

Bifurcación de soluciones periódicas en el problema de  
Sitnikov

Andrés Mauricio Rivera Acevedo.



Universidad de Granada  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemática Aplicada  
Granada-España

2012

Bifurcación de soluciones periódicas en el problema de  
Sitnikov

Andrés Mauricio Rivera Acevedo.

TESIS DOCTORAL

Director

D. Rafael Ortega Ríos



Universidad de Granada  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemática Aplicada  
Granada-España  
2012

NOTA DE ACEPTACIÓN

POR UNANIMIDAD EL COMITÉ EVALUADOR

APRUEBA ESTA TESIS DOCTORAL CON NOTA

SOBRESALIENTE CUM-LAUDE

COMITÉ EVALUADOR

PRESIDENTE FABIO ZANOLIN

SECRETARIO PEDRO J. TORRES

VOCAL CARLOTA REBELO

VOCAL DAVID ARCOYA

VOCAL JESÚS PALACIAN

GRANADA, 11 DE MAYO DE 2012

*Alla mia famiglia,  
in particolare ad nonna Adele,  
che pensa sempre a me nonostante la distanza.*

# AGRADECIMIENTOS

Probablemente una de las partes que la mayoría de la gente lee en una tesis es la que corresponde a los agradecimientos. Todos están a la expectativa de ver cómo el autor reparte sus gratitudes, qué le debe a cada persona, en lo profesional, en lo personal o quizás en ambos aspectos y lo más importante qué le dice a cada uno. No quiero exagerar en mis agradecimientos y muchos menos extenderlos pues reconozco el deber mucho y de tantas formas a varias personas.

Inicio entonces dándole las gracias a Dios Padre Todopoderoso por permitirme llegar a este punto de mi vida y darme la fortaleza para lograr este objetivo trazado desde hace un tiempo.

Mi mayor agradecimiento es para mi director de tesis, Rafael Ortega Ríos, quien a pesar de sus muchas obligaciones siempre tuvo el tiempo, la paciencia y el deseo de ser un guía para mí, siempre enseñándome con ejemplos, diciéndome que mirara el caso más simple que lo estudiara a fondo y que partiera de allí. Esa pasión por las matemáticas, su forma de enseñarlas (que hace que parezcan simples) es algo que siempre me sorprende. Aunque aún tenga mucho más que agradecerle y no lo escriba aquí, termino diciéndole mil gracias.

Quiero también darle las gracias al profesor Pedro Torres de quien aprendí muchas cosas en matemáticas, más aún tuve la oportunidad de hacer un trabajo de investigación en conjunto el cual tuvo un muy buen resultado final. Además, resalto su amabilidad y disponibilidad constante, aún en medio de sus muchas ocupaciones.

Tuve la suerte de tener excelentes profesores durante mis cursos de doctorado en el Departamento de Matemática Aplicada de la UGR, a todos ellos aún cuando no nombre a cada uno les doy las gracias.

En el plano personal mi primer agradecimiento va por supuesto a mi familia. A mis padres, mi abuelita, mis tíos y tías, siempre me han ayudado en muchos aspectos. Pero además a mis parientes lejanos a quienes conocí en Italia y los encontré a la vez que encontré a mi director de tesis, como un destino trazado del cual no sabía nada. A ellos que me abrieron las puertas de su hogar y me han incluido como un miembro más en su familia, la verdad no tengo como agradecerles, mi gratitud será para siempre, en especial a nonna Adele.

Entre mi pequeño círculo de amistades, Alexander y su esposa Katherine nombro con gran aprecio, pues tuve la oportunidad de compartir con ellos parte de mi estancia en España y a quienes les deseo el mayor de los éxitos. También menciono con mucho aprecio a mi amigo Luis Gerardo Pedraza, quien siempre ha estado interesado en mi trabajo de tesis y me ánima mucho a seguir con mis estudios y la investigación.

No podría olvidar el darle las gracias a la Fundación Carolina y a la Pontificia Universidad Javeriana-Cali que me han brindado los medios económicos y el tiempo para hacer mis estudios de doctorado. Es por esto que al Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas de la PUJ-Cali deseo retribuir con mis nuevos conocimientos en matemáticas para que juntos fortalezcamos nuestro departamento.

Sé bien que no existiría forma alguna de agradecer en este breve espacio a todas las personas que tengo en mente, si me olvido de mencionar a alguien explícitamente y esa persona no sabe si la tengo en cuenta entre las personas a quienes debo dar las gracias, primero le pido disculpas y segundo quiero que tenga por seguro que sí. De los errores y omisiones soy claramente el único responsable.

## Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. El problema de Sitnikov</b>	<b>3</b>
<b>3. Bifurcaciones en el plano</b>	<b>16</b>
3.1. El concepto de Bifurcación . . . . .	16
3.2. Bifurcaciones locales en el plano. . . . .	21
<b>4. Conceptos básicos sobre la ecuación de Hill y la ecuación de Ince</b>	<b>30</b>
4.1. Sobre la ecuación de Hill. . . . .	30
4.2. Ecuación de Ince y coexistencia de soluciones periódicas . . . . .	36
<b>5. Ecuaciones de tipo hipergeométrico</b>	<b>39</b>
5.0.1. Sobre el número de ceros de la función hipergeométrica de Gauss	42
<b>6. Sobre el teorema de Continuación Global de Leray-Schauder y una discusión sobre el número de soluciones periódicas y pares en un sistema hamiltoniano autónomo</b>	<b>47</b>
6.1. Número de soluciones periódicas y pares en un sistema hamiltoniano autónomo . . . . .	52
6.2. Aplicación en un problema químico . . . . .	58
<b>7. Órbitas periódicas en el problema de Sitnikov</b>	<b>65</b>

<b>8. Bifurcaciones Globales desde el centro de masas en el problema de Sitnikov</b>	<b>76</b>
8.1. El problema lineal . . . . .	80
8.2. Bifurcación desde el equilibrio . . . . .	86
8.3. Propiedades oscilatorias de las soluciones . . . . .	92
8.4. Demostración del teorema principal . . . . .	94
8.5. Continuación desde el problema circular . . . . .	97
<b>9. El problema Generalizado de Sitnikov</b>	<b>100</b>
9.1. Soluciones periódicas en el problema generalizado de Sitnikov . . . . .	110
9.2. Linealización del problema generalizado de Sitnikov en el origen . . . .	113
<b>10. Conclusiones y problemas futuros</b>	<b>130</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En 1960 el matemático ruso K.A. Sitnikov presentó un modelo del problema de tres cuerpos conocido en la actualidad como el *problema de Sitnikov*. Dicho problema considera dos cuerpos con igual masa (masas primarias) que se mueven en un mismo plano alrededor de su centro de masas como soluciones de un problema de dos cuerpos con momento angular no cero. El tercer cuerpo de masa cero se mueve en la recta que pasa por el centro de masas del sistema y es ortogonal al plano de movimiento de las primarias. El problema de Sitnikov se centra en describir las órbitas de movimiento del cuerpo de masa cero (en el capítulo 2 se presenta en detalle este problema). Existen muchos trabajos referidos al problema de Sitnikov, en particular en el trabajo realizado por J. Llibre y R. Ortega (ver [26]), se aplicó por primera vez una versión del método de continuación global de ceros para funciones dependientes de un parámetro desarrollado por Leray-Schauder (ver [28]), con el fin de obtener familias de soluciones pares y periódicas en el problema de Sitnikov. De forma más precisa, se parte de una solución periódica del problema circular de Sitnikov (cuando la excentricidad  $e$  de las órbitas de las primarias es cero) y se continúa para valores del parámetro excentricidad no necesariamente pequeños,  $e \in ]0, 1[$ . Como parte de los resultados en [26] se observa la posibilidad de que una rama de soluciones no triviales que emana del problema circular de Sitnikov colisione con la solución trivial en un valor especial de la excentricidad. Es aquí entonces donde se inicia mi proyecto de tesis doctoral, con el objetivo principal

de caracterizar estas colisiones con la solución trivial.

De esta forma, esta memoria expone el trabajo de investigación realizado acerca de la continuación global de soluciones pares y periódicas del problema de Sitnikov desde la solución trivial y no desde el problema circular como se hace en [26]. Se hace un análisis local de las bifurcaciones de soluciones periódicas que emanan desde la solución trivial, al igual que el tipo de bifurcación de dichas soluciones, presentamos resultados de estabilidad de las soluciones del problema linealizado de Sitnikov junto a la estabilidad de la solución trivial al igual que un resultado de coexistencia de soluciones para el problema linealizado de Sitnikov por medio del estudio de una ecuación de Ince.

Por otro lado, también se presenta una generalización del problema de Sitnikov en donde se consideran  $N \geq 2$  masas primarias moviéndose en un mismo plano. Para este problema generalizado de Sitnikov se tratan las mismas preguntas desarrolladas en [26] y [36] y se aplican las mismas técnicas utilizadas en estos últimos trabajos para el problema de Sitnikov. Cabe mencionar que en referencia al problema generalizado de Sitnikov que en este trabajo de tesis se considera quedan varias preguntas pendientes las cuales se esperan desarrollar con mayor profundidad en trabajos posteriores.

# Capítulo 2

## El problema de Sitnikov

Un problema clásico de la Mecánica Celeste (quizás el objetivo principal de estudio) cuya formulación se inicio hace ya varios siglos es el *El Problema de los  $N$ -cuerpos*. Dicho problema consiste en estudiar un sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de  $N$  cuerpos (*masas puntuales no nulas*) en el espacio tres dimensional los cuales interactúan unos con otros de acuerdo a la ley de atracción gravitacional de Newton. Matemáticamente el problema de los  $N$  cuerpos se formula de la siguiente forma. Sea  $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j(t) \in \mathbb{R}^3$  la posición del cuerpo  $P_j$  en cada instante de tiempo  $t$  y  $m_j$  la masa de dicho cuerpo con  $j = 0, \dots, N-1$ . La ecuación diferencial que gobierna el movimiento de cada masa puntual  $P_j$  está dada por la ley de atracción gravitacional de Newton

$$m_j \frac{d^2 \mathbf{P}_j}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}_j}, \quad (2.1)$$

donde  $U$  es el potencial Newtoniano dado por

$$U = - \sum_{0 \leq k < j \leq N-1} G \frac{m_k m_j}{\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_j\|},$$

$G$  es la constante de gravitación universal y  $\|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_j\|$  denota la distancia euclidiana entre  $\mathbf{P}_k$  y  $\mathbf{P}_j$ . Dado que dos cuerpos no pueden ocupar la misma posición (caso en el cual se presenta una colisión), el sistema de ecuaciones (2.1) está bien definido en

$$\Omega = \mathbb{R}^{3N} - \bigcup_{k=0, k \neq j}^{N-1} \Omega_{k,j},$$

con  $\Omega_{k,j} = \{(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{N-1}) \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_j\}$ .

El caso más sencillo y para el cual se pueden describir explícitamente todas las soluciones de (2.1) es el *problema de dos cuerpos*,  $N = 2$ . Los casos  $N \geq 3$  siguen siendo tema de estudio en la actualidad. Quizás uno de los principales objetos de estudio sobre el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) es el comportamiento de las soluciones en un intervalo de tiempo no acotado al igual que dar respuestas a preguntas como tales como, la existencia o no de soluciones acotadas, la posible colisión en tiempo finito, la existencia de soluciones oscilatorias y la existencia y construcción de soluciones periódicas. En este último caso el conocimiento de la órbita periódica para un tiempo finito permite conocerla para todo valor del tiempo. El problema de los  $N$  cuerpos atrajo (y continúa haciéndolo) la atención de muchos matemáticos, por ejemplo Newton, Lagrange, Poincaré, Birkhoff entre otros. De manera más reciente encontramos a Siegel, Kolmogorov, Alekseev, Moser, Arnold, Chenciner entre otros. Toda esta afluencia de científicos alrededor de este problema trajo consigo la creación y el desarrollo de nuevas e importantes herramientas matemáticas.

Ciertamente después de resolver en su totalidad el problema de dos cuerpos, el problema más simple a estudiar es el problema de los tres cuerpos. Este caso presenta grandes retos y en la actualidad se tienen muchos resultados parciales pero no un estudio completo de todas sus soluciones, pero si se consideran ciertas restricciones en el problema de tres cuerpos se pueden determinar varios resultados de gran interés. Por esta razón existen muchos trabajos referidos al *Problema Restringido de los Tres Cuerpos* el cual consiste en describir los movimientos de un cuerpo de masa infinitesimal (en el cálculo formal se toma la masa igual a cero) digamos  $P_0$  bajo la acción gravitacional de dos cuerpos de masas no cero  $P_1$  y  $P_2$  llamados cuerpos primarios o simplemente *primarias* que se mueven en órbitas elípticas como soluciones de un problema de dos cuerpos. Como es lógico aparecen distintos problemas según el movimiento de las primarias que se considere, en relación a esto, es posible clasificar la existencia de 30 problemas

restringidos de tres cuerpos distintos en dimensiones 1, 2 y 3 (ver [7]).

En esta memoria nos centramos en un problema restringido de tres cuerpos conocido como el *Problema de Sitnikov*, llamado así en honor al matemático ruso K. A. Sitnikov [45] quien fue el primero en dar argumentos heurísticos para mostrar la existencia de órbitas de tipo oscilatorio que corresponden a órbitas no acotadas en las cuales el cuerpo de masa infinitesimal no llega a escaparse a infinito. Este tipo de órbitas fue predicha por el astrónomo J. Chazy en 1922 (ver [9]) al clasificar los comportamientos del cuerpo de masa infinitesimal en el problema restringido de los tres cuerpos cuando el tiempo tiende a infinito (Evoluciones Finales). En dicha clasificación Chazy determinó siete grupos distintos, demostrando la existencia de seis, quedando pendiente el presentado por Sitnikov. Quizás una de las principales razones por la cual es de interés el estudio del problema de Sitnikov es que es el problema restringido de dimensión más baja en donde no hay presencia de colisiones. Más aún Alekseev en [2], [3], [4] demuestra que en el problema restringido de los tres cuerpos considerado por Sitnikov se presentan todos los movimientos finales establecidos por Chazy, dando así un mayor valor al estudio de este interesante problema.

La configuración del problema restringido de tres cuerpos estudiada por Sitnikov es la siguiente: Los cuerpos primarios de igual masa se mueven en un mismo plano (considere el plano  $x, y$ ) describiendo órbitas elípticas alrededor del origen (centro de masas) como soluciones de un problema de dos cuerpos. El tercer cuerpo de masa infinitesimal se mueve en la recta ortogonal al plano de movimiento de las primarias (el eje  $z$ ) y pasa por el centro de masas del sistema. (ver figura 2.1)

Normalizando el tiempo de manera que el periodo de las masas primarias sea  $2\pi$ , su masa  $m_1 = m_2 = 1/2$  y la constante gravitacional  $G = 1$ , la ecuación de movimiento que satisface la partícula infinitesimal está dada por

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r(t, e)^2)^{3/2}} = 0, \quad (2.2)$$

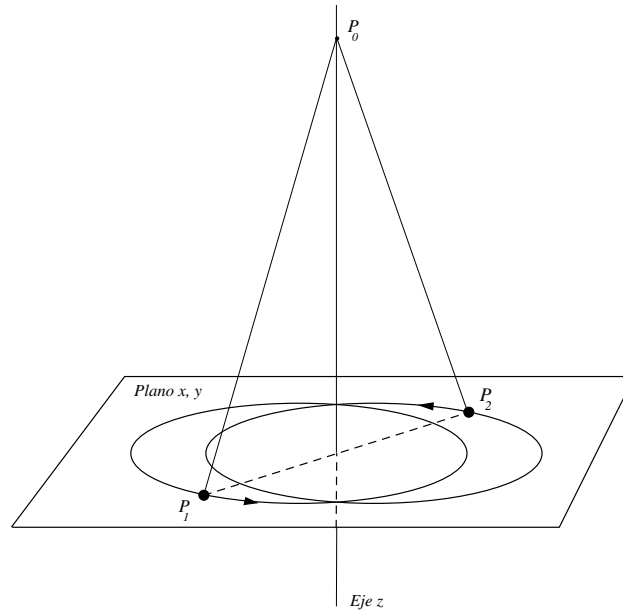


Figura 2.1: Configuración del sistema de los tres cuerpos en el problema de Sitnikov.

donde  $e \in [0, 1[$  es la **excentricidad** de las órbitas elípticas de las primarias que es un parámetro de la ecuación (2.2) y  $r(t, e)$  es la distancia de las primarias al centro de masas del sistema la cual está dada por la ecuación

$$r(t, e) = \frac{1}{2}(1 - e \cos u(t, e)). \quad (2.3)$$

La función  $u(t, e)$  es la anomalía excéntrica del sistema y satisface la ecuación de Kepler (ver [39])

$$u(t, e) - e \operatorname{sen} u(t, e) = t. \quad (2.4)$$

Más aún, para cada  $e \in [0, 1[$  la anomalía excéntrica satisface

$$u(-t, e) = -u(t, e), \quad u(t + 2\pi, e) = u(t, e) + 2\pi, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Un primer resultado que presentamos en relación a las soluciones de la ecuación (2.2) es sobre el intervalo maximal de definición que ellas pueden tener. Sea  $e \in [0, E]$  con

$0 < E < 1$ , nótese que el problema de Sitnikov (2.2) se puede escribir en la forma

$$\dot{Z} = \mathcal{F}(t, Z), \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(t, Z) = \left( \dot{z}, \frac{-z}{(z^2 + r(t, e)^2)^{3/2}} \right)^{tr}, \quad (2.6)$$

en donde  $\dot{Z} = (z, \dot{z})^{tr}$  y  $\mathcal{F} : ]-\infty, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función diferenciable. Más aún

$$D_Z \mathcal{F}(t, Z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(t, z) & 0 \end{pmatrix},$$

con  $f(t, z) = \frac{3z^2}{(z^2 + r(t, e)^2)^{5/2}} - \frac{1}{(z^2 + r(t, e)^2)^{3/2}}$ . A partir de (2.3) se deduce que

$$\frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4}(1-E)^2)^{3/2}} - 3 < f(t, z) < 3 - \frac{1}{(z^2 + \frac{1}{4}(1+E)^2)^{3/2}},$$

para todo  $(t, e) \in ]-\infty, \infty[ \times [0, E]$ . Se sigue entonces que la función  $\mathcal{F}$  es globalmente Lipschitziana en  $Z$  es decir:

$$\|\mathcal{F}(t, Z) - \mathcal{F}(t, Z_*)\| \leq L \|Z - Z_*\|, \quad \text{para todo } t \in ]-\infty, \infty[,$$

con  $L = \|D_Z \mathcal{F}(t, Z)\|$ . Esto implica que  $\mathcal{F}(t, Z)$  tiene un crecimiento a lo sumo lineal, es decir:

$$\|\mathcal{F}(t, Z)\| \leq L \|Z\| + \|\mathcal{F}(t, 0)\|.$$

A continuación recordamos la siguiente proposición que se encuentra en la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Proposición 2.1.** *Sea  $\mathcal{D} = ]a, b[ \times \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  continua que*

$$\|\mathcal{F}(t, X)\| \leq \alpha(t) \|X\| + \beta(t), \quad \text{para todo } (t, x) \in \mathcal{D},$$

donde  $\alpha, \beta$  son funciones continuas en  $]a, b[$ . Entonces la solución maximal de

$$X' = \mathcal{F}(t, X), \quad X(t_0) = X_0,$$

con  $(t_0, X_0) \in \mathcal{D}$  está definida en  $]a, b[$ .

De la anterior discusión y la Proposición 2.1 tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.** *Cualquier solución del problema de Sitnikov (2.2) está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Cabe mencionar en este punto que toda solución  $z(t, e)$  de (2.2) es analítica en  $\mathbb{R} \times [0, 1[$ . Además (2.2) es invariante bajo la simetría  $(z, t) \rightarrow (-z, -t)$ . En consecuencia,  $\phi(t, e) = -z(-t, e)$  es solución de (2.2) si y solo si  $z(t, e)$  es solución, más aún, si  $z(t, e)$  satisface  $z(0) = \xi$  podemos suponer que  $\xi > 0$ .

Si tenemos que  $e = 0$  nos referimos al *Problema Circular de Sitnikov*, en cuyo caso la ecuación (2.2) viene dada por

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + \frac{1}{4})^{3/2}} = 0. \quad (2.7)$$

Esta ecuación diferencial autónoma define un sistema hamiltoniano integrable de un grado de libertad y con hamiltoniano  $H$  dado por

$$H(z, v) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}},$$

con  $v = \dot{z}$ .

En el problema circular de Sitnikov, las órbitas viven en las curvas de nivel  $H(z, v) = c$ , con  $c \in [-2, \infty[$ , en consecuencia los diferentes valores de la constante  $c$  determinan el tipo de órbita en el espacio de fases  $(z, v)$ . Se pueden observar tres tipos de trayectorias que dependen del valor de  $c$ .

1. Si  $c = -2$  entonces  $z = 0, v = 0$  por lo que el origen es un punto de equilibrio, más aún es un centro. Tenemos así la solución trivial  $z(t) \equiv 0$ .
2. Si  $-2 < c < 0$  tenemos curvas de nivel cerradas. Esta situación corresponde al caso de órbitas periódicas.
3. Si  $c = 0$  tenemos dos separatrices, que representan dos órbitas parabólicas. Es decir, dos órbitas que se aproximan a infinito con velocidad cero. Esta afirmación



es debida al siguiente hecho. Si  $c = 0$ , de la conservación de la energía tenemos la ecuación diferencial

$$\dot{z}(t) = \frac{\pm\sqrt{2}}{(z^2(t) + 1/4)^{1/4}}, \quad (2.8)$$

cuyas soluciones están definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Por otro lado se considera el siguiente enunciado

**Proposición 2.3.** *Sea  $g : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un intervalo abierto  $U$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $x : ]\alpha, \infty[ \rightarrow U$ ,  $x = x(t)$ , es una solución de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = g(x),$$

y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$  con  $x^* \in U$  entonces  $g(x^*) = 0$ .

**Demostración.** Consideremos la sucesión  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Por la regla de Barrow y el teorema del valor medio para integrales tenemos que

$$x(n+1) - x(n) = \int_n^{n+1} g(x(s)) ds,$$

$$x(n+1) - x(n) = g(x(\tau_n))[(n+1) - n], \quad \text{para algún } \tau_n \in ]n, n+1[.$$

Nótese que la sucesión  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , satisface  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty$ . Tenemos entonces por lo anterior que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x(\tau_n)) = g(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} [x(n+1) - x(n)] = 0,$$

lo que completa la demostración.  $\square$

De la ecuación diferencial (2.8) se sigue que  $\dot{z}(t)$  tiene un signo; por lo tanto  $z(t)$  es monótona y existe el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$  (finito o infinito). Como la función

$\frac{\pm\sqrt{2}}{(z^2(t) + 1/4)^{1/4}}$  no se anula, entonces de la anterior proposición se deduce que  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \infty$ . Volviendo a la ecuación (2.8) observamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = 0$ .

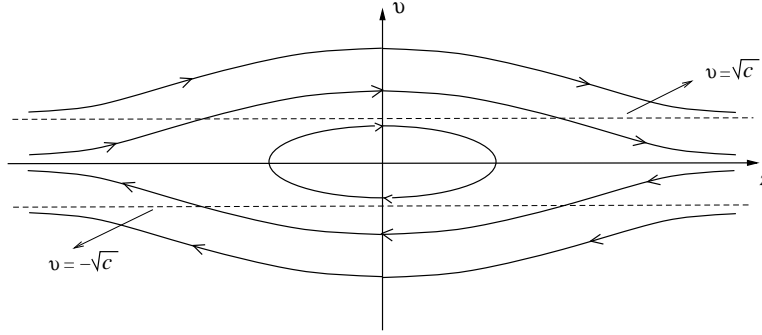


Figura 2.2: Diagrama de fases del problema circular de Sitnikov.

4. Si  $c > 0$  tenemos dos órbitas hiperbólicas. Es decir, dos órbitas que se aproximan a infinito con velocidad no nula. En efecto, para este caso se tiene

$$\dot{z}(t) = \pm \sqrt{c + \frac{2}{(z^2(t) + 1/4)^{1/2}}}.$$

De nuevo, por la Proposición 2.3 tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}(t) = \pm\sqrt{c}$ , con  $c > 0$ .

En relación al problema circular de Sitnikov, encontramos en [6] las expresiones analíticas de las soluciones para  $c \in ]-2, 0[$  usando Funciones Elípticas de Jacobi y de igual forma la expresión analítica de la función periodo para las órbitas periódicas. En [6] encontramos el siguiente teorema que presenta las propiedades más importantes de la función periodo  $T$  en el problema circular de Sitnikov (2.7) la cual es una función analítica en  $]-2, \infty[$ .

**Teorema 2.1.** *El periodo  $T$  en la variable  $c \in ]-2, 0[$  satisface:*

(a)  $\lim_{c \rightarrow 0} T(c) = \infty$ ,  $\lim_{c \rightarrow 0} T'(c) = \infty$ ,  $\lim_{c \rightarrow -2} T(c) = \pi/\sqrt{2}$ .

(b)  $T'(c) > 0$  para todo  $c \in ]-2, 0[$ .

(c)  $\lim_{c \rightarrow -2} T'(c) = \pi(1 + 4\sqrt{2})/16$ .

De este teorema es fácil deducir la gráfica de la función  $T(c)$  la cual se encuentra también en [6].

Si  $e \in ]0, 1[$  la ecuación (2.2) determina el *Problema Elíptico de Sitnikov*. Nótese que en este caso la ecuación es no autónoma ya que la variable temporal aparece explícitamente por medio de  $r(t, e)$ . Más aún de (2.5) se deduce para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[$  la función  $r(t, e)$  es par y periódica en  $t$  con periodo mínimo  $2\pi$ .

**Lema 2.1.** *Para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[$  la función  $\mathcal{R}(t, e) = r(t, e)^2$  es periódica en  $t$  con periodo mínimo  $2\pi$ .*

**Demostración.** De (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t + 2\pi, e) &= r(t + 2\pi, e)^2 \\ &= r(t, e)^2 = \mathcal{R}(t, e),\end{aligned}$$

para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times ]0, 1[$ , por lo tanto  $2\pi$  es un periodo de  $\mathcal{R}$ . Vamos a demostrar que si  $0 < \tau$  es un periodo de  $\mathcal{R}$  entonces  $2\pi \leq \tau$ . En efecto, para cada  $e \in [0, 1[$  fijo obsérvese que  $\mathcal{R}(\tau, e) = \mathcal{R}(0, e)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}(1 - e \cos u(\tau, e))^2 &= (1 - e \cos u(0, e))^2 \\ &= (1 - e)^2.\end{aligned}$$

Dado que  $1 - e \cos u(\tau, e) > 0$  y  $1 - e > 0$  para todo  $e \in [0, 1[$  se deduce que  $u(\tau, e) = 2N\pi$  para algún  $N \in \mathbb{Z}$ . De otro lado la función  $u(t, e)$  es monótona creciente en  $t$  con  $u(0, e) = 0$ , por lo tanto  $N \geq 1$ . De aquí tenemos

$$2\pi = u(2\pi, e) \leq 2N\pi = u(\tau, e),$$

en consecuencia  $2\pi \leq \tau$ .  $\square$

Este resultado sobre la periodicidad de la función  $r(t, e)^2$  nos dice que en el caso  $e \in ]0, 1[$  la función

$$\mathcal{G}(t, z, e) = \frac{z}{(z^2 + r(t, e)^2)^{3/2}},$$

es periódica en  $t$  con periodo mínimo  $2\pi$ . Antes de presentar un resultado sobre el periodo de las soluciones periódicas para el problema elíptico de Sitnikov consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$(\dagger) \quad \dot{X} = \mathcal{F}(t, X),$$

con  $\mathcal{F}$  una función vectorial continua en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y periódica en  $t$  con periodo  $\Gamma$ . Respecto al sistema  $(\dagger)$  nos hacemos la siguiente pregunta ¿Es cierto que si  $X(t)$  es una solución periódica de  $(\dagger)$  con periodo  $\gamma$  entonces  $\Gamma$  y  $\gamma$  son conmensurables? El siguiente ejemplo, tomado de [40], muestra que la respuesta a esta pregunta no es siempre afirmativa.

**Ejemplo.** Considere el sistema

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \dot{x} = y + (x^2 + y^2 - 1) \operatorname{sen} \sqrt{2}t, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

La función  $\mathcal{F}(t, x, y) = \left( y + (x^2 + y^2 - 1) \operatorname{sen} \sqrt{2}t, -x \right)^{tr}$  es periódica en  $t$  con periodo  $\Gamma = 2\pi/\sqrt{2}$  y el sistema  $(\diamond)$  admite la solución periódica  $x(t) = -\cos t$ ,  $y(t) = \operatorname{sen} t$ , con periodo  $\gamma = 2\pi$ , que no es conmensurable con  $2\pi/\sqrt{2}$ .

Este ejemplo nos dice que no es inmediato afirmar que dada una solución periódica del problema elíptico de Sitnikov su periodo sea un múltiplo de  $2\pi$ . Respecto a la no conmensurabilidad del periodo  $\gamma$  de una solución periódica de un sistema del tipo  $(\dagger)$  con el periodo  $\Gamma$  de la función continua  $\mathcal{F}$ , presentamos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [40], pág. 11.

**Teorema 2.2.** *Considere el sistema de primer orden*

$$\dot{X} = \mathcal{F}(t, X),$$

con  $\mathcal{F}$  una función continua en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y periódica en la variable  $t$  con periodo  $\Gamma$ . Sea  $X(t)$  una solución periódica con periodo  $\gamma$  no conmensurable con  $\Gamma$ . Entonces la función vectorial  $\mathcal{F}(t, X(t_0))$  es constante para todo  $t_0$ .

Aplicando el Teorema 2.2 al problema de Sitnikov obtenemos el siguiente resultado

**Lema 2.2.** *Sea  $e \neq 0$  y  $z(t)$  una solución periódica no trivial de (2.2) de periodo  $\gamma$ . Entonces  $\gamma$  es conmensurable con  $2\pi$ .*

**Demostración.** Hacemos la demostración por reducción al absurdo. Sea  $z(t)$  una solución periódica de (2.2) de periodo  $\gamma$ . Definimos  $Z = (z, \dot{z})^{tr}$  y escribimos (2.2) en la forma

$$\dot{Z} = \mathcal{F}(t, Z), \quad \text{con} \quad \mathcal{F}(t, Z) = \left( \dot{z}, \frac{-z}{(z^2 + r^2(t, e))^{3/2}} \right)^{tr}. \quad (2.9)$$

Tenemos que  $Z$  es una solución periódica de (2.9) de periodo  $\gamma$ . Ahora supongamos que  $\gamma$  es no conmensurable con  $2\pi$ . Por el Teorema 2.2 tendríamos que  $\mathcal{F}(t, Z(t_0))$  es un vector constante para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, con  $z_0 = z(t_0)$  tenemos que

$$\frac{-z_0}{(z_0^2 + r^2(t, e))^{3/2}} = d, \quad \text{con} \quad d = \text{constante},$$

esto implica que  $r(t, e)$  es constante para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$  pero esto es una contradicción. Lo anterior prueba que  $\gamma$  es conmensurable con  $2\pi$ .  $\square$

Obsérvese que el Lema 2.2 no descarta para el problema elíptico de Sitnikov la existencia de soluciones de periodo digamos  $2\pi \frac{p}{q}$  con  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Sea  $z(t)$  una solución periódica no trivial de (2.2) de periodo  $\gamma$ . Considérese  $t \in J = [0, \gamma] \setminus \Omega$  donde  $\Omega = \left\{ t \in [0, \gamma] : z(t) = 0 \right\}$ . Puesto que  $z(t)$  es una función analítica tenemos que  $\Omega$  es finito. Por otro

lado, de (2.2) y de la periodicidad de  $\ddot{z}(t)$  se tiene para cada  $e \in [0, 1[$  fijo que

$$\frac{-z(t + \gamma)}{(z(t + \gamma)^2 + r(t + \gamma, e)^2)^{3/2}} = \frac{-z(t)}{(z(t)^2 + r(t, e)^2)^{3/2}}, \quad \forall t \in J.$$

Esta igualdad es válida si y solo si  $r(t + \gamma, e) = r(t, e)$  para todo  $t \in J$ . De la continuidad de  $r^2$  se deduce que  $r(t + \gamma, e)^2 = r(t, e)^2$  para todo  $t \in [0, \gamma]$ . Pero  $r(t, e)^2$  es periódica en  $t$  con periodo mínimo  $2\pi$  en consecuencia  $\gamma = 2n\pi$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Lo anterior demuestra un resultado más preciso que el Lema 2.2.

**Lema 2.3.** *Sea  $e \neq 0$  y  $z(t)$  una solución periódica no trivial de (2.2) de periodo  $\gamma$ . Entonces  $\gamma$  es múltiplo de  $2\pi$ .*

Existen varios trabajos referidos al problema de Sitnikov en los cuales se estudia la existencia de órbitas periódicas y simétricas para diferentes valores de la excentricidad, ya sea por medio de un estudio analítico o numérico del problema. Un primer camino puede ser el considerar órbitas  $2\pi$  periódicas y simétricas en el problema circular de Sitnikov y hacer una continuación de estas soluciones para valores pequeños del parámetro excentricidad. Este objetivo es logrado en [11] y [12] utilizando el método de continuación analítica de Poincaré y en [8] utilizando el método subarmónico de Melnikov. En [6] y [21] encontramos una descripción numérica de familias de órbitas periódicas. De otro lado, la Teoría de Continuación Global de Leray-Schauder para ceros de una función dependiente de un parámetro ha sido aplicada recientemente en [26] para obtener familias de soluciones periódicas en el problema elíptico de Sitnikov para valores de la excentricidad no necesariamente pequeños. De manera más precisa en [26] se demuestra que algunas órbitas periódicas del problema circular de Sitnikov ( $e = 0$ ) pueden extenderse de manera continua para todos los valores de la excentricidad  $e \in ]0, 1[$ , demostrando así que ciertas propiedades de soluciones periódicas en el caso circular como por ejemplo el número de veces que el cuerpo de masa infinitesimal pasa por el centro de masas del sistema (lo que equivale al número de ceros de la so-

lución  $z(t)$ ) es el mismo para soluciones periódicas en el caso elíptico con valores de la excentricidad no necesariamente pequeños. Por otro lado en [36] se estudian familias de soluciones periódicas que emanan del equilibrio y que son continuadas para valores de la excentricidad cercanos a 1. Sobre este último trabajo hablaremos en detalle en el capítulo 7.

# Capítulo 3

## Bifurcaciones en el plano

En esta parte del trabajo daremos una breve presentación de los conceptos básicos de la Teoría de Bifurcación y presentamos algunos tipos de bifurcaciones en el plano. En particular estaremos interesados en la bifurcación Tipo Pitchfork.<sup>1</sup>

### 3.1. El concepto de Bifurcación

Hablar de la teoría de bifurcación en profundidad requiere de muchas páginas de un texto por lo que no siendo ese el objetivo de este trabajo nos limitaremos sólo a lo que se entiende por “bifurcación” y presentaremos un resultado básico de esta teoría que prevalece en cualquier espacio vectorial. Por lo tanto, para no entrar en espacios muy generales sólo consideraremos espacios vectoriales de dimensión finita como por ejemplo  $\mathbb{R}^n$ .

Con este propósito en mente, sean  $n, m$  números naturales. Consideremos los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^n$  y  $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Sea  $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . En muchas ocasiones es de especial interés conocer algunas propiedades del conjunto solución de la ecuación

$$F(x) = 0. \tag{3.1}$$

En general la respuesta a esta pregunta resulta ser nada trivial y difícil de resolver.

Es más, de forma más general podemos hacer la misma pregunta en problemas que

---

<sup>1</sup>En esta memoria preservaremos en inglés los nombres por los cuales son usualmente conocidas las bifurcaciones en el plano que consideraremos, a fin de evitar una traducción no apropiada a nuestro idioma.



dependen de un cierto conjunto de parámetros,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ , por ejemplo

$$F(x, \mu) = 0, \tag{3.2}$$

en donde vamos a suponer que  $F \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto. Es muy usual que para la ecuación (3.2) exista un conjunto inicial de soluciones (usualmente llamado soluciones triviales) sin embargo para ciertos valores de  $\mu$  es posible que aparezcan nuevas soluciones de (3.2) “no triviales” que emanan de la rama trivial (o rama de soluciones triviales), a este fenómeno se le conoce como “bifurcación”. Existen muchos ejemplos físicos que dan cuenta del fenómeno de bifurcación, un ejemplo clásico de esta clase de fenómenos es el pandeo de cuerdas delgadas. El lector interesado en este tipo de fenómeno se le recomienda ver [10, 46].

