Máximos, mínimos y promedios.

FisyMat

Ireneo Peral Alonso

Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma de Madrid

Work supported by Project MTM2004-02223 M.E.C. (Spain)

Presentación

Dedicatoria.

A la memoria de L. Euler en el 300 aniversario de su nacimiento.

Leonhard Euler, Basilea 15 de Abril de 1707-San Peterburgo 18 de Septiembre de 1783

Granada 2007, trece generaciones después.

Un punto de partida.

Ya que la Creación es perfecta y obra del Sapientísimo Creador, nada ocurre en el Universo sin que alguna regla de máximo o mínimo aparezca.

Leonhard Euler.

Máximos: el problema de Dido.

Una hermosa leyenda.

Alrededor del año 820 A.C.

En *Tiro, Fenicia,* **reina** *Mattan* **quien tiene una hija,** *Dido***, y un hijo,** *Pigmalión***.**

La hermosa *Dido* **se casa con** *Sicarbas* **y a la muerte de su padre le sucede en el trono.**

Pigmalión **manda asesinar a** *Sicarbas* **y se hace con el poder de** *Tiro*

La reina *Dido* **huye con sus leales en varias naves; desembarcan en** *Chipre***, donde se aprovisionan y raptan a varias doncellas.**

Después, prosiguen viaje hasta tocar las costas del Norte de Africa.

Los indígenas salen a recibirles de forma animosa pero al ver la belleza de *Dido* **se calman.**

Dido **aprovecha para hacer la siguiente petición:**

Desearía tanta tierra como pudiera rodear con una piel de toro

Los indígenas aceptan. *Dido* **parte en delgadas tiras una piel de toro y en el espacio que consigue encerrar funda una nueva ciudad:***Cartago*

Máximos: el problema de Dido.

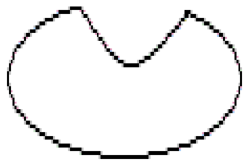
Al poco tiempo *Enéas*, **príncipe troyano, llega a las cercanías de** *Cartago* **tras haber naufragado en su huida al fin de la Guerra de Troya.**

Dido **se enamora de** *Enéas* **y viven una apasionada historia de amor hasta que** *Júpiter* **requiere a** *Enéas* **para que regrese al** *Lacio* **donde los Dioses le han encargado la fundación de** *Roma***.**

Dido **desesperada se sube a una pira funeraria y se da muerte apuñalandose.**

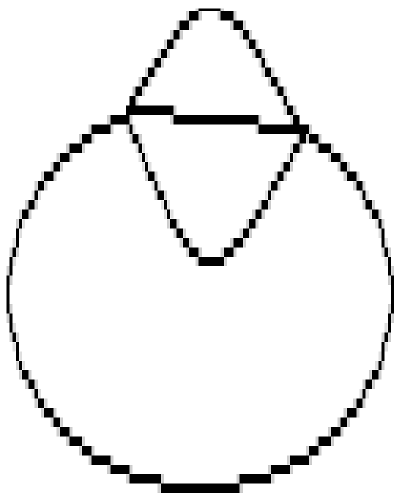
Esta es la historia de *Dido y Enéas* **como la cuenta Virgilio en la Eneida.**

Solución al problema de Dido:primer intento



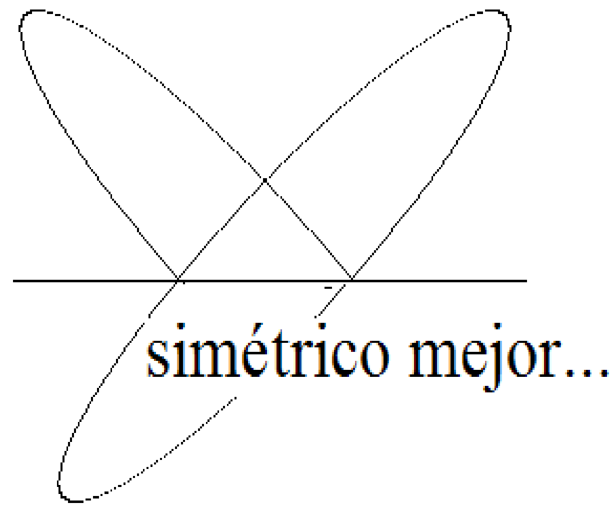
...así?

Solución al problema de Dido:primer intento

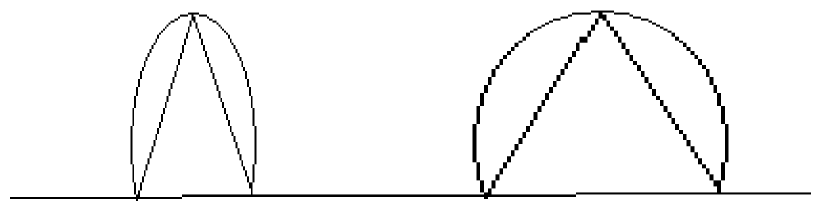


...mejor así!

Solución al problema de Dido:primer intento



Solución al problema de Dido:primer intento



y mejor ángulo recto...

