



Una perspectiva histórica de las series de Fourier

Seminario de Historia de la Matemática

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA DE LAS SERIES DE FOURIER: DE LAS ECUACIONES DE ONDAS Y DEL CALOR A LOS OPERADORES COMPACTOS Y AUTOADJUNTOS

A. Cañada

Departamento de Análisis Matemático
(Universidad de Granada, 18071, Granada, España)

1.991 Mathematics Subject Classification: 01-02, 01A50, 01A55, 01A60, 42-03.

Palabras clave: Series de Fourier, notas históricas, ecuación de ondas, ecuación del calor, problemas del tipo Sturm-Liouville, bases de espacios de Hilbert, operadores compactos y autoadjuntos.

Resumen

Uno de los problemas del que se ocuparon los matemáticos del siglo XVIII es el que se conoce con el nombre del “problema de la cuerda vibrante”. Este problema fue estudiado por d’Alembert y Euler (usando el método de propagación de las ondas) y un poco más tarde, concretamente en 1.753, por Daniel Bernouilli. La solución dada por éste difería de la proporcionada por los anteriores y consistió básicamente en expresar la solución del problema como superposición (en general infinita) de ondas sencillas. Las ideas de Bernouilli fueron aplicadas y perfeccionadas por Fourier, en 1.807, en el estudio de problemas relacionados con la conducción del calor. Quedaron plasmadas por escrito en el libro clásico “Théorie analytique de la Chaleur”, publicado en 1.822. Los razonamientos realizados por Fourier en este libro plantearon de manera inmediata numerosas controversias y cuestiones que han tenido una influencia significativa en la historia de la Matemática. En este trabajo comentamos algunas de ellas, tales como la existencia de funciones continuas no derivables, la teoría de conjuntos de Cantor y las nociones de integral de Cauchy, Riemann y Lebesgue. Hablamos, además, de cómo es la presentación actual de la teoría de series de Fourier, a través del espacio de funciones de cuadrado integrable, en el sentido de Lebesgue, y de los problemas de contorno del tipo

Sturm-Liouville, que proporcionan bases más generales que la de Fourier. Por último, comentamos el papel jugado en este siglo por el Análisis Funcional para situar la teoría de series de Fourier en su marco abstracto: el de las bases de los espacios de Hilbert separables, obtenidas con los vectores propios de los operadores lineales, compactos y autoadjuntos. Este punto de vista abrió el rango de aplicabilidad de los métodos de Fourier a campos insospechados.

1

D'Alembert, Euler y la ecuación de la cuerda vibrante

Uno de los problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del Siglo XVIII, y que se presenta con relativa frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios, fué el que se conoce con el nombre de “**El problema de la cuerda vibrante**”. Éste, puede describirse en la situación más elemental posible, de la siguiente forma: Supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá descrito por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t ($t \geq 0$). El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue *Jean Le Rond d'Alembert*. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean “pequeñas”), *d'Alembert* demostró en 1747 (**Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219**; ver [25], [27] para

más detalles) que la función u debe satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

La primera condición en (1.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación de Ondas**. La segunda condición representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que, una vez llevada a la posición $f(x)$, la cuerda se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

D'Alembert demostró también que la solución de (1.1) viene dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{1.2}$$

donde \tilde{f} es “una extensión conveniente de la función f .”

De manera más precisa, y con el lenguaje de hoy en día, el teorema de *d'Alembert* ([25], [27]), confirmó que la posición futura de la cuerda está completamente determinada por su posición inicial:

TEOREMA 1.1. *Sea $f \in C^2[0, \pi]$, tal que $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$. Entonces (1.1) tiene una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, donde $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$. Además u viene dada por la fórmula (1.2), donde \tilde{f} es la extensión a \mathbb{R} (conjunto de los números reales), impar y 2π -periódica de la función f .*

No se conoce con exactitud la manera en que *d'Alembert* llegó a la fórmula (1.2), pero un camino muy probable pudo ser el siguiente: el cambio de variables $\xi = x+t$, $\mu = x-t$, transforma la ecuación $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, en otra más simple: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0$. Las soluciones de esta última ecuación son trivialmente de la forma $u(\xi, \mu) = F(\xi) + G(\mu)$. Combinando esta última relación con las

otras condiciones en (1.1), se puede llegar a intuir la forma (1.2) que tiene la solución de (1.1).

La interpretación física de la solución dada por *d'Alembert* es muy interesante: La función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x+t)$ representa una onda (una solución de la ecuación de ondas) que se desplaza hacia la izquierda con velocidad 1. Análogamente, la función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x-t)$ representa otra onda que se desplaza hacia la derecha con velocidad 1. De este modo, la solución de (1.1) es la superposición de dos ondas, una de las cuales se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ambas con velocidad 1. Por este motivo se dice que la fórmula (1.2) se ha obtenido usando el **Método de propagación de las ondas**.

La fórmula (1.2) fue también demostrada por *Euler* (**Mora Acta Erud., 1749, 512-527**), quien difería fundamentalmente de *d'Alembert* en el tipo de funciones iniciales f que podían considerarse. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de “función”, un concepto que hoy en día presumimos de tener muy claro. Mientras que para *d'Alembert*, f debería tener una fórmula concreta o expresión analítica, *Euler* defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas que, en diferentes parte de $[0, \pi]$, viniesen definidas por expresiones distintas, siempre que al considerarlas unidas, la posición inicial resultante tuviese una apropiada regularidad.

Parece ser que tal discusión entre *d'Alembert* y *Euler* provenía del hecho de que en su tiempo se admitía que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente (cuando la gráfica considerada tenía diferentes expresiones en distintos intervalos). En resumen, *Euler* defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por *d'Alembert*.

Otra manera de obtener la solución del problema (1.1), completamente distinta de la vista anteriormente, fue propuesta por *Daniel Bernouilli* en 1753 (**Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195**). La idea clave es obtener la solución de (1.1) como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma

$$u_n(x, t) = \text{sen}(nx) \cos(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $\text{sen}(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0, \pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de

la cuerda correspondiente a las ondas u_n , tendríamos $n - 1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0, \pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (1.3).

¿Cómo concibió *Bernouilli* la idea anterior? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales. Para ello se basó en que el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos, es decir, superposición de funciones de la forma $u_n(x, t)$. Tales funciones representan, para $n = 1$ el tono fundamental y para $n > 1$ sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Así, *Bernouilli* afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros. Desde el punto de vista matemático, ello significa que la solución de (1.1) debe poder representarse de la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nt), \quad (1.4)$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfaga (1.1).

Para tranquilidad de los matemáticos, diremos que hay otra manera de llegar a la expresión anterior (no obstante, esta segunda forma, que es posible que fuese también usada por *Bernouilli*, no permite, desde el punto de vista intuitivo pensar que (1.4) es posible, al menos en una primera impresión. A pesar de ello, como todo en esta vida tiene ventajas e inconvenientes, parece ser que este segundo punto de vista fue importantísimo en el estudio por parte de *Fourier*, del problema de la conducción del calor, que trataremos posteriormente). El punto de partida de este otro planteamiento puede ser la siguiente pregunta elemental: ¿Cuáles son las soluciones más sencillas posibles de (1.1)? Creo que estaremos de acuerdo en que, al ser la solución de (1.1) una función $u(x, t)$ de dos variables, tales soluciones sencillas han de ser producto de una función de x por una función de t ; es decir, $u(x, t) = X(x)T(t)$, o lo que es lo mismo, **funciones con variables separadas**. Derivando y sustituyendo, de manera formal, en (1.1), llegamos a los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (1.5)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

En la expresión anterior, λ hace el papel de parámetro real. Es sencillo probar (véase [7]) que (1.5) tiene solución no trivial si y solamente

si $\lambda \in \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\lambda = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (1.5) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $\text{sen}(nx)$. Análogamente, para $\lambda = n^2$, el conjunto de soluciones de (1.6) es un espacio vectorial real de dimensión dos, cuya base la constituyen las funciones $\cos(nt)$, $\text{sen}(nt)$.

