artículos

Estudio metodológico del n.º fraccionario en el 6.º nivel de E.G.B.

Grupo de E.G.B. de la A.P.M.A.

I INTRODUCCION

"¡Caminante! aquí fueron
sepultados los restos de Diofanto.
Y los números pueden mostrar,
¡oh, milagro!
cuán larga fue su vida,
cuya sexta parte constituyó
su infancia.
Había transcurrido, además,
una duodécima parte de su vida,
cuando de vello cubriose su
barbilla.
La séptima parte de su existencia
transcurrió en un matrimonio
estéril.
Pasó un quinquenio más y le
hizo dichoso el nacimiento de
su precioso primogénito, que
entregó su cuerpo, su hermosa
existencia, a la tierra, que
duró tan solo la mitad de la
de su padre.
Y con profunda pena, descendió
a la sepultura habiendo sobre-
vivido cuatro años a la muerte
de su hijo".

(Epitafio en la tumba de Diofanto)

Pa sabel sus saberis le ije
"Sácame la cuenta
del aceiti que hogaño nos toca
del lagal por la parti que es nuestra
Se maquilan sesenta cuartillus
po ca parti entera,
y nosotros tenemos, ya sabís,
una media tercia,
que tu madre heredó de una quinta
que tenía tu agüela Teresa"
¡ya ves tu que se jaci en un verbu!
Sesenta la entera
Doci pa la quinta
Cuatru pa la tercia
Quita dos pa una media, y resultan
Dos pa la otra media
Pus el mozo empreingó tres papelis
de rayas y letras,
y pa enselrealsi
de aquella maeja,
Iju que el aceiti que a mi me tocaba
era "pi menus erre", ¿te enteras?
¡Pus pues il jaciendu
las sopas con ellas!
¿Y esus son saberis?
¡Esas son fachendas!

Gabriel y Galán
"Varón"

Señalar la importancia del conjunto de los Números Racionales y de su estructura es un trabajo superfluo para cualquier licenciado de Matemáticas o bien Profesor de E.G.B. La construcción del cuerpo ordenado de los Números Racionales y la demostración de sus propiedades más significativas es un trabajo relativamente sencillo y elegante y que se puede llevar a efecto en un programa de primer curso de licenciatura en Ciencias o Diplomatura.

La finalidad de este trabajo no es el estudio de los contenidos relativos al concepto de Número Racional, sino su didáctica. Por ello consideramos prioritario dar respuesta a dos cuestiones básicas: por qué deben estudiarse los Números Racionales y cómo debe hacerse este estudio.

No vamos a discutir aquí el qué hay que estudiar, ya que damos por supuesto el dominio de este contenido en todo Profesor de Matemáticas sea cual sea su nivel.

Al preguntarnos el por qué del aprendizaje de este concepto no basta con responder empleando argumentos exclusivamente matemáticos; hay muchos otros conocimientos matemáticos básicos, importantes en el desarrollo de las teorías y que también conjugan la simplicidad y elegancia de las demostraciones con la profundidad y riqueza de los conceptos implicados. Si un conocimiento matemático está incluído en los cuestionarios de la E.G.B. es porque, además de las consideraciones anteriores, se trata de conocimientos útiles, socialmente aplicables y que forman parte de un nivel cultural básico que nos parece imprescindible en la sociedad actual.

Para dar respuesta a esta cuestión pretendemos resaltar el uso social y la necesidad del dominio de los conceptos relativos al Número Racional, y en concreto nos vamos a centrar en la idea de fracción que, históricamente, ha sido su idea fundamental. En la primera parte de este trabajo recorremos la evolución y uso que históricamente ha experimentado la fracción. En una segunda parte recopilamos los usos actuales de las fracciones.

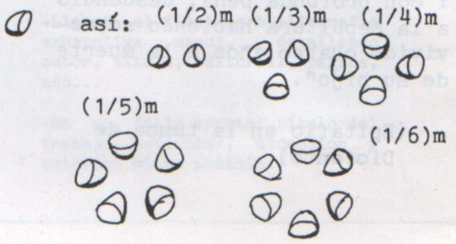
Al plantearnos la cuestión de cómo realizar este aprendizaje son varios los factores que queremos tener en cuenta y contribuír así a desterrar algunas malas costumbres metodológicas al respecto. En primer lugar hemos de recordar que el alumno del sexto Nivel de E.G.B. se encuentra en el período que Piaget denomina de las operaciones concretas, en el cual es capaz de razonamiento operatorio pero sin abandonar nunca los límites de lo concreto. En esta edad el abandono de las fases de manipulación y representación supone que los conceptos no sean interiorizados, que se memoricen y olviden con la misma facilidad.

Todo Profesor que haya explicado estos conceptos sabe que no resultan difíciles de entender y emplear de modo inmediato, pero que con la misma rapidez se borran de la memoria. Por ello planteamos en este estudio cuál es, a nuestro juicio, la metodología que debe seguirse para el inicio al trabajo con fracciones y sus operaciones. Dejamos fuera de este artículo el planteamiento metodológico de un estudio más sistemático del Número Racional en el Octavo Nivel, que entendemos debe guiarse por otros criterios.

II ANTECEDENTES HISTORICOS

Los avances de los trabajos arqueológicos han proporcionado una amplia información sobre los conocimientos matemáticos de culturas muy antiguas. Desde los primeros documentos conocidos aparecen notaciones para simbolizar conceptos fraccionarios.

Así, en un texto protosumerio de Uruk (3000 a.c., aprox.) se simbolizan las cinco primeras fracciones de una unidad de capacidad m simbolizada por



En el sistema sexagesimal empleado por los matemáticos sumerios y de Babilonia se hizo uso también de las fracciones. La base 60 era empleada en la construcción de tablas para pesos y medidas, así como para indicar la porción de disco lunar iluminado desde la fase de Luna Nueva hasta la fase de Luna Llena. La división del día en 24 horas, de la hora en 60 minutos y del minuto en 60 segundos es atribuída a los babilonios, cuyos trabajos eran una combinación de geometría y astronomía. Así armonizaron la notación numérica de base 60 con las medidas angulares y temporales, algunos de cuyos usos se mantienen aún hoy día.

La gran riqueza de divisores de 60 permite expresar sus fracciones más importantes con datos enteros, de aquí que 30 y 20 sean las fracciones de 1/2 y 1/3 de 60. Todos estos datos se han localizado en restos arqueológicos de una antigüedad superior a los 2000 años a.c.

El papiro Rhind, uno de los textos más antiguos de matemáticas conocidos (1700 años a.c.) es un manual que estudia problemas de aritmética y geometría; también en él aparecen temas relacionados con las fracciones. A diferencia de los babilonios que usaban un denominador fijo (60), los egipcios usaban el numerador fijo, 1, y trabajaban con denominadores variables, es decir, no empleaban fracciones tal y como las conocemos, sino sólo nuestras unidades fraccionarias; así 2/5 lo escribían 1/3 y 1/15, y sólo la fraccion 2/3=1/2 y 1/6 tenía notación específica. El papiro proporciona información de cómo descomponer algunas fracciones mediante suma de unidades fraccionarias y resuelve algunos casos tipo como el cálculo de cualquier fracción de la forma 2/2n+1, $1 \leq n \leq 49$, sin justificar o explicar el procedimiento de obtención.

El trabajo con fracciones es empleado para resolver problemas de reparto cuando la cantidad a repartir es menor que el número de partes y que suele resolverse por el método de falsa posición.

Es curioso ver cómo los matemáticos egipcios trabajaban con fracciones y qué tipos de problemas resolvían. Queda en su haber el primer intento de obtener un sistema de numeración para las fracciones mediante el empleo de sólo las unidades fraccionarias, empeño en el que, como luego los griegos, fracasaron; desde entonces la búsqueda de una expresión adecuada para las fracciones tuvo que prescindir de la pretensión de un número reducido de signos -unidades fraccionarias- mediante los cuales escribir cualquier fracción.