Solución al problema de Dido:primer intento

Esta *prueba* de Steiner da como solución: el círculo.

Solución al problema de Dido: el análisis.

Falta demostrar que existe una curva de longitud L que hace máxima el área.

Sea $y : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ una función.

El área encerrada por la gráfica y los ejes es

$$A(y) = \int_a^b y(x)dx$$

Parametrizando respecto al arco:

$$(x, y) : [0, \frac{L}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} (x(0), y(0)) = (a, 0), \\ (x(\frac{L}{2}), y(\frac{L}{2})) = (b, 0) \\ \text{y} \\ (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 \end{array} \right.$$

El problema queda reducido a calcular el máximo de

$$A(y) = \int_0^{L/2} y(s)\sqrt{1 - [y'(s)]^2}ds$$

sobre las funciones que verifican $y(0) = y(\frac{L}{2}) = 0$.

L. Euler dará la solución sistemática...

Mínimos

- Muchos principios físicos están formulados en términos de mínimos de alguna magnitud:
  - Principio de tiempo mínimo de Fermat.
  - Principio de la mínima acción de Hamilton
  - Principio de Lagrange de estabilidad de los equilibrios con energía mínima.
  - Etc, etc, etc.

Este tipo de problemas es estudiado por el Cálculo de Variaciones

Mínimos

- **Muchos principios físicos están formulados en términos de mínimos de alguna magnitud:**
  - **Principio de tiempo mínimo de Fermat.**
  - **Principio de la mínima acción de Hamilton**
  - **Principio de Lagrange de estabilidad de los equilibrios con energía mínima.**
  - **Etc, etc, etc.**
- **En Geometría hay muchísimas situaciones en las que solucionar el problema pasa por calcular mínimos:**
  - **Cálculo de geodésicas**
  - **Problemas de curvatura**
  - **Superficies mínimas**
  - **Etc, etc, etc.**

Este tipo de problemas es estudiado por el Cálculo de Variaciones

Mínimos

- Muchos principios físicos están formulados en términos de mínimos de alguna magnitud:
  - Principio de tiempo mínimo de Fermat.
  - Principio de la mínima acción de Hamilton
  - Principio de Lagrange de estabilidad de los equilibrios con energía mínima.
  - Etc, etc, etc.
- En Geometría hay muchísimas situaciones en las que solucionar el problema pasa por calcular mínimos:
  - Cálculo de geodésicas
  - Problemas de curvatura
  - Superficies mínimas
  - Etc, etc, etc.
- En Economía también son naturales este tipo de problemas.
  Los modelos pioneros son debidos a F. P. Ramsey (Cambridge U.K., 1903-1930)

Este tipo de problemas es estudiado por el Cálculo de Variaciones

Mínimos

- **Los nombres de la primera etapa (antes del siglo XIX) son (los) Bernouilli, Newton, Euler, Lagrange, Legendre**

- **La segunda etapa se origina con el** *principio de* **Dirichlet visto por Weierstrass y Riemann y lleva a Hilbert y al siglo XX.**

La braquistocrona.

Esos locos con sus viejos cacharros!!

El problema parece haber sido considerado por Galileo en 1638.

En Junio de 1696 Jean Bernouilli lo formula como desafío a los matemáticos de la época.

Planteamiento del problema.

Dados dos puntos A y B en un plano vertical, obtener la curva que los une, de forma que una partícula que cae por ella bajo la acción de la gravedad emplea el tiempo mínimo.

Teniedo en cuenta que $Tiempo = \dfrac{Espacio}{Velocidad}$**, hemos de hacer mínimo:**

$$T(y) = \int_0^l \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx,$$

sobre las funciones tales que $y(0) = a$**,** $y(l) = 0$**.**

Se ha obtenido la solución por diversos métodos.

Una por el propio Bernouilli, usando una analogía con el principio de tiempo mínimo de Fermat.

La sistemática por Euler, y la más sorprendente ...

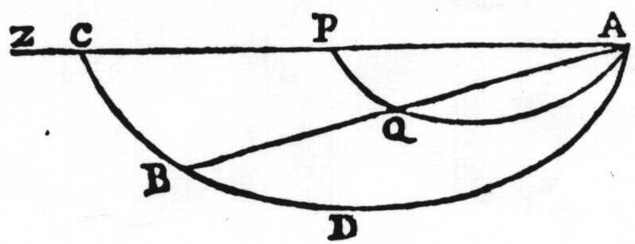
... la solución de Newton

The story is told by John Conduitt, the husband of Newton's niece, that Newton one day read John Bernoulli's challenge and wrote out his solutions before going to bed that night.[43] Whatever the truth of this tale, it is clear that on 30 January 1697 Newton sent to his friend Sir Charles Montagu, Secretary of the Royal Society, his solution of Bernoulli's two problems.[44]

In the first four and a quarter pages of his paper Newton reproduced verbatim Bernoulli's *Programma* of January 1697 and then said "Thus far Bernoulli. But the solutions of the problems are these."

