

Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático

**MÉTODOS TOPOLÓGICOS Y VARIACIONALES
EN EL ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS PARA
ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES NO LINEALES
CON APLICACIONES A LA BIOLOGÍA.**

**Por
Abderrahim Zertiti.**

Granada, 1.996

**MÉTODOS TOPOLÓGICOS Y VARIACIONALES
EN EL ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS PARA
ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES NO LINEALES
CON APLICACIONES A LA BIOLOGÍA.**

**Por
Abderrahim Zertiti.**

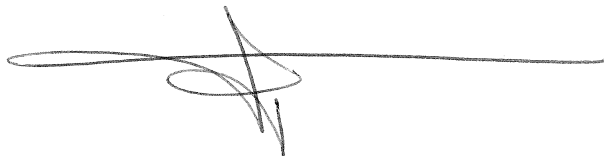
Memoria realizada en el Departamento
de Análisis Matemático de la Facultad de
Ciencias de la Universidad de Granada,
bajo la dirección de los Drs. D. David
Arcoya Alvarez y D. Antonio Cañada Villar,
profesores Titular y Catedrático, respecti-
vamente, de la Universidad de Granada,
para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº . Bº . Los Directores:

Fdo. David Arcoya Alvarez.

Fdo. Antonio Cañada Villar.

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas:

A handwritten signature in black ink, consisting of a long horizontal stroke with a loop and a vertical stroke crossing it.

Fdo. Abderrahim Zertiti.

**A mi mujer
A mi hijo Adnan
A mi madre**

II	ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES.	92
3	PROBLEMAS SEMI-POSITÓN EN DOMINIOS ANULARES.	93
3.1	PRELIMINARES	94
3.2	RESULTADOS DE EXISTENCIA	99
3.3	RESULTADOS DE NO EXISTENCIA	111
4	PROBLEMAS ELÍPTICOS EN EL EXTERIOR DE UNA BOLA CON UNA NO LINEALIDAD DISCONTINUA.	120
4.1	PROBLEMAS EN UNA CORONA	121
4.2	BIFURCACIÓN GLOBAL EN EL EXTERIOR DE UNA BOLA	132
5	ECUACIONES DIFERENCIALES CASI-LINEALES DEGE- NERADAS.	140
5.1	PRELIMINARES	141
5.2	ESTIMACIONES A PRIORI	143
5.3	TRUNCADURA DE $a(x, s)$	148
5.4	RESULTADO DE EXISTENCIA	157
	NOTAS FINALES Y POSIBLES LÍNEAS DE CONTINUACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.	161
	BIBLIOGRAFÍA.	165

NOTACIÓN.

$\emptyset$, conjunto vacío.

$\mathbb{N}$, conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$, conjunto de los números reales.

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$|x|$, norma del vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

∂A , frontera de A , subconjunto de un espacio topológico.

$\overset{\circ}{A}$, interior de A , subconjunto de un espacio topológico.

$\overline{A}$, cierre de A , subconjunto de un espacio topológico.

$|A|$, medida de Lebesgue del subconjunto A de $\mathbb{R}^N$.

Ω , subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$, gradiente de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable.

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$, laplaciano de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dos veces diferenciable.

$K_1, K_2, \dots, C_1, C_2, \dots$ distintas constantes positivas.

$C(A, B)$, conjunto de las funciones continuas de A en B (espacios topológicos).

$C(A)$, conjunto de las funciones continuas de A en $\mathbb{R}$.

$C^k(\Omega)$, conjunto usual de funciones reales diferenciables, con todas sus derivadas, hasta el orden k , continuas en Ω .

$C_0^\infty(\Omega)$, conjunto de funciones reales con soporte compacto y que son diferenciables hasta cualquier orden en Ω .

$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, espacios usuales de funciones diferenciables, con todas sus derivadas, hasta el orden k , α -Hölderianas en Ω .

$L^p(\Omega)$, espacios de Lebesgue usuales ($1 \leq p \leq +\infty$).

$L_{loc}^p(\Omega)$, subespacio de $L^p(\Omega)$ de funciones localmente sumables.

$W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$, $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, espacios de Sobolev usuales.

$W^{1,p}(w, \Omega)$, $W_0^{1,p}(w, \Omega)$, $H^1(w, \Omega) = W^{1,2}(w, \Omega)$, $H_0^1(w, \Omega) = W_0^{1,2}(w, \Omega)$, espacios de Sobolev con peso w , siendo w una función positiva y medible. En

ellos consideraremos la norma

$$\|u\|_{1,p,w} = \left(\int_{\Omega} w |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$, es la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ para la norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

INTRODUCCIÓN.

En esta Memoria mostramos cómo se pueden usar diferentes métodos de Análisis no lineal en el tratamiento de dos problemas de naturaleza diferente. El primero de ellos consiste en el estudio de ciertas ecuaciones y sistemas integrales no lineales, con retraso, que surgen en teoría de epidemias y en dinámica de poblaciones. El segundo lo constituyen diversos problemas de contorno asociados a ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico no lineales.

El origen del primer tipo de problemas está en un artículo de Cooke y Kaplan [42] publicado en 1.976. En dicho artículo, los autores elaboraron un modelo matemático para tratar de explicar los brotes periódicos de ciertas enfermedades infecciosas, pudiéndose también calificar el modelo como adecuado para el estudio del crecimiento de algunas poblaciones, cuando las condiciones ambientales varían de manera periódica.

De la formulación matemática llevada a cabo, surgió el interés por un tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias con retraso de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) - f(t - \tau, x(t - \tau)) \quad (0.1)$$

donde $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \rightarrow f(t, x)$, es una función continua dada, ω -periódica ($\omega > 0$) con respecto a la variable tiempo t , mientras que τ es una constante estrictamente positiva. Además, debido al origen del problema, el objetivo debe ser el estudio de la existencia, unicidad (o multiplicidad), aproximación, propiedades cualitativas, etc. de las soluciones de (0.1) (funciones reales de clase C^1 definidas en $\mathbb{R}$), que sean además, ω -periódicas, no negativas y no triviales.

La forma integral de (0.1) es

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds + c \quad (0.2)$$

siendo c una constante real. Usualmente se elige $c = 0$ en (0.2), llegándose a la ecuación integral no lineal con retraso

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds \quad (0.3)$$

Desde el trabajo de Cooke y Kaplan, diferentes autores han estudiado ecuaciones similares a (0.3) (ver [31], [59], [71], [72], [82], [83], [86], [89], [92]). Ello nos ha llevado a considerar en esta Memoria una ecuación integral no lineal, más general que (0.3) y que incluye a la de los autores citados; a saber,

$$x(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds \quad (0.4)$$

donde $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s, y) \rightarrow g(t, s, y)$ es una función continua, ω -periódica ($\omega > 0$) en la variable t , $g(t, s, y) \geq 0$, $\forall (t, s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, $g(t, s, 0) = 0$, $\forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l es una constante no negativa y $\tau : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ es una función continua y λ -periódica ($\lambda > 0$) tal que $\frac{\omega}{\lambda} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Como se detalla en el apartado 1.1., expresiones concretas de las funciones g y τ dan lugar a los modelos estudiados por los autores mencionados previamente. Nuestro interés primordial en esta Memoria, en lo que respecta a (0.4), se centra en la existencia de soluciones $q\omega$ -periódicas, no triviales y no negativas, así como en posibles resultados de multiplicidad, no existencia de soluciones y, finalmente, cuando tengamos unicidad, en la aproximación de las mismas.

En lo referente a la existencia de soluciones, en la literatura matemática sobre este tipo de problemas, suele imponerse, entre otras, la condición

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, s, y)}{y} = 0 \quad (0.5)$$

uniformemente en (t, s) . En esta Memoria permitimos a g tener un comportamiento asintótico "en infinito" más general. Además, para tipos amplios de ecuaciones, nuestras condiciones suficientes presentan la novedad de que son, además, necesarias para la existencia de soluciones $q\omega$ -periódicas, no negativas

y no triviales. Ello permite tener una información bastante precisa en algunos ejemplos que surgen de aplicaciones concretas.

También, los resultados que presentamos sobre la no existencia de tales soluciones son nuevos para (0.4).

Respecto de la multiplicidad, algunos de nuestros resultados son generalizaciones de otros conocidos (ver [59], [92]), mientras que el resto son completamente originales.

Las demostraciones consisten básicamente en plantear (0.4) como una ecuación de puntos fijos

$$x = F(x) \tag{0.6}$$

en espacios de Banach ordenados, con respecto a un cono, y entonces aplicar la teoría del grado topológico apropiada para estas situaciones: la llamada teoría del índice de puntos fijos.

Consideramos de interés no sólo las aplicaciones que hacemos de dicha teoría, sino también algunos de los resultados abstractos que obtenemos. Por ejemplo, en el apartado 1.3, imponemos, a veces, hipótesis de regularidad sobre F más débiles que las usuales.

Otro de los objetivos de la presente Memoria es poner de manifiesto la utilidad de los métodos monótonos en el estudio de (0.4). La noción apropiada de solución superior e inferior fue introducida en [31], [59], pero hasta ahora, los resultados que se han obtenido con tales métodos son débiles, comparados con aquellos demostrados usando herramientas topológicas. En esta Memoria mostramos la potencia de los métodos monótonos cuando se aplican a (0.4), poniendo de manifiesto también las ventajas y desventajas respecto del tratado topológico. Cuando se usan métodos de monotonía, en general es necesario imponer a g el hecho de que sea creciente respecto de la variable y . Sin embargo, otras hipótesis pueden debilitarse (como aquellas que permiten a la tasa de contacto de la epidemia ser cero en algunos intervalos no triviales del tiempo). Además, se encuentra, en general, un esquema definido iterativamente, que proporciona sucesiones monótonas convergentes a las soluciones de interés. Por último, la regularidad requerida sobre la no linealidad g suele ser menor que

con los métodos topológicos.

Es claro que el uso conjunto de métodos de monotonía y topológicos, proporciona una información más precisa sobre (0.4) que la obtenida independientemente, y este hecho lo ponemos claramente de manifiesto en esta Memoria.

Algunos resultados relacionados con las novedades mencionadas pueden verse en [33], [34] y [35].

Hemos dicho al comienzo, que en este trabajo consideramos también sistemas de ecuaciones cuya versión escalar es (0.3). Este estudio es completamente novedoso, pues hasta ahora no se habían establecido resultados concernientes a ello, a pesar de que su interés se había puesto ya de manifiesto en el trabajo citado de Cooke y Kaplan [42]. Estos sistemas son de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds \\ y(t) &= \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds, \end{aligned} \tag{0.7}$$

y formulan, bajo ciertas hipótesis, la interacción entre dos especies.

Mediante una definición apropiada de sistema de subsoluciones y supersoluciones para (0.7) (véase la sección 2.2), conseguimos demostrar diferentes resultados sobre la existencia de los llamados estados de coexistencia para (0.7); esto es, soluciones (x, y) tales que ambas componentes son no negativas y no triviales. La principal diferencia con el caso escalar estriba en que, en general, no es posible definir un esquema iterativo que proporcione sucesiones (x_n, y_n) , convergentes a la solución (x, y) . No obstante, esto es posible en algunos casos particulares, como en los llamados sistemas cooperativos y competitivos. Además, en el caso cooperativo, damos un resultado de unicidad de estados de coexistencia, lo que es particularmente interesante desde el punto de vista de su aproximación. También estudiamos la (posible) relación existente entre los estados de coexistencia de (0.7) y las soluciones semitriviales; es decir, soluciones donde exactamente una de las componentes es no negativa y no trivial, mientras que la otra es idénticamente cero.

El gran inconveniente que tienen los métodos monotónos, cuando se aplican al estudio de (0.7) es que, en general, es necesario imponer hipótesis de mono-

tonía sobre f y g , respecto de las variables x e y . Es por ello por lo que nos hemos propuesto también, estudiar (0.7) aplicando métodos topológicos.

Cuando (0.7) se formula de manera abstracta, se obtiene un problema de puntos fijos de la forma

$$\begin{aligned}x &= F_1(x, y) \\ y &= F_2(x, y)\end{aligned}\tag{0.8}$$

donde $F_1, F_2 : E \times E \rightarrow E$, siendo E un espacio de Banach ordenado con respecto a un cono C . Si se aplican a (0.8) los resultados conocidos en la literatura sobre este tipo de problemas (ver [3], [49], [59], [67]), la conclusión es la existencia de un punto fijo $(x, y) \in C \times C$, que es no trivial (es decir, no son ambas componentes triviales). Pero los estados de coexistencia de (0.7) se corresponden con puntos fijos $(x, y) \in C \times C$ tales que ambas componentes pertenezcan al conjunto $C \setminus \{0\}$. Motivados por este hecho, probamos en el apartado 2.3.1 algunos teoremas de punto fijo del tipo requerido. Estos teoremas son novedosos y su utilidad trasciende en el hecho de que se puedan aplicar a (0.7). Proporcionan, directamente, la existencia de estados de coexistencia, y pueden usarse en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciables ordinarias o ecuaciones en derivadas parciales. En particular, nuestros resultados incluyen versiones adecuadas para sistemas de ecuaciones, de los teoremas clásicos de Krasnoselskii: los teoremas de la compresión y expansión del cono ([67]), y son especialmente útiles cuando se aplican a sistemas de ecuaciones donde existen soluciones semitriviales (como ocurre frecuentemente en Biología).

Obviamente, con nuestro tratado, pueden estudiarse sistemas con cualquier número finito de funciones incógnitas.

Resultados relacionados con las novedades que hemos expuesto, para (0.7), pueden verse en [36], [37].

Una descripción más precisa de la parte primera de la Memoria es como sigue:

El Capítulo 1 lo dedicamos al estudio de la ecuación escalar (0.4). En primer lugar hemos hablado sobre la descripción y origen del modelo y hemos desarrollado algunas propiedades útiles sobre los operadores que aparecen, que

iterativo monótono convergente a las soluciones del problema considerado (ver Teorema 2.2.8 y Teorema 2.2.10). Para poder comparar estos resultados con el caso de sistemas elípticos podemos consultar [32], [66], [74]. Seguidamente tratamos también el problema de la unicidad. Probamos, bajo algunas condiciones de concavidad sobre f y g respecto de las variables x e y , la unicidad de estados de coexistencia cuando el modelo es de tipo cooperativo. Los trabajos de Dancer [45] y [46]) para modelos con difusión pueden ser útiles para los casos competitivo y presa-depredador.

Finalmente, la subsección 2.3.1 de la sección 2.3 la dedicamos al estudio del problema abstracto (0.8) relacionado con el sistema (0.7). El Teorema 2.3.1 constituye, junto con su Corolario 2.3.2, uno de los resultados centrales de esta Memoria. También demostramos otros resultados abstractos (Teorema 2.3.4 y Corolario 2.3.5) que aseguran, además de la existencia de estados de coexistencia, la existencia de soluciones semi-triviales de (0.7).

En la subsección 2.3.2 damos aplicaciones de estos resultados abstractos al sistema (0.7) permitiendo eliminar las hipótesis de monotonía que se imponían a f y g en el método de sub-super-soluciones. Los resultados abstractos mencionados pueden usarse, también, para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales (ver [37]), lo que muestra su gran utilidad.

La segunda parte de la Memoria está dedicada al estudio del problema de Dirichlet (con condición de contorno nula) asociado a la ecuación en derivadas parciales no lineal

$$-\mathcal{L}u(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega \quad (0.9)$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio (abierto y conexo), $\mathcal{L}$ un operador diferencial de tipo "elíptico" y $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no lineal. Observemos que los elementos principales del problema de contorno son tres:

1. El dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
2. La no linealidad f .
3. El operador diferencial $\mathcal{L}$.

Existen numerosos trabajos donde se estudian diversos aspectos relativos a (0.9) cuando Ω es acotado, f es continua y $\mathcal{L}$ es un operador de segundo orden uniformemente elíptico; por ejemplo, $\mathcal{L}$ es el operador de Laplace Δ . Entre otros, podemos citar [3], [4], [48] y [63] como excelentes "surveys" sobre el tema.

Por nuestra parte, dirigimos nuestra atención a completar aún más el estudio de la interrelación entre estos elementos. Especialmente, estudiaremos la existencia de solución positiva de (0.9) en ciertos casos apenas considerados en la literatura matemática. En éstos, bien el dominio Ω , bien la no linealidad f o bien el operador $\mathcal{L}$ dejan de ser "standard". Así en el Capítulo 3, supondremos que Ω es un anillo. La "radialidad" del dominio sugiere estudiar la existencia y la no-existencia de soluciones radiales positivas del problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda f(u(x)), & x &\in \Omega \\ u(x) &= 0, & x &\in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.10)$$

donde $\lambda > 0$, $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una no-linealidad continua satisfaciendo $f(0) < 0$, y Ω es la corona $\Omega = C(0, R, \widehat{R}) = \{x \in \mathbb{R}^N : R < |x| < \widehat{R}\}$, ($N \geq 3, 0 < R < \widehat{R}$).

Si $f(0) \geq 0$, (0.10) se llama problema positón (positone problem en inglés) y ha sido estudiado de manera intensiva en dominios acotados regulares por muchos autores (ver [3], [9], [47], [64] y [80]). En el caso particular de un dominio anular podemos citar también: [14], [58], [78], [79] y [85].

Más recientemente, el caso semi-positón (o no-positón), es decir $f(0) < 0$, ha sido considerado en [27], [38] y [41] donde se demuestran algunos resultados de existencia y no-existencia de soluciones del problema (0.10) que han motivado nuestro trabajo. Más precisamente, en [38], Castro y Shivaji prueban, en una bola, la existencia de soluciones positivas radiales para el problema (0.10) cuando λ es suficientemente pequeño. El método utilizado es el conocido como método de tiro. Para ello, se observa que por [55], cuando Ω es una bola, toda

solución positiva del problema (0.10) es radial. Así (0.10) es equivalente a

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad 0 < r < 1 \\ u(1) &= 0, u'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0.11)$$

donde $r = |x|$. El método de tiro consiste en considerar el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad 0 < r < 1 \\ u(0) &= d, u'(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0.12)$$

y probar que existe $d > 0$, tal que si $u(r, d, \lambda)$ denota la única solución de (0.12), entonces $u(1, d, \lambda) = 0$, es decir $u(r, d, \lambda)$ es una solución del problema (0.11).

El uso de este método se justifica por el hecho de ser la constante cero una supersolución de (0.10) cuando estamos en el caso semi-positón. Obsérvese, que en el caso positón, $u \equiv 0$ es una subsolución. Esto hace que, en principio, no sea, en absoluto, fácil aplicar la técnica de sub- y supersoluciones así como la teoría de "índice de puntos fijos en conos". Notemos que el método de tiro usa técnicas muy elementales para obtener resultados que por otros medios serían complicados de deducir.

Así, nuestro objetivo es extender al caso de una corona (ver [20]), que es más difícil, los resultados de existencia [38] y de no-existencia [27] de soluciones radiales positivas en una bola, mediante el método de tiro. Además, como veremos, los resultados obtenidos mejoran los conocidos para el caso de una bola.

Para situar mejor nuestro trabajo, hacemos algunas observaciones sobre las diferencias que existen entre el caso de la bola y de la corona. Como ya ha sido observado, por [55] se sabe que toda solución positiva de (0.10) en la bola $\Omega = B(0, R)$ es radial, con $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ en Ω (donde $\frac{\partial}{\partial r}$ es la derivada de $u(r)$ con respecto a $r = |x|$). Esta "ventaja" facilita la aplicación del método de tiro en [38] con hipótesis apropiadas sobre f . Además, el hecho de que $u(0) = \max \{u(x) : |x| \leq 1\}$ es fundamental en las demostraciones en [27],[38]. Al contrario, en el caso de la corona $\Omega = C(0, R, \widehat{R})$ no es verdad que toda solución positiva de (0.10) sea radial y no se sabe en que punto alcanza su

máximo. Además, por [55], tenemos solamente $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ en $C\left(0, \frac{R+\widehat{R}}{2}, \widehat{R}\right)$. Eso complica la aplicación del método de tiro, el cual necesita en nuestro caso más atención y prudencia.

Por otra parte, motivados por el trabajo [27] de Brown, Castro y Shivaji en la bola, ofrecemos también, condiciones suficientes para la no existencia de soluciones radiales no negativas del problema (0.10), cuando λ es suficientemente grande. En este caso, de nuevo el hecho que una solución positiva radial sólo sea decreciente en $\left[\frac{R+\widehat{R}}{2}, \widehat{R}\right]$ vuelve a dificultar enormemente la demostración.

El Capítulo 3 empieza con una descripción detallada del método de tiro en nuestro caso. Después probamos en el Lema 3.1.1 la existencia y la acotación de una solución $u(r, d, \lambda)$ del problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad R < r \\ u(R) &= 0, u'(R) = d \end{aligned} \right\}$$

donde $f \in C^1([0, +\infty))$ y $\lambda, d > 0$ son dos números dados. En la sección 3.2 probamos algunos lemas técnicos (Lema 3.2.1, Lema 3.2.2, Lema 3.2.3 y Lema 3.2.4), donde estudiamos las propiedades de soluciones $u(r, d, \lambda)$ del problema anterior, cuando λ y d cambian. Unas notas dadas después permiten comparar las nuevas dificultades encontradas en nuestro caso con respecto al caso de una bola. Basándonos en estos resultados e imponiendo hipótesis bastante simples a la función f , demostramos el Teorema 3.2.5 que da condiciones suficientes para la existencia de soluciones radiales positivas del problema (0.10) cuando λ es suficientemente pequeño, y que podemos aplicar también para el caso de una bola, mejorando así los resultados de Castro y Shivaji en [38] pues, como discutimos en la Nota 3.2.8, nuestras condiciones mejoran las de estos autores.

La sección 3.3 de este Capítulo 3 está motivada por la cuestión anteriormente expuesta de búsqueda de condiciones suficientes para la no existencia de soluciones radiales positivas del problema (0.10). Los métodos utilizados están basados en un estudio del comportamiento cualitativo cerca de la frontera (Lema 3.3.3) y del centro de la corona (Lema 3.3.2) de una posible solución

radial no negativa de (0.10) y sobre estimaciones (o "cotas a priori", Lema 3.3.1) de esta solución (que depende de λ) para λ grande. En definitiva, probaremos el Teorema 3.3.4 de no existencia de soluciones radiales no negativas de (0.10) y discutimos en la Nota 3.3.5 las nuevas aportaciones de este resultado.

En el Capítulo 4, consideramos el caso de dominios no acotados. Concretamente, Ω será el dominio exterior de una bola euclídea. Así, fijaremos nuestra atención en el estudio de la existencia de soluciones radiales positivas del siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(u(x) - a), \quad x \in \Omega \\ u(x) &> 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(x) &\rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad (0.13)$$

donde $a \geq 0$, Ω es el exterior de una bola, es decir $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| > 1\}$ ($N \geq 3$) y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una no-linealidad discontinua.

Entre los trabajos que se han realizado recientemente sobre problemas elípticos con una no-linealidad discontinua, podríamos citar [4], [6], [7], [11], [12], [13], [14], [17], [18], [22], [39], [62], [91]. Más precisamente, en [9] y [12] los autores usan el Principio Variacional de Clarke [40]. Concretamente, mediante la aplicación de éste, en [12] se estudia la existencia de soluciones radiales para problemas de este tipo en una bola y en [14] en una corona. En [17] tenemos una generalización de estos resultados al p-laplaciano. El caso de un dominio no acotado ($\Omega = \mathbb{R}^N$) fue estudiado en [7]. Así, el objetivo de nuestro trabajo es la extensión de los resultados de [7] al caso $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$. Notemos que la existencia de soluciones radiales para problemas en dominios exteriores con una no-linealidad continua fue considerado por muchos autores con técnicas diferentes (ver por ejemplo [30], [43], [51], [52], [53], [56], [88]).

Para el estudio de (0.13) empezamos planteando el problema en una corona

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(u(x) - a), \quad x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / 1 < |x| < R\} \\ u(x) &> 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.14)$$

Considerando $a \geq 0$ como parámetro de bifurcación, probaremos la existencia de una rama global de pares (a, u) con $a \geq 0$ y u solución radial positiva del problema (0.14). Luego, pasando al límite cuando $R \rightarrow +\infty$, obtenemos para cualquier $a > 0$ la existencia de una solución radial positiva del problema (0.13). Notemos que este método está inspirado en [7], donde se estudia el problema (0.13) con $\Omega = \mathbb{R}^N$. No obstante, hemos de observar que en nuestro caso las dificultades técnicas aumentan, lo cual complica su estudio (ver Notas 4.2.4 c)).

Comenzamos la sección 4.1 de este Capítulo 4 recordando un lema topológico (Lema 4.1.1) y enunciando un resultado de bifurcación global (Teorema 4.1.3) que necesitaremos para probar el Teorema 4.1.4 que nos proporciona la existencia de una rama global de soluciones radiales positivas del problema (0.14). Terminamos esta sección probando un lema técnico (Lema 4.1.6) que da estimas de la norma uniforme de una posible solución de (0.14) y que es útil en lo que sigue.

En la sección 4.2 se hace necesario, para estudiar el problema (0.13), probar dos resultados: Lema 4.2.1 y Lema 4.2.2. En el primero demostramos algunas desigualdades relacionadas con los rayos ρ_1 y ρ_2 , donde una solución radial de (0.13) toma el valor a . En el segundo ofrecemos una estimación de esta solución en términos de ρ_2 . Basándonos en estos resultados y usando el Lema 4.1.1 y el Teorema 4.1.3, probaremos nuestro resultado principal de este Capítulo (Teorema 4.2.3), que asegura la existencia de una solución radial positiva de (0.13) para cualquier $a > 0$. Finalmente, en las Notas 4.2.4 explicamos las diferencias que existen entre el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ (ver [7]) y nuestro caso del exterior de una bola. También insistimos sobre las nuevas aportaciones del Teorema 4.2.3.

El Capítulo 5 lo dedicamos al caso en el que el operador estándar $\mathcal{L} = \Delta$ es

sustituido por un operador diferencial más general. Concretamente estudiamos la existencia de soluciones no negativas y acotadas del problema

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \frac{1}{p}a'_u(x, u)|\nabla u|^p &= \\ &= b(x, u)|u|^{q-2}u + \frac{1}{q}b'_u(x, u)|u|^q, \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (0.15)$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $p > 1$ es un número real arbitrario, $q \in (1, p_t^*)$ (ver sección 5.1 para la definición de p_t^*) y

$$a, b, a'_s, b'_s : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

son funciones reales de Carathéodory satisfaciendo condiciones apropiadas de crecimiento. Más precisamente la función $a(x, s)$ tiene un crecimiento arbitrario con respecto a s y posiblemente degenerada (es decir $a(\cdot, s)$ puede tomar el valor cero en algún subconjunto de Ω) o singular con respecto a $x \in \Omega$. Además, $b(x, s)$ verifica una condición de crecimiento subcrítico y otra condición de sublinealidad.

Llamaremos solución del problema (0.15) (ver Definición 5.1.2) a toda función $u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ (espacio de Sobolev con peso w) satisfaciendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} a'_u(x, u)|\nabla u|^p \varphi \, dx &= \\ = \int_{\Omega} \left[b(x, u) + \frac{1}{q}b'_u(x, u)u \right] |u|^{q-2}u \varphi \, dx \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Para probar la existencia de una solución no negativa de (0.15) utilizaremos métodos variacionales. En efecto, aplicando resultados de minimización directos (Teorema 5.3.3), obtenemos dicha solución como mínimo global de un funcional I definido por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} a(x, u)|\nabla u|^p \, dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+)(u^+)^q \, dx, \quad u \in W_0^{1,p}(w, \Omega).$$

Hemos estructurado el contenido de este Capítulo de la siguiente manera. Empezamos con una sección de Preliminares donde incluimos algunas defini-

ciones útiles y las propiedades de espacios de Sobolev con peso. En la segunda sección demostramos, bajo condiciones adecuadas, dos resultados (Teorema 5.2.1 y Proposición 5.2.4) que nos proporcionan estimaciones a priori de una posible solución no negativa de (0.15). Utilizando estas estimaciones hacemos, en la tercera sección, una truncadura $\tilde{a}(x, s)$ de la función $a(x, s)$ de manera que el nuevo funcional $\tilde{I}$ definido por

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) (u^+)^q dx, \quad u \in W_0^{1,p}(w, \Omega),$$

admite un mínimo global, no negativo, u_0 en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ (Proposición 5.3.4). Imponiendo condiciones suplementarias a la función $b(x, s)$ (ver Lema 5.3.5) y usando de nuevo las cotas a priori dadas en la sección 4.2, probaremos en el Teorema 5.4.1, el resultado principal de este Capítulo 5, que u_0 es una solución no negativa de (0.15), acotada y distinta de cero satisfaciendo $I(u_0) < 0$. Finalmente discutimos en la Nota 5.4.2, las condiciones impuestas a la función $b(x, s)$, probando así que son completamente independientes. Notemos que los resultados obtenidos en este capítulo (ver [19]) generalizan [15] y una parte de [16].

Agradecimientos.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento:

A los Profesores Antonio Cañada (director de la primera parte de este trabajo) y David Arcoya (director de la segunda), por su paciente labor, ayuda, acertadas críticas, sugerencias, así como por su cuidadosa lectura de esta Memoria. Sin su dirección no hubiera sido posible en absoluto la realización de la misma. Su constante estímulo y orientación han marcado mi formación matemática y acrecentado mi interés por la investigación.

Al profesor Pavel Drábek, de la Universidad de Bohemia-Oeste, Pilsen, República Checa, por su cuidadosa lectura de la parte I, y en general, por los comentarios que hizo de algunos de los resultados descritos a lo largo de este trabajo.

Al Profesor Antonio Ambrosetti, de la Scuola Normale Superiore de Pisa (Italia), por su sugerencia sobre la aplicación del grado topológico a los problemas presentados en los Capítulos 1 y 2 y por haber leído los Capítulos 3 y 4, en particular, por su comentario sobre la inclusión de los Teoremas 3.2.7 y 3.3.6.

A mi amigo y colega el profesor José Luis Gámez por su estimable ayuda y continuado apoyo.

Al profesor L. Imlahi, Decano de la facultad de Ciencias de Tetúan, por su disponibilidad, facilidades y excelente predisposición hacia mi trabajo.

A los profesores Aurelio Montero, Francisco Roca y Salvador Villegas por haber leído la primera versión de esta Memoria, y por sus oportunas sugerencias.

A todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático, por su ánimo y amable hospitalidad durante mi estancia en este Departamento, y por haberme proporcionado todo tipo de facilidades para la realización de este trabajo.

También he de agradecer el hecho de haber sido miembro del proyecto de investigación "Dinámica de poblaciones y Ecuaciones Funcionales no lineales", sufragado por la CAICYT (PB92-0941), dentro de cuyo marco general se realizó la primera parte de esta Memoria.

Finalmente, quiero hacer constar que la investigación cuyos resultados se recogen en esta Memoria ha sido posible gracias a una beca que me ha sido otorgada por el Instituto de Cooperación con el Mundo Árabe (ICMA).

PARTE I

ECUACIONES

INTEGRALES NO

LINEALES.

Capítulo 1

LA ECUACIÓN ESCALAR.

Dedicaremos este Capítulo de la Memoria a estudiar el modelo escalar de Cooke y Kaplan [42] proveniente de Teoría de Epidemias y Dinámica de poblaciones, aunque nuestros resultados de existencia, no existencia y multiplicidad de soluciones positivas se corresponden con un modelo más general que el citado. En particular, centramos nuestra atención en el uso de métodos monótonos (soluciones superiores e inferiores) y métodos topológicos (técnicas de grado topológico en conos).

1.1 DESCRIPCIÓN Y ORIGEN DEL MODELO

En el año 1.976, Cooke y Kaplan propusieron la ecuación integral (ver [42])

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.1)$$

para explicar el comportamiento periódico de algunas enfermedades contagiosas que aparecieron en Nueva York durante los años 1.929-1.970.

El modelo se obtiene de la siguiente manera: Consideremos una población aislada satisfaciendo las condiciones (ver [42], [86]):

1. La población tiene un tamaño constante N .
2. La población está dividida en dos clases de individuos de intersección vacía: los susceptibles de contraer la infección y los que están infectados.

3. La enfermedad no es mortal y después del periodo de infección, cada individuo es de nuevo susceptible de contraerla.

4. No hay estado latente, es decir no hay tiempo de retraso entre la exposición a la enfermedad y ser infeccioso.

5. El tiempo durante el cual cada individuo está infectado es una constante positiva fija τ (en unidades de tiempo).

6. La población es homogénea y está uniformemente mezclada. La razón de contacto, definida como el número medio de contactos efectivos con otros individuos por infeccioso por unidad de tiempo, es una función $a(t)$ (del tiempo t), que es periódica. Entenderemos por contacto efectivo una interacción que implica la infección de otro individuo si es susceptible.

7. La población tiene un tamaño N suficientemente grande de manera que, la proporción $I(t)$ de los individuos actualmente infecciosos y la proporción $S(t)$ de los individuos actualmente susceptibles, se comportan como variables continuas.

Claramente el producto $a(t)S(t)$ nos proporciona el número de contactos efectivos por individuo infeccioso por unidad de tiempo. En consecuencia $NI(t)[a(t)S(t)]$ es el número de contactos efectivos en el momento t por unidad de tiempo, es decir, el número de nuevos infecciosos introducidos en la población en el momento t . Pero, por la condición 2, $I(t) + S(t) = 1$. Entonces

$$NI(t)[a(t)S(t)] = Na(t)I(t)(1 - I(t)).$$

Como la duración de la infección es precisamente la constante τ , el número de individuos que pasan de la clase de los infecciosos a los susceptibles, por unidad de tiempo, en el momento t , estará dado por

$$Na(t - \tau)I(t - \tau)(1 - I(t - \tau)).$$

Así, es lógico suponer que

$$NI'(t) = Na(t)I(t)(1 - I(t)) - Na(t - \tau)I(t - \tau)(1 - I(t - \tau)),$$

es decir,

$$I'(t) = a(t) I(t) (1 - I(t)) - a(t - \tau) I(t - \tau) (1 - I(t - \tau)).$$

De aquí resulta, por integración,

$$I(t) = \int_{t-\tau}^t a(s) I(s) (1 - I(s)) ds + c. \quad (1.2)$$

Es usual tomar la constante c como cero (ver [42] y [86]).

La ecuación integral (1.1) es una generalización de (1.2), y admite una interacción en la población más general que la anteriormente descrita.

En este capítulo estamos interesados en el estudio de la siguiente ecuación integral no lineal, que es más general que (1.1):

$$x(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t - s - l)) ds. \quad (1.3)$$

En adelante suponemos la hipótesis siguiente:

(H) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s, y) \rightarrow g(t, s, y)$ es una función continua, ω -periódica ($\omega > 0$) en la variable t , $g(t, s, y) \geq 0$, $\forall (t, s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $g(t, s, 0) = 0$, $\forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l es una constante no negativa y $\tau : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ es una función continua y λ -periódica ($\lambda > 0$) tal que $\frac{\omega}{\lambda} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Notemos que la ecuación integral (1.3) generaliza distintos modelos considerados por otros autores. En efecto:

- Si $\tau(t) \equiv \tau > 0$, $l = 0$ y $g(t, s, y) = f(t - s, y)$ tenemos el modelo (1.1) estudiado por Cooke y Kaplan [42], Guo y Lakshmikantham [59] y Smith [86].
- Si $\tau(t) \equiv \tau > 0$, $l = 0$ y $g(t, s, y) = P(s, \tau)f(t - s, y)$, tenemos el caso considerado por Nussbaum [82].
- Si $\tau(t) \equiv \tau > 0$, $l > 0$ y $g(t, s, y) = P(s)f(t - s - l, y)$ tenemos la ecuación examinada por Swick [89].
- Finalmente el caso donde $\tau(t)$ no es necesariamente constante fue considerado por Torrejon [92].

1.2 MÉTODO DE SOLUCIONES SUPERIORES E INFERIORES

Motivados por el origen del problema, así como por las consideraciones anteriores, estamos interesados en la existencia de soluciones continuas, $q\omega$ -periódicas, no negativas y no triviales de la ecuación (1.3). Nuestro objetivo en este apartado es aplicar el método de soluciones superiores e inferiores a este modelo y mostrar su potencia para problemas de este tipo. Además discutiremos sus ventajas y sus inconvenientes respecto del método topológico, que se aplicará en el apartado 1.3.

Observemos que (1.3) es equivalente a un problema de punto fijo en un espacio de Banach adecuado. En efecto, sea E el espacio de Banach real de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, continuas y $q\omega$ -periódicas, con la norma

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq q\omega} |x(t)|, \quad \forall x \in E,$$

y sea P el cono

$$P = \{x \in E : x(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos el operador $F : E \rightarrow E$ definido por

$$Fx(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds. \quad (1.4)$$

Entonces el problema (1.3) admite una solución x continua, $q\omega$ -periódica, no negativa y no trivial si y sólo si existe $x \in P \setminus \{0\}$ tal que

$$x = Fx \quad (1.5)$$

El interior del cono positivo P está dado por

$$\overset{\circ}{P} = \{x \in E : x(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

y tienen un interés especial las soluciones x de (1.5) tales que $x \in \overset{\circ}{P}$.

Notemos que (E, P) es un espacio de Banach ordenado, respecto de la relación:

$$x \leq y \text{ sii } y - x \in P.$$

De aquí en adelante conservaremos todas estas definiciones y notaciones.

1.2.1 EXISTENCIA DE SOLUCIONES POSITIVAS

Antes de comenzar propiamente con nuestros resultados, establezcamos algunos previos que habrán de usarse más tarde:

PROPOSICIÓN 1.2.1 *i) El operador $F : P \rightarrow P$, definido por (1.4), es completamente continuo (es decir continuo y aplicando conjuntos acotados de P en subconjuntos relativamente compactos de P).*

ii) Sea $a_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(t, s) \rightarrow a_1(t, s)$, cualquier función continua y ω -periódica en t . Entonces el operador $L_{a_1} : E \rightarrow E$ definido por

$$L_{a_1}z(t) = \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s)z(t - s - l)ds, \quad \forall z \in E \quad (1.6)$$

es lineal, positivo (es decir, $L_{a_1}(P) \subset P$) y completamente continuo.

iii) Además, si $\overset{\circ}{A}_t = \emptyset$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donde $A_t = \{s \in \mathbb{R} : a_1(t, s) = 0\}$, el operador L_{a_1} es fuertemente positivo (en el sentido de que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(L_{a_1})^n(P \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{P}$) y tenemos la siguiente desigualdad:

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s)ds \leq r(L_{a_1}) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s)ds, \quad (1.7)$$

donde $r(L_{a_1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{a_1}^n\|^{\frac{1}{n}}$ es el radio espectral de L_{a_1} .

Demostración. i) Empezamos con la continuidad y probaremos que $F : E \rightarrow E$ es continuo. Fijamos $x_0 \in E$ y supongamos que $x \in E$, $\|x - x_0\| \leq 1$.

Entonces

$$\begin{aligned}
|Fx(t) - Fx_0(t)| &= \left| \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) - g(t, s, x_0(t-s-l)) ds \right| = \\
&\quad (\text{haciendo el cambio de variable } u = t-s-l) \\
&= \left| \int_{t-l-\tau(t)}^{t-l} [g(t, t-l-s, x(s)) - g(t, t-l-s, x_0(s))] ds \right| = \\
&= \left| \int_{t-l-\tau(t)}^{t-l} [H(t, s, x(s)) - H(t, s, x_0(s))] ds \right|,
\end{aligned}$$

con $H(t, s, y) = g(t, t-l-s, y)$.

Como la función H es uniformemente continua en el compacto

$$K_1 = [0, q\omega] \times [-l - \tau_2, q\omega - l] \times [0, 1 + \|x_0\|], \quad \left(\tau_2 = \max_{0 \leq t \leq \lambda} \tau(t) \right),$$

deducimos, para cualquier $\varepsilon > 0$, la existencia de $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que si $(t_1, s_1, y_1), (t_2, s_2, y_2) \in K_1$ verifican $|t_1 - t_2| \leq \eta$, $|s_1 - s_2| \leq \eta$ y $|y_1 - y_2| \leq \eta$, entonces

$$|H(t_1, s_1, y_1) - H(t_2, s_2, y_2)| \leq \varepsilon.$$

Entonces, tomando $\|x - x_0\| \leq \min\{1, \eta\}$, obtenemos

$$|Fx(t) - Fx_0(t)| \leq \varepsilon \tau_2, \quad \forall t \in [0, q\omega],$$

es decir,

$$\|Fx - Fx_0\| \leq \varepsilon \tau_2,$$

lo cual demuestra la continuidad de F .

