TRIGONOMETRIA PLANA

¿Cómo se miden los triángulos?

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

1. Trigonometría plana

Un triángulo es la figura más básica en el estudio de las matemáticas[1]. La palabra trigonometría significa medida de triángulos[2]. Ejemplos de cosas que podemos medir en un triángulo son las longitudes de los lados, los ángulos, el área, etc.

El estudio del sol, la tierra y de los demás planetas se ha promovido por el conocimiento de las razones entre los lados de triángulos semejantes. Eratóstenes (276-194 a.C.) usó triángulos rectángulos semejantes para estimar en 252.000 estadios (39.614,4 km) la circunferencia polar de la tierra. Si lo comparamos con la mejor estimación moderna, 40.008 km, es decir un error de menos del 1%, vemos que aunque su método tiene alguna imprecisión, su resultado final es notable.

Aunque en la historia de las matemáticas, las aplicaciones de la trigonometria se basan en el triángulo rectángulo, el alcance de la trigometria es mucho más que eso. Hoy la trigonometria es crítica en campos que van desde ciencias de la computación hasta las comunicaciones por satélite.

[1] Cualquier polígono se puede descomponer en triángulos que no se solapan.

[2] Viene de dos palabtras griegas, trigonon que significa triángulo y metria que significa medida.

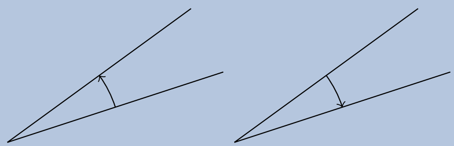
ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

2. Ángulos y su medida

Dado un plano bidimensional[3], donde existen puntos y rectas. Un ángulo se puede definir con una pareja de rectas que se cortan. Más precisamente, semirectas.

Definición 1. *Un ángulo, en un plano, es una pareja de semirectas con un vértice común.*

Por tanto, dos semirectas, a y b con un vértice común, definen dos ángulos distintos el $\widehat{ab}$ y el $\widehat{ba}$. Gráficamente,



La medida de un ángulo se define como un número real único que mide la amplitud o separación de ambas semirectas. Más precisamente,

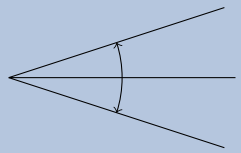
[3]Su idealización matemática es el conjunto de parejas de números reales, $\mathbb{R}^2$, con su estructura matemática de espacio vectorial normado.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 2. *Se dice que dos ángulos, $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$, tienen la misma medida*[4] *o separación, si se puede trasladar un vértice al otro y girar convenientemente las semirectas de uno hasta coincidir con las del otro (a con a' y b con b').*

Por tanto, para hallar la medida de un ángulo podemos trasladar el vértice al origen de coordenadas y girar hasta hacer coincidir la semirecta a con el eje x positivo. Así, los ángulos anteriores, se verían



si se dibuja una circunferencia de centro el origen observamos que cada ángulo define un único punto en la circunferencia y un arco sobre ella que puede recorrerse en el sentido de las agujas del reloj (**sentido negativo**), o bien contrario al sentido de las agujas de un reloj (**sentido positivo**).
Recíprocamente, cualquier punto en la circunferencia define dos arcos (dos ángulos) sobre ella, uno positivo y otro negativo. Así,

[4] Por abuso del lenguaje, a veces decimos que los ángulos son iguales cuando lo que queremos decir es que tienen la misma medida.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Definición 3. *La medida de un ángulo, $\widehat{ab}$, donde el semieje a coincide con el semieje positivo de las x (abscisas), es el único número real que corresponde proporcionalmente a dicho punto cuando se le da un valor positivo real a la circunferencia completa.*
Es costumbre, dar el valor de $360°$*, en cuyo caso la medida se dice que es en* **grados sexagesimales**. *Si la medida de la circunferencia completa es* 400 *decimos que medimos en* **grados centesimales**. *Decimos que medidos en* **radianes***, si la medida de la circunferencia completa es* 2π. *Si a la circunferencia completa le damos el valor* 6400*, estamos midiendo en* **mils**[5].

Los grados sexagesimales de subdividen en minutos de arco, de forma que $1° = 60'$. A su vez, los minutos se subdividen en segundos de arco, de forma que $1' = 60''$.

Si un ángulo generado por una rotación en sentido positivo está entre $0°$ y $90°$, decimos que está en el **primer cuadrante**, entre $90°$ y $180°$ en el **segundo cuadrante**, entre $180°$ y $270°$ en el **tercer cuadrante**, y entre $270°$ y $360°$ en el **cuarto cuadrante**.

Si la medida de un ángulo es mayor de $360°$ entonces se le resta multiplos de esta cantidad hasta conseguir una cantidad inferior que represente al ángulo.

[5]Esta medida mucho más pequeña tiene cierta utilidad práctica. Sirve para medir ángulos pequeños en astronomia y en topografia.

