi i\tau)^2} e^{-i\tau M^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) (i\tau)^n. \quad (6.67)$$

Para el cálculo hasta $\mathcal{O}(p^4)$ es necesario llegar hasta a_4 en el desarrollo del heat kernel. Las contribuciones pueden separarse entre aquellas que son de espacio-tiempo plano, y las correspondientes a curvatura generadas por efectos cuánticos. Por el momento nos centraremos en el modelo NJL. Posteriormente particularizaremos las fórmulas para el modelo GM. Se obtiene lo siguiente [107]

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= M^2 - \bar{\mathcal{V}} + \frac{1}{6}R, \\ a_2 &= \frac{1}{180}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{12}\bar{\mathcal{F}}^{\mu\nu}\bar{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{30}\bar{\nabla}^2 R - \frac{1}{6}\bar{\nabla}^2\bar{\mathcal{V}} + \frac{1}{2} \left[M^2 - \bar{\mathcal{V}} + \frac{1}{6}R \right]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6} \left[M^2 - \bar{\mathcal{V}} + \frac{1}{6} R \right]^3 - \frac{1}{12} \bar{\nabla}^\mu \bar{\mathcal{V}} \bar{\nabla}_\mu \bar{\mathcal{V}} + \mathcal{O}(p^6), \\ a_4 &= \frac{1}{24} [\bar{\mathcal{V}} - M^2]^4 + \mathcal{O}(p^6). \end{aligned} \quad (6.68)$$

La notación que estamos utilizando es $\bar{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = i [\bar{\mathcal{D}}_\mu, \bar{\mathcal{D}}_\nu]$, $\bar{\nabla}^2 \bar{\mathcal{V}} = \bar{\nabla}^\mu \bar{\nabla}_\mu \bar{\mathcal{V}}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}_\mu &= \partial_\mu - i(\bar{V}_\mu + \gamma_5 \bar{A}_\mu), \\ \bar{\nabla}_\mu &= d_\mu - i(\bar{V}_\mu + \gamma_5 \bar{A}_\mu), \end{aligned} \quad (6.69)$$

y $\bar{\mathcal{V}}$ viene dado por la misma expresión (6.52), con la adición de los campos bosónicos internos (S, P, V, A). Las integrales que aparecen en la acción son del tipo

$$\mathcal{I}_{2l} := M^{2l} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) (i\tau)^l e^{-i\tau M^2}. \quad (6.70)$$

Los valores particulares que necesitamos en nuestro desarrollo son

$$M^4 \mathcal{I}_{-4} = -\frac{1}{2} \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2)^2 \log(\Lambda_i^2 + M^2), \quad (6.71)$$

$$M^2 \mathcal{I}_{-2} = \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2) \log(\Lambda_i^2 + M^2), \quad (6.72)$$

$$\mathcal{I}_0 = - \sum_i c_i \log(\Lambda_i^2 + M^2), \quad (6.73)$$

$$\mathcal{I}_{2n} = \Gamma(n) \sum_i c_i \left(\frac{M^2}{\Lambda_i^2 + M^2} \right)^n, \quad \text{Re}(n) > 0. \quad (6.74)$$

Después del cálculo de las trazas de Dirac, el orden $\mathcal{O}(p^2)$ del lagrangiano efectivo en el modelo NJL viene dado por

$$\mathcal{L}_q^{(2)} = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left\{ M^2 \mathcal{I}_0 \langle \bar{\nabla}_\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\mu U \rangle + 2M^3 \mathcal{I}_{-2} \langle \bar{m}^\dagger U + U^\dagger \bar{m} \rangle + \frac{M^2}{6} \mathcal{I}_{-2} \langle R \rangle \right\},$$

mientras que para el orden $\mathcal{O}(p^4)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(4)} &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{1}{6} \mathcal{I}_0 \langle (\bar{F}_{\mu\nu}^R)^2 + (\bar{F}_{\mu\nu}^L)^2 \rangle + \mathcal{I}_0 \langle \frac{7}{720} R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{144} R^2 + \frac{1}{90} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \rangle \right. \\ &\quad - \frac{i}{2} \mathcal{I}_2 \langle \bar{F}_{\mu\nu}^R \bar{\nabla}^\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\nu U + \bar{F}_{\mu\nu}^L \bar{\nabla}^\mu U \bar{\nabla}^\nu U^\dagger \rangle \\ &\quad + \frac{1}{12} \mathcal{I}_4 \langle (\bar{\nabla}_\mu U \bar{\nabla}_\nu U^\dagger)^2 \rangle - \frac{1}{6} \mathcal{I}_4 \langle (\bar{\nabla}_\mu U \bar{\nabla}^\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{6} \mathcal{I}_2 \langle \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu U \bar{\nabla}^\nu \bar{\nabla}^\mu U^\dagger \rangle \\ &\quad + 2M^2 \mathcal{I}_{-2} \langle \bar{m}^\dagger \bar{m} \rangle - M^2 \mathcal{I}_0 \langle (\bar{m}^\dagger U + U^\dagger \bar{m})^2 \rangle \\ &\quad - M \mathcal{I}_2 \langle \bar{\nabla}_\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\mu U (\bar{m}^\dagger U + U^\dagger \bar{m}) \rangle \\ &\quad + M \mathcal{I}_0 \langle \bar{\nabla}_\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\mu \bar{m} + \bar{\nabla}_\mu \bar{m}^\dagger \bar{\nabla}^\mu U \rangle \\ &\quad \left. - \frac{M}{6} \mathcal{I}_0 R \langle U^\dagger \bar{m} + \bar{m}^\dagger U \rangle - \frac{1}{12} \mathcal{I}_2 R \langle \bar{\nabla}_\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\mu U \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

En estas fórmulas $\langle \rangle$ indica traza en espacio de sabor. La derivada covariante gauge y covariante Lorentz, y los tensores de fuerza que contienen los campos externos e internos (bosonizados) son

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\mu U &= \nabla_\mu U - iV_\mu^L U + iUV_\mu^R, \\ \bar{F}_{\mu\nu}^r &= \partial_\mu \bar{V}_\nu^r - \partial_\nu \bar{V}_\mu^r - i[\bar{V}_\mu^r, \bar{V}_\nu^r],\end{aligned}\quad (6.76)$$

con $r = L, R$ y la combinación aditiva de espín 0

$$\bar{m} = (S + iP - MU) + \frac{1}{2B_0}\chi, \quad \chi = 2B_0(s + ip). \quad (6.77)$$

La constante de reescalamiento B_0 se elige de modo que $\mathcal{L}^{(2)}$ quede en la forma estándar de ec. (6.92). Notar que ec. (6.75) no está aún lista para poder ser comparada con el resultado de [27, 121]. Para ello antes debemos eliminar todos los grados de libertad diferentes a los piones en la capa de masas. Procederemos en tres pasos: primero integraremos los grados de libertad vector y axial, después eliminaremos los campos escalares y finalmente haremos uso de las ecuaciones clásicas de movimiento para los pseudoescalares. En el modelo de Georgi-Manohar únicamente será necesario considerar el último paso.

6.5. Ecuaciones de movimiento

6.5.1. Eliminación de los acoplamientos vector y axial

En el modelo NJL, para eliminar los campos vector V_μ y axial A_μ en la aproximación de campo medio es necesario minimizar el lagrangiano con respecto a esos campos. Al orden que estamos considerando el desarrollo quiral, será suficiente con tener en cuenta aquellos términos del lagrangiano que contienen mesones vectoriales con dos índices de Lorentz, esto es, el término de masa y el orden dos que surge del determinante de los quarks

$$\mathcal{L}_{A,V}^{(2)} = \frac{N_c}{(4\pi)^2} M^2 \mathcal{I}_0 \langle \bar{\nabla}_\mu U^\dagger \bar{\nabla}^\mu U \rangle + \frac{a_v^2}{4} \langle V_\mu V^\mu + A_\mu A^\mu \rangle.$$

Al minimizar, las ecuaciones de movimiento que se obtienen son similares a la elección concreta de los campos vector y axial en el modelo de Georgi-Manohar, ecs. (6.64)-(6.65),

$$\bar{V}_\mu^R = v_\mu^R + \frac{i}{2}(1 - g_A)U^\dagger \nabla_\mu U, \quad \bar{V}_\mu^L = v_\mu^L + \frac{i}{2}(1 - g_A)U \nabla_\mu U^\dagger, \quad (6.78)$$

con $g_A = 1 - 2f_\pi^2/a_v^2$. Aplicando estas ecuaciones de movimiento se obtienen fácilmente las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\mu\nu}^R &= \frac{1}{2}(1 + g_A)F_{\mu\nu}^R + \frac{1}{2}(1 - g_A)U^\dagger F_{\mu\nu}^L U \\ &\quad - \frac{i}{4}(1 - g_A^2) (\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U - \nabla_\nu U^\dagger \nabla_\mu U),\end{aligned}\quad (6.79)$$

$$\begin{aligned}\overline{F}_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2}(1-g_A)UF_{\mu\nu}^RU^\dagger + \frac{1}{2}(1+g_A)F_{\mu\nu}^L \\ &\quad - \frac{i}{4}(1-g_A^2)(\nabla_\mu U \nabla_\nu U^\dagger - \nabla_\nu U \nabla_\mu U^\dagger),\end{aligned}\quad (6.80)$$

$$\overline{\nabla}_\mu U = g_A \nabla_\mu U, \quad (6.81)$$

$$\overline{\nabla}^2 U = g_A \nabla^2 U + ig_A(1-g_A)U \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U. \quad (6.82)$$

6.5.2. Eliminación de escalares

En el modelo NJL, la eliminación de los campos escalares se hace de manera similar a la de los campos vector y axial. Consideramos la rotación quiral

$$S + iP = \sqrt{U}\Sigma\sqrt{U}, \quad (6.83)$$

donde $\Sigma^\dagger = \Sigma$, y usando que $\Sigma = M + \Phi$, donde Φ es una fluctuación alrededor del valor del vacío, se tiene

$$\overline{m} = \sqrt{U}\Phi\sqrt{U} + \frac{1}{2B_0}\chi. \quad (6.84)$$

El término de masa se escribe

$$\mathcal{L}_m = -\frac{a_s^2}{4}\langle M^2 + 2M\Phi + \Phi^2 \rangle. \quad (6.85)$$

Haciendo uso de la ecuación del gap (5.29), los términos lineales en Φ que no contienen campos externos se anulan. Como consecuencia, la parte del lagrangiano que contiene al campo escalar Φ es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Phi(x) &= -\frac{N_c}{(4\pi)^2} \left\langle 4M^2\mathcal{I}_0\Phi^2 + \frac{1}{3}M\mathcal{I}_0R\Phi \right. \\ &\quad + M\mathcal{I}_0\sqrt{U}\Phi\sqrt{U^\dagger} \left(U\overline{\nabla}^2 U^\dagger + \overline{\nabla}^2 U U^\dagger \right) \\ &\quad + \frac{M^2}{B_0}(2\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_{-2})\sqrt{U}\Phi\sqrt{U^\dagger}(U\chi^\dagger + U^\dagger\chi) \\ &\quad \left. + \frac{M}{B_0}\mathcal{I}_2\sqrt{U}\Phi\sqrt{U^\dagger}\overline{\nabla}_\mu U\overline{\nabla}^\mu U^\dagger \right\rangle.\end{aligned}\quad (6.86)$$

Minimizando respecto de Φ , la ecuación clásica de movimiento que se obtiene es

$$\begin{aligned}\sqrt{U}\Phi\sqrt{U^\dagger} &= -\frac{1}{24M}R + \frac{1}{4M}\left(1 - \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_0}\right)\overline{\nabla}_\mu U\overline{\nabla}^\mu U^\dagger \\ &\quad - \frac{1}{4B_0}\left(1 - \frac{\mathcal{I}_{-2}}{2\mathcal{I}_0}\right)(U\chi^\dagger + \chi U^\dagger).\end{aligned}\quad (6.87)$$

Sólo queda sustituir esta ecuación dentro del lagrangiano \mathcal{L}_Φ para obtener la contribución del lagrangiano efectivo proveniente de la integración de los campos escalares.

6.5.3. Ecuaciones de movimiento clásicas para pseudoescalares

Las ecuaciones de movimiento relevantes para el campo no lineal U se obtienen minimizando $\mathcal{L}^{(2)}$. Surgen una serie de relaciones que son válidas incluso en presencia de curvatura

$$\langle \nabla^2 U^\dagger \nabla^2 U \rangle = \langle (\nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle (\chi^\dagger U - U^\dagger \chi)^2 \rangle + \frac{1}{12} \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 \quad (6.88)$$

y

$$\begin{aligned} \langle \chi^\dagger \nabla^2 U + \nabla^2 U^\dagger \chi \rangle &= 2 \langle \chi^\dagger \chi \rangle - \frac{1}{2} \langle (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi)^2 \rangle - \langle (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \nabla^\mu U^\dagger \nabla_\mu U \rangle \\ &\quad + \frac{1}{6} \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2. \end{aligned} \quad (6.89)$$

En el caso del grupo $U(3)$ de sabor, se tiene que $\text{Det } U = e^{i\eta_0/f_\pi}$, que no es necesariamente igual a la identidad, y los dos últimos términos $\langle \chi^\dagger U \pm U^\dagger \chi \rangle^2$ en ecs. (6.88) y (6.89) desaparecerán.⁶

6.6. Coeficientes de Gasser-Leutwyler-Donoghue

En el desarrollo quiral del lagrangiano efectivo en la forma de Gasser-Leutwyler-Donoghue de ec. (6.6), las contribuciones métricas son

$$\mathcal{L}^{(2,g)} = \frac{f_\pi^2}{4} \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U + (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle, \quad (6.92)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4,g)} &= L_1 \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle^2 + L_2 \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U \rangle^2 + L_3 \langle (\nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U)^2 \rangle \\ &\quad + L_4 \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + L_5 \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle \\ &\quad + L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 + L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 + L_8 \langle (\chi^\dagger U)^2 + (U^\dagger \chi)^2 \rangle \\ &\quad - i L_9 \langle F_{\mu\nu}^L \nabla^\mu U \nabla^\nu U^\dagger + F_{\mu\nu}^R \nabla^\mu U^\dagger \nabla^\nu U \rangle + L_{10} \langle F_{\mu\nu}^L U F^{\mu\nu R} U^\dagger \rangle \\ &\quad + H_1 \langle (F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2 \rangle + H_2 \langle \chi^\dagger \chi \rangle. \end{aligned} \quad (6.93)$$

⁶Existe otra identidad integral que nos va a resultar muy útil

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \langle \nabla_\mu \nabla_\nu U^\dagger \nabla^\mu \nabla^\nu U \rangle &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\langle \nabla^2 U^\dagger \nabla^2 U \rangle + i \langle F_{\mu\nu}^R \nabla^\mu U^\dagger \nabla^\nu U + F_{\mu\nu}^L \nabla^\mu U \nabla^\nu U^\dagger \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle F_{\mu\nu}^L U F^{\mu\nu R} U^\dagger \rangle + \frac{1}{2} \langle (F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2 \rangle + R^{\mu\nu} \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U \rangle \right]. \end{aligned} \quad (6.90)$$

En el último término aparece el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Para llevar las fórmulas a la forma de Gasser-Leutwyler usamos la siguiente identidad, válida en $SU(3)$

$$\langle (\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U)^2 \rangle = -2 \langle (\nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U)^2 \rangle + \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle^2. \quad (6.91)$$

Las contribuciones con curvatura del lagrangiano quiral se pueden escribir en la forma propuesta en ref. [121], y vienen dadas por

$$\mathcal{L}^{(2,R)} = -H_0 R, \quad (6.94)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4,R)} = & -L_{11}R\langle\nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U\rangle - L_{12}R^{\mu\nu}\langle\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U\rangle - L_{13}R\langle\chi^\dagger U + U^\dagger\chi\rangle \\ & + H_3R^2 + H_4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + H_5R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Los términos de curvatura son un reflejo de la naturaleza compuesta de los campos pseudoscalares, pues en los modelos quirales que estamos considerando estos términos se corresponden con el acoplamiento de los campos gravitatorios externos a nivel de quarks. Un valor no nulo de H_0 indica que existe una renormalización fuerte finita de la constante gravitatoria de Newton G , ya que el lagrangiano clásico de Einstein es $\mathcal{L} = -R/(16\pi G)$.

Notar que la matriz pseudoscalar U es un escalar bajo transformaciones de Lorentz y de coordenadas. Por tanto, después (y sólo después) de haber aplicado las identidades (6.88)-(6.91) se puede sustituir la derivada covariante en Lorentz y coordenadas por la derivada covariante D_μ , esto es $\nabla_\mu U = \hat{D}_\mu U$.