Por otra parte, sea G cualquier subconjunto acotado de P , es decir, existe $M_1 > 0$ tal que $\|x\| \leq M_1, \forall x \in G$. Queremos probar que $F(G)$ es relativamente compacto en P . Claramente, por **(H)**, $F(G)$ es acotado. Además $F(G)$ es equicontinuo. Para probarlo fijamos $\varepsilon > 0$ y sea

$$M_2 = \max_{(t,s,y) \in K_2} |H(t, s, y)|$$

donde $K_2 = [0, q\omega] \times [-l - \tau_2, q\omega - l] \times [0, M_1]$. Como las funciones $H(t, s, y)$ y $f(t) = t - l - \tau(t)$ son, respectivamente, uniformemente continuas en los

compactos K_2 y $[0, q\omega]$, existe $\eta = \eta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ tal que para (t_1, s_1, y_1) , $(t_2, s_2, y_2) \in K_2$ satisfaciendo $|t_1 - t_2| \leq \eta$, $|s_1 - s_2| \leq \eta$ y $|y_1 - y_2| \leq \eta$, tenemos

$$|H(t_1, s_1, y_1) - H(t_2, s_2, y_2)| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(t_2) - f(t_1)| \leq \varepsilon.$$

De aquí deducimos, para $x \in G$ arbitrario y $t_1, t_2 \in [0, q\omega]$ tales que $|t_1 - t_2| \leq \eta$, que

$$\begin{aligned} |Fx(t_2) - Fx(t_1)| &= \left| \int_0^{\tau(t_2)} g(t_2, s, x(t_2 - s - l)) ds - \int_0^{\tau(t_1)} g(t_1, s, x(t_1 - s - l)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_2-l-\tau(t_2)}^{t_2-l} H(t_2, s, x(s)) ds - \int_{t_1-l-\tau(t_1)}^{t_1-l} H(t_1, s, x(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_2-l-\tau(t_2)}^{t_1-l-\tau(t_1)} H(t_2, s, x(s)) ds + \int_{t_1-l-\tau(t_1)}^{t_1-l} H(t_2, s, x(s)) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1-l}^{t_2-l} H(t_2, s, x(s)) ds - \int_{t_1-l-\tau(t_1)}^{t_1-l} H(t_1, s, x(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_2-l-\tau(t_2)}^{t_1-l-\tau(t_1)} H(t_2, s, x(s)) ds \right| + \left| \int_{t_1-l}^{t_2-l} H(t_2, s, x(s)) ds \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_1-l-\tau(t_1)}^{t_1-l} (H(t_2, s, x(s)) - H(t_1, s, x(s))) ds \right| \leq \\ &\leq M_2 |f(t_2) - f(t_1)| + M_2 |t_2 - t_1| + \varepsilon \tau_2 \leq \\ &\leq (2M_2 + \tau_2) \varepsilon, \quad \forall x \in G, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $F(G)$ es equicontinuo. Ahora, por el Teorema de Arzelá-Ascoli, $F(G)$ es relativamente compacto.

ii) Es trivial a partir de i).

iii) Queremos probar que L_{a_1} es fuertemente positivo. Para ello tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\tau_1 \geq q\omega$, donde $\tau_1 = \min_{0 \leq t \leq \lambda} \tau(t)$ y $x \in P \setminus \{0\}$. Si existiese algún punto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(L_{a_1})^n x(t_0) = 0 \tag{1.8}$$

tendríamos $L_{a_1}(L_{a_1})^{n-1}x(t_0) = 0$, es decir,

$$\int_0^{\tau(t_0)} a_1(t_0, s)(L_{a_1})^{n-1}x(t_0 - s - l) ds = 0.$$

Entonces

$$a_1(t_0, s)(L_{a_1})^{n-1}x(t_0 - s - l) = 0, \quad \forall s \in [0, \tau(t_0)].$$

Utilizando la hipótesis (H_3) , obtenemos

$$(L_{a_1})^{n-1}x(t_0 - s - l) = 0, \quad \forall s \in [0, \tau(t_0)]$$

lo cual es equivalente a

$$(L_{a_1})^{n-1}x(s) = 0, \quad \forall s \in [t_0 - \tau(t_0) - l, t_0 - l]. \quad (1.9)$$

Así obtenemos (1.9) como consecuencia de (1.8).

Iterando ahora este proceso n veces, obtenemos $x(s) = 0$, $\forall s \in I$, donde I es un intervalo de longitud al menos $n\tau(t_0) \geq n\tau_1 \geq q\omega$. Teniendo en cuenta que x es $q\omega$ -periódica, deducimos que $x \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

De otro lado, es bien sabido que el radio espectral es menor o igual que la norma del operador. Entonces

$$r(L_{a_1}) \leq \|L_{a_1}\| = \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s) ds.$$

Además, como L_{a_1} es fuertemente positivo, el Teorema de Krein-Rutman (ver [33], [67], [69]) asegura la existencia de $x_0 \in P \setminus \{0\}$ tal que

$$L_{a_1}x_0 = r(L_{a_1})x_0.$$

Teniendo en cuenta que $\overset{\circ}{A}_t = \emptyset$, $\forall t \in \mathbb{R}$, probemos que $x_0(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (es decir, $x_0 \in \overset{\circ}{P}$). En efecto, si existiese $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0(t_0) = 0$. Entonces

$$0 = r(L_{a_1})x_0(t_0) = \int_0^{\tau(t_0)} a_1(t_0, s)x_0(t_0 - s - l)ds,$$

por lo tanto $x_0 \equiv 0$ en el intervalo $[t_0 - \tau_1 - l, t_0 - l]$ (de longitud τ_1), donde $\tau_1 = \min_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) > 0$ (recordemos que τ es λ -periódica). Ahora si escribimos $x_0(t_0 - \tau_1 - l) = 0$ y $x_0(t_0 - l) = 0$, obtendremos como antes $x_0 \equiv 0$ en los intervalos $[t_0 - 2\tau_1 - 2l, t_0 - \tau_1 - 2l]$, $[t_0 - \tau_1 - 2l, t_0 - 2l]$, es decir, $x_0 \equiv 0$ en el intervalo $[t_0 - 2\tau_1 - 2l, t_0 - 2l]$ (de longitud $2\tau_1$). Si repetimos este proceso suficientes veces, deduciremos que $x_0 \equiv 0$ en un intervalo de longitud $n\tau_1 \geq q\omega$.

Por lo tanto $x_0 \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

Sea $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0(t_1) = \min_{t \in \mathbb{R}} x_0(t) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} r(L_{a_1})x_0(t_1) &= \int_0^{\tau(t_1)} a_1(t_1, s)x_0(t_1 - s - l)ds \geq \\ &\geq x_0(t_1) \int_0^{\tau(t_1)} a_1(t_1, s)ds \geq \\ &\geq x_0(t_1) \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s)ds, \end{aligned}$$

lo cual implica $\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s)ds \leq r(L_{a_1})$. Así queda probado la proposición. $\square$

El siguiente teorema describe el marco general del método de soluciones superiores e inferiores (ver [31], [59]):

TEOREMA 1.2.2 Sean $\alpha, \beta \in P$, dos funciones tales que $\alpha(t) \leq \beta(t), \forall t \in \mathbb{R}$ y

i) α es una solución inferior de (1.3), es decir,

$$\alpha(t) \leq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, \alpha(t - s - l))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

ii) β es una solución superior de (1.3), es decir,

$$\beta(t) \geq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, \beta(t - s - l))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

iii) g es creciente con respecto a $y \in [\alpha_0, \beta_0]$ para $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fijo, donde

$$\alpha_0 = \min_{t \in \mathbb{R}} \alpha(t), \quad \beta_0 = \max_{t \in \mathbb{R}} \beta(t).$$

Entonces (1.3) tiene al menos una solución $x \in P$ tal que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Consideremos las sucesiones $\{x_n\}, \{x^n\}$ definidas por

$$x_0 = \alpha, \quad x_{n+1} = Fx_n, \quad x^0 = \beta, \quad x^{n+1} = Fx^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Utilizando i), ii), iii) y (H) podemos verificar fácilmente que

$$\alpha(t) \leq x_n(t) \leq x_{n+1}(t) \leq x^{n+1}(t) \leq x^n(t) \leq \beta(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $\{x_n\}$ y $\{x^n\}$ convergen, respectivamente, a funciones x e y , elementos de E tales que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq y(t) \leq \beta(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además, por la continuidad de F (Proposición 1.2.1 i)), tenemos

$$x = Fx, y = Fy.$$

□

NOTAS 1.2.3 a) Puede ocurrir $x = y$. Así, sería interesante buscar condiciones suficientes que aseguren $x \neq y$.

b) Es fácil ver que una solución z de (1.3) que pertenezca al intervalo

$$[\alpha, \beta] = \{u \in E : \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in \mathbb{R}\},$$

verifica

$$x(t) \leq z(t) \leq y(t).$$

Así, decimos que x y y son, respectivamente, solución minimal y maximal del problema (1.3) en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

c) El teorema anterior proporciona no sólo la existencia de una solución de (1.3), sino un esquema iterativo mediante el cual pueden obtenerse aproximaciones de tal solución. Esta es una de las grandes ventajas del método de soluciones superiores e inferiores.

d) Para aplicar el método de soluciones superiores e inferiores necesitamos, en general, la monotonía de la función g . Esta es una hipótesis bastante restrictiva. Como veremos más tarde los métodos topológicos permiten eliminarla.

El teorema anterior goza de bastante generalidad pero es difícil de aplicar en ejemplos concretos; por ello sería interesante encontrar condiciones más simples

que garanticen el cumplimiento de (1.10) y (1.11). Además, teniendo en cuenta el origen del modelo, estas condiciones deberían tener interpretaciones biológicas adecuadas. Esto es lo que hacemos en el siguiente resultado:

TEOREMA 1.2.4 *Supongamos las siguientes condiciones:*

i) *Existen una función continua $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(t, s) \rightarrow a(t, s)$, ω -periódica en t y un número real positivo δ tales que*

$$g(t, s, y) \geq a(t, s)y, \forall y \in [0, \delta], \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Además, existe $y \in \mathring{P}$ con $\|y\| \leq \delta$ satisfaciendo

$$y \leq L_a(y).$$

ii) *Existen una función continua $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, s) \rightarrow b(t, s)$, ω -periódica en t y un número positivo $M > 0$ tales que*

$$g(t, s, y) \leq b(t, s)y, \forall y \in [M, +\infty), \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Además $b(t, s) > 0$, $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$ y $r(L_b) < 1$.

iii) *g es creciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$ para $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ fijo.*

Entonces (1.3) admite una solución $x \in \mathring{P}$.

Demostración. La demostración consiste en probar la existencia de una solución inferior α y de una solución superior β apropiadas tales que $\alpha \leq \beta$. Claramente $\alpha \equiv y$ es una solución inferior, porque

$$\begin{aligned} y(t) \leq L_a(y)(t) &= \int_0^{\tau(t)} a(t, s)y(t-s-l)ds \leq \\ &\leq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, y(t-s-l))ds = Fy(t), \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De otro lado, tomemos $m \in (1, +\infty)$ tal que $r(mL_b) = 1$. Como consecuencia de la Proposición 1.2.1 ii), el operador $mL_b : E \rightarrow E$ es lineal, compacto y positivo. Entonces existe, por el Teorema de Krein-Rutman [69], una función

$y_0 \in P \setminus \{0\}$ satisfaciendo

$$(mL_b)(y_0) = y_0.$$

Además, por un razonamiento análogo al de la Proposición 1.2.1 ii), probamos que $y_0 \in \overset{\circ}{P}$, es decir, $y_0(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ahora, tomemos $M_1 > 0$ tal que

$$M_1(\min_{t \in \mathbb{R}} y_0(t)) \geq \max\{M, \max_{t \in \mathbb{R}} \alpha(t)\}.$$

Entonces, si $\beta \equiv M_1 y_0$, tenemos $\beta(t) \geq \alpha(t), \forall t \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \beta(t) &= M_1 y_0(t) = M_1 (mL_b)(y_0)(t) \geq L_b(M_1 y_0)(t) = \\ &= \int_0^{\tau(t)} b(t, s) M_1 y_0(t - s - l) ds \geq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, M_1 y_0(t - s - l)) ds = \\ &= \int_0^{\tau(t)} g(t, s, \beta(t - s - l)) ds \end{aligned}$$

o lo que es igual, β es una solución superior de (1.3). Así queda probado el teorema. $\square$

Como consecuencia de ello obtenemos dos corolarios. En el primero probaremos la existencia de soluciones superiores e inferiores no constantes en general. En el segundo probaremos la existencia de soluciones superiores e inferiores constantes.

COROLARIO 1.2.5 (*Soluciones superiores e inferiores no constantes en general*).

Supongamos que:

i) *Existe una función continua $a_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y} = a_1(t, s)$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Además, $\overset{\circ}{A}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$ y $r(L_{a_1}) > 1$.

ii) *Existe una función continua $b_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, s, y)}{y} = b_1(t, s)$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Además $r(L_{b_1}) < 1$.

iii) g es creciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$ para $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fijo.

Entonces la ecuación (1.3) tiene al menos una solución $x \in \overset{\circ}{P}$.

Demostración. Para probar el corolario, verificaremos que las hipótesis del Teorema 1.2.4 son satisfechas para funciones a y b adecuadas.

Para ello, tomemos $m_1 \in (0, 1)$ tal que $r(m_1 L_{a_1}) = 1$. Como el operador $m_1 L_{a_1}$ es lineal, compacto y positivo, existe $y_1 \in P \setminus \{0\}$, $\|y_1\| \leq 1$ tal que $m_1 L_{a_1}(y_1) = y_1$. Utilizando el hecho de que $\overset{\circ}{A}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$, y razonando como en el teorema anterior, probamos que $y_1 \in \overset{\circ}{P}$. También tenemos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= m_1 \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s) y_1(t - s - l) ds < \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s) y_1(t - s - l) ds = \\ &= (L_{a_1} y_1)(t), \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$\varepsilon \leq \frac{\min_{t \in \mathbb{R}} ((L_{a_1} y_1)(t) - y_1(t))}{\max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} y_1(t - s - l) ds}.$$

Entonces de i) deducimos la existencia de $\delta > 0$ tal que

$$g(t, s, y) \geq (a_1(t, s) - \varepsilon)y, \forall y \in [0, \delta], \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

La función $a \equiv a_1 - \varepsilon$ verifica la hipótesis i) del Teorema 1.2.4 con $y = \delta y_1$.

También, por las propiedades del radio espectral, podemos elegir $\varepsilon' > 0$ tal que $r(L_{(b_1 + \varepsilon')}) < 1$. Además, por ii), existe $M > 0$ tal que

$$g(t, s, y) \leq (b_1(t, s) + \varepsilon')y, \forall y \in [M, +\infty), \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2,$$

es decir, la función $b \equiv b_1 + \varepsilon'$ verifica la hipótesis ii) del Teorema 1.2.4. Así queda probado el corolario. $\square$

NOTAS 1.2.6 a) Los autores que han utilizado métodos topológicos para estudiar (1.3) ([33], [42], [82], [86]) suponen la existencia de los verdaderos límites

en i) y ii) del Corolario 1.2.5, en lugar de $\liminf$ y $\limsup$. También suponen (excepto en [33]) que $b_1 \equiv 0$. Por ejemplo, en el trabajo de Cooke y Kaplan [42] la función $g(t, s, y)$ es acotada. Así, nuestra hipótesis ii) del Corolario 1.2.5 permite a la función g un comportamiento más general, respecto de y , en $+\infty$.

También, tanto en el trabajo de Smith [86] como en el de Cooke y Kaplan [42], se exige la existencia de la derivada parcial de la función $g(t, s, y)$ con respecto a y en el punto cero. Esta condición restrictiva de regularidad no es necesaria en nuestro corolario.

b) Las condiciones i) y ii) del Corolario 1.2.5 ponen de manifiesto que la existencia de soluciones de (1.3) depende del comportamiento de la función $\frac{g(t, s, y)}{y}$ cuando y es suficientemente grande y también cuando y es suficientemente pequeño. Notemos que en el modelo original de Cooke y Kaplan [42],

$$a_1(t, s) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y} = \frac{\partial g}{\partial y}(t, s, 0)$$

(cuando este límite existe) representa la tasa de contacto de la epidemia.

c) En los trabajos mencionados en la nota a), la solución periódica x obtenida pertenece a $P \setminus \{0\}$, mientras que en nuestro corolario tenemos más: $x \in \overset{\circ}{P}$, es decir $x(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Biológicamente hablando, eso significa que en todo momento hay una proporción positiva de individuos de la población que son infecciosos.

d) Una condición suficiente para que se verifique $\overset{\circ}{A}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$, es $a(t, s) > 0 \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$ o $\mu(A_t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, donde μ es la medida de Lebesgue.

COROLARIO 1.2.7 (Soluciones superiores e inferiores constantes).

Supongamos que

i) Existe una función continua $a_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y} = a_1(t, s),$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Además $\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s) ds > 1$.

ii) Existe una función continua $b_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, s, y)}{y} = b_1(t, s)$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Además $\max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} b_1(t, s) ds < 1$.

iii) g es creciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$ para $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fijo.

Entonces la ecuación (1.3) tiene al menos una solución $x \in \overset{\circ}{P}$.

Demostración. Verifiquemos de nuevo que las condiciones del Teorema 1.2.4 son satisfechas. Para ello tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} (a_1(t, s) - \varepsilon) ds > 1 \text{ y } \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} (b_1(t, s) + \varepsilon) ds < 1.$$

Entonces de i) y ii), deducimos la existencia de dos números positivos δ y M ($\delta < M$), tales que

$$g(t, s, y) \geq (a_1(t, s) - \varepsilon)y, \forall y \in [0, \delta], \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

y

$$g(t, s, y) \leq (b_1(t, s) + \varepsilon)y, \forall y \in [M, +\infty), \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Ahora, si $y \in (0, \delta)$ es una constante, tendremos

$$\begin{aligned} y < y \int_0^{\tau(t)} (a_1(t, s) - \varepsilon) ds &= \int_0^{\tau(t)} (a_1(t, s) - \varepsilon) y ds \leq \\ &\leq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, y) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es decir, y es una solución inferior constante de (1.3). Además se sabe por (1.7) que

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} \bar{a}(t, s) ds \leq r(L_{\bar{a}}) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} \bar{a}(t, s) ds$$

para cualquier función continua $\bar{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, verificando las hipótesis de la Proposición 1.2.1 ii). Entonces

$$r(L_{(b_1+\varepsilon)}) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} (b_1(t, s) + \varepsilon) ds < 1.$$

Trivialmente las funciones

$$a(t, s) \equiv a_1(t, s) - \varepsilon \text{ y } b(t, s) \equiv b_1(t, s) + \varepsilon$$

satisfacen las condiciones i) y ii) del Teorema 1.2.4 y podemos aplicar dicho teorema para concluir la demostración.

Además, si $y \in [M, +\infty)$, entonces

$$\begin{aligned} y > y \int_0^{\tau(t)} (b_1(t, s) + \varepsilon) ds &= \int_0^{\tau(t)} (b_1(t, s) + \varepsilon) y ds \geq \\ &\geq \int_0^{\tau(t)} g(t, s, y) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto implica que existen soluciones superiores de (1.3) que son constantes. $\square$

NOTAS 1.2.8 a) El Corolario 1.2.7 tiene dos ventajas con respecto al Corolario 1.2.5. Primero, tenemos soluciones superiores e inferiores constantes (lo cual es más fácil de verificar en ejemplos concretos que la existencia de soluciones superiores e inferiores no constantes); segundo, en el Corolario 1.2.7, el conjunto $\overset{\circ}{A}_t$ puede ser no vacío. Eso es importante desde el punto de vista biológico y significa, por ejemplo en Teoría de Epidemias, que la enfermedad puede no desaparecer, aunque la tasa de contacto de la epidemia $a_1(t, s) \equiv \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y}$ sea nula en algunos intervalos de tiempo. Este comportamiento de la tasa de contacto no es permitido en [33], [42], [82], [86]. Por otro lado, veremos en los ejemplos que siguen que el Corolario 1.2.5 cubre casos que no pueden ser estudiados por el Corolario 1.2.7 (véase Ejemplo 2).

b) En el caso particular del modelo de Cooke y Kaplan [42] donde $\tau(t) \equiv \tau > 0$, $l = 0$ y $g(t, s, y) = f(t - s, y)$, la hipótesis

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a_1(t, s) ds > 1$$

es equivalente a

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_{t-\tau}^t a(s) ds > 1, \text{ con } a(t) = \liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(t, y)}{y}.$$

Una condición suficiente para obtener dicha hipótesis es

$$\alpha = \min_{t \in \mathbb{R}} a(t) > \frac{1}{\tau}, \text{ es decir } \alpha\tau > 1.$$

Su interpretación biológica es la siguiente: "La infección sigue siendo endémica en la población y el número de los infecciosos varía periódicamente si la tasa de contacto $a(t)$ excede de $\frac{1}{\tau}$ ".

1.2.2 NOTAS Y EJEMPLOS

Para aclarar más los resultados obtenidos anteriormente y mostrar las generalizaciones obtenidas, dedicaremos esta subsección del capítulo a notas y ejemplos que los ilustran. Desarrollamos tres ejemplos para el modelo de Cooke y Kaplan (1.1) (claramente podemos considerar situaciones más generales),

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, x(s)) ds,$$

donde τ es una constante positiva y $f: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ es una función continua, ω -periódica en la variable t , $f(t, x) \geq 0, \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y $f(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Haciendo el cambio de variable $s - t = u$, el problema (1.1), que se corresponde con la ecuación anterior, se puede transformar en

$$x(t) = \int_0^\tau f(t-s, x(t-s)) ds, \quad (1.12)$$

que es un caso particular de la ecuación (1.3), donde $\tau(t) \equiv \tau > 0$, $l = 0$ y $g(t, s, y) = f(t-s, y), \forall (t, s, y) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$.

Estamos interesados en la existencia de soluciones no negativas, no triviales y ω -periódicas de (1.1) (o (1.12)).

Ejemplo 1. Aquí presentamos un ejemplo donde la función f no es regular

en la variable y .

Sea $\Phi(x)$ la función definida en $[0, 1]$ por:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{1}{3(n+1)} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})], \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3n} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}), \frac{1}{n}], \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Claramente $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, creciente, $\Phi(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ y no existen las derivadas $\Phi'(x_n)$ y $\Phi'(0)$ (donde $x_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$).

Además $\liminf_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x)}{x} = 1$.

Sea $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ una función continua, ω -periódica, tal que

$$\int_0^\omega a(s)ds > 1$$

y tomemos $\tau > \omega$.

Sea $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t, x) = \begin{cases} a(t)\Phi(x) & \text{si } (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \\ a(t)\sqrt{x} & \text{si } (t, x) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty) \end{cases} \quad (1.13)$$

y consideremos la ecuación integral (1.12).

Todas las hipótesis del Corolario 1.2.7 son satisfechas con

$$a_1(t, s) \equiv a(t - s), \quad b_1(t, s) \equiv 0.$$

En consecuencia (1.12), con f dada por (1.13), admite una solución $x \in \overset{\circ}{P}$.

Observemos que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y}$ no existe. Entonces no podemos aplicar los resultados de [42], [82] y [86].

Ejemplo 2. Aquí construimos un ejemplo donde es posible aplicar el Corolario 1.2.5, pero la ecuación (1.12) no tiene soluciones superiores e inferiores constantes. Para ello necesitamos un lema previo relacionado con la desigualdad (1.7).

LEMA 1.2.9 Sean $a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua, ω -periódica,

$\tau > 0$, y $L_a : E_0 \rightarrow E_0$ un operador definido por

$$L_a x(t) = \int_0^\tau a(t-s)x(t-s)ds, \quad \forall x \in E_0,$$

donde E_0 es el espacio de Banach real de todas las funciones reales continuas y ω -periódicas definidas en $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|, \quad \forall x \in E_0.$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) La función $a(t)$ no es τ -periódica.
- ii) $\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds < r(L_a)$.
- iii) $r(L_a) < \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds$.

Demostración. De la desigualdad (1.7) deducimos

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds \leq r(L_a) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds. \quad (1.14)$$

Empezamos con la demostración de la equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii).

i) $\Rightarrow$ ii):

Sea

$$P_0 \equiv \{x \in E_0 : x(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Por el Teorema de Krein-Rutman, existe una función $x \in P_0 \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_0^\tau a(t-s)x(t-s)ds = r(L_a)x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Al igual que en la demostración de la proposición 1.2.1 iii), se prueba que $x \in \overset{\circ}{P}_0$, es decir, $x(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Además x es no constante porque a no es τ -periódica. Sea $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_1) = \min_{t \in \mathbb{R}} x(t) > 0$ y sea $n \geq 1$ el primer entero natural tal que x es no constante en $[t_1 - n\tau, t_1 - (n-1)\tau]$. Entonces, si $t_0 = t_1 - (n-1)\tau$,

tenemos $\min_{t \in \mathbb{R}} x(t) = x(t_0)$ y x no es constante en $[t_0 - \tau, t_0]$. Por tanto

$$\begin{aligned} \left(\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds \right) x(t_0) &\leq \int_0^\tau a(t_0-s)x(t_0)ds < \\ &< \int_0^\tau a(t_0-s)x(t_0-s)ds = r(L_a)x(t_0) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds < r(L_a).$$

ii) $\Rightarrow$ i):

Si a es τ -periódica, entonces, por (1.14) tenemos

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds &= \min_{t \in \mathbb{R}} \int_{t-\tau}^t a(s)ds = \\ &= \max_{t \in \mathbb{R}} \int_{t-\tau}^t a(s)ds = \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds, \end{aligned}$$

lo cual implica $r(L_a) = \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds$.

La equivalencia entre i) y iii) se demuestra de manera análoga. $\square$

COROLARIO 1.2.10 Sean $\tau > 0, \omega > 0$ tales que $\frac{\tau}{\omega} \notin \mathbb{N}$. Entonces existe una función continua y ω -periódica $a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, que no es τ -periódica, tal que

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds < 1 \text{ y } r(L_a) > 1. \quad (1.16)$$

Demostración. Tomemos $a_0 : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua de periodo minimal ω . Entonces a_0 no es τ -periódica y en consecuencia

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a_0(t-s)ds < r(L_{a_0}).$$

Fijemos $b_0 \in (0, +\infty)$ satisfaciendo $r(L_{b_0 a_0}) = 1$ y $c_0 \in]b_0, b_0 + \eta[$ para $\eta > 0$.

Entonces, si η es suficientemente pequeño,

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau c_0 a_0(t-s)ds < 1$$

y

$$r(L_{c_0 a_0}) = c_0 r(L_{a_0}) = \frac{c_0}{b_0} r(L_{b_0 a_0}) = \frac{c_0}{b_0} > 1.$$

Para concluir la demostración tomemos $a = c_0 a_0$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de construir el Ejemplo 2. Para ello, fijemos $\tau > 0, \omega > 0$ tales que $\frac{\tau}{\omega} \notin \mathbb{N}$. Sea $a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua ω -periódica satisfaciendo (1.16). Denotemos por

$$\alpha_1 = r(L_a), \quad \alpha_2 = \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s) ds$$

y observemos que, por el Lema 1.2.9, $1 < \alpha_1 < \alpha_2$. Sea $\varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$1 < \varepsilon < \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$$

(entonces, $0 < 1 - \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\alpha_1}$) y elijamos $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\max\left(\frac{1}{\alpha_2}, 1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) < \mu < \frac{1}{\alpha_1} < 1. \quad (1.17)$$

Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua definida por

$$h(x) = \begin{cases} x - (1 - \mu)x^\varepsilon & \text{si } x \in [0, 1] \\ \mu x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Tomemos

$$f(t, y) \equiv a(t)h(y) \quad (1.18)$$

en (1.12). Entonces todas las condiciones del Corolario 1.2.5 son satisfechas con

$$a_1(t, s) \equiv a(t-s), \quad b_1(t, s) \equiv \mu a(t-s)$$

y en consecuencia la ecuación (1.12), donde f está dada por (1.18), posee una solución $x \in \overset{\circ}{P}_0$. Pero en este caso, (1.12) no tiene soluciones superiores e inferiores constantes. En efecto, si $\alpha > 0$ fuese una solución inferior constante,

entonces

$$\alpha \leq \int_0^\tau a(t-s)h(\alpha)ds.$$

Luego $\frac{\alpha}{h(\alpha)} \leq \int_0^\tau a(t-s)ds, \forall t \in \mathbb{R}$, lo cual implica

$$\frac{\alpha}{h(\alpha)} \leq \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds < 1,$$

es decir, $\alpha < h(\alpha)$. Así, obtenemos una contradicción con las propiedades de h .

También si $\beta > 0$ fuese una solución superior constante, entonces

$$\beta \geq \int_0^\tau a(t-s)h(\beta)ds.$$

Si $\beta \in [1, +\infty)$, tenemos $\frac{1}{\mu} \geq \int_0^\tau a(t-s)ds, \forall t \in \mathbb{R}$, lo cual implica $\frac{1}{\mu} \geq \alpha_2$, que es una contradicción con (1.17).

Si $\beta \in (0, 1]$, entonces $\frac{\beta}{\beta - (1-\mu)\beta^\varepsilon} \geq \alpha_2$, es decir, $1 - (1-\mu)\beta^{\varepsilon-1} \leq \frac{1}{\alpha_2}$. Finalmente obtenemos

$$\mu \leq 1 - \beta^{\varepsilon-1} + \mu\beta^{\varepsilon-1} \leq \frac{1}{\alpha_2},$$

lo cual es una contradicción con (1.17).

Ejemplo 3. En este último ejemplo, la tasa de contacto $a(t)$ puede ser nula en algunos intervalos no triviales de $\mathbb{R}$, pero la ecuación tendrá una solución estrictamente positiva. Como veremos, la enfermedad no desaparece si τ (el tiempo durante el cual el individuo se mantiene infeccioso) es mayor que ω , aunque $a(t)$ sea cero en algunos intervalos no triviales del tiempo.

Sea $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función 2π -periódica continua definida por

$$a(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad t \in [0, \pi] \\ 0 & , \quad t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

y $\tau > 2\pi$.

Entonces

$$\int_0^\tau a(t-s)ds > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$m = \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds > 0, \quad M = \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\tau a(t-s)ds > 0.$$

Sean $\alpha = \frac{2}{m}$, $\beta = \frac{1}{2M}$ (claramente $\alpha > \beta$) y $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua creciente tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \beta \quad \text{y} \quad h(0) = 0.$$

Tomemos $f(t, y) = a(t)h(y)$ en (1.17). Todas las condiciones del Corolario 1.2.7 son satisfechas con

$$a_1(t, s) \equiv \alpha a(t-s), \quad b_1(t, s) \equiv \beta a(t-s)$$

y en consecuencia (1.17) posee una solución $x \in \overset{\circ}{P}_0$.

Notemos que no es posible aplicar los resultados de [33], [42], [82] y [86] a este ejemplo, porque $a(t)$ es igual a cero en algunos intervalos no triviales de $\mathbb{R}$.

1.3 MÉTODO TOPOLÓGICO

En esta sección estudiamos la ecuación integral (1.3) mediante métodos topológicos. Como ya hemos mencionado, el problema consiste en buscar puntos fijos, en el espacio E , del operador F definido por (1.4). Para ello conservaremos todas las definiciones y notaciones de la sección anterior. Mostraremos algunos resultados de existencia, no existencia y multiplicidad de soluciones positivas de (1.3) (ver [33]). Además compararemos estos resultados con los obtenidos en la sección anterior mediante el método de soluciones superiores e inferiores.

1.3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Para facilitar la lectura de lo que sigue, dedicaremos esta subsección a exponer los resultados conocidos más importantes que se utilizarán y que están relacionados con la Teoría de índice de puntos fijos en conos.

Sea E_1 un espacio de Banach real y $P_1 \subset E_1$ un cono, es decir un subconjunto de E_1 satisfaciendo

$$P_1 + P_1 \subset P_1, \mathbb{R}^+ P_1 \subset P_1 \text{ y } P_1 \cap (-P_1) = \{0\}.$$

En E_1 se puede definir una relación de orden de la forma

$$x \leq y \quad \text{sii} \quad y - x \in P_1.$$

Diremos entonces que E_1 es un espacio de Banach ordenado (por el cono P_1).

También escribiremos $x < y$ si $y - x \in P_1 \setminus \{0\}$.

De aquí en adelante supondremos además que P_1 es cerrado. El siguiente teorema define el índice de puntos fijos en conos:

TEOREMA 1.3.1 (Teorema 11.1, [3]) *Para cualquier abierto U de P_1 y cualquier operador compacto $F_1 : \overline{U} \rightarrow P_1$ (F_1 es continuo y $F_1(\overline{U})$ es relativamente compacto), que no tenga puntos fijos en ∂U , existe un número entero $i(F_1, U, P_1)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

(i) (Normalización) *Para cualquier operador constante $F_1 : \overline{U} \rightarrow U$, $i(F_1, U, P_1) = 1$.*

(ii) (Aditividad) *Para cualquier par (U_1, U_2) de abiertos de U satisfaciendo $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y tales que F_1 no tenga puntos fijos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$, se tiene*

$$i(F_1, U, P_1) = i(F_1, U_1, P_1) + i(F_1, U_2, P_1),$$

donde $i(F_1, U_k, P_1) = i(F_1|_{\overline{U_k}}, U_k, P_1)$, $k = 1, 2$.

(iii) (Invariabilidad por Homotopía) *Para cualquier intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ y cualquier operador compacto $h : \Lambda \times \overline{U} \rightarrow P_1$ tal que $h(\lambda, x) \neq x$, $\forall (\lambda, x) \in \Lambda \times \partial U$, el número $i(h(\lambda, \cdot), U, P_1)$ está bien definido y es indepen-*

diente de $\lambda \in \Lambda$.

(iv) (*Propiedad de Existencia*) Si $i(F_1, U, P_1) \neq 0$, entonces F_1 tiene al menos un punto fijo en U .

Al número $i(F_1, U, P_1)$ se le llama "índice de puntos fijos de F_1 en el abierto U , con respecto a P_1 ". De aquí en adelante y cuando no haya posibilidad de confusión, denotaremos $i(F_1, U) = i(F_1, U, P_1)$.

Para más detalles sobre la teoría del grado topológico y las propiedades del "índice de puntos fijos" se puede consultar los trabajos de Amann [3], Deimling [49], Guo-Lakshmikantham [60] y Leray-Schauder [73].

Vista la importancia de la propiedad (iv) del Teorema 1.3.1, sería muy interesante enunciar algunos resultados que permitan calcular $i(F_1, U, P_1)$ en abiertos U adecuados.

Para $\rho \in (0, +\infty)$, notemos

$$(P_1)_\rho = \{x \in P_1 : \|x\| < \rho\}$$

y por

$$S_\rho^+ = \{x \in P_1 : \|x\| = \rho\}.$$

Si $\rho = 1$, escribiremos simplemente $S^+ = S_1^+$.

Los siguientes lemas nos permiten hallar $i(F_1, (P_1)_\sigma)$ mediante la "linealización de F_1 en 0 y $+\infty$ ":

LEMA 1.3.2 (*Lema 13.1, [3]*) Sea $F_1 : \overline{(P_1)_\rho} \rightarrow P_1$ un operador compacto tal que $F_1(0) = 0$. Supongamos que F_1 tiene una derivada por la derecha $(F_1)'_+(0)$, en la dirección del cono P_1 y tal que 1 no es valor propio de $(F_1)'_+(0)$ que tenga asociado un vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$. Entonces existe una constante $\sigma_0 \in (0, \rho]$ tal que para cualquier $\sigma \in (0, \sigma_0]$,

i) $i(F_1, (P_1)_\sigma) = 1$ si $(F_1)'_+(0)$ no tiene vectores propios en $P_1 \setminus \{0\}$ para valores propios mayores que 1 .

ii) $i(F_1, (P_1)_\sigma) = 0$ si $(F_1)'_+(0)$ tiene algún vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$ para algún valor propio mayor que 1 .

NOTA 1.3.3 Por definición, $(F_1)'_+(0)$ es un operador lineal y continuo, $(F_1)'_+(0) : \overline{P_1 - P_1} \rightarrow E_1$ tal que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in P}} \frac{F_1(h) - (F_1)'_+(0)h}{\|h\|} = 0.$$

LEMA 1.3.4 (Lema 13.4, [3]) Sea $F_1 : P_1 \rightarrow P_1$ un operador completamente continuo, que admite una derivada en $+\infty$, en la dirección del cono P_1 ; es decir, existe un operador lineal y continuo $F'_1(+\infty) : \overline{P_1 - P_1} \rightarrow E_1$ tal que

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in P}} \frac{F_1(x) - F'_1(+\infty)x}{\|x\|} = 0.$$

Supongamos que 1 no es valor propio de $F'_1(+\infty)$ asociado a algún vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$. Entonces existe un número $\sigma_\infty \in (0, +\infty)$ tal que:

i) $i(F_1, (P_1)_\sigma) = 1$, $\forall \sigma \geq \sigma_\infty$, si $F'_1(+\infty)$ no tiene vectores propios en $P_1 \setminus \{0\}$ para valores propios mayores que 1.

ii) $i(F_1, (P_1)_\sigma) = 0$, $\forall \sigma \geq \sigma_\infty$, si $F'_1(+\infty)$ tiene algún vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$ para algún valor propio mayor que 1.

El siguiente teorema es una consecuencia de los Lemas 1.3.2 y 1.3.4.

TEOREMA 1.3.5 (Teorema 13.6, [3]) Sea $F_1 : P_1 \rightarrow P_1$ un operador completamente continuo tal que $F_1(0) = 0$. Supongamos que existen las derivadas $(F_1)'_+(0)$, $F'_1(+\infty)$ (definidas en los Lemas 1.3.2 y 1.3.4) y que 1 no es valor propio asociado a algún vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$ de ninguno de estos operadores. Entonces F_1 tiene al menos un punto fijo en $P_1 \setminus \{0\}$ si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

i) $(F_1)'_+(0)$ no tiene vectores propios en $P_1 \setminus \{0\}$ para valores propios mayores que 1, mientras que $F'_1(+\infty)$ sí.

ii) $(F_1)'_+(0)$ tiene algún vector propio en $P_1 \setminus \{0\}$ para algún valor propio mayor que 1, mientras que $F'_1(+\infty)$ no.

COROLARIO 1.3.6 ([3]) Sea $F_1 : P_1 \rightarrow P_1$ un operador completamente continuo tal que $F_1(0) = 0$. Supongamos que existen las derivadas $(F_1)'_+(0)$,

$F'_1(+\infty)$ (definidas en los Lemas 1.3.2 y 1.3.4) y que $\overset{\circ}{P}_1 \neq \emptyset$. Entonces F_1 tiene al menos un punto fijo en $P_1 \setminus \{0\}$ si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

i) $r((F_1)'_+(0)) < 1$, $F'_1(+\infty)$ es fuertemente positivo (en el sentido de que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[F'_1(+\infty)]^n(P_1 \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{P}_1$) y $r(F'_1(+\infty)) > 1$.

(donde $r(L)$ denota el radio espectral del operador L)

ii) $r((F_1)'_+(0)) > 1$, $(F_1)'_+(0)$ es fuertemente positivo y $r(F'_1(+\infty)) < 1$.

Finalmente, el siguiente lema nos permite hallar $i(F_1, (P_1)_\rho)$ bajo condiciones distintas de las expuestas arriba:

LEMA 1.3.7 ([3], [60]) Sea $F_1 : \overline{(P_1)_\rho} \rightarrow P_1$ un operador compacto.

i) Si $F_1(x) \neq \lambda x$ para cualquier $x \in S_\rho^+$ y cualquier $\lambda \geq 1$, entonces $i(F_1, (P_1)_\rho) = 1$.

ii) Si existe algún vector $p \in P_1 \setminus \{0\}$ tal que $x - F_1(x) \neq \lambda p$ para cualquier $x \in S_\rho^+$ y cualquier $\lambda \geq 0$, entonces $i(F_1, (P_1)_\rho) = 0$.

iii) Sea U un abierto convexo de P_1 y $F_1 : \overline{U} \rightarrow P_1$ un operador compacto. Si $F_1(\overline{U}) \subset U$, entonces $i(F_1, U) = 1$.

1.3.2 EXISTENCIA Y NO EXISTENCIA DE SOLUCIONES POSITIVAS

El siguiente resultado nos proporciona condiciones suficientes (y algunas veces necesarias) para la existencia de soluciones de (1.3) no negativas y no triviales, cuando F (definida en (1.4)) es "regular".

TEOREMA 1.3.8 Supongamos las siguientes condiciones:

(H_1) Existe una función (automáticamente continua) $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y} = a(t, s)$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(H_2) Existe una función (automáticamente continua) $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, s, y)}{y} = b(t, s)$$

uniformemente en $(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

$$(H_3) \quad \overset{\circ}{A}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces si

$$r(L_a) > 1 \quad \text{y} \quad r(L_b) < 1, \quad (1.19)$$

la ecuación (1.3) tiene al menos una solución en $P \setminus \{0\}$.

Además, si $\overset{\circ}{B}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$ y

$$b(t, s)y < g(t, s, y) < a(t, s)y, \quad \forall y > 0, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (1.20)$$

entonces (1.19) es también necesaria para la existencia de al menos una solución de (1.3) en $P \setminus \{0\}$.