Múltiples son las referencias y estudios que sobre las fracciones conocemos de la cultura griega. De su primera época destacamos la tradición que atribuye a Pitágoras el descubrimiento de las proporciones que se dan entre los sonidos armónicos: "Pasando en una ocasión ante una herrería le impresionó la cadencia producida por los martillazos que daban cuatro esclavos sobre el yunque para trabajar (tres martillos golpeaban al mismo ritmo y el cuarto no) un trozo de hierro. Comprobó que las notas no eran proporcionales a la fuerza de los hombres intercambiando los martillos, por lo que dedujo que aquéllo sólo dependía del peso de los mismos. Al atar los martillos de cuerdas de igual longitud y al pulsarlas emitieron sonidos idénticos a los producidos en el yunque, coincidiendo los tres consonantes con los de la lira de Orfeo; como los pesos eran proporcionales a 6,8 y 12, estableció la proporción 12-8/8-6 = 12/6; agregó después un trozo de arcilla al cuarto martillo hasta que su peso fue 9 y dedujo la proporcion 12:9 = 8:6 que se llamó musical porque contiene las relaciones musicales de los acordes armónicos. Hizo después otra experiencia operando con pesos iguales para tensar cuerdas de distinta longitud y observó que las que daban una nota, su cuarta, su quinta y su octava tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6, igual resultado que antes; y puesto que las razones entre estos números son iguales a las que hay entre 1, 3/4, 2/3, y 1/2, que son las más sencillas que se pueden formar con 1, 2, 3 y 4, dedujo que la tetracys era la fuente de la eterna naturaleza".

El estudio de las fracciones para expresar razones, no sólo en el campo de la música sino también en la escultura, arquitectura, literatura, etc., etc., que reflejaran situaciones armónicas y equilibradas, es una constante del uso de las Matemáticas -y de las fracciones- por parte de los griegos durante el amplio período histórico que va desde el 500 a.c. hasta el 300 d.c.

De época más tardía es Euclides -fines del siglo IV a.c.- en cuyo texto fundamental "Elementos de Geometría" y en sus Libros VII y VIII da una definición de fracción y hace un estudio extenso de las propiedades más importantes de las fracciones estudiadas como razones.

"Un número es fracción de otro cuando no lo mide" (cuando su división no es exacta, diríamos nosotros). También es interesante el Libro V en donde se estudian las razones entre las magnitudes: "Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad".

En los 200 años transcurridos entre Pitágoras y Euclides la Matemática griega ha puesto las bases axiomáticas para su desarrollo sistemático que continuará avanzando aún otros 500 años por lo menos, y desde el principio el concepto de fracción como proporción geométrica y como relación entre números no divisibles aparece y adquiere vigor. La fracción -aunque ligada al soporte intuitivo de la figura geométrica- es un concepto autónomo y como tal se trata, y permite avanzar en el estudio de las propiedades geométricas y en bastantes aritméticas. Se continúa el intento, ya iniciado por los egipcios, de reducir el trabajo con fracciones a las unidades fraccionarias, sin llegar a dar ningún paso decisivo al respecto.

Los romanos también utilizaron el concepto de fracción volviendo a la idea empleada por los babilonios: fracciones de denominador constante, variando el numerador; el denominador empleado en este caso fue el 12, número de especial significación en la cultura romana; el concepto empleado no supuso ninguna mejora respecto de los logros ya conseguidos, e incluso significó un cierto retroceso, que coordina con el desinterés de los romanos por la Matemática.

Entre las aportaciones de los matemáticos arabes a la cultura matemática occidental de la Baja Edad Media está la introducción del Sistema de Numeración Indoarábigo, el que básicamente dio origen al actual y en particular el empleo de estos números para expresar fracciones con una notación similar a la actual: numerador encima del denominador pero sin raya de fracción; esta notación fue tomada de los hindúes de los cuales existen datos del siglo VI sobre su empleo (Brahamagupta). La cultura árabe continúa la tradición griega de descomposición de unidades fraccionarias.

En 1202 Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica el "Liber Abaci", que durante muchos años constituyó referencia obligada para todos los que trabajaron en Aritmética y Algebra. En este libro aparecían los métodos más perfeccionados del cálculo con enteros y fracciones que se conocían en el momento. El uso de fracciones se emplea y perfecciona en la resolución de problemas y su notación continúa siendo la ya conocida de los árabes pero escribiendo el numerador en caracteres más gruesos y el denominador a continuación en más pequeño.

Leonardo de Pisa explicó cómo resolver una fracción mediante la suma de unidades fraccionarias y fue uno de los primeros que separó el numerador del denominador mediante la linea fraccionaria. A partir de esta época se perfeccionaron los mecanismos del cálculo con fracciones, adaptándose a la nueva notación ya conseguida y ampliando el campo de las fracciones al caso de las fracciones decimales. La fracción se incorpora cada vez más al dominio del Algebra y su estudio, sobre todo a partir de Vieta, se va desligando de sus componentes intuitivas y representativas; el camino que conduce al concepto de Número Racional tiene aquí su comienzo.

La Geometría de Descartes (1623) al hablar del uso de letras en Geometría dice: "para sumar las líneas BD y GH (segmentos) llamo a la una a y a la otra b,... y escribiré a/b para indicar la división de a entre b".

Menos fortuna tuvo la notación propuesta por Leibniz para simbolizar fracciones a:b, que suele emplarse en algunos casos para representar proporciones. La fracción expresa en estos casos una operación en abstracto entre los elementos de un conjunto, cuyo significado algebraico es el principal y su representación geométrica la secundaria. Todavía faltan casi dos siglos para la obra de Gauss "Disquisitiones Aritmeticae" (1801) en donde se fundamenta la teoría moderna de números. El cuerpo de los Números Racionales, que simetriza el dominio de integridad de los Números Enteros, correspondiente a la actual teoría estructural y que sirve de modelo para generalizar el proceso de simetrización, ya no conserva de la primitiva idea de fracción mas que su base intuitiva y el tipo de problemas que pueden resolverse mediante estos conceptos.

III EMPLEO SOCIAL DE LAS FRACCIONES

A lo largo del apartado anterior hemos ido viendo la aparición histórica de los distintos usos y situaciones relativas al concepto de fracción.

Una de las primeras fue la necesidad de tener unidades inferiores a la unidad-patrón dentro de cualquier sistema de medidas de peso, capacidad o longitud, principalmente. En estos casos hemos visto cómo la acción con los objetos reales llevó -desde muy pronto- a una forma de representación gráfica de las fracciones muy similar a la que hoy día empleamos con nuestros escolares. Con posterioridad las fracciones relacionadas con situaciones temporales: fases de la luna, período anual, estacional, diario, etc., llevan, desde los babilonios, a distinguir fracciones de tiempo cuyo empleo se mantiene actualmente. La división de la circunferencia en 360 partes iguales es uno de los casos de fracción que más juego han dado a lo largo de la historia. A partir de los egipcios encontramos el estudio sistemático de las fracciones de cantidades que vienen expresadas por su medida, es decir, por un dato numérico. Los problemas de reparto constituyen desde entonces un campo propio del trabajo con fracciones.

El estudio sistemático de la razón como una forma de fracción, y las posibilidades geométricas del trabajo con fracciones constituyen la aportación de la cultura griega a nuestros conceptos; su aplicación a todas las formas de expresión artística se han conservado hasta nuestros días, y su conocimiento, aunque en algunos casos se encuentren en desuso, tiene importancia cultural. Una vez conseguida la notación adecuada vemos que la fracción pasa a exponer simplemente el cociente indicado de dos números, lo cual representa un grado mayor de abstracción al separarnos del soporte intuitivo.

Con posterioridad la fracción -la clase de fracciones equivalentes- da lugar al nuevo concepto de Número Racional.

El trabajo en el 6º Nivel de E.G.B. creemos debe centrarse en el trabajo con los distintos empleos de la fracción, como fracción siempre de algo; quizás el último paso sea expresar fracciones como cociente indicado. Cualquier iniciación al Número Racional debe quedar -previa discusión- para niveles posteriores. En definitiva son cuatro los empleos básicos del concepto de fracción que se utilizan en la actualidad:

i) Fracción de las unidades fundamentales del Sistema Métrico.
ii) Fracciones de unidades o períodos temporales.
iii) Fracciones en situaciones de contrato, convenio o reparto.
iv) Fracciones en situaciones culturales o históricas, la mayor parte de ellas en desuso o habiendo perdido el significado de fracción.