6.6.1. Modelo de Georgi-Manohar

Por simplicidad, comenzaremos mostrando los resultados de los coeficientes de Gasser-Leutwyler-Donoghue para el modelo de Georgi-Manohar, pues en este caso no existe contribución proveniente de campos escalares, esto es, de campos de espín cero y paridad positiva, y la única contribución procede del loop de quarks. Para este modelo, la constante de desintegración débil del pión es

$$f_\pi^2 = \frac{N_c}{4\pi^2} g_A^2 M^2 \mathcal{I}_0. \quad (6.96)$$

El factor de normalización para el campo χ es

$$B_0 = \frac{M}{g_A^2} \frac{\mathcal{I}_{-2}}{\mathcal{I}_0}. \quad (6.97)$$

Con

$$\rho \equiv \frac{M}{B_0} = M \frac{f_\pi^2}{|\langle\bar{q}q\rangle|} = g_A^2 \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}_{-2}} \quad (6.98)$$

el resultado que encontramos para los coeficientes de GLD es

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_c}{48(4\pi)^2} \left[(1 - g_A^2)^2 \mathcal{I}_0 + 4g_A^2(1 - g_A^2) \mathcal{I}_2 + 2g_A^4 \mathcal{I}_4 \right], \quad L_2 = 2L_1, \\ L_3 &= -\frac{N_c}{24(4\pi)^2} \left[3(1 - g_A^2)^2 \mathcal{I}_0 + 8g_A^4 \mathcal{I}_4 + 4g_A^2(3 - 4g_A^2) \mathcal{I}_2 \right], \quad L_4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_5 &= \frac{N_c}{2(4\pi)^2} \rho g_A^2 [\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2] , & L_6 &= 0 , & L_7 &= -\frac{N_c}{24(4\pi)^2 N_f} g_A [6\rho\mathcal{I}_0 - g_A\mathcal{I}_2] , \\
L_8 &= -\frac{N_c}{24(4\pi)^2} [6\rho(\rho - g_A)\mathcal{I}_0 + g_A^2\mathcal{I}_2] , & L_9 &= \frac{N_c}{6(4\pi)^2} [(1 - g_A^2)\mathcal{I}_0 + 2g_A^2\mathcal{I}_2] , \\
L_{10} &= -\frac{N_c}{6(4\pi)^2} [(1 - g_A^2)\mathcal{I}_0 + g_A^2\mathcal{I}_2] , & L_{11} &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} g_A^2 \mathcal{I}_2 , \\
L_{12} &= -\frac{N_c}{6(4\pi)^2} g_A^2 \mathcal{I}_2 , & L_{13} &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} \rho \mathcal{I}_0 = \frac{\rho}{48M^2} \frac{f_\pi^2}{g_A^2} , \\
H_0 &= -\frac{N_c N_f}{6(4\pi)^2} M^2 \mathcal{I}_{-2} = -\frac{N_f}{24} \frac{f_\pi^2}{\rho} , & H_1 &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} [-(1 + g_A^2)\mathcal{I}_0 + g_A^2\mathcal{I}_2] , \\
H_2 &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} [6\rho^2 \mathcal{I}_{-2} - 6\rho(\rho + g_A)\mathcal{I}_0 + g_A^2\mathcal{I}_2] , & & & (6.99) \\
H_3 &= -\frac{N_c N_f}{144(4\pi)^2} \mathcal{I}_0 = -\frac{N_f}{576M^2} \frac{f_\pi^2}{g_A^2} , & H_4 &= \frac{N_c N_f}{90(4\pi)^2} \mathcal{I}_0 , & H_5 &= \frac{7N_c N_f}{720(4\pi)^2} \mathcal{I}_0 .
\end{aligned}$$

Con los valores $M = 300$ MeV y $g_A = 0,75$, el cutoff Λ debe ajustarse para reproducir el valor empírico $f_\pi = 93,2$ MeV. Esto conduce a

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 1470 \text{ MeV} , & B_0 &= 4913 \text{ MeV} , \\
\mathcal{I}_{-2} &= 20,8 , & \mathcal{I}_0 &= 2,26 , & \mathcal{I}_2 &= 0,922 , & \mathcal{I}_4 &= 0,995 . & (6.100)
\end{aligned}$$

El modelo quark quiral constituyente (QC) se corresponde con la elección $g_A = 1$ en los coeficientes anteriores. Si se considera el mismo valor para M , para este modelo se tiene

$$\begin{aligned}
\Lambda &= 828 \text{ MeV} , & B_0 &= 1299 \text{ MeV} , \\
\mathcal{I}_{-2} &= 5,50 , & \mathcal{I}_0 &= 1,27 , & \mathcal{I}_2 &= 0,781 , & \mathcal{I}_4 &= 0,963 . & (6.101)
\end{aligned}$$

En la tabla 6.1 se muestran los valores numéricos de los coeficientes de GLD.

6.6.2. Modelo de Nambu–Jona-Lasinio

Los coeficientes de GLD en este modelo tendrán dos contribuciones diferentes: una proveniente del loop de quarks e integración posterior de los campos de espín 1, y otra proveniente de la integración de los campos de espín 0. Para la primera contribución se tienen las mismas expresiones de ec. (6.99). La constante de desintegración débil del píon es

$$f_\pi^2 = \frac{N_c}{4\pi^2} g_A M^2 \mathcal{I}_0 . \quad (6.102)$$

Notar que en este modelo f_π^2 tiene una potencia en g_A , mientras que en el modelo de GM la potencia es g_A^2 , ec. (6.96). La diferencia se debe a la ausencia del término de masa \mathcal{L}_m en el modelo GM. Nuestra notación será la siguiente

$$B_0 = \frac{a_s^2 M}{2f_\pi^2} = \frac{M}{g_A} \frac{\mathcal{I}_{-2}}{\mathcal{I}_0} , \quad g_A = 1 - 2 \frac{f_\pi^2}{a_v^2} . \quad (6.103)$$

Con

$$\rho \equiv \frac{M}{B_0} = g_A \frac{\mathcal{I}_0}{\mathcal{I}_{-2}}, \quad (6.104)$$

las contribuciones de espín 0⁺ son

$$\begin{aligned} L_3^S &= \frac{N_c}{4(4\pi)^2} \frac{g_A^4}{\mathcal{I}_0} [\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2]^2, & L_5^S &= \frac{N_c}{4(4\pi)^2} g_A^2 (g_A - 2\rho) [\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2], \\ L_8^S &= \frac{N_c}{16(4\pi)^2} (g_A - 2\rho)^2 \mathcal{I}_0, \\ L_{11}^S &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} g_A^2 [\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2], & L_{13}^S &= \frac{N_c}{24(4\pi)^2} (g_A - 2\rho) \mathcal{I}_0, \\ H_2^S &= 2L_8^S, & H_3^S &= \frac{N_c N_f}{144(4\pi)^2} \mathcal{I}_0 = \frac{N_f}{576M^2} \frac{f_\pi^2}{g_A}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

El resto de coeficientes L_i^S, H_i^S son cero. La suma de las dos contribuciones (loop de quarks y escalares) dará los coeficientes de GLD para este modelo. El resultado es el siguiente

$$\begin{aligned} L_3 &= -\frac{N_c}{24(4\pi)^2} \left[3(1 - 2g_A^2 - g_A^4) \mathcal{I}_0 + 8g_A^4 \mathcal{I}_4 + 2g_A^2 \left(2(3 - g_A^2) - 3g_A^2 \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_0} \right) \mathcal{I}_2 \right], \\ L_5 &= \frac{N_c}{4(4\pi)^2} g_A^3 [\mathcal{I}_0 - \mathcal{I}_2], & L_8 &= \frac{N_c}{48(4\pi)^2} g_A^2 [3\mathcal{I}_0 - 2\mathcal{I}_2], \\ L_{11} &= \frac{N_c}{12(4\pi)^2} g_A^2 \mathcal{I}_0 = \frac{g_A f_\pi^2}{48M^2}, & L_{13} &= \frac{N_c}{24(4\pi)^2} g_A \mathcal{I}_0 = \frac{f_\pi^2}{96M^2}, \\ H_2 &= \frac{N_c}{24(4\pi)^2} [12\rho^2 \mathcal{I}_{-2} + 3g_A(g_A - 8\rho) \mathcal{I}_0 + 2g_A^2 \mathcal{I}_2], & H_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6.106)$$

El resto de coeficientes: $L_1, L_2, L_4, L_6, L_7, L_9, L_{10}, L_{12}, H_0, H_1, H_4$ y H_5 ; coinciden con los del modelo de GM (fórmulas (6.99)). Notar, no obstante, que las expresiones de f_π^2 no coinciden en los dos modelos [ec. (6.96) y (6.102)].

Este modelo reproduce la relación $L_3 = -6L_1$, siempre y cuando se desprecien los términos $\mathcal{O}(N_c g_A^4)$. Existen algunas diferencias con trabajos previos. Los valores $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_9, L_{10}, H_1$ y H_2 coinciden con ref. [105]. L_8 difiere en dos potencias de g_A en el término proporcional a \mathcal{I}_2 . (Nuestros resultados reproducen los suyos para cada contribución por separado: contribución del loop de quarks y contribución de espín cero.)

El valor de L_7 es diferente de cero, si se considera la condición $\text{Det}(U) = 1$ debido a que estamos considerando la simetría de sabor $SU(N_f)$. Tanto en ref. [105] como en [106] este término no se obtiene, a pesar de que en estos trabajos se menciona explícitamente que consideran el grupo de sabor $SU(N_f)$. En el grupo $U(N_f)$ sí se obtiene que $L_7 = 0$.

Nuestros valores de L_4, L_5, L_6, L_8, L_9 y L_{10} coinciden con los de [106]. En esta referencia aparece un término erróneo extra en L_1 . L_3 se diferencia de ref. [106] en todos los factores excepto uno en \mathcal{I}_4 . H_1 y H_2 no aparecen en esa referencia.

Los coeficientes L_{11}, L_{12} y L_{13} , así como $H_{0,3-5}$, son nuevos y constituyen el resultado principal de este capítulo. L_{11-13} fueron obtenidos también hace algún tiempo en un

modelo quiral que incluye bosonización [124], y más recientemente en el modelo quark espectral [107] (ver capítulo 7).

Los valores numéricos de estos coeficientes, ec. (6.106), aparecen en la tabla 6.1 para dos casos diferentes: el modelo NJL SU(3) generalizado, y el caso en que no se considera la integración de los campos de espín 1, esto es $g_A = 1$. Para el primer caso se considera como valor razonable $g_A = 0,606$. Con $M = 300$ MeV, se tiene

$$\begin{aligned}\Lambda &= 1344 \text{ MeV}, & B_0 &= 4015 \text{ MeV}, \\ \mathcal{I}_{-2} &= 17,0, & \mathcal{I}_0 &= 2,10, & \mathcal{I}_2 &= 0,907, & \mathcal{I}_4 &= 0,993.\end{aligned}\quad (6.107)$$

Para el modelo NJL con $g_A = 1$, los valores numéricos de Λ , B_0 , ρ y \mathcal{I}_{2n} son idénticos a los del modelo quark constituyente QC, ec. (6.101). Las LEC's en el modelo NJL con $g_A = 1$ y en el QC se diferencian debido a la contribución de los escalares $L_{3,5,8,11,13}^S$ y $H_{2,3}^S$, que no están presentes en el caso QC.

6.6.3. Resultados

En la tabla 6.1 aparecen los resultados que hemos obtenido para los modelos de quarks quirales que se han tratado en este capítulo: Quark Constituyente, Nambu–Jona-Lasinio con y sin mesones vectoriales, y Georgi-Manohar. Se ha incluido también el resultado del cálculo en el modelo Quark Espectral del capítulo 7. La primera columna se corresponde con el cálculo de TQP a dos loops [125]. Se incluye también el resultado obtenido en el modelo basado en N_c grande con saturación por una única resonancia [126].

Los resultados para las constantes de baja energía coinciden a grandes rasgos. Como regla, todos los modelos y ajustes dan el mismo signo para todos los coeficientes, con la excepción de H_0 y H_2 en el modelo Quark Espectral. Para los coeficientes de Gasser-Leutwyler estándar L_{1-10} el mejor acuerdo global con el cálculo de TQP a dos loops [125] es el proporcionado por el modelo NJL con mesones vectoriales, para el que la chi cuadrada reducida es $\chi^2/DOF = 2,2$, ($DOF = 10$), si bien los modelos QC y GM proporcionan resultados de calidad similar: 2,5 y 3,6 respectivamente.

Para los coeficientes nuevos no existen en la literatura valores ampliamente aceptados. El acuerdo más cercano con las estimaciones de N_c grande y saturación de resonancias de [121] para L_{11-13} es el de NJL sin mesones vectoriales, para el que $\chi^2/DOF = 0,29$, pero esto no es totalmente concluyente. Asimismo, es importante mencionar el notable acuerdo entre las predicciones del modelo Quark Espectral para estos tres coeficientes y aquellas provenientes del modelo quiral de bosonización de ref. [124], para el que se obtiene

$$L_{11} = 1,58 \cdot 10^{-3}, \quad L_{12} = -3,2 \cdot 10^{-3}, \quad L_{13} = 0,3 \cdot 10^{-3}. \quad (6.108)$$

6.7. Conclusiones

En este capítulo hemos calculado las constantes de baja energía del tensor energía-impulso en varios modelos de quarks quirales: Quark Constituyente, Nambu–Jona-Lasinio

Cuadro 6.1: Constantes adimensionales de baja energía y H_0 comparadas con otros modelos y con el valor que dan algunas referencias. Los valores mostrados para L_{1-13}, H_{1-5} deben ser multiplicados por 10^{-3} . El valor de H_0 debe multiplicarse por 10^3 MeV 2 .

	TQP ¹	NJL	NJL ($g_A = 1$)	QC	GM	SQM ² (MDM)	Large N_c ³	Dual ² Large N_c
L_1	0.53 ± 0.25	0.77	0.76	0.76	0.78	0.79	0.9	0.79
L_2	0.71 ± 0.27	1.54	1.52	1.52	1.56	1.58	1.8	1.58
L_3	-2.72 ± 1.12	-4.02	-2.73	-3.62	-4.25	-3.17	-4.3	-3.17
L_4	0	0	0	0	0	0	0	0
L_5	0.91 ± 0.15	1.26	2.32	1.08	0.44	2.0 ± 0.1	2.1	3.17
L_6	0	0	0	0	0	0	0	0
L_7	-0.32 ± 0.15	-0.06	-0.26	-0.26	-0.03	-0.07 ± 0.01	-0.3	
L_8	0.62 ± 0.20	0.65	0.89	0.46	0.04	0.08 ± 0.04	0.8	1.18
L_9	5.93 ± 0.43	6.31	4.95	4.95	6.41	6.33	7.1	6.33
L_{10}	-4.40 ± 0.70^4	-5.25	-2.47	-2.47	-4.77	-3.17	-5.4	-4.75
L_{11}	1.85 ± 0.90^5	1.22	2.01	1.24	0.82	1.58	1.6 ⁵	
L_{12}	-2.7 ⁵	-1.06	-2.47	-2.47	-1.64	-3.17	-2.7 ⁵	
L_{13}	1.7 ± 0.80^5	1.01	1.01	0.47	0.22	0.33 ± 0.01	1.1 ⁵	
H_0		-14.6	-4.67	-4.67	-17.7		1.09	
H_1		-4.01	-2.78	-2.78	-4.76			
H_2		1.46	1.45	0.59	0.49	-1.0 ± 0.2		
H_3		0	0	-0.50	-0.89			
H_4		1.33	0.80	0.80	1.43			
H_5		1.16	0.70	0.70	1.25			

(1) Cálculo a dos loops de ref. [125].

(2) Ref. [107], capítulo 7.

(3) Ref. [126].

(4) Ref. [127].

(5) Ref. [121].

con y sin mesones vectoriales, y Georgi-Manohar. Algunas de estas constantes se obtienen directamente de los coeficientes estándar de Gasser-Leutwyler, mientras que otras, L_{11-13} y $H_{0,3-5}$, son nuevas y proceden de operadores que no están presentes en el lagrangiano quiral en espacio plano.

Técnicamente, el mejor modo de proceder es considerar QCD en un espacio-tiempo curvo, ya que nos permite trabajar con el lagrangiano a bajas energías, en lugar de su variación (el tensor energía-impulso). Esto hace más fácil tanto el cálculo como la imposición de las restricciones debidas a las simetrías. El lagrangiano quiral en espacio-tiempo curvo contiene dos tipos de contribuciones. Por una parte, aquellas que surgen de un acoplamiento mínimo del lagrangiano en espacio plano con la métrica, $\mathcal{L}^{(g)}$, y por otra aquellas contribuciones que contienen el tensor de curvatura de Riemann $\mathcal{L}^{(R)}$. En el espíritu de no introducir nuevos

campos diferentes a la métrica, hemos considerado únicamente la gravedad de Einstein. En el caso de que se considerara torsión o violación de la metricidad, en principio podrían aparecer nuevos términos. Al igual que ocurre con los acoplamientos gauge (por ejemplo, los momentos magnéticos), los términos gravitatorios $\mathcal{L}^{(R)}$ no pueden fijarse a partir de la covariancia general del lagrangiano quiral, y para obtenerlos es necesario acoplar directamente gravedad con los quarks y los gluones de QCD antes de integrar los campos y obtener el lagrangiano de bajas energías.

Hemos calculado en estos modelos de quarks quirales las constantes de baja energía con un cierto grado de éxito, y hemos aplicado la misma aproximación para los términos con curvatura $\mathcal{L}^{(R)}$. El acuerdo entre todos los modelos es razonable. Una comparación con los valores de TQP a dos loops [125] sugiere que NJL con mesones vectoriales es el que mejor funciona para los coeficientes estándar. Para los nuevos coeficientes L_{11-13} , el mejor acuerdo proviene de NJL sin mesones vectoriales, si bien el resultado no es concluyente.

Capítulo 7

Modelo Quark Espectral y Acción Efectiva Quiral

La estructura de QCD a bajas energías en presencia de fuentes electrodébiles y gravitacionales se describe muy bien mediante Teoría Quiral de Perturbaciones (TQP) [25, 27, 121]. En el sector mesónico, la rotura espontánea de la simetría quiral es dominante a bajas energías y el cálculo sistemático de las correspondientes constantes de baja energía (LEC's) ha sido llevado a cabo recientemente hasta una precisión de dos loops [125, 127] o mediante el uso de las ecuaciones de Roy [128]. Para los procesos fuertes y electrodébiles que involucran mesones pseudoescalares, la mayor parte de las LEC's están saturadas en términos de resonancias de intercambio [126], que pueden ser justificadas en el límite de N_c grande en una cierta aproximación de bajas energías [129]. En el caso de procesos gravitacionales se pueden aplicar las mismas ideas [121]. Hoy en día, TQP se usa como un test cualitativo y cuantitativo para cualquier modelo de la estructura de los hadrones a bajas energías.

En este capítulo nos proponemos analizar, en el contexto de TQP con espacio-tiempo curvo, el modelo quark espectral propuesto recientemente en ref. [100]. En primer lugar se mostrará cómo calcular la acción efectiva de este modelo a un loop de quarks, y algunas de sus propiedades. Posteriormente se hará un estudio de la parte anómala de la acción efectiva, con la obtención del término estándar de Wess-Zumino-Witten. Se verá que la anomalía que se obtiene con este modelo coincide con la anomalía de QCD. Se aplicará el formalismo desarrollado en el capítulo 6 para el cálculo de la contribución no anómala de la acción efectiva, y se obtendrán las expresiones correspondientes para los coeficientes de baja energía (LEC). Con el fin de considerar una realización explícita del modelo espectral, se considerará éste dentro de un esquema de dominancia del mesón vectorial, lo cual permitirá encontrar valores concretos para las LEC's y comparar con resultados de otros modelos presentados en el capítulo 6. Finalmente se compararán las predicciones del modelo espectral para estas constantes con las obtenidas en la aproximación de una única resonancia (SRA) en el límite de N_c grande [121, 129], lo cual conducirá a unas relaciones de dualidad entre los canales vector y escalar.

Este capítulo está basado en la referencia [107].