Problem I

To be found is the curve *ADB* along which a heavy particle will fall under the action of gravity from any given point *A* to any given point *B*.



Solution

Through the given point *A* draw the horizontal line *APCZ* and on it first describe any cycloid *AQP* cutting the line *AB* (produced if need be) in the point *Q* and second another cycloid *ABC* whose base and altitude are, respectively, as *AB* is to *AQ*. This last cycloid passes through point *B* and is the curve along which a heavy particle will descend most quickly from the point *A* to the point *B*. QEI.

El punto de vista clásico: Euler.

El problema genérico del Cálculo de Variaciones es calcular el mínimo de

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))dx$$

sobre una clase admisible de funciones, $\mathcal{A}$.

Supongamos que para $v \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ se verifica que si $u \in \mathcal{A}$, entonces $u + tv \in \mathcal{A}$, al menos para $|t| < \epsilon$.

Euler aplica el Cálculo: si u_0 es un mínimo en $\mathcal{A}$, entonces cualquiera que sea $v \in \mathcal{C}_0^1([a,b])$ la función

$$g(t) = \mathcal{F}(u_0 + tv), \text{ tiene un mínimo en } t = 0 \;\Rightarrow g'(0) = 0$$

haciendo los cálculos e integrando por partes resulta:

$$g'(0) = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b \left[f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) - \frac{d}{dx}\left(f_{u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \right) \right] v(x)dx.$$

Y como es para toda función test v, concluimos que:

La condición necesaria para que u_0 sea mínimo es que se verifique la Ecuación de Euler:

$$f_u(x, u_0(x), u_0'(x)) = \frac{d}{dx}\left(f_{u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) \right).$$

El punto de vista clásico: Euler.

Condiciones suficientes fueron estudiadas por

Weierstrass, Jacobi, Lagrange, Legendre, Hilbert, etc.

Grosso modo, para calcular mínimos o máximos reducimos el problema a resolver ecuaciones diferenciales

Métodos Directos

Sea el *Problema de Dirichlet***:**

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, \quad u(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{D}$$

Para resolverlo Riemann cambia el punto de vista y usa lo que llama
Principio de Dirichlet:
La función u*, armónica en el dominio* $\mathcal{D}$ *y verificando* $u(x) = g(x)$ *cuando* $x \in \partial\mathcal{D}$*, es aquella que hace mínima la integral*

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx$$

sobre las funciones que satisfacen el valor de frontera.

El principio lleva el nombre de Dirichlet pues él mismo intentó dar una demostración.

Las funciones que usaba Dirichlet *eran pocas para concluir la convergencia necesaria.*

Este defecto fue notado por Weierstrass.

El *Principio de Dirichlet* **aparece tambien utilizado por Green y por Thompsom.**

Métodos Directos

¿ A que se llama método directo?

Usar la minimización para probar existencia de solución de las *Ecuaciones en Derivadas Parciales* **que son Ecuaciones de Euler de algún** *funcional* **(como la integral de Dirichlet).**

Hilbert desarrolló una forma general entre 1900-1904:

- **Da una prueba correcta del principio de Dirichlet.**
- **Propone en su famoso programa del** *Congreso Internacional de Paris* **de 1900, el estudio de problemas relacionados y el estudio de la regularidad de los** *minimizantes*

Notemos que una dificultad que se observa es que se trata de calcular extremos en espacios de funciones, típicamente de *dimensión no finita.*

Lo realmente curioso es que para poder calcular mínimos (o máximos) vamos a necesitar *promedios.*

Idea de los métodos directos

Consideramos, como ejemplo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = e^x . \end{aligned}$$

Es acotada inferiormente, siendo $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$**, pero no alcanza mínimo.**

El problema es que cualquier *sucesión minimizante:* **es decir,** $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ **tal que**

$f(x_k) \to 0$ **no es acotada,** $x_k \to -\infty$**.**

En el otro extremo, un caso muy interesante es cuando

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **es continua y tal que** $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$

En este caso, *usando el Teorema de* **Bolzano-Weierstrass** *se prueba la existencia de mínimo.*

Idea de los métodos directos

Con los Métodos Directos **se trata de obtener la existencia de mínimos de**

$$J(u) = \int_{\mathcal{D}} F(x, u(x), \nabla u(x))dx \quad u \in \mathcal{A} \subset X,$$

siendo $\mathcal{A}$ una clase admisible de funciones determinada por las condiciones del problema y contenida en un espacio normado completo (espacio de Banach), X.
En esta exposición X Espacio de Banach significará:

- $\mathbb{R}^N$
- **El espacio de Lebesgue** $L^p(\Omega) = \{f \mid \int_\Omega |f|^p dx < +\infty\}$ **si** $1 \leq p < \infty$ **donde la norma se define por** $||f||_p = (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$**,**
  o $L^\infty(\Omega) = \{f \mid ||f||_\infty = \sup |f(x)| < +\infty\}$**.**
- **los espacios de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega) = \{f \mid f \in L^p(\Omega),\ \nabla f \in [L^p(\Omega)]^N\}$**,**
  (∇f entendido en sentido de distribuciones).
  $+\infty \geq p \geq 1$**,** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **un abierto.**

Por simplicidad nos limitaremos al caso $1 < p \leq \infty$.