Demostración. Primero probaremos que (H_1)-(H_3) y (1.19) son suficientes para la existencia de al menos una solución de (1.3) en $P \setminus \{0\}$. Para ello consideremos (E, P) el espacio de Banach ordenado definido en la sección anterior, con

$$\overset{\circ}{P} = \{x \in E : x(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$$

y recordemos que el operador $F : P \rightarrow P$ dado por (1.4) es completamente continuo (Proposición 1.2.1 i). Además:

1) Utilizando (H_2), se prueba la existencia de $F'(+\infty)$, la derivada de F en la dirección del cono P en $+\infty$. En efecto mostraremos que

$$F'(+\infty)(x)(t) = L_b x(t), \forall x \in E,$$

es decir,

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in P}} \frac{Fx - L_b x}{\|x\|} = 0.$$

Para ello tenemos que verificar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_1(\varepsilon) > 0 : \|x\| \geq K_1(\varepsilon) (x \in P) \Rightarrow \frac{\|Fx - L_b x\|}{\|x\|} \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por (H_2) , existe $K(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|g(t, s, y) - b(t, s)y| \leq \varepsilon|y|, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \geq K(\varepsilon).$$

Sea

$$M(\varepsilon) = \sup \{|g(t, s, y) - b(t, s)y|, t \in [0, q\omega], s \in [0, \tau_2], y \in [0, K(\varepsilon)]\} + 1$$

$$\text{y } K_1(\varepsilon) = \frac{M_1(\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (\tau_2 = \max_{0 \leq t \leq \lambda} \tau(t)).$$

Entonces, para $x \in P$ satisfaciendo $\|x\| \geq K_1(\varepsilon)$, tenemos

$$|Fx(t) - L_b x(t)| \leq \int_0^{\tau(t)} |g(t, s, x(t-s-l)) - b(t, s)x(t-s-l)| ds.$$

Tomemos

$$B_t^1 = \{s \in \mathbb{R} : x(t-s-l) \geq K(\varepsilon)\},$$

$$B_t^2 = \{s \in \mathbb{R} : x(t-s-l) < K(\varepsilon)\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |Fx(t) - L(\tau, b)x(t)| &\leq \int_{[0, \tau(t)] \cap B_t^1} |g(t, s, x(t-s-l)) - b(t, s)x(t-s-l)| ds + \\ &\quad + \int_{[0, \tau(t)] \cap B_t^2} |g(t, s, x(t-s-l)) - b(t, s)x(t-s-l)| ds \leq \\ &\leq \int_0^{\tau(t)} \varepsilon |x(t-s-l)| ds + \int_0^{\tau(t)} M(\varepsilon) ds \leq \\ &\leq \varepsilon \tau_2 \|x\| + \tau_2 M(\varepsilon) = \\ &= \varepsilon \tau_2 \|x\| + \tau_2 K_1(\varepsilon) \varepsilon \leq \\ &\leq 2\varepsilon \tau_2 \|x\|, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|Fx - L_b x\| \leq 2\varepsilon \tau_2 \|x\|, \forall x \in P : \|x\| \geq K_1(\varepsilon).$$

2) Análogamente se prueba la existencia de $F'_+(0)$, la derivada de F por la derecha en el punto cero, en la dirección del cono P . En efecto,

$$F'_+(0)(x)(t) = L_a x(t), \forall x \in E,$$

es decir,

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ x \in P}} \frac{Fx - L_a x}{\|x\|} = 0.$$

Para ello tenemos que verificar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_2(\varepsilon) > 0 : \|x\| \leq K_2(\varepsilon) (x \in P) \Rightarrow \frac{\|Fx - L_a x\|}{\|x\|} \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por (H_1) , existe $K_2(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|g(t, s, y) - a(t, s)y| \leq \varepsilon|y|, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall y \in [0, K_2(\varepsilon)].$$

Entonces, para $x \in P$ satisfaciendo $\|x\| \leq K_2(\varepsilon)$, tenemos

$$\begin{aligned} |Fx(t) - L_a x(t)| &\leq \int_0^{\tau(t)} |g(t, s, x(t-s-l)) - a(t, s)x(t-s-l)| ds \leq \\ &\leq \int_0^{\tau(t)} \varepsilon |x(t-s-l)| ds \leq \varepsilon \tau_2 \|x\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De donde resulta

$$\|Fx - L_a x\| \leq \varepsilon \tau_2 \|x\|, \forall x \in P : \|x\| \leq K_2(\varepsilon).$$

3) Claramente, por la Proposición 1.2.1 iii), el operador $F'_+(0) = L_a$ es fuertemente positivo. Ahora estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.3.5 que nos proporciona la existencia de algún punto $x \in P \setminus \{0\}$ satisfaciendo (1.5).

Finalmente probemos que si, además, (1.20) se satisface, entonces (1.19) es también necesaria para la existencia de algún punto $x \in P \setminus \{0\}$, solución de (1.3):

Sea $x \in P \setminus \{0\}$ solución de (1.3). Entonces

$$x(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds \geq \int_0^{\tau(t)} b(t, s) x(t-s-l) ds = L_b x(t),$$

lo cual implica

$$x(t) - L_b x(t) \equiv z(t) \geq 0. \quad (1.21)$$

Podemos afirmar que $z \in P \setminus \{0\}$. En efecto, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) > 0$, lo que implica que existe $t_1 \in \mathbb{R}$ y $s \in [0, \tau(t_1)]$ tal que $x(t_1 - s - l) > 0$. Entonces, por (1.20), $z(t_1) > 0$.

Ahora, usando el Teorema 2.16 de [67], obtenemos

$$1 > r(L_b).$$

Análogo argumento para L_a demuestra

$$1 < r(L_a).$$

□

NOTAS 1.3.9 a) En los casos particulares que hemos mencionado al comenzar la sección anterior, los autores proponen condiciones suficientes para la existencia de soluciones de (1.3) en $P \setminus \{0\}$ (ver [42], [82], [86]). En todos estos trabajos, $b(t, s) \equiv 0$. Así, además de ser más general y cubrir todos estos casos, el Teorema 1.3.8 permite a g un mejor comportamiento en $+\infty$.

b) Según nuestro conocimiento, es la primera vez que aparece en la literatura sobre estos temas una condición como (1.20), necesaria para la existencia de soluciones en $P \setminus \{0\}$ de (1.3).

c) Notemos que, contrariamente al Corolario 1.2.5, la monotonía de g no es necesaria en este teorema, lo cual es una gran ventaja. No obstante hace falta suponer la regularidad de F en 0 y $+\infty$, a saber, la existencia de $F'_+(0)$ y $F'(+\infty)$. Además, la solución obtenida ahora pertenece a $P \setminus \{0\}$ y no a $\overset{\circ}{P}$ y tampoco tenemos un esquema iterativo de aproximación a esta solución.

d) Si $a(t, s) > \alpha > 0$, $\forall (t, s) \in [0, \omega] \times [0, \tau_2]$ y $l = 0$, entonces cualquier

solución no trivial y no negativa de (1.3) es estrictamente positiva en $\mathbb{R}$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \alpha$. Entonces, existe $r(\varepsilon) > 0$ tal que

$$g(t, s, y) \geq (a(t, s) - \varepsilon)y, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall y \in [0, r(\varepsilon)].$$

Sea $x \in P \setminus \{0\}$ satisfaciendo (1.3), es decir,

$$x(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s))ds.$$

Como $x \in P \setminus \{0\}$, existe $t_0 > 0$: $x(t_0) > 0$. Supongamos que existiese $t_1 \in \mathbb{R}$: $x(t_1) = 0$. Tomemos

$$t_2 = \inf \{t \geq t_0 : x(t) = 0\}.$$

Claramente $x(t_2) = 0$ y $x(t) > 0$, $\forall t \in [t_0, t_2)$. Sea $\mu(\varepsilon) > 0$, $(\mu(\varepsilon) < \tau_1 = \min_{0 \leq t \leq \lambda} \tau(t))$ tal que

$$x(t) \leq r(\varepsilon), \forall t \in [t_2 - \mu(\varepsilon), t_2].$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= x(t_2) = \int_0^{\tau(t_2)} g(t_2, s, x(t_2-s))ds = \int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2} g(t_2, t_2-u, x(u))du \geq \\ &\geq \int_{t_2-\mu(\varepsilon)}^{t_2} g(t_2, t_2-u, x(u))du \geq \int_{t_2-\mu(\varepsilon)}^{t_2} (a(t_2, t_2-u) - \varepsilon)x(u)du \geq \\ &\geq (\alpha - \varepsilon) \int_{t_2-\mu(\varepsilon)}^{t_2} x(u)du > 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Ejemplo 4. En este ejemplo presentamos una aplicación del Teorema 1.3.8 que no se puede estudiar mediante los resultados de los trabajos citados en las Notas 1.3.9 a). Para ello tomemos $h : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua satisfaciendo

$$h(0) = 0, h'(0) = \alpha > 0, \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{h(y)}{y} = \beta > 0$$

y

$$\beta y < h(y) < \alpha y, \forall y > 0.$$

Sea $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva y ω -periódica ($\omega > 0$) y $l = 0$.

Si

$$g(t, s, y) = c(t - s)h(y), \quad \forall (t, s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

las condiciones (H_1) , (H_2) , (H_3) y (1.20) son satisfechas para $a(t, s) = \alpha c(t - s)$ y $b(t, s) = \beta c(t - s)$.

Fácilmente obtenemos que (1.3) tiene una solución en $P \setminus \{0\}$ si y sólo si

$$\frac{1}{\alpha} < r(L_c) < \frac{1}{\beta}.$$

Teniendo en cuenta (ver 1.7) que

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} c(t - s) ds \leq r(L_c) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} c(t - s) ds,$$

la condición anterior se verifica si

$$\frac{1}{\alpha} < \int_0^{\tau(t)} c(t - s) ds < \frac{1}{\beta}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En el caso particular en que $c(t - s) \equiv d > 0$, la ecuación (1.3) tiene una solución en $P \setminus \{0\}$ si

$$\frac{1}{\alpha d} < \min_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) < \frac{1}{\beta d},$$

y por (1.20), la ecuación no tiene ninguna solución en $P \setminus \{0\}$ si

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) \leq \frac{1}{\alpha d} \text{ o } \min_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) \geq \frac{1}{\beta d}.$$

Observemos que no es fácil verificar en la práctica las condiciones (1.19). En

el siguiente teorema proponemos condiciones que no incluyen hipótesis sobre radios espectrales. Además, se exige a F menos regularidad que en el teorema previo.

TEOREMA 1.3.10 *Supongamos las siguientes condiciones:*

$(H_1)'$ Existe una función continua $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, s, y)}{y} = a(t, s), \quad \text{uniformemente en } (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

$(H_2)'$ Existe una función continua $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, s, y)}{y} = b(t, s), \quad \text{uniformemente en } (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

$(H_3)'$ $a(t, s) > 0, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Entonces si

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a(t, s) ds > 1 \quad y \quad \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} b(t, s) ds < 1, \quad (1.22)$$

la ecuación (1.3) tiene al menos una solución en $P \setminus \{0\}$.

Demostración. Es suficiente probar las siguientes propiedades:

1) $\exists R > 0$ tal que si $x \in P$ y $t \in [0, 1]$ satisfacen $x = tFx$, entonces $\|x\| \leq R$.

2) $\exists r, 0 < r < R$, tal que si $x \in P$ y $\lambda > 0$ satisfacen $x = Fx + \lambda$, entonces $\|x\| > r$.

En efecto, si 1) y 2) son satisfechas, podemos distinguir dos casos:

a) $\exists x \in S_r^+ (= \{x \in P : \|x\| = r\}) : x = Fx$. En este caso, la ecuación (1.3) tiene al menos una solución en $P \setminus \{0\}$.

b) $x \neq Fx, \forall x \in S_r^+$.

Entonces, por el Lema 1.3.7, deducimos, respectivamente de las condiciones 1) y 2),

$$i(F, P_R) = 1 \quad y \quad i(F, P_r) = 0.$$

De donde resulta, por la propiedad de aditividad (ver Teorema 1.3.1 (ii)),

$$i(F, P_R \setminus \overline{P_r}) = i(F, P_R) - i(F, P_r) = 1 \neq 0,$$

lo cual implica la existencia de una solución de (1.3) en $P \setminus \{0\}$.

Verifiquemos ahora las propiedades 1) y 2). Para ello tomemos $x \in P$ y $t \in [0, 1]$ tales que $x = tFx$. Por (1.22), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{t \in R} \int_0^{\tau(t)} (b(t, s) + \varepsilon) ds < 1.$$

Además, de $(H_2)'$ deducimos la existencia de $K(\varepsilon) > 0$ tal que

$$g(t, s, y) \leq (b(t, s) + \varepsilon)y, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall y \geq K(\varepsilon).$$

Sea

$$M(\varepsilon) = \max\{g(t, s, y), (t, s, y) \in \mathbb{R} \times [0, \tau_2] \times [0, K(\varepsilon)]\}.$$

Entonces

$$\|x\| \leq (1 - \max_{t \in R} \int_0^{\tau(t)} (b(t, s) + \varepsilon) ds)^{-1} M(\varepsilon) \tau_2 \equiv R_1,$$

lo cual demuestra que $R = R_1 + 1$ es válido para 1).

Por otra parte, supongamos que 2) no se cumple. Entonces existen sucesiones $\{x_n\} \subset P$, $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ tales que $x_n = Fx_n + \lambda_n$ y $\|x_n\| < \frac{1}{n}$.

Tomemos $\alpha = \min\{a(t, s), t \in [0, \omega], s \in [0, \tau_2]\} > 0$ (por $(H_3)'$) y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon < \alpha$ tal que

$$\min_{t \in R} \int_0^{\tau(t)} (a(t, s) - \varepsilon) ds > 1.$$

Usando $(H_1)'$, obtenemos $K_1(\varepsilon) > 0$:

$$g(t, s, y) \geq (a(t, s) - \varepsilon)y, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall y \in [0, K_1(\varepsilon)].$$

Entonces, si $\frac{1}{n} < K_1(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} x_n(t) &= Fx_n(t) + \lambda_n > \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x_n(t-s-l)) ds \geq \\ &\geq \int_0^{\tau(t)} (a(t, s) - \varepsilon)x_n(t-s-l) ds \geq \\ &\geq \min_{t \in R} \int_0^{\tau(t)} (a(t, s) - \varepsilon) ds \cdot \min_{t \in R} x_n(t) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\min_{t \in \mathbb{R}} x_n(t) \geq \min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} (a(t, s) - \varepsilon) ds. \min_{t \in \mathbb{R}} x_n(t). \quad (1.23)$$

Pero $\min_{t \in \mathbb{R}} x_n(t) > 0$, porque si $x_n(t_1) = 0$ para algún punto $t_1 \in \mathbb{R}$, forzosamente $\lambda_n = 0$. Luego

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} (a(t, s) - \varepsilon) ds \leq 1,$$

lo cual es una contradicción. Así queda probado el teorema. $\square$

NOTAS 1.3.11 a) Las condiciones $(H_1)'$ y $(H_2)'$ son, respectivamente, más débiles que (H_1) y (H_2) , pero (1.22) es más restrictiva que (1.19). Así pues, los Teoremas 1.3.8 y 1.3.10 son independientes.

b) Notemos que en el teorema previo no suponemos la monotonía de g , como en el Corolario 1.2.7, pero hace falta tomar $a(t, s) > 0, \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Claramente, cuando se verifica esta última condición, el Teorema 1.3.10 es más potente que el Corolario 1.2.7.

Si (H_1) , (H_2) , (H_3) y (1.20) se satisfacen, el Teorema 1.3.8 nos proporciona condiciones necesarias y suficientes para la existencia de al menos una solución de (1.3) en $P \setminus \{0\}$. Si (1.20) no se cumple, (H_1) , (H_2) , (H_3) y (1.19) aseguran la existencia de soluciones. En este caso puede ser útil combinar esto con el siguiente resultado sobre la no existencia de soluciones:

TEOREMA 1.3.12 Sea $c : \mathbb{R} \times [0, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}, (t, s) \rightarrow c(t, s)$ una función no negativa, continua y ω -periódica en t . Definamos

$$G(t, s, y) = c(t, s)y - g(t, s, y).$$

Si se verifica alguna de las condiciones siguientes:

- i) $r(L_c) < 1$ y G es creciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$;
- ii) $r(L_c) \leq 1, \overset{o}{C}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R}$ y G es estrictamente creciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$;
- iii) $r(L_c) > 1$ y G es decreciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$;

iv) $r(L_c) \geq 1$, $\overset{o}{C}_t = \emptyset$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y G es estrictamente decreciente con respecto a $y \in [0, +\infty)$;

Entonces $x = 0$ es la única solución de (1.3) en P .

Demostración. i) Supongamos que existe $x \in P \setminus \{0\}$ tal que $x = Fx$; entonces

$$(L_c - F)(x) = L_c x - x \geq 0.$$

Usando el Teorema 2.5 en Krasnoselskii ([67], pg.67), obtenemos

$$r(L_c) \geq 1,$$

lo cual es una contradicción.

ii) Como en el caso anterior deducimos

$$L_c x - x > 0.$$

Entonces $r(L_c) \geq 1$. Pero $r(L_c) \neq 1$, porque la ecuación $z - L_c z = -y$ (donde $y = L_c x - x$) tiene una solución positiva x .

Argumentos análogos demuestran iii) y iv). $\square$

Ejemplo 5. En este ejemplo aplicamos los Teoremas 1.3.10 y 1.3.12 para probar la existencia y la no existencia de soluciones de (1.3) en $P \setminus \{0\}$.

Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ una función de clase C^1 tal que $h(0) = 0$, $h'(y) \leq 1$, $\forall y \in [0, +\infty)$, $h'(0) = \alpha_1 > 0$ y

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{h(y)}{y} = \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 > \alpha_2.$$

Tomemos $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva y ω -periódica y

$$g(t, s, y) = d(t - s)h(y), \forall (t, s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Si $l = 0$, las hipótesis $(H_1)'$, $(H_2)'$ y $(H_3)'$ del Teorema 1.3.10 son satisfechas

con

$$a(t, s) = \alpha_1 d(t - s), \quad b(t, s) = \alpha_2 d(t - s).$$

Entonces la ecuación (1.3) tiene al menos una solución positiva, $q\omega$ -periódica si

$$\frac{1}{\alpha_1} < \int_0^{\tau(t)} d(t - s) ds < \frac{1}{\alpha_2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, usando i) del Teorema 1.3.12 con $c(t, s) \equiv d(t - s)$, deducimos que la ecuación (1.3) no tiene ninguna solución en $P \setminus \{0\}$ si

$$\int_0^{\tau(t)} d(t - s) ds < 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(Obsérvese que $\frac{1}{\alpha_1} \geq 1$).

En el caso particular en que $d(t - s) \equiv \rho > 0$, (1.3) tendrá alguna solución en $P \setminus \{0\}$ si

$$\frac{1}{\rho\alpha_1} < \min_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) < \frac{1}{\rho\alpha_2}.$$

Pero no tenemos soluciones en $P \setminus \{0\}$ si

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \tau(t) < \frac{1}{\rho}.$$

Obsérvese ahora que las condiciones (1.20) no son necesariamente satisfechas.

1.3.3 MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES

En esta subsección probaremos dos resultados sobre multiplicidad de soluciones de (1.3). Empezamos con una teorema en la línea de Guo y Lakshmikantham [59] y Torrejon [92] y notemos que, además de que la ecuación estudiada (1.3) es más general, nuestras hipótesis son también más finas (ver Nota 1.3.14).

TEOREMA 1.3.13 *Supongamos que g verifica (H_1) y (H_2) del Teorema 1.3.8*

y

$$(H_4) \quad r(L_a) < 1, \quad r(L_b) < 1;$$

(H₅) Existen r, R , $0 < r < R$ tales que

$$r < \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds < R,$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cualquier $x \in P$ satisfaciendo $r \leq x(s) \leq R$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Entonces la ecuación (1.3) tiene al menos dos soluciones en $P \setminus \{0\}$.

Demostración. Por el Lema 1.3.4 y por (H₄), existe $R_1 > R$ tal que

$$i(F, P_\sigma) = 1, \forall \sigma \geq R_1.$$

También, por el Lema 1.3.2 y de nuevo por (H₄), existe $r_1 < r$, $r_1 > 0$ tal que

$$i(F, P_\sigma) = 1, \forall \sigma \leq r_1.$$

Sea $U = \{x \in P : r < x(t) < R, \forall t \in \mathbb{R}\}$. De (H₅) deducimos $F(\overline{U}) \subset U$ y en consecuencia $i(F, U) = 1$ (ver Lema 1.3.7, iii).

Sea $U_1 = P_{R_1} \setminus (\overline{P_{r_1}} \cup \overline{U})$. Como el operador F no tiene ningún punto fijo en $\overline{P_{R_1}} \setminus (P_{r_1} \cup U \cup U_1)$ tenemos, por la propiedad de aditividad,

$$i(F, P_{R_1}) = i(F, P_{r_1}) + i(F, U) + i(F, U_1).$$

Entonces

$$i(F, U_1) = i(F, P_{R_1}) - i(F, P_{r_1}) - i(F, U) = -1 \neq 0.$$

Esto implica la existencia de $x_1 \in P_{r_1}$, $x_2 \in U$, $x_3 \in U_1$ tales que

$$Fx_i = x_i, 1 \leq i \leq 3,$$

y en consecuencia la existencia de dos soluciones distintas en $P \setminus \{0\}$ (obsérvese que x_1 puede ser idénticamente cero). $\square$

NOTA 1.3.14 El Teorema 1.3.13 generaliza el Teorema 1 de Guo y Laksh-

mikantham [59] y los resultados de Torrejon [92], porque ellos suponen

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} a(t, s) ds < 1 \quad y \quad \max_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\tau(t)} b(t, s) ds < 1. \quad (1.24)$$

De hecho, teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior (Lema 1.2.9 y Corolario 1.2.10), existen condiciones para que las desigualdades (1.7) sean estrictas y así tenemos también ejemplos de funciones que verifican la hipótesis (H_4) , pero no satisfacen (1.24).

Terminamos esta subsección con un resultado de multiplicidad completamente distinto del teorema anterior:

TEOREMA 1.3.15 *Supongamos que la función g verifica (H_1) y (H_2) del Teorema 1.3.8 y*

$$(H_6) \quad r(L_a) > 1, r(L_b) > 1 \text{ y } \overset{\circ}{A}_t = \overset{\circ}{B}_t = \emptyset, \forall t \in \mathbb{R};$$

(H_7) *Existe $\mu > 0$ tal que para cualquier $x \in P$ satisfaciendo $x(t) \leq \mu$, $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos*

$$\int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds < \mu, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces la ecuación (1.3) tiene al menos dos soluciones en $P \setminus \{0\}$.

Demostración. De nuevo los Lemas 1.3.2 y 1.3.4 implican la existencia de $r_1, R_1 \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < \mu < R_1$ tales que

$$i(F, P_\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \leq r_1$$

y

$$i(F, P_\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \geq R_1.$$

Sea $x \in S_\mu^+$. Entonces $0 \leq x(t) \leq \mu$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y por tanto,

$$Fx(t) = \int_0^{\tau(t)} g(t, s, x(t-s-l)) ds < \mu, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así $Fx \neq \lambda x$, $\forall \lambda \geq 1$ y en consecuencia $i(F, P_\mu) = 1$.

Además

$$i(F, P_\mu) = i(F, P_{r_1}) + i(F, P_\mu \setminus \overline{P_{r_1}}),$$

lo cual implica

$$i(F, P_\mu \setminus \overline{P_{r_1}}) = i(F, P_\mu) - i(F, P_{r_1}) = 1 - 0 = 1 \neq 0.$$

También

$$i(F, P_{R_1}) = i(F, P_\mu) + i(F, P_{R_1} \setminus \overline{P_\mu}),$$

de donde deducimos

$$i(F, P_{R_1} \setminus \overline{P_\mu}) = i(F, P_{R_1}) - i(F, P_\mu) = 0 - 1 \neq 0.$$

Ahora, por la "Propiedad de Existencia", obtenemos dos puntos fijos x_1 y x_2 de F , respectivamente, en $P_\mu \setminus \overline{P_{r_1}}$ y $P_{R_1} \setminus \overline{P_\mu}$. Así queda probado el teorema. $\square$

Ejemplo 6. Tomemos $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua y λ -periódica ($\lambda > 0$), $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua y ω -periódica ($\omega > 0$) tal que $\frac{\omega}{\lambda} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ y

$$1 < \int_0^{\tau(t)} \alpha(t-s)ds < \frac{3}{2}.$$

Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua definida por

$$h(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \phi(x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} + 2x, & x \geq 1, \end{cases}$$

donde $\phi : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función creciente y continua tal que $\phi\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Si $g(t, s, y) \equiv \alpha(t-s)h(y)$, $\forall (t, s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y $l = 0$, las condiciones del teorema anterior son satisfechas con

$$a(t, s) = \alpha(t-s), \quad b(t, s) = 2\alpha(t-s), \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

(para ello tomemos $\mu = \frac{3}{4}$).

En particular, si $\alpha(t) \equiv d \in (0, +\infty)$, todas estas condiciones se verifican si

$$\frac{1}{d} < \min_{t \in R} \tau(t) \leq \max_{t \in R} \tau(t) < \frac{3}{2d}.$$

Capítulo 2

SISTEMAS DE ECUACIONES.

En este Capítulo estudiaremos la existencia, unicidad y aproximación de soluciones positivas periódicas de una sistema de ecuaciones integrales no lineales proveniente de Dinámica de poblaciones y cuya versión escalar es la ecuación integral (1.1) establecida por Cooke y Kaplan [42]. En la primera parte usaremos métodos monótonos (métodos de soluciones superiores e inferiores) que nos permiten aproximar, en algunos casos, las soluciones obtenidas (ver [36]). En la segunda parte usaremos métodos topológicos para los que no son necesarias algunas condiciones de monotonía en las no linealidades (ver [37]).

2.1 DESCRIPCIÓN Y ORIGEN DEL MODELO

Un problema interesante en Biología es el estudio de la evolución en el tiempo de especies que coexisten en un dominio común. Así algunos modelos de crecimiento de poblaciones conducen al estudio de sistemas de ecuaciones integrales del tipo

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds \\ y(t) &= \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds,\end{aligned}\tag{2.1}$$

sugeridos por Cooke y Kaplan en [42]. En este artículo,

- $x(t)$ e $y(t)$ son, respectivamente, el número de individuos de dos especies

x e y en el tiempo t .

- $f(t, x(t), y(t))$ y $g(t, x(t), y(t))$ son, respectivamente, el número de nuevos nacimientos por unidad de tiempo para las especies x e y .

- τ_1 y τ_2 son, respectivamente, la duración de la vida (o de actividad) de los individuos de las especies x e y .

Las funciones f y g marcan el tipo de interacción que existe entre las dos especies consideradas (ver Definición 2.2.7). Teniendo en cuenta las condiciones ambientales, suponemos, de aquí en adelante, las siguientes hipótesis sobre f y g :

(K) $f, g : \mathbb{R} \times I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas no negativas y ω -periódicas ($\omega > 0$) respecto de la primera variable. I_1 e I_2 son subintervalos de $[0, +\infty)$. Además τ_1 y τ_2 son dos números estrictamente positivos. También, debido a la interpretación biológica de las funciones f y g , debemos tener

$$f(t, 0, y) = g(t, x, 0) = 0, \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times I_1 \times I_2.$$

Esto es completamente lógico, porque cuando el número de individuos de la especie x (o y) es cero en un tiempo t , entonces el número de nuevos nacimientos de esta especie debe ser cero.

Notemos que $(0, 0)$ es siempre una solución de (2.1).

Teniendo en cuenta el origen de (2.1), estamos interesados en la existencia de "**estados de coexistencia periódicos**", a saber: la existencia de soluciones no negativas, no triviales, continuas y ω -periódicas de (2.1), es decir, funciones continuas $(x, y) : \mathbb{R} \rightarrow I_1 \times I_2$ tales que $x(t + \omega) = x(t)$, $y(t + \omega) = y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. En algunos casos, es interesante buscar soluciones semi-triviales $(x, 0)$ o $(0, y)$ de (2.1) con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Notemos que estas soluciones pueden tener, como en el caso de sistemas elípticos [77], una gran influencia sobre la existencia de estados de coexistencia.

Según nuestros conocimientos, no existen en la literatura, resultados de este tipo sobre el sistema (2.1), aunque su estudio fue propuesto en el año 1.976 por Cooke y Kaplan [42]. Así podemos considerar este Capítulo como completamente novedoso.

Por cuestión de simplicidad tratamos aquí solamente sistemas del tipo (2.1). Pero es posible generalizar todos los resultados obtenidos en este Capítulo a sistemas más generales dados por

$$x_i(t) = \int_0^{\tau_i(t)} f_i(t, s, x_1(t-s-l), \dots, x_n(t-s-l)) ds, \quad i = 1, \dots, n,$$

con hipótesis adecuadas sobre las funciones f_i y τ_i .

2.2 MÉTODO DE SOLUCIONES SUPERIORES E INFERIORES

En esta sección desarrollamos un método de soluciones superiores e inferiores para el estudio del sistema (2.1). La diferencia principal con el caso escalar (Capítulo anterior) es que no obtenemos siempre un esquema iterativo de aproximación de la solución. No obstante, en algunos casos (casos cooperativo y competitivo, Teoremas 2.2.8 y 2.2.10) es posible aproximar la solución mediante sucesiones monótonas como en el caso escalar.

Denotemos por E el espacio de Banach real de todas las funciones reales continuas y ω -periódicas definidas en $\mathbb{R}$, con la norma

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|, \quad \forall x \in E.$$

También, si $x, y \in E$, con $x(t) \leq y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, denotaremos por $[x, y]_E$ al intervalo de E definido por

$$[x, y]_E = \{z \in E : x(t) \leq z(t) \leq y(t), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ es el intervalo usual de $\mathbb{R}$.

En la siguiente definición precisamos lo que entendemos por solución superior e inferior de (2.1). Para comparar con el caso de sistemas elípticos podemos consultar [32], [54], [63], [66] y [74].

DEFINICIÓN 2.2.1 Sea $(x_0, y_0), (x^0, y^0) \in E \times E$, $x_0, x^0 : \mathbb{R} \rightarrow I_1$,

$y_0, y^0 : \mathbb{R} \rightarrow I_2$. Diremos que tales funciones forman un **sistema de sub-super-soluciones** para el sistema (2.1) cuando se verifiquen las tres condiciones siguientes:

a)

$$x_0(t) \leq x^0(t), \quad y_0(t) \leq y^0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

b)

$$\begin{aligned} x_0(t) &\leq \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_0(s), y(s)) ds \leq \\ &\leq \int_{t-\tau_1}^t f(s, x^0(s), y(s)) ds \leq x^0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [y_0, y^0]_E \end{aligned}$$

y

c)

$$\begin{aligned} y_0(t) &\leq \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y_0(s)) ds \leq \\ &\leq \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y^0(s)) ds \leq y^0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [x_0, x^0]_E. \end{aligned}$$

Inspirados en los resultados del Capítulo anterior para ecuaciones integrales escalares, enunciamos y demostramos el siguiente teorema que nos proporciona un método general para encontrar soluciones no triviales de (2.1), basado en la noción de sub-super-solución.

TEOREMA 2.2.2 Sean $(x_0, y_0) - (x^0, y^0)$ un sistema de sub-super-soluciones para (2.1). Supongamos que f es creciente con respecto a $x \in \left[\min_R x_0(t), \max_R x^0(t) \right]$ para (t, y) fijo en $\mathbb{R} \times I_2$ y g es creciente con respecto a $y \in \left[\min_R y_0(t), \max_R y^0(t) \right]$ para (t, x) fijo en $\mathbb{R} \times I_1$.

Entonces (2.1) tiene al menos una solución $(x, y) \in [x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$.

Demostración. Consideremos el espacio de Banach $E \times E$, con la norma

$$\|(x, y)\| = \max \{ \|x\|_E, \|y\|_E \}$$

y el conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in E \times E : x_0(t) \leq x(t) \leq x^0(t), \quad y_0(t) \leq y(t) \leq y^0(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Claramente $\mathcal{D}$ es un subconjunto cerrado convexo y acotado de $E \times E$. Además se prueba fácilmente, como en el caso escalar, que el operador $F : \mathcal{D} \rightarrow E \times E$ definido por

$$F(x, y)(t) = \left(\int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds, \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds \right), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathbb{R},$$

es compacto. También resulta de las hipótesis del teorema, que $F(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. De aquí obtenemos, por el Teorema del punto fijo de Schauder, la existencia de una solución (x, y) de (2.1) en $\mathcal{D} = [x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$. $\square$

NOTAS 2.2.3 a) *El teorema anterior es una versión adecuada para sistemas de ecuaciones del método de soluciones superiores e inferiores para el caso escalar (ver Capítulo anterior). Notemos que para probar este teorema hemos utilizado el Teorema del punto fijo de Schauder y la compacidad del operador F .*

b) *Si además de las hipótesis del Teorema 2.2.2, f y g satisfacen propiedades de monotonía adicionales, es posible obtener un esquema iterativo que asegure la existencia de sucesiones monótonas que converjan a las soluciones. También, como en el caso escalar, estas soluciones presentan propiedades de minimalidad y maximalidad en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$ (ver Teoremas 2.2.8 y 2.2.10).*

c) *El teorema anterior es muy general, pero no ofrece condiciones precisas que aseguren la existencia de sub-super-soluciones en situaciones concretas. Esto lo hacemos en el siguiente resultado, bajo dos tipos de condiciones:*

- *Primero, un comportamiento adecuado de f y g con respecto a x e y respectivamente, para x e y "grandes" (se supone que f y g son acotadas).*

- *Segundo, un comportamiento apropiado de las funciones $\frac{f(t, x, y)}{x}$ y $\frac{g(t, x, y)}{y}$ cuando x e y son suficientemente pequeños, respectivamente.*

COROLARIO 2.2.4 *Supongamos:*

i) *En la hipótesis (K), $I_1 = [0, M]$, $I_2 = [0, N]$ (M y N son constantes*

positivas) con

$$f(t, M, y) \leq \frac{M}{\tau_1}, \quad g(t, x, N) \leq \frac{N}{\tau_2}, \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times [0, M] \times [0, N].$$

ii)

$$\liminf_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t, x, y)}{x} = a(t, y) \text{ uniformemente en } (t, y) \in [0, \omega] \times [0, N]$$

(y en consecuencia en $\mathbb{R} \times [0, N]$),

$$\liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, x, y)}{y} = b(t, x) \text{ uniformemente en } (t, x) \in [0, \omega] \times [0, M]$$

(y en consecuencia en $\mathbb{R} \times [0, M]$)

con a y b funciones continuas satisfaciendo

$$\min_{t \in [0, \omega]} \int_{t-\tau_1}^t a(s, y(s)) ds \geq m_1 > 1, \quad \forall y \in [0, N]_E$$

y

$$\min_{t \in [0, \omega]} \int_{t-\tau_2}^t b(s, x(s)) ds \geq m_2 > 1, \quad \forall x \in [0, M]_E$$

donde m_1 y m_2 son constantes, independientes, respectivamente, de y y x .

iii) $f(t, x, y)$ es creciente con respecto a $x \in [0, M]$ para (t, y) fijo en $\mathbb{R} \times [0, N]$ y $g(t, x, y)$ es creciente con respecto a $y \in [0, N]$ para (t, x) fijo en $\mathbb{R} \times [0, M]$.

Entonces, (2.1) tiene al menos una solución con ambas componentes estrictamente positivas en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $m_i - \varepsilon \tau_i \geq 1$, $i = 1, 2$. Entonces, existen $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ tales que $0 < \delta_1 < M$, $0 < \delta_2 < N$ y

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &\geq (a(t, y) - \varepsilon)x, \quad \forall x \in [0, \delta_1], \quad \forall y \in [0, N], \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ g(t, x, y) &\geq (b(t, x) - \varepsilon)y, \quad \forall y \in [0, \delta_2], \quad \forall x \in [0, M], \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tomemos en el Teorema 2.2.2, $x_0 = \delta_1$, $y_0 = \delta_2$, $x^0 = M$, $y^0 = N$. Entonces si $y \in [y_0, y^0]_E$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &\leq (m_1 - \varepsilon \tau_1) x_0 \leq \int_{t-\tau_1}^t (a(s, y(s)) - \varepsilon) x_0 ds \leq \\ &\leq \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_0, y(s)) ds \leq \int_{t-\tau_1}^t f(s, x^0, y(s)) ds \leq x^0. \end{aligned}$$

Análogamente, si $x \in [x_0, x^0]_E$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} y_0 &\leq (m_2 - \varepsilon \tau_2) y_0 \leq \int_{t-\tau_2}^t (b(s, x(s)) - \varepsilon) y_0 ds \leq \\ &\leq \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y_0) ds \leq \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y^0) ds \leq y^0. \end{aligned}$$

Estamos, por tanto, en condiciones de aplicar el Teorema 2.2.2 y concluir la demostración. $\square$

NOTAS 2.2.5 a) Claramente la hipótesis i) del corolario anterior se satisface si $f, g : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son acotadas. Por otra parte, la hipótesis ii) significa que la interacción entre las dos especies x e y es suficientemente grande para producir un estado de coexistencia periódico.

b) Bajo las condiciones del corolario anterior, el sistema (2.1) tiene soluciones semi-triviales del tipo $(X, 0)$ y $(0, Y)$ con $X(t) > 0$ e $Y(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Eso significa que cada especie puede sobrevivir en la ausencia de la otra.

Para probar la existencia de $(X, 0)$, notemos que $y(t) \equiv 0$ es siempre una solución de la segunda ecuación de (2.1). Además, si definimos una función $h : \mathbb{R} \times I_1 \rightarrow [0, +\infty)$ por $h(s, x) \equiv f(s, x, 0)$, la ecuación

$$x(t) = \int_{t-\tau_1}^t h(s, x(s)) ds$$

verifica todas las condiciones del Teorema 1.2.2 del Capítulo anterior y, en consecuencia, tiene una solución estrictamente positiva X . Ahora, el par $(X, 0)$ es una solución semi-trivial de (2.1). De la misma manera se prueba la existencia de $(0, Y)$.

Notemos que no tenemos siempre la existencia de soluciones semi-triviales (ver Ejemplo 8 más adelante).

c) La nota anterior demuestra la importancia del método de soluciones superiores e inferiores en el estudio de (2.1). En efecto, por el Corolario 2.2.4, tenemos directamente la existencia de un estado de coexistencia para (2.1). Si en lugar de este método aplicamos otros métodos, como la Teoría de índice de puntos fijos, podemos obtener una solución no negativa y no trivial de (2.1), pero hace falta verificar después si ambas componentes son no triviales. En general esto es una cuestión difícil, sobre todo cuando el sistema tiene soluciones semi- triviales, como ocurre en nuestro caso. En la siguiente sección daremos una respuesta a esta cuestión.

Ejemplo 7. Consideremos (2.1) con

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &= a_1(t) x (P - x) c(y) \\ g(t, x, y) &= b_1(t) y (Q - y) d(x) \end{aligned}$$

donde $a_1, b_1 : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ son funciones continuas y ω -periódicas y $P > 0$, $Q > 0$.

También, $c : [0, \frac{Q}{2}] \rightarrow (0, +\infty)$, $d : [0, \frac{P}{2}] \rightarrow (0, +\infty)$ son funciones continuas. Entonces si

$$\frac{1}{P\tau_1} < a_1(t) c(y) \leq \frac{2}{P\tau_1}, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{Q}{2}\right]$$

y

$$\frac{1}{Q\tau_2} < b_1(t) d(x) \leq \frac{2}{Q\tau_2}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \left[0, \frac{P}{2}\right],$$

el sistema (2.1) tiene al menos un estado de coexistencia $(x, y) \in \left(0, \frac{P}{2}\right] \times \left(0, \frac{Q}{2}\right]$. Para probarlo, es suficiente tomar en el Corolario 2.2.4, $M = \frac{P}{2}$, $N = \frac{Q}{2}$, $a(t, y) = Pa_1(t) c(y)$ y $b(t, x) = Qb_1(t) d(x)$.

NOTAS 2.2.6 a) Notemos que en este ejemplo, $a(t, y) = \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} \big|_{x=0}$, $b(t, x) = \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial y} \big|_{y=0}$. Esto es una buena indicación para calcular las funciones a y b en el Corolario 2.2.4 en general (cuando existen estas derivadas parciales). Como hemos mencionado ya, la hipótesis i) de este corolario se verifica siempre si $I_1 = I_2 = [0, +\infty)$ y f y g son acotadas. También, para

obtener x^0 e y^0 , podemos imponer otros tipos de condiciones, inspiradas en el caso escalar (ver Capítulo anterior), sobre las cantidades $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(t, x, y)}{x}$ y $\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x, y)}{y}$. Esto nos permite considerar no linealidades no necesariamente acotadas.

b) Las funciones f y g del ejemplo anterior fueron consideradas por Cooke y Kaplan [42] en el caso escalar. En el caso de sistemas, nuestra condición sobre las funciones $a_1(t)c(y)$ y $b_1(t)d(x)$ puede interpretarse como un control sobre la interacción entre las dos especies x e y para obtener un estado de coexistencia (x, y) tal que $0 < x(t) \leq \frac{P}{2}$, $0 < y(t) \leq \frac{Q}{2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

En lo que sigue trataremos el caso en el cual f y g satisfacen condiciones adicionales de monotonía. Como veremos, será posible construir sucesiones monótonas que convergen a las soluciones positivas de (2.1), lo cual es una ventaja de este método con respecto a los métodos topológicos.