La medida en radianes tiene ciertas ventajas sobre medir en grados. Simplifica el cálculo con funciones trigonométricas. También, está relacionado con la medida del arco sustentado por el ángulo. Así

Definición 4. *Un radian se define como la medida de un ángulo que desde el centro de cualquier circuferencia que pase por su vértice limita o sustenta un arco de longitud igual al radio.*

En consecuencia, la medida en radianes de un ángulo es el cociente de la longitud del arco que sustenta partido el radio. O sea, $\boxed{\theta = s/r}$. Equivalentemente, la longitud del arco sustentado es el producto del valor del ángulo en radianes por el valor del radio, $\boxed{s = \theta * r}$

Ejemplo 1. *Para encontrar la medida en radianes de un ángulo con vértice en el centro de un círculo cuyo radio es* $r = 10$ *metros y que sustenta un arco de* $s = 5$ *m. Lo que hacemos es dividir*

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{5}{10} = 0.5 \; radianes$$

2.1. Conversión entre distintas medidas.

Es posible cambiar la unidad de medida del valor de un ángulo. Así

Definición 5. *Llamamos* **factor de conversión***, entre distintas medidas de un ángulo, al valor de una de las unidades de medida en función de la otra.*

Por ejemplo, el factor de conversión de grados a radianes se calcula de la siguiente forma.
Como $360^\circ = 2\pi$ obtenemos

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0.0174533 \text{ radianes}$$

Recíprocamente, el factor de conversión de radianes a grados vale

$$1 \text{ radián} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = 57.2958^\circ$$

También, el factor de conversión de grados a mils se calcula. Como $360^\circ = 6400$ mils, entonces

$$1 \text{ mil} = \frac{360}{6400} = \frac{9}{160} = 0.05625^\circ$$

Recíprocamente, el factor de conversión de mils a grados vale

$$1^\circ = \frac{160}{9} = 17.7778 \text{ mils}$$

El factor de conversión de radianes a mils justifica su nombre. En efecto, multiplicando dos de los factores ya calculados

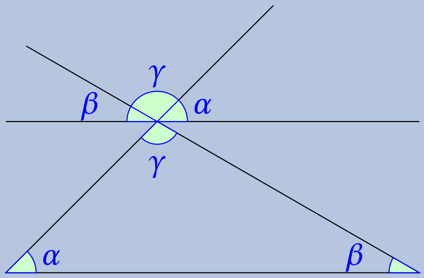
$$1 \text{ mil} = \frac{9^\circ}{160} = \frac{9^\circ}{160}\frac{\pi}{180} \text{ radianes} = \frac{\pi}{3200} = 0.000981748 \text{ radianes}$$

O sea, $\boxed{1 \text{ mil} \simeq 0.001 = 1/1000 \text{ radianes}}$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

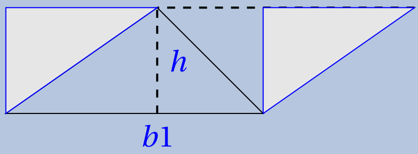
Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

3. Algunos teoremas clásicos



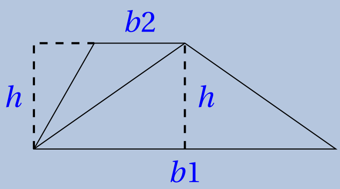
Como ángulos formados por una recta cortada por dos paralelas son iguales.
Como también son iguales los ángulos opuestos por el vértice, del dibujo obtenemos

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$



El área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo (= área rectángulo).

$$S \;=\; \frac{b_1 * h}{2}$$

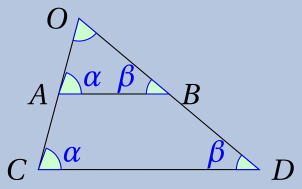


El área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos.

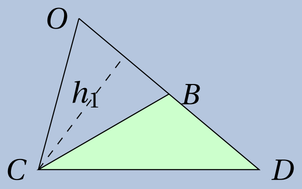
$$S \;=\; S_1+S_2 \;=\; \frac{b_1 * h}{2}+\frac{b_2 * h}{2} \;=\; \frac{b_1+b_2}{2} * h$$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

3.1. Teorema de Tales. [6] Se atribuye a Tales el conocimiento y aplicación práctica de este teorema para hallar la altura de la gran pirámide de Keops[7].

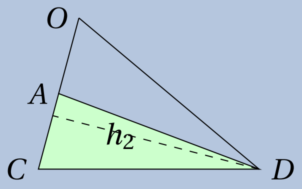


Si por un triángulo se traza una paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.



Las áreas de los dos triángulos son

$$S(COB) = \frac{h_1 * \overline{OB}}{2}, \quad S(CBD) = \frac{h_1 * \overline{BD}}{2}$$



Las áreas de los dos triángulos son

$$S(DAC) = \frac{h_2 * \overline{AC}}{2}, \quad S(OA) = \frac{h_2 * \overline{DOA}}{2}$$

[6] Tales de Mileto (639 - 547/6 a.C.) fue el primero y más famoso de los Siete Sabios de Grecia, fundador de la escuela jónica de filosofía y de la matemática como hoy se concibe. Se cree fue el maestro de Pitágoras. Este teorema se formalizó, mas tarde en el libro de Los Elementos de Euclides.