7.1. Acción Efectiva del Modelo Quark Espectral

En la sección 5.2.2 introdujimos el modelo quark espectral. La aproximación es similar en espíritu al modelo de Efimov e Ivanov [130], propuesto hace algunos años, y se basa en la introducción formal de la representación de Lehmann generalizada para el propagador del quark. La acción efectiva que obedece las identidades de Ward-Takahashi mediante la técnica de Delbourgo y West [102] corresponde en nuestro caso a una prescripción de sustitución mínima. Esto conduce a un determinante fermiónico de la forma¹

$$\Gamma_{\text{SQM}}[U, s, p, v, a, g] = -iN_c \int_{\mathcal{C}} d\omega \rho(\omega) \text{Tr} \log(i\mathbf{D}), \quad (7.2)$$

donde el operador de Dirac viene dado por

$$i\mathbf{D} = i\cancel{d} - \omega U^5 - \hat{m}_0 + (\cancel{\psi} + \cancel{d}\gamma_5 - s - i\gamma_5 p) = iD - \omega U^5. \quad (7.3)$$

Estamos trabajando en espacio-tiempo curvo de Minkowski. La derivada d_μ es derivada covariante bajo transformaciones generales de coordenadas y transformaciones de Lorentz, e incluye la conexión de espín. El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es la fuente externa que representa el acoplamiento con un campo gravitatorio. La matriz $U^5 = U^{\gamma_5}$ es la matriz de sabor que representa el octete de mesones pseudoescalares en la representación no lineal. Este operador de Dirac transforma de manera covariante bajo transformaciones quirales locales.² En lo sucesivo consideraremos el modelo con $N_f = 3$.

Si se considera la matriz U en el sector U(3) de sabor, la anomalía U(1)_A se puede tener en cuenta añadiendo el término habitual [26]

$$\mathcal{L}_A = -\frac{f_\pi^2}{4} m_{\eta_1}^2 \left\{ \theta - \frac{i}{2} [\log \det \bar{U} - \log \det \bar{U}^\dagger] \right\}^2, \quad (7.4)$$

donde $U = \bar{U} e^{i\eta_8/(3f_\pi)}$, con $\det \bar{U} = 1$. Para $\theta = 0$ este término es invariante CP y SU(N_f)_L × SU(N_f)_R.

La acción efectiva del modelo tiene un aspecto similar a la del modelo NJL bosonizado (ver sección 6.3). La principal diferencia tiene que ver con la interpretación del método de regularización. Por una parte, en los modelos NJL únicamente se puede regularizar sobre loops de quarks (líneas de quark cerradas). El hecho de que en el modelo quark espectral la “regularización” de Lehmann se produzca sobre líneas de quark abiertas tiene importantes consecuencias en cuanto a la consistencia de los cálculos a energías altas tanto en una interpretación puramente hadrónica como partónica.

¹Para un operador bilocal $A(x, x')$ (matrices en espacio de Dirac y de sabor) se tiene

$$\text{Tr} A = \int d^4x \sqrt{-g} \text{tr} \langle A(x, x) \rangle, \quad (7.1)$$

donde tr indica traza de Dirac y $\langle \rangle$ traza en espacio de sabor.

²Para un estudio sobre el acoplamiento con gravedad de los modelos de quarks quirales, ver secciones 6.2 y 6.3.

Dado que el contorno de integración para la variable espectral ω es en general complejo, resulta complicado pasar a espacio euclídeo y separar la acción en una parte real y otra imaginaria. En lugar de espacio euclídeo, podemos considerar el espacio de Minkowski e introducir, como hicimos en sec. 6.2.2, el operador auxiliar

$$-i\mathbf{D}_5 = \gamma_5 \left(i\cancel{d} - \omega U^{5\dagger} - \hat{m}_0 + \cancel{p} - \gamma_5 \cancel{d} - s + i\gamma_5 p \right) \gamma_5. \quad (7.5)$$

De este modo, la acción efectiva con paridad normal se escribe

$$\Gamma_{\text{SQM}}^+ = -\frac{i}{2} N_c \int_{\mathcal{C}} d\omega \rho(\omega) \text{Tr} \log (\mathbf{D}_5 \mathbf{D}). \quad (7.6)$$

7.2. Anomalías Quirales

Una de las ventajas más importantes de la regularización espectral es que conduce a observables hadrónicos finitos e independientes de la escala, lo cual es un requerimiento básico de todo procedimiento de regularización. No obstante, esto no significa o implica necesariamente que la acción efectiva total en presencia de campos externos sea finita, ya que incluso en el caso de que los campos piónicos sean cero, $U = 1$, existen procesos no hadrónicos. En realidad, ocurre que la renormalización de la función de onda del fotón es proporcional a ρ'_0 [100], de modo que depende de la escala μ y por tanto diverge en ciertos esquemas de regularización (por ejemplo, en regularización dimensional). Esta dependencia en escala surge también en otros términos no hadrónicos de la acción efectiva.

En [100] se encuentra que las desintegraciones $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ y $\gamma \rightarrow 3\pi$ se muestran de acuerdo con los valores correctos que se esperan de la anomalía quiral de QCD. Con ayuda de la acción efectiva, ec. (7.2), vamos a ver en esta sección que esto es cierto también para todos los procesos anómalos. En primer lugar calcularemos la anomalía quiral, y mostraremos que en presencia de campos externos la anomalía no depende del campo piónico U , y por tanto coincide con la anomalía en QCD debido a las condiciones espectrales $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$. Despues veremos cómo surge en este contexto el término estándar de Wess-Zumino-Witten [131, 132].

7.2.1. Cálculo de la anomalía quiral

Bajo transformaciones quirales locales (vector y axial) el operador de Dirac se transforma

$$\mathbf{D} \rightarrow e^{+i\epsilon_V(x) - i\epsilon_A(x)\gamma_5} \mathbf{D} e^{-i\epsilon_V(x) - i\epsilon_A(x)\gamma_5}, \quad (7.7)$$

con

$$\epsilon_V(x) = \sum_a \epsilon_V^a(x) \lambda_a, \quad \epsilon_A(x) = \sum_a \epsilon_A^a(x) \lambda_a. \quad (7.8)$$

Infinitesimalmente, la transformación es

$$\delta\mathbf{D} = i[\epsilon_V, \mathbf{D}] - i\{\epsilon_A\gamma_5, \mathbf{D}\}. \quad (7.9)$$

Si consideramos una transformación quiral en la acción efectiva, ec. (7.2), sin ninguna regularización adicional, se tiene

$$\delta S = -iN_c \text{Tr} \int_C d\omega \rho(\omega) [\delta \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1}]. \quad (7.10)$$

Teniendo en cuenta la propiedad cíclica de la traza, se obtiene sólo una contribución procedente de la variación axial

$$\delta_A S \equiv \mathcal{A}_A = \int d^4x \text{tr} \int_C d\omega \rho(\omega) \langle 2i\epsilon_A \gamma_5 \rangle = \rho_0 \int d^4x \text{tr} \langle 2i\epsilon_A \gamma_5 \rangle, \quad (7.11)$$

un resultado que es ambiguo incluso en presencia de regularización espectral, debido a la traza dimensional infinita [38]. Para evitar la ambigüedad es necesario introducir una regularización extra. Como es bien sabido, no existe una regularización que preserve la simetría quiral, de modo que la anomalía es generada.

El cálculo se puede hacer con métodos estándares. Una regularización conveniente es la regularización ζ [133], que permite calcular directamente la anomalía a partir del propio operador de Dirac (no su cuadrado), y no precisa de ninguna redefinición de la matriz γ_5 . Esto conduce a

$$\begin{aligned} \delta_A S \equiv \mathcal{A}_A &= \text{Tr} \int_C d\omega \rho(\omega) (2i\epsilon_A \gamma_5 [i\mathbf{D}]^0) \\ &= \int d^4x \text{tr} \int_C d\omega \rho(\omega) \langle 2i\epsilon_A(x) \gamma_5 \langle x | \mathbf{D}^0 | x \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde la potencia cero del operador de Dirac se entiende como una continuación analítica que puede escribirse en términos de coeficientes de Seeley-DeWitt para operadores de Dirac [133]:

$$\begin{aligned} \langle x | \mathbf{D}^0 | x \rangle &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{D}^4 + \frac{1}{3} (\mathbf{D}^2 \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\mu \mathbf{D}^2 \Gamma_\mu + \Gamma_\mu^2 \mathbf{D}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (\Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu^2 + (\Gamma_\mu \Gamma_\nu)^2 + \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde $\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \mathbf{D}\}$. La combinación $\{\gamma_\mu, \mathbf{D}\}$ es un operador multiplicativo, de modo que equivale a una función. El resultado para acoplamientos generales en cuatro dimensiones ha sido obtenido de [133]. Una inspección directa muestra que, puesto que la dependencia en ω viene dada por $i\mathbf{D} = iD - \omega U^5$, el resultado se puede escribir como la suma de un término independiente de ω más un polinomio en ω

$$\mathcal{A}_A = \int_C d\omega \rho(\omega) (\mathcal{A}_A[s, p, v, a] + \mathcal{A}_A[s, p, v, a, \omega, U]) = \rho_0 \mathcal{A}_A[s, p, v, a], \quad (7.14)$$

donde el término polinómico dependiente de ω se anula, por las condiciones espectrales (los momentos positivos son cero). Esto muestra que la anomalía del modelo quark espectral coincide con la anomalía de QCD después de introducir una regularización adicional conveniente, independientemente de los detalles de la función espectral. Esto es un punto importante, ya que si la acción efectiva $\Gamma[U, s, p, v, a]$ en ec. (7.2) fuera finita e invariante quiral, aparentemente no habría razón para la existencia de anomalías.

7.2.2. Término de Wess-Zumino-Witten

Mostraremos aquí dónde y cómo surgen estas divergencias. Por simplicidad, consideremos el límite quiral $\hat{m}_0 = 0$, los campos externos los haremos cero y trabajaremos en espacio-tiempo plano, de modo que $i\mathbf{D} = i\partial$. Conseguiremos una representación conveniente si introducimos el campo

$$U_t^5 = e^{it\sqrt{2}\gamma_5\Phi/f_\pi}, \quad (7.15)$$

que permite interpolar entre el vacío $U_{t=0}^5 = \mathbf{1}$, y la matriz completa $U_{t=1}^5 = U^5$. Podemos escribir la siguiente identidad trivial para la acción efectiva con sustracción del vacío:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{SQM}}[U, s, p, v, a] - \Gamma_{\text{SQM}}[\mathbf{1}, s, p, v, a] &= -iN_c \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \int_C d\omega \rho(\omega) \text{Tr} \log (iD - \omega U_t^5) \\ &= iN_c \int_0^1 dt \int_C d\omega \rho(\omega) \text{Tr} \left[\omega \frac{dU_t^5}{dt} \frac{1}{iD - \omega U_t^5} \right]. \end{aligned}$$

Puesto que estamos interesados en procesos con paridad anormal, es suficiente con identificar los términos que contienen el tensor de Levi-Civitá $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, que por invariancia Lorentz precisan de al menos cuatro derivadas. Teniendo en cuenta el hecho de que las derivadas actúan sobre su derecha, se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{SQM}}^{-(4)} &= -iN_c \int_0^1 dt \int_C d\omega \rho(\omega) \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \omega^2]^5} \\ &\times \text{Tr} \left\{ -\omega \gamma_5 U_t^\dagger \frac{dU_t}{dt} \omega \left[\omega U_t^\dagger i\partial U_t \right]^4 \right\}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde el superíndice (4) indica $\mathcal{O}(p^4)$. Tras el cálculo de las trazas e integrales, finalmente se obtiene

$$\Gamma_{\text{SQM}}^{-(4)} = \rho_0 \frac{N_c}{48\pi^2} \int_0^1 dt \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \langle U_t^\dagger \frac{dU_t}{dt} U_t^\dagger \partial^\mu U_t U_t^\dagger \partial^\nu U_t U_t^\dagger \partial^\alpha U_t U_t^\dagger \partial^\beta U_t \rangle,$$

que coincide con el término de Wess-Zumino-Witten (WZW) [131, 132], si usamos que $\rho_0 = 1$. Los campos externos pueden ser incluidos mediante el uso de ec. (7.16), lo cual genera el término de WZW en la forma de Bardeen. En realidad, la diferencia $\Gamma_{\text{SQM}}[U, s, p, v, a] - \Gamma_{\text{SQM}}[\mathbf{1}, s, p, v, a]$ es finita y preserva invariancia gauge, pero rompe la simetría quiral lo cual genera la anomalía de ec. (7.14).

7.3. Desarrollo quiral de la acción efectiva

A partir de la acción de ec. (7.2) podemos calcular el desarrollo en derivadas en el contexto de espacio-tiempo curvo (para los detalles, ver la sección 6.4). Teniendo en cuenta la fórmula del desarrollo del heat kernel, ec. (6.67), los coeficientes que se obtienen son los mismos que se obtuvieron en el modelo NJL, ec. (6.68), con la salvedad de considerar la sustitución $M \rightarrow \omega$, y el hecho de que en el modelo espectral no se introducen campos internos auxiliares para bosonizar (los símbolos no tienen barra: $\mathcal{V}, \nabla_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}$). Después de usar las condiciones espectrales $\rho_n = 0, n > 0$, la contribución de paridad normal para la acción efectiva se escribe

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \text{Tr} \log \mathbf{D}_5 \mathbf{D} &= -\frac{1}{2} \frac{N_c}{(4\pi^2)} \int d^4x \sqrt{-g} \int_C d\omega \rho(\omega) \\ &\times \text{tr} \left\langle -\frac{1}{2} \omega^4 \log \omega^2 a_0 + \omega^2 \log \omega^2 a_1 - \log(\omega^2/\mu^2) a_2 + \frac{1}{\omega^2} a_3 + \frac{1}{\omega^4} a_4 + \dots \right\rangle \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(4)} + \dots) . \end{aligned} \quad (7.17)$$

Después del cálculo de las trazas de Dirac, para el orden $\mathcal{O}(p^2)$ del lagrangiano efectivo se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \int_C \rho(\omega) \left\{ -\omega^2 \log \omega^2 \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle \right. \\ &+ \left. 2\omega^3 \log \omega^2 \langle m^\dagger U + U^\dagger m \rangle + \omega^2 \log \omega^2 \frac{1}{12} \langle R \rangle \right\} , \end{aligned} \quad (7.18)$$

y para el orden $\mathcal{O}(p^4)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)} &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \int_C \rho(\omega) \left\{ \right. \\ &+ \frac{1}{6} \log \omega^2 \langle (F_{\mu\nu}^R)^2 + (F_{\mu\nu}^L)^2 \rangle - \log \omega^2 \langle \frac{7}{720} R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{144} R^2 + \frac{1}{90} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \rangle \\ &- \frac{i}{3} \langle F_{\mu\nu}^R \nabla_\mu U^\dagger \nabla_\nu U + F_{\mu\nu}^L \nabla_\mu U \nabla_\nu U^\dagger \rangle + \frac{1}{12} \langle (\nabla_\mu U \nabla_\nu U^\dagger)^2 \rangle - \frac{1}{6} \langle (\nabla_\mu U \nabla^\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ &+ \frac{1}{6} \langle \nabla^\mu \nabla^\nu U \nabla_\mu \nabla_\nu U^\dagger \rangle - \frac{1}{6} \langle F_{\mu\nu}^L U F_{\mu\nu}^R U^\dagger \rangle \\ &+ \log \omega^2 \langle 2 \langle m^\dagger m \rangle + \langle (m^\dagger U + U^\dagger m)^2 \rangle \rangle \\ &- \frac{1}{2} \omega \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U (m^\dagger U + U^\dagger m) \rangle - \log \omega^2 \omega \langle \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu m + \nabla_\mu m^\dagger \nabla^\mu U \rangle \\ &\left. - \omega \log \omega^2 \frac{1}{6} R \langle U^\dagger m + m^\dagger U \rangle + \frac{1}{12} R \nabla_\mu U^\dagger \nabla^\mu U \rangle \right\} . \end{aligned} \quad (7.19)$$

En estas fórmulas $m \equiv s + ip = \chi/2B_0$. Notar que los momentos que aparecen hasta este orden son $\rho_0 = 1, \rho_1 = 0$ y $\rho_2 = 0$, así como los momentos logarítmicos ρ'_0, ρ'_1 y ρ'_2 . Tras aplicar las ecuaciones de movimiento clásicas del campo U , ecs. (6.88)-(6.89), la identidad

integral de ec. (6.90) y la identidad válida en $SU(3)$, ec. (6.91), se llega a la forma estándar del lagrangiano dada por ecs. (6.92)-(6.93) para las contribuciones métricas y ecs. (6.94)-(6.95) para las contribuciones con curvatura. Los valores que se obtienen para la constante de desintegración débil del pión y el condensado de quarks en el límite quiral son

$$f_\pi^2 = -\frac{4N_c}{(4\pi)^2} \rho'_2, \quad (7.20)$$

$$f_\pi^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle = \frac{4N_c}{(4\pi)^2} \rho'_3, \quad (7.21)$$

y los coeficientes LEC's se escriben

$$\begin{aligned} L_3 &= -2L_2 = -4L_1 = -\frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho_0}{6}, & L_4 = L_6 = 0, \\ L_5 &= -\frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho'_1}{2B_0}, & L_7 = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{1}{2N_f} \left(\frac{\rho'_1}{2B_0} + \frac{\rho_0}{12} \right), \\ L_8 &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left[\frac{\rho'_2}{4B_0^2} - \frac{\rho'_1}{4B_0} - \frac{\rho_0}{24} \right], & L_9 = -2L_{10} = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho_0}{3}, \\ L_{12} &= -2L_{11} = -\frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho_0}{6}, & L_{13} = -\frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho'_1}{12B_0} = \frac{1}{6} L_5, \\ H_0 &= -\frac{f_\pi^2 N_f}{4} \frac{1}{6}, & H_1 = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{\rho'_0}{6}, & H_2 = \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left(\frac{\rho'_2}{B_0^2} + \frac{\rho'_1}{2B_0} + \frac{\rho_0}{12} \right), \\ H_3 &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} N_f \frac{\rho'_0}{144}, & H_4 = -\frac{N_c}{(4\pi)^2} N_f \frac{\rho'_0}{90}, & H_5 = -\frac{N_c}{(4\pi)^2} N_f \frac{7\rho'_0}{720}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

El valor para L_7 se corresponde con el modelo $SU(3)$ de sabor. Para el modelo $U(3)$, se obtiene del cálculo que $L_7 = 0$, pero entonces el término de ec. (7.4) debería ser añadido, de modo que el valor de L_7 se modificaría.

Como vemos, los coeficientes $L_1, L_2, L_3, L_4, L_6, L_9, L_{10}$ son números puros, y coinciden con los que se esperan en el límite en que la regularización se elimina [104]. Esto tiene que ver con el carácter adimensional de las LEC's, y que involucran por tanto el momento cero $\rho_0 = 1$. El hecho de que H_1 sea proporcional a ρ'_0 se corresponde con una función de onda del campo gauge dependiente de la escala, o divergente. Quiere esto decir que la parte finita de H_1 depende del esquema de regularización.