Disponemos por tanto de un procedimiento que nos permite calcular infinitas “soluciones elementales” de la ecuación de ondas, a saber, las funciones de la forma $a_n u_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y u_n se define como en (1.3). Es trivial que, si la posición inicial f de la cuerda, en (1.1), es algún múltiplo de $\text{sen}(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (1.1) es un múltiplo adecuado de u_n (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma. Es curioso poner de manifiesto que este hecho era conocido por *Euler*, como manifestó *Bernouilli* en su trabajo. Sin embargo, *Euler* trató sólo el caso de superposiciones finitas).

Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y ahora viene la pregunta clave: ¿Será posible obtener la solución de (1.1), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas u_n ? Esto es lo que propuso *Bernouilli*.

Si la solución propuesta por *Bernouilli* fuese correcta, ello obligaría a que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (1.7)$$

para “una adecuada elección de los coeficientes a_n ”.

Las ideas expuestas por *Bernouilli* en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de *d'Alembert* y *Euler* quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (1.7) (*d'Alembert*) ni menos aún cualquier función (*Euler*). Representativo de ésto que decimos puede ser el artículo de *d'Alembert* titulado “*Fondamental*” contenido en el volumen séptimo de la famosa “*Encyclopédie*”. De manera más precisa, la parte derecha de (1.7), suponiendo que fuese convergente, era para *Euler* una función, mientras que la parte izquierda podría representarse mediante varias

funciones, en diferentes intervalos. La controversia se prolongó durante años sin llegarse a ningún acuerdo, pues *Daniel Bernouilli* seguía firme en sus ideas, argumentando que en (1.7) hay “suficientes coeficientes” como para poderlos elegir, de tal manera que (1.7) se cumpla. Por tanto, para *Bernouilli*, (1.4) representaba la “solución general” de (1.1).

El tiempo ha demostrado que estaba más cerca de la verdad *Bernouilli* que *Euler*. De hecho, hoy en día el teorema siguiente forma parte de cualquier curso elemental de Ecuaciones en Derivadas Parciales (véase [25], [27]):

TEOREMA 1.2. *Sea $f \in C^3[0, \pi]$, tal que $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$. Entonces (1.1) tiene una única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, donde $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$. Además u viene dada por la fórmula (1.4), donde*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Es usual, al explicar en los cursos actuales el problema (1.1), hacerse la siguiente pregunta: ¿Cuál de los dos, el teorema 1.1 o el teorema 1.2, es mejor? Obviamente, el matemático preocupado por tener la mayor generalidad posible diría que, sin duda, el 1.1, pues exige a la condición inicial f menos regularidad. Este es el motivo por el que el teorema 1.2 ha sido en cierta forma relegado de los libros de texto sobre el tema. Sin embargo, al matemático al que le importe más obtener la solución de (1.1) de la manera más explícita posible, le parecerá mejor el teorema 1.2. Es claro que no hay un teorema mejor que otro: ambos se complementan. El primero de ellos muestra, para $f \in C^2[0, \pi]$, la existencia y unicidad de solución de (1.1), proporcionando una manera teórica de construirla, mientras que el segundo afirma que si “ f es mejor”, también la solución se puede “representar mejor”. De lo que no nos cabe ninguna duda es de que, limitar la discusión docente a este aspecto, sin ninguna referencia histórica a los trabajos de *d’Alembert*, *Euler* y *Bernouilli*, es tremendamente pobre para la formación científica del alumno, que no tiene así la oportunidad de conocer la filosofía tan diferente que se encuentra presente en los dos teoremas.

2

Fourier y el problema de la conducción del calor

Hubo que esperar 54 años hasta que las ideas de *D. Bernouilli* fueron tomadas en cuenta por el barón *Jean Baptiste-Joseph Fourier*, matemático y físico

francés, quien, entre otras actividades, acompañó a Napoleón, en calidad de científico, en la campaña de éste a Egipto. Allí, como secretario del “Instituto de Egipto”, hizo gala de una gran competencia en diversos asuntos administrativos.

Al regresar a Francia, y como profesor de Análisis de la Escuela Politécnica, *Fourier* se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre dicho tema. Más concretamente, *Fourier* consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π , cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿Cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ? Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas ([25]), *Fourier* demostró que si $u(x, t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t , entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, 0 < t < T, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La primera condición en (2.1) es una Ecuación en Derivadas Parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación del Calor**. La segunda significa que la temperatura, en los extremos de la varilla, se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de *Bernouilli*, para la ecuación de ondas, *Fourier* buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x, t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan, formalmente, dicha ecuación, obtenemos, como en el caso de la ecuación de ondas, los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X(0) = X(\pi) = 0, \tag{2.2}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.3}$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Como antes, (2.2) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (2.2) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $\text{sen}(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (2.3) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2t)$. Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas “soluciones elementales” de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma a_nv_n , donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x, t) = \exp(-n^2t)\text{sen}(nx). \quad (2.4)$$

Es trivial que, si la distribución inicial de temperatura, f , es algún múltiplo de $\text{sen}(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (2.1) es un múltiplo adecuado de v_n (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma).

Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró *Fourier*, como *Bernouilli*, una enorme intuición, ¿Será posible obtener la solución u de (2.1), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n ? Es decir, ¿Será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (2.1) sea de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2t)\text{sen}(nx). \quad (2.5)$$

Fourier afirmó en su artículo que esto era así. Observemos que nuevamente llegamos a que, entonces, se ha de satisfacer la relación (1.7). Tenemos la misma cuestión para dos problemas completamente diferentes, el problema (1.1) y el problema (2.1). Sin embargo, es de justicia mencionar que *Fourier*, a diferencia de *Bernouilli*, alcanzó la fórmula (1.8) para el cálculo de los coeficientes a_n (aunque la forma en que lo hizo fue uno de los puntos más criticado por los matemáticos de la época), llamados desde entonces coeficientes de Fourier.

El artículo de *Fourier* fue estudiado por *Lagrange*, *Laplace* y *Legendre* y fue rechazado por la Academia Francesa, básicamente por la manera en que dedujo la ecuación del calor y por su falta de rigor en la obtención de sus conclusiones (siempre según la opinión de los académicos citados). No obstante, los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por *Fourier* tenían una gran concordancia con

diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un premio sobre el tema. Dicho premio fue otorgado a *Fourier* en 1812, pero a pesar de ésto, los miembros de la Academia seguían criticando su falta de rigor, de tal manera que, a pesar de obtener el citado premio, *Fourier* no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la célebre serie “Mémoires” de la Academia Francesa. *Fourier*, haciendo gala de un gran tesón, siguió trabajando en el tema y en 1822 publicó su famoso libro **Théorie Analytique de la Chaleur, Firmin Didot, Père et Fils, 1.822, París**, donde incorporó parte de su artículo de 1812 prácticamente sin cambio. Este libro es actualmente una de las obras Clásicas en Matemáticas.

Dos años más tarde consiguió el cargo de *Secretario de la Academia Francesa* y al fin pudo publicar el mencionado artículo en la serie “Mémoires”.