[7] Basta medir su sombra cuando tu sombra iguale tu altura.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Como los triángulos CBD y DAC tienen la misma altura sobre CD. Tienen el mismo área $S(CBD) = S(DAC)$. Como el triángulo grande es el mismo, también tienen la misma área los otros dos triángulos pequeños, $S(COB) = S(DOA)$. O sea, tenemos las igualdades.

$$\frac{h_1 * \overline{BD}}{2} = \frac{h_2 * \overline{AC}}{2}, \quad \frac{h_1 * \overline{OB}}{2} = \frac{h_2 * \overline{OA}}{2}$$

dividiéndolas miembro a miembro y simplificando se obtiene

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Longrightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}+\overline{BD}}{\overline{OA}+\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \Longrightarrow \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

Finalmente, como los dos triángulos iniciales tienen los mismos 3 ángulos, se puede desplazar el triángulo superior OAB hasta hacer coincidir el vértice B con el D. Obteniéndose una configuración de Tales como la inicial. Como antes deducimos una proporcionalidad de lados, que junto con la anterior, nos da la proporcionalidad completa entre ellos $\boxed{\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}}$

Corolario 1. [Teorema de Tales] *Dados dos triángulos, es equivalente que tengan los mismos* 3 *ángulos*[8] *a que sus lados sean proporcionales dos a dos.*

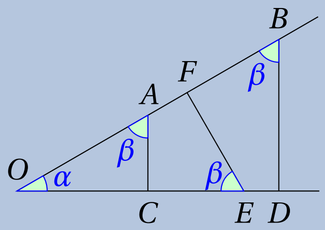
Precísamente, se dice que dos triángulos son **semejantes** cuando satisfacen las condiciones del corolario.

[8]Como suman 180°, basta con que tengan dos ángulos iguales.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

4. Las razones de un ángulo

Una aplicación inmediata del teorema de Tales se obtiene con un triángulo rectángulo. Mejor dicho con todos los semejantes a uno dado.



Todos estos triángulos son rectángulos y semejantes, verificando $\alpha + \beta = 90°$. Por tanto, sus lados son proporcionales. O sea, los cocientes de lados correspondientes coinciden. Por ejemplo, $\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}}$

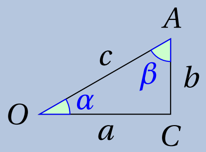
Claramente, la clase de todos los triángulos rectángulos, semejantes entre si, se define por la pareja de ángulos complementarios, $\alpha + \beta = 90°$. O sólo por uno de ellos. Por ejemplo, el α. Ya que el otro está unívocamente determinado por la igualdad $\beta = 90° - \alpha$.

Pero también, la clase de todos los triángulos rectángulos, semejantes entre si, viene determinada por las constantes de proporcionalidad entre sus tres lados. Por tanto, esas constantes de proporcionalidad vienen determinadas o asociadas con el ángulo α[9].

[9]También con su complementario, el ángulo β.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Ahora, dados los valores, a, b, c, de las longitudes de tres lados de un triángulo rectángulo se pueden hacer exactamente 6 cocientes:



$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c} \text{ y sus tres inversos } \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$$

Pués bien, esos seis cocientes nos van a definir las seis **razones goniométricas** del ángulo α.

Definición 6. *Se definen* $Cos(\alpha) = \frac{a}{c}$, $Sen(\alpha) = \frac{b}{c}$, $Tan(\alpha) = \frac{b}{a}$ *y sus tres inversos* $Sec(\alpha) = \frac{c}{a}$, $Cosec(\alpha) = \frac{c}{b}$, $Cotan(\alpha) = \frac{a}{b}$. *Se llaman respectivamente,* **coseno, seno, tangente, secante, cosecante y cotangente del ángulo** α.
Al lado a se le llama **cateto contiguo**, *al b* **cateto opuesto** *y c la* **hipotenusa**.

Así, el seno de un ángulo es el cociente del cateto opuesto por la hipotenusa, el coseno es el cociente del cateto contiguo por la hipotenusa, etc.

Observaremos, que con la misma definición, las mismas seis razones son respectivamente el seno, coseno, cotangente, cosecante, secante, y tangente del ángulo complementario[10], $\beta = 90° - \alpha$.

[10] La misma hipotenusa, pero el cateto contiguo de β es el opuesto de α y viceversa.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 14 de 34
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

4.1. Las razones en los cuatro cuadrantes. Claramente, por las definiciones anteriores, las seis razones trigonométricas o goniométricas de un **ángulo agudo**, α. O sea, mayor que cero y menor de 90°, son reales positivos.

Para el caso, $\alpha = 0$, no existe triángulo rectángulo posible. Su cateto opuesto se toma, $b = 0$. Por tanto también, el seno y la tangente, $Sen(0) = Tan(0) = 0$. Para el coseno y la secante se toma el valor uno, $Cos(0) = 1 = Sec(0)$[11].

Para el caso, $\alpha = 90°$, tampoco existe triángulo rectángulo posible que se pueda formar. En este caso, $Sen(90°) = 1$ y $Cos(90°) = 0$.[12].

Para el cálculo de las razones de un **ángulo obtuso**, α (mayor que 90° y menor que 180°), se toma el triángulo rectángulo que forma su ángulo suplementario, $180° - \alpha$, con el convenio de tomar negativo su cateto contiguo.

Para, $\alpha = 180°$, se toma $Sen(180°) = 0$ y $Cos(180°) = -1$.

Para un ángulo, α, del tercer cuadrante se toma el triángulo formado por el ángulo, $\alpha - 180°$, con el convenio de tomar negativos sus dos catetos.

Finalmente, para un ángulo de cuarto cuadrante, se toma el triángulo formado por su **suplementario**, $360° - \alpha$, y se toma negativo su cateto opuesto.