A partir de los valores de $f_\pi^2 = 93,2 \text{ MeV}$ y $L_5 = 2,1 \cdot 10^{-3}$ [126], se obtiene

$$\begin{aligned} L_7 &= -\frac{L_5}{2N_f} + \frac{N_c}{384\pi^2 N_f} \simeq -0,09 \cdot 10^{-3}, \\ L_8 &= \frac{L_5}{2} - \frac{N_c}{384\pi^2} - \frac{f_\pi^2}{16B_0^2} \simeq 0,13 \cdot 10^{-3}, \\ H_2 &= -L_5 + \frac{N_c}{192\pi^2} - \frac{f_\pi^2}{4B_0^2} \simeq -1,02 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

En cuanto a las contribuciones con curvatura, el valor no nulo de H_0 conduce a una corrección fuerte para la constante gravitatoria de Newton G . Esta corrección es proporcional al cociente entre la escala hadrónica y la escala de Planck $2\pi N_f f_\pi^2 G/3$, lo cual es numéricamente despreciable.

7.4. Resultados para el Modelo de Dominancia Vectorial

Hasta ahora todas nuestras consideraciones han sido hechas para una función espectral general sujeta a una serie de propiedades que deben cumplir sus momentos y momentos logarítmicos. Es deseable construir una forma explícita para esta función pues esto conducirá a importantes consecuencias fenomenológicas del modelo. Con este fin, en ref. [100] se adopta la siguiente expresión para el factor de forma del píon

$$F_V(t) = \frac{M_V^2}{M_V^2 + t}, \quad (7.24)$$

donde M_V indica la masa del mesón ρ . Esta forma corresponde al *esquema de dominancia del mesón vectorial*, que reproduce muy bien los datos experimentales recientes [134]. La expresión del factor de forma del píon que se deriva del modelo espectral depende de los momentos pares y negativos de $\rho(\omega)$. Por comparación con (7.24) se llega a la siguiente identificación [100]

$$\rho_{2-2n} = \frac{2^{2n+3}\pi^{3/2}f_\pi^2}{N_c M_V^{2n}} \frac{n\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.25)$$

La condición $\rho_0 = 1$ conduce a

$$f_\pi^2 = \frac{N_c M_V^2}{24\pi^2}, \quad (7.26)$$

que es una relación que se obtiene a menudo en los modelos de quarks quirales cuando se considera este esquema de dominancia. Esto proporciona una estimación razonable de la masa del mesón ρ , $M_V = 826$ MeV para $f_\pi = 93$ MeV, y $M_V = 764$ MeV para $f_\pi = 86$ MeV en el límite quiral.

Notar que si en (7.25) hiciéramos una prolongación analítica en el índice n , obtendríamos para los momentos positivos $\rho_{2n} = 0$, $n = 2, 3, \dots$ debido a que la función $\Gamma(n)$ presenta singularidades en enteros no positivos. Los momentos logarítmicos de $\rho(\omega)$ se pueden evaluar fácilmente mediante prolongación analítica de los momentos ρ_n en el plano complejo de n [100],

$$\rho'_n = \int_C d\omega \log(\omega^2) \omega^n \rho(\omega) = 2 \frac{d}{dz} \int_C d\omega \omega^z \rho(\omega) \Big|_{z=n} = 2 \frac{d}{dz} \rho_z \Big|_{z=n}, \quad (7.27)$$

que conduce a

$$\rho'_{2n} = \left(-\frac{M_V^2}{4}\right)^n \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{5}{2}-n)}{\Gamma(5/2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.28)$$

Los momentos contienen toda la información necesaria para cálculos prácticos, sin embargo resulta interesante escribir una fórmula explícita para la función espectral. El problema matemático consiste en invertir la fórmula $\rho_{2n} = \int_{\mathcal{C}} d\omega \omega^{2n} \rho_V(\omega)$, con los momentos dados por (7.25). La solución del problema conduce a [100]

$$\rho_V(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\omega} \frac{1}{(1 - 4\omega^2/M_V^2)^{d_V}}, \quad (7.29)$$

con $d_V = 5/2$. Esta función presenta un polo simple en el origen, y cortes de rama que empiezan en $\omega = \pm M_V/2$.

La función espectral vector, ρ_V , corresponde a la parte par de la función ρ : $\rho_V(\omega) = (\rho(\omega) + \rho(-\omega))/2$. Para la parte impar, que denominaremos función espectral escalar, $\rho_S(\omega) = (\rho(\omega) - \rho(-\omega))/2$, debe suponerse una cierta forma funcional que sea adecuada, que satisfaga las condiciones espectrales impares $\rho_{2n+1} = 0$, $n \geq 0$, y reproduzca el valor del momento logarítmico $\rho'_3 = -4\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle / N_c$, (ec. (7.21)). En ref. [100] se sugiere una forma análoga a ec. (7.29),

$$\rho_S(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \frac{16(d_S - 1)(d_S - 2)\rho'_3}{M_S^4(1 - 4\omega^2/M_S^2)^{d_S}}. \quad (7.30)$$

Los datos del retículo para la masa constituyente de los quarks favorece el valor $d_S = 5/2$ [100].

En el modelo de dominancia vectorial (MDM), el propagador del quark de ec. (5.33) se escribe

$$S(p) = \int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{\rho_V(\omega) \not{p} + \rho_S(\omega) \omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{Z(p^2)}{\not{p} - M(p^2)}, \quad (7.31)$$

donde el contorno de integración \mathcal{C} consta de dos partes. La primera comienza en $+\infty - i0$ siguiendo el eje real positivo, rodea el polo $+M_V/2$ haciendo una media circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, y vuelve a $+\infty + i0$ siguiendo el mismo eje real positivo. La segunda parte del contorno comienza en $-\infty + i0$ y sigue el eje real negativo hasta el polo $-M_V/2$, lo rodea en sentido de las agujas del reloj, y vuelve a $-\infty - i0$ siguiendo el mismo eje real negativo. Estas dos secciones están conectadas en el infinito con semicírculos. Este contorno de integración es el que se usa para ρ_V . Para ρ_S se considera el mismo contorno \mathcal{C} , salvo que los polos están en $\pm M_S/2$.

En este modelo se obtienen los siguientes valores para los momentos logarítmicos

$$\begin{aligned} \rho'_1^{\text{MD}} &= \frac{8\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle}{N_c M_S^2} = -\frac{5M_Q M_S^2}{6M_V^2}, \\ \rho'_2^{\text{MD}} &= -\frac{4\pi^2 f_\pi^2}{N_c} = -\frac{M_V^2}{6}, \\ \rho'_3^{\text{MD}} &= -\frac{4\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle}{N_c} = \frac{5M_Q M_S^4}{12M_V^2}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

donde M_Q es la masa constituyente de los quarks, que viene dada por [100]

$$M_Q \equiv M(0) = -\frac{48M_V^2\pi^2\langle\bar{q}q\rangle}{5N_cM_S^4}. \quad (7.33)$$

Haciendo uso de estos valores se tiene

$$L_5 = \frac{N_c}{96\pi^2} \frac{M_V^2}{M_S^2}, \quad (7.34)$$

$$L_7 = \frac{N_c}{32\pi^2 N_f} \left(\frac{1}{12} - \frac{M_V^2}{6M_S^2} \right), \quad (7.35)$$

$$L_8 = \frac{N_c}{16\pi^2} \left(-\frac{M_V^{10}}{150M_Q^2M_S^8} + \frac{M_V^2}{12M_S^2} - \frac{1}{24} \right). \quad (7.36)$$

En la tabla 6.1 del capítulo 6 se muestran los resultados correspondientes al modelo quark espectral en su realización MDM para las constantes $L_{5,7,8}$, así como las predicciones para $L_{1,2,3,4,6,9,10}$, que son comunes al esquema de [104]. Además aparecen los coeficientes L_{11-13} , correspondientes a las contribuciones con curvatura del lagrangiano quiral. Estos valores numéricos se han obtenido considerando $M_V = 770$ MeV, $M_S = 970(21)$ MeV y $M_Q = 303(24)$ MeV.³

Para el modelo espectral en su versión SU(2) de sabor, en ausencia de correcciones de loops mesónicos, se tiene⁴

$$\bar{l}_1 = -\bar{l}_2 = -\frac{1}{2}\bar{l}_5 = -\frac{1}{4}\bar{l}_6 = -N_c, \quad (7.37)$$

$$\bar{l}_3 = \frac{4N_c}{3} + \frac{16N_cM_V^{10}}{75M_Q^2M_S^8}, \quad (7.38)$$

$$\bar{l}_4 = \frac{2N_cM_V^2}{3M_S^2}. \quad (7.39)$$

Los radios cuadráticos medios vector y escalar del pión vienen dados por [25]

$$\langle r^2 \rangle_V = \frac{1}{16\pi^2 f_\pi^2} \bar{l}_6 = \frac{6}{M_V^2}, \quad \langle r^2 \rangle_S = \frac{3}{8\pi^2 f_\pi^2} \bar{l}_4 = \frac{6}{M_S^2}. \quad (7.40)$$

Las componentes escalar (espín-0) y tensorial (espín-2) de los factores de forma gravitacionales (θ_0 y θ_2 respectivamente) [121], producen el mismo radio cuadrático medio

$$\langle r^2 \rangle_{G,0} = \langle r^2 \rangle_{G,2} = \frac{N_c}{48\pi^2 f_\pi^2}, \quad (7.41)$$

³Para una discusión sobre estos resultados y su comparación con otros modelos, ver sección 6.6.3. Estos valores de M_S y M_Q se han obtenido en ref. [100] a partir de un ajuste con el modelo espectral de los datos para la masa constituyente de los quarks obtenidos en el retículo [135].

⁴Hacemos uso de las relaciones dadas en ref. [27] para pasar de la forma del lagrangiano quiral en SU(3) a la forma en SU(2). Estas relaciones son $\bar{l}_1 = 192\pi^2(2L_1 + L_3)$, $\bar{l}_2 = 192\pi^2L_2$, $\bar{l}_3 = 256\pi^2(2L_4 + L_5 - 4L_6 - 2L_8)$, $\bar{l}_4 = 64\pi^2(2L_4 + L_5)$, $\bar{l}_5 = -192\pi^2L_{10}$, $\bar{l}_6 = 192\pi^2L_9$, $\bar{l}_{11} = 192\pi^2L_{11}$, $\bar{l}_{13} = 256\pi^2l_{13}$. La constante l_{12} no está renormalizada por el loop piónico.

independientemente de la realización particular del modelo espectral. Si saturamos los factores de forma con mesones escalares y tensoriales f_0 y f_2 , para sus masas se tiene

$$M_{f_0} = M_{f_2} = 4\pi f_\pi \sqrt{3/N_c} = 1105 - 1168 \text{ MeV}, \quad (7.42)$$

dependiendo de si se toma $f_\pi = 88$ o 93 MeV, respectivamente. El valor experimental para el mesón tensorial más ligero es $M_{f_2}^{\text{exp}} = 1270$ MeV. Tal y como se discute en [121], el factor de forma θ_0 (correspondiente a la traza del tensor energía-impulso) se acopla con mesones escalares, mientras que θ_2 (correspondiente a la parte de $\theta_{\mu\nu}$ sin traza) se acopla con mesones tensoriales (espín-2).

Hay que decir que el mesón escalar de masa M_{f_0} , que domina el tensor energía-impulso, no necesariamente coincide con el mesón escalar de masa M_S , que domina el factor de forma escalar. En realidad se tiene $M_{f_0} = \sqrt{2}M_V$, mientras que M_S es una magnitud libre. Esto surge de manera natural en la aproximación espectral, donde el factor de forma escalar F_S en el límite quiral involucra los momentos impares, mientras que θ_0 involucra los pares. En particular, los radios cuadráticos medios son proporcionales a ρ'_1 y ρ_0 , respectivamente.

7.5. Límite de N_c grande y Dualidad

En virtud del hecho de que nuestro resultado se ha obtenido en la aproximación de un loop de quarks,⁵ no podemos esperar que el modelo dé mejores resultados para las LEC's que la contribución de orden más bajo en un conteo en N_c , el cual está formado por un número infinito de intercambios de resonancias [129]. Por otra parte, el cálculo de estas contribuciones en N_c grande requiere el uso de suposiciones adicionales, tales como la convergencia de una serie infinita de estados y, por otra parte, una estimación de las contribuciones de las resonancias más altas. En la práctica, se puede trabajar en la aproximación de una única resonancia (SRA), lo cual conduce a una reducción de los parámetros [121, 129]:

$$2L_1^{\text{SRA}} = L_2^{\text{SRA}} = \frac{1}{4}L_9^{\text{SRA}} = -\frac{1}{3}L_{10}^{\text{SRA}} = \frac{f_\pi^2}{8M_V^2}, \quad (7.43)$$

$$L_5^{\text{SRA}} = \frac{8}{3}L_8^{\text{SRA}} = \frac{f_\pi^2}{4M_S^2}, \quad (7.44)$$

$$L_3^{\text{SRA}} = -3L_2^{\text{SRA}} + \frac{1}{2}L_5^{\text{SRA}}, \quad (7.45)$$

$$2L_{13}^{\text{SRA}} = 3L_{11}^{\text{SRA}} + L_{12}^{\text{SRA}} = \frac{f_\pi^2}{4M_{f_0}^2}, \quad (7.46)$$

$$L_{12}^{\text{SRA}} = -\frac{f_\pi^2}{2M_{f_2}^2}, \quad (7.47)$$

donde f_π , M_V y M_S indican las contribuciones de orden más bajo en N_c para estas magnitudes. En la obtención de estas fórmulas para $L_1 - L_{10}$, se han ajustado las contribuciones de

⁵El modelo espectral no se ha desarrollado más allá de un loop.

los mesones pseudoescalares y axiales con objeto de reproducir las reglas de suma quirales para las funciones de correlación de dos puntos VV-AA y SS-PP, además de exigir un comportamiento convergente a altas energías para los factores de forma hadrónicos.⁶ Obviamente, el imponer más ligaduras a cortas distancias implica el uso de más resonancias.

Los valores de $L_{11,12,13}$ se han obtenido del intercambio de una única resonancia escalar y tensorial [121]. Por una parte, es necesario considerar un mesón tensorial con objeto de proporcionar un valor no nulo para L_{12} , y por otra parte, los mesones tensoriales contribuyen también a otras LEC's [136], lo cual no está tenido en cuenta en ecs. (7.43)-(7.47). Por tanto, con objeto de simplificar la discusión, en lo que sigue nos restringiremos a los acoplamientos no gravitacionales $L_1 - L_{10}$. Notar que, si bien el poder predictivo es grande, se consigue en términos de dos razones adimensionales f_π/M_V y f_π/M_S . Obviamente, en el límite quiral se espera que tanto M_V como M_S escalen como f_π . Por tanto, con objeto de preservar las reglas de conteo en N_c grande, se debería tener que

$$M_V = c_V f_\pi / \sqrt{N_c}, \quad M_S = c_S f_\pi / \sqrt{N_c}, \quad (7.48)$$

donde c_V y c_S son coeficientes independientes de N_c . El hecho sorprendente es que en el modelo quark espectral, las constantes de baja energía dependen de las razones adimensionales ρ'_1/B_0 y ρ'_2/B_0^2 . En vista de esto, resulta tentador calcular los momentos logarítmicos espetrales a partir de las reglas de N_c grande, de un modo que sea modelo-independiente. En primer lugar vemos que las razones $L_1 : L_2 : L_9$ en el modelo quark espectral coinciden con las de SRA. Los valores de L_5 y L_8 pueden ser usados para determinar ρ'_1 y ρ'_2 respectivamente, de modo que se tiene

$$\rho'_1^{\text{SRA}} = \frac{8\pi^2 \langle \bar{q}q \rangle}{N_c M_S^2}, \quad (7.49)$$

$$\rho'_2^{\text{SRA}} = -\frac{4\pi^2 f_\pi^2}{N_c} = -\frac{M_V^2}{6}, \quad (7.50)$$

lo cual está de acuerdo con ecs. (7.34) y (7.26). Esto no es sorprendente, pues la física de SRA y del modelo quark espectral en su versión MDM es similar. La única diferencia es que de ecs. (7.49)-(7.50) no se puede deducir el valor de la masa constituyente de los quarks $M_Q = M(0)$, que viene dada por el cociente $M_Q = \rho_{-1}/\rho_{-2}$ (ecs. (5.35)-(5.36)). Para determinar M_Q sería necesario calcular los términos de $\mathcal{O}(p^6)$ en el lagrangiano quiral y comparar con SRA en el límite N_c grande.

Por otra parte, no es posible hacer compatibles L_8 o L_{10} . El desacuerdo con los correspondientes valores en N_c grande se debe a que el modelo espectral viola la regla de suma SS-PP y la segunda regla de Weinberg VV-AA. Esta violación también ocurre en otros modelos de quarks [137, 138] (no ocurre en los modelos no locales; ver [139, 140]). En efecto, en el modelo no existe intercambio de mesón axial en L_{10} (1/4 de la contribución total) ni de mesón pseudoescalar en L_8 (1/4 de la contribución total). Por otra parte, para el valor de f_π que se obtiene de ec. (7.26), las constantes $L_1, L_2, L_4, L_5, L_6, L_9$

⁶En particular, $M_P/M_S = M_A/M_V = \sqrt{2}$, donde M_P es la masa del pión excitado.

reproducen las identidades en N_c grande que aparecen en [126]. Este acuerdo se puede ver en la tabla 6.1 si se considera un factor de corrección $24\pi^2 f_\pi^2/N_c M_V^2 = 1,15$. Se podría forzar que L_3 coincidiera con la estimación de N_c grande tomando $M_V = M_S$. Esto concuerda con la observación en la aproximación unitaria quiral de ref. [141], de que en el límite de N_c grande, los mesones escalar y vector son degenerados.⁷ Por tanto, el intentar compatibilizar el límite de N_c grande en la SRA con el modelo quark espectral produce una degeneración de los mesones escalar y vector. Esta degeneración fue sugerida en [142] en el contexto de reglas de suma superconvergentes y han sido interpretadas más recientemente en base a simetrías que se restablecen [143].