En adelante suponemos que a menos que se diga lo contrario que

$$F(0, \mu) = 0, \tag{3.3}$$

para todo valor del parámetro  $\mu$ .

**Definición 3.1.** *Considérese un punto  $(0, \mu_0)$  contenido en  $\Omega$ . Diremos que  $(0, \mu_0)$  es un punto de bifurcación de la ecuación (3.2) si toda vecindad  $\mathcal{Z}$  de  $(0, \mu_0)$  contiene un punto  $(x, \mu)$ , con  $x \neq 0$  solución de la ecuación (3.2).*

**Observación.** De la definición anterior se garantiza la existencia de una sucesión  $\{(x_n, \mu_n)\}$  de soluciones no triviales tales que  $x_n \rightarrow 0$  y  $\mu_n \rightarrow \mu_0$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ .

Algunas de las primeras preguntas que se pueden formular en cuanto a puntos de bifurcación pueden ser: ¿Cuándo un punto  $(0, \mu) \in \Omega$  es un punto de bifurcación? ¿Existen ramas de soluciones (3.2) que emanan de este punto y de existir cuántas hay? ¿Podemos describir la dependencia de estas ramas sobre  $\mu$  al menos de manera local? Como un resultado básico de la teoría de bifurcaciones presentamos el siguiente resultado que determina una condición necesaria para que tengamos un punto de bifurcación.

Con este propósito en mente presentamos un resultado fundamental y bien conocido del cálculo diferencial en varias variables conocido como el teorema de la función implícita.

**Teorema 3.1.** *Sea  $F : U \times V \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), con  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Supongamos que  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  denotan los puntos en  $U$  y  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  denotan los puntos en  $V$ . Sea  $(x_0, \mu_0) \in U \times V$  tal que  $F(x_0, \mu_0) = 0$  y  $D_x F(x_0, \mu_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo. Entonces existe un conjunto abierto  $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y una única función  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$ , donde  $\mathcal{V}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$  que contiene a  $\mu_0$ , tal que:*

1.  $\mathcal{A} = F^{-1}(0) \cap \mathcal{Z} = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m} : x = \phi(\mu), \text{ para algún } \mu \in \mathcal{V}\},$
2.  $D\phi(\mu_0) = -[D_x F(x_0, \mu_0)]^{-1} D_\mu F(x_0, \mu_0).$

Obsérvese que el teorema de la función implícita nos dice que en una vecindad  $\mathcal{V}$  del punto  $\mu_0$ , la ecuación  $F(x, \mu) = 0$  tiene como únicas soluciones a los puntos de la forma  $(\phi(\mu), \mu)$ , para cada  $\mu \in \mathcal{V}$ .

**Lema 3.1.** *(Condición necesaria para la bifurcación).*

*Sea  $F : U \times V \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), con  $U$  y  $V$  conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente. Si  $(0, \mu_0) \in U \times V$  es un punto de bifurcación de (3.2), entonces  $D_x F(0, \mu_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es no invertible.*

**Demostración.** Supongamos que  $D_x F(0, \mu_0)$  es invertible en alguna vecindad del punto  $(0, \mu_0)$ . Por el teorema de la función implícita, existe una única función  $x = \phi(\mu) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ) donde  $\mathcal{V}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ , tal que todas las soluciones de  $F(x, \mu) = 0$  son de la forma  $(\phi(\mu), \mu)$  con  $\mu \in \mathcal{V}$ . De otro lado sabemos que  $F(0, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , en consecuencia por la unicidad de las soluciones se concluye que  $x = \phi(\mu) = 0$  para todo  $\mu \in \mathcal{V}$ .

Por lo tanto, existe una vecindad  $\mathcal{Z} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$  del punto  $(0, \mu_0)$ , donde  $\mathcal{U}$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene el punto  $x = 0$ , donde las únicas soluciones de  $F(x, \mu) = 0$  son de la forma  $(0, \mu)$ , lo cual es una contradicción pues se supone que  $(0, \mu_0)$  es un punto de bifurcación.  $\square$

Veamos los siguientes ejemplos de bifurcaciones.

**Ejemplo.** Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Considere la función  $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$F(\mathbf{x}, \mu) = \beta \mathbf{x} + C(\mathbf{x}) - \mu \mathbf{x}, \quad C(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \gamma x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \gamma x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad \gamma > 0.$$

Calculamos  $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}, \mu)$  y obtenemos:

$$D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{0}, \mu) = (\beta - \mu)I_2, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los posibles puntos de bifurcación sólo pueden ocurrir en  $(\mathbf{0}, \beta)$ .

Si  $F(\mathbf{x}, \mu) = 0$  con  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mu \neq \beta$  entonces para  $i = 1, 2$  tenemos que

$$\gamma x_i(x_1^2 + x_2^2) = (\mu - \beta)x_i.$$

En consecuencia  $x_1^2 + x_2^2 = (\mu - \beta)/\gamma$ , que es la ecuación de un paraboloides de revolución alrededor del eje  $\mu$ . En este caso, tenemos un continuo que emana del punto de bifurcación  $(\mathbf{0}, \beta)$ . Nótese además que no existen soluciones no triviales para valores  $\mu < \beta$ .

**Ejemplo.** Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $F(x, \mu) = x - \mu x^2$ . Considere la ecuación  $F(x, \mu) = 0$ . Para cualquier valor  $\mu \in \mathbb{R}$ , el punto  $(0, \mu)$  no es un punto de bifurcación. En efecto, el conjunto solución de la ecuación  $F(x, \mu) = 0$  es el conjunto de puntos  $(0, \mu)$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}$  y las dos ramas de la hipérbola  $x\mu = 1$ . Note que  $\partial_x F(0, \mu_0) = 1$  que nos da la transformación identidad en el caso real.

**Ejemplo.** Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $F(x, \lambda) = x + x^3 - \mu x$ . Entonces  $(0, \mu)$  es siempre solución de la ecuación  $F(x, \mu) = 0$ . Además, si  $x \neq 0$  y si  $(x, \mu)$  es solución, entonces

$$x^2 = \mu - 1.$$

Por lo tanto, no existen soluciones no triviales para  $\mu \leq 1$ , pero hay una rama de soluciones no triviales dada por la parábola anterior que emanan de la rama trivial en el punto  $(0, 1)$ . Note que  $\partial_x F(0, \lambda) = 1 - \mu$  que es igual a cero si  $\mu = 1$ .

**Ejemplo.** Sea  $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$G(\mathbf{x}, \lambda) = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_1^3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto  $D_{\mathbf{x}}G(\mathbf{0}, \lambda) = (1 - \lambda)I_2$ . En consecuencia  $D_{\mathbf{x}}G(\mathbf{0}, \lambda)$  no es invertible si  $\lambda = 1$ . Sin embargo  $(\mathbf{0}, 1)$  no es un punto de bifurcación. En efecto, si  $(\mathbf{x}, \lambda)$  es solución de  $G(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}$  entonces  $x_1^4 + x_2^4 = 0$  por lo que las únicas soluciones son  $x_1 = x_2 = 0$ . Aquí vemos como la condición dada por el Lema 3.1 es sólo una condición necesaria y no una condición suficiente.

### 3.2. Bifurcaciones locales en el plano.

Terminada la breve introducción sobre el concepto general del fenómeno de bifurcación vamos a presentar tres de las más comunes bifurcaciones en el plano. Con este objetivo en mente iniciamos con la bifurcación tipo “silla-nodo” (conocida también como bifurcación tipo Fold<sup>2</sup>). Es necesario mencionar que en este caso no se tiene la condición (3.3) y que la existencia de soluciones no triviales se deduce del teorema de la función implícita aplicado en la variable  $\mu$ .

**Proposición 3.1.** (*Bifurcación tipo Fold*). Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una familia unoparamétrica de transformaciones de clase  $C^2$  que satisfacen

$$(1) f(0, \mu_0) = 0; \quad (2) \partial_x f(0, \mu_0) = 0; \quad (3) \partial_{xx} f(0, \mu_0) > 0 \quad y \quad (4) \partial_\mu f(0, \mu_0) > 0.$$

Entonces existen  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  tales que

▷ Para cada  $\mu \in I_1 = ]\mu_0 - \delta, \mu_0[$  entonces  $f(x, \mu)$  tiene exactamente dos ceros si  $x \in ]-\epsilon, \epsilon[$ .

▷ Para cada  $\mu \in I_2 = ]\mu_0, \mu_0 + \delta[$  entonces  $f(x, \mu) \neq 0$  con  $x \in ]-\epsilon, \epsilon[$ .

**Demostración.** Por la primera y la última propiedad junto con el teorema de la función implícita, existe un abierto  $\mathcal{I} = ]-\epsilon, \epsilon[$  de  $\mathbb{R}$  y una única función  $g$  de clase  $C^2$ ,  $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu = g(x)$  tal que

$$g(0) = \mu_0 \quad y \quad f(x, g(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{I}.$$

Derivando respecto a  $x$  esta última ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, g(x)) + \partial_\mu f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} &= 0, \\ \partial_{xx} f(x, g(x)) + 2\partial_{x\mu} f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} + \partial_{\mu\mu} f(x, g(x)) \left[ \frac{dg(x)}{dx} \right]^2 + \partial_\mu f(x, g(x)) \frac{d^2g(x)}{dx^2} &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Fold: Doblez, o bien Pliegue.

Evaluando en  $x = 0$  tenemos que

$$\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right|_{x=0} < 0.$$

Por lo tanto  $g(x)$  tiene un máximo en  $x = 0$ , demostrándose así la existencia de los intervalos  $I_1$  y  $I_2$ .  $\square$

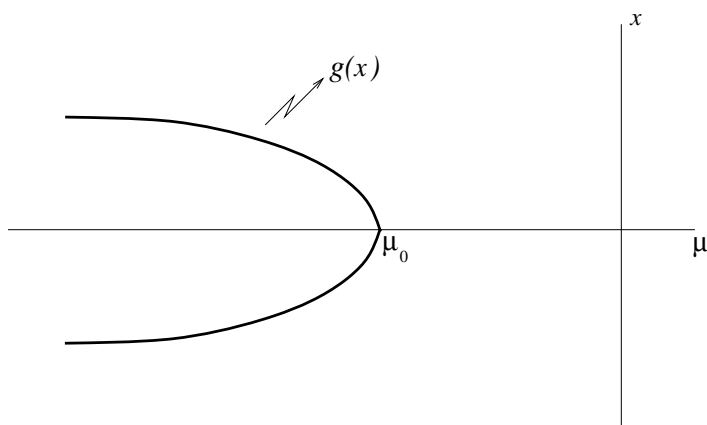


Figura 3.1: Diagrama de Bifurcación Tipo Fold.

**Observación.** Si en (3) o en (4) tomamos la desigualdad contraria, la conclusión sobre los intervalos  $I_1$  y  $I_2$  es contraria. El nombre de este tipo de bifurcación se debe a que al “doblar” una rama de bifurcación respecto al eje  $\mu$  se obtiene otra rama de soluciones no triviales.

### Ejemplos de bifurcaciones tipo Fold.

$$f(x, \mu) = x^2 + \mu - \mu_0, \quad g(x, \mu) = \mu - x^2.$$

**Proposición 3.2.** (*Bifurcación Supercrítica*). Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una familia unoparamétrica de transformaciones de clase  $C^3$  que satisfacen

1.  $f(0, \mu) = 0$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$2. \lambda(\mu) = \partial_x f(0, \mu), \quad \lambda(\mu_0) = 0 \quad y \quad \frac{d\lambda(\mu_0)}{d\mu} > 0,$$

$$3. \partial_{xx} f(0, \mu_0) \neq 0.$$

Entonces  $f$  tiene una única rama de bifurcación de ceros  $x(\mu)$  de clase  $C^2$  para  $\mu$  cerca de  $\mu_0$  con  $x(\mu_0) = 0$  y  $x(\mu) \neq 0$  si  $\mu \neq \mu_0$ .

Para la demostración de la Proposición 3.2 vamos a hacer uso del siguiente resultado de factorización.

**Lema 3.2.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio convexo y  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ . Suponga que  $F(0, y) = 0$  para todo  $(0, y) \in \Omega$ . Entonces  $F$  se puede escribir de la siguiente forma

$$F(x, y) = x\Phi(x, y),$$

con  $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^{k-1}(\Omega)$ .

**Demostración.** Por la regla de Barrow, tenemos que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  entonces

$$g(x) - g(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [g(x_0 + t(x - x_0))] dt,$$

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0) \int_0^1 \dot{g}(x_0 + t(x - x_0)) dt,$$

para todo  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ . Si  $g(x_0) = 0$  y  $x_0 = 0$  entonces

$$g(x) = x \int_0^1 \dot{g}(tx) dt.$$

Aplicando esta misma idea a la función  $F(x, y)$  y siendo  $\Omega$  convexo, tenemos

$$F(x, y) - F(0, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [F(tx, y)] dt,$$

$$F(x, y) = x \int_0^1 \partial_x F(tx, y) dt,$$

para todo  $(x, y) \in \Omega$ . La demostración se sigue tomando la función

$$\Phi(x, y) = \int_0^1 \partial_x F(tx, y) dt. \quad \square$$

Nótese que en el anterior resultado de factorización hay una pérdida de diferenciabilidad que no se puede eludir. Por ejemplo, sea  $\Omega = \mathbb{R}^2$  y considere

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y) = x^{1/3+k}y,$$

entonces  $F \in C^k(\mathbb{R}^2)$  y  $\Phi(x, y) = x^{1/3+k-1}y$  con  $\Phi \in C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$ .

**Demostración de la Proposición 3.2.** Por la condición 1 y del Lema 3.2 podemos escribir la función  $f(x, \mu)$  en la forma

$$f(x, \mu) = x\phi(x, \mu),$$

con  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ , para todo  $(x, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Por lo tanto, los ceros no triviales de la ecuación  $f(x, \mu) = 0$  satisfacen  $\phi(x, \mu) = 0$ . De otra parte, la función  $\phi$  cumple:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, \mu) &= \phi(x, \mu) + x\partial_x \phi(x, \mu), \\ \partial_\mu f(x, \mu) &= x\partial_\mu \phi(x, \mu), \\ \partial_{xx} f(x, \mu) &= 2\partial_x \phi(x, \mu) + x\partial_{xx} \phi(x, \mu),\end{aligned}$$

para todo  $(x, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

En consecuencia, las condiciones 1. y 2. sobre la función  $f(x, \mu)$  equivalen a las siguientes condiciones sobre  $\phi(x, \mu)$

$$\begin{aligned}\triangleright \lambda(\mu) &= \phi(0, \mu), \quad \phi(0, \mu_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\lambda(\mu_0)}{d\mu} = \partial_\mu \phi(0, \mu_0) > 0, \\ \triangleright \partial_x \phi(0, \mu_0) &\neq 0.\end{aligned}$$

Por el teorema de la función implícita, existen dos intervalos  $I_0 = ] - \epsilon, \epsilon[$  y  $I_{\mu_0} = ]\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta[$  y una única función  $x^*(\mu) : I_{\mu_0} \rightarrow I_0$  de clase  $C^2$  tal que

$$\phi(x^*(\mu), \mu) = 0, \quad x^*(\mu_0) = 0, \tag{3.4}$$



para todo  $(x, \mu) \in I_0 \times I_{\mu_0}$ . Derivando la ecuación (3.4) respecto a  $\mu$  y evaluando en  $\mu_0$  tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_x \phi(0, \mu_0) \frac{dx^*(\mu_0)}{d\mu} + \partial_\mu \phi(0, \mu_0) &= 0, \\ \frac{\partial_{xx} f(0, \mu_0)}{2} \frac{dx^*(\mu_0)}{d\mu} + \partial_{x\mu} f(0, \mu_0) &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\frac{dx^*(\mu_0)}{d\mu} = -2 \frac{\partial_{x\mu} f(0, \mu_0)}{\partial_{xx} f(0, \mu_0)} \neq 0,$$

por lo tanto

$$x^*(\mu) = -2 \frac{\partial_{x\mu} f(0, \mu_0)}{\partial_{xx} f(0, \mu_0)} (\mu - \mu_0) + O((\mu - \mu_0)^2) \quad \text{para } \mu \in ]\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta[,$$

lo que completa la demostración.  $\square$

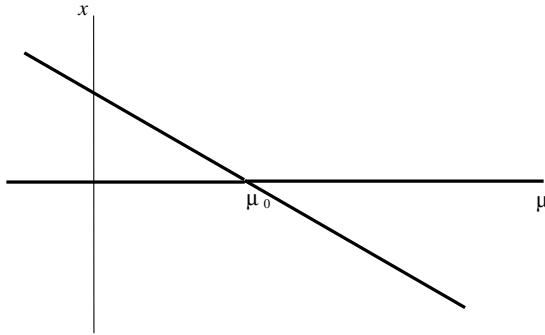


Fig. (a)

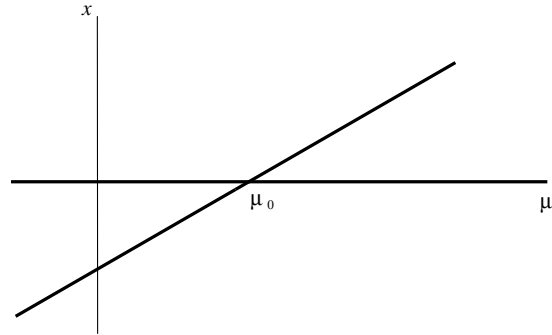


Fig. (b)

Figura 3.2: Diagrama de Bifurcación Supercrítica. Si  $\partial_{xx} f(0, \mu_0) \geq 0$  tenemos la figura (a) y (b) respectivamente.

### Ejemplo de Bifurcación Supercrítica

$$f(x, \mu) = x^2 + x(\mu - \mu_0).$$

A continuación presentamos la bifurcación Tipo Pitchfork <sup>3</sup>, que como veremos más adelante será de nuestro especial interés. El nombre dado a este tipo de bifurcación se debe a que el diagrama de bifurcación tiene forma de tridente o tenedor.

<sup>3</sup>Pitchfork: Horca o bien tridente.

**Proposición 3.3.** (*Bifurcación tipo Pitchfork*). Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una familia uno-paramétrica de transformaciones de clase  $C^3$  que satisfacen

1.  $f(-x, \mu) = -f(x, \mu)$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,
2.  $\lambda(\mu) = \partial_x f(0, \mu)$ ,  $\lambda(\mu_0) = 0$  y  $\frac{d\lambda(\mu_0)}{d\mu} > 0$ ,
3.  $\partial_{xxx} f(0, \mu_0) < 0$ .

Entonces, existen dos intervalos  $I_1 = ]\mu_0 - \delta, \mu_0[$  y  $I_2 = ]\mu_0, \mu_0 + \delta[$  con  $\delta > 0$  tal que

▷ Si  $\mu \in I_1$  entonces  $f(x, \mu) = 0$  si y solo si  $x = 0$ .

▷ Si  $\mu \in I_2$  entonces  $f(x, \mu) = 0$  si y solo si  $x = 0$  o bien

$$x(\mu) = \pm \left[ \frac{6(\mu - \mu_0)\dot{\lambda}(\mu_0)}{|\partial_{xxx} f(0, \mu_0)|} \right]^{1/2} (1 + o(1)), \quad \text{con } \dot{\lambda}(\mu_0) = \frac{d\lambda(\mu_0)}{d\mu},$$

demostrándose así la existencia de exactamente dos ceros no triviales para este caso.

**Demostración.** Seguiremos las mismas ideas y definiciones hechas en la demostración de la Proposición 3.2. Por hipótesis  $f(x, \mu)$  es una función impar en la primera variable, en consecuencia tenemos necesariamente un conjunto conexo de ceros triviales

$$\{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$

Más aún, la Proposición 3.2 no aplica porque en este caso  $\partial_{xx} f(0, \mu_0) = 0$ . Como antes sabemos que la función  $f(x, \mu)$  se puede factorizar de la siguiente forma

$$f(x, \mu) = x\psi(x, \mu),$$

con  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ , para todo  $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Por lo tanto la función  $\psi(x, \mu)$  satisface las siguientes condiciones

▷  $\psi(-x, \mu) = \psi(x, \mu)$  para todo  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

▷  $\lambda(\mu) = \psi(0, \mu)$ ,  $\psi(0, \mu_0) = 0$  y  $\frac{d\lambda(\mu_0)}{d\mu} = \partial_\mu \psi(0, \mu_0) > 0$ ,

▷  $\partial_{xx} \psi(0, \mu_0) < 0$ .

y además

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, \mu) &= \psi(x, \mu) + x \partial_x \psi(x, \mu), & \partial_\mu f(x, \mu) &= x \partial_\mu \psi(x, \mu), \\ \partial_{xx} f(x, \mu) &= 2 \partial_x \psi(x, \mu) + x \partial_{xx} \psi(x, \mu), & \partial_{xxx} f(x, \mu) &= 3 \partial_{xx} \psi(x, \mu) + x \partial_{xxx} \psi(x, \mu). \end{aligned} \quad (3.5)$$

para todo  $(x, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Del teorema de la función implícita, sabemos que existen dos intervalos

$I_x = ]-\epsilon, \epsilon[$  y  $I_\mu = ]\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta[$  con  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  y una única función  $\mu^*(x) : I_x \rightarrow I_\mu$  de clase  $C^2$  tal que

$$\psi(x, \mu^*(x)) = 0, \quad \mu^*(0) = \mu_0, \quad (3.6)$$

para todo  $(x, \mu) \in I_x \times I_\mu$ .

Derivando en la ecuación (3.6) respecto a  $x$ , y evaluando en  $x = 0$  tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(0, \mu_0) + \partial_\mu \psi(0, \mu_0) \frac{d\mu^*(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \partial_{xx} \psi(0, \mu_0) + 2 \partial_{x\mu} \psi(0, \mu_0) \frac{d\mu^*(x)}{dx} \Big|_{x=0} + \partial_{\mu\mu} \psi(0, \mu_0) \left[ \frac{d\mu^*(x)}{dx} \Big|_{x=0} \right]^2 + \\ \partial_\mu \psi(0, \mu_0) \frac{d^2 \mu^*(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (3.5) y por la condición 1. sobre la función  $f(x, \mu)$  tenemos que

$$\frac{d\mu^*(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 \mu^*(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} > 0.$$

En consecuencia la función  $\mu^*(x)$  tiene un mínimo en  $x = 0$ , lo que demuestra que las únicas soluciones de  $f(x, \mu) = 0$  con  $\mu \in I_1$  son las soluciones triviales  $(0, \mu)$ .

Ahora bien, en el abierto  $\mathcal{V} = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \epsilon, 0 < \mu - \mu_0 < \delta\}$ , tenemos que

$$\mu^*(x) = \mu_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \mu^*(0)}{dx^2} x^2 + o(x^2),$$

lo que es equivalente a escribir con  $\mu = \mu^*(x)$

$$\mu - \mu_0 = \frac{1}{6} \left( \frac{|\partial_{xxx} f(0, \mu_0)|}{\partial_{x\mu} f(0, \mu_0)} \right) x^2 + o(x^2),$$

De esta forma tenemos que

$$x(\mu) = \pm \sqrt{C(\mu - \mu_0)} \frac{1}{\sqrt{1 + o(1)}},$$

$$x(\mu) = \pm \sqrt{C(\mu - \mu_0)} (1 + o(1)),$$

en donde  $C = 6 \left( \frac{\partial_{x\mu} f(0, \mu_0)}{|\partial_{xxx} f(0, \mu_0)|} \right)$ . Lo que demuestra la existencia de dos ceros no triviales en

$$x(\mu) = \pm \left[ \frac{6(\mu - \mu_0) \dot{\lambda}(\mu_0)}{|\partial_{xxx} f(0, \mu_0)|} \right]^{1/2} (1 + o(1)),$$

con  $\dot{\lambda}(\mu_0) = \partial_{x\mu} f(0, \mu_0)$ ,  $(x, \mu) \in \mathcal{V}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

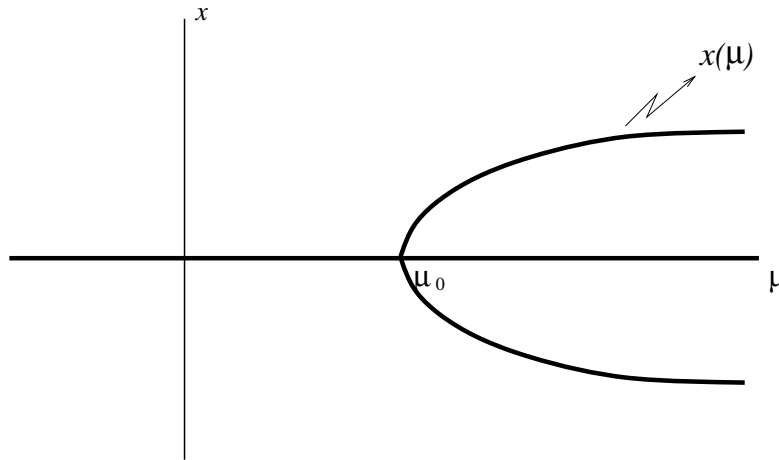


Figura 3.3: Diagrama de Bifurcación Tipo Pitchfork.

**Observación.** Si en las condiciones 2 o 3 tomamos la desigualdad contraria, las conclusiones sobre los intervalos  $I_1, I_2$  son contrarias. Aún cuando los diagramas de la bifurcación tipo Fold y Pitchfork son similares existen diferencias fundamentales, como lo es la existencia de un conjunto trivial de soluciones y la estabilidad de cada rama de soluciones no triviales. Para mayor información sobre la estabilidad de las ramas de bifurcación y bifurcaciones en el plano se recomienda al lector ver [14].

**Ejemplos de bifurcación Tipo Pitchfork.**

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3, \quad g(x, \mu) = \mu x + x^3.$$

## Capítulo 4

# Conceptos básicos sobre la ecuación de Hill y la ecuación de Ince

El propósito de este capítulo es presentar algunos de los elementos básicos e importantes de la teoría de la ecuación de Hill y de la ecuación de Ince. De igual forma presentamos condiciones necesarias y suficientes para la coexistencia de soluciones  $\pi$ -periódicas de la ecuación de Hill que se encuentran expuestas con detalle en el texto *Hill's Equation* de Magnus y Winkler [29].

### 4.1. Sobre la ecuación de Hill.

En la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones que pertenezcan a la clase de las ecuaciones lineales, homogéneas de segundo orden con coeficientes periódicos reciben el nombre de ecuaciones tipo Hill, en honor a G.W. Hill por sus grandes aportes a la teoría de este tipo de ecuaciones.

Quizás uno de los principales problemas en que se centra la teoría de la ecuación de Hill es la existencia de soluciones periódicas. Respecto a este problema presentamos el Teorema de Floquet.

Consideremos una función  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \rightarrow a(t)$  una función continua en toda la recta real, la cual es periódica con periodo  $T$ , es decir:

$$a(t + T) = a(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la siguiente ecuación de Hill

$$\ddot{y} + a(t)y = 0, \tag{4.1}$$

que equivale al sistema lineal y  $T$ -periódico

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad \text{con } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

y  $\mathbf{x} = (y, \dot{y})^{tr}$ . Consideremos ahora un sistema fundamental de soluciones de (4.1)  $\{y_1(t), y_2(t)\}$  tal que

$$y_1(0) = \dot{y}_2(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0, \tag{4.3}$$

de manera que la matriz

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix},$$

sea una matriz fundamental y principal de (4.2) en  $t = 0$ . Note que de la fórmula de Jacobi se sigue que  $\det Y(t) = \det Y(0) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A las funciones  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  se les suele llamar *soluciones normalizadas* de (4.1).

Dado que  $A(t + T) = A(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  se sigue que  $\Psi(t) = Y(t + T)$  es también solución de (4.2). Más aún,  $\det \Psi(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  por lo tanto  $\Psi(t)$  es una matriz fundamental de (4.2). Tenemos entonces que  $Y(t)$  y  $\Psi(t)$  son matrices fundamentales de un mismo sistema de ecuaciones, en consecuencia existe una matriz invertible  $C_Y \in M_2(\mathbb{R})$  tal que

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= Y(t + T), \\ &= Y(t)C_Y, \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La matriz  $C_Y$  se llama *matriz de monodromía* asociada a  $Y$ . Más aún, dado que  $Y(t)$  es principal en  $t = 0$  es decir  $Y(0) = I_2$  se deduce que  $C_Y = Y(T)$ .

De la teoría general para los sistemas de ecuaciones diferenciales periódicos sabemos que el espectro de  $C_Y$ , que denotamos por  $\sigma(C_Y)$  sólo depende de (4.2) y no de la elección de  $Y$ . Más aún si  $\lambda \in \sigma(C_Y)$  se dice que  $\lambda$  es un *multiplicador característico* de (4.2). Veamos el porqué de la palabra multiplicador.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Entonces  $\lambda$  es un multiplicador característico de (4.2) si y solo si existe  $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ ,  $\phi(t) \neq 0$  solución de (4.1) y además  $\phi(t+T) = \lambda\phi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Como un resultado inmediato de esta proposición tenemos

**Corolario 4.1.** *Considérese la ecuación de Hill (4.1) entonces*

- I)** *(4.1) admite soluciones  $T$ -periódicas no triviales si y solo si 1 es un multiplicador de (4.2).*
- II)**  *$-1$  es multiplicador característico de (4.2) si y solo si existe una solución  $2T$ -periódica de (4.1) que no es  $T$ -periódica.*

**Demostración.** La demostración del enunciado **I)** es inmediata al reemplazar  $\lambda = 1$  en la Proposición 4.1. Nos centraremos entonces en demostrar el enunciado **II)**.

( $\Rightarrow$ ). Si  $\lambda = -1$  es un valor característico de (4.2)  $\Leftrightarrow$  existe una solución no trivial  $\phi(t)$  de (4.1) tal que  $\phi(t+T) = -\phi(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , por lo tanto no es  $T$ -periódica y además

$$\phi(t+2T) = \phi((t+T)+T) = -\phi(t+T) = \phi(t).$$

Es decir,  $\phi(t)$  es  $2T$  periódica.

( $\Leftarrow$ ). Si existe una solución no trivial  $\phi(t)$  de periodo  $2T$  que no es  $T$  periódica, por



un lado tenemos que  $1 \in \sigma(C_Y^2)$ , en efecto, sea  $\phi(0) = y_0 \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ , por lo tanto  $\phi(t) = Y(t)y_0$  y en consecuencia

$$\phi(t + 2T) = Y(t + 2T)y_0,$$

$$\phi(t) = Y(t)C_Y^2 y_0 = Y(t)y_0.$$

Como  $Y(t)$  es invertible, se deduce entonces que  $1 \in \sigma(C_Y^2)$ . Por el teorema espectral, sabemos que  $\sigma(C_Y^2) = [\sigma(C_Y)]^2$ , en consecuencia, existe un  $\lambda \in \sigma(C_Y)$  tal que  $\lambda^2 = 1$ , pero  $\phi(t)$  no es  $T$  periódica, por lo tanto  $\phi(t + T) \neq \phi(t)$  para algún  $t$ , en consecuencia la única solución admisible de  $\lambda^2 = 1$  es  $\lambda = -1$ , lo que completa la demostración.  $\square$

Por último antes de pasar al teorema de Floquet damos las siguientes definiciones

**Definición 4.1.** Sea  $r(\rho) = \det(C_Y - \rho I_2)$  el polinomio característico de  $C_Y$ . Se define la ecuación característica asociada a (4.1), como la ecuación  $r(\rho) = 0$ , que viene dada por

$$\rho^2 - [y_1(T) + \dot{y}_2(T)]\rho + 1 = 0, \quad (4.4)$$

y por el exponente característico  $\alpha$  al número (real o complejo) que satisface las ecuaciones

$$\exp(i\alpha T) = \rho_1, \quad \exp(-i\alpha T) = \rho_2. \quad (4.5)$$

donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las raíces de la ecuación característica (4.4).

Observe que en la anterior definición, tenemos que  $\alpha$  se define de manera única salvo un múltiplo entero de  $\frac{2\pi}{T}$  y de otro lado, las raíces  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de la ecuación característica  $r(\rho) = 0$  satisfacen  $\rho_1 + \rho_2 = y_1(T) + \dot{y}_2(T)$  y  $\rho_1\rho_2 = 1$ .

**Teorema 4.1.** 1. Si las raíces  $\rho_1$  y  $\rho_2$  de la ecuación característica (4.5) son distintas, entonces la ecuación de Hill (4.1) tiene dos soluciones linealmente indepen-

dientes

$$f_1(t) = \exp(i\alpha t)p_1(t), \quad f_2(t) = \exp(-i\alpha t)p_2(t),$$

donde  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$  son dos funciones periódicas con periodo  $T$ .

2. Si  $\rho_1 = \rho_2$  entonces la ecuación (4.1) tiene una solución no trivial periódica, con periodo  $T$  (cuando  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ) o con periodo  $2T$  (cuando  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ ). Si  $p(t)$  denota dicha solución periódica y si  $y(t)$  es otra solución linealmente independiente con  $p(t)$ . Entonces

$$y(t+T) = \rho_1 y(t) + \theta p(t), \quad \theta = \text{constante},$$

además  $\theta = 0$  es equivalente a

$$y_1(T) + \dot{y}_2(T) = \pm 2, \quad y_2(T) = \dot{y}_1(T) = 0.$$

La anterior versión del Teorema de Floquet y su respectiva demostración se encuentra en [29].

Si  $\rho_1 = \rho_2$  una condición necesaria y suficiente para que todas las soluciones de (4.1) sean acotadas es

$$y_1(T) + \dot{y}_2(T) = \pm 2, \quad y_2(T) = \dot{y}_1(T) = 0.$$

En el caso de que todas las soluciones sean acotadas, se dice que ellas son *estables*, en caso contrario se dice que son *inestables*. La importancia del estudio de las soluciones  $T$ -periódicas o  $2T$ -periódicas radica en los siguientes corolarios.

**Corolario 4.2.** Si (4.1) tiene una solución periódica no-trivial con periodo  $nT$ ,  $n > 2$ , pero no soluciones con periodo  $T$  o  $2T$ , entonces todas las soluciones son periódicas con periodo  $nT$ .

**Corolario 4.3.** (*Criterio de Estabilidad*). Las soluciones de (4.1) son estables si y solo si  $y_1(T) + \dot{y}_2(T)$  es real y

$$|y_1(T) + \dot{y}_2(T)| < 2 \quad o$$

$$y_1(T) + \dot{y}_2(T) = \pm 2, \quad y \quad y_2(T) = \dot{y}_1(T) = 0.$$

Las demostraciones del Teorema de Floquet y los corolarios anteriores no las haremos aquí pero el lector interesado las puede encontrar con detalle en [29].

Ya para terminar esta parte del trabajo presentamos un resultado sobre el caso simétrico de la ecuación de Hill, es decir cuando  $a(t)$ , es una función par [ $a(t) = a(-t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ].

**Teorema 4.2.** Sean  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  las soluciones normalizadas de (4.1) y suponga que la función  $a(t)$  es par. Entonces las siguientes relaciones se mantienen.

$$y_1(T) = 2y_1(T/2)\dot{y}_2(T/2) - 1 = 1 + 2\dot{y}_1(T/2)y_2(T/2),$$

$$y_2(T) = 2y_2(T/2)\dot{y}_2(T/2),$$

$$\dot{y}_1(T) = 2y_1(T/2)\dot{y}_1(T/2),$$

$$\dot{y}_2(T) = y_1(T).$$

En todos los casos  $y_1(t) = y_1(-t)$ , es decir  $y_1$  es una función par. De igual forma  $y_2(t) = -y_2(-t)$  es decir  $y_2$  es impar. Siempre que una solución periódica no trivial de periodo  $T$  o  $2T$  exista, existe como solución par o impar. Por lo tanto, estas soluciones periódicas son necesariamente múltiplos de una de las soluciones normalizadas  $y_1(t)$  o  $y_2(t)$  al menos que todas las soluciones sean periódicas (con periodo  $T$  o  $2T$ ).

Este teorema al igual que su correspondiente demostración se puede encontrar en la sección 1.3 de [29].

## 4.2. Ecuación de Ince y coexistencia de soluciones periódicas

Un caso de especial interés es cuando para una misma ecuación de Hill, existen dos soluciones linealmente independientes (en consecuencia todas) de periodo  $T$  o  $2T$ . Cuando esto sucede se dice que dichas soluciones *coexisten*.