Para, $\alpha = 270°$, se toma $Sen(270°) = -1$ y $Cos(270°) = 0$.

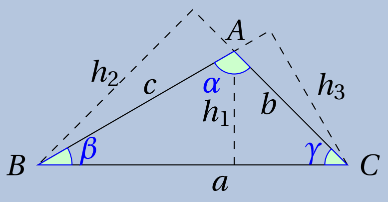
---

[11] Las otras dos razones, cosecante y cotangente no existen. Aunque a veces, se suele decir que valen infinito.

[12] En este caso, las razones que no existen son la secante y la tangente.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

5. El teorema de los senos



El área del triángulo vale

$$S = \frac{a * h_1}{2} = \frac{b * h_2}{2} = \frac{c * h_3}{2}$$

del dibujo se obtiene

$\text{Sen}(\beta) = \frac{h_1}{c}$, $\text{Sen}(\gamma) = \frac{h_1}{b}$, $\text{Sen}(\alpha) = \frac{h_2}{c} = \frac{h_3}{b}$

Despejando,

$$h_1 = Sen(\beta) * c = Sen(\gamma) * b, \quad h_2 = Sen(\alpha) * c, \quad h_3 = Sen(\alpha) * b$$

Ahora, por la primera igualdad del área, tenemos

$$a * Sen(\beta) * c = a * h_1 = b * h_2 = b * Sen(\alpha) * c \Longrightarrow a * Sen(\beta) = b * Sen(\alpha)$$

y también

$$a * Sen(\gamma) * b = a * h_1 = c * h_3 = c * Sen(\alpha) * b \Longrightarrow a * Sen(\gamma) = c * Sen(\alpha)$$

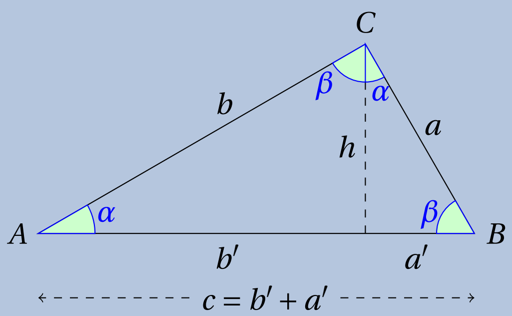
dividiendo en ambas igualdades, obtenemos finalmente

$$\frac{a}{Sen(\alpha)} = \frac{b}{Sen(\beta)} = \frac{c}{Sen(\gamma)}$$

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
Página 16 de 34
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

6. El teorema de los catetos y de la altura

Dado un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos, b' y a', que son las proyecciones de los dos catetos.



Si $\alpha + \beta = 90°$, se obtienen tres triángulos rectángulos, el grande y los pequeños de la izda y drcha, que son semejantes. Por tanto

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{a}, \quad \frac{h}{b'} = \frac{a'}{h}$$

de donde

$$b^2 = b' * c, \quad a^2 = a' * c$$

y también $h^2 = b' * a'$

La igualdad $h^2 = b' * a'$ es equivalente a

$$h = \sqrt{b' * a'}$$

es llamada el **teorema de la altura**[13].
Mientras que las igualdades $a^2 = a' * c$ y $b^2 = b' * c$ son llamadas el **teorema de los catetos**. Son las que usaremos para demostrar el de Pitágoras.

[13] La altura sobre la hipotenusa es la media geométrica de las proyecciones de los catetos.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

7. El teorema de Pitágoras

Se atribuye a Pitágoras[14] la primera demostración del teorema que lleva su nombre, basada en semejanza de triángulos rectángulos.

Con la terminología anterior, si b' y a' son las proyecciones de los dos catetos b y a sobre la hipotenusa, se tiene $b^2 = b' * c$ y $a^2 = a' * c$ y por tanto

$$\boxed{a^2 + b^2 = a' * c + b' * c = (a' + b') * c = c * c = c^2}$$

8. La relación fundamental de la trigonometría plana

Dado un ángulo α, por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{a}{c}^2 + \frac{b}{c}^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

O sea, hemos demostrado el

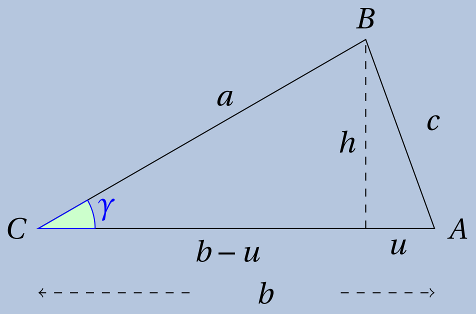
Teorema 1. [Teorema fundamental de la trigonometría plana] *Para cualquier ángulo α, se verifica*

$$\boxed{\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

[14]Pitágoras de Samos (aproximadamente 582 - 507 a.C.), filósofo y matemático griego. Sus discípulos mantuvieron la hermandad pitagórica hasta el siglo V d.C.

9. El teorema del coseno

Para un ángulo recto este teorema es equivalente al de Pitágoras. Su demostración[15], por tanto, se hace para el caso de un triángulo no rectángulo.