La Historia ha dado la razón a *Fourier*, como se muestra en el siguiente teorema, parte hoy en día de cualquier curso de introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales ([25], [27]):

TEOREMA 2.1 . *Sea $f \in C^1[0, \pi]$, tal que $f(0) = f(\pi) = 0$. Entonces (2.1) tiene una única solución $u \in C_t^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (de clase C^1 , respecto de t , C^2 respecto de x y continua en $\bar{\Omega}$), donde $\Omega = (0, \pi) \times (0, T]$. Además, dicha solución viene dada por la fórmula (2.5) donde los coeficientes a_n están definidos en (1.8).*

3

Influencia de las ideas de Fourier en la Historia de la Matemática

Otros tipos de problemas distintos de los aquí considerados, conducen a la posibilidad de desarrollos diferentes de (1.7). Por ejemplo, el problema de las vibraciones de una cuerda libre en sus extremos ([27]), nos plantea la cuestión de si será posible desarrollar una función dada f , definida en $[0, \pi]$, en una serie de la forma

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \quad \forall x \in [0, \pi], \quad (3.1)$$

para coeficientes b_n adecuados (véase la sección 4.2). Muchos problemas de naturaleza periódica dan lugar a plantearse la cuestión de si se podrá obtener, para una función f , definida sobre $[-\pi, \pi]$, un desarrollo de la forma

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.2)$$

La posibilidad de obtener una respuesta afirmativa a las anteriores cuestiones es, cuanto menos en una primera impresión, aparentemente difícil y porqué no decirlo, descabellada. No es pues de extrañar la reacción de *d'Alembert* y *Euler* ante las afirmaciones de *Bernouilli*, y de los miembros de la Academia Francesa ante las afirmaciones de *Fourier*. Sin embargo, aunque de manera lejana en sus planteamientos y en su origen, el problema tiene algo de similitud con el desarrollo infinito de Taylor de una función suficientemente regular en un punto dado, pues en ambos casos se trata de desarrollar una función dada en una serie, utilizando para ello funciones “más sencillas”: los polinomios en el caso de la fórmula de Taylor y las funciones trigonométricas en los casos de las fórmulas (1.7), (3.1) y (3.2). Es claro que hay también diferencias fundamentales entre ambos propósitos, que se observan no sólo en el origen del problema sino también en su posterior desarrollo. Pero es evidente que en los siglos XVIII y XIX, ya nadie dudaba de la utilidad del desarrollo de Taylor. Se puede consultar la referencia [11] para apreciar con detalle algunas de las relaciones más curiosas e importantes entre las series de Taylor y de Fourier.

Las ideas expuestas por *Fourier* en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes. Algunos fueron los siguientes:

Dada una función real f definida en $[0, \pi]$ (o en $[-\pi, \pi]$), ¿Será posible encontrar coeficientes a_n o b_n adecuados tales que se tenga el desarrollo (1.7), ó (3.1) ó (3.2)? ¿Cuáles son las expresiones concretas de tales coeficientes?

- ¿En qué sentido se tiene la anterior convergencia?

- ¿Qué tipos de problemas pueden resolverse usando las anteriores ideas?

La lista de preguntas sería interminable...

Las cuestiones anteriores han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas. Comentar, incluso sólo las más significativas, sería demasiado largo. Sin embargo, no nos resistimos a mencionar algunas de las que más nos han llamado la atención (véase, también [12], donde se discuten otras).

3.1.- Funciones continuas no derivables.

Las nociones de continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas y, ya desde la enseñanza secundaria, los alumnos distinguen claramente ambos conceptos. Sin embargo, históricamente no ha ocurrido así. De hecho, el primitivo concepto de derivada

debido a *Newton* y *Leibnitz* era bastante más complicado de expresar del que conocemos en la actualidad. Fue *Cauchy* quien, unificando las notaciones de *Newton* y *Leibnitz*, y basado en una definición anterior de *Bolzano* de 1.817, introdujo, en 1823 (**Résumé des leçons, OEuvres, (2),4, 22**), la definición que hoy en día se da en todos los libros de texto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.3)$$

Durante bastante tiempo se estuvo convencido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos “aislados” de puntos. Pero, insistamos, ¿En cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿En cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación, en 1.822, del libro de *Fourier, Dirichlet* se ocupó durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando, por primera vez de forma rigurosa, un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas (**Jour. für Math., 4, 1.829, 157-69**). Este conjunto de hipótesis incluía la continuidad. Durante, aproximadamente, los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de su serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así y todo ello motivó el estudio de funciones “raras” en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables “en el máximo número de puntos posibles”.

El ejemplo que comenzó a poner las cosas en su sitio es debido a *Riemann* (**Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött., 13, 1.868, 87-132; Werke, 227-64**), quien en esa época estaba tratando, entre otras cosas, la posibilidad del desarrollo de una función dada en serie trigonométrica.

El concepto de serie trigonométrica, más general que el de serie de Fourier, es el de una serie de la forma

$$\frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \text{sen}(nx) + b_n \text{cos}(nx)) \quad (3.4)$$

donde a_n, b_n son números reales, no necesariamente coeficientes de Fourier de alguna función dada (Los coeficientes de Fourier, se definen dependiendo de la serie considerada: por ejemplo, para el caso del desarrollo (1.7), los coeficientes de Fourier se definen en (1.8). Formalmente, para obtener a_n se multiplican ambos lados de (1.7) por la función $\text{sen}(nx)$, y se integra término a término,

en el intervalo dado, la serie así obtenida. Utilizando el hecho de la ortogonalidad de las funciones $\text{sen}(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, en el intervalo $[0, \pi]$, se obtiene a_n . Análogo razonamiento se aplica para calcular los coeficientes de Fourier de los desarrollos (3.1) y (3.2)).

Riemann definió una función f , integrable en cualquier intervalo real finito, pero que tiene un conjunto infinito de discontinuidades en cualquier intervalo real no trivial. Una primitiva cualquiera de f , es continua en cualquier punto de \mathbb{R} , y sin embargo no es derivable en ningún punto de discontinuidad de f (véase [16], [21] para detalles).

Posteriormente, *Weierstrass* (**Jour. für Math.**, **79**, **1.875**, **21-37**), estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de *Fourier*, presentó en 1.872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlín: una función real, de variable real, continua en cualquier punto y no derivable en ninguno. Concretamente, el ejemplo de *Weierstrass* está dado por la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \quad (3.5)$$

donde $0 < b < 1$, y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$.

Puede pensarse, de manera intuitiva, que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El Análisis Funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX ([10]), permite probar que las anteriores situaciones son las que “usualmente cabe esperar”, aunque, gracias a Dios, no encontrar. ¿Cómo es esto? La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de *Baire*, que comentamos a continuación.

Sea X un espacio de Banach real cualquiera (es decir un espacio vectorial real, dotado de una norma ([3]), tal que cualquier sucesión de *Cauchy* es convergente.) Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X , si y solamente si, M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $\text{int } \overline{M_n} = \emptyset$, donde $\text{int } \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y \emptyset indica el conjunto vacío. Por ejemplo, cualquier subconjunto numerable de X es de primera categoría.

Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X , si M no es de primera categoría en X . Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría “deben contener muchos más elementos” que los de primera categoría.