**Definición 4.2.** (*Coexistencia*). Se define por *coexistencia de soluciones para la ecuación de Hill (4.1)*, a la existencia de dos soluciones periódicas de (4.1) linealmente independientes con periodo  $T$  (o periodo  $2T$ ).

Recordamos que la coexistencia de soluciones  $T$ -periódicas (resp.  $2T$ -periódicas) de (4.1) es equivalente a tener  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ , (resp.  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ ) es decir  $\lambda = 1$  es un multiplicador característico de multiplicidad geométrica 2 (resp.  $\lambda = -1$  multiplicador característico de multiplicidad geométrica 2).

**Observación.** Es importante observar que de acuerdo con el Corolario 4.2 siempre hay coexistencia de soluciones periódicas con periodo  $nT$  para  $n > 2$ .

Siguiendo el capítulo VII de [29], las siguientes líneas se refieren a la pregunta de la coexistencia de soluciones linealmente independientes de periodo  $T$  (o de periodo  $2T$ ) para la ecuación de Ince, que es un tipo especial de la ecuación de Hill, cuyo problema de coexistencia se reduce a un problema de algebraico.

**La Ecuación de Ince.** Se conoce por ecuación de Ince a toda ecuación de la forma

$$(1 + a \cos 2\tau)y'' + b(\sin 2\tau)y' + (c + d \cos 2\tau)y = 0, \quad (4.6)$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son parámetros reales y  $|a| < 1$ . Las transformaciones

$$y = (1 + a \cos 2\tau)^{b/4a} z \quad a \neq 0,$$

$$y = \exp[(b \cos 2\tau)/4]w \quad a = 0.$$

convierten la ecuación (4.6) en una ecuación de Hill.

Los siguientes dos teoremas nos determinan las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación de Ince (4.6) tenga dos soluciones linealmente independientes de periodo  $T$  o  $2T$  que para simplificar los cálculos tomaremos  $T = \pi$ . Las demostraciones se pueden ver en [29].

**Teorema 4.3.** *Si la ecuación de Ince (4.6) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo  $\pi$ , entonces el polinomio*

$$\mathcal{Q}(s) = 2as^2 - bs - d/2.$$

*tiene un cero en uno de los puntos  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Si (4.6) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo  $2\pi$ , entonces*

$$\mathcal{Q}^*(s) = 2\mathcal{Q}(s - 1/2) = a(2s - 1)^2 - b(2s - 1) - d.$$

*tiene un cero en uno de los puntos  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$*

Presentamos ahora en qué circunstancias las condiciones necesarias el Teorema 4.3 son también suficientes. Veamos primero la siguiente definición.

**Definición 4.3.** *Una solución de la ecuación de Ince (4.6) que es dada por una serie del tipo*

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos 2n\tau, \quad y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sen 2n\tau, \quad (4.7)$$

*se dice que es de orden finito  $k$  si  $A_{2k}$  o  $B_{2k}$  es diferente de cero, y  $A_{2n} = 0$  o  $B_{2n} = 0$  para todo  $n > k$ . En caso contrario diremos que la solución es de orden infinito.*

*Similarmente si una solución de (4.6) es dada por una serie del tipo*

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos(2n+1)\tau, \quad y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1} \sen(2n+1)\tau, \quad (4.8)$$

*es de orden finito  $k$  si  $A_{2k}$  o  $B_{2k}$  es diferente de cero, y  $A_{2n+1} = 0$  o  $B_{2n+1} = 0$  para todo  $n > k$ .*

En ambos casos, para todo exponente positivo  $\nu$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\nu A_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\nu B_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\nu A_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\nu B_{2n+1} = 0.$$

**Teorema 4.4.** *Si el polinomio  $\mathcal{Q}(s)$  definido en el Teorema 4.2 tiene raíces enteras no negativas, y si  $k_0$  es la más grande de ellas, entonces la ecuación Ince (4.6) tiene dos soluciones linealmente independientes de periodo  $\pi$  siempre que una de tales soluciones (del tipo (4.7)) exista, siendo de orden infinito o de orden finito  $k$  con  $k > k_0$ . De igual forma, dos soluciones linealmente independientes de periodo  $2\pi$  existirán si el polinomio  $\mathcal{Q}^*$  tiene una raíz entera no negativa  $k_0^*$  (siendo  $k_0^*$  la más grande de ellas) siempre que una de tales soluciones (del tipo (4.8)) exista, siendo de orden infinito o de orden finito  $k^*$  con  $k^* > k_0^*$ .*

**Observación.** Terminamos esta parte del trabajo resaltando que con el fin de dar condiciones suficientes de coexistencia de soluciones periódicas de periodo  $T$  (o  $2T$ ) para la ecuación de Ince (4.6), se debe asumir la existencia de al menos una solución periódica con periodo  $T$  (o  $2T$ ) según sea el caso.

## Capítulo 5

### Ecuaciones de tipo hipergeométrico

En esta sección vamos a presentar brevemente algunos aspectos básicos de la ecuación diferencial de segundo orden

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dw}{dz} - abw = 0, \quad (5.1)$$

conocida como la *Ecuación Hipergeométrica de Gauss*, la cual tiene tres puntos singulares regulares en  $z = 0$ ,  $z = 1$  y  $z = \infty$ . Cabe mencionar que tanto la variable  $z$  como los parámetros  $a, b, c$  pueden ser complejos (con determinadas restricciones) pero en este trabajo consideramos que tanto  $z$  como  $a, b, c$  son números reales.

Si seguimos el método de Frobenius para conocer la naturaleza de las soluciones cerca al punto singular  $z = 0$  encontramos que al sustituir formalmente la serie

$$w(z) = z^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^n, \quad \sigma_0 \neq 0,$$

en (5.1) se obtiene que el exponente  $\gamma$  satisface la ecuación indicial

$$\gamma(\gamma + c - 1) = 0,$$

y los coeficientes  $\sigma_n$  satisfacen la fórmula de recurrencia

$$(\gamma + n)(\gamma + c - 1 + n)\sigma_n = (\gamma + a + n - 1)(\gamma + b + n - 1)\sigma_{n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

De esta ecuación de recurrencia, se deduce que

$$\sigma_n = \frac{\Gamma(\gamma + a + n)\Gamma(\gamma + a + n)}{\Gamma(\gamma + 1 + n)\Gamma(\gamma + c + n)}A, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

en donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma de Euler y  $A$  una constante arbitraria. De esta manera se obtienen formalmente dos soluciones linealmente independientes dadas por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n, \quad z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a-c+1+n)\Gamma(b-c+1+n)}{\Gamma(2-c+n)n!} z^n.$$

Estas series convergen absoluta y uniformemente en cualquier dominio cerrado dentro del disco unitario  $|z| < 1$ .

Se define entonces la *función Hipergeométrica de Gauss*  $F(a, b, c; z)$  por medio de la ecuación

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n, \quad (5.2)$$

para  $|z| < 1$ . Más aún,  $F(a, b, c; z)$  se puede expresar en la forma

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} z^n = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots \quad (5.3)$$

en donde se ha utilizado la notación de Pochhammer

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1).$$

En términos de esta nueva función, las dos soluciones de la ecuación hipergeométrica (5.1) válidas en una vecindad del punto singular  $z = 0$  son las funciones

$$w_1(z) = F(a, b, c; z) \quad \text{y} \quad w_2(z) = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c; z).$$

De manera análoga es posible obtener un par de soluciones linealmente independientes definidas en vecindades de las singularidades  $z = 1$  y  $z = \infty$ .

Si  $c - (a + b) \notin \mathbb{Z}$  entonces para  $|1 - z| < 1$  tenemos el par

$$w_3(z) = F(a, b, a+b+1-c; 1-z) \quad \text{y} \quad w_4(z) = (1-z)^{c-(a+b)} F(c-b, c-a, c+1-(a+b); 1-z).$$

Si  $a - b \notin \mathbb{Z}$  entonces para  $|z| > 1$  tenemos el par

$$w_5(z) = (-z)^{-a} F(a, a+1-c, a+1-b; 1/z) \quad \text{y} \quad w_6(z) = (-z)^{-b} F(b, b+c-1, b+1-a; 1/z).$$



Una observación importante es que el dominio de la función hipergeométrica de Gauss se puede extender a todo el plano complejo  $\mathbb{C}$  excepto un corte, el cual se suele tomar a lo largo de la semirecta  $[1, \infty[$ .

A continuación vamos a presentar algunas propiedades más destacadas de la función hipergeométrica de Gauss, las cuales se pueden encontrar en [1, 24].

1. La función (5.3) no está bien definida si el parámetro  $c$  es un entero negativo o es cero. En estos casos es conveniente definir la función

$$\mathcal{F}(a, b, c; z) = \frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z),$$

la cual está bien definida para cualquier valor de  $a, b, c$ .

2. Si  $a$  y/o  $b$  son enteros negativos entonces la serie en (5.2) queda truncada y la función hipergeométrica de Gauss se convierte en un polinomio. Por ejemplo, si  $a = -k$  entonces

$$F(-k, b, c; z) = 1 - \frac{kb}{c}z + \frac{(-k)_2(b)_2}{(c)_2} \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{(-k)_k(b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

3. La función (5.3) es simétrica respecto en los parámetros  $a$  y  $b$ , es decir

$$F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z).$$

4. La derivada  $k$ -ésima de la función (5.3) satisface la relación

$$\frac{d^k F(a, b, c; z)}{dz^k} = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} F(a + k, b + k, c + k; z).$$

5. Dados  $a, b, c$  en  $\mathbb{R}$  se cumple la relación

$$F(a, b, c; z) = (1 - z)^d F(c - a, c - b, c; z), \quad (5.4)$$

con  $d = c - (a + b)$ .

6. Como ejemplos de funciones hipergeométricas tenemos

$$\triangleright F(1, b, b; z) = \frac{1}{1-z}, \quad F(1, 1, 2; -z) = \frac{\ln(1+z)}{z}, \quad F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \sin^2 z\right) = \cos z$$

▷ Integrales elípticas

$$F(1/2, 1/2, 1; z^2) = \frac{2}{\pi} K(z) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \cos^2 \theta)^{-1/2} d\theta,$$

$$F(-1/2, 1/2, 1; z^2) = \frac{2}{\pi} E(z) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \cos^2 \theta)^{1/2} d\theta.$$

▷ Funciones de Legendre

$$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu + 1; \frac{1-z}{2}\right) \quad z > -1,$$

$$Q_\nu(z) = C_\nu(z) F\left(-\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + 1/2, \frac{\nu}{2} + 3/2; \frac{1}{z^2}\right) \quad z > 1.$$

$$\text{donde } C_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 3/2)(2z)^{\nu+1}}.$$

### 5.0.1. Sobre el número de ceros de la función hipergeométrica de Gauss

El problema de determinar el número de ceros de la función hipergeométrica de Gauss  $F(a, b, c; z)$  ha sido de interés en la comunidad matemática desde hace ya mucho años. Existen varios trabajos referentes a este problema, de hecho uno de los primeros trabajos es debido a E. B. Van Vleck [48] que determinó el número de ceros (reales e imaginarios) de  $F(a, b, c; z)$  en  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \geq 1\}$  si los parámetros  $a, b, c$  son reales. Cabe mencionar que Van Vleck desarrolló su resultado basado en un método geométrico de F. Klein, presentado en un célebre trabajo en 1890 (ver [22]).

Un trabajo más reciente sobre este problema lo encontramos en [43] el cual presentamos aquí por su simplicidad y generalidad. Primero vamos a suponer tal como se hace en [43] que  $a, b, c$  son números reales y que  $a, b, c, c-a, c-b \neq 0, -1, -2, \dots$ . El motivo de este supuesto se basa en las propiedades de la función hipergeométrica puesto que en estos casos  $F(a, b, c; z)$  no está bien definida o simplemente se reduce a un polinomio. Más aún dada la simetría de  $F(a, b, c; z)$  respecto a los parámetros  $a, b$  y de la relación (5.4) en [43] se presenta el siguiente resultado.

**Teorema 5.1.** Sea  $N(a, b, c)$  el número de ceros de  $F(a, b, c; z)$  en  $\mathbb{C}^*$  donde sin pérdida de generalidad suponemos que  $b - a \geq 0$  y  $d \geq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} N(a, b, c) &= 0 \quad \text{si } a > 0, \\ N(a, b, c) &= [-a] + \frac{1+S}{2} \quad \text{si } a < 0 \quad \text{y } c - a \geq 0, \\ N(a, b, c) &= [-a] + \frac{1+S}{2} + S[a - c + 1] \quad \text{si } a < 0 \quad \text{y } c - a < 0, \end{aligned}$$

donde  $S = \text{sgn}(\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b))$  y  $[X]$  denota la parte entera de  $X$ .

A continuación vamos a ver dos ejemplos donde se aplica el anterior resultado.

**Ejemplo 1.** Considérese la ecuación diferencial

$$z(1-z)w'' - \frac{1}{2}(3-z)w' + 7w = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial hipergeométrica con parámetros  $a = -7/2$ ,  $b = 2$  y  $c = -3/2$ . Por lo tanto, el número de ceros de la solución  $w(z) = F(-7/2, 2, -3/2; z)$  en  $\mathbb{C}^*$  es 4. Más aún podemos determinar el número de ceros de la función  $w'$ , en efecto:

$$\begin{aligned} w'(z) &= F'(-7/2, 2, -3/2; z), \\ &= \frac{14}{3}F(-5/2, 3, -1/2; z), \end{aligned}$$

por lo tanto el número de ceros de  $w'(z)$  en  $\mathbb{C}^*$  es 2.

**Ejemplo 2.** Sean  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^+$ . Considérese la ecuación

$$\ddot{y} + \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2 t^2} y = 0. \tag{5.5}$$

Sea  $y(t)$  la solución de (5.5) que satisface las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ .

Vamos a determinar el número de ceros reales de  $y(t)$ . Para ello primero consideramos el cambio de variable  $z = -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}$  lo que nos lleva a la ecuación

$$z(1-z)w'' + \frac{1}{2}(1-z)w' - \frac{1}{4\vartheta_2}w = 0, \tag{5.6}$$

donde  $w(z) = y(t(z))$  con  $z \in ]-\infty, 0[$ . Veamos qué condiciones iniciales en  $z = 0$  cumple  $w(z)$ .

$$\begin{aligned} w(0) &= y(t(0)) = 1, \\ w'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t(z))t'(z) = \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{y}(t)}{t}, \\ &= \frac{-\vartheta_1}{2\vartheta_2} \ddot{y}(0) = \frac{1}{2\vartheta_2}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Por otro lado, la ecuación (5.6) es una ecuación hipergeométrica con parámetros

$$a = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4/\vartheta_2}}{4}, \quad b = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4/\vartheta_2}}{4}, \quad c = 1/2.$$

Por lo tanto, toda solución de la ecuación (5.6) alrededor de  $z = 0$  es de la forma

$$w(z) = A_1 F(a, b, c; z) + A_2 z^{1/2} F(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; z),$$

con  $A_1, A_2$  constantes. Ahora bien, la solución  $w(z)$  de (5.6) que satisface las condiciones iniciales (5.7) está dada por

$$w(z) = F(a, b, c; z),$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} y(t) &= w(z(t)) = F(a, b, c; z(t)) \\ &= F\left(a, b, c; -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}\right). \end{aligned}$$

Vamos a suponer que  $\vartheta_2 \geq 4$  en este caso

$$a \in ]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[, \quad b \in ]-\frac{1}{4}, 0[,$$

Del Teorema 5.1 se sigue que  $y(t)$  tiene un cero  $[0, \infty[$ . Ahora consideremos la función  $\dot{y}(t)$ . Tenemos entonces que

$$\dot{y}(t) = -\frac{2\vartheta_2 t}{\vartheta_1} F\left(a + 1, b + 1, c + 1; -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}\right).$$

Así que el número de ceros de  $\dot{y}(t)$  en  $]0, \infty[$  está dado por la ecuación

$$F\left(a + 1, b + 1, c + 1; -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}\right) = 0. \tag{5.8}$$

Ahora bien, por la simetría respecto a los parámetros  $a, b$  que posee toda función hipergeométrica de Gauss y dado que  $b + 1 > 0$  entonces la ecuación (5.8) no tiene solución en  $\mathbb{R}$  (incluso en todo  $\mathbb{C}^*$ ).

A partir de este ejemplo tenemos el siguiente lema.

**Lema 5.1.** Sean  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}^+$ . Considérese el problema de contorno

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{\vartheta_1 + \vartheta_2 t^2} y = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(T) = 0. \quad (5.9)$$

Entonces, si  $0 < \lambda < \vartheta_2/4$  el problema de (5.9) no tiene soluciones no triviales.

**Demostración.** Primero obsérvese que toda solución de (5.9) tiene por lo menos un cero en  $[0, T]$ , en efecto

$$\int_0^T \ddot{y}(t) dt = - \int_0^T \frac{\lambda}{\vartheta_1 + \vartheta_2 t^2} y(t) dt = 0,$$

por lo tanto  $y(t)$  cambia de signo en  $[0, T]$ . Por otro lado, la ecuación (5.9) se transforma por medio del cambio de variable  $z = -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}$  en la ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)w'' + \frac{1}{2}(1-z)w' - \frac{\lambda}{4\vartheta_2}w = 0.$$

Si  $y_\lambda(t)$  es la solución de (5.9) que satisface las condiciones iniciales  $y_\lambda(0) = 1, \dot{y}_\lambda(0) = 0$  entonces

$$y_\lambda(t) = F\left(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda; -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}\right),$$

en donde

$$a_\lambda = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\lambda/\vartheta_2}}{4}, \quad b_\lambda = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda/\vartheta_2}}{4}, \quad c_\lambda = 1/2.$$

Ahora bien, si  $0 < \lambda < \vartheta_2/4$  entonces  $a_\lambda \in ]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$  y  $b_\lambda \in ]-\frac{1}{4}, 0[$ , en consecuencia a partir del Teorema 5.1 se concluye que  $y_\lambda(t)$  tiene a lo más un cero en  $\mathbb{R}$ , más aún dicho cero está en  $]0, T[$ . Ahora bien, para  $t \in ]0, \infty[$  la ecuación  $\dot{y}_\lambda(t) = 0$  tiene solución si y solo si

$$F\left(a_\lambda + 1, b_\lambda + 1, c_\lambda + 1; -\frac{\vartheta_2 t^2}{\vartheta_1}\right) = 0,$$

pero esto no es posible dado que  $b_\lambda + 1 > 0$ . Por lo tanto  $y_\lambda(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto prueba que el problema de contorno (5.9) no tiene solución excepto la solución trivial  $y_\lambda \equiv 0$ .  $\square$

## Capítulo 6

# Sobre el teorema de Continuación Global de Leray-Schauder y una discusión sobre el número de soluciones periódicas y pares en un sistema hamiltoniano autónomo

En este capítulo se pretende alcanzar dos objetivos. Primero, presentar brevemente una versión en el caso finito dimensional del *Théorème Fondamental* desarrollado en [28], con el fin de estudiar el conjunto de ceros de una función analítica real dependiente de un parámetro y como segundo objetivo vamos a desarrollar las ideas encontradas en [26] para el estudio del número de soluciones periódicas en un sistema hamiltoniano que cumple ciertas condiciones, esto con el fin de clasificar dichas soluciones de acuerdo al número de ceros en cierto intervalo de periodicidad. Por último daremos una aplicación de estos temas a un sistema hamiltoniano no autónomo que se estudia en [14]. Antes de iniciar con la presentación de estos temas iniciamos con la definición del índice de Brouwer. Para mayor referencia ver [28].

**Definición 6.1.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función de clase en  $C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^d)$  y  $\mathbf{p} \notin f(\mathcal{X}_f) \cup f(\partial D)$  con  $\mathcal{X}_f = \{\mathbf{x} \in D : J_f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ . Se define el grado topológico de Brouwer para

$f$  en  $D$  en el punto  $\mathbf{p}$  como

$$d(f, D, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(\mathbf{p}) = \emptyset, \\ \sum_{\mathbf{x} \in f^{-1}(\mathbf{p})} \text{sgn}[J_f(\mathbf{x})] & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $J_f(\mathbf{x})$  denota el determinante de la aplicación lineal  $f'(\mathbf{x})$  y  $\text{sgn}$  denota la función signo.

Dado que  $\mathbf{p} \notin f(\mathcal{X}_f) \cup f(\partial D)$ , entonces  $f'(\mathbf{x})$  está bien definido y  $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ ; de otro lado la suma sobre los puntos  $\mathbf{x} \in f^{-1}(\mathbf{p})$  es finita.

Ahora si la función  $f$  es continua se puede aproximar por funciones  $f_j$  que satisfagan las condiciones de la definición anterior y así definir

$$d(f, D, \mathbf{p}) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(f_j, D, \mathbf{p}).$$

Más aún se prueba que este límite es independiente de la sucesión  $f_j$ .

Por ejemplo en el caso real, si  $f : D = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es continua y  $p \notin f(\partial D)$  la definición del grado topológico de Brouwer es sencillamente la siguiente:

$$d(f, D, p) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(a) < p < f(b), \\ -1 & \text{si } f(b) < p < f(a), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por último si  $\mathbf{x}_0 \in D$  es tal que  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}$  y es aislado en el conjunto  $f^{-1}(\mathbf{p})$  entonces se define el *índice de Brouwer* de  $\mathbf{x}_0$  como

$$\text{ind}(f, \mathbf{x}_0) = d(f, U, \mathbf{p}),$$

donde  $U$  es una pequeña vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Esta definición es correcta gracias a la propiedad de excisión del grado topológico y del hecho que  $\mathbf{x}_0$  es aislado en  $f^{-1}(\mathbf{p})$ .

Una importante propiedad del grado topológico de Brouwer es la invariancia bajo homotopía, más aún esta invariancia aún se mantiene cuando el dominio en donde se



calcula el grado cambia al variar el parámetro. Veamos esto en el siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [28]. Primero, considere un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^d \times [a, b]$ . Denotamos por  $(x, \lambda)$  los puntos en  $\mathbb{R}^d \times [a, b]$ , y definimos

$$U_{\lambda_0} = \{(x, \lambda) \in U : \lambda = \lambda_0\}.$$

**Lema 6.1.** *Sea  $U$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^d \times [a, b]$  y  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$  continua y tal que  $f(x, \lambda) \neq 0$  para todo  $(x, \lambda) \in \partial U$ . (frontera de  $U$  relativa a  $\mathbb{R}^d \times [a, b]$ ). Entonces  $\deg(f(x, \lambda), U_\lambda)$  es independiente de  $\lambda$ .*

Por último, presentamos un resultado necesario para la demostración de la versión del teorema de continuación global que vamos a considerar.

**Lema 6.2.** *Sea  $X$  un espacio métrico,  $K \subset X$  un conjunto compacto y  $A, B \subset K$  conjuntos compactos tales que no existe un continuo de  $K$  que conecta a  $A$  con  $B$ . Entonces existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subset U$ ,  $B \cap \overline{U} = \emptyset$ ,  $K \cap \partial U = \emptyset$ .*

El lector puede encontrar versiones más generales del Lema 6.2 en [42]. Estamos ahora en condiciones de presentar una versión simplificada del *Théorème Fondamental* de Leray-Schauder. La demostración que presentamos aquí se ha tomado de [26].

**Teorema 6.1.** *Sea  $F : \mathbb{R}^d \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  una función continua y  $Z = \{(x, \lambda) : F(x, \lambda) = 0\}$  sea el conjunto de ceros de  $F$ . Suponga que*

**(H1)**  *$Z$  es acotado, y*

**(H2)** *el conjunto  $Z_a = \{(x, a) : F(x, a) = 0\}$  es finito y existe  $(x_0, a) \in Z_a$  con  $\text{ind}(F(x, a), x_0) \neq 0$ .*

*Sea  $C$  la componente conexa de  $Z$  que contiene a  $(x_0, a)$ . Entonces una de las siguientes alternativas ocurre:*

(a)  $C \cap \{\lambda = b\} \neq \emptyset$ .

(b) Existe  $(x_1, a) \in Z_a$ ,  $x_1 \neq x_0$ , tal que  $(x_1, a) \in C$ .

**Demostración.** Considere el espacio métrico  $X = \mathbb{R}^d \times [a, b]$  y el conjunto  $K = Z$ .

De **(H1)** se tiene que  $K$  es compacto. Se define

$$A = \{(x_0, a)\}, \quad B = (Z_a \setminus A) \cup \{(x, b) \in Z_b : |x| \leq M\},$$

donde  $M$  es la mayor constante tal que  $Z$  está contenida en  $|x| < M$ . De **(H2)** tenemos que el conjunto  $(Z_a \setminus A)$  es finito por lo que el conjunto  $B$  es compacto. Ahora bien, si (a) ni (b) se cumplen, entonces no hay un continuo de  $Z$  que una a  $A$  con  $B$ . Tenemos entonces un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que

$$\{(x, a)\} = U_a \cap Z, \quad U_b = \emptyset, \quad Z \cap \partial U = \emptyset.$$

Por el Lema 6.1, el grado  $\deg(F(x, \lambda), U_\lambda)$  es independiente de  $\lambda$ . Dado que  $U_b = \emptyset$ , entonces el grado debe ser igual a cero. De otro lado, por **(H2)** tenemos que

$$\deg(F(x, a), U_a) = \text{ind}(F(x, a), x_a) \neq 0.$$

Esto es una contradicción, lo que muestra que (a) o (b) se cumplen.  $\square$

En general el conjunto  $C$  puede tener una estructura complicada y poco intuitiva, pero en hay un caso en donde se puede garantizar que  $C$  es un conjunto arco-conexo.

**Teorema 6.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 6.1 suponga que  $d = 1$  y  $F$  es real y analítica. Entonces, existe un arco continuo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow Z$ ,  $\alpha(s) = (x(s), \lambda(s))$  con  $x(0) = x_0$ ,  $\lambda(0) = a$  tal que  $\lambda(1) = b$  o  $\lambda(1) = a$  y  $x(1) = x_0$ .*

**Demostración.** El teorema se sigue al probar que  $C$  es arco-conexo. Con esto en mente, observe que al ser  $F$  analítica real entonces  $C$  es localmente arco-conexo. Considere el conjunto arco-conexo  $A = \{(x, \lambda) \in C : (x, \lambda) \text{ se conecta con } (x_0, a) \text{ por un arco}\}$ ,

$A \neq \emptyset$ . Veamos que  $A$  es abierto y cerrado. En efecto: Sea  $(x_1, \lambda_1) \in A$  y  $\mathcal{D} \subset Z$  una pequeña bola abierta alrededor de  $(x_1, \lambda_1)$ . Existe un arco  $\alpha_1$  que conecta a  $(x_0, a)$  con  $(x_1, \lambda_1)$  y por ser  $C$  localmente conexo para todo  $(x, \lambda) \in \mathcal{D}$  existe un arco  $\alpha_2$  que conecta  $(x, \lambda)$  con  $(x_1, \lambda_1)$ . En consecuencia el arco  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$  conecta a  $(x_0, a)$  con  $(x, \lambda)$ . Esto prueba que  $(x, \lambda) \in A$  por lo tanto  $A$  es abierto. Ahora bien, si  $(x_*, \lambda_*) \in C$ ,  $(x_*, \lambda_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \lambda_n)$  con  $(x_n, \lambda_n) \in A, \forall n$ , de nuevo al ser  $C$  localmente conexo es posible encontrar para cada  $\epsilon > 0$  un  $n_* = n_*(\epsilon)$  tal que  $(x_n, \lambda_n) \in \mathcal{D}_\epsilon$  con  $\mathcal{D}_\epsilon$  una bola de radio  $\epsilon$  y un arco  $\alpha_n$  que conecta  $(x_*, \lambda_*)$  con  $(x_n, \lambda_n) \forall n > n_*$ . Se sigue directamente que  $(x_*, \lambda_*) \in A$  por lo tanto  $A$  es cerrado. Puesto que  $C$  es conexo entonces  $C = A$ .  $\square$

Terminamos aquí esta breve presentación del *Théorème Fondamental* de Leray-Schauder, queda el mencionar que este resultado es aún más general pues en [28] se considera transformaciones compactas en espacios de dimensión infinita y además la versión que se presenta aquí es una nota justo después del teorema fundamental en [28].

## 6.1. Número de soluciones periódicas y pares en un sistema hamiltoniano autónomo

Considere el siguiente sistema hamiltoniano autónomo

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \partial_p H(q, p), \\ \dot{p} &= -\partial_q H(q, p),\end{aligned}\tag{6.1}$$

definido en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  simplemente conexo que contiene al origen  $(0, 0)$  y con hamiltoniano  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^3(\Omega)$ . Supóngase que  $H$  satisface:

1.  $H(q, p) = H(-q, p)$ .
2.  $H(q, p) = H(q, -p)$ .
3.  $\partial_q^2 H(0, 0) > 0$ ;  $\partial_p^2 H(0, 0) > 0$ .

Bajo estas condiciones se sigue directamente que  $(0, 0)$  es un mínimo local y aislado de  $H$  el cual es no degenerado dado que  $\det(D^2 H(0, 0)) \neq 0$ . Observe que por simetría se cumple  $\partial_{pq}^2 H(0, 0) = 0$ .

Por el Lema de Morse, [47] existe una vecindad  $U$  de  $(0, 0)$  y un difeomorfismo que transforma  $H(q, p)$  en la forma

$$\mathcal{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{q}^2 + \bar{p}^2 + \mathcal{H}(0, 0).$$

Dado que

$$H(q, p) = H(0, 0) + \frac{1}{2}(\partial_q^2 H(0, 0)q^2 + \partial_p^2 H(0, 0)p^2) + O(\|(q, p)\|^3).$$

Note que  $(0, 0)$  es un equilibrio del sistema (6.1) y además tiene índice de Morse cero. Así que para puntos  $(q, p) \in U$  las curvas de nivel  $H(q, p) = h$  son difeomorfas a  $S^1$  (curvas de nivel cerradas). Como  $H$  es una primera integral de (6.1) se concluye que toda solución  $X(t; q, p)$  con  $X(0; q_0, p_0) \in U$  es una solución periódica, pues su órbita es cerrada y (6.1) es un sistema autónomo.

Sea  $U^*$  el entorno simplemente conexo más grande que contiene a  $(0, 0)$  tal que  $\nabla H(q, p) \neq \mathbf{0}$  si  $(q, p) \in U^* - \{(0, 0)\}$ . Existe un segmento

$$Z = \{(\zeta, 0) : \zeta \in ]0, \alpha[ \} \subset U^*,$$

con  $\alpha > 0$  que es sección transversal de  $U^*$  para el cual toda solución periódica en  $U^*$  corta a  $Z$  una única vez. Ahora bien, para cada solución periódica  $X(t, \zeta) = (q(t, \zeta), p(t, \zeta))$  que satisface la condición inicial

$$q(0) = \zeta, \quad p(0) = 0, \tag{6.2}$$

con  $(\zeta, 0) \in Z$  se define la función periodo

$$T : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad \zeta \rightarrow T(\zeta),$$

donde  $T(\zeta)$  es el tiempo mínimo para el cual se cumple

$$X(t + T(\zeta), \zeta) = X(t, \zeta) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En adelante  $T(\zeta)$  será el periodo mínimo de  $X(t, \zeta)$ . Para cada condición inicial  $(\zeta, 0) \in Z$  supondremos que la función periodo  $T$  satisface la siguiente hipótesis.

**Hipótesis.** Sea  $T = T(\zeta)$  la función periodo de  $X(t, \zeta)$ . Entonces

- a)  $T(\zeta)$  es creciente.
- b)  $\lim_{(\zeta, 0) \rightarrow \partial U^*} T(\zeta) = T_{max}$  con  $T_{max}$  en  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Definamos ahora las siguientes funciones:

$$Q(t) = \begin{cases} q(-t) & \text{si } t \in [-N\pi, 0] \\ q(t) & \text{si } t \in [0, N\pi] \end{cases}, \quad P(t) = \begin{cases} -p(-t) & \text{si } t \in [-N\pi, 0] \\ p(t) & \text{si } t \in [0, N\pi] \end{cases}.$$

Note que al ser  $\dot{q}(0) = 0$  y  $p(0) = 0$  las funciones  $Q(t)$  y  $P(t)$  son de clase  $C^1$ . Para  $t \in [-N\pi, 0]$  se cumple:

$$\dot{Q}(t) = -\dot{q}(-t), \quad \dot{P}(t) = \dot{p}(-t),$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= -\dot{q}(-t) = -\partial_p H(q(-t), p(-t)) & \dot{P}(t) &= \dot{p}(-t) = -\partial_q H(q(-t), p(-t)) \\ \dot{Q}(t) &= \partial_p H(q(-t), -p(-t)) & y & \dot{P}(t) = -\partial_q H(q(-t), -p(-t)) \\ \dot{Q}(t) &= \partial_P H(Q(t), P(t)) & \dot{P}(t) &= -\partial_Q H(Q(t), P(t))\end{aligned}$$

En conclusión, las funciones  $Q(t)$  y  $P(t)$  satisfacen el sistema hamiltoniano autónomo (6.1). Por lo tanto, si  $X(t) = (q(t), p(t))$  es solución de (6.1) entonces  $\bar{X}(t) = (Q(t), P(t))$  también lo es. Más aún si se imponen las condiciones inicial y de frontera

$$\begin{aligned}q(0) &= \xi, & p(0) &= 0, \\ p(0) &= p(N\pi) = 0,\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\bar{X}(0) &= (Q(0), P(0)) = (\xi, p(0)) = (\xi, 0) = X(0), \\ \bar{X}(N\pi) &= (Q(N\pi), P(N\pi)) = (q(N\pi), p(N\pi)) = (q(N\pi), 0) = X(N\pi).\end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones se comprueba que  $\bar{X}(t) = X(t)$ , es decir

$$\begin{cases} q(t) = q(-t) & \text{en } [-N\pi, 0], \\ p(t) = -p(-t) & \text{en } [-N\pi, 0]. \end{cases}$$

Comprobamos así la existencia de soluciones  $X(t) = (q(t), p(t))$  del sistema hamiltoniano autónomo (6.1) para las cuales  $q(t)$  es una función par y  $p(t)$  es una función impar. Ahora bien, bajo la hipótesis sobre la función periodo  $T$ , dado un  $N \geq 1$  estamos interesados en la existencia de soluciones  $2N\pi$  periódicas de (6.1) con  $q$  una función par y  $p$  una función impar y más aún el poder determinar el número máximo de dichas soluciones que satisfacen la condición inicial (6.2) y la condición de frontera

$$p(N\pi, \zeta) = 0. \tag{6.3}$$

Para este fin vamos a seguir las ideas encontradas en [26]. La búsqueda de soluciones  $2N\pi$  periódicas de (6.1) con  $q$  una función par y  $p$  una función impar que satisfacen (6.3) es equivalente a encontrar los ceros de la función

$$G_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G_N(\zeta) = p(N\pi, \zeta). \quad (6.4)$$

El sistema (6.1) es invariante bajo la simetría  $(t, q, p) \rightarrow (-t, -q, p)$ , por lo tanto podemos asumir que  $q(0, \zeta) = \zeta > 0$ . Por la simetría también se deduce que  $X(t, \zeta)$  es solución de (6.1) y satisface las condiciones iniciales (6.2) y las condiciones de contorno (6.3) si y solo si existe un  $k \in \mathbb{Z}^+$  tal que

$$\frac{T(\zeta)}{2} = \frac{N\pi}{k}. \quad (6.5)$$

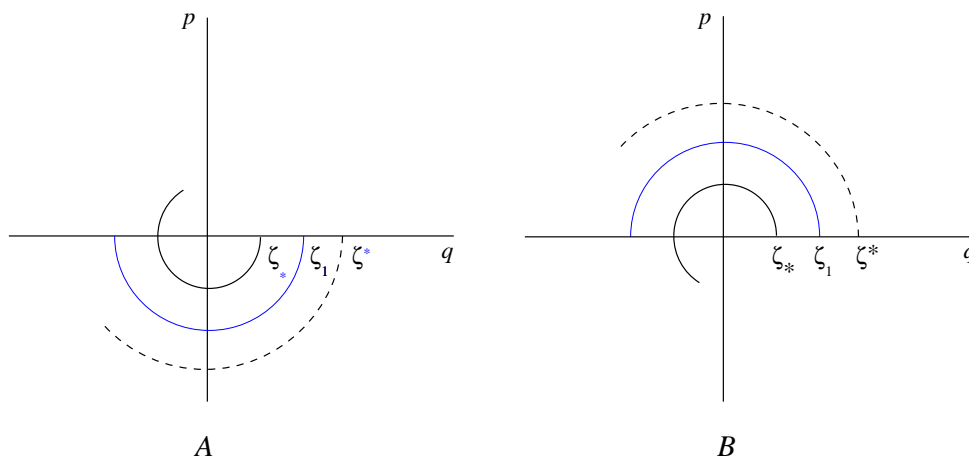


Figura 6.1: Signo de la función  $p$ .