Por razones obvias los conceptos funcionales los introduciremos para L^p.

Trataremos de reproducir lo que ocurre en $\mathbb{R}$.

Y llegan los promedios!!!

Dificultades:

- **Se trata de calcular el mínimo en una clase admisible de funciones, $\mathcal{A} \subset X$, determinada por las condiciones del problema. Así X es típicamente un espacio normado de funciones con dimensión no finita. Supondremos que X es completo para poder pasar al límite.**
- **Por un conocido teorema de M. Riesz no hay un resultado del tipo de Bolzano-Weierstrass en X de dimensión no finita con respecto a la convergencia de la norma, en el sentido, que** *de sucesiones acotadas no necesariamente se pueden extraer subsucesiones convergentes.* **Es decir, ¡los compactos son escasos!.**

Para obtener un marco adecuado se debe introducir un concepto de *convergencia débil***.**

DEFINICIÓN. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$.
Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$.
Decimos que $f_k \rightharpoonup f$ debilmente en $L^p(\Omega)$ si y solo si

$a)$ **Existe $A > 0$ tal que $||f_k||_p < A$ para todo $k \in \mathbb{N}$**

$b)$ **Para cada cubo $Q \subset \Omega$ se verifica**

$$\int_Q f_k dx \to \int_Q f dx$$

Y llegan los promedios!!!

NOTA.

1. **Si $p = 1$ la situación para no** *salirse* **de L^1 con la convergencia débil, requiere una** *condición de equi-integrabilidad*. **De hecho la caracterización es un famoso teorema de Dunford-Pettis.**
2. **Si $p = +\infty$ se tiene el concepto de** *convergencia débil-**. **Decimos que $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ debil-* en $L^\infty(\Omega)$ si y solo si se verifican $||f_k||_\infty < A$ y la condición $b)$ de la definición anterior.**

Es ahora fácil establecer el resultado siguiente.

TEOREMA. *Sea $1 < p < \infty$. La sucesión $\{f_n\}_{n\in \mathrm{N}} \subset L^p$ converge débil- mente a $f \in L^p$ si y solo si para cada función $g \in L^q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, los promedios con peso g convergen, es decir,*

$$\int f_n g dx \to \int f g dx$$

Si $p = \infty$, la sucesión $\{f_n\}_{n\in \mathrm{N}} \subset L^\infty$ converge débil- a $f \in L^\infty$ si y solo si para cada función $g \in L^1$,*

$$\int f_n g dx \to \int f g dx$$

Propiedades de la convergencia débil.

El resultado del Teorema anterior se toma como definición de convergencia débil en la literatura de Análisis Funcional:

Sea X espacio de Banach y X^* su dual decimos que $x_k \rightharpoonup x$ debilmente en X si $\langle x_k, y^* \rangle \to \langle x, y^* \rangle$, para todo $y^* \in X^*$

En $\mathbb{R}^N$ hay normas con bolas *cuadradas* **y** *redondeadas*. **En $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ da igual pues todas son equivalentes!**

Sin embargo si X es un espacio de dimensión no finita no todas las normas son equivalentes (por ejemplo en $\mathcal{C}^1([a, b])$).

A partir de ahora consideraremos que X tiene una norma uniformemente convexa, es decir, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$||x|| \leq 1,\ ||y|| \leq 1,\ ||x - y|| > \epsilon \text{ entonces } ||x + y|| < 2(1 - \delta)$$

(en este sentido con bolas *redondeadas***).**

Nótese que si $1 < p < \infty$ la norma de $L^p(\Omega)$ es uniformemente convexa.

Esta elección no es solo por estética!

Teorema. *Sea X espacio de Banach con norma uniformemente convexa, entonces si $||x_k|| \leq M$ existe una subsución $x_{k_n} \rightharpoonup x$, débilmente.*

Propiedades de la convergencia débil.

Más en general se tiene la siguiente definición.

Definición. *Si X es un espacio de Banach tal que cualquiera que sea la sucesión acotada, $||x_k|| \leq M$, existe una subsucesión $x_{k_n} \rightharpoonup x$, débilmente, diremos que X es un espacio reflexivo.*

Es obvio que *si una sucesión converge en norma, converge debilmente* **y que el** *recíproco, es falso.*

Una propiedad que es muy importante en las aplicaciones es la siguiente.

TEOREMA. *Sea X espacio de Banach y $x_k \rightharpoonup x$ debilmente en X, entonces*

$$||x|| \leq \liminf_{k\to\infty} ||x_k||.$$

El resultado en el Teorema se lee diciendo que *la norma es debilmente semicontinua inferiormente (d.s. c. i)* **en el sentido de la definición siguiente.**

Definición. *Sea X espacio de Banach y sea $I : X \to \mathbb{R}$ un funcional. Se dice que I es debilmente semicontinuo inferiormente si cuando $x_k \rightharpoonup x$*

$$I(x) \leq \liminf_{k\to\infty} I(x_k).$$

Un resultado general de minimización

Si queremos copiar lo que ocurre en $\mathbb{R}^N$ está claro lo que hay que hacer...