Recordemos que (2.1) es un modelo para estudiar la evolución en el tiempo de una población formada por dos especies x e y donde $f(t, x(t), y(t))$ y $g(t, x(t), y(t))$ son, respectivamente, el número de nuevos nacimientos por unidad de tiempo de las especies x e y . Basándonos en esta interpretación Biológica, damos a continuación la siguiente definición, donde adoptamos la siguiente notación: Si $h(t, x, y)$ es una función de tres variables $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times I_1 \times I_2$, escribiremos $h(t, x, y) \nearrow x$ ($h(t, x, y) \searrow x$) si la función $h(t, x, y)$ es creciente (decreciente) con respecto a $x \in I_1$ para (t, y) fijo en $\mathbb{R} \times I_2$ (y análogamente para la variable y).

DEFINICIÓN 2.2.7 Se dice que (2.1) es

a) de tipo **cooperativo** si

$$f(t, x, y) \nearrow x, f(t, x, y) \nearrow y; \quad g(t, x, y) \nearrow x, g(t, x, y) \nearrow y.$$

b) de tipo **competitivo** si

$$f(t, x, y) \nearrow x, f(t, x, y) \searrow y; \quad g(t, x, y) \searrow x, g(t, x, y) \nearrow y.$$

c) de tipo presa-depredador si

$$f(t, x, y) \nearrow x, f(t, x, y) \searrow y; \quad g(t, x, y) \nearrow x, g(t, x, y) \nearrow y.$$

TEOREMA 2.2.8 *Supongamos que además de las hipótesis del Teorema 2.2.2, el sistema (2.1) es de tipo cooperativo. Entonces, si*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_n(s), y_n(s)) ds, \\ y_{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_2}^t g(s, x_n(s), y_n(s)) ds, \\ x^{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_1}^t f(s, x^n(s), y^n(s)) ds, \\ y^{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_2}^t g(s, x^n(s), y^n(s)) ds, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

tenemos:

$$\begin{aligned} x_0(t) \leq x_n(t) \leq x_{n+1}(t) \leq x^{n+1}(t) \leq x^n(t) \leq x^0(t), \\ y_0(t) \leq y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq y^{n+1}(t) \leq y^n(t) \leq y^0(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$$

y $\{(x_n, y_n)\}, \{(x^n, y^n)\}$ convergen respectivamente a (x_*, y_*) , (x^*, y^*) , las cuales son soluciones de (2.1) (posiblemente iguales) que pertenecen a $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$. Además si (x, y) es cualquier solución de (2.1) en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, entonces

$$\begin{aligned} x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t) \\ y_*(t) \leq y(t) \leq y^*(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(es decir, (x_*, y_*) y (x^*, y^*) son, respectivamente, solución minimal y maximal de (2.1) en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$).

Demostración. Por un simple argumento de inducción, obtenemos (2.3). Entonces, las sucesiones $\{(x_n, y_n)\}, \{(x^n, y^n)\}$ son ambas monótonas y acotadas y convergen, respectivamente, a (x_*, y_*) , $(x^*, y^*) \in [x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$. Usando (2.2) y (2.3), deducimos fácilmente que (x_*, y_*) , (x^*, y^*) son soluciones de (2.1)

tales que $x_* \leq x^*$, $y_* \leq y^*$. Además, si (x, y) es cualquier solución de (2.1) en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, entonces

$$x_n(t) \leq x(t) \leq x^n(t), \quad y_n(t) \leq y(t) \leq y^n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De donde resulta

$$x_*(t) \leq x(t) \leq x^*(t), \quad y_*(t) \leq y(t) \leq y^*(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

NOTAS 2.2.9 Si (2.1) tiene un sistema de sub-super-soluciones $(x_0, y_0) - (x^0, y^0)$, el teorema anterior asegura la existencia de una sucesión monótona que converge a una solución de (2.1), lo cual es muy interesante cuando (2.1) tiene una solución única en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, porque en este caso forzosamente esta sucesión converge a la única solución (ver Ejemplo 8 más adelante).

En el caso competitivo tenemos un resultado parecido al del teorema anterior:

TEOREMA 2.2.10 Supongamos, que además de las hipótesis del Teorema 2.2.2, el sistema (2.1) es de tipo competitivo. Entonces, si

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_n(s), y^n(s)) ds, \\ y^{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_2}^t g(s, x_n(s), y^n(s)) ds, \\ x^{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_1}^t f(s, x^n(s), y_n(s)) ds, \\ y_{n+1} &\equiv \int_{t-\tau_2}^t g(s, x^n(s), y_n(s)) ds, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

tenemos:

$$\begin{aligned} x_0(t) &\leq x_n(t) \leq x_{n+1}(t) \leq x^{n+1}(t) \leq x^n(t) \leq x^0(t), \\ y_0(t) &\leq y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq y^{n+1}(t) \leq y^n(t) \leq y^0(t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

y $\{(x_n, y^n)\}$, $\{(x^n, y_n)\}$ convergen, respectivamente, a (x_*, y^*) , (x^*, y_*) , las cuales son soluciones de (2.1) (posiblemente iguales) que pertenecen a $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$. Además si (x, y) es cualquier solución de (2.1) en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, entonces

$$\begin{aligned} x_*(t) &\leq x(t) \leq x^*(t), \\ y_*(t) &\leq y(t) \leq y^*(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Análoga a la del teorema anterior. $\square$

NOTAS 2.2.11 a) En el caso presa-depredador no parece posible probar un resultado parecido a los Teoremas 2.2.8 y 2.2.10.

b) Sería interesante encontrar condiciones que aseguren que $(x_*, y^*) \neq (x^*, y_*)$ en el Teorema 2.2.10 y $(x_*, y_*) \neq (x^*, y^*)$ en el Teorema 2.2.8.

A continuación probaremos un resultado de unicidad de estados de coexistencia de (2.1). Para ello necesitamos que (2.1) sea de tipo cooperativo y que las no linealidades f y g verifiquen una condición de concavidad similar a la que aparece en Krasnoselskii [67].

TEOREMA 2.2.12 Sean $I_1 = I_2 = [0, +\infty)$ en la hipótesis (K) y supongamos:

- i) (2.1) es de tipo cooperativo.
- ii) $f(s, \tau x, \tau y) > \tau f(s, x, y)$, $g(s, \tau x, \tau y) > \tau g(s, x, y)$, $\forall \tau \in (0, 1)$, $\forall x, y \in (0, +\infty)$.

Entonces (2.1) admite, a lo sumo, una solución ω -periódica (x, y) satisfaciendo $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean (x_1, y_1) , (x_2, y_2) dos soluciones distintas de (2.1) con

$$x_i(t) > 0, y_i(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Claramente, no es restrictivo suponer la existencia de $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1(t_1) > x_2(t_1)$.

Definamos

$$\mu = \min \left\{ \frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \frac{y_2(t)}{y_1(t)}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.7)$$

Entonces $0 < \mu < 1$, $x_2(t) \geq \mu x_1(t)$, $y_2(t) \geq \mu y_1(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y existe $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_2(t_2) = \mu x_1(t_2)$ o $y_2(t_2) = \mu y_1(t_2)$. Supongamos $x_2(t_2) = \mu x_1(t_2)$.

Entonces, $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_2(s), y_2(s)) ds \geq \\ &\geq \int_{t-\tau_1}^t f(s, \mu x_1(s), \mu y_1(s)) ds > \\ &> \mu \int_{t-\tau_1}^t f(s, x_1(s), y_1(s)) ds = \\ &= \mu x_1(t), \end{aligned}$$

lo cual contradice la existencia de t_2 .

Si $y_2(t_2) = \mu y_1(t_2)$, también llegamos a una contradicción, tomando $y_2(t)$ en lugar de $x_2(t)$. $\square$

NOTAS 2.2.13 a) Si (2.1) es de tipo cooperativo y tenemos un sistema de sub-super-soluciones $(x_0, y_0) - (x^0, y^0)$ con $x_0(t) > 0$, $y_0(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces para demostrar la unicidad de soluciones positivas en el conjunto $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, necesitamos que la hipótesis ii) del Teorema 2.2.12 sea satisfecha sólo para cualquier τ que pertenece a $(0, 1)$ y cualquier (x, y) que pertenece a

$$\left[\min_{t \in \mathbb{R}} x_0(t), \max_{t \in \mathbb{R}} x_0 \right] \times \left[\min_{t \in \mathbb{R}} y_0(t), \max_{t \in \mathbb{R}} y_0 \right].$$

Además, si (u, v) es un par de funciones continuas y ω -periódicas arbitrarias en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$ y si (x, y) es la única solución de (2.1) en $[x_0, x^0]_E \times [y_0, y^0]_E$, entonces

$$\|u_n - x\| \rightarrow 0, \|v_n - y\| \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$, donde

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= \int_{t-\tau_1}^t f(s, u_n(s), v_n(s)) ds, \quad u_0(t) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ v_{n+1}(t) &= \int_{t-\tau_2}^t g(s, u_n(s), v_n(s)) ds, \quad v_0(t) = v(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En efecto, por un simple razonamiento de inducción, obtenemos

$$x_n \leq u_n \leq x^n \quad e \quad y_n \leq v_n \leq y^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(ver (2.2) para la definición de x_n, x^n, y_n, y^n).

Entonces

$$\begin{aligned} \|u_n - x\| &\leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \\ &\leq \|x^n - x_n\| + \|x_n - x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|v_n - y\| &\leq \|v_n - y_n\| + \|y_n - y\| \leq \\ &\leq \|y^n - y_n\| + \|y_n - y\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ahora, (2.8) es una consecuencia del hecho

$$x_n, x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_* = x^* = x$$

y

$$y_n, y^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_* = y^* = y.$$

b) Las condiciones de tipo ii) aparecen en los libros de Krasnoselskii [67] y [68] donde estudia otros tipos de ecuaciones integrales no lineales. También en el caso escalar, Smith [86] la ha utilizado para probar la unicidad de soluciones de (1.1).

c) Podemos obtener una conclusión parecida a la del Teorema 2.2.12, si en lugar de ii) tomamos

ii)' Existe $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$ tales que

$$\begin{aligned} f(s, \tau x, \tau y) &\geq \tau^\alpha f(s, x, y), \\ g(s, \tau x, \tau y) &\geq \tau^\beta g(s, x, y), \\ \forall \tau &\in (0, 1), \quad \forall (x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

En el caso escalar encontramos este tipo de condiciones en [59].

Ejemplo 8. Tomemos en el sistema (2.1)

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &= a(t) \frac{\sqrt{x}}{m+x} \frac{\sqrt{y}}{n+y}, \\ g(t, x, y) &= b(t) \frac{\sqrt{y}}{n+y} \frac{\sqrt{x}}{m+x}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $a, b : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ son funciones continuas y ω -periódicas, m, n son constantes positivas y $x \geq 0, y \geq 0$.

Entonces, si

$$\begin{aligned} mn &< \int_{t-\tau_1}^t a(s) ds \leq (m + \min\{n, m\})(n + \min\{n, m\}), \\ mn &< \int_{t-\tau_2}^t b(s) ds \leq (m + \min\{n, m\})(n + \min\{n, m\}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$, el sistema (2.1) tiene una única solución (x, y) tal que $x(t) > 0, y(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

De hecho, el sistema (2.1), con f y g dadas por (2.9), tiene un sistema de sub-súper-soluciones $(x_0, x^0) - (y_0, y^0)$, con $x_0 = y_0$ constantes positivas suficientemente pequeñas y $x^0 = y^0 = \min\{n, m\}$. Entonces, por el Teorema 2.2.2 y 2.2.12, obtenemos la conclusión deseada.

NOTAS 2.2.14 *Observemos que, en este caso, el sistema (2.1) no tiene soluciones semi-triviales, de manera que la cooperación entre las dos especies es fundamental para la obtención de un estado de coexistencia. También, (2.10) nos indica cómo debe ser la cooperación, para llegar a un estado de coexistencia tal que*

$$0 < x(t) \leq \min\{n, m\}, \quad 0 < y(t) \leq \min\{n, m\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.3 MÉTODO TOPOLÓGICO

En esta sección probaremos algunos resultados abstractos con el objeto de aplicarlos después a sistemas de ecuaciones integrales del tipo (2.1).

2.3.1 RESULTADOS ABSTRACTOS

Consideremos, como en la subsección 1.3.1 del Capítulo 1, un espacio de Banach $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ ordenado por un cono cerrado P_1 . Claramente $P_1 \times P_1$ es un cono cerrado en el espacio de Banach $(E_1 \times E_1, \|\cdot\|_{E_1 \times E_1})$ donde, para cualquier $(x, y) \in E_1 \times E_1$,

$$\|(x, y)\|_{E_1 \times E_1} = \max \{ \|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_1} \}.$$

El cono $P_1 \times P_1$ define una relación de orden lineal en el espacio $E_1 \times E_1$ de la siguiente manera

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \text{ sii } x_2 - x_1 \in P_1 \text{ e } y_2 - y_1 \in P_1.$$

Escribiremos $(x_1, y_1) \not\leq (x_2, y_2)$ sii $x_2 - x_1 \notin P_1$ o $y_2 - y_1 \notin P_1$. También $(x_1, y_1) \not\leq (x_2, y_2)$ sii $(x_2, y_2) \not\leq (x_1, y_1)$.

Para cualquier par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha < \beta$, notemos por $R_{\alpha, \beta}$ el conjunto

$$R_{\alpha, \beta} = \{ (x, y) \in P_1 \times P_1 : \|x\|_{E_1} < \alpha, \|y\|_{E_1} < \beta \}.$$

Si U es cualquier subconjunto abierto del cono $P_1 \times P_1$, denotaremos por $i(F, U, P_1 \times P_1)$ el "índice de puntos fijos de F en el abierto U , con respecto al cono $P_1 \times P_1$ ", cuando este índice esté bien definido (ver Teorema 1.3.1).

Enunciamos ahora nuestro primer resultado abstracto:

TEOREMA 2.3.1 *Sea $F : \overline{R_{\beta, \beta}} \rightarrow P_1 \times P_1$ un operador compacto satisfaciendo:*

a)

$$F(x, y) \neq \lambda(x, y), \quad \forall \lambda \geq 1, \quad \forall (x, y) \in \partial R_{\beta, \beta}. \quad (2.11)$$

b) *Existe $(p_1, p_2) \in P_1 \times P_1 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que*

$$(x, y) - F(x, y) \neq \lambda(p_1, p_2), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \partial(R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha}). \quad (2.12)$$

Entonces F tiene al menos un punto fijo $(x, y) \in P_1 \times P_1$ tal que

$$\alpha < \|x\|_{E_1} < \beta \text{ y } \alpha < \|y\|_{E_1} < \beta. \quad (2.13)$$

Demostración. Notemos

$$U \equiv R_{\beta, \beta}, \quad U_1 \equiv R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha}, \quad U_2 \equiv R_{\beta, \beta} \setminus \overline{U_1}.$$

Entonces

$$U_2 = \left\{ (x, y) \in P_1 \times P_1 : \alpha < \|x\|_{E_1} < \beta, \alpha < \|y\|_{E_1} < \beta \right\}.$$

La demostración está basada en las siguientes etapas:

1) Primero probaremos que

$$i(F, U, P_1 \times P_1) = 1. \quad (2.14)$$

Para ello, consideremos la homotopía $h : [0, 1] \times \overline{U} \rightarrow P_1 \times P_1$ definida por $h(\lambda, x, y) = \lambda F(x, y)$. Claramente h es compacta y por la hipótesis a), tenemos $h(\lambda, x, y) \neq (x, y)$, $\forall (\lambda, x, y) \in [0, 1] \times \partial U$. Entonces (i) y (ii) del Teorema 1.3.1 implican

$$i(F, U, P_1 \times P_1) = i(h(1, \cdot), U, P_1 \times P_1) = i(h(0, \cdot), U, P_1 \times P_1) = 1.$$

2) En segundo lugar, probaremos que

$$i(F, U_1, P_1 \times P_1) = 0. \quad (2.15)$$

Para ello, tomemos μ un número real tal que

$$\mu > \sup_{(x, y) \in U_1} \frac{\|(x, y) - F(x, y)\|_{E_1 \times E_1}}{\|(p_1, p_2)\|_{E_1 \times E_1}} \quad (2.16)$$

y definamos $g : [0, 1] \times \overline{U_1} \rightarrow P_1 \times P_1$ por $g(\lambda, x, y) = F(x, y) + \lambda\mu(p_1, p_2)$.

Trivialmente g es compacta y por b) tenemos

$$g(\lambda, x, y) \neq (x, y), \forall (\lambda, x, y) \in [0, 1] \times \partial U_1.$$

De nuevo, por la Propiedad de Invariabilidad por homotopía, se deduce

$$i(F, U_1, P_1 \times P_1) = i(g(0, \cdot), U_1, P_1 \times P_1) = i(g(1, \cdot), U_1, P_1 \times P_1).$$

Pero $i(g(1, \cdot), U_1, P_1 \times P_1) = 0$. En efecto, en el caso contrario, es decir, $i(g(1, \cdot), U_1, P_1 \times P_1) \neq 0$, la Propiedad de Existencia (ver Teorema 1.3.1 (iv)) asegura la existencia de un punto $(x, y) \in U_1$ tal que

$$(x, y) = F(x, y) + \mu(p_1, p_2).$$

Entonces

$$\mu = \frac{\|(x, y) - F(x, y)\|_{E_1 \times E_1}}{\|(p_1, p_2)\|_{E_1 \times E_1}},$$

lo cual contradice (2.16).

3) Observemos que U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos de U de intersección vacía. Además el operador F no tiene puntos fijos en $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$. En efecto, $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2) \subset \partial U \cup \partial U_1$ y, por a) y b), F no tiene puntos fijos en $\partial U \cup \partial U_1$. Ahora, la Propiedad de Aditividad implica

$$i(F, U, P_1 \times P_1) = i(F, U_1, P_1 \times P_1) + i(F, U_2, P_1 \times P_1). \quad (2.17)$$

Finalmente, deducimos de (2.14), (2.15) y (2.17)

$$i(F, U_2, P_1 \times P_1) = 1, \quad (2.18)$$

lo cual implica la existencia de algún punto fijo de F en U_2 , satisfaciendo (2.13). $\square$

El siguiente corolario es útil en las aplicaciones y podemos considerarlo como una versión para sistemas del clásico Teorema de la Compresión del cono.

Análogamente, se podría utilizar el Teorema 2.3.1 para probar un resultado similar al del Teorema de la "Expansión del cono" (ver [3], [60] y [67]), para sistemas de ecuaciones.

COROLARIO 2.3.2 Sea $F : \overline{R_{\beta,\beta}} \rightarrow P_1 \times P_1$ un operador compacto satisfaciendo:

a)

$$F(x, y) \not\leq (x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial R_{\beta,\beta}. \quad (2.19)$$

b)

$$F(x, y) \not\leq (x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial(R_{\alpha,\beta} \cup R_{\beta,\alpha}) \quad (2.20)$$

Entonces F tiene al menos un punto fijo $(x, y) \in P_1 \times P_1$ satisfaciendo

$$\alpha < \|x\|_{E_1} < \beta \text{ y } \alpha < \|y\|_{E_1} < \beta.$$

Demostración. Claramente a) y b) del Corolario 2.3.2 implican, respectivamente, a) y b) del Teorema 2.3.1. $\square$

NOTAS 2.3.3 1) La diferencia esencial entre el Corolario 2.3.2 y el Teorema de la "Compresión del cono", consiste en sustituir, en este último Teorema, la hipótesis b) por

b')

$$F(x, y) \not\leq (x, y), \quad \forall (x, y) \in \partial R_{\alpha,\alpha}. \quad (2.21)$$

Entonces, a) y b') aseguran la existencia de un punto fijo $(x, y) \in P_1 \times P_1$ de F tal que

$$\alpha < \|(x, y)\|_{E_1 \times E_1} < \beta, \quad (2.22)$$

pero x (o y) puede ser idénticamente cero.

2) Como veremos más adelante, el Teorema 2.3.1 es muy útil en el estudio de sistemas de ecuaciones que tienen soluciones semi-triviales, es decir, soluciones del tipo $(x, 0)$ o $(0, y)$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Usualmente, esto ocurre en Biología, cuando dos especies coexisten en un dominio común y acotado, con tipos particulares de interacción (ver [36], [84]). Si aplicamos el Teorema de la

"Compresión del cono", llegamos a la conclusión de que existe $(x, y) \in P_1 \times P_1$ satisfaciendo (2.22). Pero para afirmar la existencia de un estado de coexistencia del sistema, es decir, soluciones $(x, y) \in P_1 \times P_1$ satisfaciendo (2.13), necesitamos, en general, un estudio más profundo de la situación particular que tratamos (ver [44], [77]).

Presentamos ahora un resultado abstracto que asegura, además de un estado de coexistencia, la existencia de soluciones semi-triviales.

TEOREMA 2.3.4 Sea $F : \overline{R_{\beta, \beta}} \rightarrow P_1 \times P_1$, $(x, y) \rightarrow (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un operador compacto tal que:

- a) $F(x, y) \neq \lambda(x, y)$, $\forall \lambda \geq 1$, $\forall (x, y) \in \partial R_{\beta, \beta}$.
- b) Existe $(p_1, p_2) \in P_1 \times P_1$ con $p_1 \in P_1 \setminus \{0\}$ tal que

$$(x, y) - F(x, y) \neq \lambda(p_1, p_2), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \partial(R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha}).$$

- c) $F_2(x, 0) = 0$, $\forall x \in P_1$, con $\|x\|_{E_1} \leq \beta$.
- d) $x - F_1(x, 0) \neq \lambda p_1$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x \in P_1$ con $\|x\|_{E_1} = \alpha$.

Entonces F tiene al menos dos puntos fijos en $P_1 \times P_1$, $(x_0, 0)$ y (x_1, y_1) tales que

$$\begin{aligned} \alpha &< \|x_j\|_{E_1} < \beta, \quad j = 0, 1 \\ \alpha &< \|y_1\|_{E_1} < \beta. \end{aligned}$$

Demostración. La existencia de (x_1, y_1) se obtiene como consecuencia del Teorema 2.3.1.

Para probar la existencia de $(x_0, 0)$, conservemos las notaciones de la subsección 1.3.3 del Capítulo anterior y definamos el operador $H_1 : \overline{(P_1)_\beta} \rightarrow P_1$ por $H_1(x) = F_1(x, 0)$, $\forall x \in \overline{(P_1)_\beta}$. Entonces H_1 es un operador compacto. Además, las condiciones a) y d) del teorema implican, respectivamente,

$$H_1(x) \neq \lambda x, \quad \forall \lambda \geq 1, \quad \forall x \in S_\beta^+$$

y

$$x - H_1(x) \neq \lambda p_1, \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x \in S_\alpha^+.$$

De donde resulta , por el Lema 1.3.7,

$$i\left(H_1, (P_1)_\beta, P_1\right) = 1, \quad i\left(H_1, (P_1)_\alpha, P_1\right) = 0.$$

De la Propiedad de Aditividad deducimos

$$i\left(H_1, (P_1)_\beta \setminus \overline{(P_1)_\alpha}, P_1\right) = i\left(H_1, (P_1)_\beta, P_1\right) - i\left(H_1, (P_1)_\alpha, P_1\right) = 1.$$

Entonces, por la Propiedad de Existencia, H_1 admite al menos un punto fijo x_0 en $(P_1)_\beta \setminus \overline{(P_1)_\alpha}$. Claramente $(x_0, 0)$ es un punto fijo de F tal que

$$\alpha < \|x_0\|_{E_1} < \beta.$$

Así queda probado el teorema. $\square$

De manera análoga podemos probar el siguiente resultado donde hay soluciones semi-triviales del tipo $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$.

COROLARIO 2.3.5 Sea $F : \overline{R_{\beta, \beta}} \rightarrow P_1 \times P_1$, $(x, y) \rightarrow (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un operador compacto tal que

- a) $F(x, y) \neq \lambda(x, y)$, $\forall \lambda \geq 1$, $\forall (x, y) \in \partial R_{\beta, \beta}$.
- b) Existen $p_1 \in P_1 \setminus \{0\}$ y $p_2 \in P_1 \setminus \{0\}$ tales que

$$(x, y) - F(x, y) \neq \lambda(p_1, p_2), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \partial(R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha}).$$

- c) $F_1(0, y) = F_2(x, 0) = 0$, $\forall x, y \in P_1$.
- d) $x - F_1(x, 0) \neq \lambda p_1$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x \in P_1$ con $\|x\|_{E_1} = \alpha$.
- e) $y - F_2(0, y) \neq \lambda p_2$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall y \in P_1$ con $\|y\|_{E_1} = \alpha$.

Entonces F tiene al menos cuatro puntos fijos en $P_1 \times P_1 : (0, 0), (x_0, 0), (0, y_0), (x_1, y_1)$ tales que

$$\begin{aligned} \alpha &< \|x_j\|_{E_1} < \beta, \quad j = 0, 1 \\ \alpha &< \|y_j\|_{E_1} < \beta, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

2.3.2 APLICACIONES A SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES

Consideremos de nuevo el sistema de ecuaciones integrales (2.1) con la hipótesis (K), donde $I_1 = I_2 = [0, +\infty)$. Para poder aplicar los resultados anteriores introducimos las siguientes notaciones:

Denotemos por E el espacio de Banach real de todas las funciones reales continuas y ω -periódicas definidas en $\mathbb{R}$, con la norma

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)|, \quad \forall x \in E$$

y por P el cono

$$P = \{x \in E : x(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Recordemos que

$$\overset{\circ}{P} = \{x \in E : x(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Definamos el operador $F = (F_1, F_2) : P \times P \rightarrow P \times P$ por

$$F(x, y)(t) = \left(\int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds, \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds \right).$$

El operador $F = (F_1, F_2) : P \times P \rightarrow P \times P$ es completamente continuo. La demostración es similar a la del caso escalar (ver Proposición 1.2.1 i).

TEOREMA 2.3.6 *Supongamos:*

- i) f y g son funciones acotadas.
- ii) Existe una función continua $a : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(t, x, y)}{x} = a(t, y), \quad \text{uniformemente en } (t, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Además, $a(t, y) \geq a_1 > 0, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y

$$a_1 \tau_1 > 1. \tag{2.23}$$

iii) Existe una función continua $b : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{y \rightarrow 0^+} \frac{g(t, x, y)}{y} = b(t, x), \text{ uniformemente en } (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Además, $b(t, x) \geq b_1 > 0$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ y

$$b_1 \tau_2 > 1. \quad (2.24)$$

Entonces el sistema (2.1) tiene al menos tres soluciones no triviales: $(x_0, 0)$, $(0, y_0)$, (x_1, y_1) con

$$\begin{aligned} x_j &\in P \setminus \{0\}, \quad j = 0, 1, \\ y_j &\in P \setminus \{0\}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Demostración. Verificaremos que todas las condiciones del Corolario 2.3.5 son satisfechas. Para ello, tomemos

$$\beta > M \max \{\tau_1, \tau_2\} \quad (2.25)$$

donde $M \geq \sup \{f(t, x, y), g(t, x, y), (t, x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)\}$.

Razonemos por contradicción y supongamos que existen $(x, y) \in \partial R_{\beta, \beta}$ y $\lambda \geq 1$ tales que

$$F(x, y) = \lambda(x, y).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \partial R_{\beta, \beta} &= \{(x, y) \in P \times P : \|y\| = \beta, \|x\| \leq \beta\} \cup \\ &\cup \{(x, y) \in P \times P : \|x\| = \beta, \|y\| \leq \beta\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si $\|y\| = \beta$ y $\|x\| \leq \beta$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0) = \beta$. Luego,

por (2.26), tenemos

$$\beta = y(t_0) \leq \int_{t_0-\tau_2}^{t_0} g(s, x(s), y(s)) ds \leq M\tau_2 < \beta, \quad (2.27)$$

lo cual es una contradicción con (2.25). De la misma manera llegamos a una contradicción en el caso $\|x\| = \beta$ y $\|y\| \leq \beta$. Esto demuestra la condición a) del Corolario 2.3.5.

Para probar b), elegimos $\varepsilon > 0$ tal que

$$(a_1 - \varepsilon)\tau_1 > 1 \text{ y } (b_1 - \varepsilon)\tau_2 > 1. \quad (2.28)$$

Por ii) y iii), existe $\delta(\varepsilon) \in (0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned} f(t, x, y) &\geq (a(t, y) - \varepsilon)x, \quad \forall x \in [0, \delta(\varepsilon)], \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \\ g(t, x, y) &\geq (b(t, x) - \varepsilon)y, \quad \forall y \in [0, \delta(\varepsilon)], \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fijemos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq \delta(\varepsilon)$, $\alpha < \beta$, y $p_1 = p_2 = 1$. Entonces b) del Corolario 2.3.5 está satisfecho. En efecto, supongamos que existen $(x, y) \in \partial(R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha})$ y $\lambda \geq 0$ tales que

$$(x, y) - F(x, y) = \lambda(p_1, p_2), \quad (2.30)$$

es decir,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), y(s)) ds + \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= \int_{t-\tau_2}^t g(s, x(s), y(s)) ds + \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial(R_{\alpha, \beta} \cup R_{\beta, \alpha}) &= \{(x, y) \in P \times P : \|y\| = \beta, \|x\| \leq \alpha\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in P \times P : \|x\| = \alpha, \alpha \leq \|y\| \leq \beta\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in P \times P : \|y\| = \alpha, \alpha \leq \|x\| \leq \beta\} \cup \\ &\quad \{(x, y) \in P \times P : \|x\| = \beta, \|y\| \leq \alpha\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

distinguiremos los siguientes casos:

$$(C1) \quad \|y\| = \beta, \quad \|x\| \leq \alpha.$$

Si $x \equiv 0$, entonces usando

$$f(t, 0, y) = g(t, x, 0) = 0, \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \quad (2.33)$$

y (2.31), deducimos que $\lambda = 0$. Pero esto contradice el hecho de que $\|y\| = \beta$ (ver (2.27)).

Si $x \neq 0$, afirmamos que $\min_{t \in [0, \omega]} x(t) > 0$. En efecto, sea $t_1 \in [0, \omega]$ tal que

$$x(t_1) = \min_{t \in [0, \omega]} x(t).$$

Entonces, por (2.29),

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds + \lambda \geq \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} f(s, x(s), y(s)) ds \geq \\ &\geq \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} (a(s, y(s)) - \varepsilon) x(s) ds \geq (a_1 - \varepsilon) \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} x(s) ds. \end{aligned}$$

Ahora, si $x(t_1) = 0$, tenemos $x \equiv 0$ en $[t_1 - \tau_1, t_1]$. Escribiendo de nuevo $x(t_1 - \tau_1) = 0$, obtenemos $x \equiv 0$ en $[t_1 - 2\tau_1, t_1 - \tau_1]$. Iterando ahora este proceso n veces, obtenemos $x(s) = 0$, $\forall s \in I$, donde I es algún intervalo de longitud $n\tau_1 \geq \omega$. Teniendo en cuenta que x es ω -periódica, deducimos que $x \equiv 0$, lo cual es una contradicción.

Como $x(t_1) > 0$, tenemos

$$x(t_1) \geq (a_1 - \varepsilon) \int_{t_1 - \tau_1}^{t_1} x(s) ds \geq (a_1 - \varepsilon) \tau_1 x(t_1)$$

y en consecuencia $1 \geq (a_1 - \varepsilon) \tau_1$. Obtenemos así una contradicción con (2.28).

$$(C2) \quad \|x\| = \alpha, \quad \alpha \leq \|y\| \leq \beta.$$

Es probado como el caso anterior.

$$(C3) \quad \|x\| = \beta, \quad \|y\| \leq \alpha.$$

Este caso es completamente análogo al caso (C1).

$$(C4) \quad \|y\| = \alpha, \quad \alpha \leq \|x\| \leq \beta.$$

Es como el caso (C2).

La condición c) del Corolario 2.3.5 es una consecuencia directa de (2.33).

Probemos ahora la condición d) de este corolario. Para ello, supongamos

que existen $\lambda \geq 0$ y $x \in P$, $\|x\| = \alpha$, tales que

$$x - F_1(x, 0) = \lambda p_1.$$

Entonces

$$x(t) = \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), 0) ds + \lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De donde resulta

$$x(t) \geq \int_{t-\tau_1}^t f(s, x(s), 0) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y por (2.29), tenemos

$$x(t) \geq \int_{t-\tau_1}^t (a(s, 0) - \varepsilon) x(s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $x(t_1) = \min_{t \in [0, \omega]} x(t)$, entonces

$$x(t_1) \geq \int_{t_1-\tau_1}^{t_1} (a_1 - \varepsilon) x(s) ds,$$

pero como $x \neq 0$, tenemos $x(t_1) > 0$. Esto implica

$$x(t_1) \geq (a_1 - \varepsilon) \tau_1 x(t_1),$$

es decir,

$$1 \geq (a_1 - \varepsilon) \tau_1,$$

que es una contradicción con (2.28).

Finalmente, la condición e) del Corolario 2.3.5 se obtiene de la misma manera. $\square$

NOTAS 2.3.7 a) *Las condiciones básicas del teorema anterior son de dos tipos: En primer lugar, un comportamiento adecuado de f y g cuando x e y son suficientemente grandes: f y g son acotadas. En segundo lugar, un comportamiento apropiado de las funciones $\frac{f(t, x, y)}{x}$ y $\frac{g(t, x, y)}{y}$ para x e y suficientemente pequeños. Realmente, podemos sustituir la hipótesis i) por una*

condición más general que incluya a las cantidades

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(t, x, y)}{x} \text{ y } \limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x, y)}{y}.$$

Por otra parte, las condiciones ii) y iii) significan que la interacción entre las dos especies x e y es suficientemente grande como para producir un estado de coexistencia.

b) Analizando la demostración del teorema anterior, deducimos que es posible obtener la misma conclusión si, en lugar de las condiciones $a_1 \tau_1 > 1$ y $b_1 \tau_2 > 1$, suponemos

$$\begin{aligned} \min_{t \in [0, \omega]} \int_{t-\tau_1}^t a(s, y(s)) ds &\geq m_1 > 1, \forall y \in P, \\ \min_{t \in [0, \omega]} \int_{t-\tau_2}^t b(s, x(s)) ds &\geq m_2 > 1, \forall x \in P. \end{aligned}$$

c) Notemos que en el teorema previo no hace falta suponer la monotonía de f y g , como en el Corolario 2.2.4, lo cual es una ventaja de los métodos topológicos con respecto al método de soluciones superiores e inferiores.

d) Es claro que podemos aplicar los resultados abstractos de la subsección anterior para estudiar sistemas más generales que (2.1); por ejemplo sistemas donde $\tau_1 = \tau_1(t)$ y $\tau_2 = \tau_2(t)$ sean funciones periódicas del tiempo t .

Ejemplo 9. Sean $\bar{a}, \bar{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y ω -periódicas ($\omega > 0$) y τ_1, τ_2 constantes positivas tales que

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &> \frac{1}{\tau_1}, \forall t \in \mathbb{R} \\ \bar{b}(t) &> \frac{1}{\tau_2}, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces el sistema de ecuaciones integrales

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t-\tau_1}^t \bar{a}(s) f_1(x(s)) g_1(y(s)) ds, \\ y(t) &= \int_{t-\tau_2}^t \bar{b}(s) f_2(x(s)) g_2(y(s)) ds, \end{aligned}$$

donde $f_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [1, +\infty), \end{cases}$$

$$g_2 = f_1, g_1(y) = 1 + \sin^2 y, \forall y \in [0, +\infty), f_2(x) = 1 + \cos^2(x), \forall x \in [0, +\infty),$$

tiene al menos tres soluciones no triviales: $(x_0, 0), (0, y_0), (x_1, y_1)$ con

$$x_j \in P \setminus \{0\}, \quad j = 0, 1,$$

$$y_j \in P \setminus \{0\}, \quad j = 0, 1.$$

En efecto, es fácil ver que el sistema verifica todas las condiciones del Teorema 2.3.6.

NOTA 2.3.8 *Los resultados abstractos probados en la subsección anterior pueden ser usados en el estudio de otro tipo de problemas. Por ejemplo, (ver [37]), problemas de contorno para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo*

$$x''(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad t \in [0, \pi]$$

$$y''(t) = g(t, x(t), y(t)), \quad t \in [0, \pi]$$

$$x(0) = x(\pi) = y(0) = y(\pi) = 0,$$

donde $f, g : [0, \pi] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ son funciones continuas.

También pueden aplicarse al estudio de problemas de contorno para sistemas elípticos. Esto se hará en otra parte.

PARTE II

ECUACIONES

DIFERENCIALES NO

LINEALES.

Capítulo 3

PROBLEMAS SEMI-POSITÓN EN DOMINIOS ANULARES.

En este capítulo estudiaremos la existencia y la no-existencia de soluciones radiales positivas del problema semi-positón

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda f(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

donde $\lambda > 0$, $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una no-linealidad continua satisfaciendo $f(0) < 0$, y Ω es la corona $\Omega = C(0, R, \widehat{R}) = \{x \in \mathbb{R}^N : R < |x| < \widehat{R}\}$, ($N \geq 3, 0 < R < \widehat{R}$).

Para probar la existencia de dichas soluciones aplicamos el método de tiro expuesto en la próxima sección. Ésta también contiene una serie de preliminares que, por motivos de claridad del texto, deben ser expuestos con anterioridad.

3.1 PRELIMINARES

Como es sabido el problema de existencia de soluciones radiales positivas de (3.1) es equivalente a la existencia de soluciones positivas del problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad R < r < \widehat{R} \\ u(R) &= u(\widehat{R}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Como hemos mencionado antes, el método que utilizaremos para estudiar este problema es el método de tiro. Esta técnica consiste en considerar el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad R < r \\ u(R) &= 0, u'(R) = d, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

y probar, para un conveniente $d > 0$, la existencia de una solución $u(\cdot) = u(\cdot, d, \lambda)$ de (3.3), que depende de d y λ tal que $u > 0$ en $(R, \widehat{R})$ y $u(\widehat{R}) = 0$. Dicha solución es también una solución positiva del problema (3.2). Notése que aquí, en el caso de una corona, el parámetro d del método de tiro es la derivada en R de la solución y no su valor en 0 (como en el caso de una bola). Eso, como ha sido observado en la introducción, cambia y complica las demostraciones en nuestro caso, respecto al caso de una bola.

En esta sección presentaremos algunos resultados técnicos de las soluciones de (3.3) que pueden ser clásicos en la literatura matemática. Para ello y en todo este capítulo, la no-linealidad $f \in C^1([0, +\infty))$ será extendida de forma continua a todo $\mathbb{R}$ tomando

$$f|_{(-\infty, 0)} \equiv f(0)$$

Para empezar, el lema siguiente asegura la existencia de una única solución del problema (3.3) en $[R, +\infty)$ para todo $\lambda, d > 0$.

LEMA 3.1.1 *Sean $\lambda, d > 0$ y $f \in C^1([0, +\infty))$ una función acotada inferiormente. Entonces el problema (3.3) admite una única solución $u(r, d, \lambda)$ definida*

en $[R, +\infty)$. Además, para cada $d > 0$ y cada $M > \frac{2Rd}{N-2}$ existe $\lambda(d) > 0$ tal que

$$\max_{r \in [R, \hat{R}]} |u(r, d, \lambda)| \leq M, \quad \forall \lambda \in (0, \lambda(d)).$$

Demostración. La demostración de este lema será hecha en dos etapas. En primer lugar probaremos la existencia de una única solución local de (3.3), es decir la existencia de $\varepsilon = \varepsilon(d, \lambda) > 0$ tal que (3.3) admite una única solución en $[R, R + \varepsilon]$. En la segunda etapa probaremos que dicha solución se puede extender a todo $[R, +\infty)$.

Etapas 1: (Solución local). Puesto que en la Etapa 2 necesitaremos la existencia y la unicidad de soluciones de (3.3) con condiciones iniciales más generales, será útil probar directamente en esta primera etapa la existencia y la unicidad local para el siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), \quad R_1 < r \\ u(R_1) &= a, u'(R_1) = b \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

con $R_1 \geq R$ fijo.