Ahora bien,  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} T(\zeta) = T_{lp}$ , donde  $T_{lp}$  es el periodo del problema linealizado de (6.1) en el equilibrio  $(0, 0)$  entonces

$$T(\zeta) > T_{lp} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2N\pi}{k} > T_{lp},$$

por lo tanto

$$k < \frac{2N\pi}{T_{lp}}.$$

Por otro lado, el problema linealizado de (6.1) en el equilibrio  $(0, 0)$  es

$$\dot{Y} = AY \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \partial_p^2 H(0, 0) \\ -\partial_q^2 H(0, 0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Por cálculo directo se deduce con  $\omega^2 = \partial_q^2 H(0, 0) \cdot \partial_p^2 H(0, 0)$  que  $T_{lp} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Ahora definamos  $\nu_N = \left\lceil \frac{2N\pi}{T_{lp}} \right\rceil$  lo que equivale a  $\nu_N = \lceil \omega N \rceil$  con  $\lceil \cdot \rceil$  la función parte entera y sean  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\nu_N}$  las soluciones de (6.5) con  $k = 1, 2, \dots, \nu_N$ .

Por lo tanto el conjunto de ceros de la función  $G_N$  es finito; más aún si  $\mathcal{Z}_0 = \{\zeta \in U^* : G_N(\zeta) = 0\}$  entonces

$$\mathcal{Z}_0 = \{-\zeta_1, \dots, -\zeta_{\nu_N}, 0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\nu_N}\}.$$

Dado que  $T(\zeta)$  es creciente entonces  $\zeta_1 > \zeta_2 > \dots > \zeta_{\nu_N}$  y más aún:

$$\begin{aligned} \text{Si } \zeta_* < \zeta_1, \quad \text{entonces} \quad \frac{T(\zeta_*)}{2} < \frac{T(\zeta_1)}{2} = N\pi. \\ \text{Si } \zeta_* > \zeta_1, \quad \text{entonces} \quad \frac{T(\zeta_*)}{2} > \frac{T(\zeta_1)}{2} = N\pi. \end{aligned}$$

Así que para valores  $\zeta$  cercanos a  $\zeta_1$  tenemos las siguientes posibles situaciones que dependen del signo de  $\dot{p}(t, \zeta)$  en  $t = 0$ . Vamos a considerar el caso  $\dot{p}(0, \zeta) < 0$ . En la figura 6.1 este caso corresponde a la situación A. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p(N\pi, \zeta) > 0 \quad \text{si} \quad \zeta < \zeta_1. \\ p(N\pi, \zeta) < 0 \quad \text{si} \quad \zeta > \zeta_1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Concluimos entonces que existen  $\nu_N$  soluciones no triviales,  $2N\pi$  periódicas de (6.1) con  $q$  una función par y  $p$  una función impar, que satisfacen la condición inicial (6.2) y la condición de frontera (6.3) con  $X(0, \zeta) = (\zeta, 0)$  con  $\zeta > 0$ . Dichas soluciones pueden clasificarse por el número de ceros de  $q(t, \zeta_k)$  en  $[0, N\pi]$  para  $k = 1, 2, \dots, \nu_N$  y

$$q_1(0, \zeta_1) = \zeta_1 > \dots > q_{\nu_N}(0, \zeta_{\nu_N}) = \zeta_{\nu_N}.$$



De (6.7) podemos concluir para la función  $G_N$  que  $\text{ind}(G_N, \zeta_1) = -1$ . Más aún, se comprueba que en general

$$\text{ind}(G_N, \zeta_k) = (-1)^k.$$

El índice de los puntos  $-\zeta_k$  se calculan usando la simetría y obtener así

$$\text{ind}(G_N, -\zeta_k) = (-1)^{k+1}.$$

De igual forma podemos calcular el índice en el equilibrio  $(0, 0)$ . Se hace por medio de la linealización de (6.1) en el equilibrio.

Sea  $X(t, \zeta)$  solución de (6.1) que satisface la condición inicial (6.2). Si  $\zeta = 0$  entonces  $X \equiv 0$ . Ahora bien:

$$\dot{X}(t, \zeta) = F(X(t, \zeta)) = \begin{pmatrix} \partial_p H(q(t, \zeta), p(t, \zeta)) \\ -\partial_q H(q(t, \zeta), p(t, \zeta)) \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\partial_\zeta \dot{X}(t, \zeta) = \frac{d}{dt} (\partial_\zeta X(t, \zeta)) = DF(X(t, \zeta)) \partial_\zeta X(t, \zeta).$$

Si  $\zeta = 0$  tenemos el problema linealizado en  $(0, 0)$  dado por (6.6) con

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \partial_\zeta q(t, 0) \\ \partial_\zeta p(t, 0) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se deduce que

$$\partial_\zeta p(t, 0) = -\frac{\partial_q^2 H(0, 0)}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \text{ind}(G_N, 0) &= \text{sign}(\partial_\zeta G_N(0)), \\ &= \text{sign}(\partial_\zeta p(N\pi, 0)), \\ &= \text{sign}\left(-\frac{\partial_q^2 H(0, 0)}{\omega} \text{sen } \omega N\pi\right). \end{aligned}$$

Dado que  $\partial_q^2 H(0, 0) > 0$  y  $\omega > 0$  entonces:

$$\text{ind}(G_N, 0) = \text{sign}(-\text{sen } \omega N\pi),$$

$$\text{ind}(G_N, 0) = (-1)^{\nu_{N+1}}.$$

En resumen, para el sistema hamiltoniano (6.1) existen un número finito de soluciones no triviales  $X(t, \zeta_k)$ , para  $k = 1, \dots, \nu_N$  que son  $2N\pi$  periódicas y tales que  $q(t, \zeta_k)$  es una función par y  $p(t, \zeta_k)$  es una función impar y además satisfacen las condiciones

$$X(0, \zeta_k) = (\zeta_k, 0), \quad X(N\pi, \zeta_k) = (q(N\pi, \zeta_k), 0).$$

Más aún cada punto  $(\zeta_k, 0)$  al igual que el equilibrio  $(0, 0)$  tienen índice de Brouwer diferente de cero.

## 6.2. Aplicación en un problema químico

A continuación vamos a presentar una aplicación del tema anterior considerado en este capítulo. Para ello, consideramos el sistema hamiltoniano no autónomo

$$\begin{cases} \dot{q} = \mu_\epsilon(t)(2p - 1)q + \frac{\sigma}{2}(1 - 2p)q^2, \\ \dot{p} = \mu_\epsilon(t)(p - p^2) + \sigma(p^2 - p)q. \end{cases} \quad (6.8)$$

Este sistema hamiltoniano estudiado en [14], modela trayectorias caóticas y periódicas en un sistema químico con proceso reversible, en el cual se asume que  $\mu_\epsilon(t) = \mu + \epsilon h(t)$ , con  $h(t)$  una función positiva, continua,  $2\pi$  periódica y  $\epsilon$  es un parámetro en  $I = [0, E^*]$  para algún valor positivo  $E^*$ .

En el caso autónomo ( $\epsilon = 0$ ) el sistema (6.8) tiene como un hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H} = \left(\mu q - \frac{\sigma}{2}q^2\right)(p^2 - p). \quad (6.9)$$

Es bien sabido que las soluciones del sistema viven en las curvas de nivel del hamiltoniano  $\mathcal{H}$ . Ahora bien, la curva de nivel  $\mathcal{H} = 0$  está compuesta por cuatro líneas invariantes

$$\{q = 0\}, \quad \{q = 2\mu/\sigma\}, \quad \{p = 0\}, \quad \text{y} \quad \{p = 1\}. \quad (6.10)$$

las cuales se cortan en cuatro puntos fijos, todos ellos de tipo silla

$$(0, 0), \quad (2\mu/\sigma, 0), \quad (0, 1), \quad \text{y} \quad (2\mu/\sigma, 1), \quad (6.11)$$

formando un área rectangular centrada en un quinto punto fijo  $(\mu/\sigma, 1/2)$  que está en la curva de nivel  $\mathcal{H} = -\mu^2/(8\sigma)$ , más aún es un mínimo local de  $\mathcal{H}$  lo cual implica que es un centro. En esta área rectangular todas las trayectorias son órbitas periódicas alrededor del centro. Dada la clara simetría del campo vectorial en el sistema hamiltoniano autónomo alrededor del centro  $(\mu/\sigma, 1/2)$  se considera el siguiente cambio de variable

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{T}(q, p) = \left( q - \frac{\mu}{\sigma}, p - \frac{1}{2} \right), \quad (6.12)$$

para obtener en las nuevas coordenadas el hamiltoniano cuadrático

$$H(q, p) = -\frac{\sigma}{2} \left( q^2 - \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) \left( p^2 - \frac{1}{4} \right), \quad (6.13)$$

el cual tiene las siguientes simetrías

$$S_1 : (q, p) \rightarrow (q, -p),$$

$$S_2 : (q, p) \rightarrow (-q, -p),$$

$$S_3 : (q, p) \rightarrow (-q, p).$$

El correspondiente sistema dinámico sería

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\mu^2}{\sigma} p - \sigma p q^2, \\ \dot{p} = -\frac{\sigma}{4} q + \sigma q p^2, \end{cases} \quad (6.14)$$

y las líneas invariantes son ahora

$$\{q = -\mu/\sigma\}, \quad \{q = \mu/\sigma\}, \quad \{p = -1/2\} \quad \text{y} \quad \{p = 1/2\},$$

las cuales definen una nueva región rectangular  $\mathcal{A}$  cuyo centro es el punto de equilibrio  $(0, 0)$ . (Ver figura (6.2)). Considere una solución periódica  $X(t) = (q(t), p(t))$  de (6.14) en el interior de  $\mathcal{A}$  con condiciones iniciales

$$q(0) = 0, \quad p(0) = \zeta, \quad (6.15)$$

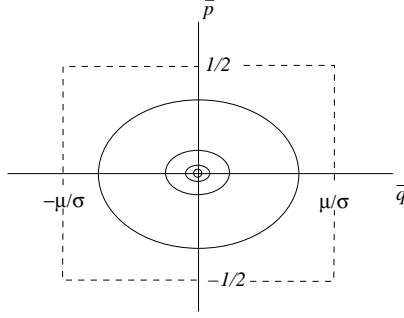


Figura 6.2: Región rectangular  $\mathcal{A}$ .

esto implica que  $\zeta$  satisface  $-1/2 < \zeta < 1/2$ . Dado que  $H$  es una primera integral de (6.14) se considera el nivel de energía

$$h = H(0, \zeta) = \frac{\mu^2}{2\sigma} \left( \zeta^2 - \frac{1}{4} \right),$$

y la ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q(t), p(t)) &= h, \\ -\frac{\sigma}{2} \left( q^2(t) - \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) \left( p^2(t) - \frac{1}{4} \right) &= \frac{\mu^2}{2\sigma} \left( \zeta^2 - \frac{1}{4} \right), \end{aligned}$$

que se puede escribir en la forma

$$-(\sigma^2 q^2(t) - \mu^2)(4p^2(t) - 1) = \mu^2(4\zeta^2 - 1).$$

Por la simetría  $S_2$  se toma  $0 < p^2(t) < \zeta^2 < 1/4$  y así obtener por cálculo directo que

$$\sigma^2 q^2(t) = \frac{4\mu^2(p^2(t) - \zeta^2)}{4p^2(t) - 1}.$$

De (6.14) se sigue que

$$q = \frac{\dot{p}}{\sigma(p^2 - \frac{1}{4})},$$

y finalmente se obtiene que

$$\dot{p}^2(t) = \frac{1}{4} \mu^2 (p^2(t) - \zeta^2)(4p^2(t) - 1).$$

Note que en la última ecuación, el lado derecho es positivo. Sea  $T(\zeta)$  el periodo de la solución  $X(t)$  de (6.14) que satisface (6.15). Tenemos entonces que

$$\int_0^{T(\zeta)/4} dt = \int_0^{T(\zeta)/4} \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{4}\mu^2(p^2 - \zeta^2)(4p^2 - 1)}} \frac{dp}{dt} dt,$$

$$T(\zeta) = \frac{8}{\mu} \int_0^\zeta \frac{1}{\sqrt{(p^2 - \zeta^2)(4p^2 - 1)}} dp.$$

Si  $p = \zeta v$ , entonces

$$T(\zeta) = \frac{8}{\mu} K(2\zeta),$$

donde  $K(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2v^2)}} dv$  es la integral elíptica completa de primer tipo.

De otro lado el problema (6.14) en la solución de equilibrio  $(0, 0)$  está dado por

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{\mu^2}{\sigma} y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{\sigma}{4} y_1, \end{cases}$$

de donde se deduce que el periodo del problema linealizado es  $T_{lp} = \frac{4\pi}{\mu}$ . De la discusión anterior se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 6.1.** *Sea  $X(t; \zeta) = (q(t, \zeta), p(t, \zeta))$  una solución periódica no trivial de (6.14) que satisface la condición inicial (6.15). Si  $T(\zeta)$  es una función periodo de  $X(t; \zeta)$  esta función satisface las siguientes propiedades*

- (a)  $\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} T(\zeta) = T_{lp}$ .
- (b)  $\lim_{\zeta \rightarrow \frac{1}{2}^-} T(\zeta) = \infty$ .
- (c)  $\frac{dT}{d\zeta} > 0$  para todo  $0 < \zeta < \frac{1}{2}$ .

**Demostración.** La prueba de (a) y (b) se sigue de las conocidas propiedades de la función integral elíptica de primer tipo. Más aún

$$K(2\zeta) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-v^2)(1-4\zeta^2v^2)}} dv = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-4\zeta^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

Para demostrar (c) considere la función real

$$f(\theta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4\zeta^2 \sin^2 \theta}},$$

con  $f : [0, \pi/2] \times [0, \zeta_*] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\zeta_* < 1/2$ . Esta función

- ▷  $f(\cdot, \zeta)$  es integrable en  $[0, \pi/2]$ , para todo  $\zeta \in [0, \zeta_*]$ ,
- ▷ Existe  $\frac{\partial f}{\partial \zeta}(\theta, \cdot)$  en  $[0, \zeta_*]$ , para todo  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,
- ▷  $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$  es continua en  $[0, \pi/2] \times [0, \zeta_*]$ ,

más aún  $\frac{\partial f}{\partial \zeta}$  es continua en  $[0, \pi/2] \times [0, 1/2[$ . Estas observaciones previas sobre  $f$  son las hipótesis de la versión clásica de la regla de derivación bajo integrales, por lo tanto

$$\frac{dT}{d\zeta} = \frac{32\zeta}{\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - 4\zeta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta > 0,$$

y esto demuestra (c).  $\square$

**Observación.** La anterior proposición también es válida si se consideran soluciones  $X(t, \eta)$  de (6.14) que satisfacen las condiciones iniciales

$$q(0) = \eta, \quad p(0) = 0, \tag{6.16}$$

con  $0 < \eta < \mu/\sigma$ . De otro lado, note que  $H(q, p)$  satisface la condición de simetría  $S_1$  en consecuencia se garantiza para el sistema (6.14) la existencia de soluciones  $X(t) = (q(t), p(t))$  las cuales son  $2N\pi$  periódicas y además  $q(t)$  es una función par y  $p(t)$  una función impar. Más aún, de la discusión en la sección 6.1, existen a lo más  $\vartheta_N = \lfloor \frac{\mu N}{2} \rfloor$  soluciones  $2N\pi$  periódicas de (6.14) que satisfacen las condiciones iniciales (6.16) y la condición de frontera

$$p(N\pi) = 0.$$

De esta forma, hemos demostrado que para el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{q} = \mu(2p - 1)q + \frac{\sigma}{2}(2p - 1)q^2, \\ \dot{p} = \mu(p - p^2) - \sigma(p^2 - p)q. \end{cases} \tag{6.17}$$

existen  $\vartheta_N = \lceil \frac{\mu N}{2} \rceil$  soluciones  $X(t, \xi, 0) = (q(t, \xi, 0), p(t, \xi, 0))$  que son  $2N\pi$  periódicas y que satisfacen la condición inicial

$$q(0, \xi, 0) = \xi, \quad p(0, \xi, 0) = 1/2, \quad (6.18)$$

y la condición de frontera

$$p(N\pi, \xi, 0) = 1/2, \quad (6.19)$$

con  $\mu/\sigma < \xi < 2\mu/\sigma$ . Estas soluciones pueden clasificarse de acuerdo a las condiciones iniciales

$$2\mu/\sigma > q_1(0) = \xi_1 > \dots > q_{\vartheta_N}(0) = \xi_{\vartheta_N} > \mu/\sigma,$$

donde  $\xi_k$  es la solución de

$$\frac{T(\xi)}{2} = \frac{N\pi}{k}, \quad (6.20)$$

y  $k$  es el número de ceros de  $q(t, \xi, 0) - \mu/\sigma$  en  $[0, N\pi]$  con  $k = 1, \dots, \vartheta_N$ . Más aún lo anterior muestra que

$$\mathcal{K}_0 = \{\xi \in \mathbb{R} : p(N\pi, \xi, 0) = 1/2\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{2\mu/\sigma - \xi_1, \dots, 2\mu/\sigma - \xi_{\vartheta_N}, \mu/\sigma, \xi_1, \dots, \xi_{\vartheta_N}\}.$$

Por último, hacemos notar que cada solución  $X(0, \xi_k, 0)$  de (6.17) e incluso la solución trivial  $(\mu/\sigma, 1/2)$  tienen índice de Brouwer diferente de cero, en efecto, siguiendo los cálculos de la sección 6.1 el índice de  $\xi_k$  y  $2\mu/\sigma - \xi_k \in \mathcal{K}_0$  están dados por

$$\text{ind}(p(\cdot, 0), \xi_k) = (-1)^k, \quad \text{ind}(p(\cdot, 0), 2\mu/\sigma - \xi_k) = (-1)^{k+1}.$$

El índice en  $\xi_0 = \mu/\sigma$  se calcula por medio de la linealización de (6.17) en la solución de equilibrio, es decir

$$\text{ind}(p(\cdot, 0), 0) = \text{sign}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}(\mu/\sigma, 1/2)\right).$$

El problema linealizado de (6.17) en el equilibrio  $(\mu/\sigma, 1/2)$  está dado por

$$\dot{W}(t) = AW(t), \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \mu^2/\sigma \\ -\sigma/4 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(\mu/\sigma, 1/2) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(N\pi, \mu/\sigma, 1/2) = \frac{\sigma}{2\mu} \operatorname{sen}\left(\frac{\mu N\pi}{2}\right).$$

En consecuencia

$$\operatorname{ind}(p(\cdot, 0), 0) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sigma}{2\mu} \operatorname{sen}\left(\frac{\mu N\pi}{2}\right)\right) = (-1)^{\vartheta_{N+1}}.$$

Hemos comprobado entonces que localmente existe una rama de soluciones no triviales para el problema (6.8) que emanan del problema autónomo. En [14] se demuestra como extender estas soluciones.



## Capítulo 7

# Órbitas periódicas en el problema de Sitnikov

En este capítulo presentaremos algunos de los principales resultados del reciente trabajo de J. Llibre y R. Ortega [26] en relación a las familias de soluciones periódicas del problema de valor de frontera

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + r(t, e))^2} = 0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}(N\pi) = 0, \quad (7.1)$$

para cada entero  $N \geq 1$  dado. Obsérvese que las soluciones de este problema pueden extenderse como soluciones pares y periódicas con periodo  $2N\pi$ .

Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  y  $e \in [0, 1[$  se denotará por  $z(t, \xi, \eta, e)$  a la solución de (7.1) que satisface las condiciones iniciales

$$z(0) = \xi, \quad \dot{z}(0) = \eta. \quad (7.2)$$

Nótese que  $z(t, \xi, \eta, e)$  está definida en todo  $t \in \mathbb{R}$  (ver Proposición 2.1). Más aún, la búsqueda de soluciones pares y  $2N\pi$  periódicas de (7.1) que satisfacen (7.2) es equivalente a encontrar los ceros de la función

$$F_N : \mathbb{R} \times [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_N(\xi, e) = \dot{z}(N\pi, \xi, 0, e),$$

la cual es una función analítica real. El estudio de soluciones periódicas para el problema de Sitnikov ha sido objeto de estudio de muchos autores (ver [6, 11, 12, 26, 31]). En

algunos trabajos se obtienen soluciones periódicas del problema elíptico de Sitnikov por medio de la continuación de órbitas periódicas en el problema circular de Sitnikov para valores de la excentricidad suficientemente pequeños. En referencia a estudios numéricos sobre este problema se encuentran los trabajos en [6] y [21]. En este último se presentan familias de soluciones simétricas y periódicas para casi todo los valores de excentricidad  $e$  en  $[0, 1[$ . Más aún se presentan diagramas de soluciones periódicas que bifurcan desde la solución de equilibrio  $z = 0$  en valores especiales de la excentricidad, digamos  $e = e_*$  y que son continuadas para  $e_* < e < 1$ .

Con el objetivo de obtener soluciones periódicas para valores de la excentricidad no necesariamente pequeños, los autores en [26] hacen uso del teorema de continuación global de Leray-Schauder (Teorema 6.1).

La idea principal en [26] es aplicar el Teorema 6.1 a la función analítica real  $F_N$  y estudiar el conjunto

$$\Sigma = \{(\xi, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[: F_N(\xi, e) = 0\},$$

cuya topología puede ser complicada cerca de la frontera  $e = 1$ . Por lo que un primer objetivo logrado fue la comprobación de las hipótesis **(H1)** y **(H2)** del Teorema 6.1 sobre el conjunto  $\Sigma$ .

Con este fin, se considera un problema circular de Sitnikov, es decir

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = 0, \tag{7.3}$$

donde  $r(t, 0) = R > 0$  es la distancia de las masas primarias al origen. En [6] se demuestra que si  $T(\xi)$  es el correspondiente periodo mínimo, entonces  $T(\xi)$  es una función creciente y más aún satisface

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} T(\xi) = \pi/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} T(\xi) = \infty.$$

Ahora bien, se fija un  $\xi_* > 0$  tal que  $\frac{T(\xi)}{4} > N\pi$  si  $\xi \geq \xi_*$  con  $T(\xi)$  el periodo mínimo

de la solución de (7.3) que satisface las condiciones iniciales

$$z(0) = \xi, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

En [26] se demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 7.1.** *Sea  $R > 0$  dado. Suponga que  $r(t, e) \geq R$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y sea  $z(t, \xi, 0, e)$  una solución de (7.1) que satisface (7.2). Entonces  $|\xi| \leq \xi_*$ .*

La idea de la demostración consiste en comparar la solución  $\psi(t, \xi, 0, 0)$  del problema circular de Sitnikov (7.3) con la solución par y  $2N\pi$  periódica  $z(t, \xi, 0, e)$  del problema elíptico de Sitnikov (7.1) y comprobar que  $z(t, \xi, 0, e) \geq \psi(t, \xi, 0, 0)$  para  $t \in [0, \frac{T(\xi)}{4}]$ . Ahora bien, si  $|\xi| \geq \xi_*$  en el caso elíptico se llegaría al equilibrio en un tiempo mayor a  $N\pi$  lo cual no es posible. Este argumento se formaliza por medio de desigualdades diferenciales. La figura 7.1 visualiza mejor lo anterior.

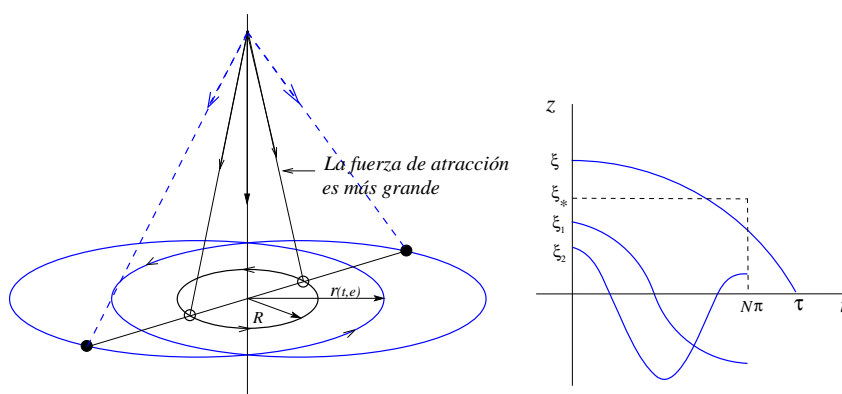


Figura 7.1: Se llega más rápido al equilibrio en el caso circular que en el caso elíptico.

Dado que para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$  se tiene que

$$\frac{1-e}{2} \leq r(t, e) \leq \frac{1+e}{2}, \quad (7.4)$$

la Proposición 7.1 se aplica sobre toda banda  $\mathbb{R} \times [0, E]$  con  $E < 1$ , tomando  $R = \frac{1-E}{2}$ .

Lo anterior prueba que  $\Sigma$  es acotado y por lo tanto la condición **(H1)** del Teorema 6.1 se satisface.

Una demostración alternativa para comprobar la hipótesis **(H1)** es la siguiente: De las condiciones de contorno en (7.1) tenemos

$$\int_0^{N\pi} \frac{-z(t)}{(z(t)^2 + r(t, e)^2)^{3/2}} dt = \int_0^{N\pi} \ddot{z}(t) dt = \dot{z}(N\pi) - \dot{z}(0) = 0,$$

de aquí se deduce que  $z(t)$  cambia de signo en  $[0, N\pi]$ . Sea  $\tau \in ]0, N\pi[$  un cero de  $z(t)$ . Tomando  $e \in [0, E]$  y  $R = \frac{1-E}{2}$  se deduce que existe una constante  $C_1 = C_1(E)$  tal que

$$\frac{\xi}{(\xi^2 + r^2(t, e))^{3/2}} \leq \frac{\xi}{(\xi^2 + R^2)^{3/2}} \leq C_1$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto

$$|\ddot{z}(t)| \leq C_1 \quad \text{y} \quad |\dot{z}(t)| \leq C_1 N\pi.$$

De esta forma  $|z(t)| = |z(t) - z(\tau)| \leq C_1 N\pi |t - \tau| \leq C_1 (N\pi)^2$ . Tenemos finalmente que

$$|z(t)| + |\dot{z}(t)| \leq C_1 N\pi(1 + N\pi) \quad \text{para todo} \quad t \in [0, N\pi].$$

En particular para  $t = 0$  tenemos que  $|\xi| \leq C_1 N\pi(1 + N\pi)$ .

Faltaría probar que se satisface la hipótesis **(H2)**, esto implica estudiar el conjunto

$$\Sigma_0 = \{(\xi, 0) : F_N(\xi, 0) = 0\},$$

lo cual equivale a estudiar las soluciones del problema de contorno

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + \frac{1}{4})^{3/2}} = 0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}(N\pi) = 0. \quad (7.5)$$

Sea  $z(t, \xi, 0, 0)$  la solución de (7.5) que satisface las condiciones iniciales

$$z(0) = \xi, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (7.6)$$

Sabemos bien que la ecuación diferencial de este problema tiene un hamiltoniano dado por

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} \dot{z}^2 - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Este hamiltoniano satisface las condiciones 1. 2. y 3. de la sección 6.1 del capítulo 6.

De esta forma se obtiene tal como se hace en [26] que

$$\Sigma_0 = \{-\xi_1, \dots, -\xi_{\nu_N}, 0, \xi_1, \dots, \xi_{\nu_N}\},$$

con  $\xi_k$  la solución de  $\frac{T(\xi_k)}{2} = \frac{N\pi}{k}$  con  $k = 1, 2, \dots, \nu_N$  y  $\nu = \nu_N = [2\sqrt{2}N]$ . Finalmente se concluye que existen  $\nu_N$  soluciones no triviales, pares y  $2N\pi$  periódicas de (7.5) que satisfacen las condiciones iniciales (7.6). Estas soluciones se pueden clasificar de acuerdo al número de ceros de  $z(t, \xi_k, 0, 0)$  en  $[0, N\pi]$  y

$$z(0, \xi_1, 0, 0) = \xi_1 > \dots > z(0, \xi_{\nu_N}, 0, 0) = \xi_{\nu_N}.$$

Siguiendo el análisis presentado en el sección 6.1 se comprueba que el índice de cada solución no trivial  $z(t, \xi_k, 0, 0)$  es  $(-1)^k$  y el índice de la solución de equilibrio  $z = 0$  es  $(-1)^{\nu_N+1}$ . De la discusión anterior y del Teorema 6.1 se concluye que existen localmente un número finito de ramas de soluciones no triviales, pares y  $2N\pi$  periódicas que emanan de cada punto  $(\xi_k, 0)$  las cuales están ordenadas de acuerdo al número de ceros de  $z(t, \xi_k, 0, 0)$  en  $[0, N\pi]$ . Claramente desde el equilibrio  $(0, 0)$  emana la rama trivial.

La posibilidad de aplicar el Teorema 6.1 al problema circular de Sitnikov, permitió a los autores de [26] obtener varios resultados, entre ellos los siguientes.

**Teorema 7.1.** *Para cada  $p = 1, \dots, \nu$  y  $\epsilon > 0$  existe una familia (o una rama) de soluciones  $\{(z_s(t), e_s)\}_{s \in [0, 1[}$  de (7.1) que satisfacen:*

- (1) *La transformación  $(s, t) \in [0, 1[ \times \mathbb{R} \rightarrow (z_s(t), \dot{z}_s(t), e_s)$  es continua.*
- (2) *Las soluciones  $z_s(t)$  son pares y  $2N\pi$  periódicas; es decir, para todo  $s \in [0, 1[$  se tiene*

$$z_s(t) = z_s(-t), \quad z_s(t + 2N\pi) = z_s(t).$$

- (3) *Para cada  $s \in [0, 1[$  tenemos que  $z_s(0) > 0$  (por lo tanto  $z_s(t)$  no es una solución trivial) y  $z_s(t)$  tiene exactamente  $p$  ceros en el intervalo  $[0, N\pi]$ .*

(4) Con  $e_0 = 0$ ,  $e_s \in [0, 1 - \epsilon]$  para cada  $s$  y una de las siguientes alternativas sucede:

1.  $e_s \rightarrow 1 - \epsilon$  y  $z_s(0) \rightarrow \xi > 0$  si  $s \nearrow 1$ .

2.  $\lim_{s \nearrow 1} e_s = E$  existe con  $E < 1 - \epsilon$ ,  $z_s(t)$  converge a 0 si  $s \nearrow 1$  y la ecuación diferencial lineal

$$\ddot{y} + \frac{1}{r^3(t, E)}y = 0,$$

tiene una solución no trivial, par,  $2N\pi$  periódica con exactamente  $p$  ceros en el intervalo  $[0, N\pi]$ .

Este teorema determina la existencia de familias de soluciones pares y  $2N\pi$  periódicas del problema de Sitnikov (7.1) que satisfacen las condiciones iniciales (7.2) para todo valor del parámetro excentricidad  $e \in [0, 1 - \epsilon]$ .

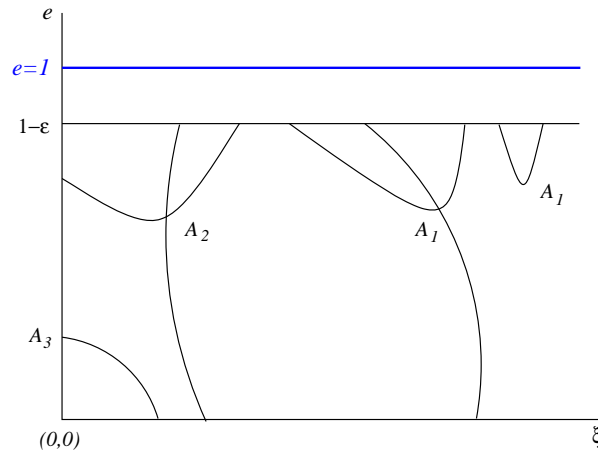


Figura 7.2: Familia de órbitas periódicas.

Una ilustración donde se muestra una situación hipotética que ilustra el Teorema 7.1 se plasma en la figura 7.2 la cual se encuentra en [26]. Para cada  $N \geq 2$  se toman tres números  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \nu$  y se dibujan los conjuntos  $A_1, A_2, A_3$  se define

$$A_i = \left\{ (z(0), e) : z(t) \text{ es una solución par, } 2N\pi \text{ periódica con } p_i \text{ ceros en } [0, N\pi], z(0) > 0, e \in [0, 1 - \epsilon] \right\}$$

Para el caso  $p_1$  se encuentran familias que cumplen 4.1. En el caso  $p_3$  familias que cumplen 4.2 y en el caso  $p_2$  ambas situaciones se presentan. En el capítulo 8 se mostrará que la situación hipotética para el caso  $p_2$  no puede ocurrir. De igual forma cabe mencionar que en el caso  $p > N$  las familias encontradas pueden extenderse globalmente en  $[0, 1[$ . En el caso  $N \leq p$  no se sabe si la extensión es global sobre todo  $[0, 1[$ , pero en este caso se encuentra un estimativo del tamaño del intervalo de excentricidades donde la extensión de las soluciones tiene lugar. Esto se muestra en el siguiente teorema

**Teorema 7.2.** *Las siguientes afirmaciones se cumplen*

- (1) *Si  $p < N$ , entonces la situación 4.1 del Teorema 7.1 se cumple.*
- (2) *Si  $p \geq N$ ,  $\rho_N < 1 - \epsilon$ , y la situación 4.2 del Teorema 7.1 se cumple, entonces*

*$E > \rho_N$  con*

$$\rho_N = \min \left\{ 2 \left( \frac{N}{\nu} \right)^{2/3} - 1, 1 - 2 \left( \frac{N}{\nu + 1} \right)^{2/3} \right\}$$

Recordemos que según el Teorema 6.1 existe una rama local de soluciones periódicas no triviales que emana de cada punto  $(\xi_k, 0)$ . En [26] se estudian las posibles intersecciones de estas ramas con la rama trivial  $z = 0$ , por lo que se considera el problema linealizado de Sitnikov en  $z = 0$  y se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 7.2.** *Considérese el siguiente problema de contorno.*

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{r(t, e)^3} y = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(N\pi) = 0. \quad (7.7)$$

*Entonces, existe una sucesión  $\{E_{n,N}\}_{n \geq 1}$  con  $0 < E_{1,N} \cdots < E_{n,N} < \cdots < 1$ ,  $\{E_{n,N}\} \nearrow 1$ , tal que (7.7) tiene una solución no-trivial si y solo si  $e = E_{n,N}$ . Más aún,  $E_{1,N} > \rho_N$  y la solución  $y_n$  correspondiente a  $E_{n,N}$  tiene un número de ceros en  $[0, N\pi]$  que se hace arbitrariamente grande a medida que  $n \rightarrow \infty$ .*

Vamos a presentar las ideas generales de la demostración de esta proposición. Primero se considera a  $y(t, e)$  como la solución de la ecuación en (7.7) que satisface  $y(0, e) = 1$ ,  $\dot{y}(0, e) = 0$ . El objetivo es estudiar los ceros de la función  $\dot{y}(N\pi, e)$ .

Para demostrar esta proposición, en [26] se hace uso de los siguientes resultados

**Lema 7.1.** *Sea  $a(t)$  una función continua,  $2N\pi$  periódica la cual para algún  $n \geq 0$  satisface*

$$\left(\frac{n}{N}\right)^2 \leq a(t) \leq \left(\frac{n+1}{N}\right)^2 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

*y ambas desigualdades son estrictas en algún intervalo. Entonces  $\ddot{y} + a(t)y = 0$  no tiene soluciones  $2N\pi$  periódicas (excepto la solución trivial  $y \equiv 0$ ).*

Este resultado que se deduce del teorema de comparación de Sturm se aplica al problema linealizado de Sitnikov usando las desigualdades (7.4) y del hecho que

$$\left(\frac{\nu}{N}\right)^2 \leq \frac{1}{r(t, e)^3} \leq \left(\frac{\nu+1}{N}\right)^2,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $e \leq \rho_N$ , de aquí se deduce que  $\dot{y}(N\pi, e) \neq 0$  para todo  $e \in ]0, \rho_N[$ . Esto muestra porqué el primer valor propio en la Proposición 7.2 cumple  $0 < \rho_N < E_{1,N}$ .