TEOREMA. *Sea X espacio reflexivo y sea*

$$I : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfaciendo:

- *$a)$ Para $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, $I(x) \geq \alpha ||x|| + \beta$ (Coercividad).*
- *$b)$ I es debilmente semicontinuo inferiormente.*

Entonces,

$$\text{existe } z \in X \text{ tal que } I(z) = \inf_{x \in X} I(x)$$

El teorema es cierto, incluso fácil de probar, pero es solo relativamente útil... La hipótesis $b)$, (d.s.c.i) es poco compatible con las funciones no lineales.

Los *funcionales* **interesantes son de la forma**

$$J(u) = \int_{\mathcal{D}} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx.$$

Dos contribuciones se deben destacar:

- **La convexidad de F en el gradiente y alguna regularidad, implican la d.s.c.i. y, por tanto, la posibilidad de obtener mínimos. J. Serrin (1959), (1961) y E. De Giorgi (1968)**
- **En condiciones muy generales los mínimos son** *regulares*. **E. De Giorgi (1957)**

En este sentido se resuelven algunos de los problemas planteados por Hilbert en 1900.

Una aplicación

Consideremos el problema

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + \lambda f(x) & \textbf{en } \Omega \\ u = 0 & \textbf{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\lambda > 0$ **y** $f \in L^1(\Omega)$**,** $f(x) \gneqq 0$ **tal que si**

$$\lambda_1(f) = \inf_{\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega f\phi^2 dx}$$

se verifica

$$(\mathbf{B}) \quad \lambda_1(f) > 0.$$

Haciendo el cambio de variable de Hopf-Cole

$$v = e^u - 1$$

el problema se transforma en

$$(\mathbf{PL}) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda f(x)(v+1) & \textbf{en } \Omega \\ v = 0 & \textbf{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Una aplicación

TEOREMA. *Supongamos que f satisface la hipótesis* **(B)** *entonces,*

1. *Si $\lambda > \lambda_1(f)$ el problema $(\mathbf{P})$ no tiene solución en $W_0^{1,2}(\Omega)$.*
2. *Si $\lambda < \lambda_1(f)$ el problema $(\mathbf{P})$ tiene una única solución tal que $e^u - 1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Idea de la demostración.

1. **Si $\lambda > \lambda_1(f)$ quiere decir, por densidad, que**

$$\textbf{existe } \phi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \textbf{ tal que } \int_\Omega |\nabla \phi_0|^2 dx < \lambda \int_\Omega f \phi_0^2 dx < +\infty$$

Si, por contradicción, suponemos que $(\mathbf{P})$ tiene una solución u, entonces multiplicando la ecuación por ϕ_0^2 e integrando por partes obtenemos,

$$2 \int_\Omega \phi_0 \nabla \phi_0 \nabla u \, dx = \int_\Omega \phi_0^2 |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_\Omega f \phi_0^2 dx.$$

Luego se concluye

$$\lambda \int_\Omega f \phi_0^2 dx = 2 \int_\Omega \phi_0 \nabla \phi_0 \nabla u dx - \int_\Omega \phi_0^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi_0|^2 dx$$

que contradice la definición de ϕ_0.

Una aplicación

2. **Si $\lambda < \lambda_1(f)$ consideramos el problema lineal $(\mathbf{PL})$ que se obtiene con el cambio de Hopf-Cole.**

Como $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega f(x)v^2 - \lambda \int_\Omega f v$$

está bien definido en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y, además,

1) J **es coercivo, pues**

$$J(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\lambda_1(f)}(\frac{1}{2}+\epsilon)\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 - C(\epsilon)\lambda\int_\Omega f$$

y si $0 < \epsilon < \frac{1}{4}(\lambda_1(f)-\lambda)$, entonces $\delta = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\lambda_1(f)}(\frac{1}{2}+\epsilon)\right) > 0$.

2) **Es facil ver que J es diferenciable en $W_0^{1,2}(\Omega)$ y que las soluciones de $(\mathbf{PL})$ son los puntos críticos de J.**

3) J **es debilmente semicontinuo inferiormente por la debil semicontinuidad inferior de la norma y por el teorema de Rellich.**

Una aplicación

Por tanto, usando el Teorema abstracto, existe v que es un mínimo y solución débil de $(\mathbf{PL})$.

Tomando $u = \log(1+v)$ concluimos.

La unicidad de solución tal que $e^u - 1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ es un cálculo inmediato sobre $(\mathbf{PL})$.

Nota. Sin la condición $e^u - 1 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ el problema $(\mathbf{P})$ tiene infinitas soluciones en $W_0^{1,2}(\Omega)$.

A veces ni máximos ni mínimos...

En muchos problemas ´las soluciones interesantes no son *ni máximos ni mínimos*.