Parece claro que cualquier modificación en el modelo quark espectral afectará únicamente a L_8 y L_{10} . Si se considera $M_S = M_V = 2\pi f_\pi \sqrt{6/N_c}$ para N_c grande en la aproximación SRA, se obtienen las siguientes relaciones de dualidad

$$2L_1 = L_2 = -\frac{1}{2}L_3 = \frac{1}{2}L_5 = \frac{2}{3}L_8 = \frac{1}{4}L_9 = -\frac{1}{3}L_{10} = \frac{N_c}{192\pi^2}. \quad (7.51)$$

Esto conduce a las relaciones de dualidad para las masas

$$M_A = M_P = \sqrt{2}M_V = \sqrt{2}M_S = 4\pi \sqrt{\frac{3}{N_c}} f_\pi. \quad (7.52)$$

La nueva relación $M_A = M_P$ concuerda con el valor experimental dentro del error del 30 % que se espera de considerar el límite N_c grande. Haciendo uso de ec. (7.40) se obtiene

$$\langle r^2 \rangle_S^{1/2} = \langle r^2 \rangle_V^{1/2} = \frac{\sqrt{N_c}}{2\pi f_\pi}. \quad (7.53)$$

Estas relaciones están sujetas a correcciones en m_π y en órdenes más altos en N_c . Numéricamente se tiene

$$\langle r^2 \rangle_S^{1/2} = \langle r^2 \rangle_V^{1/2} = 0,58 - 0,62 \text{ fm}, \quad (7.54)$$

dependiendo de si se toma $f_\pi = 88$ o 93 MeV. El valor del radio escalar es próximo al que se obtiene de TQP hasta dos loops [144], $0,78$ fm.

En el caso SU(2), el modelo de dualidad con N_c grande conduce a

$$-\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = \frac{3}{2}\bar{l}_3 = \frac{3}{2}\bar{l}_4 = \frac{1}{3}\bar{l}_5 = \frac{1}{4}\bar{l}_6 = N_c. \quad (7.55)$$

Los valores recientes obtenidos a partir del análisis de la colisión $\pi\pi$ a nivel de dos loops [144] y de factores de forma vector y escalar [145] a dos loops son

$$\begin{aligned} \bar{l}_1 &= -0,4 \pm 0,6, & \bar{l}_2 &= 6,0 \pm 1,3, & \bar{l}_3 &= 2,9 \pm 2,4, \\ \bar{l}_4 &= 4,4 \pm 0,2, & \bar{l}_5 &= 13,0 \pm 1,0, & \bar{l}_6 &= 16,0 \pm 1,0. \end{aligned} \quad (7.56)$$

⁷Para $N_c = 3, 10, 20, 40$, en ref. [141] se obtiene $M_S/M_V = 0,58, 0,84, 0,96, 0,98$, respectivamente, con M_S y M_V las partes reales de los polos en la segunda hoja de Riemann.

Los coeficientes \bar{l} son más susceptibles de poder compararse con TQP ya que los loops quirales generan un cambio constante $c = \log(\mu^2/m^2)$, que es el mismo para todos ellos. Por tanto, tiene sentido comparar diferencias donde los logaritmos se cancelan.

$$\begin{aligned}\bar{l}_2 - \bar{l}_1 &= 2N_c \quad (\text{Exp. } 6,4 \pm 1,4), \\ \bar{l}_3 - \bar{l}_1 &= \frac{5N_c}{3} \quad (\text{Exp. } 3,3 \pm 2,5), \\ \bar{l}_4 - \bar{l}_1 &= \frac{5N_c}{3} \quad (\text{Exp. } 4,8 \pm 0,6), \\ \bar{l}_5 - \bar{l}_1 &= 4N_c \quad (\text{Exp. } 13,4 \pm 1,2), \\ \bar{l}_6 - \bar{l}_1 &= 5N_c \quad (\text{Exp. } 16,4 \pm 1,2).\end{aligned}\tag{7.57}$$

El acuerdo es excelente dentro de las incertidumbres, y esto sugiere una precisión del orden de $1/N_c^2$ en lugar de la que cabría esperar *a priori* $1/N_c$.

El cambio constante de los loops piónicos se produce con una escala $\mu = 513 \pm 200$ MeV, lo cual es comparable con la masa del mesón ρ . Considerando las ecs. (7.43)-(7.45) correspondientes a SRA, con los valores físicos $f_\pi = 93,2$ MeV, $M_S = 1000$ MeV y $M_V = 770$ MeV, tal y como se hace en [129], se tiene

$$\bar{l}_2 - \bar{l}_1 = 8,3, \quad \bar{l}_3 - \bar{l}_1 = 6,2, \quad \bar{l}_4 - \bar{l}_1 = 6,2, \quad \bar{l}_5 - \bar{l}_1 = 15,2, \quad \bar{l}_6 - \bar{l}_1 = 18,7. \tag{7.58}$$

Se podrían obtener unos valores más razonables considerando $M_S = 600$ MeV, pero entonces la relación SRA, $M_P = \sqrt{2}M_S$, predicaría un valor demasiado pequeño para la masa del estado piónico excitado.

Esta discusión favorece fenomenológicamente las relaciones de dualidad ec. (7.51) frente a las relaciones de SRA, ecs. (7.43)-(7.45), con parámetros físicos.

7.6. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado el desarrollo quiral en el modelo quark espectral propuesto recientemente, en presencia de fuerzas externas electrodébiles y gravitatorias. El modelo está basado en una representación de Lehmann para el propagador del quark con una función espectral no convencional, que es en general una función compleja con cortes de rama. Se ha escrito la acción efectiva que reproduce las identidades de Ward-Takahashi, y gracias a una serie infinita de condiciones espectrales hemos obtenido la contribución anómala quiral a la acción. Esta contribución aparece convenientemente normalizada sin necesidad de eliminar la regularización. Además, la contribución no anómala se puede escribir en términos de 13 constantes de baja energía. Los valores numéricos muestran un acuerdo razonable con los esperados fenomenológicamente, si bien existen algunas discrepancias para L_8 y L_{10} . Éstas se podrían explicar de manera natural como fallos del modelo a la hora de reproducir las condiciones quirales a cortas distancias, y sugiere que éste necesita ser mejorado. Por otra parte, si se intenta comparar las LEC's no-gravitacionales restantes con las predicciones de N_c grande en la aproximación de una única resonancia, tiene lugar

una nueva reducción de parámetros. En particular, el mejor acuerdo se encuentra para el caso de mesones escalar y vector degenerados.

Se han estimado las LEC's gravitatorias L_{11} , L_{12} y L_{13} en el contexto de los modelos de quarks quirales. Estas constantes dependen de las propiedades de curvatura de la métrica en espacio-tiempo curvo. Este cálculo permite la determinación de algunos elementos de matriz del tensor energía-impulso. Nuestro análisis sugiere que el acoplamiento del mesón escalar con el condensado de quarks $m_0\bar{q}q$, y el mesón escalar acoplado con la traza del tensor energía-impulso θ_μ^μ , no coinciden necesariamente. Estos dos operadores se comportan de manera diferente bajo simetría quiral, ya que $m_0\bar{q}q$ se anula en el límite quiral mientras que θ_μ^μ no lo hace. Esto se materializa en el modelo quark espectral en el hecho de que estos dos mesones escalares dependen de momentos espectrales impares y pares, respectivamente. Por otra parte, se obtiene $M_{f_0} = M_{f_2} = \sqrt{2}M_V = \sqrt{2}M_S = 4\pi\sqrt{3/N_c}f_\pi$, que constituye un resultado muy razonable si tenemos en cuenta la aproximación de un loop de quarks en que estamos trabajando. Se han discutido otras relaciones de dualidad quark-mesón, lo cual ha permitido una determinación bastante precisa de las LEC's ya conocidas, y se muestran de acuerdo con los valores conocidos a dos loops dentro de los errores experimentales.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Resumen y Conclusiones

En esta tesis se ha hecho un estudio detallado de algunos efectos de temperatura y de curvatura en QCD y en algunos modelos de quarks quirales. Las conclusiones y logros más significativos de este trabajo han sido los siguientes:

- Se ha construido un desarrollo del heat kernel invariante gauge orden por orden a temperatura finita, dentro del formalismo de tiempo imaginario, para espacio-tiempo plano. Se ha considerado un tratamiento general válido en cualquier gauge, y en presencia de campos escalares que pueden ser no abelianos y no estáticos. Para preservar la invariancia gauge a temperatura finita se ha hecho uso del loop de Polyakov, y se ha llegado hasta orden 6 en un conteo en dimensiones de masa.
- Se ha aplicado el desarrollo del heat kernel para el cálculo de la acción efectiva de QCD a un loop, incluyendo fermiones sin masa, en la región de temperaturas grandes. Se ha considerado un loop de Polyakov no estático. Se ha estudiado la invariancia gauge del resultado, y en concreto la rotura explícita de la simetría del centro por efecto de los fermiones.
- Se ha obtenido la acción de la teoría efectiva dimensionalmente reducida de QCD, válida en el régimen de temperaturas grandes. Esto ha permitido obtener nuevos términos de orden 6 no calculados en la literatura, tanto en el sector fermiónico como en el gluónico.
- Se ha propuesto un modelo fenomenológico que permite describir con gran éxito los datos del retículo tanto para el loop de Polyakov renormalizado como para la energía libre de un quark pesado, en el régimen de temperaturas inmediatamente por encima de la transición de fase. Este modelo da cuenta de contribuciones no perturbativas provenientes de condensados gluónicos, y se ha obtenido una predicción para el valor del condensado gluónico de dimensión 2 en el régimen de temperaturas considerado,

$T_c \leq T \leq 6T_c$. El resultado se muestra de acuerdo con otras predicciones existentes tanto a temperatura cero como a temperatura finita.

- Se ha estudiado la analogía existente entre el loop de Polyakov y el potencial quark-antiquark a temperatura cero. Esto ha permitido encontrar una relación entre el condensado gluónico de dimensión 2 y la tensión de la cuerda.
- Se ha introducido el loop de Polyakov de color en los modelos de quarks quirales a nivel de un loop de quarks, siguiendo un esquema de acoplamiento mínimo, y hemos visto que esto permite resolver algunas inconsistencias que presentaban estos modelos en su tratamiento estándar a temperatura finita. En concreto, la integración sobre el grupo gauge da lugar a una conservación de trialidad, y el conteo en N_c se muestra de acuerdo con las predicciones de Teoría Quiral de Perturbaciones.
- Se ha calculado el lagrangiano efectivo quiral a temperatura finita de los modelos Nambu–Jona-Lasinio y Quark Espectral a nivel de un loop de quarks y a nivel árbol para los mesones, en la aproximación quenched, y se ha obtenido una predicción para las constantes de baja energía de Teoría Quiral de Perturbaciones.
- Se han analizado algunas correcciones de orden mayor para los modelos de quarks quirales acoplados con el loop de Polyakov. En concreto correcciones gluónicas, locales, y las provenientes de ir más allá de un loop de quarks. Se ha encontrado que los efectos térmicos están exponencialmente suprimidos a temperaturas pequeñas, y vienen dominados por loops mesónicos. Además, se ha analizado la influencia del determinante fermiónico sobre algunos observables como el condensado de quarks y el valor esperado del loop de Polyakov, y se han estudiado sus implicaciones sobre las transiciones de fase quiral y de desconfinamiento de color.
- Se ha estudiado el acoplamiento de los modelos de quarks quirales con gravedad, y se ha analizado la correspondiente estructura del tensor energía-impulso a bajas energías para cuatro modelos concretos: Quark Constituyente, Georgi-Manohar, Nambu–Jona-Lasinio y Quark Espectral. Se ha obtenido una predicción para los coeficientes de baja energía correspondientes a los términos no métricos con contribuciones de curvatura.
- Se ha obtenido la contribución anómala quiral a la acción efectiva en el modelo quark espectral. Después de introducir una regularización conveniente, el resultado no depende de los detalles de la función espectral, de modo que coincide con la anomalía de QCD.
- Se han comparado los resultados del modelo quark espectral para las constantes quirales de baja energía, con las predicciones de N_c grande en la aproximación de una única resonancia. El mejor acuerdo se encuentra para el caso de mesones escalar y vector degenerados, dando lugar a unas relaciones de dualidad quark-mesón, que han permitido una determinación precisa de las constantes de baja energía conocidas.

8.2. Anexo de artículos publicados

Esta tesis está basada en las siguientes publicaciones.

1. Revistas internacionales:

- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *The Polyakov loop and the heat kernel expansion at finite temperature*, *Phys. Lett.* **B563**, 173 (2003), [[arXiv:hep-th/0212237](https://arxiv.org/abs/hep-th/0212237)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola, and L. L. Salcedo, *Thermal heat kernel expansion and the one-loop effective action of QCD at finite temperature*, *Phys. Rev.* **D69**, 116003 (2004), [[arXiv:hep-ph/0312133](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0312133)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola, L. L. Salcedo and W. Broniowski, *Low energy chiral Lagrangian from the spectral quark model*, *Phys. Rev.* **D70**, 034031 (2004), [[arXiv:hep-ph/0403139](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0403139)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Energy momentum tensor of chiral quark models at low energies*, *Phys. Rev.* **D72**, 014001 (2005), [[arXiv:hep-ph/0504271](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0504271)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Dimension two condensates and the Polyakov loop above the deconfinement phase transition*, *JHEP* **0601**, 073 (2006), [[arXiv:hep-ph/0505215](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0505215)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Polyakov loop in chiral quark models at finite temperature*, *Phys. Rev.* **D74**, 065005 (2006), [[arXiv:hep-ph/0412308](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0412308)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Chiral Lagrangian at finite temperature from the Polyakov-chiral quark model*, (2006). Pendiente de publicación por *Physical Review D*, arXiv:hep-ph/0607338.

2. Actas de congresos:

- E. Megías, *One-loop effective action of QCD at high temperature using the heat kernel method*. Actas de 9th Hadron Physics and 8th Relativistic Aspects of Nuclear Physics (HADRON-RANP 2004). *AIP Conf. Proc.* **739**, 443-445 (2005), [[arXiv:hep-ph/0407052](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0407052)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Polyakov loop at finite temperature in chiral quark models*. Actas de la conferencia Mini-Workshop on Quark Dynamics: Bled 2004. *Bled Workshops in Physics*, Vol. 5, No. 1, Pág. 1-6 (2004), [[arXiv:hep-ph/0410053](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0410053)].

- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Chiral lagrangians at finite temperature and the Polyakov loop*. Actas de 6th Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum. *AIP Conf. Proc.* **756**, 436-438 (2005), [[arXiv:hep-ph/0411293](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0411293)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Non-perturbative contribution to the Polyakov loop above the deconfinement phase transition*. Actas de 18th International Conference on Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: Quark Matter 2005 (QM 2005). *Romanian Reports in Physics*, Vol. 58, No. 1, Pág. 81-85 (2006), [[arXiv:hep-ph/0510114](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0510114)].
- E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, *Polyakov loop at low and high temperatures*. Actas de 29th Johns Hopkins Workshop in Theoretical Physics. *JHEP Proceedings of Science*, PoS(JHW2005)025, (2006), [[arXiv:hep-ph/0511353](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0511353)].

Apéndice A

Transformaciones Gauge

En este apéndice explicaremos qué se entiende por transformación gauge y discutiremos ciertas propiedades que cumple una transformación gauge a temperatura finita. Estudiaremos la rotura de la simetría del centro del grupo gauge al considerar una teoría con fermiones. Vamos a seguir en parte la referencia [146].

A.1. Definiciones

Consideremos un operador $f(M, D_\mu)$ construido con M y D_μ en sentido algebraico. Una configuración gauge transformada (M^U, A_μ^U) es una de la forma

$$\begin{aligned} M^U(x) &= U^{-1}(x)M(x)U(x), \\ A_\mu^U(x) &= U^{-1}(x)\partial_\mu U(x) + U^{-1}(x)A_\mu(x)U(x), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde la transformación gauge $U(x)$ es una función que toma valores sobre matrices en el espacio interno. Esta transformación corresponde a una transformación de semejanza de D_μ de la forma $D_\mu^U = \partial_\mu + A_\mu^U(x) = U^{-1}(x)D_\mu U(x)$, donde $U(x)$ se considera que es un operador multiplicativo en el espacio de Hilbert \mathcal{H} de las funciones de onda. Debido a que $f(M, D_\mu)$ está construido con M , D_μ y c-números, se sigue que $f(M, D_\mu)$ también se transforma bajo una transformación de semejanza

$$f(M^U, D_\mu^U) = U^{-1}f(M, D_\mu)U. \quad (\text{A.2})$$

$U(x)$ pertenece a cierto grupo gauge G y el campo gauge $A_\mu(x)$ es un elemento del álgebra de Lie de G . La clase de matrices $M(x)$ debe ser cerrada bajo transformaciones gauge. $U(x)$ debe ser una función continua del espacio-tiempo y a temperatura finita ha de ser periódica (salvo una posible fase global) como función de x_0 . Notar que una transformación gauge deja invariante el espectro de $f(M, D_\mu)$, por tratarse de una transformación de semejanza.

A.2. Gauges estacionarios

En cálculos explícitos suele ser usual fijar el gauge a través de la condición $\partial_0 A_0 = 0$, que no implica pérdida de generalidad ya que este gauge siempre existe.¹ Esto quiere decir que para cada configuración existe una transformación gauge que la lleva a la configuración estacionaria. Una vez fijado este gauge, queda aún cierta libertad. Cuando se trabaja en el gauge estacionario, para comprobar la invariancia gauge es necesario encontrar el resto de transformaciones compatibles con este gauge y ver que todas ellas producen el mismo resultado. A continuación vamos a determinar cuál es la transformación gauge más general de este tipo.

Sean A_μ y B_μ dos configuraciones estacionarias y sea U una transformación gauge que transforma A_μ en B_μ . Esto quiere decir

$$B_0(\vec{x}) = U^{-1}(x)\partial_0 U(x) + U^{-1}(x)A_0(\vec{x})U(x). \quad (\text{A.3})$$

Notar que el primer término cambia la magnitud de A_0 y el segundo simplemente lo rota en el espacio interno. Podemos simplificar esta ecuación si hacemos uso de la variable auxiliar $V(x) = \exp(x_0 A_0(\vec{x}))U(x)$, con lo que queda

$$B_0(\vec{x}) = V^{-1}(x)\partial_0 V(x). \quad (\text{A.4})$$

La solución más general de (A.4) va a estar formada por una transformación gauge arbitraria independiente del tiempo y por una transformación cuya dependencia temporal sea lineal²

$$V(x) = U_0(\vec{x})e^{x_0 B_0(\vec{x})}. \quad (\text{A.5})$$

Un modo conveniente de escribir la transformación es haciendo uso del cambio de variable

$$B_0(\vec{x}) = U_0^{-1}(\vec{x})(A_0(\vec{x}) + \Lambda(\vec{x}))U_0(\vec{x}), \quad (\text{A.6})$$

con lo cual finalmente queda

$$U(x) = e^{-x_0 A_0(\vec{x})}e^{x_0(A_0(\vec{x}) + \Lambda(\vec{x}))}U_0(\vec{x}). \quad (\text{A.7})$$

Ahora debemos imponer la condición de que $U(x)$ es función periódica de x_0 , salvo una posible fase global

$$U(x_0 + \beta, \vec{x}) = e^{i\alpha}U(x_0, \vec{x}). \quad (\text{A.8})$$

Aquí α es una fase global escalar multiplicada por la matriz identidad. Esto conduce a la restricción

$$e^{\beta(A_0(\vec{x}) + \Lambda(\vec{x}))} = e^{i\alpha}e^{\beta A_0(\vec{x})}, \quad (\text{A.9})$$

lo cual va a producir una discretización en la parte temporal de la transformación gauge. De (A.9) se deduce que $A_0(\vec{x})$ y $\Lambda(\vec{x})$ deben conmutar con $\exp(\beta A_0(\vec{x}))$. Si el espectro de

¹Este gauge es conocido en la literatura como 'gauge de Polyakov', aunque nosotros nos referiremos a él también como gauge estacionario.