Por el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = h^2 + u^2$$

$$a^2 = h^2 + (b-u)^2 \;=\; h^2 + b^2 - 2bu + u^2$$

de donde $c^2 \;=\; a^2 - b^2 + 2bu$

Ahora, $Cos(\gamma) \;=\; \frac{b-u}{a}$ y despejando

$$u \;=\; b - aCos(\gamma)$$

Finalmente, sustituyendo

$$\boxed{c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2abCos(\gamma)}$$

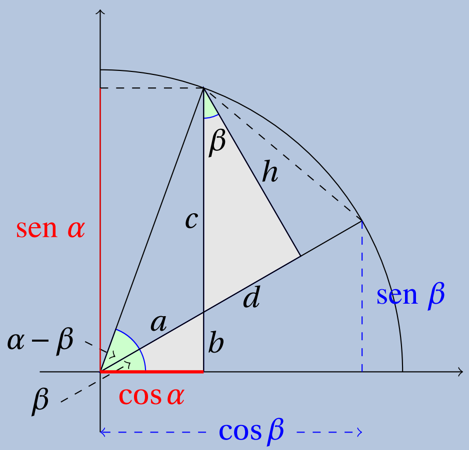
Si se hace la demostración para un ángulo obtuso γ, la fórmula que se obtiene lleva signo mas en vez de menos.
Como el coseno de un ángulo obtuso es negativo, la fórmula que se obtiene formalmente es la misma que para un ángulo agudo.

[15] Para un ángulo, γ, obtuso, la demostración es análoga.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

10. El coseno de la diferencia de dos ángulos

Este resultado es clave para la demostración del resto de las fórmulas trigonométricas planas[16]. De hecho todas las demás razones del ángulo diferencia, como las del ángulo suma, ángulo doble y ángulo mitad se deducen de esta.



Los dos triángulos coloreados tienen los mismos ángulos, $90° - \beta$, $90°$ y β. Por tanto

$$\begin{aligned} sen\beta &= \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \\ \cos\beta &= \frac{h}{c} = \frac{\cos\alpha}{a} \end{aligned}$$

$$d = c * sen\beta, \quad b = a * sen\beta$$

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \; b = \frac{\cos\alpha * sen\beta}{\cos\beta}$$

Usaremos los valores de a, b y d obtenidos para terminar la demostración.

---

[16]Por tanto también, para el cálculo de las razones de un ángulo en función de las de otros ángulos. Por ejemplo, se puede calcular el coseno de 15° conociendo las razones de 45° y 30°.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

Por otra parte, del dibujo se deduce $c = sen\alpha - b =$

$$= sen\alpha - \frac{\cos\alpha * sen\beta}{\cos\beta} = \frac{sen\alpha * \cos\beta - \cos\alpha * sen\beta}{\cos\beta}$$

También del dibujo, se deduce que $\cos(\alpha-\beta) = a + d =$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + c * sen\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{(sen\alpha * \cos\beta - \cos\alpha * sen\beta) * sen\beta}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{(1 - sen^2\beta) * \cos\alpha \ + \ sen\alpha * \cos\beta * sen\beta}{\cos\beta} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta * \cos\alpha \ + \ sen\alpha * \cos\beta * sen\beta}{\cos\beta} = \cos\beta * \cos\alpha \ + \ sen\alpha * sen\beta$$

La última cadena de igualdades, demuestra el siguiente

Teorema 2. [Coseno de la diferencia] *El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual a*

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha * \cos\beta + sen\alpha * sen\beta}$$

Como consecuencia[17], se obtienen las razones del **ángulo complementario**.

$$\cos(90-\beta) = \cos 90 * \cos\beta + \mathrm{sen}90 * sen\beta = \mathrm{sen}\beta$$

$$\cos\beta = \cos(90-(90-\beta)) = \mathrm{sen}(90-\beta)$$

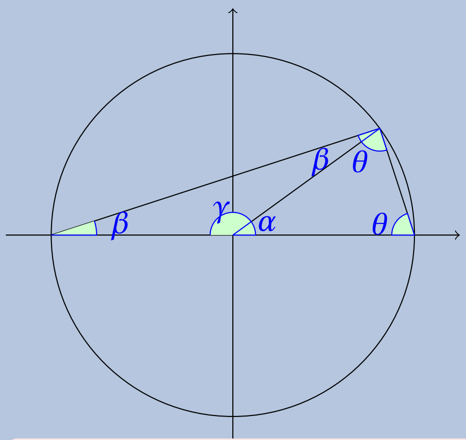
[17] El resto de las fórmulas, que se obtienen a partir de este teorema, se demuestran en la práctica correspondiente.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11. Ángulos inscritos en la circunferencia

Los ángulos inscritos están en relación con los ángulos centrales.



Del triángulo isósceles pequeño de la izquierda, obtenemos

$$2\beta + \gamma = 180^\circ$$

Por otro lado, se tiene la relación inmediata

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

De donde, se deduce que

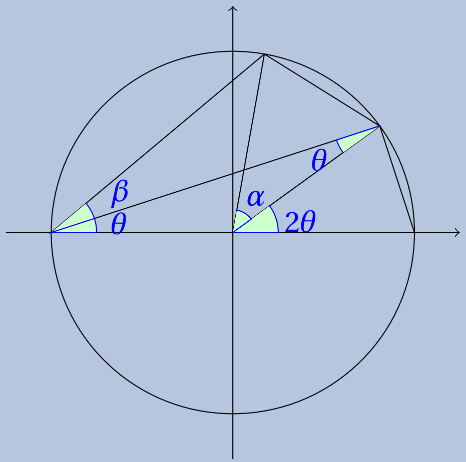
$$\alpha = 2\beta$$

Usando también el triángulo isósceles pequeño de la derecha, obtenemos

$$2\theta + \alpha = 180^\circ$$
$$2\beta + \gamma = 180^\circ$$

sumando, $2\beta + 2\theta + \alpha + \gamma = 360^\circ$ y ahora restando $\alpha + \gamma = 180^\circ$ se obtiene $2\beta + 2\theta = 180^\circ$. Finalmente, dividiendo por 2, $\boxed{\beta + \theta = 90^\circ}$