Un ejemplo. **Consideremos** $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ **un dominio acotado.**

Sea el funcional

$$I : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{5}\int_\Omega |u|^5 dx.$$

I **no es acotado inferiormente pues si** $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_0 \neq 0$, **y definimos**

$$g(t) = I(tu_0) \text{ se verifica que } \lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty.$$

I **tampoco es acotado superiormente pues si** $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, **tal que sop**$\phi = B_r(x_0) \subset \Omega$

$\phi_\mu(x) = \mu^{\frac{3}{5}}\phi(\mu(x - x_0))$, **se tiene que**

$i)$ **El soporte de** ϕ_μ **esta contenido en la bola** $B_{\frac{r}{\mu}}(x_0)$ **que, si** $\mu > 1$ **está contenida en** Ω.

$ii)$ $||\phi_\mu||_5 = ||\phi||_5$

$iii)$ $||\nabla\phi_\mu||_2 = \mu^{\frac{1}{10}}||\nabla\phi||_2 \to \infty$ **cuando** $\mu \to \infty$.

Por tanto $I(\phi_\mu) \to \infty$ **cuando** $\mu \to \infty$.

A veces ni máximos ni mínimos...

Los puntos críticos de I no pueden ser ni máximos ni mínimos globales.

No es difícil ver que $u = 0$ es un mínimo local. Pero ¿habrá algún otro punto crítico no trivial?

Si calculamos la ecuación de Euler que da los puntos críticos de I resulta ser,

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^3 u, \ \textbf{si } x \in \Omega \\ u &= 0, \ \textbf{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Resulta así que se trata de calcular soluciones (no triviales) del problema anterior.

Y no podemos pensar en minimizar o maximizar...

Nos va a dar la solución una contribución del año 1973 debida a

Antonio Ambrosetti y a Paul Rabinowitz.

El Teorema del Paso de la Montaña

Sea X espacio de Banach. Consideramos

$$I : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(H1)$ **Hipótesis sobre la geometría**

- $I(0) = 0$,
- **Existe $r > 0$ tal que si $|x| = r$, $I(x) > \alpha > 0$,**
- **Existe y_0 con $|y_0| > r$ tal que $I(y_0) < 0$**

$(H2)$ **Hipótesis sobre la regularidad**

- $I \in \mathcal{C}^1(X)$.
- **Existe c_0 tal que si $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ verifica**
  - $I(x_k) \to c < c_0$
  - $I'(x_k) \to 0$, **entonces existe una subsucesión $x_{k_j} \to x_\infty$ en X.**

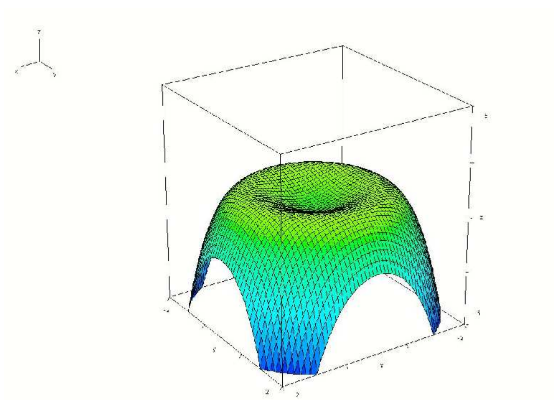
TEOREMA. (*Paso de la montaña*). *Sea X reflexivo e I verificando $(H1)$, $(H2)$. Entonces*

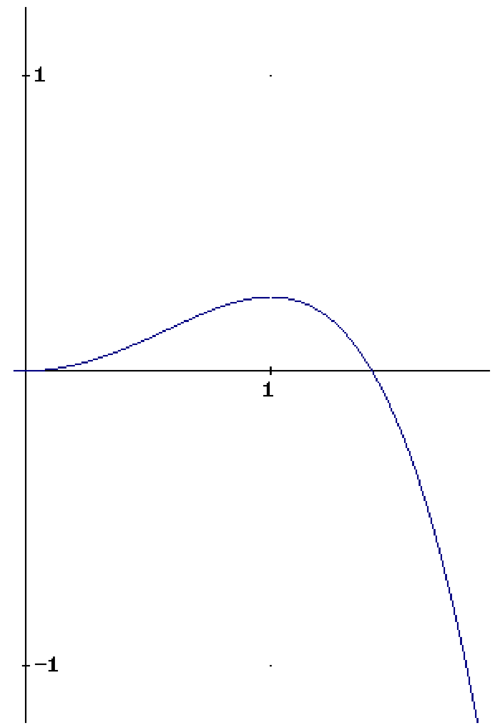
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

es un valor crítico de I, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $I(x_0) = c$ e $I'(x_0) = 0$.

El Teorema del Paso de la Montaña.

¡Es claro el nombre del Teorema!





Lo aplicamos a nuestro funcional I.