Multiplicando la ecuación de (3.4) por r^{N-1} obtenemos

$$-(r^{N-1}u'(r))' = \lambda f(u(r))r^{N-1}, \quad R_1 < r$$

y utilizando las condiciones iniciales podemos deducir

$$u'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \left[R_1^{N-1}b - \lambda \int_{R_1}^r s^{N-1} f(u(s)) ds \right], \quad (3.5)$$

de donde, se obtiene la expresión siguiente para u

$$u(r) = a + \frac{bR_1^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R_1^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) - \lambda \int_{R_1}^r \frac{1}{t^{N-1}} \left[\int_{R_1}^t s^{N-1} f(u(s)) ds \right] dt \quad (3.6)$$

Recíprocamente, de una manera elemental se comprueba que una función continua que satisface (3.6) es una solución de (3.4). Entonces para mostrar la existencia y la unicidad de una solución de (3.4) en el intervalo $[R_1, R_1 + \varepsilon]$,

es suficiente probar la existencia y la unicidad de un punto fijo del operador T definido en $X = C([R_1, R_1 + \varepsilon])$ por

$$(Tv)(r) = a + \frac{bR_1^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R_1^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) - \lambda \int_{R_1}^r \frac{1}{t^{N-1}} \left[\int_{R_1}^t s^{N-1} f(u(s)) ds \right] dt, \quad (3.7)$$

para todo $r \in [R_1, R_1 + \varepsilon]$ y $v \in X$. Para ello, sea $\delta > 0$ tal que $\delta > |a|$ y consideremos la bola cerrada $\overline{B}(0, \delta) = \{u \in X : \|u\| \leq \delta\}$. Usando el Teorema del valor medio, obtenemos para todo $u, v \in \overline{B}(0, \delta)$

$$\|Tu - Tv\| \leq \frac{\lambda}{N} \sup_{\xi \in (0, \delta]} |f'(\xi)| \varepsilon(R_1 + \varepsilon) \|u - v\| \quad (3.8)$$

Además, se tiene

$$\|Tu\| \leq |a| + \frac{|b|R_1^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R_1^{N-2}} - \frac{1}{(R_1 + \varepsilon)^{N-2}} \right) + \frac{\lambda}{N} \varepsilon(R_1 + \varepsilon) \sup_{\xi \in [0, \delta]} |f(\xi)|. \quad (3.9)$$

Ahora, por las desigualdades (3.8) y (3.9), es posible elegir $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ (que depende de δ) suficientemente pequeña tal que T es una contracción de $\overline{B}(0, \delta)$ en $\overline{B}(0, \delta)$. Por lo tanto, el operador T admite un punto fijo u en $\overline{B}(0, \delta)$. La unicidad local de solución se deduce, porque es posible tomar δ tan grande como queremos.

Etapa 2: Sea $u(r) = u(r, d, \lambda)$ la única solución de (3.3) (apliquese la etapa 1 con $a = 0$, $b = d$ y $R_1 = R$ en (3.4)) con dominio maximal $[R, R(d, \lambda))$ y probamos por contradicción que $R(d, \lambda) = +\infty$. Supongamos que $R^* = R(d, \lambda) < +\infty$. Como consecuencia de (3.6) y del hecho que f está acotada inferiormente podemos afirmar que u está acotada en $[R, R^*)$. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{dR}{N-2} &\geq \frac{dR^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) \\ &= u(r) + \lambda \int_R^r \frac{1}{t^{N-1}} \left[\int_R^t s^{N-1} f(u(s)) ds \right] dt \\ &\geq u(r) + \lambda \inf_{\xi \in [0, +\infty)} f(\xi) \int_R^{R^*} \left[\frac{1}{t^{N-1}} \int_R^t s^{N-1} ds \right] dt, \end{aligned}$$

para todo $r \in [R, R^*)$. De aquí deducimos la existencia de $K_1 > 0$ tal que

$$u(r) \leq K_1, \quad \forall r \in [R, R^*)$$

De otro lado, usando de nuevo (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} u(r) &\geq \frac{dR^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{r^{N-2}} \right) \\ &\quad - \lambda \max_{\xi \in [0, K_1]} f(\xi) \int_R^{R^*} \left[\frac{1}{t^{N-1}} \int_R^t s^{N-1} ds \right] dt \\ &\geq -K_2, \quad \forall r \in [R, R^*) \end{aligned}$$

para $K_2 > 0$ conveniente. Así, existe $K_3 > 0$ tal que $|u(r)| \leq K_3, \forall r \in [R, R^*)$. Además, si $\{r_n\} \subset [R, R^*)$ es una sucesión convergente a R^* , es sencillo ver, por (3.5), (3.6) y las siguientes desigualdades, que las sucesiones $\{u(r_n)\}$ y $\{u'(r_n)\}$ son ambas de Cauchy. En efecto

$$\begin{aligned} |u'(r_n) - u'(r_m)| &\leq \lambda \left| \int_R^{r_m} \frac{s^{N-1} f(u(s))}{r_m^{N-1}} ds - \int_R^{r_n} \frac{s^{N-1} f(u(s))}{r_n^{N-1}} ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{r_n^{N-1}} - \frac{1}{r_m^{N-1}} \right| dR^{N-1} \\ &\leq \frac{\lambda}{r_m^{N-1}} \left| \int_R^{r_m} s^{N-1} f(u(s)) ds - \int_R^{r_n} s^{N-1} f(u(s)) ds \right| \\ &\quad + \lambda \left| \left(\frac{1}{r_n^{N-1}} - \frac{1}{r_m^{N-1}} \right) \int_R^{r_n} s^{N-1} f(u(s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{r_n^{N-1}} - \frac{1}{r_m^{N-1}} \right| dR^{N-1} \\ &\leq \left| \frac{1}{r_n^{N-1}} - \frac{1}{r_m^{N-1}} \right| dR^{N-1} + \lambda |r_n - r_m| \frac{R^*}{R^{N-1}} \sup_{x \in [-K_3, K_3]} |f(x)| \\ &\quad + \lambda \left| \frac{1}{r_n^{N-1}} - \frac{1}{r_m^{N-1}} \right| \sup_{x \in [-K_3, K_3]} |f(x)| \left(\int_R^{R^*} r^{N-1} dr \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |u(r_n) - u(r_m)| &\leq \lambda \int_{r_m}^{r_n} \left(\frac{1}{s^{N-1}} \int_R^s t^{N-1} f(u(t)) dt \right) ds + \left| \frac{1}{r_n^{N-2}} - \frac{1}{r_m^{N-2}} \right| \frac{dR^{N-1}}{N-2} \\ &\leq \frac{\lambda}{R^{N-1}} |r_n - r_m| \sup_{x \in [-K_3, K_3]} |f(x)| \left(\int_R^{R^*} r^{N-1} dr \right) \\ &\quad + \left| \frac{1}{r_n^{N-2}} - \frac{1}{r_m^{N-2}} \right| \frac{dR^{N-1}}{N-2}. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos la existencia de los límites

$$\lim_{r \rightarrow R^*-} u(r) = a, \quad \lim_{r \rightarrow R^*-} u'(r) = b.$$

Consideremos ahora el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} -v''(r) - \frac{N-1}{r}v'(r) &= \lambda f(v(r)), \quad R^* < r \\ v(R^*) &= a, v'(R^*) = b \end{aligned} \right\}$$

Por la Etapa 1 deducimos la existencia de un número $\varepsilon > 0$ y de una solución $v(r)$ de este problema en el intervalo $[R^*, R^* + \varepsilon]$. Ahora, fácilmente se prueba que

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(r), & \text{si } R \leq r < R^* \\ v(r), & \text{si } R^* \leq r \leq R^* + \varepsilon \end{cases}$$

es una solución de (3.3) en el intervalo $[R, R^* + \varepsilon]$ que contiene al dominio maximal $[R, R_1)$. Claramente eso es una contradicción que prueba que $R^* = +\infty$, lo cual concluye la demostración de la primera parte del lema.

Para probar la segunda parte, fijamos $d > 0$ y consideramos de nuevo el operador definido en (3.7) sobre el espacio $X_0 = C([R, \widehat{R}], \mathbb{R})$ con $R_1 = R, a = 0$ y $b = d$. Tomando $\delta = M > \frac{2dR}{N-2}$ y

$$\lambda(d) = \min \left\{ \frac{M}{2M_1M_2}, \frac{1}{M_1M_3} \right\}$$

con

$$M_1 = \int_R^{\widehat{R}} \frac{1}{t^{N-1}} \left\{ \int_R^t s^{N-1} ds \right\} dt, \quad M_2 = \max_{\xi \in [0, M]} |f(\xi)|, \quad M_3 = \max_{\xi \in [0, M]} |f'(\xi)|,$$

podemos deducir de (3.8) y (3.9) que T es una contracción de la bola cerrada $\overline{B}(0, M, X_0) = \{u \in X_0 : \max_{r \in [R, \widehat{R}]} |u(r)| \leq M\}$ en ella misma. Entonces el único punto fijo del operador T , es decir $u(r, d, \lambda)$ pertenece a $\overline{B}(0, M, X_0)$, quedando así probado el Lema 3.1.1 $\square$

NOTAS 3.1.2 a) La solución $u(., d, \lambda)$ depende de manera continua del par (d, λ) en el sentido que si $\{d_n\}$ es una sucesión convergente a d y $\{\lambda_n\}$ una

sucesión convergente a λ , entonces la sucesión de las funciones $u(., d_n, \lambda_n)$ converge uniformemente a $u(., d, \lambda)$ en todo intervalo acotado. Tenemos también la misma propiedad para la función $u'(., d, \lambda)$.

b) Notése que en el caso más simple que Ω es una bola (ver problema (3.1)) podemos tomar directamente $M = u(0) = d$ como cota de $|u(r, d, \lambda)|$. Esto es consecuencia de los resultados de [55].

3.2 RESULTADOS DE EXISTENCIA

Con el objetivo de probar la existencia de una solución radial positiva del problema de contorno (3.2), haremos un estudio detallado del comportamiento de la solución $u(., d, \lambda)$ del problema de valores iniciales (3.3), donde la función f verifica de aquí adelante las siguientes hipótesis:

(f1) $f \in C^1([0, +\infty))$ y existe $\beta > 0$ tal que $f|_{[0, \beta)} < 0$ y $f|_{(\beta, +\infty)} > 0$,

(f2) $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$,

(f3) la función $h(u) = NF(u) - \frac{N-2}{2}uf(u)$ está acotada inferiormente en $[0, +\infty)$,

(donde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ es una primitiva de f).

(f4) f es estrictamente creciente en $(\beta, +\infty)$.

Observemos que la hipótesis (f1) implica que la función f cambia de signo una vez en $[0, +\infty)$: β es su único cero. Asimismo, (f2) es una hipótesis de **superlinealidad** de f en $+\infty$. De otra parte, la condición técnica (f3) se debe a una cierta estima que necesitaremos en una identidad de tipo "Pohozaev" (ver Lema 3.2.3).

LEMA 3.2.1 Sea $d_0 > 0$ y supongamos (f1) y (f4). Entonces existe $\lambda_1 = \lambda_1(d_0) > 0$ tal que la única solución $u(., d_0, \lambda)$ de (3.3) verifica

$$u(r, d_0, \lambda) > 0, \quad \forall r \in (R, \widehat{R}], \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Demostración. Para un $\lambda > 0$ consideremos el conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ r \in (R, \widehat{R}] / u(\cdot) = u(\cdot, d_0, \lambda) \text{ es creciente en } (R, r) \right\}$$

Como $u'(R) = d_0 > 0$, $\mathcal{E}$ es no vacío y claramente acotado superiormente. Sea $r_1 = \sup \mathcal{E}$ (que depende de λ). Pueden ocurrir dos casos:

1. $r_1 = \widehat{R}$
2. $r_1 < \widehat{R}$

En el primer caso, es claro que $u(r) = u(r, d_0, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}]$. En el segundo caso, probaremos también que, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, $u(r, d_0, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}]$, lo cual concluye la demostración del Lema 3.2.1. Supongamos así que $r_1 < \widehat{R}$. Entonces $u'(r_1) = 0$ y usando (3.5) obtenemos

$$\lambda \int_R^{r_1} s^{N-1} f(u(s)) ds = d_0 R_1^{N-1} > 0,$$

de donde, teniendo en cuenta que $u(s) \leq u(r_1) \forall s \in [R, r_1]$ y (f1) deducimos que $u(r_1) > \beta$.

Por tanto, el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ r \in [r_1, \widehat{R}] / u(t) \geq \beta \quad \forall t \in [r_1, r] \right\}$$

es no vacío y acotado. Sea $r_2 = \sup \mathcal{F} > r_1$. La demostración concluirá si somos capaces de probar, para λ suficientemente pequeño, que $r_2 = \widehat{R}$. Para ello, usando de nuevo (f1) y (3.5), observemos que

$$u'(r) = -\frac{\lambda}{r^{N-1}} \int_{r_1}^r t^{N-1} f(u(t)) dt < 0, \quad \forall r \in \mathcal{F} \setminus \{r_1\} \quad (3.10)$$

y así

$$u(r) \leq u(r_1), \quad \forall r \in [R, r_2]$$

Ahora el Teorema del valor medio implica la existencia de $c \in (r_1, r_2)$ tal que $u(r_2) = u(r_1) + u'(c)(r_2 - r_1)$. Por (f4) tenemos

$$\begin{aligned}
u'(c) &= -\frac{\lambda}{c^{N-1}} \int_{r_1}^c t^{N-1} f(u(t)) dt \geq -\frac{\lambda}{c^{N-1}} f(u(r_1)) \int_{r_1}^c t^{N-1} dt \\
&\geq -\frac{\lambda c}{N} f(u(r_1)) \geq -\frac{\lambda \widehat{R}}{N} f(u(r_1)),
\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
u(r_2) &\geq u(r_1) - \frac{\lambda \widehat{R}}{N} f(u(r_1))(r_2 - r_1) \\
&> u(r_1) - \frac{\lambda \widehat{R}}{N} f(u(r_1))(\widehat{R} - R).
\end{aligned}$$

Además, si $M = M(d_0) > 0$ y $\lambda(d_0) > 0$ están dados por el Lema 3.1.1, obtenemos $\beta < u(r_1) \leq M$ para todo $\lambda \in (0, \lambda(d_0))$. Tomando $K = K(d_0) > 0$ tal que

$$f(\xi) < K(\xi - \beta), \quad \forall \xi \in (\beta, M]$$

podemos deducir

$$u(r_2) > u(r_1) - \frac{\lambda K \widehat{R}}{N} (\widehat{R} - R)(u(r_1) - \beta), \quad \forall \lambda \in (0, \lambda(d_0)).$$

Finalmente, considerando $\lambda_1 = \min\{\lambda(d_0), \frac{N}{\widehat{R}(\widehat{R}-R)K}\}$, tenemos que para $\lambda \in (0, \lambda_1)$,

$$u(r_2) > u(r_1) - (u(r_1) - \beta) = \beta.$$

Así $r_2 \in \mathcal{F}$, es decir $r_2 = \widehat{R}$. $\square$

En el siguiente resultado estudiaremos el comportamiento asintótico de

$$r_1(d, \lambda) = \sup\{r \in (R, \widehat{R}) / u(\cdot) = u(\cdot, d, \lambda) \text{ es creciente en } (R, r)\}$$

y de $u(r_1, d, \lambda)$ cuando d tiende a $+\infty$. La demostración utiliza un teorema de comparación de Sturm, donde la superlinealidad de f es esencial.

LEMA 3.2.2 *Sea $\lambda > 0$ y supongamos $(f_1), (f_2)$ y (f_4) . Entonces*

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} r_1(d, \lambda) = R \tag{3.11}$$

y

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} u(r_1, d, \lambda) = +\infty \quad (3.12)$$

Demostración. Probaremos la primera parte de este lema por contradicción.

Si (3.11) no es cierto, entonces existe $R_0 \in (R, \widehat{R})$ y una sucesión $\{d_n\} \subset (0, +\infty)$ que diverge a $+\infty$ tal que $u_n = u(., d_n, \lambda)$ verifica

$$u_n(r) > 0, \quad u'_n(r) \geq 0, \quad \forall r \in (R, R_0], \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

Si $\bar{r} = \frac{R_0 + R}{2}$, podemos afirmar que la sucesión $\{u_n(\bar{r})\}$ no está acotada. Ciertamente, en caso contrario, existiría una constante $K > 0$ tal que

$$0 \leq u_n(r) \leq u_n(\bar{r}) \leq K, \quad \forall r \in [R, \bar{r}], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, por (f4) y (3.6) (con $R_1 = R, a = 0$ y $b = d_n$), tenemos

$$\begin{aligned} K \geq u_n(\bar{r}) &= \frac{d_n R^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{\bar{r}^{N-2}} \right) - \lambda \int_R^{\bar{r}} \frac{1}{t^{N-1}} \left[\int_R^t s^{N-1} f(u_n(s)) ds \right] dt \\ &\geq \frac{d_n R^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{\bar{r}^{N-2}} \right) - \lambda \int_R^{\bar{r}} \frac{1}{t^{N-1}} \left[\int_R^t s^{N-1} f(K) ds \right] dt \\ &\geq \frac{d_n R^{N-1}}{N-2} \left(\frac{1}{R^{N-2}} - \frac{1}{\bar{r}^{N-2}} \right) - \lambda \frac{f(K) \bar{r}^2}{2N} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción pues $d_n \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

En consecuencia, pasando a una subsucesión de $\{d_n\}$, si es necesario, podemos suponer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\bar{r}) = +\infty$. Consideremos ahora la sucesión $\{M_n\}$ definida por

$$M_n = \inf \left\{ \frac{f(u_n(r))}{u_n(r)} / r \in (\bar{r}, R_0) \right\}.$$

Observando que

$$\left\{ \frac{f(u_n(r))}{u_n(r)} / r \in (\bar{r}, R_0) \right\} \subset \left\{ \frac{f(s)}{s} / s \geq u_n(\bar{r}) \right\},$$

resulta

$$M_n \geq \inf \left\{ \frac{f(s)}{s} / s \geq u_n(\bar{r}) \right\}$$

y así obtenemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$, como consecuencia de (f2) y ser $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\bar{r}) = +\infty$.

Sea ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda M_{n_0} > \mu_3,$$

donde μ_3 es el tercer valor propio del operador diferencial $-\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr}\right]$ en $(\bar{r}, R_0)$ con condiciones de Dirichlet en la frontera (ver [47]) y tomemos $\phi_3 \neq 0$ una función propia asociada a μ_3 , es decir, verificando

$$\begin{aligned} \phi_3''(r) + \frac{N-1}{r} \phi_3'(r) + \mu_3 \phi_3(r) &= 0, \quad \bar{r} < r < R_0 \\ \phi_3(\bar{r}) &= 0 = \phi_3(R_0) \end{aligned}$$

Se sabe que ϕ_3 tiene tres ceros en $(\bar{r}, R_0)$.

Teniendo en cuenta que $\lambda \frac{f(u_{n_0})}{u_{n_0}} \geq \lambda M_{n_0} > \mu_3$ en $(\bar{r}, R_0)$ y que u_{n_0} verifica la ecuación

$$u_{n_0}''(r) + \frac{N-1}{r} u_{n_0}'(r) + \lambda \frac{f(u_{n_0})}{u_{n_0}} u_{n_0} = 0, \quad \bar{r} < r < R_0$$

deducimos del Teorema de Comparación de Sturm [61] (aplicado a u_{n_0} y ϕ_3) que u_{n_0} tiene al menos dos ceros en $(\bar{r}, R_0)$. Eso es una contradicción con (3.13) que demuestra (3.11).

Para probar la segunda parte del lema, tomemos r_2 como en la demostración del Lema 3.2.1. Por (f4) y (3.10),

$$u(r_1) = \max_{r \in [R, r_2]} u(r) > \beta$$

y

$$0 > u'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} [dR^{N-1} - \lambda \int_R^r t^{N-1} f(u(t)) dt]$$

$$\geq \frac{dR^{N-1}}{R^{N-1}} - \frac{\lambda r}{N} f(u(r_1)), \quad \forall r \in (r_1, r_2),$$

de donde obtenemos

$$f(u(r_1)) \geq \frac{NdR^{N-1}}{\lambda R^N},$$

quedando así probado (3.12). $\square$

El lema anterior sirve para probar el Lema 3.2.4 que es esencial para la demostración del teorema de existencia. Necesitaremos también una identidad del tipo "Pohozaev" (ver [38]) cuya demostración incluimos por claridad de la exposición:

LEMA 3.2.3 Sean $\lambda, d > 0$ y $u(r) = u(r, d, \lambda)$ la única solución de (3.3). Definimos la función H en $[R, +\infty)$ por

$$H(r) = \frac{ru'^2(r)}{2} + \lambda r F(u(r)) + \frac{N-2}{2} u(r)u'(r), \quad \forall r \in [R, +\infty).$$

Entonces

$$r^{N-1}H(r) = t^{N-1}H(t) + \lambda \int_t^r s^{N-1} [NF(u(s)) - \frac{N-2}{2} f(u(s))u(s)] ds \quad (3.14)$$

para todo $R \leq t \leq r$.

Demostración. Multiplicamos la ecuación de (3.3) por $s^{N-1}u'$ e integramos entre t y r , para obtener

$$-\int_t^r s^N u' u'' ds - (N-1) \int_t^r s^N u'^2 ds = \lambda \int_t^r s^N f(u) u' ds. \quad (3.15)$$

Pero

$$\int_t^r s^N u' u'' ds = \frac{1}{2} [s^N u'^2]_t^r - \frac{1}{2} \int_t^r N s^{N-1} u'^2 ds$$

y

$$\int_t^r s^N f(u) u' ds = \left[s^N F(u) \right]_t^r - \int_t^r N s^{N-1} F(u) ds,$$

donde $F(s) = \int_0^s f(s) ds$. Por lo tanto, (3.15) es equivalente a

$$-\frac{1}{2} \left[s^N u'^2 \right]_t^r - \lambda \left[s^N F(u) \right]_t^r = \left(\frac{N-2}{2} \right) \int_t^r s^{N-1} u'^2 ds - \lambda N \int_t^r s^{N-1} F(u) ds \quad (3.16)$$

Multiplicando de nuevo la ecuación de (3.3) por $-\left(\frac{N-2}{2}\right) s^{N-1} u$ obtenemos

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{N-2}{2}\right) \left[-s^{N-1} u'' u - (N-1) s^{N-2} u' u \right] = \\ & = -\left(\frac{N-2}{2}\right) \left[s^{N-1} u'^2 - \left(s^{N-1} u' u \right)' \right] = -\left(\frac{N-2}{2}\right) \lambda s^{N-1} f(u) u \end{aligned}$$

e integrando esta igualdad entre t y r tenemos

$$\left(\frac{N-2}{2} \right) \left[s^{N-1} u' u \right]_t^r = -\lambda \left(\frac{N-2}{2} \right) \int_t^r s^{N-1} f(u) u ds + \left(\frac{N-2}{2} \right) \int_t^r s^{N-1} u'^2 ds. \quad (3.17)$$

Restando ahora (3.16) de (3.17), deducimos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} s^N u'^2 + \lambda s^N F(u) + \frac{N-2}{2} s^{N-1} u' u \right]_t^r = \left[s^{N-1} H(s) \right]_t^r = \\ & = \lambda \int_t^r s^{N-1} [N F(u) - \frac{N-2}{2} f(u) u] ds \end{aligned}$$

y, así, (3.14) queda probado. $\square$

LEMA 3.2.4 *Supongamos $(f_1 - f_4)$ y sea $\gamma_1 > 0$ un número positivo. Entonces existe $\lambda_2 > 0$ tal que*

a) Para cualquier $\lambda \in (0, \lambda_2)$ y para cualquier $d \geq \gamma_1$, la única solución de (3.3) verifica

$$u^2(r, d, \lambda) + u'^2(r, d, \lambda) > 0, \quad \forall r \in [R, \widehat{R}].$$

b) Para cualquier $\lambda \in (0, \lambda_2)$, existe $d \geq \gamma_1$ tal que $u(r, d, \lambda) < 0$ para algún $r \in (R, \widehat{R}]$.

Demostración. Sean $\lambda > 0, d \geq \gamma_1$ y $u(r, d, \lambda)$ la única solución de (3.3).

Tomando $t = R$ en la identidad (3.14), obtenemos por (f3) que

$$\begin{aligned} r^{N-1}H(r) &= \frac{R^N d^2}{2} + \lambda \int_R^r s^{N-1} [NF(u(s)) - \frac{N-2}{2}f(u(s))u(s)] ds \\ &\geq \frac{R^N d^2}{2} + \lambda m \left(\frac{r^N}{N} - \frac{R^N}{N} \right) \\ &\geq \frac{R^N \gamma_1^2}{2} + \lambda m \left(\frac{\widehat{R}^N}{N} - \frac{R^N}{N} \right), \quad \forall r \in [R, \widehat{R}], \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $m < 0$ es una cota inferior de h . Así deducimos la existencia de $\lambda_2 > 0$ tal que

$$H(r) > 0, \quad \forall r \in [R, \widehat{R}], \quad \forall d \geq \gamma_1, \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_2) \quad (3.19)$$

y, como consecuencia directa, que

$$u^2(r) + u'^2(r) > 0, \quad \forall r \in [R, \widehat{R}], \quad \forall d \geq \gamma_1, \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_2),$$

lo cual concluye la demostración de a).

Para probar b) razonemos por contradicción: Fijamos $\lambda \in (0, \lambda_2)$ y supongamos que $u(r, d, \lambda) \geq 0, \forall r \in [R, \widehat{R}], \forall d \geq \gamma_1$. Sea $\rho > 0$ de manera que existe una función ω satisfaciendo

$$\begin{aligned} \omega'' + \frac{N-1}{r}\omega' + \rho\omega &= 0 \\ \omega(0) &= 1, \quad \omega'(0) = 0, \end{aligned}$$

cuyo primer cero es $\frac{\widehat{R}-R}{4}$. Por [55], $\omega(r) \geq 0$ y $\omega'(r) < 0$ para todo $r \in (0, \frac{\widehat{R}-R}{4}]$.

Además, por (f2), existe $d_0 = d_0(\lambda) > \gamma_1$ tal que

$$\frac{f(u)}{u} > \frac{\rho}{\lambda}, \quad \forall u \geq d_0 \quad (3.20)$$

De otro lado, si $r_1 = r_1(d, \lambda)$ y $r_2 = r_2(d, \lambda)$ son los números definidos en la demostración del Lema 3.2.1, podemos suponer, por el Lema 3.2.2, que $r_1(d, \lambda) < R + \frac{\widehat{R}-R}{4} < \widehat{R}$ y $u(r_1, d, \lambda) > d_0$ para todo $d \geq d_0$.

Sea $r \in [r_1, \widehat{R}]$ tal que $u'(r, d, \lambda) = 0$ ($d \geq d_0$). Observemos que, por (3.19), $H(r) = \lambda r F(u(r)) > 0$. Entonces $u(r) > \theta$, donde θ , por (f1) y (f2), es el

único cero de F en $(0, +\infty)$. Usando la ecuación (3.3), obtenemos $u''(r, d, \lambda) = -\lambda f(u(r, d, \lambda)) < 0$. En conclusión, todo punto crítico $r \in [r_1, \widehat{R}]$ de $u(\cdot, d, \lambda)$ es un máximo local. Así, teniendo en cuenta las definiciones de r_1 y r_2 , deducimos

$$u'(r, d, \lambda) < 0, \forall r \in (r_1, \widehat{R}], \forall d \geq d_0. \quad (3.21)$$

Definimos ahora $v(r) = u(r_1)w(r - r_1)$ y observamos que v satisface

$$v''(r) + \frac{N-1}{r-r_1}v'(r) + \rho v(r) = 0, \quad r_1 < r < r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}$$

con $v(r_1) = u(r_1)$, $v'(r_1) = 0$, $v(r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}) = 0$ y

$$v(r) > 0, \quad v'(r) \leq 0, \quad \forall r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}\right).$$

Entonces

$$v''(r) + \frac{N-1}{r}v'(r) + \rho v(r) \geq 0, \quad \forall r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}\right) \quad (3.22)$$

Ahora podemos afirmar que para todo $d \geq d_0$ existe $r \in (r_1, r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4})$ tal que $u(r, d, \lambda) < d_0$. Supongamos lo contrario, es decir

$$u(r) = u(r, d, \lambda) \geq d_0, \quad \forall d \geq d_0, \forall r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}\right).$$

Entonces, por (3.20),

$$\frac{f(u(r))}{u(r)} > \frac{\rho}{\lambda}, \quad \forall r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}\right).$$

Multiplicando la ecuación de (3.3) por $r^{N-1}v(r)$ y la desigualdad (3.22) por $r^{N-1}u(r) \geq 0$ y haciendo la diferencia llegamos a

$$(r^{N-1}uv' - r^{N-1}u'v)' \geq r^{N-1}(\lambda f(u) - \rho u)v, \quad \forall r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R} - R}{4}\right),$$

de donde, integrando esta última desigualdad entre r_1 y $r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}$, concluimos

$$\begin{aligned} 0 &\geq (r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4})^{N-1} u(r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}) v'(r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}) = \\ &= \int_{r_1}^{r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}} (r^{N-1} u v' - r^{N-1} u' v)' dr \geq \int_{r_1}^{r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4}} r^{N-1} (\lambda f(u) - \rho u) v dr > 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Entonces

$$\forall d \geq d_0 \exists r \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4} \right) \text{ tal que } u(r, d, \lambda) < d_0,$$

y así, como $u(r_1, d, \lambda) > d_0$, existe $r^* \in \left(r_1, r_1 + \frac{\widehat{R}-R}{4} \right)$ tal que $u(r^*, d, \lambda) = d_0$.

Consideremos la función "Energía" $E(r, d, \lambda) = \frac{u'(r, d, \lambda)^2}{2} + \lambda F(u(r, d, \lambda))$, para $r \geq R$. Ya que $H(r) = rE(r) + \frac{N-2}{2}u(r)u'(r)$, deducimos de (3.18) y (3.21) que

$$\begin{aligned} r^N E(r, d, \lambda) &\geq r^{N-1} H(r, d, \lambda) \\ &\geq \frac{R^N d^2}{2} + \lambda m \left(\frac{\widehat{R}^N}{N} - \frac{R^N}{N} \right), \quad \forall r \in [r_1, \widehat{R}]. \end{aligned}$$

Así, $\lim_{d \rightarrow +\infty} E(r, d, \lambda) = +\infty$ uniformemente en $[r_1, \widehat{R}]$, y existe $d_1 = d_1(\lambda) \geq d_0$ tal que

$$E(r, d, \lambda) = \frac{u'(r)^2}{2} + \lambda F(u(r)) \geq \lambda F(d_0) + \frac{2}{(\widehat{R}-R)^2} d_0^2, \quad \forall r \in [r_1, \widehat{R}], \forall d \geq d_1.$$

Ya que $F(d_0) \geq F(u(r))$, $\forall r \in [r^*, \widehat{R}]$, nos queda

$$\frac{u'(r)^2}{2} \geq \frac{2}{(\widehat{R}-R)^2} d_0^2, \quad \forall r \in [r^*, \widehat{R}], \forall d \geq d_1.$$

Usando de nuevo (3.21), obtenemos

$$u'(r) \leq -\frac{2d_0}{(\widehat{R}-R)}, \quad \forall r \in [r^*, \widehat{R}], \forall d \geq d_1.$$

Esta acotación de $u'(r)$ y el Teorema del valor medio implican la existencia de $c \in \left(r^*, \frac{\widehat{R}-R}{2} \right)$ tal que

$$u\left(r^* + \frac{\widehat{R}-R}{2}\right) = u(r^*) + u'(c)\left(\frac{\widehat{R}-R}{2}\right) \leq u(r^*) - d_0 = 0$$

con $u'(r^* + \frac{\widehat{R}-R}{2}) < 0$. Eso es una contradicción puesto que $u \geq 0$ en $[R, \widehat{R}]$. Queda así probada la segunda parte del lema. $\square$

Ahora y como consecuencia de los Lemas 3.2.1 y 3.2.4 podemos probar nuestro resultado de existencia de una solución positiva de (3.2), es decir una solución radial positiva de (3.1).

TEOREMA 3.2.5 *Supongamos (f1—f4). Entonces existe $\lambda_* > 0$ tal que (3.1) admite al menos una solución radial positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$.*

Demostración. Sea $d_0 > 0$. Por Lema 3.2.1 y 3.2.4, existe $\lambda_* > 0$ tal que si $\lambda \in (0, \lambda_*)$ entonces

- i) $u(r, d_0, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}]$,
- ii) $u'^2(r, d, \lambda) + u^2(r, d, \lambda) > 0, \forall r \in [R, \widehat{R}], \forall d \geq d_0$,
- iii) Existe $d_1 > d_0$ y $r \in (R, \widehat{R}]$ tal que $u(r, d_1, \lambda) < 0$.

Definimos

$$\mathcal{G} = \{d \geq d_0 / u(r, \bar{d}, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}), \forall \bar{d} \in [d_0, d]\}$$

Observemos que, por i), $d_0 \in \mathcal{G}$. Luego $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Además, por iii), $\mathcal{G}$ está acotado superiormente por d_1 . Sea $d^* = \sup \mathcal{G}$. Claramente, por las Notas 3.1.2 a),

$$u(r, d^*, \lambda) \geq 0, \forall r \in [R, \widehat{R}],$$

y así $d^* < d_1$. Observemos que si $u(r, d^*, \lambda) = 0$ para algún $r \in (R, \widehat{R})$, entonces $u'(r, d^*, \lambda) = 0$, que es una contradicción con ii). Por tanto,

$$u(r, d^*, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}). \quad (3.23)$$

El lema estará probado (tomando $u(., d^*, \lambda)$ como solución) si somos capaces de mostrar que $u(\widehat{R}, d^*, \lambda) = 0$. Lo haremos por contradicción. Supongamos $u(\widehat{R}, d^*, \lambda) > 0$. Entonces por las Notas 3.1.2 a), (3.23) y $u'(r, d^*, \lambda) = d^*$, se

deduce

$$u(r, d, \lambda) > 0, \forall r \in (R, \widehat{R}], \forall d \in (d^*, d^* + \delta],$$

con $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Por tanto $d^* + \delta \in \mathcal{G}$ lo cual contradice la definición de d^* y concluye la demostración del Teorema. $\square$

NOTA 3.2.6 *Obsérvese que el método de tiro nos permite probar el Teorema 3.2.5 mediante una herramienta muy elemental, a saber una versión simple del Teorema de Sturm y el Teorema del valor medio.*

Las técnicas anteriores no sólo permiten estudiar el caso de un dominio anular, sino que de una forma más simple aún podemos probar, para el caso de una bola, el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2.7 *Supongamos (f_1-f_4) . Entonces existe $\lambda_* > 0$ tal que el problema*

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda f(u(x)), & |x| < 1 \\ u(x) &= 0, & |x| = 1 \end{aligned} \right\}$$

admite al menos una solución positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda_)$.*

Idea de la demostración. En este caso, consideramos el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= \lambda f(u(r)), & 0 < r \\ u(0) &= d, & u'(0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Argumentos similares a los desarrollados en los Lemas 3.2.1 y 3.2.4 permiten probar que, dado $d_0 > 0$, existe $\lambda_* > 0$ tal que si $\lambda \in (0, \lambda_*)$ entonces

- i) $u(r, d_0, \lambda) > 0, \forall r \in [0, 1],$
- ii) $u'^2(r, d, \lambda) + u^2(r, d, \lambda) > 0, \forall r \in [0, 1], \forall d \geq d_0,$
- iii) Existen $d_1 > d_0$ y $r \in (0, 1]$ tales que $u(r, d_1, \lambda) < 0$.

La demostración se concluye en una forma análoga a la hecha en la prueba anterior. $\square$

NOTA 3.2.8 *Notemos que en el caso de la bola, Castro y Shivaji en [38] prue-*

ban una teorema de existencia bajo las hipótesis (f1), (f2), (f4) y

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left[\frac{u}{f(u)} \right]^{\frac{N}{2}} \left[F(ku) - \frac{N-2}{2N} u f(u) \right] = +\infty$$

para un $k \in (0, 1)$. Es claro que (f3) es más general que esta hipótesis. Así, el Teorema 3.2.7 mejora el de Castro y Shivaji.

3.3 RESULTADOS DE NO EXISTENCIA

El Teorema 3.2.5 de la sección anterior asegura la existencia de soluciones positivas cuando λ es suficientemente pequeña. A continuación, probaremos que, en el caso semi-positón, si se verifican (f1) y (f2), entonces no existen soluciones positivas radiales de (3.1) para λ suficientemente grande. Los métodos utilizados en esta sección están basados en una "cota a priori" de la norma en $L^\infty(\Omega)$ de una posible solución no negativa y radial de (3.1) (ver Lema 3.3.1) y un estudio detallado del comportamiento cualitativo de la posible solución. En lo que sigue, (f1) y (f2) denotan las hipótesis impuestas en la sección anterior. Además, seguimos denotando β (respectivamente θ) al único cero de f (respectivamente de $F = \int_0^s f(s)ds$). Sea finalmente $R_0 = \frac{R+\widehat{R}}{2}$. Comenzamos con el primer lema técnico:

LEMA 3.3.1 Sea $f \in C^1([0, +\infty))$ una función satisfaciendo (f1) y (f2). Entonces para cualquier $r \in (R_0, \widehat{R}]$ existe un número $M = M(r) > 0$ tal que

$$u_\lambda(r) \leq M$$

para cualquier solución no negativa u_λ de (3.2) con $\lambda > 2$.

Demostración. Sea $\phi_1 > 0$ una función propia asociada al primer valor propio $\mu_1 > 0$ del problema de valores propios

$$\left. \begin{aligned} -(r^{N-1}v')' &= \mu r^{N-1}v, \quad R < r < \widehat{R} \\ v(R) &= v(\widehat{R}) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Multiplicando la ecuación de (3.2) por $r^{N-1}\phi_1(r)$ e integrando entre R y $\widehat{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} u'_\lambda(r) \phi'_1(r) dr &= - \int_R^{\widehat{R}} (r^{N-1} u'_\lambda(r))' \phi_1(r) dr \\ &= \lambda \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} f(u_\lambda(r)) \phi_1(r) dr\end{aligned}\tag{3.24}$$

De otro lado, multiplicando la ecuación

$$-(r^{N-1} \phi'_1(r))' = \mu_1 r^{N-1} \phi_1(r), (R < r < \widehat{R})$$

por u_λ e integrando de nuevo entre R y $\widehat{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} u'_\lambda(r) \phi'_1(r) dr &= - \int_R^{\widehat{R}} (r^{N-1} \phi'_1(r))' u_\lambda(r) dr \\ &= \mu_1 \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} \phi_1(r) u_\lambda(r) dr\end{aligned}$$

Combinando estas identidades integrales, resulta

$$\mu_1 \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} \phi_1(r) u_\lambda(r) dr = \lambda \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} f(u_\lambda(r)) \phi_1(r) dr.$$

Pero, entonces eligiendo, por (f2), $\mu > \frac{\mu_1}{2}$ y $c > 0$ tales que

$$f(s) \geq \mu s - c, \forall s \geq 0$$

deducimos

$$\mu_1 \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} \phi_1(r) u_\lambda(r) dr \geq \lambda \mu \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} u_\lambda(r) \phi_1(r) dr - \lambda c \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} \phi_1(r) dr.$$

De aquí se obtiene

$$\int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} u_\lambda(r) \phi_1(r) dr \leq \frac{\lambda k}{\lambda \mu - \mu_1} \leq \frac{k}{\mu - \frac{\mu_1}{2}} \equiv A, \forall \lambda > 2,$$

con $k = c \int_R^{\widehat{R}} r^{N-1} \phi_1(r) dr > 0$ y $A > 0$ (notése que A no depende de $\lambda > 2$).