Sin pretender ser exhaustivos, y agradeciendo de antemano cualquier ampliación, presentamos los casos más importantes de fracciones según cada uno de los apartados anteriores:

Apartado i)
- Peso: 1/2, 1/4, 3/4, 1 y 1/2,... de kilogramo; pureza o ley de un metal.
- Capacidad: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 3/4,...de litro; capacidad de un local.
- Longitud: 1/2, 1/4, 1/3, 1/5, 3/4,... de metro; escalas; proporción entre las partes del cuerpo, de un monumento, estatua, o dato arquitectónico.
- Superficies: fracción de figura: semicircunferencia, semicírculo, etc.
- Diámetro de tuberías: 1/2, 1/4, 3/4, 3/8 de pulgada.

Apartado ii)
- Tiempo: 1/4, 1/2, 3/4, 1 y 3/4,... de hora. 1/10, 2/10,...1/100, 2/100,... de segundo.
- Relaciones temporales:
  - 1/7 relación día/semana.
  - 1/12 relación mes/año.
  - 1/4 relación estación/año.
  - 1/24 relación hora/día.
  - 1/60 relaciones minuto/hora y segundo/minuto.
  - 1/360 relaciones día/año y segundo/hora.
- Fases de la Luna: Cuarto menguante y cuarto creciente.
- Tiempo de obturación: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/30, 1/60, 1/125,...
- Proyecciones: Fotogramas por minuto.

Apartado iii)
- Partición en negocio o actividad agrícola: ir a medias, al quinto,...
- Repartos de herencia: un tercio, de mejora, etc.
- Tanto por ciento.
- Verbos que suponen acciones relativas a fracciones: mediar, terciar,...
- Competiciones: 1/4, 1/8 de competición.

Apartado iv)
- Denominación de composiciones poéticas: terceto, cuarteto, quinteto,...
- Actividades religiosas: Octava, novena.
- En música: Proporción entre notas (una octava), compases y relación entre figuras.
- Situaciones sociales: un quinto (ref. servicio militar), tercio de la legión, infantería, séptimo de caballería, media suela, diezmo o décimo.
- División del papel: Cuartilla (1/4) y octavilla (1/8) de pliego.
- Instrumentos de navegación: cuadrante, quintante, sextante, octante.
- Giro de objetos; objetos que se abaten, giro de una noria, giro de una persona.
- Objetos que aparecen divididos: rompecabezas,etc.

Todos estos casos nos aportan una información metodológicamente útil para motivaciones, ejemplos, actividades, ejercicios y problemas a la cual conviene sacarle el máximo partido, principalmente porque son los casos que en un futuro nuestro alumno va a encontrar sobre fracciones.

Sólo queremos recordar un hecho que ya hemos destacado y referenciado en un trabajo anterior (*). "Wilson y Wise, por ejemplo, encontraron que apenas en un 10.6% de todos los problemas que se pueden presentar en la vida común de la familia, el trabajo, la empresa y el comercio, las diversiones, etc., intervenían las fracciones, pero más del 95% de ellas se resumen en ocho: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 1/8 y 1/10". A la vista del listado anterior podemos concluír que ese 10% aproximado de uso de fracciones es socialmente valioso y significativo; merece la pena emplar parte del tiempo dedicados a la formación y educación general en estos conocimientos. Por otra parte el hecho de que sean muy pocas las fracciones de uso social real nos debe hacer muy cuidadosos con el empleo de las mismas, procurando restringir al máximo los ejemplos y ejercicios en los que las fracciones a emplear tengan denominador superior a 12.

(*) L. Rico y O. Sáenz. Equipo GRANADA-MATS. Actas II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Sevilla 1982. Tomo II, pp. 609-638.

IV LAS FRACCIONES EN EL TERCER CICLO DE LA E.G.B.

La consecuencia de todo el planteamiento anterior creemos ha quedado suficientemente fundamentada: el trabajo con fracciones es un objetivo cultural importante y por ello debe de cubrirse, al menos en sus aspectos fundamentales, dentro de la E.G.B.

En el actual documento sobre la reforma del Tercer Ciclo la propuesta de la Administración al respecto se concentra en el objetivo Terminal número 3: "Aplicar correctamente los números fraccionarios y los automatismos operatorios (suma, resta, multiplicación y división), adquiridos de forma razonada, a la resolución de situaciones problemáticas; por ejemplo: parte de un todo, aproximación de una medida, cociente indicado de dos números, probabilidad..., y en otros que pudieran presentarse". En el número 2 de esta Revista hicimos nuestra crítica a este objetivo y la explicitamos en los siguientes puntos:

- El objetivo debe desdoblarse y uno de ellos debe hacer referencia expresa a la justificación y adquisición de los automatismos; no nos parece adecuado que los automatismos con fracciones se adquieran en el Ciclo Medio.
- La ordenación de fracciones parece olvidada y hay que incluirla.
- Debe explicitarse que, como máximo, se operará con tres fracciones para evitar los famosos castillos y otras expresiones complicadas.
- El término "aplicar" se sustituye por "plantear y resolver" que especifican con más claridad las acciones a realizar.
- Excluimos "correctamente" ya que este término no implica conducta objetiva, pero sí metodología.
- Excluimos "de forma razonada" porque, aunque es fundamental, tampoco es conducta.

Por todo ello propusimos los siguientes objetivos terminales para el Tercer Ciclo de E.G.B.

Objetivo 3:

"Ordenar fracciones y automatizar con ellas las operaciones: suma, resta, multiplicación y división, empleando como máximo tres fracciones".

Objetivo 4:

"Plantear y resolver situaciones de la vida real con números fraccionarios y las operaciones: suma, resta y multiplicación, en los siguientes casos: parte de un todo, aproximación de una medida y cociente indicado de dos números".

Una vez delimitado el contenido a desarrollar: Números Fraccionarios, sus operaciones y la aplicación a problemas, vamos a reflexionar sobre el cómo realizar su aprendizaje.

"Frente a una demostración matemática, el problema lógico consiste en investigar en qué condiciones cabe tenerla por válida, mientras que el problema psicológico no reside en otra cosa que en determinar por medio de qué mecanismos mentales se va desarrollando realmente en el espíritu del que la estudia".

En esta breve consideración, tomada de Piaget, creemos que se resume perfectamente nuestro punto de vista: se trata de transmitir a los alumnos de una determinada edad un conocimiento que entendemos socialmente útil, y nuestra reflexión va ahora encaminada a estudiar cómo debe hacerse dicha transmisión, atendiendo a la edad psicológica del escolar.

Nuestro alumno del 6º Nivel se encuentra plenamente en la etapa de las operaciones concretas, es decir, es capaz de razonamiento pero siempre apoyado en los objetos o en sus representaciones, que permiten realizar con los mismos las operaciones necesarias de las que surge el pensamiento.

En esta fase, especialmente, el razonamiento se apoya en la acción. En este sentido, el aprendizaje de los números fraccionarios parece especialmente adecuado. Piaget nos dice que "el número fraccionario presenta el problema de las relaciones entre la acción operatoria y la representación perceptiva y, en consecuencia, entre dos clases de abstracciones, a partir de la acción o a partir del objeto mismo. El número fraccionario vio favorecida su formación por consideraciones perceptuales fundadas en el fraccionamiento de los objetos continuos y discontinuos. La importancia del reparto fue decisiva para su descubrimiento y la preponderancia atribuída a menudo a la partición de objetos continuos ha conducido a atribuír al número fraccionario un origen espacial más que puramente aritmético y más perceptual que operatorio (...) Pero no hay que deducir de ahí que los números fraccionarios se abstraen de los objetos físicos **-puesto que consisten en acciones y operaciones realizadas sobre estos objetos y, por lo tanto, se los extrae del mecanismo de la acción-** ni tampoco que la experiencia física es semejante a la operación matemática". El concepto de número fraccionario no se refiere a las cualidades particulares que distinguen a los objetos como tales (velocidad, tiempo, fuerza,...) sino que se refiere a la coordinación operatoria de las acciones realizadas con y sobre los objetos.

En la "Introducción a la epistemología genética", obra de Piaget que venimos citando, nuestro autor continúa la discusión sobre la conexión entre el origen espacial y el aritmético del concepto de fracción y llega a la conclusión de que "los números fraccionarios verifican en realidad el paralelismo y la independencia entre las operaciones aritméticas y geométricas, paralelismo que surge casi desde el comienzo de la aparición de este concepto. El equilibrio que se alcanza por estos dos sistemas operatorios, independientemente de las circunstancias que dieron lugar a los descubrimientos o que motivaron la toma de conciencia, muestra desde el punto de vista genético hasta qué punto **la coordinación operacional se libera de los objetos** a los que se refiere en el punto de partida, porque es la resultante de las acciones del sujeto en oposición a los datos perceptuales o a las intuiciones imaginadas".