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



Por el resultado de arriba, tenemos que

$$\alpha + 2\theta = 2(\beta + \theta)$$

De donde, restando 2θ, se deduce

$$\alpha = 2\beta$$

O sea, cualquier ángulo, α, visto desde el centro es el doble del ángulo, β, visto desde la circunferencia.

El resultado anterior permite calcular los ángulos de un n-ágono regular.

Definición 7. *Un n-ágono regular*[18] *es un polígono que tiene sus lados y sus ángulos iguales entre si. Así, en cada vértice inciden dos lados.*

El n-ágono regular convexo se obtiene dividiendo una circunferencia en n partes iguales. Así, el ángulo central que sustenta uno cualquiera de sus lados vale $\frac{2\pi}{n}$. Por tanto, el ángulo, θ, en uno de sus vértices sustenta el arco de los $n-2$ lados restantes, visto desde el centro este ángulo vale $(n-2)\frac{2\pi}{n}$.

Luego, visto desde el vértice vale la mitad $\boxed{\theta = (n-2)\frac{\pi}{n}}$

[18] Para $n = 3, 4$, son el triángulo equilátero y el cuadrado, para cada $n > 4$ hay dos polígonos regulares uno convexo y otro estrellado.

Página web personal
Página de Abertura
Contenido
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Página 23 de 34
Atrás
Pantalla grande/pequeña
Cerrar

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11.1. Las razones de 30°. Si consideramos el número complejo

$$z = Cos(30^\circ) + iSen(30^\circ) = Cos(\frac{90^\circ}{3}) + iSen(\frac{90^\circ}{3})$$

y lo elevamos al cubo obtenemos[19]

$$z^3 = (Cos(\frac{90^\circ}{3}) + iSen(\frac{90^\circ}{3}))^3 = Cos(90^\circ) + iSen(90^\circ) = 0 + i \cdot 1 = i$$

ahora si llamamos $a = Cos(30^\circ)$, $b = Sen(30^\circ)$, podemos calcular la misma potencia en función de a y b

$$z^3 = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2ib - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$$

de donde igualando las partes reales e imaginarias, obtenemos las dos igualdades $a^3 - 3ab^2 = 0$ y $3a^2b - b^3 = 1$.
Ahora, como 30° es un ángulo del primer cuadrante, deben ser $a > 0$ y $b > 0$.
Dividiendo por a en la primera igualdad obtenemos

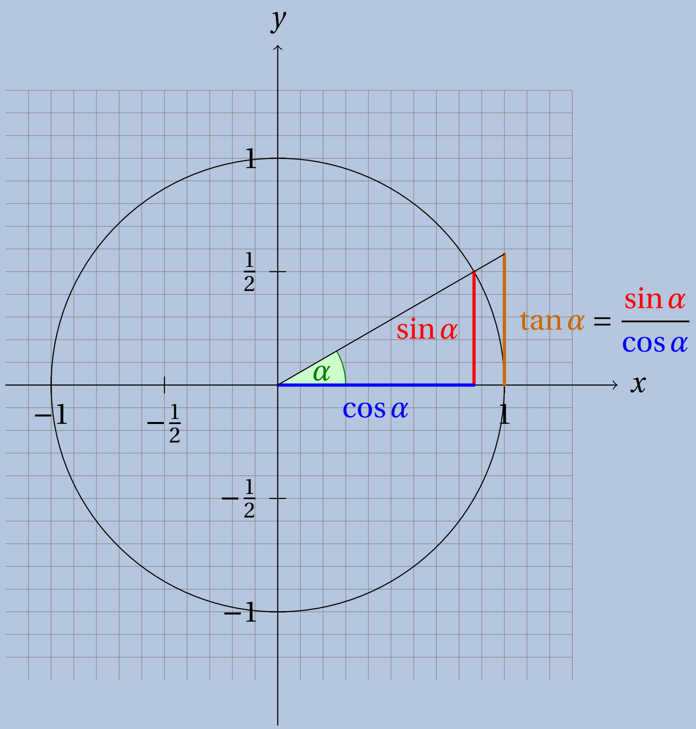
$$a^2 - 3b^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 = 3b^2$$

$$3a^2b - b^3 = 1 \Longleftrightarrow 9b^3 - b^3 = 8b^3 = 1 \Longleftrightarrow b^3 = 1/8 \Longleftrightarrow b = 1/2$$

O sea, hemos obtenido que $\boxed{Sen(30^\circ) = 1/2}$

[19] Considerando la multiplicación de números complejos. O sea, la fórmula de Moivre para la potencia de un número complejo.