Consideremos ahora $X = C([a, b], \mathbb{R})$, es decir, el espacio de Banach de las funciones reales y continuas, definidas en un intervalo dado $[a, b]$ de \mathbb{R} , con la

norma uniforme. Más precisamente,

$$X = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua en } [a, b]\}$$

y

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} \{|f(x)|\}, \forall f \in X.$$

Sea

$$M = \{f \in X : \exists x_* \in [0, 1) : \text{existe } f'_+(x_*)\}$$

Pues bien, puede probarse que el conjunto M es de primera categoría en X ([28]) y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X . En definitiva, lo que en principio puede pensarse que es excepcional (que existan funciones como las encontradas por *Riemann* y *Weierstrass*), resulta que es lo usual.

En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, *Du Bois-Reymond* (**Nachrichten König, Ges. der Wiss. zu Gött., 1.873, 571-82**), dió en 1.873 un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un punto particular. Es más, construyó un ejemplo de una función continua tal que su serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos. Llegados aquí, la pregunta puede ser: ¿En cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1.966, año en que *Carleson* demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un conjunto de medida de *Lebesgue* nula ([5], [6]). Para redondear el tema, *Kahane y Katznelson* probaron, también en 1966, que dado cualquier conjunto A de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de A ([19]).

3.2.- La teoría de conjuntos de *Cantor*.

La teoría de conjuntos de *Cantor*, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de Matemática moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevó a *Cantor* a definir algunas de las primeras nociones de Topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación.

En efecto, cuando *Cantor* comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, otro colega, *Heine*, estaba interesado en aquella época en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Más concretamente, si suponemos que la serie (3.4) es convergente, en todos los

puntos del intervalo $[-\pi, \pi]$ a una función $f(x)$, la cuestión era: ¿Será única la representación de f en serie trigonométrica? La respuesta afirmativa a esto es equivalente al hecho de que si la serie trigonométrica (3.4) es convergente a cero en todos los puntos de $[-\pi, \pi]$, entonces todos los coeficientes deben ser cero.

Cantor probó (**Jour. für Math.**, **72**, **1.870**, **139-42**) que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie en un conjunto finito de puntos. La pregunta que *Cantor* se hizo a continuación era obvia: ¿En cuántos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie dada y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Según mis conocimientos, este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos estudios sobre ello, comenzando por varios de *Cantor*, el primero fechado en 1.871 (**Jour. für Math.**, **73**, **1.871**, **294-6**). En este trabajo *Cantor* demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica, puede estar formado por infinitos elementos, siempre que tal conjunto sea “de orden finito”. ¿Cómo definió *Cantor* el orden de un conjunto? De la siguiente manera: dado cualquier subconjunto E de números reales, *Cantor* introdujo el concepto de punto de acumulación de E , tal y como se entiende hoy en día. Al conjunto de todos los puntos de acumulación, conjunto derivado de E , lo notó por E' . Análogamente puede definirse el segundo conjunto derivado de E , E'' , como el conjunto derivado de E' , y así sucesivamente. Claramente se tienen las inclusiones $\dots E''' \subset E'' \subset E'$. Entonces, un conjunto es de orden finito si algún derivado suyo es finito. También *Cantor* definió los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Demostró además que un conjunto de orden finito es o finito o puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto \mathbb{N} de los números naturales. A estos últimos conjuntos les dió el nombre de infinitos numerables, interesándose a continuación por la existencia de subconjuntos de números reales infinitos no numerables, para seguir con el estudio de subconjuntos del espacio \mathbb{R}^n . Por cierto, que posteriormente fue demostrado que cualquier conjunto numerable es válido también como conjunto de puntos excepcionales donde puede fallar la convergencia de la serie trigonométrica considerada y seguir teniendo la representación única. También se han dado ejemplos de conjuntos excepcionales no numerables ([30]).

Resumiendo, los problemas planteados por la representación única de funciones en series trigonométricas, tuvieron una influencia decisiva en el interés de *Cantor* por estudiar de manera cuidadosa las propiedades de subconjuntos de números reales relacionadas con el número de sus elementos, lo que originó

en gran medida la creación de la teoría de conjuntos.

3.3.- Las teorías de integración de *Cauchy*, *Riemann* y *Lebesgue*

Como ya hemos mencionado, las fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier fueron obtenidas por el mismo *Fourier*, aunque de manera no muy rigurosa. Por ejemplo, para el desarrollo (3.2) se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos}(nx) dx. \quad (3.6)$$

Para el caso en que f es una función continua, era suficiente el concepto de integral dado por *Cauchy*, para la existencia de los anteriores coeficientes. *Cauchy* usó, para la definición de la llamada integral de Cauchy (para funciones continuas), lo que hoy en día se conoce con el nombre de sumas de Riemann; es decir, sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (3.7)$$

donde $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$ es cualquier partición del intervalo $[-\pi, \pi]$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Aunque de manera no totalmente rigurosa, pues no expuso explícitamente el concepto de continuidad uniforme, *Cauchy* demostró que las anteriores sumas tendían a un límite (único), llamado la integral de la función, si las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tendían a cero.

Riemann también se interesó en el tema de las series trigonométricas. Él dijo que era importante, al menos para los matemáticos, aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones más amplias posibles bajo las cuales tienen sentido las fórmulas (3.6). Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es suponer sólo de partida la acotación de la función f tratada (no necesariamente continua) y establecer condiciones lo más generales posibles para que las sumas (3.7) tengan un único límite, cuando las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero. Esto le permitió integrar funciones con un número infinito de discontinuidades, aunque como es conocido, hubo que esperar a los trabajos de *Lebesgue* sobre la medida de un conjunto, para tener una caracterización precisa de las funciones que pueden integrarse según *Riemann*. De hecho, la que se considera actualmente como “integral definitiva” en muchos aspectos, es la introducida por *Lebesgue* en su tesis doctoral: “Intégrale, longueur, aire” (*Annali di Mat. Pura Appl.*, **7**, 1.902, 231-59). El punto de partida,

respecto de la noción de integral de Cauchy o de Riemann es completamente diferente, pues lo que se intentaba era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada.

Para ello, después de diferentes trabajos previos de *Du Bois-Reymond*, *Harnack*, *Stolz*, *Cantor*, *Peano*, *Jordan* y *Borel* (consúltese [21]) sobre la medida de conjuntos, el paso definitivo fue dado por *Lebesgue*, como ya hemos comentado, a principios de este siglo, cuando introdujo la noción de función medible. Comentemos brevemente las ideas básicas para el caso de una variable real.

La medida de un intervalo arbitrario $[a, b]$ (ó $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)), $\mu [a, b]$, es $b - a$. Entonces, teniendo en cuenta que todo conjunto abierto de \mathbb{R} se expresa de manera única como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos (ver [2]), se tiene que si $G \subset \mathbb{R}$ es abierto tal que $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$, podemos definir

la medida de G , $\mu(G)$, como, $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ (esta suma puede ser infinita).

Dado un subconjunto cualquiera $E \subset \mathbb{R}$ se define la medida exterior, $\mu^*(E)$, como

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G, G \text{ abierto}\}.$$

Sea ahora $A \subset [a, b]$. Diremos que A es medible si $\mu^*(A) + \mu^*([a, b] \setminus A) = b - a$. En este caso, $\mu^*(A)$ es la medida de A y se indicará como $\mu(A)$. No es difícil ver que la medibilidad y la medida de A son independientes del intervalo elegido $[a, b]$ tal que $A \subset [a, b]$.

Si A es tal que $\mu(A) = 0$, diremos que A es de medida nula. Cualquier subconjunto numerable de $[a, b]$ es de medida nula. No obstante, hay subconjuntos de medida nula que no son numerables ([1]).

Una propiedad relativa a puntos de $[a, b]$ diremos que se cumple casi por doquier (c.p.d.) en $[a, b]$ si el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida nula.

Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) > \alpha\}$ es medible. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles también lo son $|f|$, αf ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$) y $f + g$. Toda función continua casi por doquier es medible. Si f es medible y $f = g$ c.p.d. en $[a, b]$, entonces g es medible ([1]).

Consideremos ahora cualquier función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ medible y acotada. Sean $m = \inf_{[a, b]} f$, $M = \sup_{[a, b]} f$ y tomemos una partición cualquiera del intervalo $[m, M]$, P , definida por $P : m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$. Definamos $A_j =$

$\{x \in [a, b] : y_{j-1} \leq f(x) \leq y_j\}, 1 \leq j \leq n$. Cada A_j es medible. Consideremos las sumas

$$S_P = \sum_1^n y_j \mu(A_j), \quad s_P = \sum_1^n y_{j-1} \mu(A_j).$$

La gran novedad de los estudios de *Lebesgue* consistió en que éste probó que las dos cantidades

$$J = \inf_{P \in P([m, M])} S_P, \quad I = \sup_{P \in P([m, M])} s_P,$$

coinciden si, como ya hemos convenido antes, f es medible y acotada ($P([m, M])$ denota el conjunto de todas las particiones del intervalo $[m, M]$). A este valor común se le denomina integral de *Lebesgue* de f en $[a, b]$ y se nota por $\int_a^b f(x) dx$. Merece la pena observar con detenimiento que la filosofía de la integral de *Lebesgue* está basada, a diferencia de la de *Riemann*, en particiones de la imagen de la función f en $[a, b]$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable *Riemann*, entonces f es integrable (en el sentido de *Lebesgue*) y ambas integrales coinciden. El recíproco no es cierto. Además, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces f es integrable *Riemann* si y sólo si el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f no es continua tiene medida cero.

La integral de *Lebesgue* puede también extenderse al caso de funciones no acotadas y al caso en que la función considerada lo es de varias variables independientes ([1]).

Como vamos a ver en la próxima sección, la noción de integral de *Lebesgue* permitió probar con gran generalidad muchas conclusiones sobre series de *Fourier* que anteriormente eran conocidas para tipos particulares de funciones (Lema de *Riemann-Lebesgue*, Igualdad de *Parseval*, criterios de convergencia puntual, etc.). Además, muchos resultados de la teoría de integración de *Lebesgue* se expresan con una gran simplicidad y claridad respecto de las teorías de integración anteriores (Teoremas de convergencia, Teorema de *Fubini*, etc.) de tal forma que el conocimiento de la teoría de la integral de *Lebesgue* es, hoy en día, imprescindible, para poder entender y presentar adecuadamente la teoría de series de *Fourier*.

En adelante, cuando hablemos de funciones integrables se entenderá siempre, salvo que explícitamente se diga lo contrario, que lo son en el sentido de *Lebesgue*.

Presentación actual de la teoría de series de Fourier

Como hemos comentado anteriormente, en la actualidad la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del Análisis Funcional. Más concretamente, está íntimamente relacionada con la integral de *Lebesgue*, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo) y los operadores compactos y autoadjuntos (extensión, a dimensión infinita, de los endomorfismos de \mathbb{R}^n definidos por matrices simétricas). Ello permite, por una parte, comprender mejor los métodos de *Fourier*; por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad. Exponemos a continuación algunas de las ideas fundamentales.

4.1.- El espacio de funciones de cuadrado integrable. Base de Fourier.

El espacio $L^2(-\pi, \pi)$ (elegimos el intervalo $(-\pi, \pi)$ sólo por comodidad de notación), se define como el conjunto de funciones medibles $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, para las que la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ existe, en el sentido de Lebesgue, y es finita. Suponemos que dos funciones son iguales si lo son c.p.d. en $[-\pi, \pi]$. Este tipo de espacios fue introducido por *Riesz*, en 1.907, en el estudio de ecuaciones integrales de *Fredholm* de segunda especie, con núcleo no necesariamente continuo ([21]). Aquellos que tengan alguna dificultad con la teoría de integración de *Lebesgue*, deben tener en mente, en todo lo que sigue, los dos tipos de funciones siguientes, que constituyen subconjuntos típicos de funciones de $L^2(-\pi, \pi)$:

1.- Las funciones $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, que sean continuas.

2.- Las funciones $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, que sean continuas en $[-\pi, \pi]$, excepto posiblemente en un número finito de puntos y que son, además, acotadas.

$L^2(-\pi, \pi)$ es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función. Además, su dimensión es infinita; es decir, es posible encontrar subconjuntos de $L^2(-\pi, \pi)$ que sean linealmente independientes y conteniendo infinitos elementos (piénsese que las funciones polinomiales son elementos de $L^2(-\pi, \pi)$). Además, si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$, se puede definir el producto escalar de f y g como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx. \quad (4.1)$$

Esto transforma a $L^2(-\pi, \pi)$ en un espacio prehilbertiano ([3]). El teorema de *Riesz-Fischer* muestra que, con la norma derivada del anterior producto escalar, es decir,

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad \forall f \in L^2(-\pi, \pi), \quad (4.2)$$

el espacio $L^2(-\pi, \pi)$ es completo. En definitiva tenemos que $L^2(-\pi, \pi)$, con el producto escalar (4.1) es un ESPACIO DE HILBERT REAL DE DIMENSION INFINITA (se puede consultar [3] para los detalles).

Es ciertamente satisfactoria la estructura algebraico-topológica de $L^2(-\pi, \pi)$. Sin embargo, este espacio encierra muchos misterios. Por ejemplo, ¿Qué significado tiene la convergencia en el espacio $L^2(-\pi, \pi)$?, ¿Qué relación tiene con la convergencia puntual o uniforme? La respuesta se pone de manifiesto en el cuadro siguiente, que indica, que, al menos, se ha de ser precavido ([4]):

$$\begin{array}{ccc}
 & \{f_n\} \rightarrow f \text{ en } L^2(-\pi, \pi) & \\
 \swarrow \times & \nearrow & \\
 \{f_n\} \rightarrow f \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi] & & \uparrow \downarrow \\
 \nwarrow \times & \searrow & \\
 & \{f_n\} \rightarrow f \text{ c.p.d.} &
 \end{array}$$

(Después de leer detenidamente las relaciones anteriores, uno tiene la impresión de que $L^2(-\pi, \pi)$ es aún más misterioso de lo que se creía).

Otros espacios de Hilbert que conocemos, como el espacio euclídeo \mathbb{R}^n , deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Además, tal base puede elegirse siempre ortonormal. Esto facilita muchísimo su estudio, así como el de ciertas clases de funciones definidas entre estos espacios (por ejemplo, las funciones lineales u homomorfismos). La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿Tendrá $L^2(-\pi, \pi)$ una base? Esto origina, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿Cuál sería una definición “adecuada” de base en $L^2(-\pi, \pi)$? ¿Cuántas bases hay (si es que las hay) en $L^2(-\pi, \pi)$? ¿Qué ventajas tiene la utilización del concepto de base?; etc.