Tomemos ahora $r \in (R_0, \widehat{R}]$ arbitrario y elijamos $\delta \in (0, r - R_0)$. Teniendo en cuenta que u_λ es decreciente en $(R_0, \widehat{R})$ (ver [55]), tenemos

$$\begin{aligned} u_\lambda(r) &\leq \frac{\int_{r-\delta}^r t^{N-1} u_\lambda(t) \phi_1(t) dt}{\int_{r-\delta}^r t^{N-1} \phi_1(t) dt} \\ &\leq \frac{\int_R^{\widehat{R}} t^{N-1} u_\lambda(t) \phi_1(t) dt}{\int_{r-\delta}^r t^{N-1} \phi_1(t) dt} \\ &\leq \frac{A}{\int_{r-\delta}^r t^{N-1} \phi_1(t) dt} \equiv M, \quad \forall \lambda > 2. \end{aligned}$$

Queda así probado este lema. $\square$

LEMA 3.3.2 *Supongamos (f1) y (f2). Sean $R_1 \in (R_0, \widehat{R}]$ y $c \in (\beta, \theta)$. Entonces existe $\lambda_1 > 0$ tal que para toda solución no negativa u_λ de (3.2) con $\lambda \geq \lambda_1$, existe $t_1 = t_1(\lambda) \in (R_0, R_1]$ satisfaciendo $u_\lambda(t_1) < c$.*

Demostración. Razonaremos por contradicción y supondremos que existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ que diverge a $+\infty$ tal que

$$u_{\lambda_n}(r) \geq c, \quad \forall r \in (R_0, R_1], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos

$$\bar{t}_n = \max\{r \in (R, \widehat{R}) : u'_{\lambda_n}(r) = 0\}.$$

Usando (3.5) (con $R_1 = R$, $a = 0$ y $b = d$), tenemos

$$u'_\lambda(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \left[R^{N-1} d - \lambda \int_R^r s^{N-1} f(u_\lambda(s)) ds \right], \quad \forall r \in [R, \widehat{R}].$$

En particular

$$0 = u'_{\lambda_n}(\bar{t}_n) = \frac{1}{\bar{t}_n^{N-1}} \left[R^{N-1}d - \lambda_n \int_R^{\bar{t}_n} s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds \right],$$

es decir

$$R^{N-1}d = \lambda_n \int_R^{\bar{t}_n} s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds.$$

Así,

$$\begin{aligned} u'_{\lambda_n}(r) &= \frac{1}{r^{N-1}} \left[\lambda_n \int_R^{\bar{t}_n} s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds - \lambda_n \int_R^r s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds \right] \\ &= -\frac{\lambda_n}{r^{N-1}} \int_{\bar{t}_n}^r s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds, \quad \forall r \in [R, \widehat{R}]. \end{aligned}$$

Ahora como, por [55], se sabe que $\bar{t}_n \leq R_0$ y u_{λ_n} es decreciente en $(\bar{t}_n, \widehat{R})$,

$$\begin{aligned} u'_{\lambda_n}(r) &= -\frac{\lambda_n}{r^{N-1}} \int_{\bar{t}_n}^r s^{N-1} f(u_{\lambda_n}(s)) ds \\ &\leq -\frac{\lambda_n}{r^{N-1}} m \int_{\bar{t}_n}^r s^{N-1} ds \\ &\leq -\frac{\lambda_n}{r^{N-1}} m \int_{R_0}^r s^{N-1} ds \\ &= -\frac{\lambda_n}{r^{N-1}} m \left[\frac{r^N}{N} - \frac{R_0^N}{N} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in (R_0, R_1], \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde

$$m = \min\{f(s) / s \geq c\} > 0, \quad (\beta < c).$$

Para llegar a una contradicción aplicamos el Teorema del valor medio a u_{λ_n} en un intervalo $(r_1, r_2) \subset (R_0, \widehat{R}]$. Entonces existe $s_n = s(\lambda_n) \in (r_1, r_2)$ tal que

$$u_{\lambda_n}(r_2) = u_{\lambda_n}(r_1) + u'_{\lambda_n}(s_n)(r_2 - r_1).$$

El Lema 3.3.1 implica la existencia de una constante $M = M(r_1) > 0$ tal que

$$u_{\lambda_n}(r_1) \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y usando (3.25) obtenemos

$$u_{\lambda_n}(r_2) \leq M - \frac{\lambda_n}{r^{N-1}} m \left[\frac{s_n^N}{N} - \frac{R_0^N}{N} \right] (r_2 - r_1), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo que deducimos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\lambda_n}(r_2) = -\infty,$$

lo cual es una contradicción porque $u_{\lambda_n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

LEMA 3.3.3 *Supongamos (f1). Sean $R_2 \in (R_0, \widehat{R}]$ y $\bar{c} > 1$. Entonces existe $\lambda_2 > 0$ tal que toda solución no negativa u_λ de (3.2) con $\lambda \geq \lambda_2$ verifica*

$$\frac{\beta}{\bar{c}} \in u_\lambda([R_2, \widehat{R}]).$$

Demostración. Supongamos que $u = u_\lambda$ es una solución no negativa de (3.2) y denotemos por

$$b_\lambda = \max\{r \in (R, \widehat{R}) / u(r) = \frac{\beta}{\bar{c}}\}.$$

Para demostrar el lema, bastará probar que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} b_\lambda = \widehat{R}.$$

Para ello, observemos que multiplicando la ecuación de (3.2) por r^{N-1} , integrándola entre b_λ y $\widehat{R}$ y usando que

$$u(r) < \frac{\beta}{\bar{c}}, \quad \forall r \in (b_\lambda, \widehat{R}],$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} (r^{N-1} u'(r))' dr &= - \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} \lambda r^{N-1} f(u(r)) dr \\ &\geq \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} \lambda r^{N-1} K dr, \end{aligned}$$

donde

$$K = -\max\{f(s)/s \mid s \in [0, \frac{\beta}{c}]\} > 0.$$

Entonces

$$\widehat{R}^{N-1}u'(\widehat{R}) - b_\lambda^{N-1}u'(b_\lambda) \geq \frac{\lambda}{N}K(\widehat{R}^N - b_\lambda^N) > 0. \quad (3.26)$$

De otra parte, multiplicando de nuevo la misma ecuación por $r^{2(N-1)}u'(r)$ e integrándola entre b_λ y $\widehat{R}$, también deducimos

$$\begin{aligned} & - \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} [u''(r)u'(r)r^{2(N-1)} - (N-1)r^{2N-3}u'(r)^2]dr = \\ & = \lambda \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} f(u(r))r^{2(N-1)}u'(r)dr, \end{aligned}$$

es decir

$$- \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} [r^{N-1}u'(r)]'u'(r)r^{N-1}dr = \lambda \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} [F(u(r))]'r^{2(N-1)}dr.$$

Ahora, mediante una integración por partes en los dos miembros de esta ecuación, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[b_\lambda^{2(N-1)}u'(b_\lambda)^2 - \widehat{R}^{2(N-1)}u'(\widehat{R})^2] &= -\lambda b_\lambda^{2(N-1)}F(\frac{\beta}{c}) \\ &\quad - 2(N-1)\lambda \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} F(u(r))r^{2N-3}dr \\ &\leq -\lambda b_\lambda^{2(N-1)}F(\frac{\beta}{c}) \\ &\quad - 2(N-1)F(\frac{\beta}{c})\lambda \int_{b_\lambda}^{\widehat{R}} r^{2N-3}dr \\ &= -\lambda \widehat{R}^{2(N-1)}F(\frac{\beta}{c}), \end{aligned}$$

ya que $u(r) < \frac{\beta}{c}$, $\forall r \in (b_\lambda, \widehat{R}]$ y F es decreciente en $(0, \beta)$ por (f1).

Además

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[b_\lambda^{2(N-1)}u'(b_\lambda)^2 - \widehat{R}^{2(N-1)}u'(\widehat{R})^2] = \\ & = \frac{1}{2}[b_\lambda^{N-1}u'(b_\lambda) - \widehat{R}^{N-1}u'(\widehat{R})][b_\lambda^{N-1}u'(b_\lambda) + \widehat{R}^{N-1}u'(\widehat{R})] \geq 0 \end{aligned}$$

como consecuencia de (3.26), $u'(b_\lambda) \leq 0$ (por la definición de b_λ) y $u'(\widehat{R}) \leq 0$

(por [55]). Entonces podemos extraer raíces cuadradas:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[b_\lambda^{N-1} u'(b_\lambda)]^2 - [\widehat{R}^{N-1} u'(\widehat{R})]^2} \leq \widehat{R}^{N-1} \sqrt{-\lambda F\left(\frac{\beta}{\bar{c}}\right)}$$

y usando que $A - B \leq \sqrt{A^2 - B^2}$, $\forall A \geq B \geq 0$ conseguimos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|b_\lambda^{N-1} u'(b_\lambda)| - |\widehat{R}^{N-1} u'(\widehat{R})| \right] \leq \widehat{R}^{N-1} \sqrt{-\lambda F\left(\frac{\beta}{\bar{c}}\right)}.$$

De nuevo, por (3.26), se deduce

$$\frac{\lambda}{N\sqrt{2}} K(\widehat{R}^N - b_\lambda^N) \leq \widehat{R}^{N-1} \sqrt{-\lambda F\left(\frac{\beta}{\bar{c}}\right)}$$

es decir,

$$-\frac{1}{N\sqrt{2}} K \frac{1}{\sqrt{-F\left(\frac{\beta}{\bar{c}}\right)}} \sqrt{\lambda}(\widehat{R}^N - b_\lambda^N) \leq \widehat{R}^{N-1}$$

por lo que $b_\lambda \rightarrow \widehat{R}$ cuando $\lambda \rightarrow +\infty$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar nuestro resultado de no existencia:

TEOREMA 3.3.4 *Supongamos (f1) y (f2). Entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que para cualquier $\lambda \geq \lambda^*$, (3.1) no tiene ninguna solución radial no negativa.*

Demostración. Consideremos $c \in (\beta, \theta)$, $\bar{c} > 1$ y $R_1, R_2 \in (R_0, \widehat{R})$ tal que $R_1 < R_2$. Sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ dados por los Lemas 3.3.2 y 3.3.3. Tomemos $\mu = \left(\frac{\beta}{\bar{c}} + c\right)(R_2 - R_1)^{-1}$ y elegimos

$$\lambda^* > \max\left\{\lambda_1, \lambda_2, \frac{-\mu^2}{2M}\right\}$$

donde

$$M = \max\left\{F(\xi) : \frac{\beta}{\bar{c}} \leq \xi \leq c\right\} < 0$$

La no existencia de soluciones no negativas y radiales de (3.1) es equivalente a la no existencia de soluciones no negativas de (3.2). Probaremos esta no existencia por contradicción. Ciertamente, supongamos que existe $\lambda \geq \lambda^*$ tal

que (3.2) admite al menos una solución no negativa u_λ . Como $\lambda \geq \lambda_i, i = 1, 2$ deducimos de los Lemas 3.3.2 y 3.3.3, la existencia de $t_1 = t_1(\lambda) \in (R_0, R_1]$ y $t_2 = t_2(\lambda) \in [R_2, \widehat{R}]$ satisfaciendo $u_\lambda(t_1) < c$ y $u_\lambda(t_2) = \frac{\beta}{c}$. Entonces, por el Teorema del valor medio, existe $t_3 = t_3(\lambda) \in (t_1, t_2)$ tal que

$$u_\lambda(t_2) - u_\lambda(t_1) = u'_\lambda(t_3)(t_2 - t_1)$$

De donde resulta

$$|u'_\lambda(t_3)| = \frac{|u_\lambda(t_2) - u_\lambda(t_1)|}{t_2 - t_1} \leq \frac{\frac{\beta}{c} + c}{R_2 - R_1} = \mu \quad (3.27)$$

Además, sabiendo por [55] que u_λ es estrictamente decreciente en $[R_0, \widehat{R}]$, obtenemos

$$u_\lambda(t_3) \in [\frac{\beta}{c}, c]. \quad (3.28)$$

Introducimos de nuevo (ver la demostración del Lema 3.2.4) la función "Energía" $E(r)$ definida por

$$E(r) = \lambda F(u_\lambda(r)) + \frac{u'_\lambda(r)^2}{2}, \quad \forall r \in [R, \widehat{R}]$$

y observemos que $E'(r) = -\frac{N-1}{r} u'_\lambda(r)^2 \leq 0$, es decir, $E(r)$ es decreciente en $[R, \widehat{R}]$. Entonces, usando (3.27) y (3.28), es fácil ver que

$$E(\widehat{R}) \leq E(t_3) \leq \lambda M + \frac{\mu^2}{2} \leq \lambda^* M + \frac{\mu^2}{2} < 0.$$

Pero $E(\widehat{R}) = \frac{u'_\lambda(\widehat{R})^2}{2} \geq 0$, lo cual es una contradicción. Queda así probado el teorema. $\square$

NOTA 3.3.5 En [27], Brown, Castro y Shivaji prueban la no existencia de soluciones no negativas y radiales del problema (3.1) en una bola bajo las hipótesis: f creciente, (f1) y $\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u^\alpha} > 0$ para un número $\alpha > 1$. Notemos que esta última hipótesis es más restrictiva que (f2). Además, es fácil ver que nuestros argumentos siguen siendo válidos en el caso de la bola. Así, hemos extendido el resultado de no existencia de [27] al caso de coronas y rebajado de

modo significativo las hipótesis de [27]. Concretamente, para el caso de una bola tenemos el siguiente teorema :

TEOREMA 3.3.6 *Supongamos (f1) y (f2). Entonces existe $\lambda^* > 0$ tal que para cualquier $\lambda \geq \lambda^*$, el problema*

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda f(u(x)), & |x| < 1 \\ u(x) &= 0, & |x| = 1 \end{aligned} \right\}$$

no tiene ninguna solución radial no negativa.

Idea de la demostración. Consideramos el problema de valores iniciales

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r} u'(r) &= \lambda f(u(r)), & 0 < r < 1 \\ u'(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Usando argumentos similares a los que se desarrollaron en los Lemas 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3, se prueba que:

i) Para cualquier $r \in (0, 1]$ existe un número $M = M(r) > 0$ tal que

$$u_\lambda(r) \leq M$$

para cualquier solución no negativa u_λ de (3.29) con $\lambda > 2$.

ii) Si $R_1 \in (0, 1]$ y $c \in (\beta, \theta)$, entonces existe $\lambda_1 > 0$ tal que para toda solución no negativa u_λ de (3.29) con $\lambda \geq \lambda_1$, existe $t_1 = t_1(\lambda) \in (0, R_1]$ satisfaciendo $u_\lambda(t_1) < c$.

iii) Si $R_2 \in (0, 1]$, y $\bar{c} > 1$, entonces existe $\lambda_2 > 0$ tal que toda solución no negativa u_λ de (3.29) con $\lambda \geq \lambda_2$ verifica

$$\frac{\beta}{\bar{c}} \in u_\lambda([R_2, 1]).$$

La demostración se concluye usando razonamientos análogos a los vistos en la prueba del Teorema 3.3.4. $\square$

Capítulo 4

PROBLEMAS ELÍPTICOS EN EL EXTERIOR DE UNA BOLA CON UNA NO LINEALIDAD DISCONTINUA.

Dedicaremos este Capítulo de la Memoria al estudio de la existencia de soluciones radiales positivas del siguiente problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(u(x) - a), \quad x \in \Omega \\ u(x) &> 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(x) &\rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

donde $a \geq 0$, Ω es el exterior de una bola, es decir $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / |x| > 1\}$ ($N \geq 3$) y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una no-linealidad discontinua satisfaciendo

$$(f1) \quad f(s) = 0, \quad \forall s \leq 0.$$

$$(f2) \quad f \in C^{0,\alpha}((0, +\infty), (0, +\infty)), \quad (0 < \alpha < 1), \text{ creciente.}$$

(f3) Existen $c \geq d > 0$ tales que $d \leq f(s) \leq c$ para cualquier $s > 0$.

Como $f = f(s)$ tiene una discontinuidad en el punto $s = 0$, tenemos que explicar lo que entenderemos por una solución de (4.1):

DEFINICIÓN 4.0.1 *Llamaremos solución del problema (4.1) a toda función $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ que verifique*

- (i) $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, $u(x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$,
- (ii) $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \Omega(a))$, con $\Omega(a) = \{x \in \Omega / u(x) = a\}$,
- (iii) u resuelve puntualmente la ecuación en derivadas parciales (4.1) en $\Omega \setminus \Omega(a)$ y $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$.

Como primera etapa en el estudio de (4.1) empezamos planteando el problema en una corona

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(u(x) - a), \quad x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / 1 < |x| < R\} \\ u(x) &> 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

El concepto de solución de (4.2) es análogo al de la Definición 4.0.1. Esto es, u es solución de (4.2) si

- (i) $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$ y $u(x) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$,
- (ii) $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \Omega(a))$, con $\Omega(a) = \{x \in \Omega / u(x) = a\}$,
- (iii) u resuelve puntualmente la ecuación en derivadas parciales de (4.2) en $\Omega \setminus \Omega(a)$.

Considerando $a \geq 0$ como parámetro de bifurcación, probaremos la existencia de una rama global de pares (a, u) con $a \geq 0$ y u solución radial positiva del problema (4.2). Finalmente, un paso al límite ($R \rightarrow +\infty$) permitirá concluir la existencia de solución de (4.1). Empezamos ya con el estudio de (4.2).

4.1 PROBLEMAS EN UNA CORONA

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre el problema aproximado (4.2). Estas serán útiles en la siguiente sección para el estudio de (4.1). Comenzamos recordando algunos resultados de Topología y de la Teoría de Bifurcación.

Para ello recordemos que si X es un espacio métrico y $\{S_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos de X entonces notando $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de los entornos de $x \in X$, se tiene

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n := \{x \in X : \forall V_x \in \mathcal{V}(x), \{n \in \mathbb{N} : V_x \cap S_n \neq \emptyset\} \text{ es infinito}\}$$

y

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n := \{x \in X : \forall V_x \in \mathcal{V}(x), \{n \in \mathbb{N} : V_x \cap S_n = \emptyset\} \text{ es finito}\}.$$

LEMA 4.1.1 ([95]) Sean X un espacio métrico y $\{S_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos conexos de X tales que

$$i) \liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n \neq \emptyset.$$

$$ii) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \text{ es precompacto.}$$

Entonces $S = \limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n$ es no vacío, precompacto, cerrado y conexo.

Demostración. Es fácil ver que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n$ es cerrado y que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n \subset \limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$.

Para concluir la demostración basta probar que S es conexo. Para ello, sea T la completación de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ que es compacto por ii). Razonamos por contradicción suponiendo que S no es conexo, es decir, que existen dos abiertos no vacíos U y V de T tales que

$$S \subset U \cup V \text{ con } U \cap V = \emptyset, S \cap U \neq \emptyset \text{ y } S \cap V \neq \emptyset. \quad (4.3)$$

De aquí se deduce que $S_n \subset U \cup V$ para todos los números $n \in \mathbb{N}$ salvo, a lo más, un número finito de ellos. En efecto, en caso contrario, existiría una sucesión $\{s_{n_k}\}_k$ tal que

$$s_{n_k} \in S_{n_k} \setminus (U \cup V), \forall k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que T es compacto y pasando a una subsucesión, si es necesario, podemos afirmar que $\{s_{n_k}\}_k$ converge a un punto s de $T \setminus (U \cup V)$.

Además, cualquier entorno V_s de s contiene a todos los elementos de la sucesión $\{s_{n_k}\}_k$ salvo un número finito. Entonces $s \in S = \limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n \subset U \cup V$, lo cual es una contradicción con $s \in T \setminus (U \cup V)$.

Ahora, por i), $\emptyset \neq \liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n \subset S \subset U \cup V$ y, consiguientemente, o bien $(\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n) \cap U \neq \emptyset$, o bien $(\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n) \cap V \neq \emptyset$. Supongamos, por ejemplo, que se verifica $(\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n) \cap U \neq \emptyset$. Por la definición de $\liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n$, esto implica que $S_n \cap U \neq \emptyset$, para todos los números $n \in \mathbb{N}$ salvo, a lo más, un número finito de ellos. Por la conexión de S_n y el hecho que $S_n \subset U \cup V$ para todos los números $n \in \mathbb{N}$ salvo, a lo más, un número finito de ellos, deducimos que $S_n \cap V = \emptyset$, para todos los números $n \in \mathbb{N}$ salvo, a lo más, un número finito de ellos. En consecuencia, por la propia definición de $\limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n$, tendríamos que $S \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción con (4.3) que concluye la prueba del Lema. $\square$

NOTA 4.1.2 Si X es un espacio métrico completo, entonces bajo las condiciones del lema anterior, el conjunto $S = \limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n$ es no vacío, compacto y conexo.

Antes de enunciar el siguiente Teorema de Bifurcación Global introducimos algunas notaciones y definiciones. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\Phi : E \rightarrow E$ una perturbación compacta de la identidad, es decir, $\Phi = I - \Psi$ con I la identidad en E y $\Psi : E \rightarrow E$ un operador completamente continuo. Sea U un abierto arbitrario de E tal que $\Phi(u) \neq 0$ para cualquier $u \in \partial U$. Entonces es posible definir un número entero no-negativo, $\deg(\Phi, U, 0)$, llamado grado topológico de Leray-Schauder del operador Φ con respecto a U y 0 , con la propiedad que la ecuación $\Phi(u) = 0$ tiene al menos una solución en U si $\deg(\Phi, U, 0) \neq 0$ (para más detalle ver, por ejemplo, [49], [73]).

Si v es una solución aislada de $\Phi(u) = 0$ y $B(v, \varepsilon) = \{u \in X : \|u - v\| < \varepsilon\}$, entonces el límite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \deg(\Phi, B(v, \varepsilon), 0)$$

existe y lo denotaremos por $\text{ind}(\Phi, v)$.

Una aplicación importante de la teoría del grado topológico se refiere a la existencia de bifurcaciones globales. Más precisamente, sea $\{\Phi(\lambda, \cdot)\}_{\lambda \geq 0}$ una

familia de operadores $\Phi(\lambda, \cdot) : E \rightarrow E$ que son perturbaciones compactas de la identidad, con 0 una solución aislada de la ecuación $\Phi(\lambda, u) = 0$, para cualquier $\lambda \geq 0$. Denotemos por

$$S = \overline{\{(\lambda, u) \in [0, +\infty) \times E : \Phi(\lambda, u) = 0, u \neq 0\}}.$$

Entonces se prueba (ver por ejemplo [9]) el siguiente resultado:

TEOREMA 4.1.3 *Supongamos que existe un punto $\lambda_0 \in (0, +\infty)$ tal que*

$$\text{ind}(\Phi(\lambda, \cdot), 0) = 1, \forall \lambda > \lambda_0$$

y

$$\text{ind}(\Phi(\lambda, \cdot), 0) = 0, \forall \lambda < \lambda_0$$

entonces el conjunto S contiene una rama global, es decir, una componente conexa cerrada $S(\lambda_0)$ de S que, a su vez, contiene al punto $(\lambda_0, 0)$ y que tiene al menos una de las siguientes propiedades:

- i) $S(\lambda_0) \cap (\{0\} \times E) \neq \emptyset$,
- ii) $S(\lambda_0)$ es no acotada,
- iii) $S(\lambda_0) \cap ([0, +\infty) \times \{0\}) \setminus \{(\lambda_0, 0)\} \neq \emptyset$. $\square$

Consideremos ahora el problema (4.2) y denotemos por E_R el espacio de las funciones radiales continuas en el cierre $\overline{\Omega}$ de la corona $\Omega = \Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^N / 1 < |x| < R\}$ con la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Sean

$$\Sigma(R) := \{(a, u) \in [0, \infty) \times E_R / u \text{ es una solución de (4.2) con } u \neq 0\},$$

$$\Sigma_0(R) := \{(a, u) \in \Sigma(R) / a = 0\}$$

y denotemos por $\lambda(R)$ el primer valor propio del operador $-\Delta$ en Ω_R con condiciones de Dirichlet cero en la frontera y por $\phi > 0$ la función propia asociada a $\lambda(R)$ con $\int_{\Omega_R} \phi = 1$. Tenemos el siguiente teorema

TEOREMA 4.1.4 *Supongamos (f1), (f2) y*

(f4) $\exists d > 0$, $\exists c_1 \in (0, \lambda(R))$, $\exists c_2 > 0$ tales que $d \leq f(s) \leq c_1 s + c_2$ para cualquier $s > 0$. Entonces existe una rama global $S(R) \subset \overline{\Sigma(R)}$. Más concretamente, existe una componente conexa cerrada de $\overline{\Sigma(R)}$, tal que :

- i) $(0, 0) \in S(R)$ y si $(a, 0) \in S(R)$ entonces $a = 0$.*
- ii) $S(R)$ está acotado en $[0, +\infty) \times E_R$ y $S(R) \cap \Sigma_0(R) \neq \emptyset$.*
- iii) Si $(a, u) \in S(R)$ con $0 < \|u\|_\infty$ suficientemente pequeña, entonces $a > 0$.*

Además existe $a_0 > 0$ tal que para cualquier $a \in (0, a_0)$, el problema (4.2) tiene al menos dos soluciones radiales distintas con $(a, u) \in S(R)$.

Demostración. Haremos la demostración en dos etapas:

Etapas 1 (Aproximación regular del problema (4.2)): Fijamos $R > 1$ y consideramos, para $\varepsilon > 0$, la función $f_\varepsilon \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definida por

$$\begin{cases} f_\varepsilon(s) = f(s) & \text{si } s \leq -\varepsilon \text{ ó } s > 0 \\ f_\varepsilon(s) = f(0+) \left(\frac{s}{\varepsilon} + 1\right) & \text{si } -\varepsilon \leq s \leq 0 \end{cases}$$

Estamos interesados en soluciones radiales positivas del problema regular

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f_\varepsilon(u(x) - a) & \text{si } 1 < |x| < R \\ u(x) = 0 & \text{si } |x| \in \{1, R\} \end{cases} \quad (4.4)$$

Sean $G = (-\Delta)^{-1}$ el inverso del operador $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet cero en la frontera de la corona Ω_R y $\Phi(\varepsilon, a, u) = u - Gf_\varepsilon(u - a)$. Denotemos por

$$\Sigma(\varepsilon, R) = \{(a, u) \in [0, \infty) \times E_R : \Phi(\varepsilon, a, u) = 0\}.$$

Observemos que si $(a, u) \in \Sigma(\varepsilon, R)$, entonces por la Teoría de Regularidad (ver por ejemplo [57]), u es una solución radial positiva y clásica del problema (4.4). Además, existen $a^* = a^*(R) > 0$ y $b^* = b^*(R) > 0$ que dependen solamente de R tales que

$$\Sigma(\varepsilon, R) \subset [0, a^*] \times \{u \in E_R : \|u\|_\infty < b^*\}.$$

En efecto, por (f4), existe $a^* > 0$ tal que $f_\varepsilon(u - a) < c_1 u$ para cualquier $a \geq a^*$.

Entonces si u es una solución positiva de (4.4) con $a \geq a^*$, tenemos

$$\lambda(R) \int_{\Omega_R} u \phi = \int_{\Omega_R} f_\varepsilon(u - a) \phi < c_1 \int_{\Omega_R} u \phi$$

lo cual es una contradicción con $c_1 < \lambda(R)$. También se prueba fácilmente que $\|u\|_\infty < b^*$ para un cierto b^* conveniente. En efecto, sea $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, ($0 < \alpha < 1$), la única solución clásica del problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta v(x) &= c_1 v(x) + c_2 & \text{si } 1 < |x| < R \\ v(x) &= 0 & \text{si } |x| \in \{1, R\} \end{aligned} \right\}$$

y que se obtiene como aplicación del Teorema de la Alternativa de Fredholm (ver [10]). Entonces si $w = u - v$, tenemos

$$\left. \begin{aligned} -\Delta w(x) &= f_\varepsilon(u(x) - a) - c_1 v(x) - c_2 \leq g(x) & \text{si } 1 < |x| < R \\ w(x) &= 0 & \text{si } |x| \in \{1, R\} \end{aligned} \right\}$$

donde $g : \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función dada por

$$g(x) = \begin{cases} c_1(u(x) - a) - c_1 v(x) & \text{si } u(x) - a > 0 \\ -c_1 v(x) - c_2 + f(0+) & \text{si } -\varepsilon \leq u(x) - a \leq 0 \\ -c_1 v(x) - c_2 & \text{si } u(x) - a \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que, por la hipótesis (f4) se tiene $f(0+) \leq c_2$, deducimos

$$\left. \begin{aligned} -\Delta w(x) - c_1 w(x) &\leq h(x) \leq 0 & \text{si } 1 < |x| < R \\ w(x) &= 0 & \text{si } |x| \in \{1, R\}, \end{aligned} \right\}$$

con $h : \Omega_R \rightarrow (-\infty, 0]$ está dada por

$$h(x) = \begin{cases} -c_1 a & \text{si } u(x) - a > 0 \\ -c_1 u(x) - c_2 + f(0+) & \text{si } -\varepsilon \leq u(x) - a \leq 0 \\ -c_1 u(x) - c_2 & \text{si } u(x) - a \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

Como $c_1 < \lambda(R)$, podemos aplicar el Principio del Máximo (ver [10], [47]) para

deducir $w \leq 0$ en Ω_R , lo cual implica

$$\|u\|_{\infty} \leq \|v\|_{\infty} = b^*.$$

Claramente b^* es independiente de ε y a .

De otro lado, la aplicación del Teorema 4.1.3 nos proporcionará la existencia de una rama global $S(\varepsilon, R) \subset \overline{\Sigma(\varepsilon, R)}$ tal que $(\varepsilon, 0) \in S(\varepsilon, R)$ y si $(a, 0) \in S(\varepsilon, R)$ entonces $a = \varepsilon$. Además

$$S(\varepsilon, R) \cap \{(0, u) \in \{0\} \times E_R / \Phi(\varepsilon, 0, u) = 0\} \neq \emptyset.$$

Para ello tenemos que comprobar

$$\text{ind}(\Phi(\varepsilon, a, \cdot), 0) = 1, \quad \forall a > \varepsilon \quad (4.5)$$

y

$$\text{ind}(\Phi(\varepsilon, a, \cdot), 0) = 0, \quad \forall a < \varepsilon. \quad (4.6)$$

Para probar (4.5) tomamos $0 < \varepsilon < a^*$ y consideremos la homotopía

$$H(t, u) = u - tGf_{\varepsilon}(u - a), \quad t \in [0, 1].$$

H es admisible en una bola de centro cero y de radio r suficientemente pequeño.

Pues caso contrario, existirían sucesiones $\|u_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ y $t_n \in [0, 1]$ tales que $H(t_n, u_n) = 0$. Por tanto, las funciones $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{\infty}}$ verifican

$$\left. \begin{aligned} -\Delta v_n &= t_n \frac{f_{\varepsilon}(u_n - a)}{u_n} v_n, & x \in \Omega_R, \\ v_n &= 0, & x \in \partial\Omega_R \end{aligned} \right\}$$

con $\|v_n\|_{\infty} = 1$. De donde deducimos $v_n \rightarrow \bar{v}$ en E_R y $\|\bar{v}\|_{\infty} = 1$. Pero, para n suficientemente grande, $u_n(x) < a - \varepsilon$, es decir, $f_{\varepsilon}(u_n - a) \equiv 0$. Pasando al límite en la ecuación anterior, obtenemos $-\Delta \bar{v} = 0$ en Ω_R , $\bar{v} = 0$ en $\partial\Omega_R$, es decir $\bar{v} = 0$ contradiciendo que $\|\bar{v}\|_{\infty} = 1$. Ahora (4.5) es una consecuencia del

hecho

$$\text{ind}(\Phi(\varepsilon, a, \cdot), 0) = \text{ind}(H(1, \cdot), 0) = \text{ind}(H(0, \cdot), 0) = 1.$$

Para demostrar (4.6), fijamos $a < \varepsilon$ y probaremos la existencia de una bola de centro cero tal que $\Phi(\varepsilon, a, u) \neq 0$ en esta bola. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos lo contrario; esto es, que existe una sucesión $\{u_n\}_n \subset E_R$, $u_n > 0$, tal que $u_n \rightarrow 0$ y

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_n &= f_\varepsilon(u_n - a), & x \in \Omega_R, \\ u_n &= 0, & x \in \partial\Omega_R. \end{aligned} \right\}$$

Escribiendo $u_n = t_n \phi + w_n$ con $\int_{\Omega_R} \phi w_n = 0$, y usando que $u_n \rightarrow 0$ deducimos que para n suficientemente grande

$$\lambda(R) t_n \phi - \Delta w_n = f_\varepsilon(u_n - a) = f(0+) \left(\frac{u_n - a}{\varepsilon} + 1 \right).$$

Multiplicamos ahora por ϕ , integramos en Ω_R y hacemos $t_n \rightarrow 0$, para obtener

$$0 = f(0+) \left(1 - \frac{a}{\varepsilon} \right) \int_{\Omega_R} \phi > 0$$

lo cual es una contradicción.

Finalmente, por el Teorema 4.1.3, concluimos la existencia de la rama global $S(\varepsilon, R) \subset \overline{\Sigma(\varepsilon, R)}$ deseada.

Notemos que

$$S(\varepsilon, R) \subset [0, a^*] \times \{u \in E_R : \|u\|_\infty < b^*\}. \quad (4.7)$$

Así, por la Teoría de Regularidad, $S(\varepsilon, R)$ está acotado en $[0, a^*] \times \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega_R})$ uniformemente en ε .

Etapa 2: En esta etapa obtenemos la rama $S(R) \subset \overline{\Sigma(R)}$ del teorema como límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de las ramas $S(\varepsilon, R)$ construidas en la primera etapa. Más precisamente, tomamos en el Lema 4.1.1 $X = [0, +\infty) \times E_R$, y $S_n = S\left(\frac{1}{n}, R\right)$. Como ya sabemos S_n es conexo y $(0, 0) \in \liminf_{n \rightarrow +\infty} S_n \neq \emptyset$. Además, la acotación

uniforme (4.7) para $n \in \mathbb{N}$ de S_n en $[0, a^*] \times \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega_R})$ implica que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ es precompacto. Así, por el Lema 4.1.1, $S(R) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} S_n$ es no vacío, compacto y conexo con

$$S(R) \subset [0, a^*] \times \{u \in E_R : \|u\|_\infty < b^*\}.$$

Usando (f1) y la Teoría de Regularidad obtenemos

$$u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_R} \setminus \Omega_R(a)) \cap \mathcal{C}^1(\Omega_R)$$

para cualquier par $(a, u) \in S(R)$, es decir, $S(R) \subset \Sigma(R)$.

La propiedad i) es inmediata ahora. Con respecto a ii), la acotación de $S(R)$ en $[0, +\infty) \times E_R$ ya ha sido observada. Para probar que $S(R) \cap \Sigma_0(R) \neq \emptyset$, observemos que por el carácter global de las ramas S_n , se tiene que cada S_n "corta" $\{0\} \times (E_R \setminus \{0\})$. Esto es, existe $(0, u_n) \in S_n$ con $u_n \neq 0$. Por (4.7), $\|u_n\| \leq b^*$ y así por Teoría de Regularidad, $\{u_n\}$ posee alguna subsucesión $\{u_{n_k}\}$ convergente hacia algún $u \in E_R$. Esto implica $(0, u) \in S(R)$ con lo que la prueba de ii) estará concluida si demostramos que $u \neq 0$. Para ello razonamos por contradicción suponiendo que $u = 0$. Puesto que u_{n_k} es solución de

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_{n_k} &= f_{\frac{1}{n_k}}(u_{n_k}), & x \in \Omega_R, \\ u_{n_k} &= 0, & x \in \partial\Omega_R, \end{aligned} \right\}$$

deducimos, por el principio de máximo que $u_{n_k} > 0$ en Ω_R y mediante la multiplicación por ϕ que

$$\lambda(R) \int_{\Omega_R} u_{n_k} \phi = \int_{\Omega_R} f_{\frac{1}{n_k}}(u_{n_k}) \phi.$$

Pasando al límite y usando que u_{n_k} converge a $u = 0$, obtenemos que

$$0 = \int_{\Omega_R} f(0+) \phi > 0$$

lo cual es una contradicción probando que $u \neq 0$ y así ii).

Finalmente la propiedad iii) se prueba de una forma análoga por reducción

al absurdo: si $\{(0, u_n)\}_n \subset S(R)$ tal que $\|u_n\|_\infty \rightarrow 0$. Entonces

$$\lambda(R) \int_{\Omega_R} u_n \phi = \int_{\Omega_R} f(u_n) \phi,$$

y pasando al límite llegamos a la siguiente contradicción

$$0 = \int_{\Omega_R} f(0+) \phi > 0.$$

El resto del Teorema se deduce ya de una forma inmediata. $\square$

NOTAS 4.1.5 *i) Observemos que la condición (f3) implica la condición (f4) del teorema anterior para cualquier $R > 1$.*

ii) Es posible probar (ver [14]) que para cualquiera solución radial positiva $u(r)$ ($r = |x|$) de (4.2), existen $1 \leq \rho_1 < r_0 < \rho_2 \leq R$ satisfaciendo:

a) $u'(r) > 0$ en $[1, r_0)$, $u'(r) < 0$ en $(r_0, R]$, $u(r_0) = \|u\|_\infty (> a)$. Además, por [55], $r_0 \leq \frac{R+1}{2}$ si $a = 0$.

b) $u(\rho_1) = u(\rho_2) = a$.

Notemos que $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = R$ en el caso $a = 0$.

De aquí en adelante y para $(a, u) \in S(R)$, denotamos por $\rho_1 = \rho_1(u)$, $\rho_2 = \rho_2(u)$ los números dados por la Nota 4.1.5-ii). Además, si $v \in H_0^1(\Omega_R)$ denotamos

$$\|v\|_R = \left(\int_{\Omega_R} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Antes de acabar esta sección probaremos una estima de $\|u\|_R$ en términos de $\rho_2(R, a)$. Ésta, aunque es bastante técnica, resultará esencial en la próxima sección.

LEMA 4.1.6 *Sea $N \geq 3$ y supongamos (f1), (f2) y (f3). Entonces cualquier solución radial u de (4.2) verifica*

$$\|u\|_R^2 \geq \begin{cases} K_1 \frac{a^2}{\rho_2^{2-N} - R^{2-N}}, & \text{si } a > 0 \\ K_2 R^{N+2} - K_3, & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

con constantes $K_1, K_2, K_3 > 0$ dependiendo únicamente de N .

Demostración. Consideremos primero el caso $a > 0$. Entonces $1 < \rho_1 < r_0 < \rho_2 < R$ y $u(r)$ ($r = |x|$) verifica

$$-u'' - \frac{N-1}{r}u' = 0 \text{ en } (1, \rho_1) \cup (\rho_2, R).$$

Multiplicamos esta ecuación por r^{N-1} e integramos dos veces para obtener

$$u(r) = \begin{cases} a(\rho_1^{2-N} - 1)^{-1}(r^{2-N} - 1), & \text{si } r \in [1, \rho_1]; \\ a(\rho_2^{2-N} - R^{2-N})^{-1}(r^{2-N} - R^{2-N}), & \text{si } r \in [\rho_2, R]. \end{cases}$$

Por tanto,

$$u'(r) = -a(N-2)(\rho_2^{2-N} - R^{2-N})^{-1}r^{1-N}, \quad \forall r \in [\rho_2, R]$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|u\|_R^2 &\geq \int_{\rho_2 < |x| < R} |\nabla u|^2 dx = \omega_{N-1} \int_{\rho_2}^R r^{N-1} u'(r)^2 dr \\ &= \omega_{N-1} (N-2) \frac{a^2}{\rho_2^{2-N} - R^{2-N}}, \end{aligned}$$

donde ω_{N-1} es la medida de la esfera unidad $\partial B(1)$. Esto prueba el lema en el caso $a > 0$ con $K_1 = \omega_{N-1}(N-2)$.

De otro lado, observemos que en el caso $a = 0$ se tiene que $1 = \rho_1 < \rho_2 = R$ y $u(r)$ verifica

$$\left. \begin{aligned} -u''(r) - \frac{N-1}{r}u'(r) &= f(u(r)), \quad 1 < r < R \\ u(1) &= u(R) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Por consiguiente, no podemos aplicar los argumentos anteriores. Por este motivo, razonamos de manera diferente. Multiplicando (4.8) por r^{N-1} e integrando

entre r_0 y r , obtenemos

$$u'(r) = -r^{1-N} \int_{r_0}^r t^{N-1} f(u(t)) dt, \quad \forall r \in (1, R).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $r_0 \leq \frac{R+1}{2}$, deducimos de (f4) que

$$\begin{aligned} \|u\|_R^2 &= \omega_{N-1} \int_1^R r^{N-1} u'(r)^2 dr = \omega_{N-1} \int_1^R r^{1-N} \left[\int_{r_0}^r t^{N-1} f(u(t)) dt \right]^2 dr \\ &\geq \omega_{N-1} \int_{\frac{R+1}{2}}^R r^{1-N} \left[\int_{\frac{R+1}{2}}^r t^{N-1} f(u(t)) dt \right]^2 dr \\ &\geq \frac{\omega_{N-1} d^2}{N} \left[\frac{R^{N+2}}{N+2} - R^2 \left(\frac{R+1}{2} \right)^N - \frac{R^{2-N}}{N-2} \left(\frac{R+1}{2} \right)^{2N} + \frac{N^2}{N^2-4} \left(\frac{R+1}{2} \right)^{N+2} \right] \\ &= \frac{\omega_{N-1} d^2}{N} \left[\left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2^N} - \frac{1}{(N-2)2^{2N}} + \frac{N^2}{(N^2-4)2^{N+2}} \right) R^{N+2} + \text{t.o.i.} \right] \end{aligned}$$

con $\frac{1}{N+2} - \frac{1}{2^N} - \frac{1}{(N-2)2^{2N}} + \frac{N^2}{(N^2-4)2^{N+2}} > 0$ porque $N \geq 3$. Así queda probado el lema en el caso $a = 0$, lo cual concluye la demostración. $\square$

4.2 BIFURCACIÓN GLOBAL EN EL EXTERIOR DE UNA BOLA

En esta sección probaremos la existencia de una rama global S no acotada de soluciones radiales positivas de (4.1) obtenida como límite de las ramas $S(R)$ (de la sección anterior) cuando R tiende a $+\infty$. Además, veremos que (4.1) posee al menos una solución radial u con $(a, u) \in S$ para cualquier $a > 0$.