Dentro de esta reflexión, el nivel al que nos referimos tiene una importancia destacada. Mientras que en el Ciclo Medio el aprendizaje de las fracciones no debe rebasar la acción con objetos reales y su representación, sin llegar a la numerización de las acciones realizadas, ni por supuesto, a la aritmetización que surge de las mismas; y por otra parte en el Octavo Nivel se debe proceder a un tratamiento aritmético sistemático de los números fraccionarios, el trabajo en este Sexto Nivel debe establecer todas las operaciones con números fraccionarios obtenidas a partir de las acciones con los objetos reales: la sistematización de todas las posibles acciones que luego se coordinan en el concepto de número fraccionario es uno de los objetivos primordiales de este Curso. No se trata de lograr una mecanización absoluta de la equivalencia, suma, orden y producto de fracciones, sino de desarrollar todas las posibilidades mediante las que estos conceptos se hacen significativos, y ésto sólo se consigue a esta edad mediante la actuación sobre los objetos, progresivamente simbólicos y representativos.

Este marco conceptual justifica la Metodología que desarrollaremos a continuación, y en todos los casos hemos querido recorrer los seis pasos que señala Mialaret para ir desde la acción a la expresión simbólica:

1. Acción real con recuperación
2. Acción acompañada de lenguaje
3. Conducta del relato
4. Acción con objetos simples
5. Traducción gráfica
6. Traducción simbólica

Sabemos que no son éstas las fases reales que se recorren con nuestros alumnos en su proceso de aprendizaje de las fracciones, pero cuanto más nos apartemos de las mismas, cuanto más énfasis pongamos en la pura mecanización, menos significativo será el aprendizaje y con mayor rapidez se olvidará. Los conocidos porcentajes sobre el fracaso del cálculo con fracciones expresan por sí solos las deficiencias de los usos didácticos al respecto. Hoy parece aceptarse que el inicio al aprendizaje de los Números Naturales sí debe hacerse según estas consideraciones; es necesario que los números fraccionarios, que suponen un nuevo concepto de número desconocido para el alumno, se incorporen a una metodología sensata, hay muchas razones para ello.

V DIDACTICA DEL CONCEPTO DE FRACCION

1. Consideraciones didácticas generales.

No es fácil determinar una situación didáctica unívoca que nos conduzca al éxito en la enseñanza de la Matemática. La realidad abre ante nosotros un abanico bastante amplio de situaciones con posibilidades didácticas que pueden, y deben, ser aprovechadas, integrándolas en nuestra actividad. De ahí que a lo largo de la historia de la Matemática hayan surgido diversos métodos para su enseñanza, desde los "verbales" hasta llegar a los más "activos".

No tratamos de formar a futuros matemáticos, sino poner al alcance de nuestros alumnos unos conocimientos y destrezas básicos que posteriormente pueden ser sistematizados y generalizados a otras situaciones. Por tanto, a pesar de la importancia concedida en los Cuestionarios de E.G.B. a la construcción formalizada de los conjuntos numéricos, hemos de destacar los procedimientos que se han venido utilizando habitualmente para el estudio de los Números Racionales, al no adecuarse al desarrollo evolutivo de los alumnos de este Nivel.

No debemos olvidar que no es posible que el alumno asimile un concepto si antes no ha "interiorizado" cada uno de sus elementos. Por ello queremos destacar la importancia de utilizar el objeto real como punto de partida, para llegar a un grado superior de abstracción y, lo mismo que ya se hizo en los Niveles inferiores, introducir experimentalmente cada uno de los conceptos, aprovechando que el niño manipula constantemente objetos y que ésto le lleva a resolver problemas concretos.

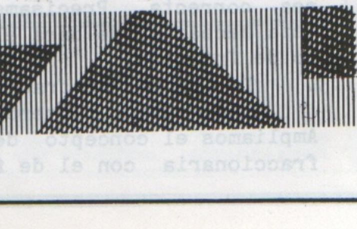
Por lo que todo el proceso se debe desarrollar en dos fases:

A) Intuitiva, manipulativa con soporte real.

B) Aritmetización y predominio del cálculo sin perder la referencia a lo real.

Además hemos de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las unidades fraccionarias y fracciones utilizadas para el desarrollo de este contenido deberán ser las más usuales. Por tanto no es aconsejable utilizar denominadores distintos de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 o 12.
- En los apartados anteriores al de la simbolización, las fracciones deben expresarse como **sustantivos** (la mitad de la tiza, un cuarto de folio, ...).
- El alumno debe realizar las acciones concretas y expresarlas mediante el lenguaje (v.g.: "divido la cuartilla en dos partes iguales. Cada parte es un medio de cuartilla"). Cada expresión toma su sentido real cuando está asociada a una situación real. Posteriormente deberá ser capaz de contar la acción que ha realizado, sin efectuarla, y simbolizarla con el lenguaje matemático.
- Igualmente deberá realizar este proceso en sentido inverso.



2. Consideraciones específicas.

Para el desarrollo de este tema en el Sexto Nivel establecemos cuatro núcleos básicos o contenidos:

2.1. Concepto de fracción. Simbolización.
2.2. Equivalencia de fracciones.
2.3. Suma y diferencia de fracciones.
2.4. Producto y división de fracciones.

3. Metodología y programa.

3.1. Concepto de fracción. Simbolización.

De acuerdo con lo establecido en las consideraciones generales, creemos necesario realizar las siguientes acciones para desarrollar el concepto de fracción:

3.1.1. De partir a fraccionar.

El alumno del Sexto Nivel está familiarizado desde el Ciclo Medio con situaciones en las que realiza la acción física de **partir** (trocea una cuartilla, parte una cuerda, ...) anteriores a las de fraccionar, por lo que consideramos conveniente introducir el tema con acciones de partir en las que no interese el tamaño de las partes obtenidas. Gradualmente aumentamos el grado de dificultad al exigir que se dividan los objetos en dos, tres, cuatro, cinco o más partes iguales. (Por economía de tiempo y dinero recomendamos el uso de folios o cuartillas).

3.1.2. Necesidad de las partes iguales.

Debemos presentar situaciones en las que sea necesario fraccionar (repartir un premio, formar equipos para los juegos, etc.) destacando la condición de que es necesario que todas las partes sean iguales para que la acción sea correcta. Precisamente en esta necesidad se basa el concepto de fracción.

3.1.3. De la unidad fraccionaria a la fracción. Números mixtos.

Ampliamos el concepto de unidad fraccionaria con el de fracción. Para adquirir este concepto se realizarán actividades secuencializadas de la forma anteriormente descrita.

Es necesario comenzar con fracciones menores que la unidad e introducir posteriormente el concepto de número mixto al utilizar fracciones mayores que la unidad. Esta cuestión se resuelve comparando las distintas fracciones con la unidad: ¿Hay más, igual o menos de la unidad?; ¿Cuánto sobra o falta para la unidad?

Este proceso lo repetiremos con varias unidades, pero fundamentalmente con **dos** o **tres**, por ser las cantidades más usuales.

3.1.4. Acciones representativas mediante dibujos.

Su finalidad es trasladar al lenguaje gráfico las acciones realizadas manipulativamente. Consisten en representar gráficamente esas situaciones, coloreando o rayando, en figuras las distintas fracciones a estudiar; estableciendo la siguiente secuencia en las actividades:

3.1.4.1. Con figuras **geométricas regulares:** cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo, rombo, etc.
3.1.4.2. Con **segmentos.**
3.1.4.3. En **polígonos estrellados** de cuatro, cinco o seis puntas.
3.1.4.4. En **objetos articulados** (dibujos de flores y otros objetos).
3.1.4.5. Con **cantidades de objetos iguales.** (V.g.: Colorear una fracción en un conjunto de bolas).
3.1.4.6. Con **cantidades expresadas por su medida.**

3.1.5. Reconstrucción de la unidad.

Tratamos de destacar las relaciones existentes entre el todo y las partes, para lo cual podemos planear actividades relativas a dos situaciones básicas:

3.1.5.1. Del objeto o cantidad del objeto, obtener una parte (unidad fraccionaria).

3.1.5.2. De la unidad fraccionaria, obtener el objeto o cantidad.

Para desarrollar las actividades debemos partir de acciones con las que se obtiene una parte concreta de un objeto o cantidad (v.g.: un cuarto de mil pesetas son ...). En ellas debemos procurar que la cantidad utilizada sea múltiplo del número de partes que se realicen. Posteriormente, dada la parte correspondiente a una fracción de un objeto o cantidad, se obtendrá el todo (v.g.: un quinto de la clase son ocho alumnos; en la clase hay... alumnos). A partir de estas acciones podremos aumentar el grado de dificultad, asociando diversos objetos y partes con cada uno de ellos. La acción se termina ordenando las partes de cada objeto, según corresponda a una fracción mayor o menor.