Para responder a las cuestiones anteriores, conviene que pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ etc. En \mathbb{R} , una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de \mathbb{R}); en \mathbb{R}^2 , una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos (ninguno de los cuales es nulo), y en general, en \mathbb{R}^n , una base está formada por un subconjunto ortogonal de n elementos, ninguno de los cuales es nulo (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de esta clase es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente $\{f_1, \dots, f_m\}$ de \mathbb{R}^n otro subconjunto ortonormal que engendra el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de \mathbb{R}^n es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente:

“Un subconjunto A de $L^2(-\pi, \pi)$ que sea ortogonal, se dirá que es una base de $L^2(-\pi, \pi)$ si todo elemento de $L^2(-\pi, \pi)$ es combinación lineal finita (al ser A ortogonal, A es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de A ”. Es interesante mostrar que no puede existir tal subconjunto A . En efecto, si existiese, podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal. Ahora bien, si $A \subset L^2(-\pi, \pi)$ es un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior, A debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real $L^2(-\pi, \pi)$ sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues A debe contener algún subconjunto numerable. Sea $B \subset A$, B numerable. Entonces $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos la sucesión $\{f_n\}$ definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^n}$$

Entonces, $\{f_n\} \rightarrow f$ donde $f \in L^2(-\pi, \pi)$; de hecho

$$f = \frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_n}{2^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

que prueba que f no puede ser una combinación lineal finita de elementos de A ([4]).

Creo que lo anterior motiva la siguiente definición:

DEFINICION: Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(-\pi, \pi)$. Diremos que tal subconjunto es una base, si cualquier elemento f de $L^2(-\pi, \pi)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \quad (4.3)$$

La anterior definición motiva de manera inmediata una serie de cuestiones: ¿Existen bases de $L^2(-\pi, \pi)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuántas bases hay en $L^2(-\pi, \pi)$?, ¿Cómo se pueden construir bases de $L^2(-\pi, \pi)$? ¿Qué utilidades tiene la utilización de la noción de base en $L^2(-\pi, \pi)$?, etc.

La primera pregunta que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en $L^2(-\pi, \pi)$. En este sentido, es muy corriente en Matemáticas al objeto de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en $L^2(-\pi, \pi)$), dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia (que lo será) sino para poder utilizarlas según nos exija la situación concreta que se nos plantee. En este sentido puede probarse

([3]) que si $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(-\pi, \pi)$, entonces son equivalentes:

1. $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ es una base de $L^2(-\pi, \pi)$.
2. Para cualquier f de $L^2(-\pi, \pi)$ se cumple la llamada igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \quad (4.4)$$

3. El único elemento de $L^2(-\pi, \pi)$ ortogonal al conjunto $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ es el elemento cero.
4. Para cualquier par de elementos f y g de $L^2(-\pi, \pi)$, se tiene

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \langle g, f_n \rangle. \quad (4.5)$$

Usando las anteriores caracterizaciones (exactamente, el apartado (c)), Lebesgue probó que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx), n \in \mathbf{N} \right\} \quad (4.6)$$

es una base de $L^2(-\pi, \pi)$ ([21], [30]).

Lo anterior significa, entre otras cosas que, para cualquier función $f \in L^2(-\pi, \pi)$, se tiene que

$$f = B_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)) + A_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)) \right) \quad (4.7)$$

donde

$$B_0 = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$B_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

$$A_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

Estas relaciones suelen escribirse de la forma:

$$f = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(n(\cdot)) + a_n \operatorname{sen}(n(\cdot))) \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad \forall n \in \mathbf{IN} \cup \{0\} \\ \text{y} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \quad \forall n \in \mathbf{IN}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, a la serie (4.8) con a_n y b_n definidos por (4.9) se le llama serie de Fourier de f respecto del sistema ortonormal (4.6). Observemos que, en realidad, el desarrollo (4.8) no es sino (3.2) (admitiendo convergencia puntual de la serie (4.8)), con lo que se tiene, casi un siglo después, una confirmación satisfactoria del desarrollo propuesto por *Fourier*.

Los otros desarrollos en serie, (1.7) y (3.1), propuestos por *Fourier*, pueden obtenerse muy fácilmente, realizando extensiones convenientes al intervalo $[-\pi, \pi]$, (impares o pares), de las funciones definidas en $[0, \pi]$. De esta manera se obtiene que el conjunto

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)), \, n \in \mathbf{IN} \right\} \quad (4.10)$$

es una base de $L^2(0, \pi)$, a la que corresponde el desarrollo de Fourier (1.7). Análogamente, el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n(\cdot)), \, n \in \mathbf{IN} \right\} \quad (4.11)$$

es una base de $L^2(0, \pi)$, a la que corresponde el desarrollo (3.1).

Los resultados referentes a convergencia puntual, uniforme, derivación e integración, etc., de las series de Fourier anteriores, así como diversas aplicaciones, pueden encontrarse en [4], [20], [22], [24].

No debemos terminar este apartado sin comparar algunas de las propiedades del espacio $L^2(-\pi, \pi)$ con las correspondientes del espacio euclídeo \mathbf{R}^n , pues entendemos que, en la Ciencia, es fundamental ir reconociendo las analogías y diferencias entre los nuevos objetos y lo que son familiares, para poder avanzar en el conocimiento de aquellos.

1. \mathbb{R}^n es un espacio vectorial real de dimensión n . Una base ortonormal, V , está formada por n vectores $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, ortonormales. En este caso, cualquier elemento $x \in \mathbb{R}^n$ se expresa de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i. \quad (4.12)$$

1'. $L^2(-\pi, \pi)$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita. Una base ortonormal está formada por una sucesión ortonormal $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que cualquier elemento $f \in L^2(-\pi, \pi)$ se expresa en la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n \quad (4.13)$$

2.- \mathbb{R}^n , con el producto escalar usual, es decir,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.14)$$

es un espacio de Hilbert real de dimensión n , donde las coordenadas de los vectores se entienden respecto de la base V .

2'. $L^2(-\pi, \pi)$, con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \langle g, f_n \rangle, \quad \forall f, g \in L^2(-\pi, \pi), \quad (4.15)$$

es un espacio de Hilbert real de dimensión infinita.

3.- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2. \quad (4.16)$$

3'. Para cualquier $f \in L^2(-\pi, \pi)$, se cumple

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \quad (4.17)$$

4.- El único elemento de \mathbb{R}^n , ortogonal a todos los elementos $v_i, 1 \leq i \leq n$, es el elemento cero.

4'.- El único elemento de $L^2(-\pi, \pi)$, ortogonal a todos los elementos $f_n, n \in \mathbb{N}$, es el elemento cero.

5.- \mathbb{R}^n es un espacio de Hilbert separable (es decir, contiene algún subconjunto denso y numerable) de dimensión finita.

5'.- $L^2(-\pi, \pi)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Como hemos mostrado, existen grandes analogías entre el espacio euclídeo \mathbb{R}^n y $L^2(-\pi, \pi)$. Ahora bien, también hay grandes diferencias, marcadas por el paso de la dimensión finita a infinita. La primera, que ya hemos visto, se refiere al concepto de base. Otra muy importante puede ser la siguiente, que nos indica que en los espacio de dimensión infinita, hemos de ser cuidadosos con nuestras conclusiones: El conocido teorema de *Bolzano-Weierstrass* afirma que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y contiene infinitos elementos, entonces el conjunto derivado de S , S' es no vacío ([2]). Pues bien, no es posible establecer una propiedad análoga en $L^2(-\pi, \pi)$. Es decir, en $L^2(-\pi, \pi)$ es posible que un subconjunto sea acotado, con infinitos elementos y que en cambio, S' sea vacío. También, en $L^2(-\pi, \pi)$, cualquier subconjunto compacto ha de tener interior vacío ([3], [15]).

4.2.- Bases generales de $L^2(a, b)$: los problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville.

Otros problemas distintos de los considerados anteriormente conducen a la posibilidad de desarrollos de Fourier distintos de los mencionados. Por ejemplo, si se estudian las vibraciones pequeñas de una cuerda, estando libres los extremos de la misma, tendremos, en lugar de (1.1), el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde u_x indica la derivada parcial respecto de la variable x .