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



El ángulo α vale 30° ($\pi/6$ en radianes). El seno de α, que es la altura de la línea roja, vale

$$\sin\alpha = 1/2$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Así pues la longitud de la línea azul, que es el coseno de α, debe ser

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 1/4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Por el teorema de Tales, $\tan\alpha$ es la altura de la línea naranja, valdrá entonces

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11.2. Las razones de 60°. Si consideramos el número complejo

$$z = Cos(30^\circ) + iSen(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

y lo elevamos al cuadrado obtenemos[20]

$$z^2 = Cos(60^\circ) + iSen(60^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De donde se obtienen las razones de 60°.

$$\boxed{Cos(60^\circ) = 1/2} \qquad \boxed{Sen(60^\circ) = \sqrt{3}/2}$$

11.3. Las razones de 15°. Como $15^\circ = 30^\circ/2$, el número complejo $z = Cos(15^\circ) + iSen(15^\circ) = a + ib$ es una raíz cuadrada de $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. O sea,

$$a^2 - b^2 + 2abi = (a+ib)^2 = z^2 = \sqrt{3}/2 + i/2$$

de donde $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $2ab = \frac{1}{2}$. También $a^2 + b^2 = 1$. Finalmente, resolviendo el sistema se obtiene

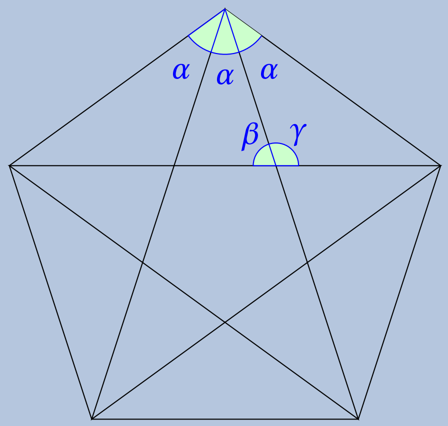
$$\boxed{a = Cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \qquad b = Sen(15^\circ) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

[20] Considerando la multiplicación de números complejos. O sea, la fórmula de Moivre para la potencia de un número complejo.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

11.4. Las razones de 72°.

Para obtener las razones del ángulo de 72°. Basta dibujar el pentagrama pitagórico[21] y darse cuenta que todos los triángulos que se obtienen son isóceles y que todos los ángulos valen 36°, 72° o 108°.



Por un resultado anterior, tenemos que cualquiera de los tres ángulos de cada vértice (15 en total) satisfacen

$$72^\circ = \frac{360^\circ}{5} = 2\alpha$$

De donde, dividiendo por 2

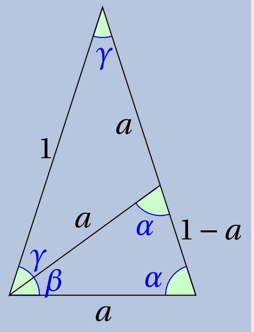
$$\alpha = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Finalmente,

$$\gamma = 180 - 2\alpha = 180 - 72 = 108^\circ$$
$$\beta = 180 - \gamma = 180 - 108 = 72^\circ$$

[21] Si se divide una circunferencia en 5 partes iguales, los 5 puntos dan lugar a dos polígonos regulares. Uniendo cada uno con su siguiente (pentágono regular) o bien cada uno con el siguiente de su siguiente (pentágono estrellado).

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra



Del triángulo isósceles pequeño (lados a, a y $1-a$), obtenemos que el ángulo β vale $180^\circ - 2\alpha$.
Del triángulo isócesceles grande (lados 1, 1 y a), obtenemos que $\beta + \gamma = \alpha$ y que $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$.
O sea, que $\beta = \gamma = 180^\circ - 2\alpha$. Por tanto,

$$\alpha = \beta + \gamma = 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 4\beta \quad \Longrightarrow$$

$$5\beta = 180^\circ \Longrightarrow \beta = 180^\circ/5 = 36^\circ \Longrightarrow \alpha = 2\beta = 2 * 36 = 72^\circ$$

Así, el triángulo pequeño y el grande tienen el mismo valor de sus tres ángulos 72°, 72° y 36°.
Como son proporcionales, se tiene

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \quad \Longrightarrow \quad 1 - a = a^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + a - 1 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618034$$

Si trazamos la altura h del triángulo isósceles grande, obtenemos un triángulo rectángulo con hipotenusa 1. Así, podemos calcular el coseno de α, como cateto contiguo partido por 1. O sea,

$$\cos 72^\circ = \frac{a/2}{1} = \frac{a}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 0.309017$$

$$\sin 72^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0.951057$$

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

12. EJERCICIOS.

Ejercicio 1. *Calcule, usando números complejos y las razones conocidas de* $72°$*, las razones de* $36°$.

Ejercicio 2. *Calcule, usando números complejos y las razones conocidas de* $36°$*, las razones de* $18°$.

Ejercicio 3. *Calcule, usando el coseno de la diferencia de dos ángulos, las razones de* $3°$.

Ejercicio 4. *Calcule, usando números complejos y el ejercicio anterior, las razones de* $6°$.

Ejercicio 5. *Razone que, usando números complejos, se pueden calcular las razones de cualquier múltiplo entero de* $3°$.