3.1.6. Simbolización.

Concluimos la conceptualización de la fracción al representarla con el lenguaje matemático. Para ello consideramos que la mejor notación es la del "quebrado", la cual se obtendrá a partir de la fracción representada en forma sustantiva, escribiendo numéricamente el numerador y literalmente el denominador. En fase posterior se sustituye el sustantivo por la raya y el número correspondiente. **En consecuencia, proponemos para este núcleo ordenado secuencialmente el siguiente contenido:**

FASE A

1.- UNIDAD FRACCIONARIA. FRACCION:

1.1. Fraccionar objetos.

1.2. Partición de objetos en partes distintas e iguales.

1.3. Unidades fraccionarias: denominación.

1.4. Noción de fracción:

- 1.4.1. Representación gráfica de fracciones con figuras geométricas regulares, segmentos, polígonos estrellados, objetos de partes articuladas y cantidades pequeñas de objetos iguales.
- 1.4.2. Fracción de cantidades expresadas por su medida y acompañadas por el dibujo correspondiente.
- 1.4.3. Reconstrucción de un objeto o cantidad a partir de sus unidades fraccionarias.

1.5. Fracción igual o menor que la unidad.

1.6. Fracción mayor que la unidad: Número mixto.

1.7. Simbolización: concepto de numerador y denominador.

1.8 Fracción decimal:

- 1.8.1. Fracción de denominador 10, 100 y 1000.
- 1.8.2. Paso de fracciones a decimales y viceversa.

3.2. Equivalencia de fracciones.
El concepto fundamental de este contenido consiste en que distintas fracciones de un mismo objeto o cantidad corresponden a una misma parte de objeto o cantidad, aunque la acción física realizada en cada caso es distinta. Para conseguir su dominio proponemos el mismo proceso que el seguido en el contenido anterior.

3.2.1. Reconocemos el hecho en distintas situaciones con objetos reales.
Aprovechamos las fracciones de objeto obtenidas como consecuencia de las actividades del contenido precedente (v.g.: cuatro octavillas son equivalentes a dos cuartillas y, ambas, a un folio. Con medidas de peso: 1/2 kilo es equivalente a 2/4 de kilo; o en situaciones temporales: 2 cuartos de hora es lo mismo que media hora).
Basándonos en la reconstrucción de la unidad a partir de sus fracciones, reconocemos la equivalente entre 2/2, 3/3, 4/4, 5/5,...

3.2.2. Acción representativa en dibujos.
3.2.2.1. Con figuras geométricas regulares: cuadrado, rectángulo, triángulo, círculo, rombo,...
3.2.2.2. Con segmentos.
3.2.2.3. En polígonos estrellados.
3.2.2.4. Con objetos articulados.
3.2.2.5. En cantidades de objetos iguales, expresadas por sus dibujos.

En el siguiente cuadro recogemos las situaciones mas usuales de equivalencia relacionadas con las figuras en las que aconsejamos su representación.

	rectángulo	cuadrado	rombo	triángulo	hexágono	circulo	mes/año
1/2,2/4,4/8	X	X	X			X	
1/2,3/6	X			X	X	X	
1/2,5/10	X	X					
1/2,6/12							X
1/3,2/6	X			X	X	X	
1/3,4/12							X
2/3,4/6	X			X	X	X	
1/4,3/12	X	X				X	X
1/4,2/8	X	X				X	
3/4,6/8	X	X				X	
1/5,2/10	X						

3.2.3. Reconocimiento de equivalencias de fracciones de cantidades.
Esta acción debe realizarse en situaciones en las que la cantidad sea múltiplo del denominador (v.g.: 1/2 de 1000 Ptas. es equivalente a 2/4 de 1000 Ptas.).

Para reconocer la equivalencia de fracciones debemos realizar la acción en las siguientes fases:

3.2.3.1. Calcular la cantidad que corresponde a cada fracción y comprobar que es la misma.

3.2.3.2. Reconocer fracciones equivalentes a una dada, a partir de una cantidad y su fracción correspondiente (ej.: tenemos 1/2 de 1000 pesetas, ¿cuántos cuartos, octavos o décimos vale esa misma cantidad?).

3.2.4. Construcción de fracciones equivalentes. Fracción irreducible.

Basándonos en los apartados anteriores, deducimos los procedimientos para construír las fracciones equivalentes a una dada: multiplicando o dividiendo los dos términos por un mismo número. Comprobaremos posteriormente que se verifica la equivalencia realizando los productos cruzados. Utilizando el procedimiento de la división llegaremos a obtener la fracción irreducible.

NOTA: Deberán emplearse denominadores menores que 10 y obtener como máximo las cinco primeras fracciones equivalentes.

Por tanto proponemos para este nucleo ordenado secuencialmente el siguiente contenido:

3.3. Suma y diferencia de fracciones.

En este contenido usaremos como recurso las situaciones siguientes que implican operar con fracciones:

-Mezclas de colores, de pinturas, recetas de cocina y disoluciones, con fracciones decimales.

-Superficies; parcelación de terrenos para la construcción, la siembra o cualquier otra actividad.

-Distribución de trabajos, ya sean temporales o cuantitativamente entre varias personas.

-Música: semitonos, bemoles y sostenidos.

-Recorridos por etapas (expresadas en fracción).

-Capacidad (bebidas: 1/5 de litro, 1/3 de litro).

-Diagramas sectoriales.

-Fracciones de la **población** (escolar, rural, etc.) o cualquier otra variable discreta.

La distribución de este contenido se realiza en cuatro apartados:

3.3.1. Suma de fracciones con igual denominador.

Lo mismo que en los contenidos anteriores son necesarias las siguientes acciones:

FASE A

2.- EQUIVALENCIA DE FRACCIONES:

2.1. Equivalencia entre dos fracciones: fraccionar objetos iguales para formar equivalencias.

2.2. Representación grafica de equivalencias.

2.3. Reconocimiento de equivalencias en fracción de cantidades.

2.4. Fracción irreducible.

FASE B

3.- EQUIVALENCIAS:

3.1. Obtención de fracciones equivalentes, multiplicando los dos términos por un mismo número .

3.2. Obtención de fracciones equivalentes, dividiendo los dos términos por un mismo número.

3.3. Comprobar la equivalencia o no de dos fracciones mediante los productos cruzados.

3.3.1.1. Con objetos reales. De las situaciones anteriores utilizaremos las mezclas de colores, pintura,..., bebidas y objetos divididos en porciones (chocolate, queso, rompecabezas, folios, etc.) para efectuar sumas de fracciones.

3.3.1.2. Acción representativa mediante dibujos. La representación gráfica de sumas de fracciones con igual denominador es más adecuada para las situaciones relativas a superficies, caso de parcelación de terrenos para la construcción o siembra, en polígonos regulares: rectángulo, cuadrado, triángulo y en el círculo. También son adecuados los polígonos estrellados y los objetos articulados.

3.3.1.3. Relato de la acción y simbolización. El alumno debe relatar la acción realizada en cada uno de los casos anteriores y a continuación simbolizarla.

3.3.1.4. Deducción de la regla. Observando las sumas realizadas en los casos anteriores y su simbolización, el alumno está en condiciones de deducir la regla general para la suma de fracciones con igual denominador. Destacaremos que lo único que varía en el resultado es el numerador, mientras que el denominador permanece invariable.

3.3.2. Resta de fracciones con igual denominador.

El proceso a seguir es idéntico al desarrollado para la suma en el punto anterior. Hemos de tener en cuenta el caso en el que el minuendo es menor que el sustraendo.

3.3.3. Suma de fracciones de distinto denominador.

Habitualmente se introduce esta suma diciendo que no se puede realizar directamente, lo cual no es cierto cuando la operación se refiere a objetos reales -podemos sumar directamente 1/2 queso y 1/4 queso = 3/4 queso-.