**Lema 7.2.** *El número de ceros de  $y(t, e)$  en  $]0, N\pi[$  tiende a infinito cuando  $e \nearrow 1$ .*

La demostración de este lema se divide en dos partes. La primera parte inicia con la observación de que la función  $r(\cdot, e)$  converge uniformemente a la función  $r(\cdot, 1)$  si  $e \rightarrow 1^-$ . Por otro lado, de la ecuación de Kepler (2.4) se tiene para  $e = 1$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} t &= u - \text{sen } u, \\ &= \frac{u^3}{3!}\beta(u), \quad \text{con } \beta(u) = 1 - \frac{3!u^2}{5!} + \frac{3!u^4}{7!} \dots \end{aligned}$$

Sea  $\zeta = (6t)^{1/3}$  entonces  $\zeta(u) = u[\beta(u)]^{1/3}$ , con  $u(0) = 0$ . Nótese que

$$\zeta(0) = 0, \quad \frac{d\zeta}{du}(0) = 1.$$

Del teorema de la función inversa existe la función  $u = u(\zeta)$  en una pequeña vecindad



de  $\zeta = 0$ , más aún dicha función es analítica e impar, así que

$$u(\zeta) = \zeta + \tilde{\beta}_3 \zeta^3 + \dots$$

$$u(\zeta) = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_{2n+1} \zeta^{2n} \quad \text{con} \quad \tilde{\beta}_1 = 1,$$

regresando a la variable  $t$  concluimos que

$$u(t, 1) = (6t)^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{2n/3} \quad \text{con} \quad \beta_n = 6^{2n/3} \tilde{\beta}_{2n+1}. \quad (7.8)$$

De esta forma  $u(t, 1) = (6t)^{1/3} \beta(t)$  en donde  $\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{2n/3}$  la cual es una función analítica en  $t^{2/3}$  con  $\beta(0) = 1$ . Ahora bien de (2.3) se deduce que

$$r(t, 1) = \frac{1}{2} (1 - \cos u(t, 1)),$$

$$= \text{sen}^2 \left( \frac{u(t, 1)}{2} \right),$$

por lo tanto

$$r(t, 1) = \frac{1}{4} (u(t, 1)^2 + \tilde{\phi}_4 u(t, 1)^4 + \dots),$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{2n} [u(t, 1)]^{2n} \quad \text{con} \quad \tilde{\phi}_2 = 1.$$

Se deduce entonces que

$$r(t, 1) = \frac{u(t, 1)^2}{4} (1 + \tilde{\phi}_4 u(t, 1)^2 + \dots),$$

$$r(t, 1) = \frac{(6t)^{2/3}}{4} \beta(t)^2 (1 + \tilde{\phi}_4 (6t)^{2/3} \beta(t)^2 + \dots).$$

Finalmente podemos concluir que

$$r(t, 1) = \frac{6^{2/3}}{4} t^{2/3} \phi(t), \quad (7.9)$$

en donde  $\phi(t) = \beta(t)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{2n} [(6t)^{1/3} \beta(t)]^{2(n-1)}$  es una función analítica en  $t^{2/3}$  con  $\phi(0) = 1$ .

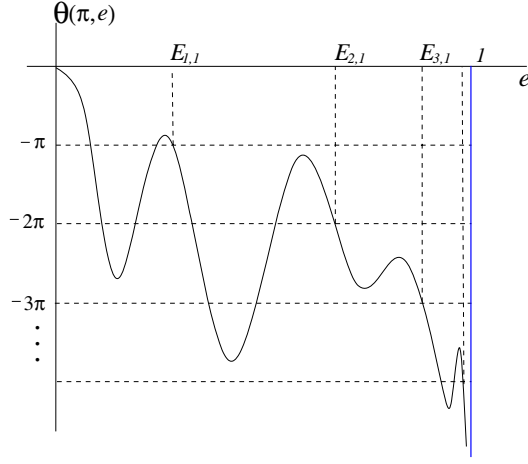


Figura 7.3: Posible gráfica de la función  $\theta(\pi, e)$ .

La segunda parte de la prueba, consiste en considerar la ecuación (7.9) y tomar un número fijo  $\gamma$  en  $] \frac{1}{4}, \frac{16}{9} [$  de manera que

$$\frac{1}{r(t, 1)^3} > \frac{\gamma}{t^2},$$

para  $t \in ]0, \Delta]$  con  $\Delta$  suficientemente pequeño. Ahora bien, dado que  $1/4 < \gamma$ , las soluciones de la ecuación de Euler

$$\ddot{y} + \frac{\gamma}{t^2}y = 0, \tag{7.10}$$

tiene un número arbitrario de ceros que se acumulan en  $t = 0$ . Como  $r(\cdot, e) \rightarrow r(\cdot, 1)$  uniformemente en  $]0, \Delta[$ , es posible encontrar un  $e_* < 1$  tal que

$$\frac{1}{r(t, e)^3} > \frac{\gamma}{t^2}, \quad t \in [\delta, \Delta], e \in [e_*, 1[,$$

para  $\delta > 0$ . Ahora bien, aplicando el teorema de comparación de Sturm a la ecuación en (7.7) y la ecuación (7.10) se tiene la demostración.

Finalmente la prueba de la Proposición 7.2 se sigue al considerar un cambio de variable a coordenadas polares

$$y = \rho \cos \theta, \quad \dot{y} = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

De la ecuación en (7.7) la función  $\theta(t, e)$  satisface la ecuación

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r(t, e)^3} \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta,$$

la cual es decreciente en  $t$ . La condición  $\dot{\theta}(N\pi, e) = 0$  se convierte ahora en la inclusión  $\theta(N\pi, e) \in \pi\mathbb{Z}$ . Por otro lado, del Lema 7.2 se sabe que  $\theta(t, e) \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  para un número arbitrario de valores positivos de  $t$  en  $[0, N\pi]$ . En consecuencia para la función analítica,  $e \in [0, 1[ \rightarrow \theta(N\pi, e)$  se tiene

$$\lim_{e \nearrow 1} \theta(N\pi, e) = \lim_{e \nearrow 1} \inf_{[0, N\pi]} \theta(t, e) = -\infty,$$

de aquí, los números  $E_{n, N}$  en la Proposición 7.2 se toman con las soluciones de  $\theta(N\pi, e) \in \pi\mathbb{Z}$ .

Terminamos este capítulo mencionando que los resultados de [26] que acabamos de presentar serán parte fundamental de los discursos posteriores en esta memoria.

## Capítulo 8

# Bifurcaciones Globales desde el centro de masas en el problema de Sitnikov

Como se mencionó en el capítulo anterior, estudios numéricos sobre la búsqueda de soluciones periódicas para el problema (7.1) se pueden encontrar en [21]. Además de este tipo de soluciones en ese trabajo se presentan diagramas de soluciones no triviales que surgen como bifurcaciones desde el equilibrio  $z = 0$  para ciertos valores de la excentricidad  $e = e_*$  y que son continuadas para valores  $e_* < e < 1$ . El objetivo principal de este capítulo es presentar un estudio analítico de este nuevo tipo de soluciones periódicas no triviales que emanan desde el equilibrio y que son globalmente continuadas para  $e \uparrow 1$ .

Sea  $z(t, \xi, 0, e)$  una solución par y  $2N\pi$  periódica de (7.1) que satisface las condiciones iniciales (7.6). Como se mencionó en el capítulo anterior, la búsqueda de dichas soluciones equivale a encontrar los ceros de la función analítica

$$F_N : \mathbb{R} \times [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_N(\xi, e) = \dot{z}(N\pi, \xi, 0, e),$$

dicho conjunto lo hemos denotado por  $\Sigma$ . Los teoremas sobre la estructura local de conjuntos analíticos y series de Puiseux se pueden aplicar en cada punto de  $\Sigma$  (ver [23]). Esta observación tiene muchas consecuencias, en [36] se presenta una de las más simples.

**Proposición 8.1.** (i) Para cada  $e \in [0, 1[$  el problema (7.1) tiene un número finito de soluciones.

(ii) Cada subconjunto conexo de  $\Sigma$  es arco-conexo.

**Demostración.** (i) Recordemos la Proposición 7.1. (o bien la Proposición 5.1 en [26]): Dado cualquier  $E < 1$  existe  $\xi_* > 0$  tal que si  $e \in [0, E]$  y  $z(t)$  es una solución de (7.1), entonces  $z(0) = \xi$  satisface  $|\xi| \leq \xi_*$ . Dado que los ceros de  $F_N(\cdot, e)$  son precisamente los valores de  $z(0) = \xi$  con  $z(t)$  solución de (7.1), concluimos que  $F_N(\cdot, e)$  no se puede anular fuera de  $[-\xi_*, \xi_*]$  siempre que  $e \in [0, E]$ . La función  $F_N(\cdot, e)$  es analítica real y por lo tanto tiene un número finito de ceros.

(ii) Se sigue de los Teoremas 6.1.3 y 4.2.8 en [23] que  $\Sigma$  es localmente arco-conexo. En consecuencia si  $A$  es un subconjunto conexo de  $\Sigma$  se sigue que  $A$  es localmente arco-conexo y por lo tanto es arco-conexo.  $\square$

La afirmación (ii) en la Proposición 8.1 muestra que la idea intuitiva de “rama de soluciones” puede formalizarse como un camino dentro de una componente conexa de  $\Sigma$ . En adelante identificaremos las soluciones  $z(t, \xi, 0, e)$  del problema (7.1) como puntos en el plano de coordenadas  $(\xi, e)$ , donde  $\xi = z(0)$ . Un conjunto  $S$  de soluciones de (7.1) se identificará con un subconjunto de  $S^*$  de  $\Sigma$  de manera usual. Por ejemplo, si  $S_0$  es el conjunto de soluciones triviales de (7.1), entonces

$$S_0^* = \left\{ (0, e) : e \in [0, 1[ \right\}.$$

La función  $F_N$  es impar en  $\xi$  por lo que  $\Sigma$  es simétrica respecto al eje  $e$ . Esto nos permite considerar sólo la región

$$\xi > 0, \quad 0 \leq e < 1.$$

El conjunto de ceros de  $F_N$  que yacen en esta región se denotará por  $\Sigma^+$ .

**Definición 8.1.** Una familia global de soluciones no triviales es un conjunto  $F$  de soluciones de (7.1) tal que  $F^*$  es una componente conexa de  $\Sigma^+$ .

En vista de la Proposición 8.1 observamos que toda familia global es arco-conexa. Otra importante propiedad es la invariancia del número de ceros a lo largo de la familia. Por unicidad del problema de valor inicial, los ceros de las soluciones no triviales tienen que ser no degenerados. Esto explica porqué el número de ceros permanece constante a lo largo de la familia conexa. Esto corresponde a una clásica técnica empleada por Rabinowitz [42]. Nótese que este resultado de invarianza de ceros sobre cada rama es la razón por la cual se descarta la opción (b) del Teorema 6.1 no puede ocurrir.

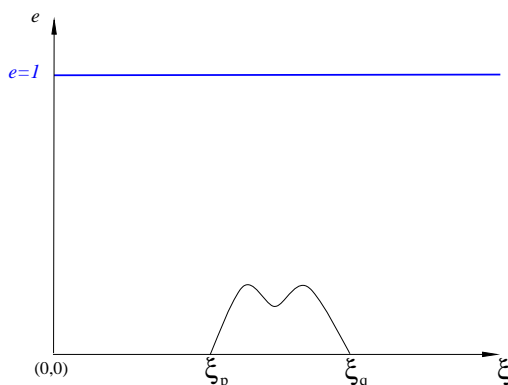


Figura 8.1: En este caso  $p \neq q$ . Pero esta situación no es posible por la invarianza de ceros sobre la rama.

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

**Teorema 8.1.** (Teorema principal) Para cada  $N \geq 1$  existe un número  $p_0 = p_0(N) > 1$  y familias globales de soluciones no triviales, denotadas por  $\mathcal{F}_{p,N}$ ,  $p = p_0, p_0 + 1, \dots$  que satisfacen

- 1)  $\mathcal{F}_{p,N}$  tiene  $p$  ceros  $[0, N\pi]$ ,
- 2)  $cl(\mathcal{F}_{p,N}^*) \cap S_0^* = \{(0, E_{p,N}^*)\}$ ,
- 3)  $Proy_2(\mathcal{F}_{p,N}^*) = ]E_{p,N}^*, 1[$ ,

donde  $\{E_{p,N}^*\}_{p \geq p_0}$  es una sucesión estrictamente creciente que converge a 1 si  $p \rightarrow \infty$ .

La notación  $cl$  utilizada en **1)** hace referencia a la clausura de un conjunto relativo a  $[0, \infty[ \times [0, 1[$ . En **3)** se ha usado la notación  $Proy_2(\xi, e) = e$ .

Por **1)** las familias  $\mathcal{F}_{p,N}$  tiene diferentes números de ceros y por lo tanto son disjuntas dos a dos. La condición **2)** muestra que la familia bifurca desde el centro de masas  $\xi = 0$  en algún valor de excentricidad  $e = E_{p,N}^*$ . La condición **3)** dice que la línea horizontal  $e = E_{p,N}^*$  actúa como una barrera para la familia. La figura 8.1 da un esquema de los resultados previos y también muestra las características cualitativas observadas en el estudio numérico desarrollado en [21]. Sin embargo, no tenemos argumentos válidos para excluir situaciones más complicadas: Bifurcaciones secundarias, pérdida de monotonía lejos de  $\xi = 0$ , ramas no acotadas para  $e \uparrow 1$ , etc.

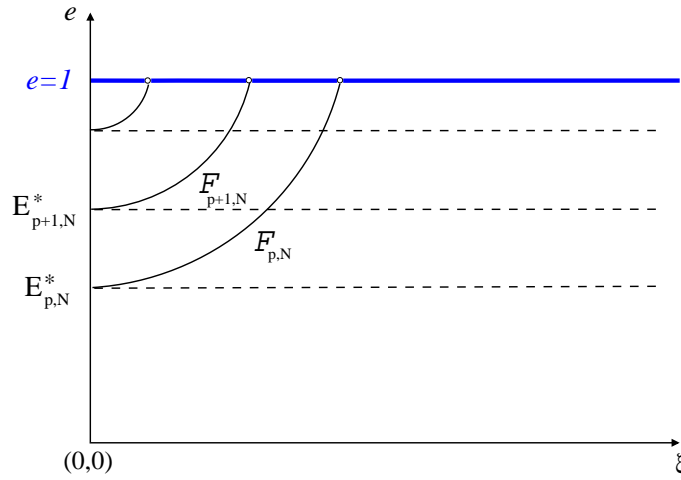


Figura 8.2: Familias de órbitas periódicas emanando desde el equilibrio.

Los números  $E_{p,N}^*$  se obtendrán por medio de una caracterización teórica y pueden ser calculados numéricamente. La primera bifurcación para  $N = 1$  ocurre en  $E_{3,1}^* = 0,5444689\dots$  Como consecuencia de este teorema, tenemos el siguiente colorario.

**Corolario 8.1.** *Dado  $\alpha \geq 1$  existe  $e_* = e_*(\alpha) \in [0, 1[$  tal que (2.2) tiene al menos  $\alpha$  soluciones pares,  $2\pi$  periódicas con  $e \geq e_*$ .*

## 8.1. El problema lineal

Retomamos el problema tipo Sturm-Liouville (7.7) dado por

$$\ddot{y} + \frac{1}{r(t, e)^3} y = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(N\pi) = 0.$$

La diferencia de este problema tipo Sturm-Liouville respecto a las versiones clásicas es que la dependencia con respecto al parámetro  $e$  es no lineal. Este tipo de problemas con dependencia no lineal han sido considerados en [19] y [50] pero en estos trabajos la ecuación depende monótonamente del parámetro, condición que no se satisface por la función  $r = r(t, e)$ . Más aún, note que

$$\begin{aligned} r(0, e) &= \frac{1-e}{2} \searrow 0 \quad \text{si } e \nearrow 1, \\ r(\pi, e) &= \frac{1+e}{2} \nearrow 1 \quad \text{si } e \nearrow 1. \end{aligned}$$

De otro lado, de [26] y [30] sabemos que existe una sucesión  $\{E_{n,N}\}_{n \geq 1}$  con

$$0 < E_{1,N} < E_{2,N} \cdots < E_{n,N} < \cdots < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{E_{n,N}\} = 1,$$

tal que el problema (7.7) tiene una solución no trivial si  $e = E_{n,N}$  para algún  $n$ . Del Lema 7.2 se sabe que el número de ceros de estas soluciones crece arbitrariamente si  $n \rightarrow \infty$ .

Las ideas en [30] pueden aplicarse para calcular numéricamente los números  $E_{n,N}$ . En este trabajo se observa que la expansión en series de Fourier de la solución de (7.7) puede obtenerse por medio de una relación de recurrencia. Una forma alternativa a este método puede ser el considerar un apropiado cambio de variable independiente. En efecto, cuando el tiempo es remplazado por la anomalía excéntrica,

$$u - e \operatorname{sen} u = t, \quad y(u) = y, \quad y' = \frac{dy}{du},$$

el problema (7.7) se convierte en

$$(1 - e \cos u)y'' - (e \operatorname{sen} u)y' + 8y = 0, \quad y'(0) = y'(N\pi) = 0. \quad (8.1)$$



Esta es una ecuación tipo Ince (ver [29]). La ventaja ahora es que los coeficientes son funciones elementales. Por lo que es más sencillo resolverla numéricamente vía el método de disparo en un software estándar. Como ejemplo, el lector puede verificar que  $E_{1,1} = 0,5444689\dots$ , (ver [30]) y la solución correspondiente tiene tres ceros en  $[0, \pi]$ . Así, la primera bifurcación para  $N = 1$  ocurre en  $E_{3,1}^* = E_{1,1}$ .

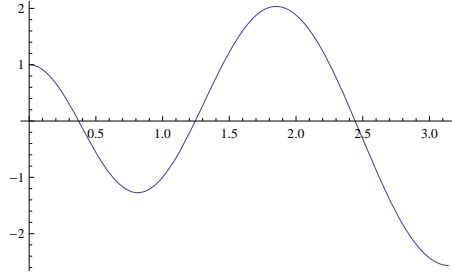


Figura 8.3: Gráfica de la solución  $y(u, e)$  con  $e = 0,5444689\dots$ . Tres ceros en  $[0, \pi]$ .

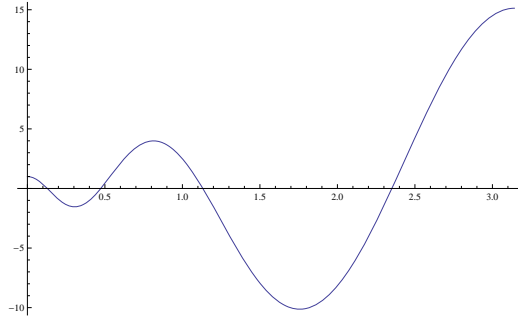


Figura 8.4: Gráfica de la solución  $y(u, e)$  con  $e = 0,944769799\dots$ . Cuatro ceros en  $[0, \pi]$ .

Otra ventaja al considerar la ecuación (8.1) es la posibilidad de dar respuesta al problema de la coexistencia de soluciones para la ecuación

$$\ddot{y} + \frac{1}{r(t, e)^3}y = 0. \quad (8.2)$$

Es decir, el poder afirmar o no la existencia de dos soluciones periódicas linealmente independientes de periodo  $2\pi$ . En [30] (ver Corolario 4.1 de ese trabajo) encontramos que la respuesta a la coexistencia de soluciones para (8.2) es afirmativa. Vamos a presentar una nueva prueba, más simple y directa.

Analizamos el problema de la coexistencia para el caso  $N = 1$ . Si  $N > 1$  por el Corolario 4.2 la coexistencia está garantizada.

**Teorema 8.2.** *(Coexistencia de soluciones.)* Sea  $e = E_{n,1}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces para el problema (8.1) existen dos soluciones no triviales  $2\pi$ -periódicas linealmente independientes.

**Demostración.** Sea  $z(t, \xi, 0, e)$  una solución par y  $2\pi$  periódica de (7.1). Sea  $e = E_{n,1}$  para algún  $n$  fijo. La función  $y_1(t) = \partial_\xi z(t, 0, 0, e)$  es una solución no trivial de (8.1) con las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0.$$

Más aún,  $y_1(t)$  es par y  $2\pi$  periódica, para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo que  $y_1(t)$  se puede expresar en serie de Fourier de la forma (4.7). Por otro lado, el polinomio  $\mathcal{Q}(s)$  para la ecuación (8.1) está dado por  $\mathcal{Q}(s) = 2es(1 - s)$  cuyas raíces son  $s = 0$ ,  $s = 1$ . Aplicando el Teorema 4.4 se tiene la demostración.  $\square$

A partir de este resultado se deducen las siguientes afirmaciones.

1. Existe una única solución  $y_2(t)$  no trivial de (8.2),  $2\pi$  periódica que satisface las condiciones iniciales

$$y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1,$$

la cual es linealmente independiente con  $y_1(t)$ , y además la matriz fundamental y principal  $Y(t)$  en  $t = 0$ , tiene como matriz de monodromía  $Y(2\pi) = I_2$  donde  $I_2$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ .

2. Por el Teorema 4.2 las funciones normalizadas  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  son par e impar respectivamente, por lo tanto

$$y_1(t) = y_1(-t) \quad y_2(t) = -y_2(-t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Más aún satisfacen  $\dot{y}_1(\pi) = 0$  y  $y_2(\pi) = 0$ .

Concluimos entonces que la ecuación (8.2) posee una solución no trivial, impar y  $2\pi$  periódica, que sabemos es denotamos por  $y_2(t)$ .

**Proposición 8.2.** *Sea  $e = E_{n,1}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces la ecuación (8.2) es estable.*

**Demostración.** Por el Teorema 8.2 y el criterio de estabilidad (*Corolario 4.3*) todas las soluciones de (8.2) son estables, (es decir son todas acotadas) de donde se sigue la demostración.  $\square$

**Proposición 8.3.** *Si  $e = E_{n,1}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  entonces la solución trivial  $z(t, e) = 0$  es una solución estable en el sentido de Liapunov para el problema de Sitnikov (2.2).*

**Demostración.** Escribimos la ecuación (2.2) en la forma

$$\ddot{z} + a(t, e)z + b(t, e)z^3 + \mathcal{K}(t; z, e) = 0,$$

con  $\mathcal{K}(t; z, e) = O(|z|^4)$  si  $z \rightarrow 0$  uniformemente para cada  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$ , en donde  $a(t, e) = \frac{1}{r(t, e)^3}$  y  $b(t, e) = -\frac{3}{2r(t, e)^5}$ . Observe que  $b(t, e) < 0$  para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$ . De otro lado, sabemos por la Proposición 8.2 que la ecuación (8.2) es estable (todas las soluciones son estables). Estas condiciones satisfacen la hipótesis del criterio de estabilidad dado en [35], lo que completa la demostración.  $\square$

**Observación.** La estabilidad de la solución de equilibrio para valores específicos del parámetro es un resultado ya conocido, ver [30]. Más aún la discusión completa de la estabilidad de la solución trivial se puede encontrar en [13].

En adelante denotaremos por  $y_1(t, e)$  y  $y_2(t, e)$  a las soluciones de (8.2) que satisfacen las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1,$$

respectivamente. Nótese que  $\dot{y}_1(N\pi, e) = 0$  es equivalente a  $e = E_{n,N}$  para algún  $n$ .

De otro lado, los números  $E_{n,N}$  se asemejan a los valores propios de los clásicos problemas Sturm-Liouville. Vamos a tomar una subsucesión de  $\{E_{n,N}\}_{n \geq 1}$  que conduce a una analogía más precisa con los valores propios.

**Lema 8.1.** *Supóngase que  $N \geq 1$  y sea  $p_0 = p_0(N)$  el número mínimo de ceros que una solución de (7.7) puede tener. Entonces*

(i)  $p_0(N) > N$ .

(ii) *Para cada  $p \geq p_0$  existe algún  $e \in [0, 1[$  tal que el problema (7.7) tiene una solución con  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$ . Definamos*

$$E_{p,N}^* = \sup \left\{ e \in [0, 1[: \text{ (7.7) tiene una solución con } p \text{ ceros en } [0, N\pi] \right\}.$$

*Entonces  $\{E_{p,N}^*\}_{p \geq p_0}$  es una subsucesión de  $\{E_{n,N}\}_{n \geq 1}$  estrictamente creciente, tal que*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E_{p,N}^* = 1.$$

(iii) *Para cada  $p \geq p_0$  existe  $\epsilon > 0$  tal que*

$$(-1)^p \dot{y}_1(N\pi, e) < 0 \quad \text{si} \quad E_{p,N}^* < e \leq E_{p,N}^* + \epsilon.$$

**Demostración.** Introducimos coordenadas polares en (7.7)

$$y + iy = \rho e^{i\theta},$$

que conducen a la ecuación para el argumento

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r(t, e)^3} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

Sea  $\theta(t, e)$  la solución con condición inicial  $\theta(0) = 0$ . La función  $e \in [0, 1[ \mapsto \theta(N\pi, e)$  es analítica real y los números  $E_{n,N}$  son las soluciones de la inclusión  $\theta(N\pi, e) \in \pi\mathbb{Z}$ . El ángulo  $\theta(t, e)$  gira en sentido de las manecillas del reloj ( $\dot{\theta} < 0$ ) por lo que las soluciones de (7.7) que corresponden a

$$\theta(N\pi, e) = -k\pi, \quad k = 1, 2, \dots$$

tienen precisamente  $k$  ceros. Demostraremos el Lema 8.1 con la ayuda de la función argumento. Para demostrar (i) observe que  $r(t, e) < 1$  para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$  por lo que  $\theta(t, e)$  satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{\theta} < -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1.$$

Por lo tanto,  $\theta(N\pi, e) < -N\pi$  y esto muestra que el número de cruces con el eje vertical ( $\theta \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$ ) es mayor que  $N$ . En consecuencia toda solución de (7.7) tiene más de  $N$  ceros. Para demostrar (ii) en primer lugar observamos que el número de

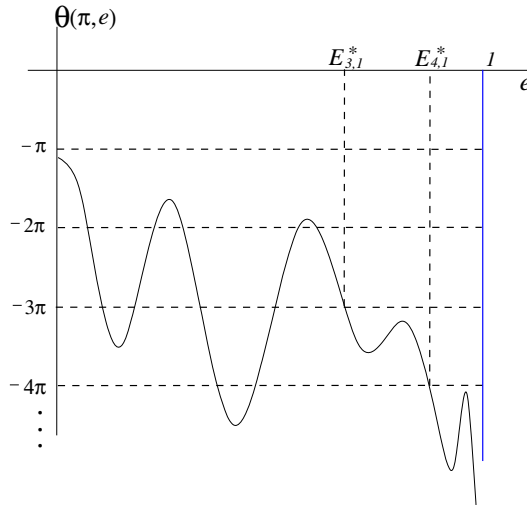


Figura 8.5: Posible gráfica de la función  $\theta(\pi, e)$  con valores  $E_{p,1}^*$ .

ceros en  $[0, N\pi]$  de  $y_1(t, e)$  tiende a infinito a medida que  $e \uparrow 1$  (ver Lema 7.2). Más aún sabemos que cada cero produce un cruce de la órbita  $(y, \dot{y})$  con el eje vertical y

$$\lim_{e \rightarrow 1^-} \theta(N\pi, e) = -\infty.$$

Ahora podemos deducir que dado  $p \geq p_0$  el ángulo  $\theta(N\pi, e)$  toma cada valor  $-p\pi$ , para algún valor de la excentricidad  $e$  no cerca de 1. Entonces  $E_{p,N}^*$  puede ser caracterizado como la raíz más grande de la ecuación  $\theta(N\pi, e) = -p\pi$ . (Ver figura 8.4)

Finalmente, para demostrar (iii) obsérvese que

$$\theta(N\pi, e) < -p\pi, \quad \text{si } e > E_{p,N}^*.$$

Teniendo en cuenta la definición de la función  $\theta$  observamos que para  $e > E_{p,N}^*$  lo suficientemente cerca de  $E_{p,N}^*$ , el punto  $(y_1(N\pi, e), \dot{y}_1(N\pi, e))$  se encuentra en el cuarto cuadrante si  $p$  es par y en el segundo cuadrante si  $p$  es impar. Esto prueba (iii).  $\square$

En la figura 8.5 presentamos una situación hipotética para  $p = 3$ . Nótese que la órbita  $(y, \dot{y})$  puede tener auto-intersecciones.

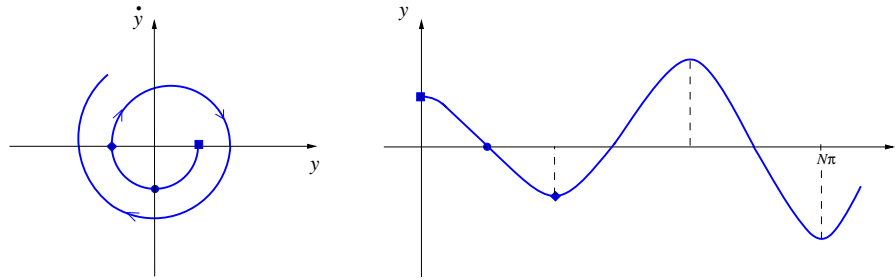


Figura 8.6: La órbita  $(y, \dot{y})$  para el caso  $p = 3$ .

**Observación.** La demostración de (i) se puede obtener por medio de la Teoría de Comparación de Sturm. El estimado teórico  $p_0(1) \geq 2$  probablemente no es preciso. Cálculos numéricos sugieren que  $E_{3,1}^* = E_{1,1}$  y  $p_0(1) = 3$ , pero no se cuenta con una prueba rigurosa de este hecho.

## 8.2. Bifurcación desde el equilibrio

En esta parte del trabajo analizamos el tipo de bifurcación de soluciones no triviales  $z(t, \xi, 0, e)$  de (7.1) pares y  $2N\pi$ -periódicas ( $N \geq 1$ ) que satisfacen las condiciones iniciales (7.6) y que emanan desde el equilibrio  $z = 0$  en puntos  $(0, e_*)$ , donde  $e_* = E_{n,N}$  para algún  $n \geq 1$  según la Proposición 7.7. Ahora bien, la ecuación

$$F_N(\xi, e) = \dot{z}(N\pi, \xi, 0, e) = 0,$$

tiene por solución a la rama trivial  $\xi = 0$ ,  $e \in [0, 1[$  por lo que cualquier posible bifurcación debe ocurrir en un valor de excentricidad  $e = e_*$  donde la derivada

$$\partial_\xi F_N(0, e_*) = \dot{y}_1(N\pi, e_*),$$

se anule. De la simetría del problema de Sitnikov es claro que  $z(t, \xi, 0, e) = -z(t, -\xi, 0, e)$ , por lo tanto  $F_N$  es impar en  $\xi$  y parece plausible esperar una bifurcación de tipo Pitchfork en  $(0, e_*)$ . Sin embargo esto requiere verificar las condiciones de transversalidad

$$\partial_{\xi e} F_N(0, e_*) \neq 0 \quad \text{y} \quad \partial_\xi^3 F_N(0, e_*) \neq 0.$$

A continuación, vamos a calcular las derivadas  $\partial_{\xi e} F_N$  y  $\partial_\xi^3 F_N$  en términos de las funciones  $y_2(t, e)$  y  $y_1(t, e) = \partial_\xi z(t, 0, 0, e)$ .

Consideramos la función

$$G(t, z, e) = \frac{z(t)}{(z^2(t) + r(t, e)^2)^{3/2}},$$

por lo que (2.2) se escribe como

$$\ddot{z} + G(t, z, e) = 0. \tag{8.3}$$

La función  $G$  tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $z = 0$  dada por

$$\begin{aligned} G(t, z, e) &= \partial_z G(t, 0, e)z + \frac{1}{2}\partial_{zz} G(t, 0, e)z^2 + \frac{1}{6}\partial_z^3 G(t, 0, e)z^3 + \mathcal{K}(t, z, e), \\ G(t, z, e) &= \frac{1}{r(t, e)^3}z - \frac{3}{2r(t, e)^5}z^3 + \mathcal{K}(t, z, e), \end{aligned} \tag{8.4}$$

con  $\mathcal{K}(t; z, e) = O(|z|^4)$  si  $z \rightarrow 0$  uniformemente para cada  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$ . Como antes, escribimos  $a(t, e) = \frac{1}{r(t, e)^3}$  y denotamos  $b(t, e) = -\frac{3}{2r(t, e)^5}$ .

Vamos a calcular primero una fórmula para  $\partial_\xi^3 F_N(0, e)$ . Nótese que la función  $\partial_\xi z(t, \xi, \eta, e)$  satisface

$$\begin{aligned} \partial_\xi \left( \partial_{tt} z(t, \xi, \eta, e) + G(t, z(t, \xi, \eta, e), e) \right) &= 0, \\ \partial_{tt} (\partial_\xi z(t, \xi, \eta, e)) + \partial_z G(t, z(t, \xi, \eta, e), e) \partial_\xi z(t, \xi, \eta, e) &= 0. \end{aligned}$$

Derivando dos veces más respecto a  $\xi$  encontramos que la función  $\partial_\xi^3 z(t, \xi, \eta, e)$  en  $\xi = \eta = 0$  satisface la ecuación

$$\partial_{tt}(\partial_\xi^3 z(t, 0, 0, e)) + a(t, e)\partial_\xi^3 z(t, 0, 0, e) + 6b(t, e)[y_1(t)]^3 = 0. \quad (8.5)$$

En consecuencia la función  $\psi(t, e) = \partial_\xi^3 z(t, 0, 0, e)$  es la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + a(t, e)y(t) + 6b(t, e)[y_1(t, e)]^3 &= 0, \\ y(0) &= 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando los resultados de la sección 4.2 del trabajo de R. Ortega en [34] tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(t, e) &= y_2(t, e) \int_0^t \frac{9}{r(s, e)^5} y_1^4(s, e) ds - y_1(t, e) \int_0^t \frac{9}{r(s, e)^5} y_1^3(s, e) y_2(s, e) ds, \\ \dot{\psi}(t, e) &= \dot{y}_2(t, e) \int_0^t \frac{9}{r(s, e)^5} y_1^4(s, e) ds - \dot{y}_1(t, e) \int_0^t \frac{9}{r(s, e)^5} y_1^3(s, e) y_2(s, e) ds. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Ahora bien, sabemos que

$$\partial_\xi^3 F_N(0, e_*) = \partial_\xi^3 \dot{z}(N\pi, 0, 0, e_*) = \dot{\psi}(N\pi, e_*).$$

Por lo tanto de (8.6) se concluye que

$$\begin{aligned} \partial_\xi^3 F_N(0, e_*) &= \dot{y}_2(N\pi, e_*) \int_0^{N\pi} \frac{9}{r(t, e_*)^5} y_1^4(t, e_*) dt \\ &\quad - \dot{y}_1(N\pi, e_*) \int_0^{N\pi} \frac{9}{r(t, e_*)^5} y_1^3(t, e_*) y_2(t, e_*) dt. \end{aligned}$$

Dado que  $\dot{y}_1(N\pi, e) = 0$  y  $y_1(t, e) \dot{y}_2(t, e) - y_2(t, e) \dot{y}_1(t, e) = 1$  para todo  $(t, e) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$  entonces  $y_1(N\pi, e) \dot{y}_2(N\pi, e) = 1$  para todo  $e \in [0, 1[$ . En consecuencia

$$\partial_\xi^3 F_N(0, e_*) = \frac{9}{y_1(N\pi, e_*)} \int_0^{N\pi} \frac{1}{r(t, e_*)^5} y_1^4(t, e_*) dt. \quad (8.7)$$

Más aún  $\text{sgn}(y_1(N\pi, e_*)) = (-1)^p$  con  $p$  el número de ceros de  $y_1(t)$  en  $[0, N\pi]$ . Por lo tanto

$$\text{sign}\left\{\partial_\xi^3 F_N(0, e_*)\right\} = (-1)^p. \quad (8.8)$$



Vamos ahora a calcular una fórmula para  $\partial_{\xi e} F_N(0, e_*)$ . Aplicamos las mismas ideas utilizadas para el cálculo de  $\partial_{\xi}^3 F_N(0, e_*)$ . Para ello consideramos la función  $\partial_{\xi e} z(t, \xi, \eta, e)$ , la cual satisface

$$\begin{aligned} & \partial_{tt}(\partial_{\xi e} z(t, \xi, \eta, e)) + \partial_z G(z(t, \xi, \eta, e)) \partial_{\xi e} z(t, \xi, \eta, e) + \\ & \partial_{zz} G(z(t, \xi, \eta, e)) \partial_{\xi} z(t, \xi, \eta, e) \partial_e z(t, \xi, \eta, e) + \partial_{ze} G(z(t, \xi, \eta, e)) \partial_{\xi} z(t, \xi, \eta, e) = 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Por lo tanto, la función  $\varphi(t, e) = \partial_{\xi e} z(t, 0, 0, e)$  satisface el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + a(t, e)y(t) + c(t, e)y_1(t, e) &= 0, \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (8.10)$$

con  $c(t, e) = \frac{-3}{r(t, e)^4} \partial_e r(t, e)$  en donde

$$\partial_e r(t, e) = -\frac{1}{2} \cos u(t, e) + \frac{e}{4r(t, e)} \operatorname{sen}^2 u(t, e).$$

Note que esta función cambia de signo.