²Una dependencia no lineal daría lugar a una contribución temporal en B_0 .

la matriz unitaria $\exp(\beta A_0(\vec{x}))$ es no degenerado, ésta puede ser diagonalizada en una base que es esencialmente única e independiente de \vec{x} . En este caso $A_0(\vec{x})$ y $\Lambda(\vec{x})$ deben ser diagonales en la misma base y por tanto van a commutar entre sí. Esto da lugar a que la condición sobre Λ sea

$$e^{\beta\Lambda(\vec{x})} = e^{i\alpha}, \quad [A_0(\vec{x}), \Lambda(\vec{x})] = 0. \quad (\text{A.10})$$

La primera condición conduce a que los valores propios de $\Lambda(\vec{x})$ sean de la forma $\chi_j = i(\alpha + 2\pi n_j)/\beta$, $n_j \in \mathbb{Z}$. Notar que por continuidad estos enteros deben ser independientes de \vec{x} . Finalmente la transformación gauge queda

$$U(x) = e^{x_0\Lambda(\vec{x})}U_0(\vec{x}), \quad (\text{A.11})$$

expresión válida cuando el espectro de $\exp(\beta A_0(\vec{x}))$ es no degenerado.

A.3. Particularización al grupo gauge $SU(N_c)$

A.3.1. Simetría del centro del grupo gauge

Consideremos específicamente el grupo gauge $SU(N_c)$. En la ecuación (A.8), tomando en cada miembro el determinante y teniendo en cuenta que $\text{Det}(U) = 1$, obtenemos que los valores permitidos de α son cuando $\text{Det}[\exp(i\alpha)] = 1$, esto es $\alpha = 2\pi n/N_c$, $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que solamente están permitidos valores discretos para α , esto implica que la matriz Λ debe ser independiente de \vec{x} , por continuidad. Como ejemplo, en $SU(2)$ los valores propios de Λ son de la forma $\chi_j = i\pi n_j/\beta$, $n_j \in \mathbb{Z}$. Para $SU(N_c)$, con $N_c > 2$, es siempre posible elegir una representación fundamental en la cual todos los generadores diagonales excepto uno tengan al menos un valor propio cero [por ejemplo, las matrices de Gell-Mann λ_3 y λ_8 para $SU(3)$]. La transformación U se escribirá

$$U(x) = \exp(x_0\lambda_a\Lambda^a)U_0(\vec{x}), \quad (\text{A.12})$$

donde $\lambda_a/2i$ son los generadores diagonales del grupo. Los términos Λ^a correspondientes a cada uno de los generadores con un valor propio cero deben ser de la forma $\Lambda^a = i2\pi n_a/\beta$. El otro generador $\lambda_{N_c^2-1}$ viene dado por

$$\lambda_{N_c^2-1} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1 - N_c)\rho, \quad (\text{A.13})$$

donde ρ es un factor de normalización. En este caso $\Lambda^{N_c^2-1} = i2\pi n/(N_c\beta)$ dan lugar a transformaciones gauge permitidas. Esto quiere decir que además de la simetría gauge $SU(N_c)$, existe una simetría extra global $\mathbb{Z}(N_c)$, que es el centro del grupo gauge. Esta simetría es generada por la acción de transformaciones gauge locales que son periódicas en la variable temporal, salvo un elemento arbitrario de $\mathbb{Z}(N_c)$,

$$U(x_0 + \beta, \vec{x}) = z U(x_0, \vec{x}), \quad z = e^{i2\pi n/N_c}, \quad (\text{A.14})$$

módulo transformaciones gauge locales estrictamente periódicas.

A.3.2. Rotura explícita de la simetría del centro

La situación cambia si hay fermiones en la teoría. Puesto que los fermiones transforman como $\psi \rightarrow U\psi$, no hay factores U^{-1} que cancelen la fase global. Por tanto, con objeto de que las condiciones de contorno temporales para fermiones queden inalteradas bajo transformaciones gauge, sólo están permitidas transformaciones que satisfagan (A.8) con $\alpha = 0$. Esto quiere decir que los fermiones rompen la simetría del centro del grupo gauge que está presente en todas las teorías gauge puras. En consecuencia, la forma más general de Λ^a para una teoría $SU(N_c)$ con fermiones es $\Lambda^a = i2\pi n_a/\beta$.

La rotura de la simetría del centro del grupo gauge se manifiesta en que algunos de los mínimos absolutos degenerados del potencial efectivo de la teoría gauge pura dejan de serlo cuando la teoría incluye fermiones. No obstante, es posible probar que estos mínimos seguirán siendo puntos estacionarios del potencial efectivo completo con fermiones. En el gauge de Polyakov A_0 es independiente del tiempo y diagonal. Una matriz diagonal arbitraria de $su(N_c)$ se puede escribir siempre como una combinación lineal de matrices que tengan al menos un cero en la diagonal y la matriz $\lambda_{N_c^2-1}$ dada en (A.13). Únicamente esta última matriz pondrá de manifiesto el mínimo que estamos buscando, por lo comentado anteriormente. El potencial efectivo de QCD que calculamos en el capítulo 3 se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = -\frac{(2\pi)^2}{3\beta^4} N_f \text{tr} B_4 \left(\frac{1}{2} + \bar{\nu} \right), \quad \Omega(x) = e^{i2\pi\bar{\nu}}, \quad -\frac{1}{2} < \bar{\nu} < \frac{1}{2}, \quad (\text{A.15})$$

para el sector fermiónico y

$$\mathcal{L}_{0,g}(x) = \frac{2\pi^2}{3\beta^4} \widehat{\text{tr}} B_4 (\widehat{\nu}), \quad \widehat{\Omega}(x) = e^{i2\pi\widehat{\nu}}, \quad 0 < \widehat{\nu} < 1 \quad (\text{A.16})$$

para el sector gluónico. tr es traza en la representación fundamental del grupo gauge y $\widehat{\text{tr}}$ es en la representación adjunta. Los valores propios del loop de Polyakov en la representación fundamental son $\omega_A = \exp(i2\pi\nu_A)$, $A = 1, \dots, N_c$, y en la representación adjunta $\omega_{A\dot{A}} = \exp(i2\pi(\nu_A - \nu_{\dot{A}}))$, $A, \dot{A} = 1, \dots, N_c$. Si hacemos uso de la representación en serie de los polinomios de Bernoulli [52]

$$B_{2\ell}(x) = \frac{(-1)^{\ell-1} 2(2\ell)!}{(2\pi)^{2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^{2\ell}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.17})$$

y nos limitamos a considerar el potencial efectivo para $\lambda_{N_c^2-1}$ obtenemos

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = \frac{4N_f}{\pi^2\beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \{ (N_c - 1) \cos(2\pi n \rho) + \cos((N_c - 1)2\pi n \rho) \}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{L}_{0,g}(x) = -\frac{2}{\pi^2\beta^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \{ 2(N_c - 1) \cos(2\pi n N_c \rho) + (N_c - 1)^2 \}. \quad (\text{A.19})$$

Los mínimos de $\mathcal{L}_{0,g}$ se encuentran en $\rho = m/N_c$, con m entero. Si diferenciamos el lagrangiano $\mathcal{L}_{0,g}$ respecto a ρ se puede comprobar que estos mínimos se corresponden exactamente con puntos estacionarios (mínimos o máximos) de la parte fermiónica. En consecuencia, el potencial efectivo total siempre va a tener puntos estacionarios en $\rho = m/N_c$.

Apéndice B

Integrales en tiempo propio con regularización dimensional

Para obtener el lagrangiano efectivo de QCD quiral a un loop del capítulo 3 hemos necesitado calcular las trazas en espacio interno y las integrales en τ . En este apéndice calcularemos la expresión genérica de la siguiente integral regulada dimensionalmente

$$I_{\ell,n}^\pm(\nu) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} (4\pi\mu^2\tau)^\epsilon \tau^\ell \varphi_n^\pm(e^{i2\pi\nu}) , \quad \nu, \ell, \epsilon \in \mathbb{R} , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.1})$$

Las funciones φ_n las definimos en su momento como

$$\varphi_n^\pm(\Omega; \tau/\beta^2) = \frac{(4\pi\tau)^{1/2}}{\beta} \sum_{p_0^\pm} \tau^{n/2} Q^n e^{\tau Q^2} , \quad Q = ip_0^\pm - \frac{1}{\beta} \log(\Omega) , \quad (\text{B.2})$$

donde en la versión bosónica sumamos sobre las frecuencias de Matsubara $p_0^+ = 2\pi n/\beta$, y en la versión fermiónica sobre $p_0^- = 2\pi(n + \frac{1}{2})/\beta$. Centrémonos por el momento en la versión bosónica de la función φ_n . Vamos a tener

$$I_{\ell,n}^+(\nu) = (4\pi\mu^2)^\epsilon \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta} \left(\frac{2\pi i}{\beta} \right)^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k - \nu)^n \int_0^\infty d\tau \tau^{\ell+\epsilon+(n-1)/2} e^{-(\frac{2\pi}{\beta})^2(k-\nu)^2\tau} , \quad \nu \notin \mathbb{Z} . \quad (\text{B.3})$$

Debido a la sumatoria en $k \in \mathbb{Z}$, la función es periódica en ν con período 1. El caso $\nu \in \mathbb{Z}$ será discutido más tarde. La integral sobre τ se calcula y se obtiene

$$I_{\ell,n}^+(\nu) = i^n (4\pi\mu^2)^\epsilon \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{2(\ell+\epsilon)} \frac{\Gamma(\ell + \epsilon + (n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(k - \nu)^n}{|k - \nu|^n} \frac{1}{|k - \nu|^{2(\ell+\epsilon)+1}} . \quad (\text{B.4})$$

Definamos $\nu = k_0 + \widehat{\nu}$, donde $0 < \widehat{\nu} < 1$ y $k_0 \in \mathbb{Z}$. La suma sobre k la podemos dividir en una suma para $k \leq k_0$ y otra para $k > k_0$

$$\begin{aligned} I_{\ell,n}^+(\nu) &= i^n (4\pi\mu^2)^\epsilon \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2(\ell+\epsilon)} \frac{\Gamma(\ell+\epsilon+(n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left(\sum_{k \leq k_0} \frac{(-1)^n}{(k_0 + \widehat{\nu} - k)^{2(\ell+\epsilon)+1}} + \sum_{k > k_0} \frac{1}{(k - k_0 - \widehat{\nu})^{2(\ell+\epsilon)+1}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Si hacemos uso de la función ζ de Riemann generalizada [52]

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z} \quad [\operatorname{Re} z > 1, q \neq 0, -1, -2, \dots], \quad (\text{B.6})$$

llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} I_{\ell,n}^+(\nu) &= (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell+\epsilon+(n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left[(-i)^n \zeta(1+2\ell+2\epsilon, \widehat{\nu}) + i^n \zeta(1+2\ell+2\epsilon, 1-\widehat{\nu}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde $\widehat{\nu} = \nu \pmod{1}$, $0 < \widehat{\nu} < 1$.

Las versiones bosónica y fermiónica de las funciones φ_n están relacionadas por $\Omega \rightarrow -\Omega$, esto es $\varphi_n^+(\Omega) = \varphi_n^-(-\Omega)$. Por tanto $I_{\ell,n}^-$ se puede obtener a partir de las integrales $I_{\ell,n}^+$ con el cambio $\nu \rightarrow \nu + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} I_{\ell,n}^-(\nu) &= (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell+\epsilon+(n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left[(-i)^n \zeta(1+2\ell+2\epsilon, \frac{1}{2}+\overline{\nu}) + i^n \zeta(1+2\ell+2\epsilon, \frac{1}{2}-\overline{\nu}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde $\overline{\nu} = (\nu + \frac{1}{2}) \pmod{1} - \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \overline{\nu} < \frac{1}{2}$. Notar que

$$I_{\ell,2n}^\pm(\nu) = (-1)^n \frac{\Gamma(\ell+\epsilon+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\ell+\epsilon+\frac{1}{2})} I_{\ell,0}^\pm(\nu), \quad I_{\ell,2n+1}^\pm(\nu) = (-1)^n \frac{\Gamma(\ell+\epsilon+n+1)}{\Gamma(\ell+\epsilon+1)} I_{\ell,1}^\pm(\nu). \quad (\text{B.9})$$

Estas funciones son periódicas en ν y bajo paridad se comportan

$$I_{\ell,n}^\pm(\nu) = (-1)^n I_{\ell,n}^\pm(-\nu). \quad (\text{B.10})$$

En el problema de la reducción dimensional de la teoría de Yang-Mills únicamente se suma sobre fluctuaciones cuánticas no estáticas ($n \neq 0$). Con objeto de preservar las propiedades de periodicidad y paridad de las funciones $I_{\ell,n}^+$, definimos las integrales

bosónicas sin el modo estático eliminando la frecuencia $k = k_0$ cuando $\hat{\nu} < \frac{1}{2}$ y la frecuencia $k = k_0 + 1$ cuando $\hat{\nu} > \frac{1}{2}$. Haciendo esto en (B.5) se obtiene

$$\begin{aligned} I'_{\ell,n}^+(\nu) &= (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell + \epsilon + (n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \begin{cases} (-i)^n \zeta(1 + 2\ell + 2\epsilon, 1 + \hat{\nu}) + i^n \zeta(1 + 2\ell + 2\epsilon, 1 - \hat{\nu}), & 0 \leq \hat{\nu} < \frac{1}{2}, \\ (-i)^n \zeta(1 + 2\ell + 2\epsilon, \hat{\nu}) + i^n \zeta(1 + 2\ell + 2\epsilon, 2 - \hat{\nu}), & \frac{1}{2} < \hat{\nu} \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Estas funciones son finitas, incluso para valores enteros de $\hat{\nu}$.

Consideremos ahora $\nu \in \mathbb{Z}$. En este caso el modo estático $p_0^+ = 0$ de las integrales $I_{\ell,n}^+(\nu)$ con $n \neq 0$ no contribuye. Este modo va a contribuir solamente en $I_{\ell,0}^+$ dando origen a divergencias infrarrojas o ultravioletas. En regularización dimensional la integral $I_{\ell,0}^+(\nu)|_{p_0=0}$ con $\nu \in \mathbb{Z}$ se define como cero ya que no tiene una escala natural. Esto conduce a la siguiente prescripción

$$\begin{aligned} I_{\ell,n}^+(\nu) &= I'_{\ell,n}^+ = (4\pi)^\epsilon \left(\frac{\mu\beta}{2\pi}\right)^{2\epsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2\ell} \frac{\Gamma(\ell + \epsilon + (n+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \begin{cases} 2(-1)^{n/2} \zeta(1 + 2\ell + 2\epsilon), & (n \text{ par}) \\ 0, & (n \text{ impar}) \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Apéndice C

Lagrangiano Efectivo de QCD en $SU(2)$

En este apéndice presentaremos el lagrangiano efectivo de QCD quiral a un loop a temperatura alta calculado en el capítulo 3, para $SU(2)$ en el sector de quarks y en el sector gluónico, incluyendo todos los términos hasta dimensión de masa 6. Los resultados vienen dados en el esquema \overline{MS} , y hemos considerado explícitamente un cutoff infrarrojo. Las convenciones son las que aparecen en la sección 3.7.

$$\mathcal{L}_{\text{árbol}}(x) = \frac{1}{4g^2(\mu)} \vec{F}_{\mu\nu}^2, \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{L}_{0,g}(x) = \frac{\pi^2 T^4}{3} \left(-\frac{1}{5} + 4\hat{\nu}^2(1 - \hat{\nu})^2 \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2,g}(x) = & -\frac{11}{96\pi^2} \left[\frac{1}{11} + 2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \psi(\hat{\nu}) - \psi(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{F}_{\mu\nu\parallel}^2 \\ & -\frac{11}{96\pi^2} \left[\frac{\pi T}{m} + \frac{1}{11} + 2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) + \gamma_E - \frac{1}{2}\psi(\hat{\nu}) - \frac{1}{2}\psi(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{F}_{\mu\nu\perp}^2 \\ & + \frac{1}{24\pi^2} \vec{E}_i^2 - \frac{1}{48\pi^2} \left(\frac{\pi T}{m} \right) \vec{E}_{i\perp}^2, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3,g}(x) = & \frac{61}{2160\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[8 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 + 2\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] (\vec{F}_{\mu\nu} \times \vec{F}_{\nu\alpha}) \cdot \vec{F}_{\alpha\mu} \\ & -\frac{1}{48\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(1 - \hat{\nu})] \vec{F}_{\lambda\mu\nu\parallel}^2 \\ & + \frac{1}{96\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[16 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 + 4\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{F}_{\lambda\mu\nu\perp}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{480\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(1 - \hat{\nu})] \vec{F}_{\mu\mu\nu\parallel}^2 \\
& - \frac{1}{960\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[16 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 + 4\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{F}_{\mu\mu\nu\perp}^2 \\
& - \frac{3}{80\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(1 - \hat{\nu})] \vec{F}_{0\mu\nu\parallel}^2 \\
& + \frac{3}{160\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[-8 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 + 4\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{F}_{0\mu\nu\perp}^2 \\
& - \frac{1}{10\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 \vec{E}_{0i\perp}^2 \\
& + \frac{1}{240\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(1 - \hat{\nu})] \vec{E}_{ii\parallel}^2 \\
& - \frac{1}{480\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[-8 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 + 4\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] \vec{E}_{ii\perp}^2 \\
& + \frac{1}{240\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\hat{\nu}) + \psi''(1 - \hat{\nu})] \epsilon_{ijk} (\vec{E}_i \times \vec{E}_j) \cdot \vec{B}_k \\
& + \frac{1}{240\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 \left[8 \left(\frac{\pi T}{m} \right)^3 - 4\zeta(3) - \psi''(\hat{\nu}) - \psi''(1 - \hat{\nu}) \right] \epsilon_{ijk} (\vec{E}_{i\perp} \times \vec{E}_{j\perp}) \cdot \vec{B}_{k\parallel}, \tag{C.4}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{0,q}(x) = \frac{2}{3}\pi^2 T^4 N_f \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{4}(1 - 4\bar{\nu}^2)^2 \right), \tag{C.5}$$

$$\mathcal{L}_{2,q}(x) = \frac{N_f}{96\pi^2} \left[2 \log \left(\frac{\mu}{4\pi T} \right) - \psi(\tfrac{1}{2} + \bar{\nu}) - \psi(\tfrac{1}{2} - \bar{\nu}) \right] \vec{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{N_f}{48\pi^2} \vec{E}_i^2, \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{3,q}(x) & = \frac{N_f}{960\pi^2} \left(\frac{1}{4\pi T} \right)^2 [\psi''(\tfrac{1}{2} + \bar{\nu}) + \psi''(\tfrac{1}{2} - \bar{\nu})] \\
& \times \left(\frac{16}{3} (\vec{F}_{\mu\nu} \times \vec{F}_{\nu\alpha}) \cdot \vec{F}_{\alpha\mu} + \frac{5}{2} \vec{F}_{\lambda\mu\nu}^2 - \vec{F}_{\mu\mu\nu}^2 - 2\epsilon_{ijk} (\vec{E}_i \times \vec{E}_j) \cdot \vec{B}_k + 3\vec{F}_{0\mu\nu}^2 - 2\vec{E}_{ii}^2 \right). \tag{C.7}
\end{aligned}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ es el producto vectorial de \vec{a} y \vec{b} , esto es

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k. \tag{C.8}$$

Como vemos, las contribuciones de los quarks no distinguen entre componentes paralelas y perpendiculares. Esto se debe a que en $SU(2)$ una función par en $\bar{\nu}$ en la representación fundamental es necesariamente un c-número. Puesto que todas las funciones $\varphi_n(\Omega)$ involucradas en los términos de dimensión 6 son pares [$\varphi_n(\Omega) + \varphi_n(\Omega^{-1}) = c \cdot \mathbf{1}_{2 \times 2}$], la dependencia en $\bar{\nu}$ de las ecs. (3.30) y (3.32) sale fuera de la traza, de modo que A_0 no será una dirección

privilegiada en espacio de color. Esta propiedad no se cumple en la representación adjunta (sector gluónico), ni tampoco en otros grupos $SU(N_c)$ (por ejemplo, ec. (3.117)).