La dificultad se plantea, a veces, al simbolizar el resultado porque no siempre es fácil localizar su expresión simbólica. En otras ocasiones también es problemática su representación simbólica. Por ello proponemos reducir a común denominador ambas fracciones, formando las equivalentes a cada una de ellas por el procedimiento ya descrito y después tomar las que sean de igual denominador para sumarlas.

También es aconsejable, por ser más rápido, la obtención de fracciones equivalentes multiplicando los dos términos de cada una por el denominador de la otra.

3.3.4. Diferencia de fracciones con distinto denominador.

Se aplica el mismo procedimiento que el descrito para la suma en el punto anterior. Hemos de resaltar la diferencia entre la unidad y una fracción. En este caso puede aplicarse la técnica de dividir el objeto unidad en tantas partes como indica el denominador de la fracción.

Contenidos que se proponen:

FASE A
4.- SUMA Y RESTA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR:
4.1. Sumar y restar fracciones de un mismo objeto real.
4.2. Representación gráfica de la suma o resta de fracciones.
4.3. Relato de la acción de sumar y restar fracciones.
4.4. Simbolización de la suma y resta de fracciones. Deducción de la regla.
5.- COMPARACION Y ORDENACION DE FRACCIONES:
5.1. Comparar fracciones de igual denominador en un mismo objeto.
5.1.1. Comparación con objetos reales.
5.1.2. Comparación mediante representación gráfica.
5.2. Componer las unidades fraccionarias de un objeto.
5.2.1. Comparación con objetos reales.
5.2.2. Comparación mediante gráficas.
5.3. Ordenar fracciones en un máximo de seis.

FASE B
6.- SUMA Y RESTA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR:
6.1. Posibilidad real de sumar y restar fracciones de distinto denominador e imposibilidad aritmética.
6.2. Reducción a común denominador.
6.3. Suma de dos fracciones.
6.4. Resta de dos fracciones.
6.5. Automatización de las reglas.
6.6. Lectura de fracciones de denominador mayor que diez.

3.4. Producto y división de fracciones.

3.4.1. Producto de fracciones.
Presentamos el producto de fracciones como una fracción de fracción, ya que no hay situaciones reales en las que se diga, por citar un caso, 1/2 por 1/5; pero sí en las que es necesario calcular la mitad de la quinta parte. Estos casos se presentan en las siguientes situaciones:
- Repartos de repartos (herencias, cobros, situaciones monetarias en general).
- Parte de parte (superficies: riego y labranza; trayectos lineales y en situaciones temporales).
-Parte de trabajo realizado entre varios.
A diferencia de los casos anteriores, aquí la acción con objetos reales es mas difícil que la resolución numérica en la mayoría de las ocasiones. Por tanto establecemos la siguiente secuencia:

3.4.1.1. Acción con objetos reales. Hallar la fracción de fracción en objetos, siempre que el denominador de la primera fracción sea igual que el numerador de la segunda, para evitar las dificultades que surgirían al tratar de fraccionar las partes obtenidas en primer lugar cuando el denominador de la primera fracción es distinto del numerador de la segunda.

3.4.1.2. Representación gráfica. Debe realizarse preferentemente en rectángulos, ya que de hacerlo en otras figuras puede aumentar considerablemente el grado de dificultad. En algunos casos particulares puede realizarse en el círculo y el hexágono (v.g.: 1/3 o 2/3 de 3/6). Mediante el uso de transparencias se disminuye en gran medida el problema de la representación gráfica.

3.4.1.3. Deducción de la regla. Destacamos que en el producto de fracciones obtenemos una fracción que reemplaza a otra, cuyo numerador y denominador se obtienen multiplicando los numeradores y los denominadores entre sí, respectivamente. Advertiremos, finalmente, que el producto de fracciones se realiza directamente siempre, sin necesidad de reducir las fracciones a un denominador común.

Contenidos que se proponen:

FASE A
7.- PRODUCTO DE FRACCIONES:
7.1. Formación, con objetos reales, de la fracción de fracción.
7.2. Representación gráfica de una fracción de fracción.
7.3. Simbolización y definición del producto.

FASE B
8.- PRODUCTO DE FRACCIONES:
8.1. Producto de dos fracciones.
8.2. Producto de una fracción por un número.
8.3. Fracción inversa.

VI MATERIAL DE TRANSPARENCIAS PARA EL TRABAJO CON FRACCIONES

A continuación presentamos un material propio, elaborado para el trabajo manipulativo con fracciones. El material tiene interés puesto que se aplica metodológicamente en los cuatro bloques de contenidos que antes hemos señalado. Vamos a presentar el mismo en la suma de fracciones, y suponiendo que el alumno ya sabe reconocer, obtener y expresar una fracción de figura regular, y en concreto de un rectángulo.

El alumno debera superar los siguientes objetivos en el proceso gráfico-manipulativo de la suma de fracciones:

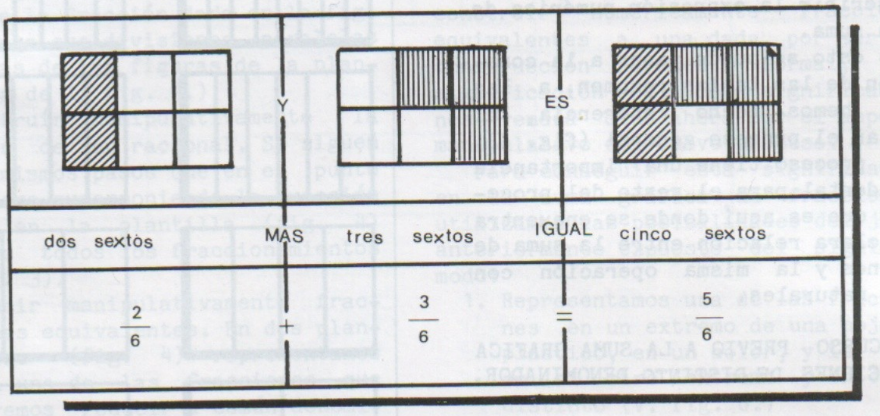
1. Efectuar gráficamente la suma de dos fracciones con el mismo denominador.
2. Pasar del lenguaje gráfico al verbal y de éste al numérico y viceversa en una suma de dos fracciones de igual denominador.
3. Efectuar gráficamente la suma de dos fracciones de distinto denominador:
   a) Obteniendo un resultado gráfico que se pueda expresar numéricamente.
   b) Obteniendo un resultado gráfico sin expresión numérica.
4. Pasar del lenguaje gráfico al verbal y de éste al numérico y viceversa en una suma de dos fracciones de distinto denominador.
5. Reducir a común denominador dos fracciones, gráficamente y numéricamente. Pasar de una a otra.
6. Sumar numéricamente cualquier pareja de fracciones.

1.- ESQUEMA GENERAL DEL PROCESO.

Dado que el proceso para el tratamiento del cualquiera de los casos expuestos en los objetivos lleva el mismo escalonamiento, exponemos éste a continuación para pasar posteriormente a cada aspecto particular.

a) Manipulación gráfica (recorte, pegado, superposición, etc.) repetida sin necesidad de expresar el resultado de otra forma que no sea la gráfica.

b) Expresión oral de lo efectuado gráficamente.
c) Expresión numérica de la operación.
d) Una vez superados cada uno de los pasos anteriores se realizará el resumen del proceso con tablas en que aparecen paralelamente los tres aspectos (V. fig. 1).



Pensemos que el afianzamiento de la operación se consigue a través del juego de manipulación descrito en el apartado a) y, una vez completado el proceso, por la construcción continuada de la tabla resumen, descrita en el apartado d), que permite al alumno tener presente todo el proceso que emplea para hacer la operación y convertirlo en el "recurso significativo" frente a la mecanización de la operación que obtendrá más adelante. Este proceso se aplica desglosado en varios pasos segun la dificultad de la operación a realizar.

2.- SUMA GRAFICA DE FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR.

El tratamiento de este primer paso se basa en:

a) Las fracciones sumandos son objetos iguales fraccionados del mismo modo.
b) Las unidades fraccionarias se consideran como "unidades sustantivas".
c) La operación consiste en agregar las unidades fraccionarias y contarlas (V. fig. 2).