De nuevo, aplicando las ideas de la sección 4.2 en [34] tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(t, e) &= y_1(t, e) \int_0^t c(s, e) y_1(s, e) y_2(s, e) ds - y_2(t) \int_0^t c(s, e) y_1^2(s, e) ds, \\ \dot{\varphi}(t, e) &= \dot{y}_1(t, e) \int_0^t c(s, e) y_1(s, e) y_2(s, e) ds - \dot{y}_2(t, e) \int_0^t c(s, e) y_1^2(s, e) ds. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Pero  $\dot{\varphi}(N\pi) = \partial_{\xi e} \dot{\phi}(N\pi; \vartheta_0, e_*) = \partial_{\xi e} F_N(0, e_*)$  por lo tanto

$$\partial_{\xi e} F_N(0, e_*) = \frac{-1}{y_1(N\pi, e)} \int_0^{N\pi} c(t, e) y_1^2(t, e) dt. \quad (8.12)$$

Como se mencionó anteriormente, la función  $\partial_e r(t, e)$  cambia de signo y por esta razón el estudio del signo de  $\partial_{\xi e} F_N(0, e_*)$  no es inmediato. De hecho no sabemos si esta cantidad puede anularse en algunos casos excepcionales. Esta situación nos lleva a considerar una variante de la bifurcación de tipo Pitchfork que se aplica en cada  $e = E_{p,N}^*$ .

Con el fin de tener la mayor claridad en los cálculos, trabajaremos en un problema de bifurcación abstracto del tipo

$$F(x, \lambda) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in [a, b],$$

en el cual,  $F : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función analítica real y  $F(-x, \lambda) = -F(x, \lambda)$ . En particular  $x = 0$  es solución para cualquier  $\lambda$ .

**Proposición 8.4.** *Adicionalmente, supóngase que para algún  $\lambda_* \in ]a, b[$  y  $\Delta > 0$ ,*

$$\partial_x F(0, \lambda_*) = 0, \quad \partial_x^3 F(0, \lambda_*) < 0, \quad \partial_x F(0, \lambda) > 0 \quad \text{si } \lambda \in ]\lambda_*, \lambda_* + \Delta].$$

*Entonces, existen números reales  $r > 0, \delta > 0$  y una función analítica real  $\psi : [\lambda_*, \lambda_* + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  con*

$$0 < \delta \leq \Delta, \quad \psi(\lambda_*) = 0, \quad \psi(\lambda) > 0 \quad \text{si } \lambda > \lambda_*,$$

*tal que el conjunto de ceros de  $F$  se describe localmente por medio de dos ecuaciones, las cuales son*

$$F^{-1}(0) \cap ([-r, r] \times [\lambda_*, \lambda_* + \delta]) = \left\{ (x, \lambda) : x = 0 \right. \\ \left. \text{o } x^2 = \psi(\lambda), \lambda \in [\lambda_*, \lambda_* + \delta] \right\}.$$

**Demostración.** La función  $F$  es impar en  $x$  y admite un desarrollo en serie de potencias del tipo

$$F(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) x^{2n+1}.$$

Este desarrollo es uniformemente convergente en una vecindad de  $(0, \lambda_*)$  con coeficiente

$$a_n(\lambda) = \frac{1}{(2n+1)!} \partial_x^{2n+1} F(0, \lambda).$$

Definamos la función

$$\Phi(y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) y^n.$$

Esta función es también analítica y definida en una vecindad de  $(0, \lambda_*)$  y satisface

$$F(x, \lambda) = x \Phi(x^2, \lambda).$$

Consideremos ahora el problema de función implícita

$$\Phi(y, \lambda) = 0,$$

en el punto  $(0, \lambda_*)$ . Nos damos cuenta que

$$\Phi(0, \lambda_*) = \partial_x F(0, \lambda_*) = 0, \quad \partial_y \Phi(0, \lambda_*) = \frac{1}{6} \partial_x^3 F(0, \lambda_*) \neq 0.$$

Por lo tanto, el conjunto  $\Phi = 0$  se describe localmente por una curva analítica  $y = \Psi(\lambda)$  con  $\Psi(\lambda_*) = 0$ . La prueba estará completa si se demuestra que  $\Psi(\lambda) > 0$  si  $\lambda > \lambda_*$ .

Con este fin, descomponemos  $\Phi$  en la forma

$$\Phi(y, \lambda) = \partial_x F(0, \lambda) + \varphi(y, \lambda)y.$$

El número  $\varphi(0, \lambda_*) = \frac{1}{6} \partial_x^3 F(0, \lambda_*)$  es negativo por lo que lo mismo ocurrirá con la función  $\varphi(y, \lambda)$  entonces  $|y| + |\lambda - \lambda_*|$  es pequeño. La función implícita satisface

$$\Psi(\lambda) = -\frac{F_x(0, \lambda)}{\varphi(\Psi(\lambda), \lambda)},$$

y esta fórmula muestra que  $\Psi$  es positiva cuando  $\lambda - \lambda_*$  es pequeño y positivo.  $\square$

**Observación.** La anterior demostración también es válida cuando los signos de  $\partial_x^3 F(0, \lambda_*)$  y  $\partial_x F(0, \lambda)$  se invierten simultáneamente. La bifurcación descrita anteriormente es de tipo Pitchfork sólo en un sentido generalizado. Por otro lado, respecto a la situación clásica hemos perdido información: no se presenta una descripción del conjunto de ceros en  $\lambda < \lambda_*$  y la curva bifurcada  $x = \pm \sqrt{\Psi(\lambda)}$  no es necesariamente de orden  $o(\sqrt{\lambda})$  en  $\lambda = \lambda_*$ .

Después de este paréntesis retomamos nuestro problema en concreto con  $F = F_N$ . Observe que para  $e = E_{p,N}^*$  podemos combinar (8.8) con (iii) en el Lema 8.1 y deducir que las condiciones de la anterior proposición se satisfacen. De esta manera se ha demostrado que existe una bifurcación de tipo Pitchfork en un sentido generalizado en cada  $E_{p,N}^*$ .

### 8.3. Propiedades oscilatorias de las soluciones

En esta sección vamos a comparar el número de ceros de las soluciones del problema lineal (7.7) con los correspondientes al problema no lineal (7.1).

**Proposición 8.5.** *Suponga que  $e = E_{n,N}$  para algún  $n \geq 1$  y sea  $m$  el número de ceros de una solución no trivial de (7.7). Entonces, cualquier solución no trivial de (7.1) con  $e = E_{n,N}$  tiene menos de  $m$  ceros.*

**Demostración.** La demostración se basa en la teoría de comparación de Sturm la cual se presenta en términos de la función argumento. Sea  $y(t, e)$  una solución de (7.7) con  $y(0, e) > 0$ . Al igual que en la demostración del Lema 8.1 se consideran las coordenadas polares  $y + iy = \rho e^{i\theta}$  y por lo tanto la función argumento satisface

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{r(t, E_{n,N})^3} \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta, \quad \theta(0) = 0. \quad (8.13)$$

La derivada  $\dot{\theta}$  es siempre negativa y por lo tanto la rotación es en sentido horario. Cada cero de  $y(t)$  corresponde a la solución de  $\theta(t) = \pi/2 - j\pi$  con  $j = 1, 2, \dots, m$ . Esto implica que  $\theta(N\pi) = -m\pi$ . Supongamos ahora que  $z_*(t)$  es solución de (7.1) con  $z_*(0) > 0$ . Esta función también es una solución de la ecuación lineal

$$\ddot{y} + a(t)y = 0, \quad a(t) := (z_*^2(t) + r(t, E_{n,N})^2)^{-3/2}.$$

La función argumento correspondiente  $\Theta(t)$  con  $z_* + i\dot{z}_* = \mathcal{P} e^{i\Theta}$  satisface

$$\dot{\Theta} = -a(t) \cos^2 \Theta - \operatorname{sen}^2 \Theta, \quad \Theta(0) = 0.$$

La definición de  $a(t)$  implica que

$$a(t) \leq \frac{1}{r(t, E_{n,N})^3}, \quad t \in [0, N\pi],$$

y esta desigualdad es estricta excepto en un número finito de valores de  $t$  (los ceros de  $z_*$ ). En consecuencia  $\Theta(t)$  es una super-solución de (8.13) y por lo tanto

$$\theta(t) < \Theta(t) \quad \text{para cada } t \in ]0, N\pi].$$

Dado que  $z_*(t)$  satisface las condiciones de contorno en (7.1) tenemos que  $\Theta(N\pi) = -\mu\pi$  donde  $\mu \geq 1$  es el número de ceros de  $z_*$ . La desigualdad previa implica que  $\mu < m$ .  $\square$

El resultado anterior tiene varias consecuencias útiles. A continuación se presenta un criterio de unicidad.

**Lema 8.2.** *(Criterio de Unicidad) Dado  $p \geq p_0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para  $e \in ]E_{p,N}^*, E_{p,N}^* + \delta]$  el problema (7.1) tiene una única solución con  $z(0) > 0$  y con exactamente  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$ .*

**Demostración.** Sabemos de la sección anterior que hay una bifurcación tipo Pitchfork en el sentido generalizado para  $e = E_{p,N}^*$ . Esto implica que si  $e \in ]E_{p,N}^*, E_{p,N}^* + \delta]$  entonces (7.1) tiene una única solución que satisface

$$0 < z(0) \leq r.$$

Aquí  $\delta$  y  $r$  son dados por la Proposición 8.4. De hecho  $z(0) = \sqrt{\Psi(e)}$  así que esta solución tiene exactamente  $p$  ceros. Esto es debido al Lema 7.1 en [26]. Este resultado establece que si  $(z_n(t), e_n)$  es una sucesión de soluciones de (7.1) con  $z_n(0) \rightarrow 0, z_n(0) \neq 0, e_n \rightarrow e_0 < 1$ , entonces el número de ceros de  $z_n(t)$  en  $[0, N\pi]$  coincide para valores grandes de  $n$ , con el número de ceros en el mismo intervalo de la solución no trivial de (7.7) para  $e = e_0$ . Este argumento demuestra la existencia y unicidad local de la solución postulada por el presente lema. Para completar la prueba, mostremos que cualquier solución de (7.1) con  $p$  ceros y  $z(0)$  positivo también debe cumplir  $z(0) \leq r$ . Es posible que sea necesario reducir el tamaño de  $\delta$ . Argumentemos por contradicción suponiendo que existe una sucesión  $e_n \searrow E_{p,N}^*$  tal que para  $e = e_n$  el problema (7.1) tiene una solución  $z_n(t)$  con  $p$  ceros y  $z_n(0) > r$ . De la Proposición 5.1 en [26] se obtiene un cota  $M > 0$ , independiente de  $n$ , tal que

$$z_n(0) \leq M.$$

Por dependencia continua respecto a condiciones iniciales y parámetros tenemos que  $z_n(t)$ ,  $\dot{z}_n(t)$  y  $\ddot{z}_n(t)$  son uniformemente acotadas en  $[0, N\pi]$ . Ahora bien, por compacidad podemos extraer una subsucesión  $z_k(t)$  tal que

$$z_k(t) \rightarrow Z(t), \quad \dot{z}_k(t) \rightarrow \dot{Z}(t) \quad \text{uniformemente en } t \in [0, N\pi].$$

Dado que  $r \leq Z(0) \leq M$ , es sencillo demostrar que  $Z(t)$  es una solución no trivial de (7.1) para  $e = E_{p,N}^*$ . Los ceros de  $Z(t)$  son simples por lo que el número de ellos coincide con el número de ceros de  $z_k(t)$  para un  $k$  suficientemente grande. De esta manera se tiene una solución de (7.1) para  $e = E_{p,N}^*$  que tiene exactamente  $p$  ceros. Esto es una contradicción debido a la Proposición 8.5.  $\square$

## 8.4. Demostración del teorema principal

Dada una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y un cero aislado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , recordemos que el índice de  $f$  en  $x_0$  satisface  $\text{ind}(f, x_0) = 1$  siempre que  $(x - x_0) \cdot f(x) > 0$  para  $x \neq x_0$  cerca de  $x_0$  (ver capítulo 6.) Cuando la desigualdad se invierte el valor del índice es  $-1$ . En cualquier otro caso,  $\text{ind}(f, x_0) = 0$ .

Por lo general los fenómenos de bifurcación se asocian a los cambios del índice y este es el caso de la bifurcación tipo Pitchfork. En el marco abstracto de la sección anterior podemos considerar el problema

$$F(x, \lambda) = 0,$$

donde  $F$  es una función analítica e impar en  $x$ . Vamos a estudiar el índice del cero trivial  $x = 0$  y del cero no trivial  $x = +\sqrt{\Psi(\lambda)}$ . En el punto  $(0, \lambda_*)$  la función  $F$  satisface:

$$\partial_x F(0, \lambda_*) = \partial_x^2 F(0, \lambda_*) = 0, \quad \partial_x^3 F(0, \lambda_*) < 0.$$

De esta manera, en una pequeña vecindad del origen  $\partial_x F(\cdot, \lambda_*)$  es negativa de donde

se deduce fácilmente que

$$\text{ind}(F(\cdot, \lambda_*), 0) = -1.$$

De otro lado, por la última condición impuesta en la Proposición 8.4 tenemos directamente que

$$\text{ind}(F(\cdot, \lambda), 0) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda \in ]\lambda_*, \lambda_* + \Delta].$$

A continuación vamos a calcular el índice del cero no trivial  $x = +\sqrt{\Psi(\lambda)}$  si  $\lambda \in ]\lambda_*, \lambda_* + \delta]$ .

Nótese que hemos factorizado la función  $F$  en la forma  $F(x, \lambda) = x \Phi(x^2, \lambda)$ , en donde

$$\Phi(y, \lambda) = \sum a_n(\lambda)y^n.$$

Por otro lado, se demostró que

$$\Phi(y, \lambda) = \partial_x F(0, \lambda) + \varphi(y, \lambda)y.$$

Dado que  $\varphi(y, \lambda_*) < 0$ , se puede tomar un  $0 < r_+$  suficientemente pequeño tal que  $\varphi(y, \lambda)y < 0$  para todo  $y \in ]0, \sqrt{r_+}]$  con  $r_+ \leq r$  donde  $r$  es dado por la Proposición 8.4. Podemos suponer por continuidad que  $\Phi(y, \lambda) < 0$  si  $\lambda \in ]\lambda_*, \lambda_* + \tilde{\delta}]$  con  $\tilde{\delta} > 0$  apropiado. Ahora bien, sobre el único cero no trivial  $y = \Psi(\lambda)$  en  $]0, \sqrt{r_+}]$  se cumple

$$\partial_x F(\sqrt{\Psi(\lambda)}, \lambda) = \Phi(\Psi(\lambda), \lambda) + 2\Psi(\lambda)\partial_y \Phi(\Psi(\lambda), \lambda) < 0.$$

Se concluye que

$$\text{ind}(F(\cdot, \lambda), \sqrt{\Psi(\lambda)}) = -1 \quad \text{si} \quad \lambda \in ]\lambda_*, \lambda_* + \delta].$$

Como se mencionó antes, la conclusión de la Proposición 8.4 es válida aún cuando las desigualdades en las hipótesis se invierten. En tal caso el índice en  $x = \sqrt{\Psi(\lambda)}$  sería +1.

La discusión anterior es aplicable a la función  $F_N$  considerada en el problema de Sitnikov. Las variables  $(x, \lambda)$  se sustituyen ahora por  $(\xi, e)$  y se concluye que

$$\text{ind}(F_N(\cdot, e), \sqrt{\Psi(e)}) = \pm 1, \quad \text{si } e \in ]E_{p,N}^*, E_{p,N}^* + \delta], \quad (8.14)$$

donde  $\xi = \sqrt{\Psi(e)}$  es la rama emergente en la bifurcación tipo Pitchfork. En adelante se supone que  $\delta$  es fijo pero suficientemente pequeño de manera que la conclusión del Lema 8.2 sea aún válida.

Una vez que se tiene un índice no nulo, como sucede en la condición (8.14), el método de continuación global de Leray-Schauder puede aplicarse. (ver Teorema 6.1).

Se analiza entonces la ecuación  $F_N(\xi, e) = 0$  para excentricidades  $e$  en el intervalo  $[a, b]$  con  $a = E_{p,N}^* + \delta$  y  $b = 1 - \epsilon$ . Aquí  $\epsilon > 0$  es un número arbitrario pequeño. De la Proposición 5.1 en [26] y la Proposición 8.1 se comprueba que el conjunto de ceros de  $F_N(\xi, e) = 0$ ,  $e \in [a, b]$ , es acotado y finito para cada  $e$  fijo, por lo que se verifican las condiciones **(H1)** y **(H2)**. La continuación global desde  $\xi = \sqrt{\Psi(a)}$ ,  $e = a$ , genera una trayectoria continua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ ,  $\alpha(s) = (\xi(s), e(s))$  que satisface

$$F_N(\xi(s), e(s)) = 0 \quad \text{si } s \in [0, 1], \quad e(0) = a, \quad \xi(0) = \sqrt{\Psi(a)},$$

y, o bien  $e(1) = b$  o  $e(1) = a$  y  $\xi(1) \neq \xi(0)$ .

Nótese que  $\xi(s) \neq 0$  para cada  $s \in [0, 1]$ . De otra forma debe existir  $\hat{s} \in ]0, 1]$  tal que  $\xi(s) > 0$  si  $s \in [0, \hat{s}[$  and  $\xi(\hat{s}) = 0$ . Denotamos por  $z_s(t) = z(t, \xi(s), 0, e(s))$  a la rama de soluciones de (7.1) generada por la trayectoria  $\alpha(s)$ . Dado que el número de ceros es invariante a lo largo de las familias no triviales, se deduce que  $z_s(t)$  tiene exactamente  $p$  ceros para  $s \in [0, \hat{s}[$ . Observe que el Lema 7.1 en [26] implica que las soluciones generadas por la bifurcación tipo Pitchfork tienen exactamente  $p$  ceros. El mismo lema implicaría que  $e(\hat{s}) = E_{n,N}$  para algún  $n$ . Más aún, las soluciones correspondientes de (7.7) también deben tener  $p$  ceros. Esto no es posible porque la definición de  $E_{p,N}^*$  implicaría que  $e(\hat{s}) = E_{n,N} \leq E_{p,N}^* < a$ . Sabemos ya que  $\xi(s) \neq 0$  para cada  $s \in [0, 1]$



y podemos afirmar que la solución  $z_s(t)$  tiene exactamente  $p$  ceros para cada  $s$ , en particular para  $s = 1$ . Es posible ahora demostrar que  $e(1) = b$ . De lo contrario  $z_0(t)$  y  $z_1(t)$  serían diferentes soluciones de (7.1) para  $e = a = E_{p,N}^* + \delta$  con exactamente  $p$  ceros, pero eso no es posible debido al Lema 8.2. El razonamiento anterior se puede repetir para cada  $\epsilon \in ]0, \epsilon_*[$  y así obtener una familia de trayectorias  $\alpha_\epsilon(s) = (\xi_\epsilon(s), e_\epsilon(s))$  que satisfacen

$$e_\epsilon(0) = E_{p,N}^* + \delta, \quad e_\epsilon(1) = 1 - \epsilon, \quad \xi_\epsilon(s) > 0, \quad \forall s \in [0, 1].$$

El conjunto

$$\mathcal{G} = \left\{ (\sqrt{\Psi(e)}, e) : e \in ]E_{p,N}^*, E_{p,N}^* + \delta] \right\} \cup \bigcup_{0 < \epsilon < \epsilon_*} \alpha_\epsilon([0, 1]),$$

es un conjunto conexo de  $\Sigma^+$ . Sea  $\mathcal{F}_{p,N}^*$  la componente conexa de  $\Sigma^+$  que contiene  $\mathcal{G}$ . Por la construcción cada solución en  $\mathcal{F}_{p,N}^*$  tiene  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$ . Más aún  $(0, E_{p,N}^*)$  está en la clausura de  $\mathcal{F}_{p,N}^*$  y  $\text{proy}_2(\mathcal{F}_{p,N}^*) \supset ]E_{p,N}^*, 1[$ . La demostración del Teorema 8.1 estará completa si se demuestra que no hay otros puntos en  $\text{cl}(\mathcal{F}_{p,N}^*) \cap S_0^*$  y  $\text{proy}_2(\mathcal{F}_{p,N}^*)$  coincide con  $]E_{p,N}^*, 1[$ . De la Proposición 8.5 se deduce que  $E_{p,N}^*$  no puede pertenecer a  $\text{proy}_2(\mathcal{F}_{p,N}^*)$ . Dado que este conjunto es un intervalo se deduce que  $\text{proy}_2(\mathcal{F}_{p,N}^*) = ]E_{p,N}^*, 1[$ . Suponga ahora que  $(0, e)$  es un punto en la clausura de  $\mathcal{F}_{p,N}^*$ . De las discusiones previas se deduce que  $e \geq E_{p,N}^*$  y del Lema 7.1 en [26] y la definición de  $E_{p,N}^*$  concluimos que  $e \leq E_{p,N}^*$ . De esta forma hemos verificado que las condiciones (i), (ii) y (iii) del Teorema 8.1 se cumplen y la demostración está completa.  $\square$

## 8.5. Continuación desde el problema circular

En el capítulo 2 se discutieron algunas propiedades del problema circular de Sitnikov (caso  $e = 0$ ) cuya ecuación autónoma (2.7) está dada por

$$\ddot{z} + \frac{z}{(z^2 + 1/4)^{3/2}} = 0. \quad (*)$$

En este caso, las órbitas de las masas primarias son circunferencias y el origen es un centro. En el capítulo 7 vimos que si  $z(t, \xi, 0, 0)$  es solución de (\*) y satisface las condiciones de frontera en (7.1) y las condiciones iniciales (7.2), esta solución está en correspondencia con la solución de la ecuación

$$T(\xi) = \frac{2N\pi}{p}, \quad (**)$$

donde  $T(\xi)$  es el periodo mínimo de  $z(t, \xi, 0, 0)$  y  $p$  es el número de ceros de  $z$  en  $[0, N\pi]$  con  $p = 1, \dots, \nu_N$  y  $\nu_N = [2\sqrt{2}N]$ . El Teorema 2.1 y los resultados de la sección 6.1 justifican lo anterior.

Denotaremos por  $\xi_{p,N}$  a la solución de (\*\*) para  $p = 1, \dots, \nu_N$ . El siguiente resultado brinda una descripción más detallada de las familias globales que emanan de  $(\xi_{p,N}, 0)$ . Se trata de una mejora de los resultados principales en [26].

Primero algo de notación en relación al problema lineal. Recordamos que  $p_0(N)$  es el menor número de ceros de las soluciones de (7.7). En analogía con  $E_{p,N}^*$  se define

$$e_{p,N}^* = \min \{e \in [0, 1[ : (7.7) \text{ tiene una solución con } p \text{ ceros en } [0, N\pi] \}.$$

En general  $e_{p,N}^* \leq E_{p,N}^*$  pero no sabemos si la desigualdad puede ser estricta en algunos casos.

**Teorema 8.3.** *Para cada  $N \geq 1$  y  $p = 1, 2, \dots, \nu_N$  existe una familia global, denotada por  $\mathcal{C}_{p,N}$ , de soluciones no triviales que satisfacen*

1.  $\mathcal{C}_{p,N}$  tiene  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$
2.  $\mathcal{C}_{p,N}^* \cap \{e = 0\} = \{(\xi_{p,N}, 0)\}$ .

Más aún si  $p < p_0(N)$  entonces  $\mathcal{C}_{p,N}^*$  es cerrado (en relación con  $[0, \infty[ \times [0, 1[$ ) y  $\text{proy}_2(\mathcal{C}_{p,N}^*) = [0, 1[$ . Si  $p \geq p_0(N)$  entonces  $\text{cl}(\mathcal{C}_{p,N}^*) \cap S_0^* = \{(0, e_{p,N}^*)\}$  y  $\text{proy}_2(\mathcal{C}_{p,N}^*) = [0, e_{p,N}^*[$ .

**Demostración.** Por el Teorema 7.1 la existencia de  $\mathcal{C}_{p,N}$  está garantizada, pues corresponde a la familia de soluciones  $\{(z_s(t), e_s)\}_{s \in [0,1]}$  de (7.1) que satisface las condiciones iniciales

$$z_s(0) = \xi(s), \quad \dot{z}(0) = 0.$$

De la conclusión (3) del Teorema 7.1 la familia  $\mathcal{C}_{p,N}$  tiene exactamente  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$  por lo tanto se satisface 1. Además, para  $s = 0$  se tiene que  $e_0 = 0$  así que  $z_0(t)$  es la solución del problema circular de Sitnikov que satisface  $\xi(0) = \xi_{p,N}$  para algún  $1 \leq p \leq \nu_N$ . Esto muestra que  $\mathcal{C}_{p,N}^*$  satisface 2. y más aún,  $\mathcal{C}_{p,N}^*$  es una familia arco-conexa en  $\Sigma^+$ .

Considere el caso  $p < p_0(N)$ . Suponga que en este caso ocurre la situación (4.2) del Teorema 7.1. Por lo tanto,  $\lim_{s \rightarrow 1} e_s = E$  con  $E < 1 - \epsilon$ ,  $z_s(t) \rightarrow 0$  si  $s \nearrow 1$  y el problema de contorno (7.7) con  $e = E$  tiene una solución no trivial, par y  $2N\pi$  periódica con exactamente  $p$  ceros en  $[0, N\pi]$ . Esto es una contradicción porque (7.7) tiene por lo menos  $p_0(N)$  ceros en  $[0, N\pi]$ . Así vemos que se cumple en este caso la situación (4.1) del Teorema 7.1. Esto muestra que  $\mathcal{C}_{p,N}^*$  es cerrado (en relación con  $[0, \infty[ \times [0, 1]$ ) y  $\text{proy}_2(\mathcal{C}_{p,N}^*) = [0, 1[$ .

Si  $p \geq p_0(N)$  basta con aplicar los resultados del Teorema 8.1 al par  $(\mathcal{C}_{p,N}^*, \mathcal{C}_{p,N}^*)$  y tenemos la demostración.  $\square$

## Capítulo 9

### El problema Generalizado de Sitnikov

El problema de Sitnikov considera dos cuerpos (masas primarias) que se mueven en el plano  $x, y$  alrededor del centro de masas de sistema describiendo órbitas periódicas. En esta sección presentamos una generalización del problema de Sitnikov la cual consiste en considerar no solo dos masas primarias en el plano  $x, y$  sino  $N \geq 2$  masas primarias, las cuales se mueven en órbitas periódicas alrededor del centro de masas. Iniciamos entonces con el estudio de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de estos  $N$  cuerpos.

Considere  $N \geq 2$  cuerpos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  de igual masa  $m > 0$  que interactúan entre sí de acuerdo a las leyes de Newton con constante gravitacional  $G$ . Si  $(\mathbf{p}_j, \dot{\mathbf{p}}_j)$  es la posición y la velocidad del cuerpo  $p_j$  respectivamente entonces la ecuación de movimiento para este cuerpo está dada por

$$\ddot{\mathbf{p}}_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N Gm \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_j\|^3}. \quad (9.1)$$

Existe un conjunto especial de soluciones de este problema de  $N$  cuerpos conocido como soluciones Generalizadas de Lagrange, (ver [44]). En dichas soluciones los cuerpos se mueven en órbitas circulares en el plano  $x, y$  alrededor del origen (centro de masas) y siempre ubicados en los vértices de un  $N$ -polígono. Dada la simetría del problema, es suficiente con conocer la ecuación de movimiento de uno de los cuerpos. Con esto en

mente, consideramos la siguiente relación entre los cuerpos.

$$\mathbf{p}_j = A^{j-1}\mathbf{p}_1, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{N}) & -\text{sen}(\frac{2\pi}{N}) \\ \text{sen}(\frac{2\pi}{N}) & \cos(\frac{2\pi}{N}) \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Note que  $A^N = I_2$  y más aún  $A$  es una isometría. Por otro lado, las potencias de  $A$  forman un grupo cíclico de orden  $N$ , dado por  $\mathcal{D} = \{I_2, A, \dots, A^{N-1}\}$ . Más aún, para todo  $j = 1, \dots, N$  se cumple que  $A^{-j} = A^{N-j}$ . Ahora bien, si consideramos la suma  $\sum_{k \neq j}^N A^{k-j}$  tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, k \neq j}^N A^{k-j} &= \sum_{k=1}^{j-1} A^{k-j} + \sum_{k=j+1}^N A^{k-j}, \\ &= \sum_{s=1}^{j-1} A^{-s} + \sum_{s=1}^{N-j} A^s = \sum_{k=1}^{N-1} A^k. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Es importante observar que el problema (9.1) con las condiciones en los cuerpos (9.2) puede reducirse a un sistema de tres grados de libertad. (ver [5]).

**Proposición 9.1.** *El vector  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = (\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_1, \dots, A^{N-1}\mathbf{p}_1)$  es solución de (9.1) si y solo si  $\mathbf{p}_1$  satisface la ecuación:*

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \sum_{k=1}^{N-1} Gm \frac{(A^k - I_2)\mathbf{p}_1}{\|(A^k - I_2)\mathbf{p}_1\|^3}. \quad (9.4)$$

**Demostración.** ( $\Rightarrow$ ) Sea  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$  la solución de (9.1). Entonces

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_1 &= \sum_{k=2}^N Gm \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_1\|^3} \\ \ddot{\mathbf{p}}_2 &= \sum_{k=1, k \neq 2}^N Gm \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_2\|^3} \\ &\vdots \\ \ddot{\mathbf{p}}_N &= \sum_{k=1}^{N-1} Gm \frac{\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_N}{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_N\|^3} \end{aligned}$$

De (9.2) tenemos que  $\ddot{\mathbf{p}}_j = A^{j-1}\ddot{\mathbf{p}}_1$  para cada  $j = 1, \dots, N$  por lo tanto

$$\begin{aligned} A^{j-1}\ddot{\mathbf{p}}_1 &= \sum_{k=1, k \neq j}^N Gm \frac{(A^{k-1} - A^{j-1})\mathbf{p}_1}{\|(A^{k-1} - A^{j-1})\mathbf{p}_1\|^3}, \\ &= A^{j-1} \sum_{k=1, k \neq j}^N Gm \frac{(A^{k-j} - I_2)\mathbf{p}_1}{\|(A^{k-j} - I_2)\mathbf{p}_1\|^3}, \end{aligned}$$

para cada  $j = 1, \dots, N$ . De (9.3) y dado que  $A$  es invertible concluimos que

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \sum_{k=1}^{N-1} Gm \frac{(A^k - I_2)\mathbf{p}_1}{\|(A^k - I_2)\mathbf{p}_1\|^3}.$$

( $\Leftarrow$ ) La prueba de esta implicación se sigue directamente de los pasos anteriores.  $\square$

Sea  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  y considere un vector  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , dado por  $\xi = (\beta, 0)^{tr}$  y considere la expresión

$$\mathbf{p}_1(t) = R[\omega t]\xi \quad \text{con} \quad R[\omega t] = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\text{sen } \omega t \\ \text{sen } \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Observe que  $A$  y  $R[\omega t]$  conmutan. De la ecuación (9.4) obtenemos

$$Gm \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(A^k - I_2)\xi}{\|(A^k - I_2)\xi\|^3} = -\omega^2\xi.$$

Esta ecuación es equivalente al sistema

$$Gm \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\text{sen}^2(\frac{k\pi}{N})}{4\beta^2 |\text{sen}^3(\frac{k\pi}{N})|} = \omega^2\beta,$$

(9.5)

$$Gm \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\text{sen}(\frac{2k\pi}{N})}{8\beta^2 |\text{sen}^3(\frac{k\pi}{N})|} = 0.$$

Observe que  $\frac{\pi}{N} \leq \frac{\pi k}{N} < \pi$ , para todo  $1 \leq k \leq N-1$  por lo que (9.5) podemos omitir los valores absolutos y así obtener  $|\text{sen}^3(\frac{k\pi}{N})| = \text{sen}^3(\frac{k\pi}{N})$ . En consecuencia

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\text{sen}(\frac{2k\pi}{N})}{8\beta^2 |\text{sen}^3(\frac{k\pi}{N})|} = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos(\frac{k\pi}{N})}{1 - \cos^2(\frac{k\pi}{N})}.$$

Dado que  $\cos \frac{(N-k)\pi}{N} = -\cos \frac{k\pi}{N}$  entonces

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos(\frac{k\pi}{N})}{1 - \cos^2(\frac{k\pi}{N})} = 0, \quad (9.6)$$

por lo tanto la segunda ecuación en (9.5) es válida siempre.

De otro lado

$$\omega^2 = Gm \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{k\pi}{N})}{4\beta^3 |\operatorname{sen}^3(\frac{k\pi}{N})|} = \frac{Gm}{4\beta^3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{k\pi}{N})}.$$

En consecuencia, la masa de los  $N$  cuerpos que describen las órbitas circulares con radio  $\beta$  y periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  satisface la ecuación

$$m_N = m_N(\omega, \beta) = \frac{4\beta^3 \omega^2}{G \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{csc}(\frac{k\pi}{N})}. \quad (9.7)$$

Tomando la constante gravitacional  $G = 1$ ,  $\beta = 1/2$  y el periodo de las órbitas de los cuerpos de igual masa igual a  $2\pi$ , la masa de los cuerpos satisfacen

$$m_N = m_N(1, 1/2) = \frac{1}{2 \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{csc}(\frac{k\pi}{N})}. \quad (9.8)$$

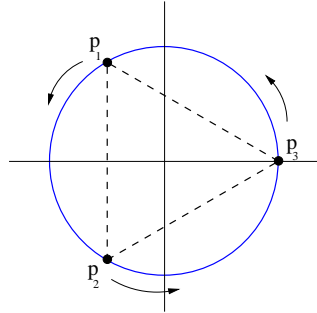


Figura 9.1: Tres cuerpos moviéndose alrededor del centro de masas sobre una órbita circular como soluciones del problema circular de Lagrange de tres cuerpos.

Ahora considérese el caso donde los cuerpos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  con igual masa  $m_N$  se mueven en órbitas elípticas alrededor del centro de masas siempre sobre los vértices de un  $N$ -polígono regular. Para determinar la ecuación de movimiento de cada cuerpo  $p_i, i =$

$1, \dots, N$  como se hizo antes basta con definir las condiciones de movimiento elíptico sobre un cuerpo (supondremos el cuerpo  $p_1$ ).