Las divergencias infrarrojas están sujetas a que ν sea entero, de modo que no existen en el sector fermiónico, y se cancelan en las contribuciones gluónicas que únicamente involucran componentes paralelas.

Apéndice D

Lagrangiano Efectivo del Modelo Quark Quiral acoplado con el loop de Polyakov

En este apéndice se explicará en detalle el cálculo del lagrangiano quiral efectivo a temperatura finita presentado en la sección 5.5. El cálculo se divide en tres partes. En primer lugar se construirá el operador de Klein-Gordon a partir del operador de Dirac y su adjunto para la parte real de la acción efectiva. Haciendo uso de la representación de Schwinger de tiempo propio, deberemos calcular el heat kernel para este operador. Para ello haremos uso de la técnica desarrollada en el capítulo 2. Calcularemos las trazas en los grados de libertad internos (en nuestro caso, sabor). Finalmente, haremos uso de las ecuaciones de movimiento con objeto de tener en cuenta el hecho de que los campos piónicos están en la capa de masas.

D.1. Operador de Klein-Gordon efectivo

El operador de Dirac que aparece en el determinante fermiónico se comporta de manera covariante bajo transformaciones quirales. Esto implica que, en principio, habría que considerar tanto el acoplamiento vector como el axial. Conseguiremos una gran simplificación en nuestro tratamiento si hacemos uso de los convenios de ref. [147, 148], donde se muestra que es suficiente con llevar a cabo el cálculo en el caso de un acoplamiento vector, y posteriormente reconstruir el resultado quiral total de un modo conveniente.

Consideraremos el siguiente operador de Dirac con un acoplamiento tipo vector

$$\mathbf{D} = \not{D} + h, \quad h = m + z, \quad (\text{D.1})$$

donde h incluye el campo del pión m , que es orden $\mathcal{O}(p^0)$, y el término de masa z que rompe

explícitamente la simetría quiral, y que tomamos $\mathcal{O}(p^2)$. Nuestra notación es la siguiente

$$\begin{aligned} h_{LR} &= MU + \frac{1}{2B_0^*}\chi, \\ h_{RL} &= MU^\dagger + \frac{1}{2B_0^*}\chi^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La parte real de la acción efectiva es, formalmente

$$\Gamma_q^+[v, h] = -\frac{1}{2}\text{Tr} \log(\mathbf{D}^\dagger \mathbf{D}) =: \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \mathcal{L}_q^*(x), \quad (\text{D.3})$$

donde el operador de Klein-Gordon relevante viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} &= -D_\mu^2 - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma_\mu \widehat{D}_\mu h + m^2 + \bar{h}^2, \\ \bar{h}^2 &= h^2 - m^2 = \{m, z\} + z^2. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

El problema radica en hacer un desarrollo en derivadas covariantes para la acción efectiva. Podemos identificar el operador de masa $M(x) = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \gamma_\mu \widehat{D}_\mu h + \bar{h}^2$. Haciendo uso de la representación de Schwinger de tiempo propio, el lagrangiano efectivo en espacio euclídeo se puede escribir como

$$\mathcal{L}_q^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \text{Tr} e^{-\tau D^\dagger D} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \frac{e^{-\tau M^2}}{(4\pi\tau)^2} \sum_n \tau^n \text{tr} b_n^T. \quad (\text{D.5})$$

En esta representación haremos uso de la regularización de Pauli-Villars [106]

$$\phi(\tau) = \sum_i c_i e^{-\tau \Lambda_i^2}. \quad (\text{D.6})$$

Hasta $\mathcal{O}(p^4)$ obtenemos las siguientes contribuciones para los coeficientes de Seeley-DeWitt térmicos, después de haber tomado la traza de Dirac

$$\begin{aligned} b_0^T &= 4\varphi_0(\Omega), \\ b_{1/2}^T &= 0, \\ b_1^T &= -4\varphi_0(\Omega)\bar{h}^2 = -4\varphi_0(\Omega)(\{m, z\} + z^2), \\ b_{3/2}^T &= 0, \\ b_2^T &= 2\varphi_0(\Omega) \left((h_\mu)^2 + \bar{h}^4 - \frac{1}{3}F_{\mu\nu}^2 \right) - \frac{2}{3}\bar{\varphi}_2 E_i^2 \\ &= 2\varphi_0(\Omega) \left((m_\mu)^2 + \{m_\mu, z_\mu\} + \{m, z\}\{m, z\} - \frac{1}{3}F_{\mu\nu}^2 \right) - \frac{2}{3}\bar{\varphi}_2(\Omega)E_i^2 + \mathcal{O}(p^6), \\ b_{5/2}^T &= -\frac{2}{3}\varphi_1\{E_i, (\bar{h}^2)_i\} = -\frac{2}{3}\varphi_1\{E_i, \widehat{D}_i\{m, z\}\} = \mathcal{O}(p^5), \\ b_3^T &= -\frac{2}{3}\varphi_0(\Omega) \left(m_\mu\{m_\mu, \{m, z\}\} + \{m, z\}m_\mu m_\mu + \{F_{\mu\nu}, m_\mu m_\nu\} - m_\mu F_{\mu\nu} m_\nu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(m_{\mu\nu})^2 \right) + \frac{1}{3}\bar{\varphi}_2(m_{0\mu})^2 + \mathcal{O}(p^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{7/2}^T &= \mathcal{O}(p^5), \\ b_4^T &= \frac{1}{6}\varphi_0(\Omega)(m_\mu m_\mu m_\nu m_\nu + m_\mu m_\nu m_\nu m_\mu - m_\mu m_\nu m_\mu m_\nu) + \mathcal{O}(p^5). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

D.2. Trazas de sabor e identidades útiles

Para $N_f = 3$ sabores se tiene la siguiente identidad de $\text{SU}(3)$

$$\text{tr}(ABAB) = -2\text{tr}(A^2B^2) + \frac{1}{2}\text{tr}(A^2)\text{tr}(B^2) + (\text{tr}(AB))^2, \quad (\text{D.8})$$

donde A y B son matrices hermíticas 3×3 de traza cero. De aquí se tiene

$$\text{tr}_f(m_\mu m_\nu m_\mu m_\nu) = -2\text{tr}_f((m_\mu)^2(m_\nu)^2) + \frac{1}{2}\text{tr}_f((m_\mu)^2)\text{tr}_f((m_\nu)^2) + (\text{tr}_f(m_\mu m_\nu))^2, \quad (\text{D.9})$$

$$\text{tr}_f(m_0 m_\mu m_0 m_\mu) = -2\text{tr}_f((m_0)^2(m_\mu)^2) + \frac{1}{2}\text{tr}_f((m_0)^2)\text{tr}_f((m_\mu)^2) + (\text{tr}_f(m_0 m_\mu))^2. \quad (\text{D.10})$$

Otras identidades útiles son

$$\text{tr}_f((m_{\mu\nu})^2) = \text{tr}_f((m_{\mu\mu})^2) - 2\text{tr}_f(F_{\mu\nu}m_\mu m_\nu) + \text{tr}_f(mF_{\mu\nu}mF_{\mu\nu}) - M^2\text{tr}_f(F_{\mu\nu}^2), \quad (\text{D.11})$$

$$\text{tr}_f((m_{0\mu})^2) = \text{tr}_f(m_{00}m_{\mu\mu}) - 2\text{tr}_f(E_i[m_0, m_i]) - 2\text{tr}_f(E_{0i}mm_i), \quad (\text{D.12})$$

donde hemos hecho uso de la propiedad $X_{\mu\nu} = X_{\nu\mu} + [F_{\mu\nu}, X]$. Podemos aplicar las ecuaciones de movimiento, ec. (D.30), para obtener

$$\begin{aligned} \text{tr}_f(m_\mu z_\mu) &= \frac{1}{2B_0^*M^2}\text{tr}_f(m_\mu m_\mu mx) - \frac{1}{4B_0^*M}\text{tr}_f(mxmx) + \frac{M}{4B_0^*}\text{tr}_f(x^2) \\ &\quad + \frac{1}{8MN_f B_0^*}\text{tr}_f([m, x])\text{tr}_f([m, x]), \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_f(m_{\mu\mu}m_{\nu\nu}) &= \frac{1}{M^2}\text{tr}_f(m_\mu m_\mu m_\nu m_\nu) - \frac{1}{2}\text{tr}_f(mxmx) + \frac{M^2}{2}\text{tr}_f(x^2) \\ &\quad + \frac{1}{4N_f}\text{tr}_f([m, x])\text{tr}_f([m, x]), \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_f(m_{00}m_{\mu\mu}) &= \frac{1}{M^2}\text{tr}_f(m_0 m_0 m_\mu m_\mu) - M\text{tr}_f(m_{00}x) - \frac{1}{M}\text{tr}_f(m_0 m_0 mx) \\ &\quad + \frac{1}{2MN_f}\text{tr}_f(m_{00}m)\text{tr}_f([m, x]). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

donde se han introducido los campos normalizados $x = 2B_0^*z$. La notación es la siguiente:

$$x_{LR} = \chi, \quad x_{RL} = \chi^\dagger. \quad (\text{D.16})$$

Haciendo uso de (D.9)-(D.15) podemos calcular la traza en espacio de sabor de los coeficientes de Seeley-DeWitt. Esto conduce a

$$\begin{aligned}
 \text{tr}_f b_0^T &= 4N_f \varphi_0(\Omega), \\
 \text{tr}_f b_1^T &= -\varphi_0(\Omega) \left(\frac{4}{B_0^*} \text{tr}_f(mx) + \frac{1}{B_0^{*2}} \text{tr}_f(x^2) \right), \\
 \text{tr}_f b_2^T &= 2\varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu) + \frac{2}{B_0^* M^2} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu mx) \\
 &\quad + \frac{1}{B_0^*} \left(\frac{1}{B_0^*} - \frac{1}{M} \right) \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(mxmx) + \frac{M}{B_0^*} \left(\frac{M}{B_0^*} + 1 \right) \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(x^2) \\
 &\quad - \frac{2}{3} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(F_{\mu\nu}^2) - \frac{2}{3} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(E_i^2) + \frac{1}{2MN_f B_0^*} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f([m, x]) \text{tr}_f([m, x]), \\
 \text{tr}_f b_3^T &= -\frac{4}{3} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(F_{\mu\nu} m_\mu m_\nu) - \frac{1}{3} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m F_{\mu\nu} m F_{\mu\nu}) + \frac{1}{3} M^2 \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(F_{\mu\nu}) \\
 &\quad - \frac{1}{6} M^2 \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(x^2) + \frac{1}{6} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(mxmx) - \frac{2}{B_0^*} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu mx) \\
 &\quad - \frac{1}{3M} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(m_0 m_0 mx) - \frac{M}{3} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(m_{00} x) - \frac{2}{3} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(E_i [m_0, m_i]) \\
 &\quad - \frac{2}{3} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(E_{0i} mm_i) - \frac{1}{3M^2} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu m_\nu m_\nu) \\
 &\quad + \frac{1}{3M^2} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(m_0 m_0 m_\mu m_\mu) - \frac{1}{12N_f} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f([m, x]) \text{tr}_f([m, x]) \\
 &\quad + \frac{1}{6MN_f} \bar{\varphi}_2(\Omega) \text{tr}_f(m_{00} m) \text{tr}_f([m, x]), \\
 \text{tr}_f b_4^T &= -\frac{1}{12} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu) \text{tr}_f(m_\nu m_\nu) - \frac{1}{6} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\nu) \text{tr}_f(m_\mu m_\nu) \\
 &\quad + \frac{2}{3} \varphi_0(\Omega) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu m_\nu m_\nu). \tag{D.17}
 \end{aligned}$$

D.3. Integrales en tiempo propio

Las integrales en tiempo propio básicas que definimos son

$$\mathcal{J}_l(\Lambda, M, \nu) := \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \tau^l e^{-\tau M^2} \varphi_0(\Omega), \tag{D.18}$$

$$\bar{\mathcal{J}}_l(\Lambda, M, \nu) := \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \tau^l e^{-\tau M^2} \bar{\varphi}_2(\Omega), \tag{D.19}$$

donde $\Omega = e^{i2\pi\nu}$ es una matriz $SU(N_c)$ en espacio de color. Haciendo uso de la fórmula de Poisson para la sumatoria, podemos escribir φ_0 y $\bar{\varphi}_2$ del siguiente modo

$$\varphi_0(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4\tau}} (-\Omega)^n, \tag{D.20}$$

$$\bar{\varphi}_2(\Omega) = \frac{\beta^2}{2\tau} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 e^{-\frac{n^2 \beta^2}{4\tau}} (-\Omega)^n. \quad (\text{D.21})$$

La contribución de temperatura cero viene dada por el término $n = 0$, y para él es necesario aplicar una regularización (aquí usamos Pauli-Villars). En los términos $n \neq 0$ la regularización puede ser eliminada, pues el baño térmico actúa de por sí como un regulador ultravioleta. Esta aproximación está justificada a temperaturas suficientemente pequeñas $T \ll \Lambda_{\text{PV}}$. Típicamente $\Lambda_{\text{PV}} \approx 1 \text{ GeV}$ de modo que incluso para $T \approx M \approx 300 \text{ MeV}$ la aproximación es válida. El cálculo de las integrales conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_l(\Lambda, M, \nu) &= \mathbf{1}_{N_c \times N_c} \Gamma(l) \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2)^{-l} \\ &\quad + 2 \left(\frac{\beta}{2M} \right)^l \sum_{n=1}^{\infty} n^l K_l(n\beta M) ((-\Omega)^n + (-\Omega)^{-n}), \quad \text{Re}(l) > 0, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu) &= -\mathbf{1}_{N_c \times N_c} \sum_i c_i \log(\Lambda_i^2 + M^2) \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_0(n\beta M) ((-\Omega)^n + (-\Omega)^{-n}), \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{-1}(\Lambda, M, \nu) &= \mathbf{1}_{N_c \times N_c} \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2) \log(\Lambda_i^2 + M^2) \\ &\quad + \frac{4M}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_1(n\beta M)}{n} ((-\Omega)^n + (-\Omega)^{-n}), \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{-2}(\Lambda, M, \nu) &= -\mathbf{1}_{N_c \times N_c} \frac{1}{2} \sum_i c_i (\Lambda_i^2 + M^2)^2 \log(\Lambda_i^2 + M^2) \\ &\quad + 8 \left(\frac{M}{\beta} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta M)}{n^2} ((-\Omega)^n + (-\Omega)^{-n}), \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

$$\bar{\mathcal{J}}_l(\Lambda, M, \nu) = \frac{\beta^{l+1}}{(2M)^{l-1}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{l+1} K_{l-1}(n\beta M) ((-\Omega)^n + (-\Omega)^{-n}), \quad l \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.26})$$

D.4. Ecuaciones clásicas de movimiento

A orden $\mathcal{O}(p^2)$ el lagrangiano quiral se escribe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{*(2)} &= \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \phi(\tau) \frac{e^{-\tau M^2}}{(4\pi)^2} \text{tr}_c \varphi_0(\Omega) \left[\text{tr}_f(m_\mu m_\mu) - \frac{4}{\tau} \text{tr}_f(mz) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu) \text{tr}_f(m_\mu m_\mu) - 4 \text{tr}_c \mathcal{J}_{-1}(\Lambda, M, \nu) \text{tr}_f(mz) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{M^2}{(4\pi)^2} \text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu) \left(\text{tr}_f(\widehat{D}_\mu U^\dagger \widehat{D}_\mu U) - \frac{2}{M} \frac{\text{tr}_c \mathcal{J}_{-1}(\Lambda, M, \nu)}{\text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu)} \text{tr}_f(z_{RL} U + z_{LR} U^\dagger) \right) \\
 &= \frac{M^2}{(4\pi)^2} \text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu) \text{tr}_f \left(\widehat{D}_\mu U^\dagger \widehat{D}_\mu U - (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) \right), \tag{D.27}
 \end{aligned}$$

donde la normalización del campo χ viene dada por el factor

$$\chi = 2B_0^* z_{LR}, \quad \chi^\dagger = 2B_0^* z_{RL}, \quad B_0^* = \frac{1}{M} \frac{\text{tr}_c \mathcal{J}_{-1}(\Lambda, M, \nu)}{\text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu)}. \tag{D.28}$$

y

$$\frac{f_\pi^{*2}}{4} = \frac{M^2}{(4\pi)^2} \text{tr}_c \mathcal{J}_0(\Lambda, M, \nu). \tag{D.29}$$

Si minimizamos la acción a este orden, se obtienen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$m_{\mu\mu} m + m_\mu m_\mu - \frac{M}{2} [m, x] + \frac{M}{2N_f} \text{tr}_f([m, x]) = 0. \tag{D.30}$$

El último término en ec. (D.30) viene de imponer la condición $\text{Det}(U) = 1$, pues estamos considerando un grupo de sabor $\text{SU}(N_f)$.