Aplicación

Volvemos a considerar el funcional

$$I : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{5}\int_\Omega |u|^5 dx.$$

$(H1)$ **Hipótesis sobre la geometría**

- **Es claro que** $I(0) = 0$**,**
- **Usando la inclusión de Sobolev,**
$$S\Big(\int_\Omega |u|^6 dx\Big)^{\frac{1}{6}} \leq \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$
y la desigualdad de Hölder, obtenemos
$$\frac{1}{5}\int_\Omega |u|^5 dx \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{6}}}{5S^5}\|\nabla u\|_2^5.$$
Es decir,
$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{|\Omega|^{\frac{1}{6}}}{5S^5}\|\nabla u\|_2^5$$
Por tanto, si $\|\nabla u\|_2 = \Big(\frac{S^5}{|\Omega|^{\frac{1}{6}}}\Big)^{\frac{1}{3}}$**,** $\quad I(u) \geq C(S,\Omega) > 0$
- **Además si** $u_0 \neq 0$ **es claro que para** t **suficientemente grande** $I(t\,u_0) < 0$

Aplicación.

$(H2)$**Hipótesis sobre la regularidad**

- $I \in \mathcal{C}^1(W_0^{1,2}(\Omega))$**. De hecho,**

$$I'(u) : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se define por

$$I'(u)(\phi) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle dx - \int_\Omega |u|^3 u \phi.$$

- *Condición de Palais-Smale*. **Si** $\{x_k\}_{k \in \mathrm{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ **verifica**
  - $I(u_k) \to c$
  - $I'(u_k) \to 0$**, entonces existe una subsución** $u_{k_j} \to u_\infty$ **en** $W_0^{1,2}(\Omega)$**.**

En efecto, se tiene

$$c = \lim_{k\to\infty} I(u_k) = \lim_{k\to\infty} I(u_k)[I(u_k) - \frac{1}{5} < I'(u_k), u_k >= \lim_{k\to\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \|\nabla u_k\|_2^2,$$

por tanto, $||\nabla u_k||_2 < C$ **y por el teorema de Rellich-Kondrakov existe una subsucesión** $u_{k_j} \to u_\infty$ **en** $L^5(\Omega)$
y por la continuidad de $(-\Delta)^{-1}$ **se tiene que**
$u_{k_j} \to u_\infty$ **en** $W_0^{1,2}(\Omega)$**.**

... y más promedios...

Materiales compuestos (composites) periódicos :

Nos centramos en el caso más simple de los *problemas a dos fases* **es decir, inclusiones dispersas de partículas extrañas en un medio.**

- **En la estructura se supone que las partículas** *dispersas* **son muy pequeñas con respecto al tamaño del cuerpo.**
- **Son** *materiales microscópicamente no homogéneos***.**
- **Se observa estabilidad de las propiedades físicas (conductividad eléctrica, la transferencia de calor, la permeabilidad, etc,) que difieren de las características individuales de los materiales constituyentes**
- **La descripción local se da por ecuaciones en derivadas parciales con** *coeficientes altamente oscilantes* **para tener en cuenta las escalas microscópica y macroscópica y las propiedades estructurales (periodicidad, quasiperiodicidad, etc.) .**

Compuestos periódicos en $N = 1$.

Consideremos,

$$(P) \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(a_\epsilon(x)\dfrac{du_\epsilon}{dx}\right) = f,\ l_1 < x < l_2 \\ u(l_1) = 0,\ \ u(l_2) = 0 \end{cases}$$

donde

$$0 < \alpha < a(x) < \beta \qquad \textbf{es regular en } \mathbb{R}\textbf{, } 1\textbf{-periódica,} \quad a(x+1) = a(x) \textbf{ y}$$

$$a_\epsilon(x) = a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Estimación para las soluciones de (P).

$$\left(\int_{l_1}^{l_2} |u_\epsilon'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{l_2 - l_1}{\alpha}\left(\int_{l_1}^{l_2} |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \textbf{ entonces}$$

- $u_\epsilon \rightharpoonup u_0$ **debilmente en** $L^2(l_1, l_2)$
- $u_\epsilon' \rightharpoonup u_0'$ **debilmente en** $L^2(l_1, l_2)$

Llamando

$$\xi_\epsilon = a_\epsilon u_\epsilon' \qquad \textbf{satisface} \quad -\frac{d\xi_\epsilon}{dx} = f \quad \textbf{en} \qquad (l_1, l_2).$$

Compuestos periódicos en $N = 1$.

Teniendo en cuenta las estimaciones para u_ϵ concluimos que

$$||\xi_\epsilon||_2 \leq \frac{\beta(l_2 - l_1)}{\alpha}||f||_2, \quad \textbf{por tanto,}$$

$$\xi_\epsilon \rightharpoonup \xi_0 \quad \textbf{debilmente en } L^2(l_1, l_2).$$

Además

$$-\frac{d\xi_0}{dx} = f.$$

Nótese que tenemos,

$$||\xi_\epsilon||_2 + ||\frac{d\xi_\epsilon}{dx}||_2 \leq \frac{\beta(l_2 - l_1)}{\alpha}||f||_2 + ||f||_2.$$

Por tanto, para alguna subsucesión,

$$\xi_\epsilon \longrightarrow \xi_0 \textbf{ fuertemente en } L^2(l_1, l_2).$$

PROBLEMA. ¿Qué relación hay entre u_0 y ξ_0?