Sean  $r, \theta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  función regulares que determinaremos posteriormente y considere

$$\mathbf{p}_1(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))^{tr}.$$

Para simplificar la notación, escribimos  $\mathbf{p}_1 = r(c, s)^{tr}$ . Tenemos entonces

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)I_2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})J)(c, s)^{tr}, \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (9.4) ( $G = 1$ ) obtenemos

$$\ddot{\mathbf{p}}_1 = \frac{m}{r^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(A^k - I_2)(c, s)^{tr}}{\|(A^k - I_2)(c, s)^{tr}\|^3}. \quad (9.9)$$

Un cálculo directo nos muestra que

$$A^k - I_2 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{N}) - 1 & -\operatorname{sen}(\frac{2k\pi}{N}) \\ \operatorname{sen}(\frac{2k\pi}{N}) & \cos(\frac{2k\pi}{N}) - 1 \end{pmatrix},$$

así que

$$(A^k - I_2)(c, s)^{tr} = \left( \left( \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - 1 \right)c - \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{N}\right)s, \left( \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - 1 \right)s + \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{N}\right)c \right)^{tr}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \|(A^k - I_2)(c, s)^{tr}\|^3 &= \left( \left( \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) - 1 \right)^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \right)^{3/2}, \\ &= 8 \left| \operatorname{sen}^3\left(\frac{k\pi}{N}\right) \right|. \end{aligned}$$

Lo anterior y la ecuación (9.6) nos permiten afirmar que

$$\frac{m}{r^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(A^k - I_2)(c, s)^{tr}}{\|(A^k - I_2)(c, s)^{tr}\|^3} = \frac{-m}{4r^2} \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{csc}\left(\frac{k\pi}{N}\right) I_2(c, s)^{tr}.$$

Tomando  $m = m_N(1, 1/2)$  se sigue que

$$\frac{m}{r^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(A^k - I_2)(c, s)^{tr}}{\|(A^k - I_2)(c, s)^{tr}\|^3} = -\frac{1}{8r^2} I_2(c, s)^{tr}.$$



Finalmente, la ecuación (9.9) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} (\ddot{r}r - \dot{\theta}^2 r^2)r = -1/8, \\ (2r\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r^2)r = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

De la segunda ecuación en (9.10) se deduce que  $\frac{d}{dt}(\dot{\theta}r^2) = 0$  en consecuencia  $\dot{\theta}r^2$  es constante, más aún  $\kappa = \dot{\theta}r^2$  es conocido como el momento angular del sistema (el cual vamos a considerar distinto de cero). Por otro lado, la primera ecuación en (9.10) es ahora

$$\ddot{r} + \frac{1}{8r^2} = \frac{\kappa^2}{r^3}. \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) es un caso particular de la ecuación:

$$\ddot{r} = f(r) + \frac{\kappa^2}{r^3}, \quad r > 0, \quad (9.12)$$

donde  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Vamos a seguir un tratamiento clásico para el estudio de las soluciones del sistema (9.10). En particular seguimos la sección 2.11 de [37] en donde se presenta el siguiente cambio de variable (en la variable dependiente  $r$  y en la variable independiente  $t$ ) debido a Clairaut válido para  $\kappa \neq 0$ . Primero se observa que  $\dot{\theta} = \frac{\kappa}{r^2} > 0$  por lo que  $\theta = \theta(t)$  es un difeomorfismo entre su dominio  $I$  y su imagen  $J := \theta(I)$ . Por lo que existe la función inversa  $t = t(\theta) : J \rightarrow I$ , lo que nos determina un cambio en la variable independiente.

Nuestra nueva variable dependiente queda determinada por la siguiente relación.

$$\begin{aligned} \rho : J \rightarrow I &\rightarrow ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[ \\ \theta \rightarrow t &\rightarrow r(t) \rightarrow \rho(\theta) := 1/r(t). \end{aligned}$$

Esta relación convierte (9.12) en la ecuación

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = -\frac{1}{\kappa^2\rho^2}f\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Si  $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$  con  $\mu > 0$ , tenemos la ecuación de un oscilador forzado

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{\kappa^2},$$

cuyas soluciones son de la forma

$$\rho(\theta) = \frac{\mu}{\kappa^2} + A \cos(\theta - \varphi), \quad A \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

En consecuencia, la función  $r = r(\theta)$  se expresa de la forma

$$r(\theta) = \frac{\kappa^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \varphi)}, \quad e = \kappa^2 A/\mu \geq 0. \quad (9.13)$$

Note que (9.13) es la ecuación de una elipse en coordenadas polares, la cual tiene un foco en el origen, excentricidad  $e \in [0, 1[$ , semieje mayor  $a = \frac{\kappa^2/\mu}{1 - e^2}$  y argumento del pericentro  $\varphi \in [0, 2\pi[$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\varphi = 0$  (el eje de excentricidad de la elipse se toma en la dirección sentido del vector  $\mathbf{e}_1$ ). Además el periodo mínimo  $p$  de un cuerpo que se mueva a lo largo de esta elipse está dado por  $p = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ .

Por lo tanto si suponemos que  $p_1$  se mueve en sentido positivo a lo largo de una elipse con excentricidad  $e \in [0, 1[$  y semieje mayor  $a$  entonces (9.13) queda en la forma

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Para determinar la posición del cuerpo  $p_1$  en cualquier instante de tiempo  $t$  se recurre a una parametrización de la elipse (9.13) por medio de la *anomalía excéntrica*  $u(t, e)$ . Siguiendo los resultados en [37] se comprueba entonces que

$$r(t, e) = a(1 - e \cos u(t, e)), \quad (9.14)$$

en donde  $u = u(t, e)$  satisface la ecuación de Kepler

$$u(t, e) - e \sin u(t, e) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0),$$

con  $t_0$  uno de los momentos donde  $p_1$  pasa por el pericentro. En el caso  $0 < e < 1$  es posible considerar en el instante  $t = 0$  el punto  $p_1$  se encuentre en el pericentro de la elipse, en tal caso  $t_0 = 0$ .

Ahora bien, de la ecuación (9.11) tenemos que  $\mu = 1/8$ . Por lo tanto si suponemos que el semieje mayor de nuestra elipse es  $a = 1/2$  entonces  $\sqrt{\mu} = a^{3/2}$ . En consecuencia, el periodo mínimo de  $p_1$  es  $2\pi$ , la función  $r = r(t, e)$  satisface la ecuación

$$r(t, e) = \frac{1}{2}(1 - e \cos u(t, e)),$$

y la anomalía excéntrica satisface la ecuación

$$u(t, e) - e \sin u(t, e) = t.$$

De esta forma tenemos de nuevo las ecuaciones (2.3) y (2.4) presentadas en el capítulo 2 sobre las masas primarias en el problema de Sitnikov.

Los otros  $N - 1$  cuerpos se mueven de igual forma en órbitas elípticas y satisfacen las ecuaciones

$$\mathbf{p}_j(t, e) = A^{j-1} \mathbf{p}_1(t, e) = r(t, e) A^{j-1} (\cos \theta(t, e), \sin \theta(t, e))^{tr}, \quad j = 2, \dots, N - 1.$$

La discusión previa demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 9.1.** *Considérese  $N \geq 2$  cuerpos (masas puntuales)  $p_1, p_2, \dots, p_N$ , de igual masa  $m_N$  dada por  $m_N = \frac{1}{2 \sum_{k=1}^{N-1} \csc \frac{k\pi}{N}}$ , los cuales satisfacen*

$$\mathbf{p}_j = A^{j-1} \mathbf{p}_1, \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{N}) & -\sin(\frac{2\pi}{N}) \\ \sin(\frac{2\pi}{N}) & \cos(\frac{2\pi}{N}) \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, N.$$

donde  $\mathbf{p}_j$  es el vector posición de el cuerpo  $p_j$ . Suponga que  $p_1$  se mueve a lo largo de una órbita elíptica con excentricidad  $e \in [0, 1[$  semieje mayor igual a  $1/2$  y periodo mínimo  $2\pi$ . Entonces  $p_1, p_2, \dots, p_N$  satisfacen un problema de  $N$  cuerpos en donde cada cuerpo se mueve alrededor del origen (centro de masas) sobre una órbita elíptica con excentricidad  $e \in [0, 1[$  semieje mayor igual a  $1/2$  y periodo mínimo  $2\pi$ .

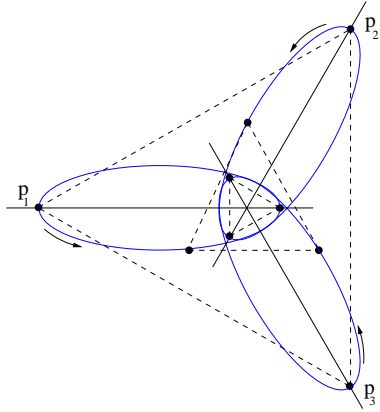


Figura 9.2: Tres cuerpos moviéndose alrededor del centro de masas sobre órbitas elípticas como soluciones de Lagrange del problema de tres cuerpos.

Estamos ahora en posición de presentar nuestro problema generalizado de Sitnikov, pero antes de ello cabe mencionar que este problema generalizado fue ya antes considerado por L. D. Pustynnikov [41].

**Problema Generalizado de Sitnikov.** Sean  $p_1, p_2, \dots, p_N$ ,  $N \geq 2$  cuerpos con igual masa, los cuales se mueven en el plano  $x, y$  como soluciones de Lagrange del problema de los  $N$  cuerpos. Considere un cuerpo  $p_0$  de masa cero moviéndose a lo largo del eje  $z$  el cual interactúa según las leyes de Newton con los cuerpos  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . El problema generalizado de Sitnikov consiste en describir el movimiento del cuerpo  $p_0$ .

Si  $z = z(t)$  denota la posición del cuerpo  $p_0$  en cualquier instante de tiempo  $t$  y los cuerpos  $p_1, p_2, \dots, p_N$  satisfacen el Teorema 9.1, la ecuación de movimiento de  $p_0$  está dada por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{z} + \frac{\lambda z}{(z^2 + r(t, e)^2)^{3/2}} = 0, \quad (9.15)$$

donde  $\lambda = \lambda(N) = m_N N$  y  $r(t, e)$  es la distancia de cada cuerpo  $p_j, j = 1, \dots, N$  al origen (centro de masas) dada por la ecuación (2.3). La tabla siguiente muestra algunos valores de  $m_N$  y  $\lambda$ .

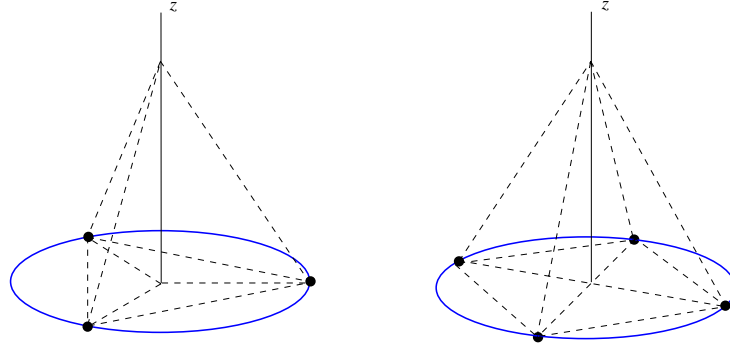


Figura 9.3: Diagrama del problema circular generalizado de Sitnikov para el caso de tres y cuatro cuerpos primarios respectivamente.

$N$	$m_N$	$\lambda = \lambda(N)$
2	$1/2$	1
3	$\sqrt{3}/8$	$3\sqrt{3}/8$
4	$\sqrt{2}/2(4 + \sqrt{2})$	$2\sqrt{2}/(4 + \sqrt{2})$
5	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}/8$	$5\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}/8$
6	$1/(10 + 8/\sqrt{3})$	$9/(15 + 4\sqrt{3})$

Si  $0 < e < 1$  entonces las órbitas de los cuerpos primarios son elípticas, en este caso la ecuación (9.15) es no autónoma y corresponde al *problema elíptico generalizado de Sitnikov*.

Cuando la excentricidad  $e$  es cero, tenemos el *problema circular generalizado de Sitnikov*. En este caso los cuerpos primarios se mueven en una órbita circular de radio  $r(t, 0) = 1/2$  y la ecuación (9.15) se convierte en

$$\ddot{z} + \frac{\lambda z}{(z^2 + 1/4)^{3/2}} = 0. \quad (9.16)$$

**Observación:** Si  $N = 2$ , (9.16) se convierte en la ecuación del problema elíptico de Sitnikov (2.7) .

Al igual que en el problema de Sitnikov, la ecuación autónoma (9.16) posee una integral primera, dada en este caso por

$$H^\lambda(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{\lambda}{(z^2 + 1/4)^{1/2}}.$$

De esta forma, las órbitas de las soluciones del problema circular generalizado de Sitnikov viven en las curvas de nivel  $H^\lambda = c$  con  $c \in [-2\lambda, \infty[$ . Claramente para  $N \geq 2$ , la función  $H^\lambda$  tiene las mismas propiedades de la función  $H$  del problema circular de Sitnikov que se presentan en el capítulo 2 (consecuencia de un cambio de escala temporal).

Por otro lado si  $T^\lambda$  es el periodo en el problema circular generalizado de Sitnikov entonces el Teorema 2.1 quedaría en siguiente forma.

**Teorema 9.2.** *Para cada  $N \geq 2$  el periodo  $T^\lambda$  en la variable  $c \in ] - 2\lambda, 0[$  satisface*

(a)  $\lim_{c \rightarrow 0} T^\lambda(c) = \infty, \lim_{c \rightarrow 0} dT^\lambda/dc = \infty, \lim_{c \rightarrow -2\lambda} T^\lambda(c) = \pi/\sqrt{2\lambda}.$

(b)  $dT^\lambda/dc > 0$  para todo  $c \in ] - 2\lambda, 0[$ .

(c)  $\lim_{c \rightarrow -2\lambda} dT^\lambda/dc = \pi(1 + 4\sqrt{2})/16\lambda.$

## 9.1. Soluciones periódicas en el problema generalizado de Sitnikov

Tal como se hizo en [26], para cada  $M \geq 1$  podemos preguntarnos por soluciones pares y  $2M\pi$  periódicas de la ecuación (9.15) las cuales satisfacen las condiciones de contorno

$$\dot{z}(0) = 0, \quad \dot{z}(M\pi) = 0. \tag{9.17}$$

En la búsqueda de este tipo de soluciones de (9.15) es claro que las mismas ideas desarrolladas en [26] son directamente aplicables por lo que vamos a presentar los

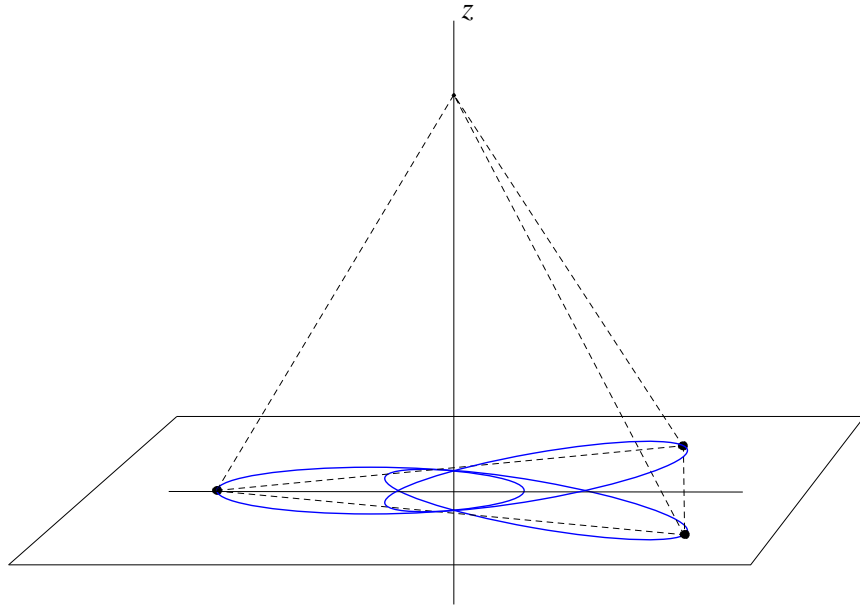


Figura 9.4: Problema de Sitnikov Generalizado para tres cuerpos moviéndose alrededor del centro de masas en donde las masas primarias se mueven sobre órbitas elípticas como soluciones de Lagrange del problema de tres cuerpos.

resultados obtenidos en [26] adaptados a nuestro problema generalizado de Sitnikov y mostraremos las diferencias principales con el problema de Sitnikov original.

Sea  $N \geq 2$  fijo. Dados  $\xi, \eta \in \mathbb{R}$  y  $e \in [0, 1[$  se denotará por  $z_\lambda(t, \xi, \eta, e)$  a la solución de (9.15) que satisface las condiciones de contorno (9.17) y las condiciones iniciales

$$z_\lambda(0) = \xi, \quad \dot{z}(0) = \eta. \quad (9.18)$$

De la Proposición 2.1 se sigue que  $z_\lambda(t, \xi, \eta, e)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como antes, la búsqueda de soluciones pares y  $2M\pi$  periódicas de (9.17) que satisfacen (9.18) es equivalente a encontrar los ceros de la función analítica real

$$F_M^\lambda : \mathbb{R} \times [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_M^\lambda(\xi, e) = \dot{z}_\lambda(M\pi, \xi, 0, e).$$

Si denotamos por  $\Sigma^\lambda$  el conjunto de ceros de la función  $F_M^\lambda$ , podemos aplicar la Proposición 7.1 y obtener directamente el siguiente resultado.

**Proposición 9.2.** *Para cada  $N \geq 2$  fijo, el conjunto  $\Sigma^\lambda$  satisface las condiciones del Teorema 6.1.*

Como antes, el estudio del conjunto

$$\Sigma_0^\lambda = \{(\xi, 0) : F_M^\lambda(\xi, 0) = 0\},$$

equivale a estudiar las soluciones del problema de contorno

$$\ddot{z} + \frac{\lambda z}{(z^2 + \frac{1}{4})^{3/2}} = 0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}(M\pi) = 0. \quad (9.19)$$

Ahora bien, sea  $z_\lambda(t, \xi, 0, 0)$  la solución de (9.19) que satisface las condiciones iniciales

$$z(0) = \xi, \quad \dot{z}(0) = 0. \quad (9.20)$$

Siguiendo los resultados presentados en el capítulo 6, se sigue directamente que

$$\Sigma_0^\lambda = \{-\xi_1, \dots, -\xi_{\nu_{M,\lambda}}, 0, \xi_1, \dots, \xi_{\nu_{M,\lambda}}\},$$

donde  $\xi_k$  es la solución de  $\frac{T^\lambda(\xi_k)}{2} = \frac{M\pi}{k}$  con  $k = 1, 2, \dots, \nu_{M,\lambda} = [2\sqrt{2\lambda}M]$ .

Note que lo anterior tiene sentido si y sólo si  $\nu_{M,\lambda} \geq 1$ . Por lo tanto, para cada  $\lambda$  fijo, consideramos  $M_\lambda \geq 1$  dado por

$$M_\lambda = \min_{M \in \mathbb{N}} \left\{ M \geq \frac{1}{2\sqrt{2\lambda}} \right\}.$$

Por lo que la búsqueda de soluciones pares y  $2M\pi$  periódicas de (9.19) está bien definida para todo  $M_\lambda \leq M$ .

Así que para cada  $\lambda$  fijo,  $M_\lambda \leq M$  se prueba la existencia de  $\nu_{M,\lambda}$  soluciones no triviales, pares y  $2M\pi$  periódicas de (9.19) que satisfacen las condiciones iniciales (9.20). Estas soluciones se pueden clasificar de acuerdo al número de ceros de  $z_\lambda(t, \xi_k, 0, 0)$  en  $[0, M\pi]$  con

$$z_\lambda(0, \xi_1, 0, 0) = \xi_1 > \dots > z_\lambda(0, \xi_{\nu_{M,\lambda}}, 0, 0) = \xi_{\nu_{M,\lambda}}.$$



Del análisis presentado en la sección 5.1 se comprueba para el problema circular generalizado de Sitnikov, que el índice de cada solución no trivial  $z_\lambda(t, \xi_k, 0, 0)$  de (9.19) es  $(-1)^k$  y el índice de la solución de equilibrio  $z = 0$  es  $(-1)^{\nu_{M,\lambda}+1}$ , lo que nos conduce de nuevo a la existencia local de un número finito de ramas de soluciones no triviales, pares y  $2M\pi$  periódicas que emanan de cada punto  $(\xi_k, 0)$  las cuales están ordenadas de acuerdo al número de ceros en  $[0, M\pi]$ .

## 9.2. Linealización del problema generalizado de Sitnikov en el origen

En esta sección vamos a presentar algunos resultados relacionados con el problema de contorno

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{r(t, e)^3} y = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(M\pi) = 0, \quad (9.21)$$

para cada  $\lambda$  fijo. Note que la ecuación diferencial en (9.21) es la ecuación linealizada en la solución de equilibrio de  $z = 0$  de la ecuación (9.19). Un primer resultado equivalente a la Proposición 6.2 en [26] es el siguiente

**Proposición 9.3.** *Si  $e \leq \rho_{M,\lambda}$  con*

$$\rho_{M,\lambda} = \min \left\{ 2\lambda^{1/3} \left( \frac{M}{\nu_{M,\lambda}} \right)^{2/3} - 1, 1 - 2\lambda^{1/3} \left( \frac{M}{\nu_{M,\lambda} + 1} \right)^{2/3} \right\},$$

*entonces  $\dot{y}_\lambda(M\pi, e) \neq 0$ .*

**Demostración.** Si  $e \leq \rho_{M,\lambda}$  entonces

$$e \leq 2\lambda^{1/3} \left( \frac{M}{\nu_{M,\lambda}} \right)^{2/3} - 1 \quad \text{y} \quad e \leq 1 - 2\lambda^{1/3} \left( \frac{M}{\nu_{M,\lambda} + 1} \right)^{2/3}.$$

De estas desigualdades se deduce respectivamente que

$$\left( \frac{\nu_{M,\lambda}}{M} \right)^2 \leq \frac{8\lambda}{(1+e)^3} \quad \text{y} \quad \frac{8\lambda}{(1-e)^3} \leq \left( \frac{\nu_{M,\lambda} + 1}{M} \right)^2.$$

Ahora recordemos las desigualdades en (7.4) dadas por

$$\frac{1-e}{2} \leq r(t, e) \leq \frac{1+e}{2},$$

en consecuencia

$$\left(\frac{\nu_{M,\lambda}}{M}\right)^2 \leq \frac{\lambda}{r(t, e)^3} \leq \left(\frac{\nu_{M,\lambda} + 1}{M}\right)^2,$$

aplicando el Lema 7.1 se tiene la demostración.  $\square$

El siguiente resultado nos determina un estimativo inferior de la función  $r(t, e)$  y es pieza fundamental para los resultados posteriores de este trabajo.

**Proposición 9.4.** *Para todo  $\alpha < 1$  existe un  $\delta = \delta(\alpha)$  tal que si  $(t, e) \in ]0, \delta[ \times ]0, 1[$  entonces*

$$r(t, e)^3 > \frac{(1-e)^3}{8} + \frac{9\alpha^6 e t^2}{16}.$$

Para la demostración de la Proposición 9.4 necesitaremos el siguiente resultado.

**Lema 9.1.** *Para todo  $\alpha < 1$  existe  $\tau^* = \tau^*(\alpha) > 0$  tal que si  $t \in ]0, \tau^*[$  entonces*

$$r(t, e) > \frac{1-e}{2} + \alpha^2 e \frac{u(t, e)^2}{4},$$

para todo  $e \in [0, 1[$ .

**Demostración.** Dado  $\alpha < 1$  existe  $\epsilon = \epsilon(\alpha) > 0$  tal que

$$\text{sen } x > \alpha x,$$

para todo  $x \in ]0, \epsilon[$ . Con  $0 < \epsilon < \pi/2$  se define  $\tau^* = 2\epsilon - \text{sen}(2\epsilon)$ . Entonces si  $0 < t < \tau^*$  de la definición de anomalía excéntrica se sigue que  $0 < u(t) - e \text{sen } u(t) < \tau^* < 2\epsilon - e \text{sen}(2\epsilon)$  para todo  $e \in [0, 1[$ . De la monotonía de la función  $d(u) = u - e \text{sen } u$  se deduce que  $0 < u < 2\epsilon$ . En consecuencia, para todo  $t \in ]0, \tau^*[$ ,  $e \in [0, 1[$  se cumple

$$\text{sen}^2\left(\frac{u(t, e)}{2}\right) > \alpha^2 \frac{u(t, e)^2}{4}.$$

Por otro lado, de la ecuación (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} r(t, e) &= \frac{1}{2}(1 - e \cos u(t, e)), \\ &= \frac{1 - e}{2} + e \operatorname{sen}^2 \left( \frac{u(t, e)}{2} \right), \\ &> \frac{1 - e}{2} + \alpha^2 e \frac{u(t, e)^2}{4}, \end{aligned} \tag{9.22}$$

lo que completa la demostración.  $\square$

**Observación.** Para  $(t, e) \in ]0, \tau[ \times ]0, 1[$  con  $\tau$  pequeño, se tiene la siguiente desigualdad

$$r(t, e) < \frac{1 - e}{2} + e \frac{u(t, e)^2}{4}.$$

**Demostración de la proposición 9.4.** Considere la ecuación Kepler (2.4) con  $e \in ]0, 1[$  dada por

$$u - e \operatorname{sen} u = t,$$

la cual escribimos en la siguiente forma equivalente

$$u^3 + \frac{6}{e}(1 - e)u + h(t, u) = 0, \tag{9.23}$$

en donde

$$h(t, u) = -\left(\frac{6t}{e} + u^5 f(u)\right) \quad \text{con} \quad f(u) = 3! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 5)!} u^{2n}.$$

Observe que la función  $f(u)$  es continua en  $u = 0$ , tiene un máximo local en este punto con  $f(0) = \frac{3!}{5!} > 0$ . Por otro lado  $u(t, e)$  es uniformemente continua en  $[0, \Pi] \times [0, 1]$  para todo  $\Pi \in \mathbb{R}$  y más aún  $u(0, e) = 0$  para todo  $e \in [0, 1]$ . Así que para algún  $\gamma > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $|u(t, e)| < \gamma$  para todo  $(t, e) \in [0, \delta_1] \times [0, 1]$  de manera que  $f(u) > 0$  con  $u \in [0, \gamma]$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} u(t, e)^6 &= \left(\frac{6}{e}(1 - e)u + h(t, u)\right)^2 \\ &> h(t, u)^2 > \left(\frac{6t}{e}\right)^2, \end{aligned}$$

para todo  $(t, e) \in ]0, \delta_1[ \times ]0, 1[$ . Del Lema 9.1 para cada  $0 < \alpha < 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} r(t, e)^3 &> \left( \frac{1-e}{2} + \alpha^2 e \frac{u(t, e)^2}{4} \right)^3, \\ &> \frac{(1-e)^3}{8} + \frac{\alpha^6 e^3}{4^3} u(t, e)^6, \end{aligned}$$

si  $(t, e) \in ]0, \delta_2] \times [0, 1[$ , con  $\delta_2 = \delta_2(\alpha) > 0$ . En consecuencia, si  $(t, e) \in ]0, \delta[ \times ]0, 1[$  con  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  tenemos que

$$r(t, e)^3 > \frac{(1-e)^3}{8} + \frac{9\alpha^6 e t^2}{16},$$

demostrándose así la Proposición 9.4.  $\square$

Al igual que en [26] consideramos  $y_\lambda(t, e)$  como la solución de la ecuación en (9.21), que satisface las condiciones iniciales

$$y(0, e) = 1, \quad \dot{y}(0, e) = 0.$$

El siguiente resultado nos muestra que el número de ceros de  $y_\lambda(t, e) = 0$  en el caso  $M = 1$ .

**Proposición 9.5.** *Sea  $N(e)$  el número de ceros de  $y_\lambda(t, e)$  en  $[0, \pi]$ . Si  $0 < \lambda < 9/64$  entonces  $\limsup_{e \rightarrow 1^-} N(e) < \infty$ . De otro lado, si  $\lambda > 9/64$  entonces  $\lim_{e \rightarrow 1^-} N(e) = \infty$ .*

**Demostración.** Para cada  $e \in [0, 1[$  tenemos que  $y_\lambda(t, e)$  analítica en  $[0, \pi]$ , por lo tanto  $N(e) < \infty$ . Ahora bien, fijado  $\lambda \in ]0, 9/64[$  se elige un  $\alpha = \alpha(\lambda)$  en  $]0, 1[$  tal que

$$0 < \lambda < \frac{9\alpha^6}{64}.$$

De la Proposición 9.4 existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{\lambda}{r(t, e)^3} < \frac{\lambda}{\vartheta_1 + \vartheta_2 t^2},$$

para todo  $(t, e) \in ]0, \delta[ \times ]0, 1[$  con

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(e) = \frac{(1-e)^3}{8} \quad \text{y} \quad \vartheta_2 = \vartheta_2(e) = \frac{9\alpha^6 e}{16}.$$

Sea  $e_* \in ]0, 1[$  tal que

$$0 < \lambda < \frac{9\alpha^6 e}{64} \quad \text{para todo } e \in [e_*, 1].$$

Considere ahora el problema de valor inicial

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{\vartheta_1 + \vartheta_2 t^2} x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (9.24)$$

con  $e \in [e_*, 1[$  y sea  $x(t, e)$  la solución de (9.24). Dado que  $0 < \lambda < \vartheta_2(e)/4$  para todo  $e \in [e_*, 1[$  por el Lema 5.1 concluimos que

$$\begin{aligned} x(t, e) & \text{ tiene a lo más un cero en } ]0, \infty[ \text{ para todo } e \in [e_*, 1[. \\ \dot{x}(t, e) & \neq 0 \quad \text{para todo } (t, e) \in ]0, \infty[ \times [e_*, 1[. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Ahora bien, aplicando la teoría de Comparación de Sturm a las ecuaciones en (9.21) y (9.24) se deduce que  $y_\lambda(t, e)$  tiene a lo más dos ceros en  $[0, \delta[$  para todo  $e \in [e_*, 1[$  dado que si tuviese 3 o más ceros,  $x(t, e)$  tendría por lo menos dos ceros lo cual es una contradicción.

Sea  $t \in [\delta, \pi]$  y considere la ecuación de Kepler (2.4). Primero, para todo  $e \in [0, 1]$  tenemos que

$$\delta \leq u(t, e) - e \operatorname{sen} u(t, e) \leq \pi.$$

Esto implica que  $0 < u(t, e) \leq \pi$  para todo  $(t, e) \in [\delta, \pi] \times [0, 1]$ . Más aún

$$\delta \leq \delta + e \operatorname{sen} u(t, e) \leq u(t, e),$$

para todo  $(t, e) \in [\delta, \pi] \times ]0, 1]$ . y por lo tanto

$$\delta \leq u(t, e) \leq \pi,$$

en consecuencia  $\cos u(t, e) < \cos \delta$ . De (2.3) se sigue para  $e \in [0, 1[$  que

$$r(t, e) > \frac{1}{2}(1 - e \cos \delta) > \frac{1}{2}(1 - \cos \delta).$$

Esto demuestra finalmente para  $0 < \lambda < 9\alpha^6/64$  que

$$\frac{\lambda}{r(t, e)^3} < \frac{8\lambda}{(1 - \cos \delta)^3} < \frac{9\alpha^6}{8(1 - \cos \delta)^3}. \quad (9.26)$$

Ahora si consideramos para  $t \in [\delta, \pi]$  la ecuación

$$\ddot{x} + \mathcal{A}x = 0, \quad (9.27)$$

con  $\mathcal{A} = \frac{9\alpha^6}{8(1 - \cos \delta)^3}$  las soluciones de (9.27) tiene un número finito de ceros. Por la desigualdad (9.26) y la teoría de Comparación de Sturm,  $y_\lambda(t, e)$  tiene menos ceros en  $[\delta, \pi]$  que alguna solución de (9.27), y esto independiente de  $e \in ]0, 1]$ . De esta manera hemos demostrado que  $\limsup_{e \rightarrow 1^-} N(e) < \infty$ .

Ahora considere el caso  $9/64 < \lambda \leq 1$ . En el capítulo 7 se demostró que

$$r(t, 1) = \frac{6^{2/3}}{4} t^{2/3} \phi(t),$$

con  $\phi(t)$  una función analítica en  $s = t^{2/3}$ , continua en  $t = 0$  con  $\phi(0) = 1$ . Para  $\Delta > 0$  pequeño y  $t \in ]0, \Delta]$  tenemos que

$$\frac{\lambda}{r(t, 1)^3} = \frac{16\lambda}{9} \frac{\psi(t)}{t^2}, \quad \text{con} \quad \psi(t) = \frac{1}{\phi(t)^3},$$

en consecuencia

$$\frac{1}{4} \frac{\psi(t)}{t^2} < \frac{\lambda}{r(t, 1)^3} \leq \frac{16}{9} \frac{\psi(t)}{t^2}, \quad \text{para} \quad t \in ]0, \Delta].$$

Es posible fijar un número  $\gamma$  en el intervalo  $]1/4, 16/9[$  tal que

$$\frac{\lambda}{r(t, 1)^3} > \frac{\gamma}{t^2}, \quad \text{para} \quad t \in ]0, \Delta].$$

La demostración en este caso sigue las líneas de la Proposición 6.4 en [26].  $\square$

A continuación vamos a estudiar la ecuación diferencial que aparece en (9.21) en el caso crítico  $e = 1$ . Este estudio nos permitirá determinar la existencia de soluciones

no triviales del problema de contorno (9.21) para valores específicos de  $e \in [0, 1[$ . El número de estas soluciones será finito o infinito según los valores que tome el parámetro  $\lambda$ .

**Proposición 9.6.** *Sea  $y_\lambda(t, 1)$  una solución de la ecuación*

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{r(t, 1)^3} y = 0, \quad (9.28)$$

con  $t > 0$  y  $m = \frac{16\lambda}{9}$ . Si  $m \neq 1/4$  y  $m \neq 5/36$  entonces  $y_\lambda(t, 1)$  puede expresarse en la forma

$$y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 t^{r_2} h_2(t),$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes,  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$  son funciones analíticas en  $s = t^{2/3}$  con  $h_1(0) \neq 0$ ,  $h_2(0) \neq 0$  y  $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$ . De otro lado si  $m = 1/4$  o  $m = 5/36$  entonces  $y_\lambda(t, 1)$  puede expresarse en la forma

$$y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 (t^{r_1} h_1(t) \ln t^{2/3} + t^{r_1} \tilde{h}_1(t)),$$

o

$$y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 (v t^{r_1} h_1(t) \ln t^{2/3} + t^{r_2} \tilde{h}_2(t)),$$

respectivamente, donde  $\tilde{h}_1(t)$  y  $\tilde{h}_2(t)$  son analíticas en  $s = t^{2/3}$  y  $v$  es una constante determinada por la ecuación.

**Demostración.** De la ecuación (7.9) sabemos que  $r(t, 1)$  satisface

$$\frac{\lambda}{r(t, 1)^3} = \frac{16\lambda}{9} \frac{\psi(t)}{t^2},$$

con  $\psi(t)$  una función analítica en  $s = t^{2/3}$  con  $\psi(0) = 1$ . Por lo tanto, podemos escribir la ecuación (9.28) en la forma

$$t^2 \ddot{y} + m \psi(s(t)) y = 0, \quad (9.29)$$

donde  $m = \frac{16\lambda}{9}$ . Si consideramos el cambio de variable  $t = s^{3/2}$  entonces (9.29) se convierte en una ecuación diferencial de segundo orden

$$s^2 w'' - \frac{1}{2} s w' + \frac{9}{4} m \psi(s) w = 0, \quad (9.30)$$

donde  $w(s) = y(t(s))$ . Siguiendo la teoría de Frobenius para la ecuación (9.30) se buscan soluciones de la forma  $\phi(s) = s^k h(s)$  con  $k \in \mathbb{R}$  y  $h(s)$  es una función analítica en  $s = 0$  ( $h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$  con  $a_0 \neq 0$ ). Más aún, la ecuación indicial asociada a (9.30) está dada por

$$k(k-1) - \frac{1}{2}k + \frac{9}{4}m = 0,$$

que tiene soluciones  $k_{1,2} = \frac{3}{4}(1 \pm \sqrt{1-4m})$ . Nótese que  $k_1 - k_2 \notin \mathbb{Z}$  si y solo si  $m \neq 1/4$  y  $m \neq 5/36$ . Por lo tanto si  $k_1 - k_2 \notin \mathbb{Z}$  cualquier solución de (9.30) se expresa como

$$w(s) = c_1 s^{k_1} h_1(s) + c_2 s^{k_2} h_2(s),$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes,  $h_1(s)$  y  $h_2(s)$  son funciones analíticas en  $s = 0$ .