Denotemos por $\mathcal{D}$ el espacio de las funciones radiales de $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ con la norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

y por Σ el conjunto de los pares $(a, u) \in [0, +\infty) \times \mathcal{D}$ tal que u es una solución radial de (4.1) (ver Definición 4.0.1).

Los siguientes lemas nos proporcionan estimas sobre las soluciones radiales de

(4.1), las cuales serán esenciales para la demostración del Teorema 4.2.3, resultado principal de este capítulo:

LEMA 4.2.1 Sea $N \geq 3$ y supongamos (f1) y (f2). Si $u = u(r)$ es una solución radial de (4.1), entonces existen $1 \leq \rho_1 < r_0 < \rho_2$ tales que

a) $u'(r) > 0$ en $[1, r_0)$, $u'(r) < 0$ en $(r_0, +\infty)$ y, en consecuencia, $u(r_0) = \|u\|_\infty (> a)$.

b) $u(\rho_1) = u(\rho_2) = a$.

Si además f verifica (f3), entonces

$$i) \frac{d}{2N(N-2)} [-N\rho_2^2 + (N-2)\rho_1^2 + 2\rho_2^N \rho_1^{2-N}] \leq a \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{N-2} - 1 \right],$$

$$ii) \frac{d}{aN(N-2)} (\rho_2^N - \rho_1^N) \leq \rho_2^{N-2} + \frac{1}{1-\rho_1^{2-N}} \leq \frac{c}{aN(N-2)} (\rho_2^N - \rho_1^N),$$

$$iii) \rho_2^{\frac{N}{2}-1} \leq \frac{c}{d} \frac{1}{1-\rho_1^{2-N}}.$$

Demostración. La existencia de $1 \leq \rho_1 < r_0 < \rho_2$ satisfaciendo a) y b) se puede probar de la misma manera que en [14]. Además $\|u\|_\infty > a$ es una consecuencia inmediata de (f1) y el Principio de Máximo. En cuanto a la prueba de i), ii) y iii), observemos que las condiciones $u(\rho_1) = u(\rho_2) = a$, $u(1) = u(+\infty) = 0$ y $u'(\rho_2^+) = u'(\rho_2^-)$ implican, como en la demostración del Lema 4.1.6, que

$$u(r) = \begin{cases} a(\rho_1^{2-N} - 1)^{-1}(r^{2-N} - 1), & \text{si } r \in [1, \rho_1) \\ a\rho_2^{N-2}r^{2-N} - \int_r^{\rho_2} s^{1-N} \left(\int_s^{\rho_2} t^{N-1} f(u(t) - a) dt \right) ds, & \text{si } r \in (\rho_1, \rho_2) \\ a\rho_2^{N-2}r^{2-N}, & \text{si } r \in (\rho_2, +\infty). \end{cases} \quad (4.9)$$

Imponiendo la condición $u(\rho_1^+) = u(\rho_1^-) = a$, obtenemos

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{1-N} \left(\int_s^{\rho_2} t^{N-1} f(u(t) - a) dt \right) ds = a \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{N-2} - 1 \right] \quad (4.10)$$

de donde, usando (f3), se deduce i).

Por (4.9) tenemos

$$u'(r) = \begin{cases} a(2-N)(\rho_1^{2-N} - 1)^{-1}r^{1-N}, & \text{si } r \in (1, \rho_1) \\ a(2-N)\rho_2^{N-2}r^{1-N} + r^{1-N} \int_r^{\rho_2} t^{N-1}f(u(t) - a)dt, & \text{si } r \in (\rho_1, \rho_2) \\ a(2-N)\rho_2^{N-2}r^{1-N}, & \text{si } r \in (\rho_2, +\infty). \end{cases} \quad (4.11)$$

Ahora la igualdad $u'(\rho_1^+) = u'(\rho_1^-)$ implica

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} t^{N-1}f(u(t) - a)dt = a(N-2) \left[\rho_2^{N-2} + \frac{1}{1 - \rho_1^{2-N}} \right] \quad (4.12)$$

que junto con la hipótesis (f3), prueba ii).

De otro lado, integrando por partes el primer miembro de (4.10) y utilizando (4.12), obtenemos

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} t f(u(t) - a)dt = \frac{a(N-2)}{1 - \rho_1^{2-N}}.$$

De donde resulta, otra vez por (f3), que

$$d(\rho_2^2 - \rho_1^2) \leq \frac{2a(N-2)}{1 - \rho_1^{2-N}} \leq c(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

Por estas desigualdades, ii) y el Teorema del Valor Medio deducimos la existencia de un número $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ tal que

$$\begin{aligned} \rho_2^{N-2} &\leq \frac{c}{aN(N-2)}(\rho_2^N - \rho_1^N) = \frac{c}{aN(N-2)} \frac{N}{2}(\rho_2^2 - \rho_1^2)\xi^{\frac{N}{2}-1} \\ &\leq \frac{c}{d} \frac{1}{1 - \rho_1^{2-N}} \rho_2^{\frac{N}{2}-1} \end{aligned}$$

y, en consecuencia, iii) está probado. $\square$

LEMA 4.2.2 Sea $N \geq 3$ y supongamos (f1), (f2) y (f3). Si u es una solución radial de (4.1) con $a > 0$, entonces

$$\|u\|^2 \leq \frac{\omega_{N-1}c^2}{N^2(N-2)}\rho_2^{2N} + \frac{\omega_{N-1}ac}{N}\rho_2^N + \omega_{N-1}a^2(N-2)\rho_2^{2N-4}$$

donde ω_{N-1} denota la medida de la esfera unidad $\partial B(1)$ y ρ_2 está dado por el Lema 4.2.1.

Demostración. De la expresión (4.11) para u' deducimos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \omega_{N-1} \int_1^{+\infty} u'(r)^2 r^{N-1} dr \\
&= \omega_{N-1} \left\{ \int_1^{\rho_1} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} + \int_{\rho_2}^{+\infty} \right\} u'(r)^2 r^{N-1} dr \\
&= \omega_{N-1} \frac{a^2(N-2)}{1-\rho_1^{2-N}} + \omega_{N-1} a^2(N-2) \rho_2^{N-2} \\
&\quad + \omega_{N-1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\int_r^{\rho_2} t^{N-1} f(u(t)-a) dt - a(N-2) \rho_2^{N-2} \right]^2 r^{1-N} dr. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Pero (f3) y $1 < \rho_1 < \rho_2$ implican

$$\begin{aligned}
&\int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\int_r^{\rho_2} t^{N-1} f(u(t)-a) dt - a(N-2) \rho_2^{N-2} \right]^2 r^{1-N} dr \leq \\
&\leq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\left(\int_r^{\rho_2} t^{N-1} f(u(t)-a) dt \right)^2 + a^2(N-2)^2 \rho_2^{2N-4} \right] r^{1-N} dr \\
&\leq \left[\frac{c^2}{N^2} (\rho_2^N - \rho_1^N)^2 + a^2(N-2)^2 \rho_2^{2N-4} \right] \frac{\rho_1^{2-N} - \rho_2^{2-N}}{N-2} \\
&\leq \frac{c^2}{N^2(N-2)} \rho_2^{2N} + a^2(N-2) \rho_2^{2N-4},
\end{aligned}$$

lo cual, añadido a (4.13), nos da

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &\leq \omega_{N-1} a^2(N-2) \left[\rho_2^{N-2} + \frac{1}{1-\rho_1^{2-N}} \right] \\
&\quad + \frac{\omega_{N-1} c^2}{N^2(N-2)} \rho_2^{2N} + \omega_{N-1} a^2(N-2) \rho_2^{2N-4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para concluir la demostración, aplicamos ii) del Lema 4.2.1. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar y probar nuestro resultado principal:

TEOREMA 4.2.3 *Sea $N \geq 3$. Supongamos (f1), (f2) y (f3). Entonces existe una rama global no acotada $S \subset \bar{\Sigma}$ (es decir, una componente conexa, cerrada y no acotada de $\bar{\Sigma}$) tal que $(0,0) \in S$. Además, para cualquier intervalo cerrado*

y acotado $I \subset [0, +\infty)$, existe una constante $M(I) > 0$ tal que

$$(a \leq \|u\| \leq M(I) \quad (4.14)$$

para cualquiera solución radial u de (4.1) con $a \in \overset{\circ}{I}$. En consecuencia, para cualquier $a > 0$, el problema (4.1) admite una solución radial u con $(a, u) \in S$.

Demostración. Para probar la existencia de una rama global S con $(0, 0) \in S$, extendemos toda solución $u_R \in S(R)$ ($S(R)$ está dada por el Teorema 4.1.4) a $\mathbb{R}^N$ tomando $u_R(x) = 0$ para $|x| > R$. Así, podemos considerar u_R como un elemento de $\mathcal{D}$. Para $M \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{R_n\}_n \nearrow +\infty$ consideramos

$$X_M = \{(a, u) \in [0, +\infty) \times \mathcal{D} : a^2 + \|u\|^2 \leq M^2\}$$

y

$$S_{n,M} = S(R_n) \cap X_M.$$

Sea $\hat{S}_{n,M}$ la componente conexa de $S_{n,M}$ que contiene al punto $(0, 0)$. Queremos probar que la sucesión $\{\hat{S}_{n,M}\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica las hipótesis i) y ii) del Lema 4.1.1. Observemos que $(0, 0) \in \liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{S}_{n,M} \neq \emptyset$, porque $(0, 0) \in \hat{S}_{n,M}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así i) está probado.

Para mostrar ii), consideremos una sucesión $\{(a_j, u_j)\}_j \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{S}_{n,M}$. Entonces, para algún $n(j)$, u_j es una solución radial del problema (4.2) con $a = a_j$, $R = R_{n(j)}$ y $a_j^2 + \|u_j\|^2 \leq M^2$. Luego, por el Lema 4.1.6, existe una constante $K > 0$ tal que $\rho_2(u_j) \leq K$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $-\Delta u_j = 0$ en $|x| > K$ y, por argumentos standard (ver [13], Teorema 8), existe una sub-sucesión $\{u_{j_k}\}$ de $\{u_j\}$ que converge en $\mathcal{D}$, lo cual demuestra ii). En consecuencia, $S_M = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \hat{S}_{n,M}$ es no vacío, precompacto, cerrado y conexo con $(0, 0) \in S_M$. La rama global S del teorema está dada por $S = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} S_M$. Para probar la no acotación de S , observemos que como consecuencia del Lema 4.1.6, si $(0, u_R) \in S(R) \cap \Sigma_0(R)$, tenemos

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|u_R\| = +\infty.$$

Así, teniendo en cuenta que $S(R)$ es conexo, deducimos que para cualquier M existe $n(M)$ tal que

$$S(R_n) \cap \{(a, u) \in [0, +\infty) \times \mathcal{D} : a^2 + \|u\|^2 = M^2\} \neq \emptyset, \quad \forall n \geq n(M).$$

Por tanto, podemos elegir una sucesión $\{(a_n, u_n)\}_{n \geq n(M)}$ satisfaciendo

$$(a_n, u_n) \in \hat{S}_{n,M} \text{ con } a_n^2 + \|u_n\|^2 = M^2, \quad \forall n \geq n(M)$$

y razonando como antes, probamos la existencia de una subsucesión $\{(a_n, u_n)\}_{n \geq n(M)}$ que converge a un punto $(a, u) \in S_M$ con $a^2 + \|u\|^2 = M^2$. Claramente eso implica que S es no acotado.

Ahora, para probar (4.14), consideremos un intervalo acotado y cerrado $I \subset [0, +\infty)$. Por el Lema 4.2.2 es suficiente mostrar la existencia de un número $K(I)$ tal que

$$\rho_2(u) \leq K(I)$$

para cualquiera solución radial del problema (4.1) con $a \in \overset{\circ}{I}$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una solución radial u_n del problema (4.1) con $a = a_n \in \overset{\circ}{I}$ y $\rho_2(u_n) \rightarrow +\infty$. Entonces, por el Lema 4.2.1-iii), $\frac{\rho_1(u_n)}{\rho_2(u_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Por tanto, si tomamos la función creciente $\psi(t) = Nt^{N-2} - (N-2)t^N$, $t \in [0, 1]$, obtendremos

$$\psi\left(\frac{\rho_1(u_n)}{\rho_2(u_n)}\right) \leq 2 - \alpha, \quad \forall n \geq n_0$$

es decir,

$$N\rho_2(u_n)^2 \rho_1(u_n)^{N-2} - (N-2)\rho_1(u_n)^N \leq (2 - \alpha)\rho_2(u_n)^N, \quad \forall n \geq n_0$$

para ciertos $\alpha \in (0, 2)$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Pero, por el Lema 4.2.1-i), tenemos

$$\begin{aligned} \alpha \rho_2(u_n)^N &\leq -N \rho_2(u_n)^2 \rho_1(u_n)^{N-2} + (N-2) \rho_1(u_n)^N + 2 \rho_2(u_n)^N \\ &\leq \frac{2a_n N(N-2)}{d} [\rho_2(u_n)^{N-2} - \rho_1(u_n)^{N-2}] \\ &\leq \frac{2a_n N(N-2)}{d} \rho_2(u_n)^{N-2}, \quad \forall n \geq n_0, \end{aligned}$$

y, en consecuencia, $\rho_2(u_n)$ está acotado, lo cual es una contradicción.

Finalmente es fácil deducir de (4.14) y el hecho que S es una rama global no acotada que contiene al punto $(0, 0)$, que para cualquier $a > 0$ el problema (4.1) admite una solución radial u con $(a, u) \in S$. Así queda probado el Teorema. $\square$

NOTAS 4.2.4 a) La solución radial del teorema 4.2.3 está obtenida como límite de las soluciones radiales del problema (4.2), cuando $R \rightarrow +\infty$. Recordemos que, para cada $R > 0$, este problema tiene al menos dos soluciones radiales cuando a es suficientemente pequeña. Comparando este resultado y el método variacional utilizado en [14], podemos esperar que una de estas soluciones radiales corresponda a un mínimo de un funcional de Euler y la otra se obtenga como aplicación del teorema del "Paso de Montaña" de Ambrosetti y Rabinowitz. Los resultados de [11] sugieren que las soluciones obtenidas como mínimo del funcional de Euler no convergen cuando $R \rightarrow +\infty$, pero las otras, es decir, aquellas obtenidas mediante el Teorema del "Paso de Montaña", convergen a la solución radial del Teorema 4.2.3.

b) En el Teorema anterior la condición $N \geq 3$ es necesaria para la existencia de una solución radial de (4.1) cuando $a > 0$. En efecto, tomamos $N = 2$ y supongamos que existe una solución radial u de (4.1) en el sentido de la Definición 4.0.7. Entonces u verifica

$$\left. \begin{aligned} (ru)' &= -rf(u(r) - a), \quad 1 < r \\ u(1) &= 0, \quad u(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \right\}$$

Además, como vimos anteriormente, existe $\rho_2 > 1$, tal que $u(\rho_2) = a > 0$ y $u(r) < a$, $\forall r > \rho_2$. Por lo tanto, $f(u(r) - a) = 0$, $\forall r > \rho_2$ y, en consecuencia, $u(r) = k_1 \log r + k_2$, $\forall r > \rho_2$. Pero entonces $k_1 = k_2 = 0$, ya que $u(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$,

lo cual es una contradicción con que $u \neq 0$.

Notemos también que en el caso $N = 2$, $a = 0$ y $f = k_0 > 0$ una constante el problema (4.1) no tiene ninguna solución radial. En efecto una tal solución, si existe, tendría que venir dada por

$$u(r) = -\frac{r^2}{4}k_0 + k_1 \log r + \frac{k_0}{4}, \quad \forall r \in (1, +\infty)$$

con k_0, k_1 constantes. Pero entonces $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = -\infty$, violando la condición impuesta en $+\infty$.

c) A pesar de que nuestros argumentos se parecen a los de [7], hemos de insistir sobre el hecho que cuando Ω es el exterior de una bola, la frontera libre $\Omega(a) = \{x \in \Omega : u(x) = a\}$ de una solución radial u de (4.1) consiste en dos esferas $S(\rho_1)$ y $S(\rho_2)$ centradas en cero. Eso es una diferencia importante con respecto al caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, donde $\Omega(a)$ es justo una esfera, y que es la principal causa de las dificultades técnicas que surgen (ver Lema 4.1.6, Lema 4.2.1, Lema 4.2.2 y la demostración del Teorema 4.2.3). Para poner aún más de manifiesto la diferencia, observemos que si tomamos en (4.1), $f = k$ una constante positiva en $(0, +\infty)$ y estudiamos los casos $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > 1\}$, entonces un cálculo elemental nos proporciona la fórmula explícita de la solución radial en el primer caso. Pero, en el segundo caso, se observa que la existencia de soluciones radiales de (4.1) es equivalente a la existencia de soluciones del siguiente sistema no-lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas $\rho_1, \rho_2 > 1$:

$$\begin{cases} \frac{k}{aN(N-2)} [\rho_2^N - \rho_1^N] = \left[\rho_2^{N-2} - \frac{1}{\rho_1^{2-N} - 1} \right] \\ \frac{k}{aN(N-2)} \rho_2^2 \left[\frac{N}{2} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{N-2} - \frac{N-2}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right] = \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{N-2} \right] \end{cases}$$

cuya resolución no resulta trivial en absoluto.

Capítulo 5

ECUACIONES DIFERENCIALES CASI-LINEALES DEGENERADAS.

Dedicaremos este capítulo al estudio de existencia de soluciones no negativas y acotadas del problema

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x, u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \frac{1}{p}a'_u(x, u)|\nabla u|^p &= \\ &= b(x, u)|u|^{q-2}u + \frac{1}{q}b'_u(x, u)|u|^q, \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular, $p > 1$ es un número real arbitrario, y $q \in (1, p_t^*)$ (ver Preliminares para la definición de p_t^*). Las funciones reales

$$a, b, a'_s, b'_s : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

son de Carathéodory y verifican condiciones apropiadas que precisaremos después.

Aplicando un teorema clásico de minimización para funcionales coercivos

y usando estimaciones a priori de una posible solución de (5.1), obtendremos dicha solución como mínimo global de un funcional $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ definido en un espacio E de Sobolev con peso.

5.1 PRELIMINARES

Por claridad de la exposición, recopilamos en esta sección algunos resultados y definiciones que serán útiles con posterioridad.

DEFINICIÓN 5.1.1 Sea $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, s) \rightarrow a(x, s)$. Se dice que a es una función de Carathéodory si

i) Para todo s fijo en $\mathbb{R}$, la función $x \rightarrow a(x, s)$ es (Lebesgue) medible en Ω y

ii) Para "casi todo" $x \in \Omega$, la función $s \rightarrow a(x, s)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$. Como consecuencia inmediata de la definición anterior, si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $x \rightarrow N_a(u)(x) = a(x, u(x))$ es medible. Así a define un operador $N_a : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que se llama **operador de Nemytskii**. Las propiedades más importantes de este operador pueden verse en [10], [48], [68] y [94].

Sea $w = w(x)$ una función peso en Ω , es decir, una función positiva y medible. Supongamos que

$$w \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) \text{ y } \frac{1}{w} \in L_{\text{loc}}^{\frac{1}{p-1}}(\Omega)$$

y consideremos $W^{1,p}(w, \Omega)$ el espacio de Sobolev con peso [70], es decir el conjunto de los elementos de $\mathcal{M}$ satisfaciendo

$$\|u\|_{1,p,w} = \left(\int_{\Omega} w |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

De aquí en adelante trabajaremos en el espacio de Banach uniformemente convexo $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ definido como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(w, \Omega)$ con res-

pecto a la norma $\|\cdot\|_{1,p,w}$. Es posible probar que

$$\|u\|_w = \left(\int_{\Omega} w |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

define también una norma en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|_{1,p,w}$. Además, se supone la existencia de $t \in \left(\frac{N}{p}, +\infty\right) \cap \left[\frac{1}{p-1}, +\infty\right)$ tal que

$$\frac{1}{w} \in L^t(\Omega).$$

Tomando

$$p_t^* = \begin{cases} \frac{Npt}{N(t+1)-pt}, & \text{si } pt < N(t+1), \\ \text{un número real arbitrario } > p, & \text{si } pt \geq N(t+1) \end{cases}$$

se obtienen las siguientes inmersiones (continuas)

$$W_0^{1,p}(w, \Omega) \hookrightarrow L^{p_t^*}(\Omega), \quad W_0^{1,p}(w, \Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \quad (5.2)$$

para todo $r \in [p, p_t^*]$ (ver, por ejemplo, [50] y [70]), donde $\hookrightarrow$ significa una inmersión compacta.

En la siguiente definición precisamos lo que entenderemos por solución de (5.1).

DEFINICIÓN 5.1.2 *Llamaremos solución del problema (5.1) a toda función $u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ que verifique*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} a'_u(x, u) |\nabla u|^p \varphi dx = \\ = \int_{\Omega} \left[b(x, u) + \frac{1}{q} b'_u(x, u) u \right] |u|^{q-2} u \varphi dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

En las identidades anteriores y en lo que sigue adoptamos el convenio $|\nabla u|^{p-2} \nabla u = 0$ si $\nabla u = 0$ y $|u|^{q-2} u = 0$ si $u = 0$ (Nótese que $p, q > 1$).

Consideremos ahora las siguientes hipótesis sobre las funciones $a(x, s)$, $a'_s(x, s)$:

$$(a_1) \quad w(x) \leq a(x, s) \leq g(|s|)w(x),$$

$$(a_2) \quad |a'_s(x, s)| \leq g(|s|)w(x),$$

$$(a_3) \quad sa'_s(x, s) \geq 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ y c.p.d. $x \in \Omega$, donde $g : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ es una función creciente arbitraria. Supongamos también las siguientes condiciones sobre $b(x, s)$, $b'_s(x, s)$ y q :

$$(b_1) \quad q < p_t^* \text{ y existen } \tilde{q} \in (\max\{p, q\}, p_t^*) \text{ y } \alpha \in L^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-p}}(\Omega), \beta \in L^{\frac{\tilde{q}p_t^*}{(\tilde{q}-p)(p_t^*-\tilde{q})}}(\Omega)$$

tales que

$$\left| \frac{1}{q} b'_s(x, s) s^q + b(x, s) s^{q-1} \right| \leq \alpha(x) |s|^{p-1} + \beta(x) |s|^{\tilde{q}-1},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ y c.p.d. $x \in \Omega$.

Observemos que la hipótesis (a_1) permite ser degenerado o singular con respecto a $x \in \Omega$ al coeficiente $a(x, u)$. Asimismo, la hipótesis (b_1) puede entenderse como una condición de crecimiento subcrítico del segundo miembro de la ecuación en (5.1). Además hemos de recalcar que las condiciones impuestas en $(-\infty, 0)$ no son restrictivas, ya que estamos interesados en la búsqueda de soluciones no negativas del problema (5.1).

5.2 ESTIMACIONES A PRIORI

En esta sección buscamos una estimación a priori en $L^\infty(\Omega)$ de una posible solución no negativa del problema (5.1). Comenzamos con una estima a priori de $\|u\|_\infty$ en términos de $\|u\|_{p_t^*}$.

TEOREMA 5.2.1 *Supongamos $(a_1), (a_3), (b_1)$ y sea $u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ una solución no negativa de (5.1). Entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ y existe $c_5 > 0$ (independiente de g) tal que*

$$\|u\|_\infty \leq c_5 \|u\|_{p_t^*}. \quad (5.4)$$

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ una solución no negativa de (5.1). Para $M > 0$ y $\kappa > 0$, tomemos en (5.3), $\varphi = v_M^{\kappa p+1} \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, donde

$v_M(x) = \min\{u(x), M\}$, ($x \in \Omega$). Así obtenemos

$$\begin{aligned} (\kappa p + 1) \int_{\Omega} a(x, u) v_M^{\kappa p} |\nabla v_M|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} a'_u(x, u) |\nabla u|^p v_M^{\kappa p + 1} dx = \\ = \int_{\Omega} \left[b(x, u) + \frac{1}{q} b'_u(x, u) u \right] u^{q-1} v_M^{\kappa p + 1} dx. \end{aligned}$$

En virtud de las hipótesis (a_1) y (a_3) y de las inmersiones (5.2) tenemos

$$\begin{aligned} (\kappa p + 1) \int_{\Omega} a(x, u) v_M^{\kappa p} |\nabla v_M|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} a'_u(x, u) |\nabla u|^p v_M^{\kappa p + 1} dx \geq \\ \geq \frac{\kappa p + 1}{(\kappa + 1)^p} \int_{\Omega} w |\nabla(v_M^{\kappa+1})|^p dx \geq c_1 \frac{\kappa p + 1}{(\kappa + 1)^p} \left(\int_{\Omega} v_M^{(\kappa+1)p_t^*} dx \right)^{\frac{p}{p_t^*}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

De otro lado, usando (b_1) y aplicando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Minkowski obtenemos de manera formal

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[b(x, u) + \frac{1}{q} b'_u(x, u) u \right] u^{q-1} v_M^{\kappa p + 1} dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \left| b(x, u) u^{q-1} + \frac{1}{q} b'_u(x, u) u^q \right| u^{\kappa p + 1} dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \left[\alpha(x) u^{p-1} + \beta(x) u^{\tilde{q}-1} \right] u^{\kappa p + 1} dx = \int_{\Omega} \left[\alpha(x) + \beta(x) u^{\tilde{q}-p} \right] u^{(\kappa+1)p} dx \leq \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \left[\alpha(x) + \beta(x) u^{\tilde{q}-p} \right]^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-p}} dx \right)^{\frac{\tilde{q}-p}{q}} \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \leq \\ & \leq \left[\left(\int_{\Omega} \alpha(x)^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-p}} dx \right)^{\frac{\tilde{q}-p}{q}} + \left(\int_{\Omega} \beta(x)^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-p}} u^{\tilde{q}} dx \right)^{\frac{\tilde{q}-p}{q}} \right] \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}} \leq \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \alpha(x)^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-p}} dx \right)^{\frac{\tilde{q}-p}{q}} \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{\Omega} \beta(x)^{\frac{\tilde{q} p_t^*}{(\tilde{q}-p)(p_t^*-\tilde{q})}} dx \right)^{\frac{(p_t^*-\tilde{q})(\tilde{q}-p)}{\tilde{q} p_t^*}} \left(\int_{\Omega} u^{p_t^*} dx \right)^{\frac{\tilde{q}-p}{p_t^*}} \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}} = \\
& = c_2 \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Como consecuencia de (5.5) y (5.6) tenemos

$$\left(\int_{\Omega} v_M^{(\kappa+1)p_t^*} dx \right)^{\frac{p}{p_t^*}} \leq c_3 \frac{(\kappa+1)^p}{\kappa p + 1} \left(\int_{\Omega} u^{(\kappa+1)\tilde{q}} dx \right)^{\frac{p}{q}},$$

es decir

$$\|v_M\|_{(\kappa+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p(\kappa+1)}} \left[\frac{\kappa+1}{(\kappa p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\kappa+1}} \|u\|_{(\kappa+1)\tilde{q}}. \tag{5.7}$$

Por (5.2) es posible elegir κ_1 en (5.7) tal que $(\kappa_1 + 1)\tilde{q} = (\kappa_1 + 1)p_t^*$, es decir $\kappa_1 = \frac{p_t^*}{\tilde{q}} - 1$. De donde se deduce

$$\|v_M\|_{(\kappa_1+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p(\kappa_1+1)}} \left[\frac{\kappa_1+1}{(\kappa_1 p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\kappa_1+1}} \|u\|_{p_t^*}$$

para todo $M > 0$. Teniendo en cuenta esta desigualdad y que $u(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} v_M(x)$, el Lema de Fatou implica

$$\|u\|_{(\kappa_1+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p(\kappa_1+1)}} \left[\frac{\kappa_1+1}{(\kappa_1 p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\kappa_1+1}} \|u\|_{p_t^*}.$$

Ahora, es posible elegir κ_2 en (5.7) tal que $(\kappa_2 + 1)\tilde{q} = (\kappa_1 + 1)p_t^* = \frac{(p_t^*)^2}{\tilde{q}}$ y razonando como anteriormente obtenemos

$$\|u\|_{(\kappa_2+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p(\kappa_2+1)}} \left[\frac{\kappa_2+1}{(\kappa_2 p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\kappa_2+1}} \|u\|_{(\kappa_1+1)p_t^*}.$$

Por un simple argumento de inducción se deduce

$$\|u\|_{(\kappa_n+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p(\kappa_n+1)}} \left[\frac{\kappa_n + 1}{(\kappa_n p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\kappa_n+1}} \|u\|_{(\kappa_{n-1}+1)p_t^*}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\kappa_n + 1 = \frac{(p_t^*)^n}{(q)^{n-1}}$ ($n \geq 2$). Como consecuencia de las desigualdades anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{(\kappa_n+1)p_t^*} &\leq \\ &\leq c_3^{\frac{1}{p}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{(\kappa_m+1)} \left[\left(\frac{\kappa_1 + 1}{(\kappa_1 p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_1+1}}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_1+1}}} \left[\left(\frac{\kappa_2 + 1}{(\kappa_2 p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_2+1}}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_2+1}}} \dots \\ &\quad \dots \left[\left(\frac{\kappa_n + 1}{(\kappa_n p + 1)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_n+1}}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{\kappa_n+1}}} \|u\|_{p_t^*}. \end{aligned}$$

Ahora, como $\lim_{y \rightarrow \infty} \left[\frac{y+1}{(yp+1)^{\frac{1}{p}}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{y+1}}} = 1$, existe $c_4 > 1$ (independiente de κ_n) tal que

$$\|u\|_{(\kappa_n+1)p_t^*} \leq c_3^{\frac{1}{p}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{(\kappa_m+1)} c_4^{\sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{\kappa_m+1}}} \|u\|_{p_t^*} \quad (5.8)$$

Ya que $\frac{\tilde{q}}{p_t^*} < \sqrt{\frac{\tilde{q}}{p_t^*}} < 1$, las series $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\kappa_m+1} = \frac{1}{p_t^*} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\tilde{q}}{p_t^*} \right)^{m-1}$ y $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\kappa_m+1}} = \frac{1}{\sqrt{p_t^*}} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\tilde{q}}{p_t^*}} \right)^{m-1}$ convergen. Por tanto, existe una constante $c_5 > 0$ independiente de n tal que si $n \rightarrow +\infty$ en (5.8) obtendremos (5.4). Así queda probado el Teorema. $\square$

NOTA 5.2.2 Es fácil ver que la constante c_5 del Teorema anterior no depende de g . Además c_5 es independiente de $a(x, s)$ en el siguiente sentido: si en lugar de $a(x, s)$ tomamos otra función $A(x, s)$ de Carathéodory satisfaciendo $A(x, s) \geq w(x)$ y $sA'_s(x, s) \geq 0$ c.p.d. $x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$, entonces con la hipótesis (b_1) , obtendremos la desigualdad (5.4) con la misma constante c_5 .

Para poder obtener "cotas a priori" en $L^\infty(\Omega)$ de una posible solución de (5.1) se necesita, en virtud del Teorema anterior, una estima a priori de $\|u\|_{p_t^*}$. Ello se consigue imponiendo a la función $b(x, s)$ la siguiente hipótesis:

(b₂) $q < p$ y existen $\mu \in [0, p - q)$, $\gamma \in L^{\frac{\tilde{q}}{q-q}}(\Omega)$, $c_6 > 0$ tales que

$$|b(x, s)| \leq \gamma(x) + c_6 |s|^\mu,$$

c.p.d. $x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$.

NOTA 5.2.3 Notemos que (b₂) es una condición de sublinealidad de la función $b(x, s)$.

PROPOSICIÓN 5.2.4 Supongamos (a₁) y (b₂). Entonces existe una constante $c_7 > 0$ independiente de g tal que

$$\|u_0\|_{p_t^*} < c_7, \quad (5.9)$$

donde $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ es un mínimo global arbitrario del funcional I definido en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) (u^+)^q dx,$$

si $\int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx < \infty$, e $I(u) = \infty$ en el otro caso.

Demostración. En virtud de (a₁) tenemos

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx \geq c_8 \|u\|_w^p. \quad (5.10)$$

De otro lado, por (b₂), la desigualdad de Hölder y (5.2) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) |u^+|^q dx &\leq \frac{1}{q} \int_{\Omega} \gamma(x) |u|^q dx + \frac{c_6}{q} \int_{\Omega} |u|^{q+\mu} dx \\ &\leq \frac{1}{q} \left(\int_{\Omega} \gamma(x)^{\frac{\tilde{q}}{q-q}} dx \right)^{\frac{q-q}{q}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\tilde{q}} dx \right)^{\frac{q}{q}} + \frac{c_6}{q} \int_{\Omega} |u|^{q+\mu} dx \\ &= c_9 \|u\|_q^q + c_{10} \|u\|_{q+\mu}^{q+\mu} \leq c_{11} \|u\|_w^q + c_{12} \|u\|_w^{q+\mu} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como consecuencia de (5.10) y (5.11) obtenemos

$$I(u) \geq c_8 \|u\|_w^p - c_{11} \|u\|_w^q - c_{12} \|u\|_w^{q+\mu} \quad (5.12)$$

y por lo tanto,

$$0 = I(0) \geq I(u_0) \geq c_8 \|u_0\|_w^p - c_{11} \|u_0\|_w^q - c_{12} \|u_0\|_w^{q+\mu}.$$

Teniendo en cuenta que $p > q + \mu > q$, deducimos $\|u_0\|_w < c_{13}$, donde $c_{13} > 0$ es una constante independiente de g (Notése que el polinomio $P(x) = c_8 x^p - c_{11} x^q - c_{12} x^{q+\mu} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$). Ahora, por (5.2) obtenemos (5.9), con $c_7 > 0$ independiente de g , lo cual concluye la demostración. $\square$

NOTAS 5.2.5 a) Denotemos $D = \{u \in W_0^{1,p}(w, \Omega) : I(u) < +\infty\}$. Es fácil ver, por (a_1) y (b_2) , que $W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega) \subset D$. En efecto

$$\int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx \leq g(\|u\|_{\infty}) \int_{\Omega} w(x) |\nabla u|^p dx < +\infty$$

y

$$\frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) |u^+|^q dx \leq c_{11} \|u\|_w^q + c_{12} \|u\|_w^{q+\mu} < +\infty.$$

b) La constante c_7 de la proposición anterior es independiente de $a(x, s)$ en el siguiente sentido: si en lugar de $a(x, s)$ tomamos otra función $A(x, s)$ de Carathéodory satisfaciendo $A(x, s) \geq w(x)$ c.p.d. $x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$, entonces, con la hipótesis (b_2) , obtendremos la desigualdad (5.9) con la misma constante c_7 .

5.3 TRUNCADURA DE $a(x, s)$

Consideremos la función $a(x, s)$ y las constantes c_5, c_7 obtenidas en los resultados de la sección anterior. Denotemos $c_{14} = c_5 c_7$ y definimos para $\delta \in (0, 1)$ y $x \in \Omega$ la función $\tilde{a}(x, s)$ de la siguiente manera

$$\tilde{a}(x, s) = a(x, s), \text{ si } |s| < c_{14};$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x, s) &= a(x, c_{14}) + a'_s(x, c_{14})(s - c_{14}) \\ &\quad - \frac{a'_s(x, c_{14})}{2\delta}(s - c_{14})^2, \text{ si } s \in [c_{14}, c_{14} + \delta];\end{aligned}$$

$$\tilde{a}(x, s) = a(x, c_{14}) + \frac{\delta}{2}a'_s(x, c_{14}), \text{ si } s \geq c_{14} + \delta;$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x, s) &= a(x, -c_{14}) + a'_s(x, -c_{14})(s + c_{14}) \\ &\quad - \frac{a'_s(x, -c_{14})}{2\delta}(s + c_{14})^2, \text{ si } s \in (-c_{14} - \delta, -c_{14}];\end{aligned}$$

$$\tilde{a}(x, s) = a(x, -c_{14}) + \frac{\delta}{2}a'_s(x, -c_{14}), \text{ si } s \leq -c_{14} - \delta;$$

Entonces, para $x \in \Omega$, tenemos

$$\tilde{a}'_s(x, s) = a'_s(x, s), \text{ si } |s| \leq c_{14};$$

$$\tilde{a}'_s(x, s) = a'_s(x, c_{14}) - \frac{a'_s(x, c_{14})}{\delta}(s - c_{14}), \text{ si } s \in [c_{14}, c_{14} + \delta);$$

$$\tilde{a}'_s(x, s) = a'_s(x, -c_{14}) - \frac{a'_s(x, -c_{14})}{\delta}(s + c_{14}), \text{ si } s \in (-c_{14} - \delta, -c_{14}];$$

$$\tilde{a}'_s(x, s) = 0 \text{ si } s \geq c_{14} + \delta \text{ o } s \leq -c_{14} - \delta$$

Se puede comprobar que $\tilde{a}(x, s), \tilde{a}'_s(x, s)$ son funciones de Carathéodory.

El siguiente lema resume las propiedades básicas de $\tilde{a}(x, s)$ cuando $a(x, s)$ verifica $(a_1), (a_2)$ y (a_3) .

LEMA 5.3.1 *i) Las condiciones (a_1) y (a_3) implican*

$$(\tilde{a}_1) \quad w(x) \leq \tilde{a}(x, s), \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

ii) Las condiciones (a_1) y (a_2) implican

$$\tilde{a}(x, s) \leq c_{15}w(x), \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

iii) La condición (a_2) implica

$$(\tilde{a}_2) \quad |\tilde{a}'_s(x, s)| \leq c_{16}w(x), \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

iv) La condición (a_3) implica

$$(\tilde{a}_3) \quad s\tilde{a}'_s(x, s) \geq 0, \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$$

y además

$$\tilde{a}(x, s) \leq a(x, s) + \delta a'_s(x, c_{14}), \quad \forall s \geq 0, \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \quad (5.13)$$

$$\tilde{a}(x, s) \leq a(x, s) - \delta a'_s(x, -c_{14}), \quad \forall s < 0, \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega. \quad (5.14)$$

NOTA 5.3.2 Por tanto, de i) y ii) deducimos que si $a(x, s)$ cumple $(a_1), (a_2)$ y (a_3) entonces $\tilde{a}(x, s)$ verifica

$$(\tilde{a}_1) \quad w(x) \leq \tilde{a}(x, s) \leq c_{15}w(x), \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Para probar i) y ii) consideremos los siguientes casos:

- Si $0 < s \leq c_{14}$, entonces $w(x) \leq \tilde{a}(x, s) = a(x, s) \leq g(|s|)w(x) \leq g(c_{14})w(x)$ c.p.d. $x \in \Omega$, por ser g creciente.

- Si $s \in [c_{14}, c_{14} + \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, s) &= a(x, c_{14}) + a'_s(x, c_{14})(s - c_{14}) - \frac{a'_s(x, c_{14})}{2\delta}(s - c_{14})^2 \\ &\leq g(c_{14})w(x) + \delta g(c_{14})w(x) + \frac{g(c_{14})}{2\delta}\delta^2 w(x) \\ &\leq 3g(c_{14})w(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, s) &= a(x, c_{14}) + a'_s(x, c_{14})(s - c_{14}) - \frac{a'_s(x, c_{14})}{2\delta}(s - c_{14})^2 \\ &= a(x, c_{14}) + a'_s(x, c_{14})(s - c_{14}) \left[1 - \frac{1}{2\delta}(s - c_{14})\right] \\ &\geq w(x) \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega, \end{aligned}$$

por ser $a(x, c_{14}) \geq w(x)$, $a'_s(x, c_{14}) \geq 0$ y $1 - \frac{1}{2\delta}(s - c_{14}) \geq 1 - \frac{1}{2\delta}\delta \geq 0$.

- Si $s \geq c_{14} + \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, s) &= a(x, c_{14}) + \frac{\delta}{2}a'_s(x, c_{14}) \\ &\leq g(c_{14})w(x) + \frac{\delta}{2}g(c_{14})w(x) \\ &\leq 2g(c_{14})w(x) \end{aligned}$$

y

$$\tilde{a}(x, s) = a(x, c_{14}) + \frac{\delta}{2}a'_s(x, c_{14}) \geq w(x)$$

por ser $a(x, c_{14}) \geq w(x)$ y $a'_s(x, c_{14}) \geq 0$.

Del mismo modo se prueban el caso $s \leq 0$, iii) y iv) del lema . $\square$

Una vez discutidas las propiedades de $\tilde{a}(x, s)$ y $\tilde{a}'_s(x, s)$, dirigimos nuestra atención a un resultado clásico de existencia de mínimo global para funcionales coercivos semi-continuos en espacios de Banach. Sea E un espacio normado

e $I : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ un funcional. Se dice que I es débilmente continuo si $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = I(u)$ para cualquier sucesión $\{u_n\}$ que converge débilmente en E a u . También se dice que I es débilmente semi-continuo inferiormente (o simplemente d.s.c.i.) si

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) \geq I(u),$$

para cualquier sucesión $\{u_n\}$ que converge débilmente en E a u . Finalmente, se dice que I es coercivo si $I(u) \rightarrow +\infty$ cuando $\|u\| \rightarrow +\infty$.