D.5. Lagrangiano Efectivo

El lagrangiano efectivo se puede escribir como

$$\mathcal{L}_q^* = \mathcal{L}_q^{*(0)} + \mathcal{L}_q^{*(2)} + \mathcal{L}_q^{*(4)} + \dots \tag{D.31}$$

Haciendo uso de la expresión del lagrangiano en ec. (D.5), los coeficientes de Seeley-DeWitt de ec. (D.17) y después de calcular la integral en tiempo propio con regularización de Pauli-Villars, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_q^{*(0)} &= \frac{2N_f}{(4\pi)^2} \text{tr}_c \mathcal{J}_{-2}(\Lambda, M, \nu), \\
 \mathcal{L}_q^{*(2)} &= \frac{f_\pi^{*2}}{4} \text{tr}_f \left(\widehat{D}_\mu U^\dagger \widehat{D}_\mu U - (\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) \right), \\
 \mathcal{L}_q^{*(4)} &= -L_1^* \text{tr}_f(u_\mu u_\mu) \text{tr}_f(u_\nu u_\nu) - L_2^* \text{tr}_f(u_\mu u_\nu) \text{tr}_f(u_\mu u_\nu) - L_3^* \text{tr}_f(u_\mu u_\mu u_\nu u_\nu) \\
 &\quad - \overline{L}_3^* \text{tr}_f(u_0 u_0 u_\mu u_\mu) + 2L_4^* \text{tr}_f(u_\mu u_\mu) \text{tr}_f(xu) + 2L_5^* \text{tr}_f(u_\mu u_\mu ux) \\
 &\quad + 2\overline{L}_5^* \text{tr}_f(u_0 u_0 ux) + 2\overline{L}_5^{*\prime} \text{tr}_f(u_{00} x) - 2(L_6^* + L_7^*) \text{tr}_f(ux) \text{tr}_f(ux) \\
 &\quad - 2(L_6^* - L_7^*) \text{tr}_f(ux) \text{tr}_f(xu) + 2\overline{L}_7^{*\prime} \text{tr}_f(u_{00} u) \text{tr}_f([u, x]) - 2L_8^* \text{tr}_f(uxux) \\
 &\quad - 2L_9^* \text{tr}_f(F_{\mu\nu} u_\mu u_\nu) - 2\overline{L}_9^* \text{tr}_f(E_i [u_0, u_i]) - 2\overline{L}_9^{*\prime} \text{tr}_f(E_{0i} u u_i) \\
 &\quad + L_{10}^* \text{tr}_f(u F_{\mu\nu} u F_{\mu\nu}) + 2H_1^* \text{tr}_f(F_{\mu\nu}^2) + 2\overline{H}_1^* \text{tr}_f(E_i^2) - H_2^* \text{tr}_f(x^2), \tag{D.33}
 \end{aligned}$$

donde se ha usado la notación $m = Mu$. Los coeficientes que aparecen en ec. (D.33) se han escrito de manera que se correspondan con la convención de Gasser-Leutwyler.

Bibliografía

- [1] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [2] D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, Phys. Lett. **42B**, 471 (1972).
- [3] A.M. Polyakov, Phys. Lett. **72B**, 477 (1978).
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B153**, 141 (1979).
- [5] Ashok Das, "Finite Temperature Field Theory", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, (1997).
- [6] J.I. Kapusta, "Finite Temperature Field Theory", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1989).
- [7] M. Le Bellac, "Thermal Field Theory", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1996).
- [8] N.P. Landsman and Ch.G. van Weert, Phys. Rep., **145** 141-249 (1987).
- [9] P. Pascual and R. Tarrach, "QCD: Renormalization for the Practitioner", University of Barcelona, GIFT.
- [10] D. Gross, R.D. Pisarski and L.G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [11] L. McLerran, pramana **60**, 575 (2003).
- [12] M. Gell-Mann, Acta Phys. Austriaca Suppl. **IX**, 733 (1972).
- [13] H. Fritz, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47**, 367 (1973).
- [14] S. Weinberg, Phys. Rev. **D8**, 4482 (1973).
- [15] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973).
- [16] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D9**, 980-993 (1974).
- [17] H. Georgi and H. Politzer, Phys. Rev **D9**, 416-420 (1974).

- [18] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University Press, New York, USA, (1984).
- [19] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Kaneko, and T. Yoshié, Phys. Rev. **D56**, 151 (1997).
- [20] R.D. Pisarski, *Notes on the deconfining phase transition*, (2002), arXiv:hep-ph/0203271.
- [21] O. Kaczmarek, F. Karsch, P. Petreczky, and F. Zantow, Phys. Lett. **B543**, 41 (2002), [arXiv:hep-lat/0207002].
- [22] O. Kaczmarek and F. Zantow, Phys. Rev. **D71**, 114510 (2005), [arXiv:hep-lat/0503017].
- [23] E. Gava and R. Jengo, Phys. Lett. **B105**, 285 (1981).
- [24] K. Fukushima, Phys. Rev. D **68**, 045004 (2003), [arXiv:hep-ph/0303225].
- [25] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. **158**, 142-210 (1984).
- [26] E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, Nucl. Physics **A590**, 703-734 (1995).
- [27] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 465-516 (1985).
- [28] T. Appelquist and C. Bernard, Phys. Rev **D23**, 425-438 (1981).
- [29] J. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
- [30] D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B271**, 188-226 (1986).
- [31] A. A. Osipov and B. Hiller, Phys. Rev. **D62**, 114013 (2000), [arXiv:hep-ph/0007102].
- [32] D. Diakonov, Lectures at the Enrico Fermi School in Physics, Varenna, June 27 - July 7 (1995), arXiv:hep-ph/9602375.
- [33] J.S. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [34] P. Gilkey, J. Diff. Geom. **10**, 295 (1975).
- [35] M. Atiyah, R. Bott and V.K. Patodi, Invent. Math. **19**, 279 (1973).
- [36] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **55**, 133 (1977).
- [37] E. Elizalde et al., "Zeta Regularization Techniques with Applications", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, (1994).
- [38] K. Fujikawa, Phys. Rev. **D21**, 2848 (1980).
- [39] R.D. Ball, Phys. Rep. **182**, 1 (1989).

- [40] M. Bordag, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001), [arXiv:quant-ph/0106045].
- [41] C. García-Recio and L.L. Salcedo, Phys. Rev. **D63**, 045016 (2001), [arXiv:hep-th/0007183].
- [42] N. G. Pletnev and A. T. Banin, Phys. Rev. **D60**, 105017 (1999), [arXiv:hep-th/9811031].
- [43] E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, Phys. Lett. **B563**, 173-178 (2003), [arXiv:hep-th/0212237].
- [44] E. Megías, E. Ruiz Arriola, and L. L. Salcedo, Phys. Rev. **D69**, 116003 (2004), [arXiv:hep-ph/0312133].
- [45] B.S. DeWitt, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
- [46] R.T. Seeley, Proc. Symp. Pure. Math. **10**, 288 (1967).
- [47] L. L. Salcedo, Eur. Phys. J. **C37**, 511 (2004), [arXiv:hep-th/0409140].
- [48] A. E. M. van de Ven, Class. Quant. Grav. **15**, 2311 (1998), [arXiv:hep-th/9708152].
- [49] J. Wirstam, Phys. Rev. **D65**, 014020 (2001).
- [50] C. Itzykson and J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, New York, (1980).
- [51] P. Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.
- [52] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, Inc., New York, USA, (1980).
- [53] B.S. DeWitt, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967).
- [54] J.P. Börnsen and A.E.M. van de Ven, Nucl. Phys. **B657**, 257-303 (2003).
- [55] S. Chapman, Phys. Rev. **D50** 5308-5313 (1994).
- [56] W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).
- [57] A. Hasenfratz and P. Hasenfratz, Phys. Lett. **B93**, 165-169 (1980).
- [58] A. Hasenfratz and P. Hasenfratz, Nucl. Phys. **B193**, 210-220 (1981).
- [59] J. Collins, Renormalization", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1984).
- [60] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and Y. Schroder, JHEP **04**, 036 (2003), [arXiv:hep-ph/0304048].

- [61] P. H. Ginsparg, Nucl. Phys. **B170**, 388 (1980).
- [62] T. Appelquist and R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D23**, 2305 (1981).
- [63] S. Nadkarni, Phys. Rev. **D27**, 917 (1983).
- [64] E. Braaten and A. Nieto, Phys. Rev. **D53**, 3421 (1996), [arXiv:hep-ph/9510408].
- [65] M. E. Shaposhnikov, *Finite temperature effective theories*, (1996), arXiv:hep-ph/9610247.
- [66] S. z. Huang and M. Lissia, Nucl. Phys. **B438**, 54 (1995), [arXiv:hep-ph/9411293].
- [67] D. Diakonov and M. Oswald, Phys. Rev. **D68**, 025012 (2003).
- [68] S. Chapman, Phys. Rev. **C47** 1763-1780 (1993).
- [69] J. Kuti, J. Polonyi and K. Szlachanyi, Phys. Lett. **B98**, 199 (1981).
- [70] L. D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Rev. **D24**, 450 (1981).
- [71] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B72**, 477 (1978).
- [72] R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D62**, 111501 (2000), [arXiv:hep-ph/0006205].
- [73] A. D. Linde, Phys. Lett. **B96**, 289 (1980).
- [74] M. J. Lavelle and M. Schaden, Phys. Lett. **B208**, 297 (1988).
- [75] K. G. Chetyrkin, S. Narison, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B550**, 353 (1999), [arXiv:hep-ph/9811275].
- [76] K.-I. Kondo, Phys. Lett. **B514**, 335 (2001).
- [77] P. Boucaud *et al.*, Phys. Rev. **D63**, 114003 (2001).
- [78] E. Ruiz Arriola, P. O. Bowman, and W. Broniowski, Phys. Rev. **D70**, 097505 (2004), [arXiv:hep-ph/0408309].
- [79] Ph. Boucaud *et al.*, Phys. Rev. **D74**, 034505 (2006), [arXiv:hep-lat/0504017].
- [80] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and Y. Schroder, Phys. Rev. Lett. **86**, 10 (2001).
- [81] G. S. Bali, Phys. Rept. **343**, 1 (2001), [arXiv:hep-ph/0001312].
- [82] E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, JHEP **0601**, 073 (2006), [arXiv:hep-ph/0505215].
- [83] A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B164**, 171 (1980).

- [84] I. Y. Arefeva, Phys. Lett. **B93**, 347 (1980).
- [85] V. S. Dotsenko and S. N. Vergeles, Nucl. Phys. **B169**, 527 (1980).
- [86] J.-L. Gervais and A. Neveu, Nucl. Phys. **B163**, 189 (1980).
- [87] J. Engels, J. Fingberg and M. Weber, Z. Phys. **C41**, 513 (1988).
- [88] M. A. Shifman, Nucl. Phys. **B173**, 13 (1980).
- [89] K.-i. Kondo and T. Imai, *A confining string theory derivable from Yang-Mills theory due to a novel vacuum condensate*, (2002), arXiv:hep-th/0206173.
- [90] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Eur. Phys. J. **C6**, 133 (1999), [arXiv:hep-lat/9707023].
- [91] F. Karsch, E. Laermann, and A. Peikert, Phys. Lett. **B478**, 447 (2000), [arXiv:hep-lat/0002003].
- [92] M. Gockeler, R. Horsley, A. C. Irving, D. Pleiter, P. E. L. Rakow, G. Schierholz and H. Stüber, Phys. Rev. **D73**, 014513 (2006), [arXiv:hep-ph/0502212].
- [93] A. Dumitru, Y. Hatta, J. Lenaghan, K. Orginos, and R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D70**, 034511 (2004).
- [94] F. Zantow, *On the renormalization of the Polyakov loop*, (2003), arXiv:hep-lat/0301014.
- [95] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and Y. Schroder, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119**, 577 (2003).
- [96] S. Necco and R. Sommer, Nucl. Phys. **B622**, 328-346 (2002), [arXiv:hep-lat/0108008].
- [97] O. Kaczmarek, F. Karsch, F. Zantow, and P. Petreczky, Phys. Rev. **D70**, 074505 (2004).
- [98] E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, Phys. Rev. **D74**, 065005 (2006), [arXiv:hep-ph/0412308].
- [99] E. Megías, E. Ruiz Arriola, and L. L. Salcedo, *Chiral Lagrangian at finite temperature from the Polyakov-chiral quark model*, (2006). Pendiente de publicación por Physical Review **D**, arXiv: hep-ph/0607338.
- [100] E. Ruiz Arriola and W. Broniowski, Phys. Rev. **D67**, 074021 (2003), [arXiv:hep-ph/0301202].
- [101] T. Eguchi, Phys. Rev **D14**, 2755-2763 (1976).
- [102] R. Delbourgo and P.C. West, J. Phys. **A10**, 1049 (1977).

- [103] K. Fukushima, Phys. Lett. **B591**, 277 (2004), [arXiv:hep-ph/0310121].
- [104] D. Espriu, E. de Rafael and J. Taron, Nucl. Phys. **B345**, 22 (1990) [Erratum-ibid. **B355**, 278 (1991)].
- [105] J. Bijnens, C. Bruno and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B390**, 501 (1993), [arXiv:hep-ph/9206236].
- [106] E. Ruiz Arriola, Phys. Lett. **B253**, 430-435 (1991).
- [107] E. Megías, E. Ruiz Arriola, L. L. Salcedo and W. Broniowski, Phys. Rev. **D70**, 034031 (2004), [arXiv:hep-ph/0403139].
- [108] E. Megías, E. Ruiz Arriola and L. L. Salcedo, Phys. Rev. D **72**, 014001 (2005), [arXiv:hep-ph/0504271].
- [109] W. Florkowski and W. Broniowski, Phys. Lett. **B386**, 62-68 (1996).
- [110] M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, Phys. Atom. Nucl. **64**, 698 (2001) [Yad. Fiz. **64**, 757 (2001)], [arXiv:hep-ph/0008131].
- [111] M. Gross, Phys. Lett. **B132**, 125 (1983).
- [112] J. Polonyi and K. Szlachanyi, Phys. Lett. **B110** (1982) 395.
- [113] P. N. Meisinger, T. R. Miller and M. C. Ogilvie, Phys. Rev. **D65**, 034009 (2002), [arXiv:hep-ph/0108009].
- [114] P. N. Meisinger, M. C. Ogilvie and T. R. Miller, Phys. Lett. **B585**, 149 (2004), [arXiv:hep-ph/0312272].
- [115] X.-D. Ji, Phys. Rev. **D52**, 271 (1995), [arXiv:hep-ph/9502213].
- [116] J. F. Donoghue, J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B343**, 341 (1990).
- [117] S. Caracciolo, G. Curci, P. Menotti and A. Pelissetto, Ann. Phys. **197**, 119 (1990).
- [118] R. T. Hammond, Rept. Prog. Phys. **65**, 599 (2002).
- [119] A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. **B234**, 189 (1984).
- [120] M. A. Shifman, Phys. Rept. **209**, 341 (1991).
- [121] J. F. Donoghue and H. Leutwyler, Z. Phys. **C52**, 343 (1991).
- [122] N.D. Birrel and P.C.W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1982).
- [123] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York, 1972).

- [124] A. A. Andrianov, V. A. Andrianov and V. L. Yudichev, J. Math. Sci. **8**, 142 (1998), [arXiv:hep-ph/0404166].
- [125] G. Amoros, J. Bijnens and P. Talavera, Nucl. Phys. **B602**, 87 (2001), [arXiv:hep-ph/0101127].
- [126] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B321** (1989) 311.
- [127] J. Bijnens and P. Talavera, JHEP **0203** (2002) 046.
- [128] B. Ananthanarayan, G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rept. **353** (2001) 207, [arXiv:hep-ph/0005297].
- [129] A. Pich, *Colourless mesons in a polychromatic world*, (2002), arXiv:hep-ph/0205030.
- [130] G. V. Efimov and M. A. Ivanov, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 2031.
- [131] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **B37** (1971) 95.
- [132] E. Witten, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422.
- [133] L. L. Salcedo and E. Ruiz Arriola, Ann. Phys. **259**, (1996).
- [134] J. Volmer et al. (The Jefferson Lab F(pi)), Phys. Rev. Lett. **86**, 1713 (2001), [arXiv:nucl-ex/0010009].
- [135] P. O. Bowman, U. M. Heller and A. G. Williams, Phys. Rev. **D66**, 014505 (2002), [arXiv:hep-lat/0203001].
- [136] D. Toublan, Phys. Rev. **D53**, 6602 (1996) [Erratum-ibid. **D57**, 4495 (1998)]
- [137] S. Peris, M. Perrottet and E. de Rafael, JHEP **9805** (1998) 011.
- [138] J. Bijnens, E. Gámiz, E. Lipartia and J. Prades, JHEP **0304**, 055 (2003), [arXiv:hep-ph/0304222].
- [139] W. Broniowski, proc. of *Hadron Physics: Effective theories of low-energy QCD*, Coimbra, Portugal, September 1999, AIP Conference Proceedings **508** (1999) 380, eds. A. H. Blin and B. Hiller and M. C. Ruivo and C. A. Sousa and E. van Beveren, AIP, Melville, New York, [arXiv:hep-ph/9911204].
- [140] A. E. Dorokhov and W. Broniowski, Eur. Phys. J. **C32**, 79 (2003), [arXiv:hep-ph/0305037].
- [141] J. R. Peláez, Phys. Rev. Lett. **92**, 102001 (2004), [arXiv:hep-ph/0309292].
- [142] F. J. Gilman and H. Harari, Phys. Rev. **165**, 1803 (1968).
- [143] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 1177.

- [144] G. Colangelo, J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B603**, 125 (2001).
- [145] J. Bijnens, G. Colangelo and P. Talavera, JHEP **9805**, 014 (1998).
- [146] L. L. Salcedo, Nucl. Physics. **B549**, 98 (1999), [arXiv:hep-th/9802071].
- [147] L. L. Salcedo, Eur. Phys. Journal **C20**, 147-159 (2001), [arXiv:hep-th/0012166].
- [148] L. L. Salcedo, Eur. Phys. Journal **C20**, 161-184 (2001), [arXiv:hep-th/0012174].