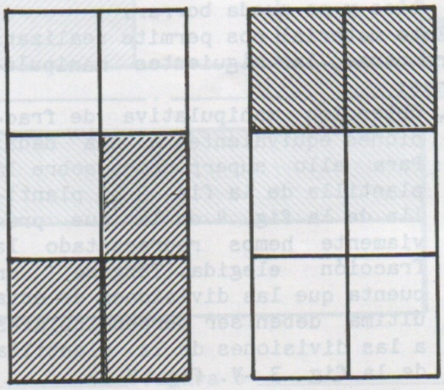
Todos los pasos anteriores son manipulativos y se "relatan" verbalmente, sin recurrir a la expresión numérica de las fracciones.

Lo importante es no adelantar el uso de la expresión numérica. Es imprescindible el total dominio de la manipulación y el relato de lo hecho.

Para la manipulación se puede emplear el recorte y pegado, la superposición de dibujos transparentes, la manipulación de trozos (unidades fraccionarias), etc.

Lo significativo para el alumno debe ser que las unidades fraccionarias (medios, tercios, etc.) no estén referidas a su origen numérico, sino a su valor sustantivo; decimos "tres sextos" como podríamos decir "tres naranjas".

Dominado este aspecto experiencial, se puede comenzar a enlazar con la



expresión numérica, teniendo en cuenta que:

a) Cada sumando "gráfico" tiene una expresión numérica, paralela a la verbal.
b) El resultado gráfico también tiene siempre su expresión numérica.
c) Con las expresiones numéricas obtenidas de las gráficas podemos escribir la expresión numérica de la suma.

Tras ésto se puede pasar a la construcción de las tablas resumen, a las que ya hemos hecho referencia, al presentar el proceso general (fig. 1).

Este proceso tiene una importancia trascendental para el resto del proceso, ya que es aquí donde se encuentra la más clara relación entre la suma de fracciones y la misma operación con números naturales.

3.- RECURSO PREVIO A LA SUMA GRAFICA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR.

Preparamos la manipulación de la suma de fracciones de distinto denominador con un juego didáctico.

El juego necesita el siguiente material:

a) Dos plantillas de papel con rectángulos o cuadrados iguales divididos en las unidades fraccionarias más usuales (V. fig. 3).
b) Una hoja de plástico transparente con una figura igual a las de las plantillas, pero sin fraccionar (V. fig. 4).
c) Rotulador que señale en el plástico y se pueda borrar.

Este material nos permite realizar, entre otras, las siguientes manipulaciones:

1. Obtención manipulativa de fracciones equivalentes a una dada. Para ello superponemos sobre la plantilla de la fig. 3 la plantilla de la fig. 4 en la que previamente hemos representado la fracción elegida.(Téngase en cuenta que las divisiones de esta última deben ser perpendiculares a las divisiones de la plantilla de la fig. 3 -V. fig. 5-.)

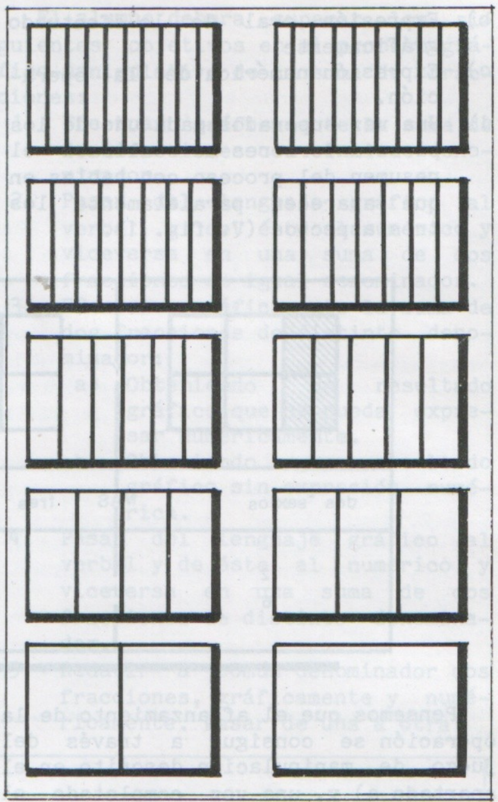


figura 3

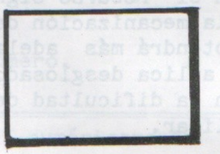


figura 4

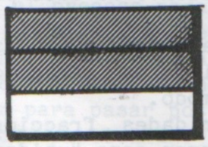


figura 5

2. Simplificar manipulativamente una fracción. Comenzando por la figura de la plantilla (fig. 3) menos fraccionada, vamos colocando el rectángulo (fig. 4) hasta conseguir que la fracción que representa quede exactamente dentro de alguno de los fraccionamientos allí representados. (En este caso se requiere que el fraccionamiento de la fracción dada en la fig. 4 tenga sus divisiones paralelas a las de las figuras de la plantilla de la fig. 3.)
3. Construír manipulativamente la clase de un racional. Se siguen los mismos pasos que en el punto 1 pero superponiendo la fracción dada en la plantilla (fig. 4) sobre todos los fraccionamientos (fig. 3).
4. Reducir manipulativamente fracciones equivalentes. En dos plantillas (fig. 4) representamos cada una de las fracciones que queremos reducir a común denominador, teniendo en cuenta que los fraccionamientos de cada plantilla queden perpendiculares a los fraccionamientos de la otra. A continuación se superpone una plantilla sobre la otra y se leen las fracciones que resultan con el nuevo fraccionamiento.
5. Identificar qué fracción de figura es un trozo dado. Para ello vamos superponiendo el trozo dado sobre los fraccionamientos de la figura 3 hasta encontrar el deseado. (Téngase presente que dicho trozo deberá corresponder a una fracción de la plantilla de la figura 4 y que las divisiones, aunque no representadas, deberán ser paralelas a las de la plantilla (fig. 3).

El mismo juego se podría realizar con otros materiales más "manipulativos", siguiendo la misma idea.

4.- SUMA GRAFICA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR CUANDO ES POSIBLE EXPRESAR NUMERICAMENTE EL RESULTADO GRAFICO.

Hemos dividido en dos apartados el tratamiento de la suma gráfica de fracciones con distinto denominador; en este primer apartado se trata de comprobar que no hay dificultad "aparente" para realizar sumas gráficas de este tipo, ya que:

a) Obtenemos un resultado gráfico, y
b) Podemos expresar oralmente y numéricamente el resultado gráfico.

Abandonamos con ésto la idea de construír numéricamente fracciones equivalentes a una dada, por ser una construcción puramente formal, sin significación real; esta significación nos vendrá dada ahora por el aspecto manipulativo del nuevo proceso.

Para conseguir esta significación en la suma gráfica de fracciones, utilizamos las posibilidades del juego anteriormente expuesto del siguiente modo:

1. Representamos una de las fracciones en un extremo de una hoja de plástico, en un color, y la otra en el otro extremo y en color distinto (V. fig. 6.)
2. Doblamos la hoja superponiendo ambas representaciones.
3. Identificamos las nuevas unidades fraccionarias y contamos el numero de ellas que hay pintadas de alguno de los colores utilizados, teniendo en cuenta que la superposicion de colores se cuenta doble.

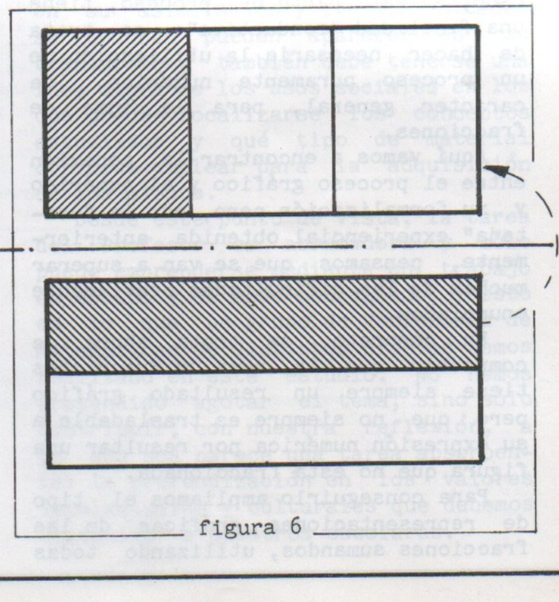
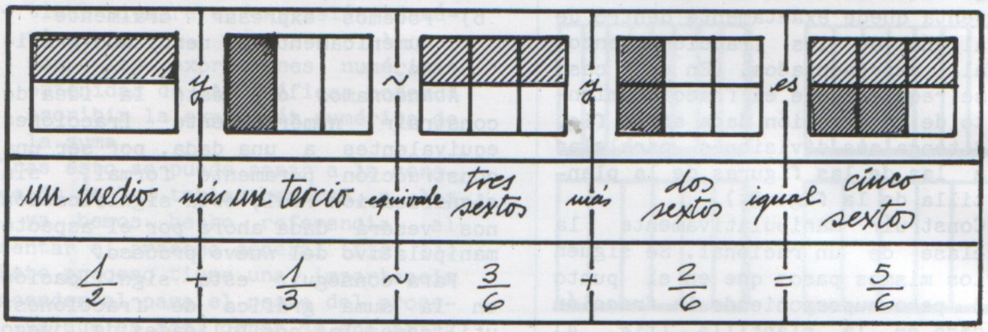


figura 6

Dominada la manipulación y su relato oral, se pasa, como en casos anteriores, a la introducción de la expresión numérica (V. fig. 7.)

figura 7



Una novedad vamos a encontrar tanto en el proceso gráfico como en el oral y en la expresión numérica: la aparición de fracciones equivalentes a las iniciales intervinientes en la operación.