La respuesta la da el siguiente resultado.

Teorema. *(Riemann-Lebesgue)*

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea f λ-periódica con $f \in L^p([0, \lambda])$. Sea $\quad f_\epsilon(x) = f(\frac{x}{\epsilon})$.

Entonces

$$f_\epsilon \rightharpoonup \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)dx, \textbf{ para } \epsilon \to 0, \textbf{ debilmente en } L^p(O), \forall O \subset \mathbb{R} \textbf{ abierto acotado.}$$

Débil-* si $p = \infty$)

Compuestos periódicos en $N = 1$.

En el problema bajo estudio tenemos que

$$0 < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{a(x)} < \frac{1}{\alpha} \text{ y } \frac{1}{a(x)}, \ 1\text{-periódica}$$

Por el Teorema de Riemann-Lebesgue tenemos en particular que

$$\frac{1}{a_\epsilon(x)} \rightharpoonup \int_0^1 \frac{1}{a(x)}dx = a* \neq 0, \text{ en } L^\infty([l_1, l_2])$$

Entonces, como

$$\frac{du_\epsilon}{dx} = \frac{\xi\epsilon}{a_\epsilon}, \text{ concluimos que } \frac{du_\epsilon}{dx} \rightharpoonup a * \xi_0.$$

Es decir,

$$\frac{du_0}{dx} = a^*\xi_0, \text{ o bien,}$$

$$(P) \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(x)}dx}\dfrac{du_0}{dx}\right) = f, \ l_1 < x < l_2 \\ u(l_1) = 0, \ u(l_2) = 0 \end{cases}$$

que se llama ecuación homogeneizada.

Compuestos periódicos en $N = 1$.

Lo que se busca es obtener u_ϵ.
Si se resuelve el problema auxiliar (¡que no depende de ningún dato! y se llama ecuación de los correctores),

$$(C)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dy}\left(a(y)(1+\dfrac{dw(y)}{dy})\right) = 0,\ 0 < x < 1 \\ y \longrightarrow w(y),\, 1\text{-periódica,} \end{cases}$$

la solución u_ϵ aparece como la siguiente *corrección* **de u_0,**

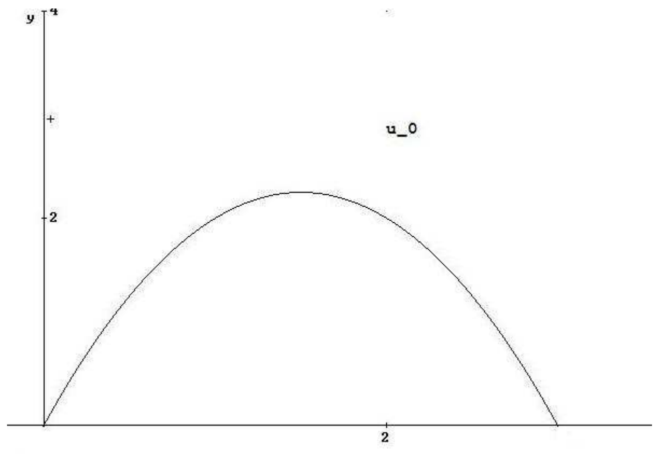
$$u_\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon w(\frac{x}{\epsilon})\, u_0'(x) + O(\epsilon), \quad \epsilon \to 0, \text{ en el espacio de energía.}$$

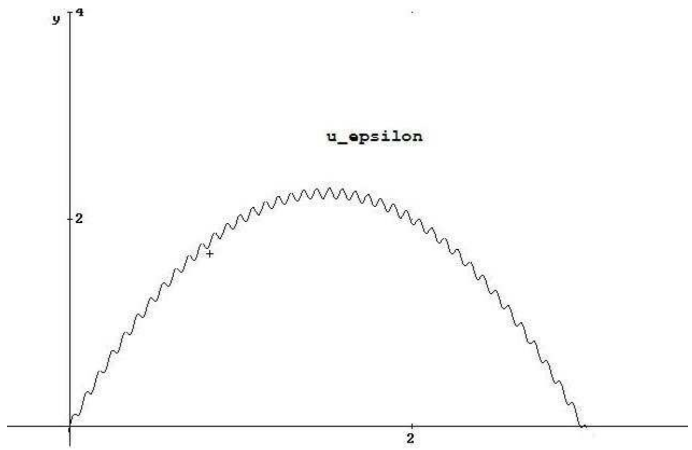
Es decir, u_ϵ es dado aproximadamente por

- u_0 **que describe el comportamiento a** *escala macroscópica*.
- **El** *corrector* w **que es una función $1-$periódica que describe las oscilaciones a escala ϵ.**

NOTA. Ni los coficientes de la ecuación homogeneizada ni los correctores dependen de los datos.

Unas gráficas.





FIN