Ejercicio 6. *Por un punto de un plano geológico, el C de cota* 500*, o sea perteneciente a una linea de nivel que indica* 500 *metros sobre el nivel del mar, pasa una recta de dirección N225E y un buzamiento de* $30°$ *hacia el SW. Determinar un punto de dicha recta a cota* 250 *metros.*

Ejercicio 7. *Localizados dos puntos en un plano geológico, el C de cota* 150*, o sea perteneciente a una linea de nivel que indica* 150 *metros sobre el nivel del mar y otro B de cota* -400*, o sea perteneciente a una linea de nivel que indica* -400 *metros bajo el nivel del mar. Usando la escala del mapa,*

Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

sabemos además que dichos puntos distan en el mapa 800 *metros* $= 0.8$ *kms. Calcular la distancia real y la pendiente en el terreno entre ambos puntos.*

Ejercicio 8. *En un plano geológico de escala* $1:10000$*, se localizan dos puntos, el* $C\,(500)$*, o sea perteneciente a una linea de nivel que indica* 500 *metros sobre el nivel del mar, y otro* $B(400)$ *pero que se encuentra en el plano 2.5 cms a la derecha y 3.1 cms hacia abajo del C. Determinar la distancia real en el terreno, así como la dirección y strike e inclinación o buzamiento de la recta definidos por ellos.*

Ejercicio 9. *En un plano geológico de escala* $1:10000$*, se localizan dos puntos, el* $C\,(1300)$*, o sea perteneciente a una linea de nivel que indica* 1300 *metros sobre el nivel del mar, y otro B del que no se conoce la cota pero que buza* $35°$ *al NE y se encuentra en el plano 3 cms a la derecha y 2.1 cms hacia arriba del C. Hallar la cota del punto B sobre el nivel del mar y determinar la dirección (strike) de la recta definidos por ellos.*

Ejercicio 10. *En un plano geológico de escala* $1:10000$*, se localizan tres puntos, el* $A_1(100)$*, el* $A_2(200)$ *y el* $A_3(300)$ *tales que el* A_2 *está 3 cm al este y 1 cm al sur del* A_1*, mientras que el* $A3$ *se encuentra 2.5 cm al este y 2.3 cm al norte del* A_1*. Resolver el triángulo formado por* A_1*,* A_2 *y* A_3*.*

13. Test de repaso.

Para comenzar el cuestionario pulsa el botón de inicio.
Cuando termines pulsa el botón de finalizar.
Para marcar una respuesta coloca el ratón en la letra correspondiente y pulsa el botón de la izquierda (del ratón).

Inicio del Test

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?.

(a) Un ángulo es cualquier pareja de rectas.
(b) Un ángulo es cualquier pareja de semirectas.
(c) Un ángulo es una semirecta con vértice en el origen de coordenadas.
(d) Un ángulo es cualquier pareja de semirectas con un vértice común.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un ángulo no puede ser negativo.
(b) Un ángulo no puede ser mayor de $360°$.
(c) Un ángulo siempre tiene un valor equivalente entre $-180°$ y $180°$.
(d) El valor de un ángulo no puede ser mayor de 2π ni menor de 2π.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) 1° vale $\frac{180}{\pi}$ radianes.
(b) 1° no tiene equivalencia en radianes.
(c) 1° es mucho mas pequeño que 1 radian.
(d) 1° vale $\frac{9}{160}$ radianes.

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Un mil es más pequeño que 1° y mucho mas pequeño que un radian.
(b) Un ángulo de 1 mil es aproximadamente una milésima de un grado sexagesimal.
(c) Un ángulo de 1 mil vale 7.7778 grados.
(d) Un mil es una unidad de medida lineal.

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de Tales se demuestra con triángulos semejantes.
(b) Todas las demostraciones trigonométricas son gráficas.
(c) Algunas demostraciones trigonométricas son algebraicas.
(d) El teorema de Tales no tiene demostración.

6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(a) El teorema de Pitágoras es equivalente a la relación fundamental de la trigonometría plana.
(b) El teorema de Pitágoras sólo se demuestra gráficamente.
(c) El teorema de Pitágoras sirve para demostrar el de Tales.
(d) La trigonometría plana sirve para demostrar los teoremas clásicos.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) Las razones de un ángulo se definen por el teorema de Pitágoras.
(b) Las razones de un ángulo son tres.
(c) Las razones de un ángulo son argumentos para estudiar un triángulo.
(d) Las razones de un ángulo se definen por el teorema de Tales.

8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de los catetos es equivalente al de la altura.
(b) El teorema de los catetos implica el de Pitágoras.
(c) El teorema de los catetos es equivalente al de Pitágoras.
(d) El teorema de la altura implica la relación fundamental de la trigonometría.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El teorema de los senos es equivalente al del coseno.
(b) El teorema de los senos implica el del coseno.

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra

(c) El teorema del coseno implica el de Pitágoras.
(d) Estos teoremas sólo tienen utilidad gráfica.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El coseno de la diferencia de dos ángulos sólo se puede calcular en algunos casos.
(b) El coseno de la diferencia de dos ángulos sólo sirve para resolver triángulos.
(c) El coseno de la suma de dos ángulos equivale al de la diferencia.
(d) El coseno de la diferencia de dos ángulos implica muchas fórmulas trigonométricas.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?.

(a) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 72°.
(b) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 36°.
(c) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 60°.
(d) El ángulo interior de un pentágono regular convexo vale 108°.

Final del Test | Puntos:

ugr Universidad de Granada
Enrique R. Aznar
Dpto. de Álgebra