Así se introduce la reducción a común denominador por un procedimiento gráfico.

5.- SUMA GRAFICA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR CUANDO NO ES POSIBLE EXPRESAR NUMERICAMENTE EL RESULTADO GRAFICO.

La manipulación que se lleva a cabo, en esta parte del proceso, tiene una finalidad "conductiva": se trata de hacer necesaria la utilización de un proceso puramente numérico, de carácter general, para la suma de fracciones.

Aquí vamos a encontrar la conexión entre el proceso gráfico y el numérico y su formalización pero, con la "ventaja" experiencial obtenida anteriormente, pensamos que se van a superar muchas de las dificultades previamente enunciadas.

En concreto, se trata ahora de comprobar que la suma de fracciones tiene siempre un resultado gráfico pero que no siempre es trasladable a su expresión numérica por resultar una figura que no está fraccionada.

Para conseguirlo ampliamos el tipo de representaciones gráficas de las fracciones sumandos, utilizando todas aquéllas que, al ser superpuestas, no dan un nuevo fraccionamiento para el resultado, así:

a) Representaciones con divisiones paralelas en rectángulos y cuadrados.
b) Representaciones en círculos y polígonos regulares con divisiones radiales.
c) Representaciones en triángulos, rombos,... y todo otro tipo de figuras ya sean compactas o segregables.

Con ellos podemos obtener resultados gráficos que no tienen expresión verbal ni numérica por no quedar fraccionados (V. fig. 8.)

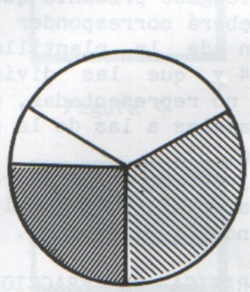
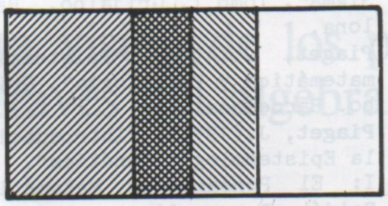


figura 8



6.- DEDUCCION DEL PROCEDIMIENTO NUMERICO A PARTIR DEL GRAFICO.

Concluímos de los pasos anteriores que:

- En la suma de fracciones de igual denominador se puede obtener un resultado gráfico y de él obtener el numérico.
- En la suma de fracciones de distinto denominador se puede obtener siempre un resultado gráfico, pero SOLO se puede obtener en algunos casos un resultado numérico del gráfico que, además, tiene un denominador distinto al de los sumandos.

A partir de estas conclusiones se vuelve sobre el punto 4 y se busca la relación existente entre los denominadores de los sumandos y el del resultado numérico, utilizando la superposicion de las figuras fraccionadas con el siguiente orden:

a) Observamos que cada fracción "inicial", al superponer las figuras, se transforma en otra equivalente a ella.
b) Comprobamos que el resultado numérico obtenido corresponde a efectuar la operación con esas fracciones equivalentes a las iniciales, que sí tienen el mismo denominador.

A continuación se trata de deducir el procedimiento numérico que corresponde a gráficos observados (reducción a común denominador).

Llegados a este punto, vemos que el hecho de efectuar la suma de unas fracciones mediante otras equivalentes a ellas, está preparando una justificación a la suma de racionales que nos permite obtener un proceso numérico generalizador de la suma de fracciones.

VII REFLEXION FINAL

Hemos pretendido, con este trabajo, representar las líneas generales de una metodología activa para el aprendizaje del concepto de fracción, y de sus operaciones, por parte del alumno de 11 años. Solemos explicar a nuestros alumnos conceptos totalmente formalizados, de los cuales queremos que asimile y memorice, preferentemente, los mecanismos de cálculo; pero no es así como puede y debe realizarse un aprendizaje en estos niveles. Por ello hemos elaborado esta reflexión, que aporta todas las razones que, entendemos, justifican la apertura a una metodología mas amplia.

Enseñar matemáticas, al menos en los niveles básicos y obligatorios, es más que transmitir unos contenidos; se trata de formar e instruír en unas pautas culturales amplias en las que los conceptos aritméticos, o geométricos, no están aislados, sino que forman parte de un medio intelectual homogéneo. La primera tarea para el Profesor consiste en estar informado de todos los datos culturales que se conectan con los conceptos a transmitir, de cómo se han ido formando estas nociones, qué limitaciones presentan en su asimilación y qué dificultades se conocen pueden aparecer en su transmisión; también debe tenerse una idea clara de los usos sociales en los que pueden localizarse los conceptos estudiados y qué tipo de material conviene emplear para la adquisición de los mismos.

Desde este punto de vista, la tarea del Profesor es abrumadora y sólo puede emprenderse mediante un trabajo en equipo y de modo coordinado, y ésto es lo que un grupo de Profesores de Matemáticas de distintos niveles hemos realizado en este estudio. No hemos pretendido agotar el tema, sino sólo contribuír, con nuestra reflexión, a lo que nos parece una tarea absorbente: la profundización en los valores intelectuales y culturales que debemos transmitir a nuestros escolares.

BIBLIOGRAFIA

(1) **Bell**, J.(1949): "Historia de las Matemáticas". Fondo de Cultura Económica. Méjico.

(2) **Bynum**, W.F. y otros (1983): "Dictionary of the History of Science". Mc Millan. Hong-Kong.

(3) **Cajori**, F.(1980): "History of Mathematics". Chelsea P.C. New York.

(4) **Friberg**, J.(1984): "Números y medidas en los primeros documentos escritos". Revista Investigación y Ciencia. Abril.

(5) **Lovell**, K.(1977): "Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en el niño". Morata. Madrid.

(6) **Mialaret**, G.(1977): "Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan". Pablo del Río. Madrid.

(7) **Newman**, J.(1969): "Enciclopedia Sigma". Tomo I. Grijalbo. Barcelona.

(8) **Piaget**, J.(1968): "Epistemología matemática y Psicología". Grijalbo. Barcelona.

(9) **Piaget**, J.(1975): "Introducción a la Epistemología Genética". Tomo I: El Pensamiento Matemático". Paidós. Buenos Aires.

(10) **Rey Pastor**, J.(1951): "Historia de la Matemática". Espasa-Calpe. Madrid.

(11) **Rico**, L. y **Sáenz**, O.(1982): "Las Fracciones en el Ciclo Medio de E.G.B.". Apuntes de Educación. Anaya. Madrid.

(12) **Skemp**, R.(1980): "Psicología del aprendizaje de las Matemáticas". Morata. Madrid.

(13) **Vera**, F.(Recopilador).(1970): "Científicos gregos". Aguilar. Madrid.

Trabajo realizado por:

Almendros Morales, Antonio
Castro Martínez, Enrique
Cobo Vargas, Francisco
Corpas Herenas, Antonio
Ibáñez Carrillo, Blas
Fernández Guerrero, Eduardo
García Fernández, Antonio
González Alonso, José
González González, Evaristo
Gutiérrez Pérez, José
Ontiveros López, Francisco
Rico Romero, Luis
Segovia Alex, Isidoro
Serrano García, Miguel
Sevilla Sánchez, Francisco Jesús
Tortosa López, Antonio
Valenzuela Herrerías, Julián