Aplicando el método de separación de variables al problema anterior, se nos

plantea la posibilidad de obtener un desarrollo en serie como (3.1). Los sumandos de tal desarrollo en serie son precisamente las funciones propias del problema de contorno

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad X'(0) = X'(\pi) = 0, \quad (4.19)$$

Incluso, se pueden considerar condiciones de contorno de tipo mixto, tales como

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ \beta_1 u(\pi, t) + \beta_2 u_x(\pi, t) &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son números reales dados (véase [25] para la interpretación física de estas condiciones de contorno). Esto conduce a la posibilidad de desarrollos en serie que usan las funciones propias de problemas de contorno muy generales. Es evidente que sería estupendo disponer de un resultado general que nos afirmase que tales desarrollos son posibles. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo *Sturm-Liouville* proporciona, de manera bastante general, bases del espacio $L^2(-\pi, \pi)$, que pueden usarse en los problemas a estudiar. Pero, ¿qué son los problemas de contorno del tipo *Sturm-Liouville*? Como ya hemos tenido ocasión de ver en los problemas (1.1) y (2.1), cuando se aplica el método de separación de variables a numerosos problemas de tipo mixto para Ecuaciones en Derivadas Parciales ([27]), se originan dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y las condiciones de contorno de la ecuación primitiva, producen unas condiciones de contorno sobre una de las ecuaciones ordinarias aparecidas. Normalmente, estas ecuaciones dependen de un parámetro. Se trata entonces de estudiar para qué valores de dicho parámetro (valores propios), las ecuaciones consideradas tienen soluciones no triviales (funciones propias). De esta manera se encuentran soluciones sencillas del problema primitivo. El objetivo es entonces encontrar la solución general del problema dado a partir de dichas soluciones sencillas.

Las anteriores ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX, por *Sturm*, profesor de Mecánica en la Sorbona y por *Liouville*, profesor de Matemáticas en el College de Francia. Con la ayuda del lenguaje de hoy en día, sus resultados pueden resumirse de la forma siguiente: Consideremos un problema de contorno de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{dx(t)}{dt} \right] + (\lambda - q(t))x(t) &= 0, \quad t \in [a, b] \\ \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) &= 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) &= 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde suponemos las siguientes hipótesis:

- 1) $p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$; además $p(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$.
- 2) $q \in C([a, b], \mathbb{R})$.
- 3) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 son números reales dados tales que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.
- 4) λ es un parámetro real.

A las condiciones de contorno que aparecen en (4.20) se les llama condiciones de contorno separadas; de especial significación son las llamadas condiciones de contorno de *Dirichlet*

$$x(a) = x(b) = 0 \quad (4.21)$$

y las condiciones de contorno de *Neumann*

$$x'(a) = x'(b) = 0 \quad (4.22)$$

Es claro que los únicos valores interesantes del parámetro λ son aquellos para los cuales (4.20) tiene soluciones no triviales. En este caso diremos que λ es **valor propio** de (4.20) y cualquier solución de (4.20) se dice que es una **función propia** asociada al valor propio λ .

En el siguiente Teorema se muestra un resumen de las principales aportaciones de *Sturm* y *Liouville* ([9]).

TEOREMA 4.1 .

- a) *Cualquier valor propio de (4.20) es de multiplicidad 1.*
- b) *Cualquier par de funciones propias x e y , asociadas respectivamente a valores propios distintos λ y μ , son ortogonales, es decir,*

$$\int_a^b x(t)y(t) dt = 0$$

- c) *El conjunto de valores propios de (4.20) es infinito numerable. El sistema ortonormal de funciones propias asociado $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$, es una base de $L^2(a, b)$.*
- d) *Sea $g \in C^2[a, b]$ cualquier función satisfaciendo las condiciones de contorno dadas en (4.20). Entonces*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en $[a, b]$.

Si se eligen las condiciones de contorno (4.21), para $[a, b] = [0, \pi]$, se obtendría la base (4.10), que se corresponde con el desarrollo de Fourier (1.7), y si se eligen las condiciones de contorno (4.22), también para $[a, b] = [0, \pi]$, tendríamos la base (4.11) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (3.1).

De manera análoga se puede estudiar el problema de contorno correspondiente a condiciones de contorno periódicas

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b). \quad (4.23)$$

El resultado que se obtiene es análogo al expresado en el teorema anterior, excepto en lo que se refiere a la multiplicidad de los valores propios. Tomando $[a, b] = [-\pi, \pi]$ obtendríamos la base (4.6) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (3.2).

Eligiendo condiciones de contorno distintas de las mencionadas, obtendríamos diferentes bases del espacio $L^2(a, b)$ que no se corresponden con las aquí puestas de manifiesto: las bases (4.6), (4.10) y (4.11). También, las funciones de *Bessel*, *Legendre*, etc. (de gran significación en Física), pueden estudiarse como soluciones de ciertos problemas de contorno para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales con coeficientes singulares ([8]).

Una de las maneras más bonitas y sencillas de probar el teorema anterior es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar (4.20) en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales ([17]). De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a *Fredholm* y *Hilbert*, tuvo su origen a finales del siglo XIX ([21]) y principios del actual y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del Análisis Funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legitima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Vamos a resumir a continuación algunas de las ideas básicas (ver [3], [18]) para detalles.

4.3.- El papel del Análisis Funcional: operadores compactos y autoadjuntos en espacios de Hilbert.

Sea H cualquier espacio de Hilbert real separable y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal. T se dice compacto si $T(B)$ es relativamente compacto, donde B es la bola cerrada unidad de H . Puede probarse que T es compacto si y solamente

si para cada sucesión acotada $\{f_n\}$ de H , la sucesión $\{T(f_n)\}$ contiene alguna sucesión parcial convergente.

Cualquier operador compacto es continuo, pero el recíproco no es necesariamente cierto (considérese la aplicación identidad en H). El recíproco es obviamente cierto si la dimensión de H es finita.

Por otra parte, T se dice autoadjunto si $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$, $\forall u, v \in H$, donde $\langle \cdot \rangle$ es el producto escalar definido en H .

El conjunto resolvente de T , $\rho(T)$, se define de la forma

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ es biyectivo de } H \text{ en } H\},$$

donde I indica la aplicación identidad en H .

Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $(T - \lambda I)^{-1} : H \rightarrow H$ es lineal y continuo. El espectro de T , $\sigma(T)$ se define como el conjunto complementario de $\rho(T)$, es decir, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Por último, diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de T , y se escribe $\lambda \in VP(T)$ si $\ker(T - \lambda I)$ no es trivial, donde \ker indica el núcleo del operador lineal correspondiente. Es claro que $VP(T) \subset \sigma(T)$, siendo la inclusión estricta, en general (si H tiene dimensión finita, entonces $VP(T) = \sigma(T)$).

El teorema al que hacíamos referencia más arriba es el siguiente ([3]). Generaliza, a dimensión infinita, el hecho de que cualquier matriz cuadrada real y simétrica es diagonalizable:

TEOREMA 4.2. *Sea H un espacio de Hilbert separable real y $T : H \rightarrow H$ un operador lineal, compacto y autoadjunto. Entonces H admite una base hilbertiana formada por vectores propios de T .*

Más precisamente, si $H_0 = \ker(T)$, y $H_n = \ker(T - \lambda_n I)$, donde λ_n es la sucesión (que puede ser finita) de valores propios distintos de T , excluido el cero, entonces:

- a) *dimensión H_n es finita, $\forall n \geq 1$.*
- b) *Los subespacios H_n , $n \geq 0$, son ortogonales dos a dos.*
- c) *El espacio vectorial generado por los H_n , $n \geq 0$, es denso en H .*
- d) *Para cualquier $u \in H$, se tiene*

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \tag{4.24}$$

donde $u_n = P_{H_n} u$, siendo P_{H_n} la proyección de u sobre H_n . Además,

$$\|u\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2. \tag{4.25}$$

Por último, $T(u) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n u_n$ (T es diagonalizable).