Si  $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$  entonces cualquier solución de (9.30) se expresa como

$$w(s, 1) = c_1 s^{k_1} h_1(s) + c_2 (t^{k_1} h_1(s) \ln s + s^{k_1} \tilde{h}_1(s)),$$

o

$$w(s, 1) = c_1 s^{k_1} h_1(s) + c_2 (v s^{k_1} h_1(s) \ln s + s^{k_2} \tilde{h}_2(s)),$$

si  $m = 1/4$  o  $m = 5/36$  respectivamente, donde  $\tilde{h}_1(s)$  y  $\tilde{h}_2(s)$  son funciones analíticas en  $s = 0$  y  $v$  es una constante determinada por la ecuación (9.30). La proposición se sigue directamente al deshacer el cambio de variable.  $\square$

**Corolario 9.1.** *Si  $0 < \lambda < 9/64$  cualquier solución de (9.28) tiene un número finito de ceros en  $]0, \pi]$ . De otro lado si  $9/64 < \lambda \leq 1$  cualquier solución de (9.28) tiene un número arbitrario de ceros acumulándose en  $t = 0$ .*



**Demostración.** Note que para todo  $\Delta > 0$  cualquier solución de  $y(t, 1)$  de (9.28) tiene un número finito de ceros en  $[\Delta, \pi]$ . Más aún para cada función analítica  $h_i$  (resp.  $\tilde{h}_i$ ), con  $i = 1, 2$  existen números positivos  $\epsilon_i$  (resp.  $\tilde{\epsilon}_i$ ) tales que  $h_i(t) \neq 0$  para todo  $t \in ]0, \epsilon_i[$  (resp.  $\tilde{h}_i(t) \neq 0$  para todo  $t \in ]0, \tilde{\epsilon}_i[$ ). Sea  $\Delta^* = \min_{i=1,2} \{\epsilon_i, \tilde{\epsilon}_i\}$ . Entonces para todo  $t \in ]0, \Delta^*[$  tenemos que  $h_i(t) \neq 0$  y  $\tilde{h}_i(t) \neq 0$  para  $i = 1, 2$ . Ahora, si  $\lambda \in ]0, 9/64[$  entonces  $0 < m < 1/4$  y esto implica que  $r_{1,2} \in ]0, 1[$ . En consecuencia  $y_\lambda(t, 1) \neq 0$  para todo  $t \in ]0, \Delta^*[$ . Por lo tanto,  $y_\lambda(t, 1)$  tiene un número finito de ceros en  $]0, \pi]$ . De otro lado, si  $\lambda \in ]9/64, 1]$  entonces  $1/4 < m \leq 16/9$  y  $r_{1,2} \in \mathbb{C}$ , esto implica que cualquier solución de (9.28) está dada por

$$y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{1/2} \cos(b \ln t^{2/3}) h_1(t) + c_2 t^{1/2} \operatorname{sen}(b \ln t^{2/3}) h_2(t),$$

con  $b = \sqrt{4m - 1}/2$ , de aquí la conclusión se sigue directamente.  $\square$

Para finalizar la discusión de ciertas propiedades de las soluciones de (9.28) vamos a considerar la función argumento  $\theta_\lambda(t, 1)$  de cualquier solución  $y_\lambda(t, 1)$  en coordenadas polares  $y + iy = \rho e^{i\theta}$ . El siguiente lema nos muestra el comportamiento de  $\theta_\lambda(t, 1)$  cuando  $t \searrow 0$  en el caso  $\lambda \in ]0, 9/64[$ .

**Lema 9.2.** *Sea  $y_\lambda(t, 1)$  una solución de (9.28) y  $\theta_\lambda(t, 1)$  es el argumento de  $y_\lambda(t, 1)$  en coordenadas polares  $y + iy = \rho e^{i\theta}$ . Supongamos que  $\lambda \in ]0, 9/64[$ ,  $\lambda \neq 5/64$ . Entonces  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_\lambda(t, 1) = \frac{\pi}{2} + \beta\pi$  para algún  $\beta \in \mathbb{Z}$ .*

**Demostración.** De la Proposición 9.6 sabemos que si  $\lambda \in ]0, 9/64[$ ,  $\lambda \neq 5/64$  entonces cualquier solución de (9.28) es de la forma

$$y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 t^{r_2} h_2(t),$$

en donde  $c_1, c_2$  son constantes,  $r_2 \in ]0, 1/2[$ ,  $r_1 \in ]1/2, 1[$ ,  $r_1 + r_2 = 1$  y  $h_1, h_2$  funciones

analíticas en  $t^{2/3}$  con  $h_1(0) \neq 0$ ,  $h_2(0) \neq 0$ . Ahora bien, observe que

$$\begin{aligned} \tan(\theta_\lambda(t, 1)) &= \frac{\dot{y}_\lambda(t, 1)}{y_\lambda(t, 1)} = \frac{c_1 r_1 t^{r_1-1} h_1(t) + c_1 t^{r_1} \dot{h}_1(t) + c_2 r_2 t^{r_2-1} h_2(t) + c_2 t^{r_2} \dot{h}_2(t)}{c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 t^{r_2} h_2(t)}, \\ &= \frac{c_1 r_1 t^{r_1-1} h_1(t) + c_1 t^{r_1} \dot{h}_1(t) + c_2 (1-r_1) t^{-r_1} h_2(t) + c_2 t^{1-r_1} \dot{h}_2(t)}{c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 t^{1-r_1} h_2(t)}, \\ &= \frac{c_1 r_1 t^{2r_1-1} h_1(t) + c_1 t^{2r_1} \dot{h}_1(t) + c_2 (1-r_1) h_2(t) + c_2 t \dot{h}_2(t)}{c_1 t^{2r_1} h_1(t) + c_2 t h_2(t)}. \end{aligned}$$

Tenemos así que  $\lim_{t \rightarrow 0} |\tan(\theta_\lambda(t, 1))| = \infty$ . De otro lado,  $\theta_\lambda(t, 1)$  satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda}{r(t, 1)^3} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$$

por lo tanto  $\theta_\lambda(t, 1)$  es monótona decreciente. Por la continuidad de la función  $|\tan \theta|$  se concluye que  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_\lambda(t, 1) = \pi/2 + \beta\pi$  para algún  $\beta \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

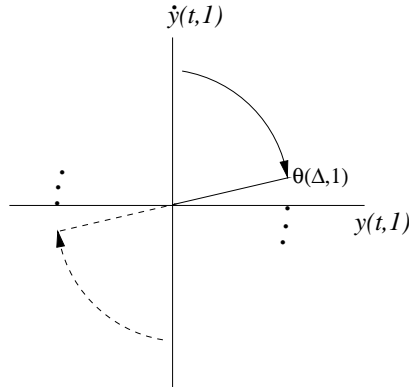


Figura 9.5: Gráfica del comportamiento de la función argumento  $\theta(t, 1)$  para  $t \in ]0, \Delta]$ . Dado que  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta_\lambda(t, 1) = \pi/2 + \beta\pi$  y  $\dot{\theta}_\lambda < 0$ , para algún  $\Delta > 0$  el producto de  $y(t, 1) \dot{y}(t, 1)$  es positivo para  $t \in ]0, \Delta]$ , por lo tanto se está en el primer cuadrante o bien en el tercer cuadrante.

**Observación.** Dado que  $\dot{\theta}(t, 1) < 0$  para todo  $t$ , la rotación del argumento es en sentido negativo. De manera que por el Lema 9.2 se deduce la existencia de un  $\Delta > 0$  pequeño tal que  $y(t, 1) \dot{y}(t, 1) > 0$  para todo  $t \in ]0, \Delta]$ . La figura 9.5 ilustra esta observación.

A continuación presentamos dos lemas que nos harán falta para determinar el número de soluciones no triviales del problema de contorno (9.21). Vamos a suponer que  $\lambda \in ]0, 9/64[$ .

**Lema 9.3.** *Sea  $\Psi(t, \Delta)$  la solución de*

$$\ddot{\Psi} + \frac{m}{t^2}\Psi = 0, \quad \Psi(\Delta, \Delta) = y_\lambda(\Delta, 1), \quad \dot{\Psi}(\Delta, \Delta) = \dot{y}_\lambda(\Delta, 1),$$

con  $m = \frac{16\lambda}{9}$ ,  $m \neq \frac{5}{36}$  la cual se escribe en la forma

$$\Psi(t, \Delta) = a(\Delta)t^{r_1} + b(\Delta)t^{r_2}, \quad \text{con } a(\Delta), b(\Delta) \in \mathbb{R}.$$

Si  $y_\lambda(t, 1) = c_1 t^{r_1} h_1(t) + c_2 t^{r_2} h_2(t)$  se cumple

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} a(\Delta) = c_1 h_1(0), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} b(\Delta) = c_2 h_2(0).$$

**Demostración.** Las condiciones iniciales determinan el sistema

$$\begin{cases} \Delta^{r_1} a(\Delta) + \Delta^{r_2} b(\Delta) = y_\lambda(\Delta, 1) \\ r_1 \Delta^{r_1-1} a(\Delta) + r_2 \Delta^{r_2-1} b(\Delta) = \dot{y}_\lambda(\Delta, 1) \end{cases}$$

Por la regla de Cramer se obtiene

$$a(\Delta) = \frac{1}{(r_2 - r_1)\Delta^{r_1+r_2-1}} \begin{vmatrix} y_\lambda(\Delta, 1) & \Delta^{r_2} \\ \dot{y}_\lambda(\Delta, 1) & r_2 \Delta^{r_2-1} \end{vmatrix}$$

$$b(\Delta) = \frac{1}{(r_2 - r_1)\Delta^{r_1+r_2-1}} \begin{vmatrix} \Delta^{r_1} & y_\lambda(\Delta, 1) \\ r_1 \Delta^{r_1-1} & \dot{y}_\lambda(\Delta, 1) \end{vmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$\dot{y}_\lambda(\Delta, 1) = c_1 r_1 \Delta^{r_1-1} h_1(\Delta) + c_1 \Delta^{r_1} \dot{h}_1(\Delta) + c_2 r_2 \Delta^{r_2-1} h_2(\Delta) + c_2 \Delta^{r_2} \dot{h}_2(\Delta),$$

se sigue que

$$a(\Delta) = c_1 h_1(\Delta) + o(1),$$

$$b(\Delta) = c_2 h_2(\Delta) + o(1),$$

si  $\Delta \searrow 0$ . La conclusión se sigue por la continuidad de  $h_i$ ,  $i = 1, 2$  en  $t = 0$ .  $\square$

**Lema 9.4.** *Existen  $\Delta > 0$ ,  $\tilde{\mu} > 0$ ,  $\epsilon > 0$  de manera que si  $x(t)$  es una solución de la ecuación de Euler*

$$\ddot{x} + \frac{w}{t^2}x = 0,$$

con  $m \neq 5/36$ ,  $|w - m| \leq \tilde{\mu}$ , que cumple

$$|x(\Delta) - y_\lambda(\Delta, 1)| \leq \epsilon, \quad |\dot{x}(\Delta) - \dot{y}_\lambda(\Delta, 1)| \leq \epsilon.$$

Entonces  $|\dot{x}(t)| \geq 2$  si  $t \in ]0, \Delta]$ .

**Demostración.** Por la Proposición 9.6 sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |\dot{y}_\lambda(t, 1)| = +\infty.$$

Escogemos  $\Delta > 0$  de manera que  $|\dot{y}_\lambda(t, 1)| \geq 4$  si  $t \in ]0, \Delta]$ . Por el Lema 9.3 y tomando un  $\Delta$  pequeño podemos suponer que  $|\dot{\Psi}(t, \Delta)| \geq 3$  si  $t \in ]0, \Delta]$ . Fijamos ahora nuestro  $\Delta > 0$ , sabemos que si

$$x(t) = d_1 t^{\rho_1} + d_2 t^{\rho_2},$$

entonces  $\rho_i \rightarrow r_i$ ,  $i = 1, 2$  si  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$  y además por el teorema de dependencia continua tenemos

$$d_1 \rightarrow a(\Delta), \quad d_2 \rightarrow b(\Delta),$$

si  $\mu \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ . De aquí se concluye que  $|\dot{x}(t)| \geq 2$  si  $t \in ]0, \Delta]$ .  $\square$

Estamos ahora en posición de presentar otro resultado principal de esta sección, el cual marca una importante diferencia respecto a la Proposición 6.4 en [26].

**Proposición 9.7.** *Considere el problema de contorno (9.21) con  $0 < \lambda \leq 1$  y  $M = 1$ . Entonces existe una sucesión creciente  $(E_{n,1})_{n \in \Lambda}$  con  $0 < E_{n,1} < 1$ ,  $E_{n,1} \nearrow 1$  y  $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$  ( $\Lambda$  puede ser vacío) tal que (9.21) tiene una solución no trivial si y solo si  $e = E_{n,1}$  para algún  $n \in \Lambda$ . Más aún  $\Lambda$  es finito si  $0 < \lambda < 9/64$ ,  $\lambda \neq 5/64$  y  $\Lambda = \mathbb{N}$  si  $\lambda > 9/64$ .*

**Demostración.** Denotamos por  $\Phi_\lambda(t, e)$  la solución del problema de valor inicial

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{r(t, e)^3} y = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad \dot{y}(\pi) = 0.$$

Pasando a coordenadas polares  $\Phi_\lambda + i\dot{\Phi}_\lambda = \rho e^{i\theta}$  la función argumento  $\theta_\lambda(t, e)$  satisface el problema de valor inicial

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda}{r(t, e)^3} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \theta(\pi) = 0. \quad (9.31)$$

Note que  $\dot{\theta}_\lambda(t, e) < 0$  para todo  $(t, e) \in [0, \pi] \times [0, 1[$  por lo tanto  $\theta_\lambda(t, e)$  es decreciente en  $t$  para todo  $e \in [0, 1[$ , en consecuencia

$$\theta_\lambda(0, e) = \sup_{t \in [0, \pi]} \theta_\lambda(t, e).$$

La condición  $\dot{\Phi}_\lambda(0, e) = 0$  en coordenadas polares equivale a  $\theta_\lambda(0, e) \in \pi\mathbb{Z}$ , por lo tanto se definen los números  $E_{n,1}$  como las soluciones de

$$\theta_\lambda(0, e) = n\pi \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema de dependencia continua respecto a parámetros para todo  $\Delta > 0$  y toda sucesión  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $0 \leq e_n < 1$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$  tenemos que  $y(t, e_n) \rightarrow y(t, 1)$  (respectivamente  $\dot{y}(t, e_n) \rightarrow \dot{y}(t, 1)$ ) uniformemente en  $[\Delta, \pi]$ . Por lo tanto, para cada  $0 < \lambda \leq 1$  se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_\lambda(t, e_n) = \theta_\lambda(t, 1),$$

uniformemente para todo  $t \in [\Delta, \pi]$ .

Fijemos un  $\lambda \in ]0, 9/64[$ ,  $\lambda \neq 5/64$ . Del Lema 9.2 y la posterior observación existe un  $\Delta > 0$  tal que  $y_\lambda(t, 1) \dot{y}_\lambda(t, 1) > 0$  para todo  $t \in ]0, \Delta]$ . De nuevo por el Teorema de dependencia continua respecto a parámetros, dado  $\epsilon > 0$  existe un  $e^*$  próximo a 1 tal que

$$|\Phi_\lambda(\Delta, e) - y_\lambda(\Delta, 1)| \leq \epsilon, \quad |\dot{\Phi}_\lambda(\Delta, e) - \dot{y}_\lambda(\Delta, 1)| \leq \epsilon,$$

y más aún  $\Phi(\Delta, e)\dot{\Phi}(\Delta, e) > 0$  para todo  $e \in [e^*, 1[$ . Se deduce entonces la existencia de un número  $\beta$  (independiente de  $e$ ) tal que

$$\beta\pi < \gamma < \theta_\lambda(\Delta, e) < \beta\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{para todo } e \in [e^*, 1[, \quad (9.32)$$

donde  $\gamma$  es un número independiente de  $e$  que cumple

$$\beta\pi < \gamma < \beta\pi + \frac{\pi}{2}.$$

De la Proposición 9.4, tomando  $0 < \Delta \leq \delta$  suficientemente pequeño, tenemos para  $(t, e) \in ]0, \Delta[ \times [e^*, 1[$  con  $e^*$  suficientemente cerca de 1 que

$$\frac{\lambda}{r(t, e)^3} \leq \frac{w}{t^2}, \quad \text{con } 0 < w < 1/4.$$

La constante  $w$  se puede tomar tan próxima como se desee a  $m = \frac{16\lambda}{9}$ . Sea  $x(t)$  la solución del problema de valor inicial

$$\ddot{x} + \frac{w}{t^2}x = 0, \quad x(\Delta) = \Phi_\lambda(\Delta, e), \quad \dot{x}(\Delta) = \dot{\Phi}_\lambda(\Delta, e). \quad (9.33)$$

En coordenadas polares  $x + ix = \tilde{\rho}e^{i\phi}$  la función argumento  $\phi(t)$  satisface el problema de valor inicial

$$\dot{\phi} = -\frac{w}{t^2} \cos^2 \phi - \sin^2 \phi, \quad \phi(\Delta) = \theta_\lambda(\Delta, e), \quad (9.34)$$

con  $\dot{\phi}(t) < 0$  para todo  $t \in ]0, \Delta]$ . Más aún, de la teoría de las desigualdades diferenciales tenemos que

$$\theta_\lambda(t, e) \leq \phi(t) \quad \text{para todo } (t, e) \in ]0, \Delta] \times [e^*, 1[.$$

Por el Lema 9.4 tenemos que  $|\dot{x}(t)| \geq 2$  si  $t \in ]0, \Delta]$ . Más aún,  $x(t)\dot{x}(t) > 0$  con  $t \in ]0, \Delta]$  dado que el único posible cero positivo de  $x(t)$  está después del único cero de  $\dot{x}(t)$ . Esto hace que la variación del argumento  $\phi(t)$  entre  $t = 0$  y  $t = \Delta$  sea menor que  $\pi/2$ . La conclusión del Lema 9.2 también es válida para la ecuación de Euler (9.33) y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \pi/2 + k\pi,$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ . En principio este  $k$  deberá depender de las condiciones iniciales  $x(\Delta)$ ,  $\dot{x}(\Delta)$  pero observamos que

$$\beta\pi < \gamma < \phi(\Delta) < \beta\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Como la variación de  $\phi$  en  $]0, \Delta[$  es menor que  $\pi/2$  deducimos que  $k = \beta$ , así que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \pi/2 + \beta\pi.$$

En consecuencia  $\beta\pi < \gamma < \theta_\lambda(0, e) < \pi/2 + \beta\pi$  para todo  $e \in [e^*, 1[$ . De esta forma tenemos que  $\theta(0, e) \notin \pi\mathbb{Z}$  para todo  $e \rightarrow 1^-$ . Por último, si consideramos  $\vartheta_* = \sup_{e \in [0, e^*]} \theta_\lambda(0, e)$  entonces la ecuación  $\theta_\lambda(0, e) = n\pi$ , con  $e \in [0, e^*]$  para  $n$  grande no tiene solución.

En resumen, hemos probado que para cada  $\lambda \in ]0, 9/64[$ ,  $\lambda \neq 5/64$ , la ecuación

$$\theta_\lambda(0, e) = n\pi, \quad \text{para } e \rightarrow 1^-,$$

tiene un número finito de soluciones para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora considere  $9/64 < \lambda \leq 1$ . Por el Corolario 9.1 la función  $y_\lambda(t, 1)$  tiene un número arbitrario de ceros acumulándose en  $t = 0$ . De manera que dado un  $p \geq 1$  podemos encontrar un  $\delta > 0$  (dependiente de  $p$ ) tal que  $y_\lambda(t, 1)$  tiene  $p$  ceros en  $[\delta, 2\delta]$  con  $y_\lambda(\delta, 1) \neq 0$ ,  $y_\lambda(2\delta, 1) \neq 0$ . Puesto que los ceros de  $y_\lambda(t, 1)$  son no degenerados, existe un  $e_*$  próximo a 1 tal que  $\Phi_\lambda(t, e)$  y  $y_\lambda(t, 1)$  tienen el mismo número de ceros en  $[\delta, 2\delta]$  para todo  $e \in [e_*, 1[$ . Por lo tanto,  $\theta_\lambda(t, e) \in \pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  para  $p$  valores distintos de  $t \in [\delta, 2\delta]$ . Como  $p$  es arbitrario, se deduce entonces que

$$\theta(0, e) = \sup_{t \in [0, \pi]} \theta(t, e) \rightarrow \infty,$$

cuando  $e \rightarrow 1^-$ . Esto comprueba que la ecuación  $\theta_\lambda(0, e) = n\pi$ , tiene solución para cada  $n \in \mathbb{N}$  con  $e \in [0, 1[$ .  $\square$

**Observación.** Cabe mencionar en este punto que es posible utilizar la ideas de la demostración de la Proposición 9.7 para probar la Proposición 9.5 sobre el número

de ceros de  $y_\lambda(t, e)$ . Más aún es importante mencionar que los resultados anteriores se extienden para  $t \in [0, 2\pi]$  (es decir  $M = 2$ ), en efecto, basta con considerar las ecuaciones

$$\theta_\lambda(0, e) = n\pi, \quad \theta_\lambda(2\pi, e) = -m\pi, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

en donde

$$\theta_\lambda(0, e) = \sup_{t \in [0, \pi]} \theta_\lambda(t, e) \quad \text{y} \quad \theta_\lambda(2\pi, e) = \inf_{t \in [\pi, 2\pi]} \theta_\lambda(t, e).$$

Veamos cómo se entiende la última definición. Para cada  $e \in [0, 1[$  fijo, note que la función

$$X_\lambda(t, e) = \Phi_\lambda(2\pi - t, e),$$

satisface la ecuación diferencial en (9.21) para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Más aún,

$$X_\lambda(\pi, e) = \Phi_\lambda(\pi, e) = 1, \quad \dot{X}_\lambda(\pi, e) = -\dot{\Phi}_\lambda(\pi, e) = 0.$$

Por unicidad se deduce que

$$X_\lambda(t, e) = \Phi_\lambda(t, e) \quad \forall t \in [0, \pi].$$

De manera que el estudio de  $\Phi_\lambda(t, e)$  para  $t$  cerca de  $2\pi$  es igual al estudio de  $\Phi_\lambda(t, e)$  para  $t$  cerca de cero. Por otro lado, la función argumento de  $X_\lambda(t, e)$  que denotamos por  $\hat{\theta}_\lambda(t, e)$  satisface que

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\lambda(t, e) &= \tan\left(\frac{\dot{X}_\lambda(t, e)}{X_\lambda(t, e)}\right), \quad t \in [0, \pi], \\ &= -\tan\left(\frac{\dot{\Phi}_\lambda(2\pi - t, e)}{\Phi_\lambda(2\pi - t, e)}\right), \quad t \in [0, \pi], \\ &= -\theta_\lambda(s, e), \quad s \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\theta_\lambda(2\pi, e) = \inf_{t \in [\pi, 2\pi]} \theta_\lambda(t, e) = -\sup_{t \in [0, \pi]} \hat{\theta}_\lambda(t, e).$$



Para finalizar este capítulo presentamos el siguiente teorema cuya demostración se deduce de los resultados presentados previamente.

**Teorema 9.3.** *Sea  $M = 1$  o  $M = 2$  fijos. Si el número de cuerpos primarios del problema generalizado de Sitnikov satisface  $N \in [2, 234]$  entonces existe un número infinito de soluciones no triviales, pares y  $2M\pi$  periódicas de (9.21) que emanan desde el centro de masas en ciertos valores de la excentricidad  $e = E_{n,M}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Más aún, el número de ceros de estas soluciones crece arbitrariamente cuando  $n \rightarrow \infty$ . De otro lado, si  $N \geq 235$  el número de soluciones que emanan desde el centro de masas es finito y el número de ceros de estas soluciones es acotado.*

**Observación.** En el teorema anterior, para el caso  $N \in [2, 234]$  (esto implica  $\lambda \in ]9/64, 1]$ ) la condición  $M = 1$  o  $M = 2$  puede ser omitida y considerar el caso general  $M \geq 1$ . Esto corresponde a los resultados obtenidos en [26, 36] en relación al clásico problema de Sitnikov. De otro lado, nótese que si  $N \geq 235$  entonces  $\lambda \in ]0, 9/64[$ . Esto muestra que no existe la posibilidad de tener  $\lambda = 9/64$ . Lo mismo ocurre para  $\lambda = 5/64$ . De manera que estas condiciones se convierten en restricciones simplemente teóricas para el problema de  $N + 1$  cuerpos que estamos considerando.

En el siguiente capítulo presentaremos algunas conclusiones de este trabajo y presentaremos algunas preguntas abiertas que quedan de este trabajo de tesis.

# Capítulo 10

## Conclusiones y problemas futuros

En este capítulo presentamos brevemente algunas conclusiones de este trabajo de tesis. Iniciamos por dos conclusiones fundamentales. Primero, en este trabajo de tesis se prueba de manera rigurosa los resultados numéricos que se encuentran [21] referente a las soluciones periódicas del problema clásico de Sitnikov (2.2). Específicamente nos referimos la figura 9 que presentamos a continuación.

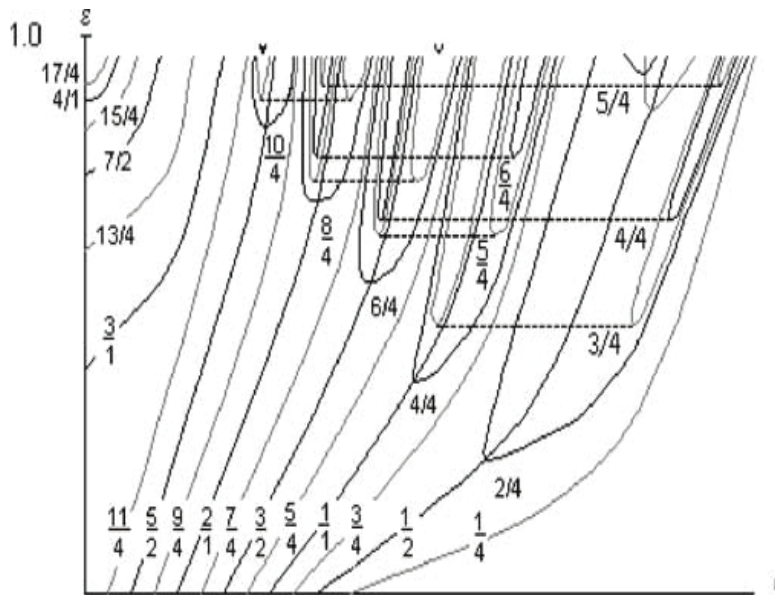


Figure 9. Qualitative bifurcations diagram for period 1, 2 and 4

SYMMETRIES AND BIFURCATIONS IN THE SITNIKOV PROBLEM  
Lidia Jiménez-Lara y Adolfo Escalona-Buendía.  
Celestial Mechanics Dynamical Astronomy 79 (2001) 97-117.

Como se puede apreciar en esta gráfica aparecen las ramas que emergen del caso circular y se continúan globalmente para cualquier valor de excentricidad  $e \in [0, E]$  con  $E < 1$ . De igual forma aparecen las ramas de soluciones no triviales que emergen desde el problema linealizado en específicos valores de la excentricidad. Las fracciones que aparecen en cada rama representan el número de oscilaciones del cuerpo de masa cero. Siguiendo las condiciones que se imponen en [21] y las familias globales que este trabajo se consideran, es fácil deducir que cada fracción es de la forma  $\frac{p}{M}$  donde  $p$  es el número de ceros que  $z(t, \xi, e)$  tiene en  $[0, M\pi]$ . El lector puede observar que todas las conclusiones presentadas por los Teoremas 8.1 y 8.3 se presentan en este diagrama. Nótese que este diagrama presenta un tipo más de bifurcación a estudiar, en efecto, aquellas bifurcaciones que parecen suceder desde el caso crítico ( $e = 1$ ) para la ecuación (2.2) en específicas condiciones iniciales. Este será uno de los temas a investigar en el futuro. Una segunda conclusión fundamental es que para el problema generalizado de Sitnikov, no todas las conclusiones sobre el problema de Sitnikov se pueden extender, lo que implica nuevos resultados frente al modelo clásico de Sitnikov. Más aún, incluso en el caso de considerar un número de cuerpos primarios  $N \in [2, 234]$  no todos los resultados del capítulo 8 sobre las ramas que emanan del problema linealizado son válidos. Basta por ejemplo con notar que la conclusión *i*) del Lema 8.1 no es cierta si  $N \in [3, 234]$ . Esto implica un distinto estimativo teórico del mínimo número de ceros que una solución de (9.21) puede tener. Ya esa simple diferencia genera un distinto escenario sobre el comportamiento cualitativo de las soluciones de (9.21) frente a las soluciones pares  $2M\pi$  periódicas de (9.15). Aquí encontramos entonces otro estudio pendiente que queda de este trabajo. Por otro lado, la extensión de los resultados principales sobre el problema generalizado de Sitnikov para valores del tiempo en  $[0, M\pi]$  con  $M \geq 1$  para todos los valores del parámetro  $\lambda \in ]0, 1]$  es quizás uno de los temas inmediatos a considerar.

De otro lado, un trabajo que considero interesante es el estudio de un problema tipo Sturm-Liouville de la forma

$$\ddot{y} + a(t, \mu)y = 0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(T) = 0,$$

en donde la función  $\mu \rightarrow a(t, \mu)$  sea no monótona. Hasta donde se sabe, este problema parece estar fuera del contexto clásico de los problemas de valores propios actuales. Más aún, en un trabajo reciente de C. Zanini (ver [50]) se estudian este tipo de problemas pero con dependencia monótona del parámetro. Es por eso que el estudio riguroso de este tipo de problema en el caso no monótono es de gran interés pues evidentemente un caso en donde puede ser aplicado es el problema linealizado en la solución de equilibrio del problema generalizado de Sitnikov.

Por último, nótese que para el problema clásico de Sitnikov el Teorema 8.3 afirma que la familia global  $C_{p,N}^*$  es cerrada (en relación con  $[0, \infty[ \times [0, 1[$ ) si  $p < p_0(N)$ . Ahora bien, en el caso  $N = 1$  existen dos familias  $C_{1,1}$  y  $C_{2,1}$  y por el Lema 8.1 sabemos que  $p_0(1) > 1$ . Esto prueba que la familia  $C_{1,1}$  está definida para todos los valores de la excentricidad  $e \in [0, 1[$ . El estimado numérico indica que  $p_0(1) = 3$  así que posiblemente la familia  $C_{2,1}$  también puede continuarse para todo los valores de la excentricidad  $e \in [0, 1[$ . Pero tan sólo sabemos teóricamente que  $p_0(1) \geq 2$ , por lo tanto la segunda posibilidad que afirma el Teorema 8.3 no puede descartarse por el momento. En vista de la anterior observación el siguiente problema en relación a la ecuación de Ince (8.1) permanece abierto.

*¿Es cierto que para cualquier solución no trivial de*

$$(1 - e \cos u)y'' - (e \sin u)y' + 8y = 0, \quad y'(0) = y'(N\pi) = 0$$

*el número de ceros es más grande que  $\nu_N$ ?*

Es claro que esta pregunta se debe extender al caso generalizado del problema de Sitnikov en donde la dificultad es aún mayor.

## Bibliografia

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions, with formulas tables and mathematical tables*. Dover, 1972.
- [2] V. M. ALEKSEEV. *Quasirandom dynamical systems I*, Math. USSR Sbornik, 5 (1968), 73-128.
- [3] V. M. ALEKSEEV. *Quasirandom dynamical systems I*, Math. USSR Sbornik, 6 (1968), 505-560.
- [4] V. M. ALEKSEEV. *Quasirandom dynamical systems III*, Math. USSR Sbornik, 7 (1969), 1-43.
- [5] E. BARRABÉS, J.M. CORS, C. PINYOL, J. SOLER. *Hip-Hop solutions of the  $2N$  body problem with eccentricity close to 1*, Physica D, 23 (2010), 214-219.
- [6] E. BELBRUNO, J. LLIBRE, M. OLLÉ. *On the families of the periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions*, Celestial Mech. Dynam. Astronm., 60 (1994), 99-129.
- [7] M. ALVAREZ, J. LLIBRE. *Restricted three-body problems and the non-regularization of the elliptic collision restricted isocetes three-body Problem*. Extracta Mathematicae, 13 (1998), 73-98.
- [8] H. CABRAL, Z. XIA. *Subharmonic solutions in the restricted three-body problem*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 1 (1995), 463-474.
- [9] J. CHAZY. *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*, J. Math. Pures Appl., 8 (1929), 353-380.
- [10] SHUI-NEE CHOW, J. HALE. *Methods of Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [11] M. CORBERA, J. LLIBRE. *Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincaré map*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 77 (2000), 273-303.
- [12] M. CORBERA, J. LLIBRE. *On symmetric periodic orbits of the elliptic Sitnikov problem via the analytic continuation method*, Celestial Mechanics, Contemp. Math. 292, AMS, Providence, RI, (2002), 91-127.

- [13] D. NUÑEZ, R. ORTEGA. *Parabolic fixed points and stability criteria for nonlinear Hill's equation*, Z. Angew. Math. Phys., 51 (2000), 890-911.
- [14] C. ESCUDERO, A. RIVERA, P. TORRES. *Chemical oscillations out chemical noise*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, 10 (2011), 960-986.
- [15] J. FURA, A. RATAJCZAK, S. RYBICKI. *Existence and continuation of periodic solutions of autonomous newtonian systems*, J. Diff. Eqs., 218 (2005), 216-252.
- [16] E. FREIRE, A. GASULL, A. GUILLAMON. *First derivative of the period function with applications*, J. Differential Eqs., 204 (2004), 139-162.
- [17] J. HAGEL. *A new analytical approach to the Sitnikov problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 53 (1992), 267-292.
- [18] J. K. HALE. *Ordinary differential equations*, Krieger Publishing Company, Inc., Florida (1980).
- [19] E.L. INCE. *Ordinary differential equations*, Dover 1956.
- [20] W. H. MORRIS, S. SMALE. *Differential equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York and London, 1974.
- [21] L. JIMÉNEZ-LARA, A. ESCALONA-BUENDÍA. *Symmetries and bifurcations in the Sitnikov Problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 79 (2001), 97-117.
- [22] F. KLEIN. *Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe*, Math. Ann., 37 (1890).
- [23] S. KRANTZ, H. PARKS. *A primer of real analytic functions*, 1<sup>st</sup> edition, Birkhauser, 2002.
- [24] N.N LEBEDEV. *Special functions and their applications*. Dover, 1972.
- [25] J. LIU, Y.S. SUN. *On the Sitnikov Problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 49 (1990), 285-302.
- [26] J. LLIBRE, R. ORTEGA. *On the families of periodic orbits of the Sitnikov problem*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, 7 (2008), 561-576.
- [27] J. LLIBRE, C. SIMÓ. *Estudio cualitativo del problema de Sitnikov*, Publicacions Matemàtiques U.A.B., 18 (1980), 49-71.

- [28] J. LERAY, J. SCHAUDER. *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), 51 (1934), 45-78.
- [29] W. MAGNUS, S. WINKLER. *Hill's Equation*, Dover, 1979.
- [30] J. MARTINEZ-ALFARO, C. CHIRALT. *Invariant rotational curves in Sitnikov's problem*, Cel. Mech. and Dyn. Syst., 55 (1993), 351-367.
- [31] S. MATHLOUTHI. *Periodic orbits of the restricted three-body problem*, Trans. Amer. Math. Soc., 350 (1998).
- [32] R. MENNICKEN. *On Ince's Equation* Arch. Rat. Mech. and Anal., 29 (1968), 144-160.
- [33] J. MOSER, E. ZEHNDER. *Notes on Dynamical Systems*, Am. Math. Soc., 2005
- [34] R. ORTEGA. *The twist coefficient of periodic solutions of the time-dependent Newton's equation*, J. Dynam. Differential Equations, 4 (1992), 651-665.
- [35] R. ORTEGA. *The stability of the equilibrium of a nonlinear Hill's equation*, SIAM J. Math. Anal., 25 (1994), 1393-1401.
- [36] R. ORTEGA, A. RIVERA. *Global bifurcations from the center of mass in the Sitnikov problem*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B, 14 (2010), 719-732.
- [37] R. ORTEGA, A. UREÑA. *Introducción a la Mecánica Celeste*, editorial Universidad de Granada, 2010.
- [38] E. PERDIOS, V.V. MARKELLOS, *Stability and bifurcations of Sitnikov motions*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 42 (1988) 187-200.
- [39] H. POLLARD. *Mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice Hall, 1966.
- [40] V.A. PLISS. *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*, Academic Press, 1966.
- [41] L.D. PUSTYL'NIKOV. *On the measure of one-way oscillating motions for the Kolmogorov and its generalization in the n-body problem*, Russian Math. Surveys, 53 (1998) 1102-1103.
- [42] P. RABINOWITZ. *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal., 7 (1971), 487-513.

- [43] H. RUNCKEL. *On the zeros of the hypergeometric function*. Math. Ann., 191 (1971), 53-58.
- [44] C.L. SIEGEL. J.K. MOSER. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- [45] K. A. SITNIKOV. *Existence of oscillating motion for the three-body problem*, Dokl. Akad. Nauk, 133 (1960) 303-306.
- [46] I. STARGOLD. *Branching of solutions of nonlinear equations*, SIAM Review, 13 (1971) 289-332.
- [47] F. VERHUSLT. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitex, 1985.
- [48] E. B. VAN VLECK. *A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series*, Trans. Amer. Math. Soc., 3 (1902), 110-131.
- [49] D. WHITLEY. *Discrete Dynamical Systems in Dimensions One and Two*, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 177-217.
- [50] C. ZANINI. *Rotation numbers, eigenvalues and Poincaré-Birkhoff theorem*, J. Math. Anal. App., 279 (2003), 290-307.