Ahora podemos enunciar y, por comodidad del lector, probar el siguiente resultado [81] que será útil en lo que sigue.

TEOREMA 5.3.3 *Sean E un espacio de Banach reflexivo e $I : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ un funcional d.s.c.i y coercivo. Entonces I tiene un mínimo global en E .*

Demostración. Supongamos $I \neq +\infty$. Entonces $\inf_{u \in E} I(u) < +\infty$ y podemos considerar una sucesión $\{u_n\} \subset E$ tal que $I(u_n)$ converge a $\inf_{u \in E} I(u)$. Teniendo en cuenta que I es coercivo deducimos que $\{u_n\}$ es acotada. Además, como el espacio E es reflexivo, podemos suponer también, pasando a una sub-sucesión conveniente, que $u_n \rightharpoonup u_0 \in E$. De donde resulta, por ser I d.s.c.i.,

$$I(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(u_n) = \inf_{u \in E} I(u)$$

es decir, $I(u_0) = \inf_{u \in E} I(u)$. Así queda probado el Teorema. $\square$

En la siguiente proposición, usamos el Teorema 5.3.3 para probar la existencia de un mínimo global no negativo del funcional $\tilde{I}$ definido en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ por

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) |u^+|^q dx, \quad (u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)).$$

Notemos que el funcional $\tilde{I}$ está bien definido bajo las condiciones $(\tilde{a}_1)$ y (b_2) .

PROPOSICIÓN 5.3.4 *Supongamos (a_1) , (a_3) y (b_2) . Entonces el funcional $\tilde{I}$ alcanza su mínimo en un $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$, $u_0 \geq 0$, satisfaciendo (5.9).*

Demostración. Por el Lema 5.3.1 i), (a_1) y (a_3) implican $\tilde{a}(x, s) \geq w(x)$, c.p.d. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Entonces, razonando como en la demostración de la Proposición 5.2.4, es fácil ver que $\tilde{I}$ verifica (5.12), es decir,

$$\tilde{I}(u) \geq c_8 \|u\|_w^p - c_{11} \|u\|_w^q - c_{12} \|u\|_w^{q+\mu}$$

y, como consecuencia, $\tilde{I}$ es coercivo en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$. Además, $\tilde{I}$ es débilmente semi-continuo inferiormente (d.s.c.i). La demostración de esta afirmación es clásica [90], pero, por claridad del texto, lo haremos con detalle. Para ello escribimos $\tilde{I} = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$ donde

$$\tilde{I}_1(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^p dx,$$

$$\tilde{I}_2(u) = \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) (u^+)^q dx, \quad (u \in W_0^{1,p}(w, \Omega))$$

y probaremos que $\tilde{I}_1$ es d.s.c.i e $\tilde{I}_2$ es débilmente continuo:

Para ver que $\tilde{I}_2$ es débilmente continuo, es suficiente probar que si una sucesión $\{u_n\}$ en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ converge débilmente a u , entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\tilde{I}_2(u_{n_k}) \rightarrow \tilde{I}_2(u), \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

En efecto, por (5.2), $W_0^{1,p}(w, \Omega) \hookrightarrow L^{\tilde{q}}(\Omega)$. Luego $\{u_n\}$ converge a u en $L^{\tilde{q}}(\Omega)$, lo cual implica la existencia de una función $f \in L^{\tilde{q}}(\Omega)$ y de una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ (ver, por ejemplo, [24]) tales que

$$u_{n_k}(x) \rightarrow u(x) \text{ y } |u_{n_k}(x)| \leq f(x) \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, sabiendo que $b(x, s)$ es una función de Carathéodory y usando (b_2) , obtenemos

$$b(x, u_{n_k}(x)) (u_{n_k}^+)^q(x) \rightarrow b(x, u(x)) (u^+)^q(x) \text{ c.p.d. } x \in \Omega, (k \rightarrow +\infty)$$

y

$$\begin{aligned} \left| b(x, u_{n_k}(x)) \left(u_{n_k}^+(x) \right)^q \right| &\leq \gamma(x) |u_{n_k}(x)|^q + c_6 |u_{n_k}(x)|^{q+\mu} \leq \\ &\leq \gamma(x) |f(x)|^q + c_6 |f(x)|^{q+\mu} = H(x) \text{ c.p.d } x \in \Omega \end{aligned}$$

donde $H(x) \in L^1(\Omega)$ como consecuencia de ser $q + \mu < p < \tilde{q}$, $f \in L^{\tilde{q}}(\Omega)$, $\gamma \in L^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-q}}(\Omega)$ y la desigualdad de Hölder. Ahora el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue implica $\tilde{I}_2(u_{n_k}) \rightarrow \tilde{I}_2(u)$, cuando $k \rightarrow +\infty$. En consecuencia, hemos probado que I_2 es débilmente continuo.

La demostración de la débil semicontinuidad inferior de $\tilde{I}_1$ es por contradicción. Supongamos que existe una sucesión $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(w, \Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ y

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{I}_1(u_n) < \tilde{I}_1(u).$$

En virtud de la convergencia débil de u_n a u , existe una constante $c_{17} > 0$ tal que

$$\|u_n\|_w^p \leq c_{17}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.15)$$

Pasando a una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{u_n\}$, podemos suponer, para un $\varepsilon > 0$ fijo, $\tilde{I}_1(u_n) < \tilde{I}_1(u) - \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En virtud de (5.2), también podemos suponer que $u_n(x) \rightarrow u(x)$ c.p.d $x \in \Omega$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Así, ya que $\tilde{a}(x, s)$ es una función de Carathéodory

$$w^{-1}(x) \tilde{a}(x, u_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w^{-1}(x) \tilde{a}(x, u(x)), \text{ c.p.d } x \in \Omega.$$

Por el Teorema de Egorov (ver, por ejemplo, [65]), dado $\delta > 0$, existe un conjunto excepcional $\Omega_\delta \subset \Omega$, con $|\Omega_\delta| < \delta$, tal que

$$w^{-1}(x) \tilde{a}(x, u_n(x)) \longrightarrow w^{-1}(x) \tilde{a}(x, u(x)) \text{ uniformemente en } \Omega \setminus \Omega_\delta.$$

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$w^{-1}(x) |\tilde{a}(x, u_n(x)) - \tilde{a}(x, u(x))| < \frac{\varepsilon}{2c_{17}} \quad (5.16)$$

para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ y $n \geq n_0$. Además, por el Teorema de Mazur (ver, por ejemplo, [96]) existe una sucesión $\{v_n\} \subset W_0^{1,p}(w, \Omega)$ tal que

$$v_n = \sum_{j=n_0}^n \alpha_j^n u_j, \quad \sum_{j=n_0}^n \alpha_j^n = 1, \quad \alpha_j^n \in [0, 1]$$

y

$$\{v_n\} \longrightarrow u \text{ fuertemente en } W_0^{1,p}(w, \Omega).$$

De la convergencia fuerte anterior se obtiene la existencia de una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ de $\{v_n\}$ verificando

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \nabla v_{n_k}(x) = \nabla u(x) \text{ c.p.d. } x \in \Omega.$$

Ahora, por el Lema de Fatou, la convexidad de la función $s \mapsto |s|^p$, la no-negatividad de $\tilde{a}(x, s)$ y por (5.15), (5.16), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega - \Omega_\delta} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^p dx &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \int_{\Omega - \Omega_\delta} \tilde{a}(x, u) |\nabla v_{n_k}|^p dx \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{j=n_0}^{n_k} \alpha_j^{n_k} \int_{\Omega - \Omega_\delta} \tilde{a}(x, u) |\nabla u_j|^p dx \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{j=n_0}^{n_k} \alpha_j^{n_k} \int_{\Omega - \Omega_\delta} \tilde{a}(x, u_j) |\nabla u_j|^p dx + \frac{1}{p} \sum_{j=n_0}^{n_k} \frac{\varepsilon}{2} \alpha_j^{n_k} < \\ &< \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=n_0}^{n_k} \alpha_j^{n_k} \tilde{I}_1(u_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \liminf_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=n_0}^{n_k} \alpha_j^{n_k} (\tilde{I}_1(u) - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \tilde{I}_1(u) - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$ y aplicando el Teorema de Beppo Levi [65], obtenemos

$$\frac{1}{p} \int_{\Omega} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^p dx = \tilde{I}_1(u) \leq \tilde{I}_1(u) - \frac{\varepsilon}{2}$$

lo cual es una contradicción. Así $\tilde{I}_1$ es d.s.c.i e en consecuencia $\tilde{I} = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$ lo es también.

Por el Teorema 5.3.3, $\tilde{I}$ alcanza por tanto su ínfimo en un punto $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ y tomando $A(x, s) = \tilde{a}(x, s)$ en las Notas 5.2.5, b), obtendremos

$$\|u_0\|_{p_t^*} < c_7,$$

es decir, u_0 verifica (5.9).

En cuanto a la prueba de la no-negatividad de u_0 , observemos que $\tilde{I}(u_0) \leq \tilde{I}(u_0^+)$, de donde, usando $(\tilde{a}_1)$ obtenemos

$$\|u_0^-\|_w \leq \frac{c_{17}}{p} \int_{\{u_0 < 0\}} \tilde{a}(x, u_0) |\nabla u_0|^p dx \leq 0,$$

lo cual implica $u_0^- = 0$, es decir $u_0 \geq 0$ c.p.d. $x \in \Omega$. Así queda probada la proposición. $\square$

Notemos que, en principio, por la Proposición 5.3.4, el punto $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ donde $\tilde{I}$ alcanza su mínimo, es sólomente no negativo y puede ser 0. El siguiente lema proporciona condiciones suficientes para que u_0 sea además distinto de cero.

LEMA 5.3.5 *Supongamos $(a_1), (a_2), (a_3)$ y (b_2) . Sea $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ tal que $\tilde{I}(u_0) = \min_{W_0^{1,p}(w, \Omega)} \tilde{I}$. Entonces $\tilde{I}(u_0) < 0$ si se verifica al menos una de las siguientes condiciones:*

(b₃) Existe $\phi \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} b(x, 0) (\phi^+)^q dx > 0$$

(b₄) Existe $\nu \in [0, p - q)$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que

$$b(x, \varepsilon s) \geq \varepsilon^\nu b(x, s), \quad \forall s \geq 0, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

y existe $\psi \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ satisfaciendo

$$\int_{\Omega} b(x, \psi(x)) \psi^+(x)^q dx > 0.$$

Demostración. Supongamos (b_3) y observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\tilde{I}(u_0) \leq \tilde{I}\left(\frac{\phi}{n}\right) = \frac{1}{n^q} A_n,$$

donde

$$A_n = \frac{1}{pn^{p-q}} \int_{\Omega} \tilde{a}\left(x, \frac{\phi}{n}\right) |\nabla \phi|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b\left(x, \frac{\phi^+}{n}\right) (\phi^+)^q dx.$$

Por el Lema 5.3.1 se cumple $(\tilde{a}_1)$. Entonces

$$\left| \tilde{a}\left(x, \frac{\phi}{n}\right) |\nabla \phi|^p \right| \leq c_{15} w(x) |\nabla \phi|^p \equiv f_4(x) \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall n \geq 1$$

con $f_4 \in L^1(\Omega)$. Además, como $\tilde{a}(x, s)$ es una función de Carathéodory, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}\left(x, \frac{\phi}{n}\right) |\nabla \phi|^p = \tilde{a}(x, 0) |\nabla \phi|^p \text{ c.p.d. } x \in \Omega.$$

Así el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{a}\left(x, \frac{\phi}{n}\right) |\nabla \phi|^p dx = \int_{\Omega} \tilde{a}(x, 0) |\nabla \phi|^p dx.$$

Del mismo modo, teniendo en cuenta que $b(x, s)$ es una función de Carathéodory y usando (b_2) , obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b\left(x, \frac{\phi^+}{n}\right) (\phi^+)^q = b(x, 0) (\phi^+)^q \text{ c.p.d. } x \in \Omega.$$

y

$$\left| b\left(x, \frac{\phi^+}{n}\right) (\phi^+)^q \right| \leq \gamma(x) |\phi|^q + c_6 |\phi|^{q+\mu} \equiv f_5(x) \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall n \geq 1,$$

con $f_5 \in L^1(\Omega)$ (esto es una consecuencia de la desigualdad de Hölder y de (5.2)). Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b\left(x, \frac{\phi^+}{n}\right) (\phi^+)^q dx = \int_{\Omega} b(x, 0) (\phi^+)^q dx.$$

Por tanto, concluimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = - \int_{\Omega} b(x, 0)(\phi^+)^q dx < 0,$$

y

$$\tilde{I}(u_0) \leq \tilde{I}\left(\frac{\phi}{n}\right) = \frac{1}{n^q} A_n < 0 = \tilde{I}(0),$$

para $n \geq n_0$ (n suficientemente grande). Queda probado así el lema en el caso que se verifica (b_3) .

De otro lado, suponiendo (b_4) , deducimos de la condición $(\tilde{a}_1)$ (ver Lema 5.3.1),

$$\tilde{I}(u_0) \leq \tilde{I}(\varepsilon\psi) \leq \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p} \int_{\Omega} w(x)|\nabla\psi|^p dx - \frac{\varepsilon^{q+\nu}}{q} \int_{\Omega} b(x, \psi^+)(\psi^+)^q dx$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y usando el hecho que $0 < q + \nu < p$, obtenemos $\tilde{I}(u_0) < 0 = \tilde{I}(0)$ y queda también probado el lema en este otro caso. $\square$

NOTAS 5.3.6 a) *Notemos que una condición suficiente para la segunda parte de (b_4) es la existencia de $\psi \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ tal que la medida (de Lebesgue) del conjunto*

$$\{x \in \Omega : b(x, \psi(x)) > 0 \text{ y } \psi(x) > 0\}$$

es estrictamente positiva.

b) *Notemos también que la primera parte de (b_4) implica, en particular, que $b(x, 0) \geq 0$ c.p.d. $x \in \Omega$. En efecto, tomando $s = 0$, obtenemos $b(x, 0) \geq \varepsilon^\nu b(x, 0)$, es decir, $(1 - \varepsilon^\nu) b(x, 0) \geq 0$. De donde, haciendo tender ε a 0, resulta $b(x, 0) \geq 0$ c.p.d. $x \in \Omega$.*

5.4 RESULTADO DE EXISTENCIA

En esta sección presentaremos el resultado principal de este capítulo, donde se demuestra la existencia de una solución acotada no negativa y no cero del

problema (5.1) en el sentido dado por la definición 5.1.2.

Recordemos que las condiciones (a_1) y (b_2) nos permiten definir el funcional I en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$ por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx - \frac{1}{q} \int_{\Omega} b(x, u^+) |u^+|^q dx$$

si $\int_{\Omega} a(x, u) |\nabla u|^p dx < \infty$, e $I(u) = \infty$ en otro caso.

TEOREMA 5.4.1 *Supongamos (a_1) , (a_2) , (a_3) , (b_1) , (b_2) y una de las condiciones (b_3) y (b_4) . Entonces el problema (5.1) admite, al menos, una solución no negativa, distinta de cero, $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Además el funcional I alcanza su mínimo global en u_0 y este mínimo es negativo, es decir, $I(u_0) < 0$.*

Demostración. Consideremos un mínimo global $u_0 \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ de $\tilde{I}$ dado por la Proposición 5.3.4. En virtud del Lema 5.3.5 tenemos que $\tilde{I}(u_0) < 0 = \tilde{I}(0)$ y así $u_0 \neq 0$. Como el funcional $\tilde{I}$ tiene una derivada direccional $\langle \tilde{I}'(u), \varphi \rangle$ dada por

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}'(u), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \tilde{a}(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \frac{1}{p} \int_{\Omega} \tilde{a}'_u(x, u) |\nabla u|^p \varphi dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[b(x, u^+) + \frac{1}{q} b'_u(x, u^+) u^+ \right] |u^+|^{q-1} \varphi dx \end{aligned}$$

para cada $u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$ y cada $\varphi \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, deducimos

$$\langle \tilde{I}'(u_0), \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(w, \Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

es decir, u_0 es solución del problema

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(\tilde{a}(x, u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \frac{1}{p} \tilde{a}'_u(x, u) |\nabla u|^p &= \\ = b(x, u) |u|^{q-2} u + \frac{1}{q} b'_u(x, u) |u|^q, &\quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, &\quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

Ahora, por la Proposición 5.3.4 y las Notas 5.2.2 (tomando $A(x, s) = \tilde{a}(x, s)$), tenemos

$$\|u_0\|_\infty \leq c_5 \|u_0\|_{p_t^*} < c_5 c_7 = c_{14}.$$

De donde, teniendo en cuenta la definición de $\tilde{a}(x, s)$, resulta que u_0 es una solución del problema (5.1) y que $I(u_0) = \tilde{I}(u_0) < 0$.

De otro lado, por (a₂), (5.13) y (5.14) tenemos

$$I(u) \geq \tilde{I}(u) - \frac{\delta}{p} g(c_{14}) \int_{\Omega} w |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(w, \Omega).$$

Teniendo en cuenta que $I(u_0) = \tilde{I}(u_0) = \min_{u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)} \tilde{I}(u)$, obtenemos

$$I(u) \geq I(u_0) - \frac{\delta}{p} g(c_{14}) \int_{\Omega} w |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(w, \Omega)$$

con δ un número positivo arbitrario. Lo cual implica

$$I(u) \geq I(u_0), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(w, \Omega),$$

es decir, u_0 es un mínimo global de I en $W_0^{1,p}(w, \Omega)$. $\square$

NOTA 5.4.2 Es natural preguntarse si las condiciones (b_1) y (b_2) son independientes o no. En los siguientes ejemplos mostraremos su independencia.

Ejemplo 1: Tomemos $q < p$, $\tilde{q} \in (p, p_t^*)$, K_1, K_2 dos constantes positivas y

$$b(x, s) = K_1 (s^+)^{p-q} + K_2 (s^+)^{\tilde{q}-q}, \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R},$$

con $s^+ = \max\{s, 0\}$. Entonces $b(x, s)$ verifica (b_1) con

$$\alpha(x) = K_1 \frac{p}{q} \text{ y } \beta(x) = K_2 \frac{\tilde{q}}{q}.$$

Pero, $b(x, s)$ no verifica (b_2) . En efecto, razonando por contradicción, si suponemos que verifica (b_2) , es decir,

$$\left| K_1 (s^+)^{p-q} + K_2 (s^+)^{\tilde{q}-q} \right| \leq \gamma(x) + c_6 |s|^\mu \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

(con $\gamma \in L^{\frac{\tilde{q}}{\tilde{q}-q}}(\Omega)$), entonces, en particular, para $s > 0$, tenemos

$$K_1 s^{p-q} + K_2 s^{\tilde{q}-q} - c_6 s^\mu \leq \gamma(x) \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $\mu \in (0, p - q)$ y pasando al límite cuando s tiende a $+\infty$, obtenemos $\gamma(x) = +\infty$ c.p.d. $x \in \Omega$, lo cual es una contradicción con $\gamma \in L^{\frac{q}{q-q}}(\Omega)$.

Ejemplo 2: Tomemos $q < p$, $\tilde{q} \in (p, p_i^*)$, $\mu_1 \in (0, p - q)$, K_3 una constante positiva y $\zeta \in L^{\frac{q}{q-q}}(\Omega)$ con $|\{x \in \Omega : \zeta(x) \neq 0\}| > 0$. Sea

$$b(x, s) = \zeta(x) + K_3 (s^+)^{\mu_1}, \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces $b(x, s)$ verifica (b_2) con $\gamma(x) = \zeta(x)$, $c_6 = K_3$, $\mu = \mu_1$. Además, no se verifica (b_1) , pues caso que así fuese tendríamos

$$\left| K_3 \left(\frac{\mu_1}{q} + 1 \right) s^{\mu_1} + \zeta(x) \right| \leq \alpha(x) s^{p-q} + \beta(x) s^{\tilde{q}-q} \text{ c.p.d. } x \in \Omega, \forall s > 0.$$

De donde, pasando al límite cuando $s \rightarrow 0^+$, resulta $|\zeta(x)| \leq 0$, es decir, $\zeta(x) = 0$ c.p.d. $x \in \Omega$, lo cual es una contradicción con $|\{x \in \Omega : \zeta(x) \neq 0\}| > 0$.

En conclusión las condiciones (b_1) y (b_2) son independientes.

NOTAS FINALES Y POSIBLES LÍNEAS DE CONTINUACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.

Dedicamos esta última parte a la exposición de algunas cuestiones y problemas relacionados con los resultados obtenidos en esta Memoria y que pueden ser posibles líneas de un futuro trabajo:

1. En el Capítulo 1 se han establecido diversos resultados sobre existencia, no existencia, multiplicidad, etc. de soluciones positivas de la ecuación (1.3) cuando los números reales ω y λ (correspondientes, respectivamente, al período de la no linealidad, con respecto al tiempo, y al período de la función que marca el intervalo de tiempo que cada individuo permanece infectado) satisfacen la relación

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{p}{q} \quad (5.17)$$

para algún par de números naturales p y q . De hecho, hemos estudiado las anteriores cuestiones para soluciones que sean, además, funciones $q\omega$ -periódicas. Según nuestros conocimientos, nada se conoce en la actualidad sobre la existencia de soluciones positivas de (1.3) cuando (5.17) no se satisface (Puede no obstante consultarse el trabajo [93] sobre la existencia de soluciones casi-periódicas, puesto que algunas ideas pueden ser de utilidad).

2. Los procedimientos de aproximación de soluciones positivas de (1.3), basadas en la noción de solución superior e inferior, que hemos desarrollado en los apartados 1.2 y 2.2., son completamente teóricos. Tales procedimientos distan mucho de ser convenientes, desde el punto de vista de la aproximación numérica de las soluciones positivas de las ecuaciones consideradas. Creemos que el planteo de verdaderos procedimientos de aproximación

numérica puede proporcionar un interesante y amplio tema de investigación.

3. En todos los modelos considerados en la parte I de esta Memoria se ha supuesto que la población se distribuye de manera homogénea en el espacio disponible; es decir, la función incógnita x no depende de la variable espacial $u \in \mathbb{R}^n$. Sin embargo, es usual que esto sea así, y por consiguiente que la población $x(t, u)$ tenga una cierta difusión de unas partes a otras. La consideración de esta circunstancia origina ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial x(t, u)}{\partial t} - \Delta_u x(t, u) = f(t, u, x(t, u)) - f(t - \tau, u, x(t - \tau, u)) \quad (5.18)$$

donde Δ_u indica el Laplaciano respecto de la variable espacial u .

(5.18) constituye una ecuación en derivadas parciales, del tipo Reacción-Difusión, pero con retraso en la variable tiempo t . Nada se conoce sobre la existencia de soluciones positivas del anterior tipo de ecuaciones, así que nuestro estudio debería comenzar por el caso en que $n = 1$, para pasar después a la situación general.

4. Puede probarse, sin ninguna dificultad, la extensión del Teorema 2.3.1 al caso de sistemas de n ecuaciones. Lo interesante de este hecho está en las posibles aplicaciones que puedan derivarse de este resultado abstracto. Por ejemplo, en Biología, es conocida la dificultad del estudio de sistemas con más de dos ecuaciones. Creemos que una investigación detallada de casos donde nuestro resultado pueda aplicarse simplificaría, en algunas situaciones, la demostración de algunos resultados conocidos para sistemas que tengan un número arbitrario de incógnitas, mientras que permitiría obtener nuevos resultados en otros. Por supuesto, son susceptibles de estudio tanto sistemas de ecuaciones integrales como sistemas de ecuaciones diferenciales.
5. En el Capítulo 3 nos hemos ocupado de problemas de existencia y no existencia de soluciones radiales no negativas de (3.1). También sería

interesante estudiar las cuestiones de multiplicidad, estabilidad y unicidad de estas soluciones cuando existan. En el caso de una bola existen trabajos en esta línea entre los que podemos citar [2] y [29].

Además, los resultados de este Capítulo nos proporcionan la existencia de soluciones radiales no negativas de (3.1) para $\lambda < \lambda_*$ y de no existencia para $\lambda \geq \lambda^*$ con $\lambda_* \leq \lambda^*$. Una pregunta interesante y parece que bastante ambiciosa sería estudiar si $\lambda_* = \lambda^*$ y caso negativo lo que ocurre cuando λ pertenece a (λ_*, λ^*) .

Por otro lado, notemos que durante la elaboración de esta Tesis Doctoral, han aparecido los trabajos [5] y [8]. En el primero de ellos se estudia la existencia de soluciones positivas de problemas semi-positón en dominios acotados cualesquiera. Mientras que en el segundo, entre otros resultados, se generalizan los resultados de existencia dados en el capítulo 3 al caso en que Ω es una bola y el operador diferencial es el p-laplaciano.

6. En cuanto al problema (4.1) estudiado en el Capítulo 4 surgen, a nuestro entender, dos cuestiones a resolver. La primera de ellas sería la unicidad de solución radial de (4.1). De otra parte, también merecería la pena el estudio del número de soluciones (no necesariamente radiales) del problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(u(x) - a), \quad x \in \Omega \\ u(x) &> 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(x) &\rightarrow 0 \text{ cuando } |x| \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\}$$

siendo Ω el dominio exterior de una bola. Por la topología especial de Ω (observemos que posee un agujero (hole en inglés)) nos atrevemos a pensar que dicho problema ha de poseer, al menos, dos soluciones, una de ellas radial (como hemos probado) y otra, probablemente, no radial.

7. El método básico empleado en el estudio del problema (5.1) del Capítulo 5 ha sido de índole variacional. Concretamente se ha probado la existencia de un mínimo global en el espacio de Sobolev con peso del correspondiente

funcional asociado al problema. A la vista del reciente trabajo [16] sobre "puntos críticos" de funcionales definidos en espacios de Sobolev sin peso y que son diferenciables únicamente a lo largo de direcciones acotadas, parece interesante la generalización de esta teoría de puntos críticos al caso de funcionales definidos en espacios de Sobolev con peso. Qué duda cabe que esta generalización resultaría extremadamente útil para el estudio de la multiplicidad de soluciones de (5.1) al permitir la búsqueda de puntos críticos que no son mínimos locales.

Bibliografía

- [1] S. AHMAD Y A. LAZER, *Asymptotic behaviour of solutions of periodic competition diffusion system*, Nonl. Anal. T.M.A., 13 (1989), 263-284.
- [2] I. ALI, A. CASTRO Y R. SHIVAJI, *Uniqueness and stability of nonnegative solutions for a semi-positone problem in a ball*, Proc. Amer. Math. Soc., 117 (1993), 775-782.
- [3] H. AMANN, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in Ordered Banach spaces*, SIAM Review 18 (1976), 620-709.
- [4] A. AMBROSETTI, *Critical points and nonlinear variational problems*, Supplement au Bulletin de la Societé Mathématique de France, Mémoire n. 49, 1992.
- [5] A. AMBROSETTI, D. ARCOYA Y B. BUFFONI, *Positive solutions for some semi-positone problems via bifurcation theory*, Diff. and Int. equations, 7 (1994) 655-663.
- [6] A. AMBROSETTI Y M. BADIALE, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. 140-2 (1989), 363-373.
- [7] A. AMBROSETTI, M. CALAHORRANO Y F. DOBARRO, *Global Branching for Discontinuous Problems*, Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990), 213-222.

- [8] A. AMBROSETTI, J. GARCIA AZOREZO Y I. PERAL, *Multiplicity results for some Nonlinear Elliptic Equations*. J. Funct. Anal. 137, (1996), 219-242.
- [9] A. AMBROSETTI Y P. HESS, *Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems*, J. Math. Anal. Appl. 73 (1980), 411-422.
- [10] A. AMBROSETTI Y G. PRODI, *A primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [11] A. AMBROSETTI Y M. STRUWE, *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid*, Arch. Rat. Mech. Anal. 108 (1.989), 97-109.
- [12] A. AMBROSETTI Y R.E.L. TURNER, *Some discontinuous variational problems*, Diff. and Integral Equat. 1 (1988), 341-349.
- [13] C.J. AMICK Y R.E.L. TURNER, *A global branch of steady vortex rings*, J. Reine Angw. Math. 384 (1988), 1-23.
- [14] D. ARCOYA, *Positive solutions for semilinear Dirichlet problems in an annulus*, J. Diff. Eqns., 94, No.2 (1991), 217-227.
- [15] D. ARCOYA Y L. BOCCARDO, *Nontrivial solutions to some nonlinear equations via minimization*, Variational Methods in Nonlinear Analysis Eds. A. Ambrosetti and K.C. Chang, Gordon and Breach (1995), 49-53.
- [16] D. ARCOYA Y L. BOCCARDO, *Critical points for multiple integrals of the calculus of variations*. Aparecerá en Arch. Rat. Mech. & Anal.
- [17] D. ARCOYA Y M. CALAHORRANO, *Some discontinuous problems with a quasilinear operator*, J. Math. Anal. Appl. 187 (1994), 1059-1072.
- [18] D. ARCOYA Y A. CAÑADA, *The dual variational principle and discontinuous elliptic problems with strong resonance at infinity*, Nonl. Anal. T.M.A. 14 (1.990), 339-411.

- [19] D. ARCOYA, P. DRÁBEK Y A. ZERTITI, *Minimization problem for some degenerated functionals: Nonnegative and bounded solutions*, Differential Equations (en ruso), Vol. 31, No 2, 1995. Existe traducción en inglés.
- [20] D. ARCOYA Y A. ZERTITI, *Existence and non-existence of radially symmetric non-negative solutions for a class of semi-positone problems in an annulus*, Rendiconti di Matematica, serie VII, Vol. 14, Roma (1994), 625-646.
- [21] D. ARCOYA Y A. ZERTITI, *Global branching for discontinuous problems in the exterior of a ball*, Aparecerá en Bolletino Della Unione Matematica Italiana.
- [22] M. BERTSCH Y M.H.A. KLAVER, *On positive solutions of $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ with f discontinuous*, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991), 417-466.
- [23] J. BLAT Y K.J. BROWN, *Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems*, Proc. of the Royal Soc. of Edinburg, 97 (1984), 21-34.
- [24] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, 1987.
- [25] K.J. BROWN, *Spatially inhomogeneous steady state solutions for systems of equations describing interacting populations*, J. Math. Anal. and Appl., 95 (1983), 251-264.
- [26] K.J. BROWN, *Nontrivial solutions of predator-prey systems with small diffusion*, Nonl. Anal. T.M.A. 11 (1987), 685-689.
- [27] K.J. BROWN, A. CASTRO Y R. SHIVAJI, *Non-existence of radially symmetric non-negative solutions for a class of semi-positone problems*, Diff and Int. Equations, 2 (1989), 541-545.
- [28] K.J. BROWN Y P. HESS, *Positive periodic solutions of predator-prey reaction-diffusion systems*, Nonl. Anal. T.M.A., 16 (1991), 1147-1158.

- [29] K.J. BROWN Y R. SHIVAJI, *Instability of nonnegative solutions for a class of semipositone problems*, Proc. Amer. Math. Soc., 112 (1991), 121-124.
- [30] N.P. CAC, *The exterior Dirichlet problem for a strongly nonlinear elliptic equation*, J. Diff. Eqns. 62 (1986), 410-426.
- [31] A. CAÑADA, *Method of upper and lower solutions for nonlinear integral equations and an application to an infectious disease model*, In "Dynamics of infinite Dimensional systems". S.N.Chow and J.K.Hale editors, Springer-Verlag, 1987, 39-44.
- [32] A. CAÑADA Y J.L. GAMEZ, *Some new applications of the method of lower and upper solutions to elliptic problems*, Appl. Math. Letters, 6(6), (1993), 41-45.
- [33] A. CAÑADA Y A. ZERTITI, *Topological methods in the study of positive solutions for some nonlinear delay integral equations*, Nonl. Anal. T.M.A., 23 (1994), 1153-1165.
- [34] A. CAÑADA Y A. ZERTITI, *Method of upper and lower solutions for nonlinear delay integral equations modelling epidemics and population growth*, M³AS, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 4 (1994), 107-119.
- [35] A. CAÑADA Y A. ZERTITI, *Positive solutions of nonlinear delay integral equations modelling epidemics and population growth*, Extracta Mathematicae, 8, (1993), 153-157.
- [36] A. CAÑADA Y A. ZERTITI, *Systems of nonlinear delay integral equations modelling population growth in a periodic environment*, Comment. Math. Univ. Carolinae 35,4 (1994), 633-644.
- [37] A. CAÑADA Y A. ZERTITI, *Fixed point theorems for systems of equations in ordered Banach spaces with applications to differential and integral equations*, Nonl. Anal. T.M.A., 27 (1996), 397-411.

- [38] A. CASTRO Y R. SHIVAJI, *Non-negative solutions for a class of radially symmetric non-positone problems*, Proc. Amer. Math. Soc., 106, No.3 (1989), 735-740.
- [39] K.C. CHANG, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 102-129.
- [40] V.H. CLARKE, *Periodic solutions of Hamiltonian inclusions*, J. Diff. Eqns. 40 (1981), 1-6 and C.R.A.S. 287 (1978), 951-952.
- [41] P. CLEMENT Y G. SWEERS, *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 14 (1987), 97-121.
- [42] K.L. COOKE Y J.L. KAPLAN, *A periodic threshold theorem for epidemics and population growth*, Math. Biosciences, 31, (1976), 87-104.
- [43] V. COTI ZELATI Y M.J. ESTEBAN, *Symmetry breaking and multiple solutions for a Neumann problem in an exterior domain*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 116A (1990), 327-339.
- [44] E.N. DANCER, *On positive solutions of some pairs of differential equations, II*, J. Diff. Eqns, 60, (1985), 225-236.
- [45] E.N. DANCER, *On the existence and uniqueness of positive solutions for competing species models with diffusions*, Research Report, Univ. of new England, Armidale, Australia, 1989.
- [46] E.N. DANCER, *On uniqueness and stability for solutions of singularly perturbed predator-prey type equations with diffusion*, J. Diff. Eqns., 102 (1993), 1-32.
- [47] D.G. DE FIGUEIREDO, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Proc. of the first latin american school of differential equations, Lecture Notes 957, 1982.

- [48] D.G. DE FIGUEIREDO, *The Ekeland variational principle with applications and detours*, T.I.F.R., Bombay, Springer, 1989.
- [49] K. DEIMLING, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [50] P. DRÁBEK, *The least eigenvalues of nonhomogeneous degenerated quasi linear eigenvalue problems*, *Mathematica Bohemica*, 120 (1995), 169-195.
- [51] M.J. ESTEBAN, *Nonsymmetric ground states of symmetric variational problems*, *Comm. Pure Appl. Math.* XLIV (1991), 259-274.
- [52] M.J. ESTEBAN Y W.A. STRAUSS, *Nonlinear bound states outside an insulated sphere*, *Comm. P.D.E.* 19 (1994), 177-197.
- [53] X. GARAIZAR, *Quelques résultats d'existence pour les équations elliptiques semi-linéaires*, *Compte Rendus Acad. Sci.* 300 (1985), 685-686.
- [54] J.L. GÁMEZ, *Sistemas elípticos no lineales y aplicaciones en dinámica de poblaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1993.
- [55] B. GIDAS, W.M. NI Y L. NIRENBERG, *Symmetry and related properties via the maximum principle*. *Commun. Math Phys.*, 68 (1979), 209-243.
- [56] B. GIDAS, W.M. NI Y L. NIRENBERG, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$* . *Advances in Math. Suppl. Studies*, 7 (1981), 369-402.
- [57] G. GILBARG Y N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [58] Z. GUO, *Existence of positive radial solutions for a class of nonlinear singular elliptic problems in annular domains*, *Proc. of the Edinburgh Mathematical Society*, 35 (1992), 405-418.
- [59] D. GUO Y V. LAKSHMIKANTHAM, *Positive solutions of integral equations arising in infectious diseases*, *J. Math. Anal. Appl.* 134, (1988), 1-8.

- [60] D. GUO Y V. LAKSHMIKANTHAM, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, 1988.
- [61] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*. Baltimore, 1973.
- [62] S. HEIKKILA Y V. LAKSHMIKANTHAM, *On the method of upper and lower solutions for discontinuous boundary value problems*, Nonl. Anal. T.M.A. 23 (1994), 265-273.
- [63] J. HERNÁNDEZ, *Qualitative methods for nonlinear diffusion equations*, In Nonlinear Diffusion Problems, A. Fasano and M. Primicerio (eds.), Lect. Notes in Mathematics 1224 (1986), 47-118.
- [64] P. HESS, *On multiple positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Comm. in P.D.E 6 (1981), 951-961.
- [65] E. HEWITT Y K. STROMBERG, *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1975.
- [66] P. KORMAN Y A. LEUNG, *A general monotone scheme for elliptic systems with applications to ecological models*, Proc. Roy. Soc. of Edinburg, 102 (1986), 315-325.
- [67] M.A. KRASNOSELSKII, *Positive solutions of operator equations*, Groningen, Noordhoff, 1964.
- [68] M.A. KRASNOSELSKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, London, Pergamon Press, 1964.
- [69] M.G. KREIN Y M.A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Amer. Math. Soc. Transl., 10 (1962), 199-325.
- [70] A. KUFNER, O. JOHN Y S. FUČIK, *Functions Spaces*, Academia, Prague, 1977.
- [71] R.W. LEGGETT Y R. WILLIAMS, *A fixed point theorem with application to an infectious disease model*, J. Math. Anal. Appl. 76 (1980), 91-97.

- [72] R.W. LEGGETT Y R. WILLIAMS, *Nonzero solutions of nonlinear integral equations modeling infectious disease*, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), 112-121.
- [73] J. LERAY Y J. SCHAUDER, *Topologie et equations fonctionelle*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51 (1934), 45-87.
- [74] A. LEUNG, *Monotone schemes for semilinear elliptic systems related to ecology*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 4 (1982), 272-285.
- [75] L. LI, *Coexistence theorems of steady states for predator-prey interacting systems*, Trans. of the A.M.S., 305 (1989), 143-166.
- [76] L. LI, *On the uniqueness and ordering of steady states of predator-prey systems*, Proc. Roy. Soc. of Edinburg, 110 (1988), 295-303.
- [77] L. LI Y R. LOGAN, *Positive solutions to general elliptic competition models*, Diff. and Int. Eqns., 4 (1991), 817-834.
- [78] S.S. LIN, *On the existence of positive radial solutions for nonlinear elliptic equations in annular domains*, J. Diff. Equations 81 (1989), 221-233.
- [79] S.S. LIN Y F.M. PAI, *Existence and multiplicity of positive radial solutions for semilinear elliptic equations in annular domains*, SIAM J. Math. Anal., Vol.22, No.6 (1991), 1500-1515.
- [80] P.L. LIONS, *On the existence of positive solutions of semilinear equations*, SIAM Review, Vol.24, No.4 (1982), 441-467.
- [81] J. MAWHIN Y M. WILLEM, *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [82] R.D. NUSSBAUM, *A periodicity threshold theorem for some nonlinear integral equations*, Siam J. Math. Anal. 9, (1978), 356-376.
- [83] R.D. NUSSBAUM, *Periodic solutions of some integral equations from the theory of epidemics*, in Nonlinear Systems and Applications, (1977), 235-255.

- [84] A. OKUBO, *Diffusion and ecological problems: mathematical models*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [85] J. SANTANILLA, *Existence and nonexistence of positive radial solutions for some semilinear elliptic problems in annular domains*, Nonl. Anal. T.M.A., Vol.16, No.10 (1991), 861-879.
- [86] H.L. SMITH, *On periodic solutions of a delay integral equations modelling epidemics*, J. Math. Biology, 4, (1977), 69-80.
- [87] J. SMOLLER Y A. WASSERMAN, *Existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in general domains*, Arch. Rat. Mech., 98 (1987), 229-249.
- [88] C. A. SWANSON, *Positive solutions of $-\Delta u = f(x, u)$* , Nonl. Anal. T.M.A. 9 (1985), 1319-1323.
- [89] K.E. SWICK, *A model of single species population growth*, Siam J. Math. Anal. 7, (1976), 565-576.
- [90] M. STRUWE, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [91] C.A. STUART, *Differential equations with discontinuous nonlinearities*, Arch. Rat. Mech. and Analysis 63 (1976), 59-75.
- [92] R. TORREJON, *A note on a non linear integral equation from the theory of epidemics*, Nonl. Anal. T.M.A., 14 (1990), 483-488.
- [93] R. TORREJON, *Positive almost periodic solutions of a state-dependent delay nonlinear integral equation*, Nonl. Anal. T.M.A., 20 (1993), 1383-1416.
- [94] M.M. VAINBERG, *Variational methods for the study of nonlinear operators*, Holden Day, San Francisco, 1964.
- [95] G.T. WHYBURN, *Topological analysis*, Princeton Univ. Press, 1955.

- [96] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.