Observemos la analogía entre (4.24), (4.12) y (4.13), por una parte, y (4.25), (4.16) y (4.17) por otra.

El teorema anterior es de una gran utilidad y justifica la aplicación del método de separación de variables cuando estamos tratando con problemas de contorno como (1.1) o (2.1), pero donde la variable x puede ser multidimensional. Ello origina las series de Fourier en varias variables. Por ejemplo, si estamos tratando el problema de la conducción del calor en un cuerpo (abierto y acotado) Ω de \mathbb{R}^3 , en lugar de en una varilla unidimensional como en (2.1), tendríamos que considerar el problema

$$\begin{aligned}\Delta_x u(x, t) &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0, \quad \forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega},\end{aligned}\tag{4.26}$$

siendo Δ_x el operador Laplaciano con respecto a $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; es decir,

$$\Delta_x u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Por su parte, $\partial\Omega$ indica la frontera del conjunto Ω .

La aplicación del método de separación de variables al problema anterior, origina, en lugar de (2.2), que es un problema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el problema

$$\Delta_x X(x) + \mu X(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad X(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.\tag{4.27}$$

Ahora puede aplicarse el teorema anterior ([3]) para demostrar que el conjunto de valores propios de (4.27) es infinito numerable y que el conjunto de funciones propias asociadas, convenientemente ortonormalizadas, $\{X_n(x), n \in \mathbb{N}\}$, forma una base del espacio $L^2(\Omega)$. Esto justifica el hecho de que cualquier condición inicial f se exprese como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x),\tag{4.28}$$

para coeficientes convenientes a_n . Así, la solución de (4.26) es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x),\tag{4.29}$$

donde las funciones P_n satisfacen una ecuación análoga a (2.3).

Ideas parecidas pueden aplicarse al estudio del problema de la cuerda vibrante (1.1) en dimensiones superiores, así como a otros problemas de naturaleza diferente ([3], [8], [29]).

5

Comentario final

Como hemos tenido ocasión de ver, la teoría de series de Fourier es una de las creaciones más grandes de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. Como he comentado con anterioridad, enumerarlos sería muy extenso. No obstante, el lector interesado no debería dejar pasar la oportunidad de consultar las siguientes referencias: ([4], [8], [10], [12], [13], [20], [21], [22], [25], [29]), para comprender la magnitud del tema. Además, si se es docente, la consulta de este tipo de libros ayuda mucho a motivar los conceptos abstractos en clase. Desde el punto de vista de nuestra experiencia personal, hemos de decir que hemos disfrutado muchísimo con esta mini excursión por las series de Fourier. Seguro que es también apasionante interesarse por otro método sugerido también por Fourier: la teoría de transformadas. Posiblemente ello será objeto de un trabajo futuro.

Hemos de poner también de manifiesto una reflexión, que nos ha surgido en el curso de la elaboración de este artículo divulgativo: es nuestra opinión que en la actualidad, la enseñanza suele estar demasiado especializada. En concreto, es una pena que los actuales estudiantes de Matemáticas no tengan más asignaturas de Física (y quizás de otras Ciencias) en la licenciatura. Ello proporcionaría una idea más global y exacta de lo que ha sido el pensamiento científico y comprenderíamos de verdad que es el planteamiento y resolución de problemas concretos, lo que proporciona el camino de la generalidad. En palabras de *R. Courant*, uno de los grandes matemáticos de este siglo: “Es la partida y la vuelta a lo concreto lo que da valor a la generalidad”.

En la actualidad, la teoría de Series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como Matemáticas, Física, Biología, Ingeniería, Economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de

las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en Medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc. (consúltese [14], [23], [26]).

Especialmente en Física son hoy más válidas que nunca las palabras de **Lord Kelvin**: “**Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del Análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la Física actual, por recónditas que sean**”.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] APARICIO, C. Y PÉREZ, J., *Integral de Lebesgue*, Copistería la Gioconda (Granada), 1.991.
- [2] APOSTOL, T.M., *Análisis Matemático*, Reverté, 1.960.
- [3] BREZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos, 1.984.
- [4] CAÑADA, A., *Series y Transformada de Fourier y aplicaciones, vol. I*, Secretariado de publicaciones de la Universidad de Granada, 1.994.
- [5] CARLESON, , *Convergence and summability of Fourier series*, Proc. Int. Cong. Math., Moscow, 1.966; Izdat. Mir, 1.968, 83-88.
- [6] CARLESON, L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., 116, 1.966, 135-157.
- [7] CODDINGTON, E.A., *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall, 1.961.
- [8] COURANT, R. D. Y HILBERT, D., *Methods of Mathematical Physics, Vol I y II*, Interscience, 1.962.
- [9] CODDINGTON, E.A. Y LEVINSON, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, 1.955.
- [10] DIEUDONNÉ, J., *History of Functional Analysis*, North-Holland, 1.981.

- [11] FATOU, P., *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Math., 30, 1.906, 335-400.
- [12] GONZÁLEZ-VELASCO, E.A., *Connections in Mathematical Analysis: the case of Fourier series*, Amer. Math. Monthly, 1.992, 427-441.
- [13] GONZÁLEZ-VELASCO, E.A., *Fourier Analysis and Boundary value problems*, Academic Press, 1.995.
- [14] GRANDES MATEMÁTICOS, *Investigación y Ciencia. Temas 1*, Prensa científica, S.A., 1.995.
- [15] HALMOS, P.R., *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, 1.967.
- [16] HOBSON, E.W., *The theory of functions of a real variable*, Dover(reprint), 1.957.
- [17] HOCHSTADT, H., *Integral equations*, John Wiley and Sons, 1.973.
- [18] HUTSON, V. Y PYM, J.S., *Applications of functional analysis and operator theory*, Academic Press Inc., 1.980.
- [19] KAHANE, J.P. Y KATZNELSON, Y., *Sur les ensembles de divergence des séries trigonometriques*, Studia Math., 26, 1.966, 305-306.
- [20] KATZNELSON, Y., *An introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1.968.
- [21] KLINE, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1.972. Versión española en Alianza Editorial, S.A., 1.992.
- [22] KORNER, T.W., *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1.988.
- [23] ORDEN Y CAOS, *Libros de Investigación y Ciencia*, Prensa Científica, S.A., 1.990.
- [24] STROMBERG, K.R., *An Introduction to classical real analysis*, Wadsworth, 1.981.
- [25] TIJONOV, A.N. Y SAMARSKI, A.A., *Ecuaciones de la Física Matemática*, Mir, 1.980.
- [26] WALKER, JAMES S., *Fourier Analysis and Wavelet analysis*, Notices of the AMS, 44, 1.997, 658-670.

- [27] WEINBERGER, H., *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, Reverté, 1.970.
- [28] ZEIDLER, E., *Applied Functional Analysis: main principles and their applications*, Springer-Verlag, 1.995.
- [29] ZEIDLER, E., *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 1.995.
- [30] ZYGMUND, A., *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1.968.